

Janaína Rosa Madruga

**Estudo da Viabilidade de um Modelo Cosmológico
Isotrópico e Não-homogêneo**

UNIFEI
Itajubá
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA - IFQ

**Estudo da Viabilidade de um Modelo Cosmológico
Isotrópico e Não-homogêneo**

Dissertação submetida ao Programa de Pós Graduação em Física como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.
Orientador: Prof. Dr. Renato Klippert

UNIFEI
Itajubá
2017

AGRADECIMENTOS:

Agradeço a todos os meus familiares e amigos que sempre estiveram comigo me apoiando e incentivando em todos os momentos. Agradeço especialmente a minha melhor amiga Graciana, que esteve comigo me dando força desde o início dessa caminhada.

Agradeço as repúblicas Grau Master e Santo Mé, por serem a minha casa, a família que construí aqui. Obrigada por todos os momentos sensacionais e de muita diversão que vocês me proporcionaram.

Agradeço ao Grupo de Astronomia Jacy-Tatá-Guassú que me proporcionou diversas experiências novas e muito construtivas para minha formação.

Agradeço a galera do Furró de Segunda, participar desse grupo maravilhoso fez toda a diferença na minha vida.

Agradeço a todos os meus colegas de mestrado, principalmente aqueles que se tornaram meus amigos, muito obrigada a vocês, Davi, Leonardo e Mariana. Obrigada pelo companheirismo, atenção, cooperação nos momentos mais difíceis e claro, obrigada pelas risadas e companhia nos incontáveis cafés.

Agradeço a todos os professores que compartilharam seus conhecimentos comigo. Agradeço especialmente aqueles que foram meus conselheiros e me apoiaram em todos os momentos, Prof. Fabricio Barone, Prof. Gabriel Flores, Prof. Gabriel Hickel e Prof. Alan Pavan, vocês tem minha total admiração.

Agradeço ao meu orientador Renato Klippert, por toda a dedicação, paciência, amizade, carinho, compreensão e confiança.

Obrigada a todos por tudo!

Eu não temerei. O medo é o assassino da mente. O medo é a pequena morte que trás a total obliteração. Eu enfrentarei meu medo, permitirei que ele passe sobre mim e através de mim. E quando houver passado, voltarei meu olhar interior para ver a sua trilha. Por onde o medo passou nada haverá. Apenas eu restarei.

Duna - Frank Herbert.

RESUMO

A solução das equações de Einstein propostas por Friedmann, e posteriormente aperfeiçoadas por Lemaître, Robertson e Walker, (modelo FLRW) é o modelo utilizado atualmente para descrever nosso universo. E este sugere que, em larga escala, o universo seja homeogêneo e isotrópico, descrito por uma densidade de energia ρ e uma pressão isotrópica p . Embora o modelo FLRW seja o mais aceito para descrever o nosso universo, ainda existem algumas questões em aberto. Deste modo, faz-se necessária a investigação de outros modelos que descrevam o universo de maneira menos simplificada, como o modelo que estudamos neste trabalho. O modelo que estudamos aqui, é caracterizado pelas mesmas variáveis geométricas do modelo padrão FLRW, porém apresenta uma pressão anisotrópica que traz inhomogeneidade ao modelo. Neste trabalho estudamos o comportamento do fator de escala para este modelo e fizemos uso da termodinâmica elaborada por W. Israel e J. M. Stewart a fim de encontrar uma termodinâmica que o descreva.

Palavras Chave: Modelos Cosmológicos, Modelos Cosmológicos Alternativos, Cosmologia, Relatividade Geral

ABSTRACT

The solution of Einstein's equations proposed by Friedmann, and later improved by Lemaître, Robertson and Walker, (model FLRW) is the model currently used to describe our universe. And this suggests that, on large scales, the universe is homeogenous and isotropic, and can be described by a energy density ρ and an isotropic pressure p . Although the FLRW model is the most accepted one to describe our universe there are still some open questions, so it is necessary to investigate other models that describe the universe in a less simplified way, like the model that we study in this work. The BSS model is characterized by the same geometric variables as the standard FLRW model, but has an anisotropic pressure. In this work we study the behavior of the scale factor for this model and making use of the thermodynamics elaborated by W. Israel and J. M. Stewart in order to find a thermodynamics that describes it.

Keywords: Cosmological Models, Alternative Cosmological Models, Cosmology, General Relativity

Conteúdo

1	A Relatividade Geral e o Modelo Cosmológico Padrão	7
2	Termodinâmica de um fluido	11
3	O Modelo BSS	15
4	Sobre a Viabilidade do Modelo BSS	19
4.1	Comportamento de $a(t)$ no modelo BSS	19
4.2	A pressão anisotrópica	20
4.3	Relação entre r e χ no modelo BSS	25
5	Considerações Finais	27

Introdução

Desde os primórdios da humanidade, algumas das perguntas mais comuns entre as diversas civilizações que existem ou já existiram é: Qual a origem do universo? Como podemos descrevê-lo? Por milhares de anos essas questões causaram extrema inquietude aos pensadores, fazendo com que surgissem diversas explicações que inicialmente eram rodeadas de superstição e misticismo. Cada tribo e religião tinha sua própria visão do que era o cosmos e como ele se comportava, como por exemplo, um modelo cosmogônico hindu, que apresenta o universo composto apenas pelo planeta Terra, apoiado nas costas de elefantes que estão em cima de uma tartaruga gigante [1], como mostrado na figura abaixo.

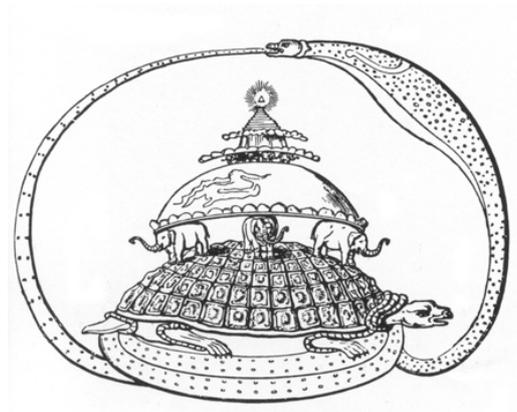


Figura 1: Modelo cosmogônico Hindu

Ainda que hoje tenhamos um melhor entendimento das leis que regem a natureza, devido aos enormes progressos científicos, ainda estamos muito longe de descrever e compreender o universo de maneira satisfatória. Atualmente utilizamos a cosmologia que é uma área que utiliza conhecimentos de praticamente todas as áreas da física e da astrofísica, bem como da química e da matemática. A palavra cosmologia tem sua etimologia do grego *kosmos*, que significa harmonia ou ordem, e *logos*, que significa estudo ou busca. A cosmologia é uma ciência que estuda o cosmos na sua totalidade, sua origem e estrutura [2]. Embora os estudos sobre o cosmos sejam realizados a muito tempo, foi só na metade do séc. XX, a partir dos estudos de Albert Einstein sobre a Relatividade Geral, que o modelo cosmológico pode se desenvolver da maneira que conhecemos hoje. As equações de campo de Einstein descrevem a junção da geometria e da matéria existente no universo, onde estas não são independentes, mas sim conectadas através destas equações que determinam processos gravitacionais.

As equações de campo de Einstein possuem diversas soluções exatas [3] e atualmente utilizamos uma delas para descrever o universo em que vivemos que é a solução proposta por Friedmann, e posteriormente aperfeiçoada por Lemaître, Robertson e Walker, o modelo FLRW. Este modelo sugere que, em larga escala, o universo seja homogêneo, ou seja, não existe uma

posição privilegiada no universo, e isotrópico, o que significa que as características do universo são as mesmas em todas as direções. Deste modo podemos considerar o universo permeado por um fluido perfeito descrito por uma densidade de energia ρ , que é a relação da quantidade de energia do sistema com a sua massa e volume, e uma pressão isotrópica p , que é a relação de uma determinada força com a sua área de distribuição, neste caso, o fato desta pressão ser isotrópica significa que esta é a mesma em qualquer direção escolhida [4].

Conforme o modelo FLRW, o universo surgiu a aproximadamente 13,5 bilhões de anos, seu estado inicial era quente e denso e com o passar do tempo expandiu-se, fazendo com que sua temperatura e densidade diminuísse. Essa queda de temperatura possibilitou que prótons e elétrons pudessem originar os primeiros átomos de hidrogênio. Devido a instabilidades gravitacionais, as estruturas formadas por hidrogênio e os demais elementos que surgiram evoluíram para formar as estruturas que observamos atualmente, como por exemplo, as galáxias.

Embora o modelo FLRW seja o mais aceito e utilizado para descrever o universo, ainda existem algumas questões em aberto, como por exemplo, o problema do horizonte e da curvatura, monopólos magnéticos e o problema da isotropia e homogeneidade. No caso do problema de isotropia e homogeneidade, o questionamento que aparece é: Como um universo que é homogêneo e isotrópico pôde gerar as estruturas que formaram estrelas, galáxias e todos os demais elementos que constituem o universo em que vivemos?

Visto que a utilização do modelo FLRW faz com que diversas questões importantes fiquem sem uma resposta satisfatória, faz-se necessária a busca por outros modelos, menos simplificados que o FLRW, que possam descrever o universo de maneira mais completa, a fim de responder alguns dos questionamentos que ainda encontram-se sem resposta pelo ponto de vista do modelo padrão de cosmologia. Portanto, neste trabalho, temos como objetivo estudar a viabilidade de um modelo cosmológico alternativo proposto por Bittencourt, Salim e Santos, o modelo BSS [6].

O modelo BSS é caracterizado pelas mesmas variáveis geométricas do modelo padrão FLRW, no entanto, este possui uma alteração no seu tensor energia momento, uma componente de pressão anisotrópica que traz alguns efeitos interessantes ao modelo. Nos capítulos seguintes apresentamos uma revisão da relatividade geral e da termodinâmica, apresentamos o modelo BSS com mais detalhes e por fim estudamos o comportamento do fator de escala neste modelo, as relações entre o raio e o comprimento, também procuramos uma termodinâmica que o descreva, para isso vamos fazer uso da termodinâmica elaborada por W. Israel e J. Stewart e investigar se esta pode descrever o modelo BSS.

Capítulo 1

A Relatividade Geral e o Modelo Cosmológico Padrão

A Relatividade Geral (RG) é uma teoria que generaliza a Relatividade Especial (RE), ambas propostas por Einstein. A RE está embasada em dois postulados, o primeiro é o princípio de Galileu e este diz que as leis físicas são covariantes para quaisquer observadores inerciais, ou seja, as leis da natureza, assim como os resultados experimentais realizados são os mesmos para observadores que se movimentam sem que exista uma força agindo sobre eles. O segundo se refere a universalidade da velocidade da luz, isto é, a velocidade da luz que é medida por um observador é independente da velocidade que a fonte se encontra. Embora a RE tenha originado uma nova maneira de ver o mundo, ela ainda não era capaz de descrever fenômenos medidos por observadores que estejam sujeitos a forças, ou seja, observadores não inerciais [7]. Visto que movimentos inerciais são situações simplificadas, a elaboração de uma teoria mais completa englobando movimentos não inerciais se fez necessária. Para melhor ilustrar e justificar a necessidade da RG, pensemos no campo gravitacional. Este campo é capaz de se estender até o infinito e não há nenhuma maneira de evitar que este exerça força sobre todos os corpos, sendo assim, se todos os corpos estão sujeitos a força exercida pelo campo gravitacional, não existem movimentos que possam ser considerados inerciais.

A RG propõe que a geometria do espaço-tempo é determinada por um conjunto de equações para o campo gravitacional, as equações de campo de Einstein, e estas relacionam a curvatura do espaço-tempo com a quantidade de energia ali presente. As equações de campo são dadas por equações diferenciais parciais bastante complexas, possuindo apenas soluções particulares. Esta equação pode ser escrita de maneira bastante elegante como,

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

sendo $G_{\mu\nu}$ o tensor de Einstein, κ a constante gravitacional e $T_{\mu\nu}$ o tensor momento-energia [5]

O tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ carrega a informação com relação a geometria do espaço-tempo e é composto pelo tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, pelo escalar de curvatura R e pela métrica $g_{\mu\nu}$. O tensor de Ricci e o escalar de curvatura são encontrados a partir das contrações dos índices do tensor de curvatura de Riemann que nos diz o quão diferente de um hiper-plano é uma hiper-superfície, ou seja, o tensor de Riemann nos dá a curvatura do espaço-tempo. Deste modo, tanto o tensor de Ricci quanto o escalar de curvatura nos trazem parte da informação dada pelo tensor de Riemann, visto que ambos são contrações do tensor de curvatura. A métrica $g_{\mu\nu}$ traz as características do espaço-tempo, e também está presente no tensor de Riemann que é definido por

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu}, \quad (1.2)$$

onde $\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}$ é conhecido como símbolo de Christoffel, é neste ente que a métrica $g_{\mu\nu}$ aparece

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_\nu g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\beta\nu}) \quad (1.3)$$

As quantidades que compõem o tensor de Einstein, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura são dadas pelas contrações do tensor de Riemann, ou seja,

$$R_{\beta\nu} = R^\alpha{}_{\beta\alpha\nu}$$

$$R = g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} \quad (1.4)$$

O tensor de curvatura de Riemann apresenta algumas simetrias em relação a seus índices

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (1.5)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \quad (1.6)$$

O tensor de Riemann também pode ser escrito em termos da métrica, do tensor de Ricci, do escalar de curvatura e do tensor de Weyl

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = C_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu} R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu} R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu} R_{\alpha\nu}) - \frac{1}{6} R (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) \quad (1.7)$$

O tensor de Weyl, dado por $C_{\alpha\beta\mu\nu}$, possui as mesmas propriedades de simetria do tensor de Riemann e pode ser decomposto em duas partes, a elétrica $E_{\alpha\beta}$ e a sua parte magnética $H_{\alpha\beta}$, que são dadas por

$$E_{\alpha\beta} = C_{\alpha\gamma\beta\sigma} V^\gamma V^\sigma \quad (1.8)$$

$$H_{\alpha\beta} = \bar{C}_{\alpha\gamma\beta\sigma} V^\sigma V^\gamma \quad (1.9)$$

em que $\bar{C}_{\alpha\gamma\beta\sigma}$ é o tensor dual construído utilizando o tensor de Levi-Civita, V^γ é o quadrivetor velocidade.

Ainda se tratando do tensor de Riemann, vamos utilizar suas simetrias e as chamadas identidades de Bianchi:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \quad (1.10)$$

onde (;) representa a deriva covariante.

Utilizando as contrações do tensor de Riemann e as identidades de Bianchi podemos chegar ao tensor de Einstein, para isso realizamos contrações com a métrica $g^{\alpha\mu}$ [17]

$$g^{\alpha\mu} [R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}] = 0 \quad (1.11)$$

$$R_{\beta\nu;\lambda} + (-R_{\beta\lambda;\nu}) + R^\mu{}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0$$

contraíndo novamente com a métrica $g^{\beta\nu}$

$$g^{\beta\nu} [R_{\beta\nu;\lambda} + (-R_{\beta\lambda;\nu}) + R^\mu{}_{\beta\nu\lambda;\mu}] = 0$$

$$R_{;\lambda} - R^\mu{}_{\lambda;\mu} - R^\mu{}_{\lambda;\mu} = 0$$

realizando a troca de ν por μ

$$(2R^\mu{}_{\lambda} - \delta^\mu{}_{\lambda}R)_{;\mu} = 0$$

E assim definimos o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{Rg_{\mu\nu}}{2} \quad (1.12)$$

A parte direita da equação de campo nos dá as informações a respeito da fonte de curvatura do espaço-tempo, em que $\kappa = 8\pi G/c^2$ é uma constante e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento que representa a quantidade de energia contida no universo. Este tensor é composto pela densidade de momento e energia, além da pressão isotrópica e dos termos de anisotropia [5]. De forma geral, o tensor energia-momento pode ser escrito da seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu + V_{(\mu} q_{\nu)} + p h_{\mu\nu} + \pi h_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

em que ρ é a densidade total de energia, V_μ é a velocidade do fluxo de partículas, q_μ é fluxo de calor, p a pressão, $\pi_{\mu\nu}$ é a pressão anisotrópica, π a pressão de bulk, que descreve a viscosidade gerada pela interação da radiação com a matéria e $h_{\mu\nu}$ o projetor dado por $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu$. A densidade de energia e a pressão podem ser escritas de forma geral como

$$\rho = T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu, \quad (1.14)$$

$$p = -\frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \quad (1.15)$$

$$q_\lambda = T_{\alpha\beta} V^\beta h^\alpha{}_\lambda \quad (1.16)$$

$$\pi_{\mu\nu} = T_{\alpha\beta} h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu + p h_{\mu\nu} \quad (1.17)$$

As equações de campo de Einstein afirmam que a matéria causa curvatura no espaço-tempo. A curvatura espaço-temporal, por sua vez, determina como a matéria se move, e assim se dão os efeitos gravitacionais. A equação de movimento em questão está incorporada na lei de conservação satisfeita pelo tensor energia-momento, sendo assim, temos que a divergência do tensor energia-momento deve ser nula, pois a divergência do tensor de Einstein o é identicamente.

Existem diversas soluções exatas para as equações de campo de Einstein, um exemplo, é a solução de Schwarzschild que é utilizada para descrever o campo gravitacional do lado de fora de um objeto compacto esféricamente simétrico e estático. Neste trabalho, vamos utilizar a solução propostas por Friedmann, e posteriormente aperfeiçoada por Lemaître, Robertson e Walker, o modelo FLRW que é a solução mais aceita e utilizada atualmente para descrever o universo em que vivemos. Este modelo sugere que, em larga escala, o universo seja espacialmente homeogêneo, ou seja, não existe uma posição privilegiada no universo, e isotrópico, isto é, as características do universo não privilegiam nenhuma das direções. Deste modo podemos considerar o universo permeado por um fluido perfeito descrito por uma densidade de energia ρ e uma pressão isotrópica p , ambas quantidades dependem apenas da coordenada temporal t devido a existência das simetrias de homogeneidade e isotropia. Sendo assim, o tensor energia-momento descrito pela equação (1.13) se reduz a

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)V_\mu V_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (1.18)$$

No modelo FRLW, o espaço-tempo é descrito por um elemento de linha dado por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + r^2(\chi)d\theta^2 + r^2(\chi)\text{sen}^2\theta d\phi^2] \quad (1.19)$$

em que $a(t)$ é o fator de escala, que mede as variações nas escalas de comprimento produzidas pela expansão do universo, $r(\chi)$ é uma função que depende da coordenada espacial χ , enquanto que θ e ϕ são as coordenadas angulares. Podemos reescrever o elemento de linha acima em função da coordenada radial r , como segue

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2 \right] \quad (1.20)$$

em que ϵ pode assumir os valores -1 , 0 ou 1 e esta quantidade nos traz as informações a respeito da curvatura escalar espacial do universo, representando respectivamente um universo aberto, plano e fechado, como mostra a figura.

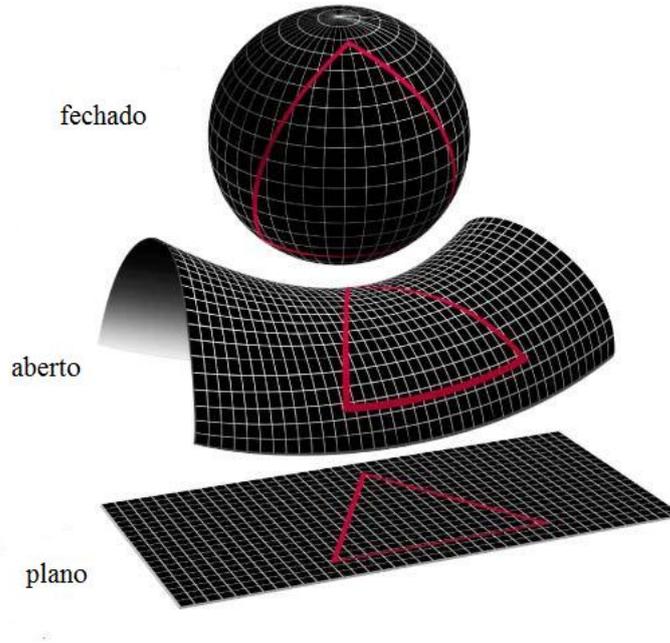


Figura 1.1: Formatos para o universo no modelo FLRW. As figuras representam seções bidimensionais do espaço-tempo, sendo a coordenada temporal e uma das coordenadas espaciais constantes.

O elemento de linha nos dá as informações a respeito do universo do ponto de vista geométrico, enquanto o tensor energia-momento aparece como a quantidade de matéria e energia contida neste [4].

Capítulo 2

Termodinâmica de um fluido

A termodinâmica é uma ciência experimental baseada em alguns princípios que são generalizações tomadas através das experiências, referindo-se apenas as propriedades macroscópicas da matéria. Partindo desses princípios é possível encontrar relações entre certas quantidades, principalmente quando estas são afetadas pela temperatura. Deste modo é possível encontrar todas as propriedades de um sistema. Quando nos referimos a sistema, estamos falando de uma certa porção de espaço que esteja dentro de uma superfície fechada, podendo englobar um sólido, um líquido, um gás, etc. Este sistema pode ser isolado, caso não haja troca de energia com o entorno, ou aberto, quando há troca de energia entre o sistema e o ambiente externo.

O estado de um sistema é determinado por quantidades que são medidas experimentalmente, são elas as variáveis de estado, algumas destas são a pressão, o volume, a polarização de um dielétrico, a área superficial de um líquido. Como dito anteriormente, a termodinâmica pode descrever qualquer tipo de sistema, no caso deste trabalho, em que tratamos de um modelo cosmológico que considera o universo permeado por um fluido, usamos a termodinâmica para caracterizar o seu comportamento [9]. Neste capítulo vamos tratar de um fluido que está sujeito a um campo gravitacional, iniciando por um fluido ideal e posteriormente vamos estendê-la para uma teoria mais geral [10].

Podemos caracterizar o estado de um fluido pelas seguintes variáveis: S^μ que é o fluxo de entropia, N^μ o vetor de fluxo de partículas e $T^{\mu\nu}$ que é o tensor de energia-momento do fluido. A teoria fenomenológica postula que para um sistema fechado essas quantidades satisfazem as leis de conservação, assim como a variação de entropia positiva

$$N_{;\mu}^\mu = 0, \quad T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0, \quad S_{;\mu}^\mu \geq 0$$

O estado de equilíbrio é caracterizado por quatro condições e as quantidades que descrevem o estado de equilíbrio serão denotadas por N_0^μ , S_0^μ e $T_0^{\mu\nu}$. A primeira condição é que a variação de entropia é identicamente nula, ou seja, não há aumento de entropia no sistema. A segunda é que na ausência de um campo externo, que não seja o gravitacional, as quantidades no estado de equilíbrio possuem isotropia espacial, deste modo

$$N_0^\mu = nu^\mu, \quad T_0^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu - ph^{\mu\nu}, \quad S_0^\mu = Su^\mu$$

onde $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$ é a projeção espacial do tensor ortogonal ao vetor velocidade do fluido u^μ que satisfaz $u^\mu u_\mu = 1$. A terceira condição é que cada estado de equilíbrio é descrito apenas por n , ρ e u^μ e forma um espaço em cinco dimensões Σ_0 e sua equação de estado que determina a entropia é dada por

$$S = S(\rho, n). \quad (2.1)$$

Essa quantidade também pode ser escrita em termos da pressão e da temperatura

$$S = \frac{\rho + p}{T} - \alpha n, \quad (2.2)$$

em que α é o potencial térmico. Diferenciando a equação (2.2) obtemos

$$dS = T^{-1}d\rho - \alpha dn \quad (2.3)$$

e conseqüentemente usando (2.2) e (2.3) encontramos a identidade

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{T} - \alpha dn &= \frac{dp + da\rho}{T} + (p + \rho)dT^{-1} - \alpha dn - nd\alpha \\ d(p/T) &= nd\alpha - \rho d(T^{-1}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

e a relação de Gibbs

$$\begin{aligned} Td(S/n) &= \frac{T}{n}dS + STdn^{-1} \\ Td(S/n) &= \frac{d\rho}{n} + (p + \rho)dn^{-1} \\ Td(S/n) &= d(\rho/n) + pd(1/n). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por fim, o quarto e último postulado nos diz que o fluxo de equilíbrio u^μ não possui expansão ou cisalhamento e seu potencial térmico é constante, essas são condições para que não haja viscosidade e nem fluxo de calor

$$h_\lambda^\alpha h_\mu^\beta u_{(\alpha|\beta)} = 0, \quad \partial_\mu \alpha = 0. \quad (2.6)$$

Reexpressando as relações termodinâmicas dadas em (2.2) e (2.4) na forma covariante, definimos

$$\beta_\mu = T^{-1}u_\mu \quad (2.7)$$

e calculando a parte simétrica da derivada de (2.7)

$$\beta_{(\lambda;\mu)} = 0 \quad (2.8)$$

deste modo o campo gravitacional para um fluido em equilíbrio térmico é estacionário.

O espaço Σ_0 onde o fluido se encontra em equilíbrio é parametrizado por α e β_μ . Para um pequeno deslocamento neste espaço usando (2.4) juntamente com as equação (2.7)

$$d(p\beta^\mu) = N_0^\mu d\alpha - T_0^{\lambda\mu} d\beta_\lambda \quad (2.9)$$

$$S_0^\mu = p\beta^\mu - \alpha N_0^\mu + \beta_\lambda T_0^{\lambda\mu}. \quad (2.10)$$

Essas equações implicam em

$$dS_0^\mu = -\alpha dN_0^\mu + \beta_\lambda dT_0^{\lambda\mu} \quad (2.11)$$

Para o não equilíbrio, vamos considerar que a equação (2.11) ainda é válida, consideramos um pequeno deslocamento tangente ao espaço Σ_0 e utilizando (2.10) encontramos a equação chave para a entropia que é

$$S^\mu = p(\alpha, T)\beta^\mu - \alpha N^\mu + \beta_\lambda T^{\lambda\mu} - Q^\mu \quad (2.12)$$

onde α e β_λ são parâmetros próximos ao estado de equilíbrio, $p(\alpha, T)$ é a pressão e Q^μ representa uma quantidade de segunda ordem que depende de N^μ e $T^{\lambda\mu}$. Em primeira aproximação temos que

$$\alpha \rightarrow \alpha' = \alpha + \delta\alpha, \quad \beta_\lambda \rightarrow \beta'_\lambda = \beta_\lambda + \delta\beta_\lambda, \quad (|\delta\alpha|, |\delta\beta_\lambda|) \leq O_1 \quad (2.13)$$

e podemos escrever a entropia como

$$S^\mu = p(\alpha', T)\beta'^{\mu} - \alpha' N^\mu - \beta'_\lambda T^{\lambda\mu} - Q'^{\mu} \quad (2.14)$$

e

$$Q^\mu - Q'^{\mu} = (N^\mu - N_0^\mu)\delta\alpha + (T^{\lambda\mu} - T_0^{\lambda\mu})\delta\beta_\lambda \quad (2.15)$$

Calculando a divergência da entropia, usando as leis de conservação e as identidades termodinâmicas encontramos

$$S^\mu|_\mu = -(N^\mu - N_0^\mu)(\partial_\mu\alpha) + (T^{\nu\mu} - T_0^{\nu\mu})\beta_{\langle\nu|\mu\rangle} - Q^\mu|_\mu \quad (2.16)$$

e considerando

$$N^\mu = nu^\mu, \quad u_\mu n^\mu = 0 \quad (2.17)$$

$$T^{\lambda\mu} = \rho u^\lambda u^\mu + ph^{\lambda\mu} + 2h^{(\lambda}u^{\mu)} + \tau^{\lambda\mu}$$

$$u_\lambda h^\lambda = u_\lambda \tau^{\lambda\mu} = 0, \quad \tau^{\lambda\mu} = \pi h^{\lambda\mu} + \pi^{\lambda\mu}, \quad \pi_\lambda^\lambda = 0$$

$$q^\mu = h^\mu - \frac{n^\mu(\rho + p)}{n}$$

obtemos

$$S^\mu|_\mu = h^\mu[\partial_\mu(T^{-1}) + T^{-1}\dot{u}_\mu] - n^\mu\partial_\mu\alpha - T^{-1}\tau^{\lambda\mu}u_{\lambda|\mu} - Q^\mu|_\mu \quad (2.18)$$

Para a quantidade Q^μ que é um termo de segunda ordem temos

$$TQ^\mu = \frac{1}{2}u^\mu(\beta_0\pi^2 + \beta_1q_\lambda q^\lambda + \beta_2\pi_{\kappa\lambda}\pi^{\kappa\lambda}) - \alpha_0\pi q^\mu - \alpha_1\pi_\lambda^\mu q^\lambda \quad (2.19)$$

Agora, considerando $u^\mu = u_E^\mu$ e substituindo

$$h^\mu = 0$$

$$n^\mu = \frac{-nq^\mu}{(\rho + p)}$$

nas equações para N^μ e $T^{\lambda\mu}$ e encontramos

$$\pi = -\frac{1}{3}\rho_v(u_{E|\mu}^\mu + \beta_0\dot{\pi} - \alpha_0q^\mu|_\mu) \quad (2.20)$$

$$q^\lambda = \kappa Th^{\lambda\mu} \left[\frac{(\partial_\mu\alpha)nT}{(\rho+p)} - \beta_1\dot{q}_\mu + \alpha_0\partial_\mu\pi + \alpha_1\pi_{\mu|\nu}^\nu \right] \quad (2.21)$$

$$\pi_{\lambda\nu} = -2\rho_s(u_{\langle\lambda|\mu}^E\rangle + \beta_2\dot{\pi}_{\lambda\mu} - \alpha_1q_{\langle\lambda|\nu\rangle}) \quad (2.22)$$

E de maneira análoga, considerando $u^\mu = u_N^\mu$ e utilizando

$$h^\mu = q^\mu$$

$$n^\mu = 0$$

nas equações para N^μ e $T^{\lambda\mu}$ encontramos

$$\pi = -\frac{1}{3}\rho_v(u_{N|\mu}^\mu + \beta_0\dot{\pi} - \bar{\alpha}_0q^\mu|_\mu) \quad (2.23)$$

$$q^\lambda = \kappa Th^{\lambda\mu}(T^{-1}\partial_\mu T + \dot{u}_\mu^N + \bar{\beta}_1\dot{q}_\mu - \bar{\alpha}_0\partial_\mu\pi - \bar{\alpha}_1\pi_{\mu|\nu}^\nu) \quad (2.24)$$

$$\pi_{\lambda\nu} = -2\rho_s(u_{\langle\lambda|\mu}^N\rangle + \beta_2\dot{\pi}_{\lambda\mu} - \bar{\alpha}_1q_{\langle\lambda|\nu\rangle}) \quad (2.25)$$

quantidade π é a pressão de bulk, q^λ é o fluxo de calor e $\pi_{\lambda\mu}$ é a pressão anisotrópica.

Em uma generalização para um caso de mistura de fluidos do mesmo modo que para um fluido ideal temos que a variação da entropia S^μ continua sendo positiva assim como a derivada do tensor energia-momento $T^{\lambda\mu}$ tendo valor nulo, devido a lei de conservação de energia, no entanto, a variação do fluxo de partículas N^μ não se conserva.

Capítulo 3

O Modelo BSS

Neste capítulo trataremos com mais detalhes o modelo BSS. Discutiremos suas características, semelhanças e diferenças quando comparado ao modelo padrão de cosmologia.

Como visto anteriormente, no modelo FLRW consideramos nosso universo permeado por um fluido perfeito, homogêneo e isotrópico com tensor energia-momento dado por $T_{\mu\nu} = (\rho + p)V_\mu V_\nu - pg_{\mu\nu}$. Já no modelo BSS temos uma componente de pressão anisotrópica adicionada ao seu tensor, isto é, este fluido não é mais considerado ideal como no modelo padrão de cosmologia. O modelo BSS é invariante perante uma rotação, mantendo sua isotropia, mas não a translações, perdendo assim, sua homogeneidade. A pressão anisotrópica aparece igualmente em qualquer direção escolhida, não tendo uma direção preferencial [6, 11]. O tensor energia-momento que descreve este modelo é dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)V_\mu V_\nu - pg_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Sabemos que qualquer modificação no tensor energia-momento gera uma alteração na descrição da geometria, pois estes estão diretamente ligados, deste modo o elemento de linha que descreve o modelo BSS é dado por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{(1 - \epsilon r^2 - f(r))} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (3.2)$$

A partir deste tensor energia-momento, obtemos as Equações de Einstein como mostradas a seguir

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\epsilon}{a^2} = \rho, \quad (3.3)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} + 3\frac{\epsilon}{a^2} + \frac{2}{a^2} \frac{r''}{r} = -p + \pi_1^1,$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} - \frac{1}{a^2} \frac{r''}{r} = -p + \pi_2^2,$$

e o tri-escalar de Ricci sendo

$${}^{(3)}R = -2 \left(2\frac{r''}{r} + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) = 6\epsilon. \quad (3.4)$$

As derivadas denotadas por ponto, são derivadas em relação ao tempo, já as derivadas representadas por linha, são derivadas em relação ao comprimento χ .

As equações de Einstein admitem uma pressão anisotrópica somente se π_μ^ν for escrita como uma de função de r e $a(t)$, possuindo traço nulo. Deste modo temos os seguintes valores

$$\pi_1^1 = \frac{f(r)}{a^2}, \quad \pi_2^2 = \pi_3^3 = -\frac{1}{2}\pi_1^1$$

Manipulando as equações (3.3) e utilizando os valores para as componentes de π_μ^ν , chegamos na seguinte equação

$$\frac{r''}{r} + \epsilon = \frac{1}{2}f(r) \quad (3.5)$$

A partir da equação (3.3) obtemos,

$$r' = \pm \sqrt{1 - r^2\epsilon - r^2f(r)} \quad (3.6)$$

derivando (3.6) em relação a χ e substituindo em (3.5) chegamos a seguinte equação

$$\frac{df(r)}{dr} = -3\frac{f(r)}{r}, \quad (3.7)$$

e resolvendo encontramos

$$f(r) = \frac{2k}{r^3}, \quad (3.8)$$

onde k é a constante de integração.

Voltando na equação para r' temos

$$r' = \pm \sqrt{1 - r^2\epsilon - \frac{2k}{r}}. \quad (3.9)$$

como r é uma função de χ , podemos encontrar uma expressão para este apenas resolvendo a equação diferencial, e encontramos

$$\chi = \pm \left[\sqrt{r^2 - 2kr} + k \ln(r - k + \sqrt{r^2 - 2kr}) \right], \quad (3.10)$$

considerando $k > 0$, $\epsilon = 0$. Podemos ver que existe um ponto mínimo, como mostra a figura a seguir

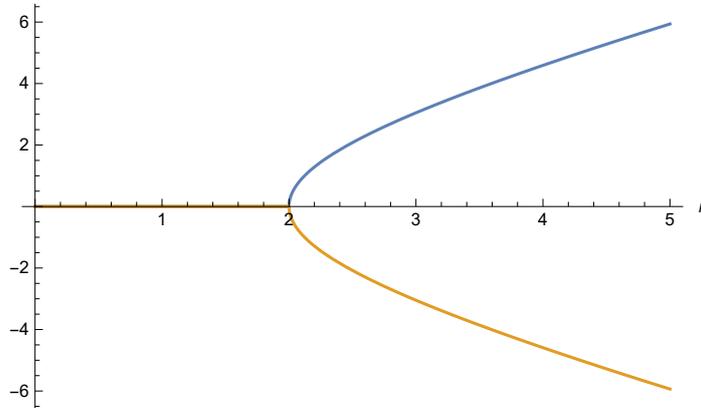


Figura 3.1: Gráfico χ por r sendo $\epsilon = 0$ e $k = 1$

Agora que sabemos quem é $f(r)$ podemos escrever também o elemento de linha que descreve a geometria do modelo BSS

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{(1 - \epsilon r^2 - \frac{2k}{r})} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (3.11)$$

As equações de Einstein podem ser escritas de uma maneira alternativa, o formato quase-maxwelliano. As quasi-maxwellianas são equações de terceira ordem, deste modo, suas soluções possuem uma quantidade maior de graus de liberdade, fazendo com que possamos analisar as equações de Einstein de maneira mais completa.

Utilizamos as equações quasi-maxwellianas para escrever o tensor de Weyl em sua componente elétrica e magnética. No modelo padrão de cosmologia, ambas as partes do tensor de Weyl são nulas, no entanto, para o modelo BSS, encontramos a parte elétrica do tensor de Weyl diferente de zero, e é proporcional a pressão anisotrópica

$$E_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\pi_{\mu\nu}. \quad (3.12)$$

a parte elétrica do tensor de Weyl possui apenas a parte espacial e sabemos que os valores de π são $\pi_1^1 = \frac{f(r)}{a^2}$, $\pi_1^1 = -2\pi_2^2$, $\pi_2^2 = \pi_3^3$ e de $f(r)$ é igual a $\frac{2k}{r^3}$ com isso podemos escrever a matriz que apresenta a parte elétrica do tensor de Weyl como

$$[E_j^i] = \frac{k}{a^2 r^3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Embora exista uma pressão anisotrópica, ela não produz uma anisotropia no modelo, mas sim uma inhomogeneidade. Para mostrar que não há anisotropia, fazemos uma mudança de coordenadas, sendo assim, realizamos este cálculo para a parte elétrica do tensor de Weyl que é igual a essa pressão

$$E_j'^i = \Lambda_k^i \Lambda_j^l E_l^k \quad (3.14)$$

as matrizes denotadas por Λ_k^i são as matrizes de transformação de coordenadas.

$$\Lambda_k^i = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\text{sen}(\theta) & r \cos(\theta) \cos(\phi) & -r\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi) & r \cos(\theta)\text{sen}(\phi) & r \cos(\phi)\text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) & -r\text{sen}(\theta) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Realizando a mudança de coordenadas, encontramos a seguinte matriz para o tensor de Weyl

$$E_j'^i = \begin{pmatrix} \frac{k(6 \cos(2\theta) + 3 \cos(2(\theta - \phi)) - 6 \cos(2\phi) + 3 \cos(2(\theta + \phi)) + 2)}{16a^2 r^3} & -\frac{3k\text{sen}^2(\theta)\text{sen}(2\phi)}{4a^2 r^3} & -\frac{3k \cos(\phi)\text{sen}(2\theta)}{4a^2 r^3} \\ -\frac{3k\text{sen}^2(\theta)\text{sen}(2\phi)}{4a^2 r^3} & \frac{k(2 \cos^2(\theta) + (3 \cos(2\phi) - 1)\text{sen}^2(\theta))}{4a^2 r^3} & -\frac{3k\text{sen}(2\theta)\text{sen}(\phi)}{4a^2 r^3} \\ -\frac{3k \cos(\phi)\text{sen}(2\theta)}{4a^2 r^3} & -\frac{3k\text{sen}(2\theta)\text{sen}(\phi)}{4a^2 r^3} & -\frac{k(3 \cos(2\theta) + 1)}{4a^2 r^3} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

agora, encontramos os seus auto vetores e auto valores a fim de encontrar uma possível direção privilegiada para a existência de pressão anisotrópica. Para os auto valores temos

$$\left(-\frac{k}{a^2 r^3}, \frac{k}{2a^2 r^3}, \frac{k}{2a^2 r^3} \right), \quad (3.17)$$

e para os auto vetores

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) \tan(\theta) & \sin(\phi) \tan(\theta) & 1 \\ -\cot(\theta) \sec(\phi) & 0 & 1 \\ -\tan(\phi) & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Podemos notar que um dos auto vetores apresenta um auto valor diferente, $-\frac{k}{a^2 r^3}$, sendo assim, imaginamos que este vetor possa apresentar uma anisotropia. No entanto, quando calculamos as suas componentes utilizando seu auto vetor, $(\cos(\phi) \tan(\theta), \sin(\phi) \tan(\theta), 1)$, vemos que não há uma direção privilegiada pois encontramos que

$$(\tan(\theta) \cos(\phi), \tan(\theta) \sin(\phi), 1) = (x, y, z) \quad (3.19)$$

Assim chegamos a conclusão de que a pressão anisotrópica possui uma isotropia e esta presente de maneira igualitária em qualquer direção escolhida. Para os outros dois auto valores, obtemos dois auto vetores

$$(-\cot(\theta) \sec(\phi), 0, 1) = (-z, 0, x) \quad (3.20)$$

$$(-\tan(\phi), 1, 0) = (-y, x, 0) \quad (3.21)$$

esses auto vetores representam rotações ao redor dos eixos y e z .

Capítulo 4

Sobre a Viabilidade do Modelo BSS

4.1 Comportamento de $a(t)$ no modelo BSS

O fator de escala é uma quantidade que descreve as variações nas escalas produzidas pela expansão ou contração do universo. Em 1920 os estudos realizados por Hubble mostraram que as galáxias se afastam umas das outras, isso corroborou para que considerássemos que nosso universo está em expansão, deste modo temos que o fator de escala $a(t)$ representa um fator de expansão. A expressão que descreve $a(t)$ depende do conteúdo que permeia o universo. Nesta seção, vamos estudar o comportamento do fator de escala em função do tempo para o modelo BSS, este fator mede as variações nas escalas produzidas pela expansão do universo. Para encontrar $a(t)$ vamos partir da equação da continuidade

$$\dot{\rho} + (1 + \lambda)\rho\theta = 0 \quad (4.1)$$

em que ρ é a densidade de energia e $\dot{\rho}$ a derivada desta quantidade, λ é uma constante relacionada com o conteúdo que permeia o universo e considerando que θ pode ser escrito como $\frac{3\dot{a}}{a}$, sendo a o fator de escala temos que

$$\dot{\rho} + (1 + \lambda)\rho\frac{3\dot{a}}{a} = 0 \implies \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -(3 + 3\lambda)\frac{\dot{a}}{a}$$

realizando a integração da equação acima e isolando ρ , temos a equação geral para a densidade de energia

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-(3+3\lambda)}$$

sendo a_0 uma constante e substituindo o valor de ρ na equação

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(1 + 3\lambda)\rho \quad (4.2)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(1 + 3\lambda)\rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-(3+3\lambda)} \quad (4.3)$$

onde ρ_0 é uma constante. Após algumas manipulações com a equação e realizando uma integração, encontramos uma expressão para \dot{a}

$$\dot{a}(t) = \pm \sqrt{ca^{-1+3\lambda} \pm n^2}$$

e conseqüentemente os duas expressões possíveis para $a(t)$, onde c , n e b , que aparece nas equações para $a(t)$, são constantes.

$$a_1(t) = \sqrt{-n^2(t - t_0)^2 + b^2}, \quad (4.4)$$

$$a_2(t) = \sqrt{n^2(t - t_0)^2 - b^2}. \quad (4.5)$$

Podemos observar na figura abaixo o comportamento de $a(t)$ para o modelo BSS.

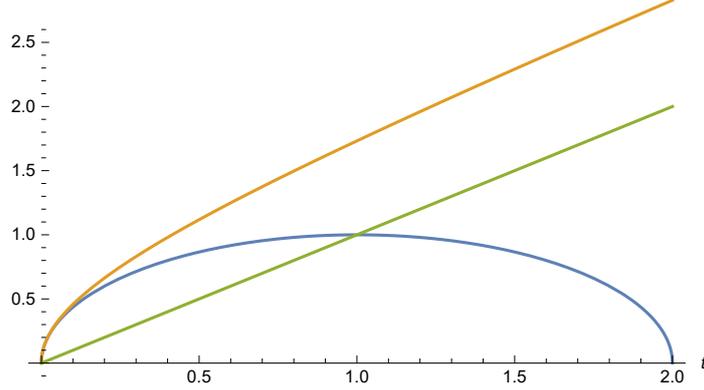


Figura 4.1: Comportamento o fator de escala

Como o fator de escala nos mostra a variação no tamanho do universo. Podemos ver na figura que existem três possíveis comportamentos para o fator de escala, o primeiro, proveiente de (4.4), mostra que existe um instante de tempo em que o fator de escala é nulo e logo em seguida cresce até um ponto de máximo e volta a decrescer, chegando novamente a um valor nulo. Os outros dois comportamentos vem da equação (4.5), em que um deles nos mostra um fator de escala que cresce linearmente com o passar do tempo, enquanto o outro cresce inicialmente sem atingir um ponto máximo. Ou seja, o modelo BSS nos dá três possibilidades para o fator de escala, uma delas nos mostra um universo que expande até um valor máximo e logo após contrai, a outra oferece um fator de escala que cresce sem atingir um ponto máximo, sendo assim o universo cresce indefinidamente sem chegar a um ponto onde possa iniciar uma fase de contração, e também um fator de escala que cresce de maneira linear. Essas interpretações são iguais ao comportamento do fator de escala para o modelo FLRW.

4.2 A pressão anisotrópica

Como vimos anteriormente, no modelo BSS, a partir de uma simples derivação das Equações de Einstein obtemos uma quantidade que é interpretada como uma pressão anisotrópica. Nesta seção estudamos esta pressão anisotrópica do ponto de vista termodinâmico, usamos como base a termodinâmica proposta por W. Israel e J. M. Stewart, abordada em diversos artigos dos autores [12] e temos como objetivo saber se esta termodinâmica é capaz de descrever o modelo BSS. Nos trabalhos propostos por Israel e Stewart a pressão anisotrópica pode ser calculada por

$$\pi^{\mu\nu} = -2\rho_s \langle \nabla^\mu u^\nu + \beta_2 \dot{\pi}^{\mu\nu} - \alpha_1 \nabla^\mu q^\nu \rangle \quad (4.6)$$

em que ρ_s , β_2 e α_1 são respectivamente o coeficiente de viscosidade de cisalhamento, o coeficiente de relaxação e o coeficiente que acopla o fluxo de calor com as componentes viscosas do tensor

energia momento, a notação $\langle \rangle$ representa a soma da parte simétrica do tensor com o seu traço. As quantidades $\nabla^\mu u^\nu$, $\dot{\pi}^{\mu\nu}$ e $\nabla^\mu q^\nu$, são a derivada covariante da velocidade, a derivada covariante do tensor de pressão anisotrópica e a derivada covariante do fluxo de calor. A quantidade $\nabla^\mu u^\nu$ se decompõe nas chamadas *quantidades cinemáticas*, ou seja, são elas que caracterizam o movimento deste fluido que consideramos permear o universo

$$\nabla^\mu u^\nu = \sigma^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{3}\Theta h^{\mu\nu} + a^\nu u^\mu \quad (4.7)$$

onde $\omega^{\mu\nu}$ é a vorticidade, que é responsável por quantificar o movimento de rotação, $\sigma^{\mu\nu}$ representa o cisalhamento, que descreve a deformação de um sistema causada por uma força que age sobre este fluido, Θ o fator de expansão e a^μ a aceleração.

$$\begin{aligned} \omega^{\mu\nu} &= u^{[\mu;\nu]} \\ \sigma^{\mu\nu} &= u^{(\mu;\nu)} - \frac{1}{3}\theta h^{\mu\nu} \end{aligned}$$

onde a notação de colchetes representa a parte antissimétrica e os parenteses a parte simétrica do tensor.

$$\begin{aligned} \theta &= u^\mu{}_{;\mu} \\ a^\nu &= u^\nu{}_{;\mu} u^\mu \end{aligned}$$

No entanto, para o modelo BSS a maior parte destas quantidades é nula, fazendo com que a equação para pressão anisotrópica se reduza para

$$\pi^{\mu\nu} = -2\rho_s \beta_2 \dot{\pi}^{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

o coeficiente de viscosidade de cisalhamento e o coeficiente de relaxação são dados por [10, 12]

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{10\zeta^2}{\beta B}, \\ \beta_2 &= \frac{(1 + \frac{6\eta}{\beta})}{2\eta^2 p}. \end{aligned}$$

as quantidades que caracterizam estes coeficientes são

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{mc^2}{kT}, \\ \eta &= \frac{\rho + p}{nm}, \\ \zeta &= \frac{\rho + p}{\beta}. \end{aligned}$$

Utilizando as equações acima, encontramos

$$\rho_s = \frac{10(\rho + p)^2 k^3 T^3}{m^3 c^6 B}, \quad (4.9)$$

$$\beta_2 = \frac{m^2 c^2 n^2 + 6nkT(\rho + p)}{2pc^2(\rho + p)^2}, \quad (4.10)$$

substituindo todas as quantidades em $\pi_{\mu\nu}$ temos a expressão para a pressão anisotrópica:

$$\pi^{\mu\nu} = \left[-\frac{10k^3T^3n^2}{Bmpc^6} - \frac{60k^4T^4n(\rho+p)}{Bpm^3c^8} \right] \dot{\pi}^{\mu\nu} \quad (4.11)$$

multiplicando ambos os lados da equação por $\pi^{\mu\nu}$, obtemos

$$\pi^2 = \left[-\frac{10k^3T^3n^2}{2Bpmc^6} - \frac{60k^4T^4n(\rho+p)}{2Bpm^3c^8} \right] \frac{d\pi^2}{dt} \quad (4.12)$$

a equação que descreve a pressão anisotrópica é composta de dois termos e dependendo do regime de temperatura escolhido, um termo será dominante frente ao outro, deste modo, apenas um dos termos será válido nos limites de alta ou baixa temperatura. Os parâmetros m , c e k são constantes conhecidas e representam a massa das partículas que compõe o fluido, a velocidade da luz e a constante de Boltzmann. A quantidade n é o número de partículas e B um valor positivo relacionado com a seção de choque.

De posse destas informações a respeito da equação que descreve a pressão anisotrópica, efetuamos diversas tentativas para encontrar uma solução satisfatória para a equação. Como no modelo BSS temos a pressão anisotrópica como uma lei de potência, esperamos encontrar pelo caminho da termodinâmica um mesmo comportamento, confirmando assim, que a termodinâmica de Israel e Stewart é capaz de descrever este modelo.

Inicialmente, abordamos o problema da maneira mais simplificada possível considerando apenas ρ sendo dependente da temperatura e chegamos a seguinte equação

$$\pi^2 = \left[-\frac{\alpha T^3}{p} - \frac{\gamma T^4(\rho+p)}{p} \right] \frac{d\pi^2}{dt}. \quad (4.13)$$

Sabemos que $p = \frac{1}{3}\rho$ e ρ é proporcional a T^4 , α e γ são parâmetros constantes presentes até aqui, assim chegamos em

$$\pi^2 = \left[-\frac{\alpha}{T} - \gamma T^4 \right] \frac{d\pi^2}{dt} \quad (4.14)$$

Agora, queremos escrever π^2 em termos do fator de escala $a(t)$, para isso vamos substituir as seguintes relações na equação para a pressão anisotrópica

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \sqrt{\frac{1}{3}\rho} = \frac{\sqrt{\rho_0}/3}{a^2(t)}$$

$$dt = \frac{da}{\dot{a}}.$$

Temos que para o limite de alta temperatura

$$\begin{cases} \frac{d\pi^2}{\pi^2} = -s^2 a^5 da \\ \pi^2 = \pi_0^2 \exp(-s^2 a^6) \end{cases} \quad \text{para alta temperatura} \quad (4.15)$$

onde s^2 e π_0^2 são constantes.

Para o limite de baixa temperatura temos que

$$\begin{cases} \frac{d\pi^2}{\pi^2} = -q^2 da \\ \pi^2 = \pi_0^2 \exp(-q^2 a) \end{cases} \quad \text{para baixa temperatura} \quad (4.16)$$

onde q^2 e π_0^2 são constantes.

Podemos notar que para o limite de alta temperatura, $T \rightarrow \infty$ temos, $a(t) \rightarrow 0$. Deste modo, $\pi^2 = \pi_0^2$, e no limite para baixas temperaturas $T \rightarrow 0$ quando $a(t) \rightarrow \infty$ encontramos $\pi^2 = 0$.

No modelo BSS, temos π^2 proporcional a $\frac{f(r)}{a^4}$, sendo assim, nos limites temos $T \rightarrow \infty$ obtemos $\pi^2 \rightarrow \infty$ e quando $T \rightarrow 0$ obtemos $\pi^2 \rightarrow 0$. Como não alcançamos resultados que concordem com os encontrados no modelo BSS, realizamos outras tentativas onde consideramos outras elementos da equação como dependentes da temperatura, a fim de encontrar resultados para π^2 coincidentes com os obtidos no modelo BSS.

Posteriormente, realizamos um cálculo semelhante, porém, considerando B dependente da temperatura [13], e obtemos a seguinte equação para a pressão anisotrópica

$$\pi^2 = \left[-\frac{\alpha T^3}{Bp} - \frac{\gamma T^4(\rho + p)}{Bp} \right] \frac{d\pi^2}{dt} \quad (4.17)$$

Para solucioná-la, primeiro encontramos como deve ser a dependência de B com a temperatura, para isso usamos

$$B = (h_{\lambda\alpha}h_{\mu\beta} - \frac{1}{3}h_{\lambda\mu}h_{\alpha\beta})\chi^{\lambda\mu\alpha\beta}$$

sendo $h_{\mu\beta}$ a projeção e $\chi^{\lambda\mu\alpha\beta}$ a seção de choque dada por

$$\chi^{\lambda\mu\alpha\beta} = \frac{1}{4}m^{-3}c^{-1} \iiint W N'_0 N_0 \Delta_0^{*\prime} \Delta_0^* \delta[p^\lambda p^\mu] \delta[p^\alpha p^\beta] d^4\omega \quad (4.18)$$

onde W é a probabilidade de colisão, N'_0 e N_0 a quantidade de partículas antes e depois da colisão e os vetores p^λ os momentos. A quantidade $\delta[\phi]$ é dada por [15]

$$\delta[\phi] = \phi(x, p) + \phi(x', p) - \phi(x, p^*) - \phi(x', p^*)$$

Considerando que a energia e o momento são proporcionais a temperatura T no regime de altas temperaturas, chegamos a $B \sim T^4$, que resulta

$$\pi^2 = \left[-\frac{\alpha}{T^5} - \gamma \right] \frac{d\pi^2}{dt}. \quad (4.19)$$

Escrevendo a equação em termos de $a(t)$

$$\begin{cases} \frac{d\pi^2}{\pi^2} = -s^2 a da \\ \pi^2 = \pi_0^2 \exp(-s^2 a^2) \end{cases} \quad \text{para alta temperatura} \quad (4.20)$$

Assim como na primeira tentativa, temos que para o limite de alta temperatura obtemos $\pi^2 \rightarrow \pi_0^2$ e não $\pi^2 \rightarrow \infty$. Como o limite de alta temperatura não é o esperado, não foi realizado o cálculo para o limite de baixa temperatura.

Em uma terceira tentativa, utilizamos B e n dependentes da temperatura e junto a isso uma distribuição de Bose, pois consideramos que o universo seja permeado apenas por fótons. Como já temos uma maneira de encontrar $B(T)$, precisamos encontrar agora como é a dependência de n , para isso vamos usar a equação para Δ^* , visto que esta quantidade deve ser adimensional temos

$$\Delta^* = g + \epsilon h^3 n^*$$

em que g é uma constante referente ao fator de peso de spin, que tem valor igual a 2 para fótons e neutrinos ou $2(\text{spin})+1$ para as demais partículas, ϵ a energia e h uma quantidade com dimensão de momento p . Deste modo, para que Δ^* seja adimensional, n precisa ter a dimensão

de $(\epsilon p^3)^{-1}$. Utilizando a distribuição de Bose juntamente com a dimensão encontrada para n e substituindo em (4.18) encontramos

$$B = \left[\int \frac{\exp(T_0/2T)}{T^3[\exp(T_0/T) - 1]} dT \right]^2 \quad (4.21)$$

Consideramos aqui o regime de alta temperatura, neste caso, o momento p e a energia ϵ são proporcionais temperatura T . No entanto, a expressão para B se tornou muito complicada, sendo intratável seu cálculo, ainda que utilizando programas computacionais para realizá-los.

Por fim apresentaremos a tentativa que chegou em resultados mais satisfatórios. Nesta continuamos considerando $B(T)$ e $n(T)$, no entanto, desconsideramos a distribuição de Bose e usamos apenas as dependências das quantidades com a temperatura. Para altas temperaturas temos que o momento p e a energia ϵ são proporcionais a temperatura, deste modo encontramos $B(T) \sim T^4$ e $n(T) \sim \frac{1}{T^4}$ e também $p \sim \rho \sim \frac{n}{V} \sim nT^3$ e encontramos

$$\pi^2 = \left[-\frac{\alpha}{T^8} - \frac{\gamma}{T^4} \right] \frac{d\pi^2}{dt} \quad (4.22)$$

Escrevendo a equação para alta temperatura em termos de a

$$\begin{cases} \frac{d\pi^2}{\pi^2} = -s^2 a^{-11/2} da \\ \pi^2 = \pi_0^2 \exp(s^2 a^{-13/2}) \end{cases} \quad \text{para alta temperatura} \quad (4.23)$$

Para baixa temperatura temos que o momento p e a energia ϵ são proporcionais a temperatura, porém esta é uma constante, deste modo temos $B(T) \sim \frac{1}{T^4}$ e $n(T) \sim T_0$ e também $p \sim \rho \sim \frac{n}{V} \sim nT^3$ e encontramos

$$\pi^2 = \left[-\alpha T^4 - \gamma T^8 \right] \frac{d\pi^2}{dt} \quad (4.24)$$

A equação para baixa temperatura em termos de $a(t)$ é dada por

$$\begin{cases} \frac{d\pi^2}{\pi^2} = -q^2 a^{9/2} da \\ \pi^2 = \pi_0^2 \exp(-q^2 a^{11/2}) \end{cases} \quad \text{para baixa temperatura} \quad (4.25)$$

As equações (4.23) e (4.25) representam respectivamente os valores para π^2 no limite de alta e baixa temperatura, deste modo, temos que para $T \rightarrow \infty$, ou seja, $a \rightarrow 0$, temos que $\pi^2 \rightarrow \infty$, e para $T \rightarrow 0$, que representa $a \rightarrow \infty$ temos que $\pi^2 \rightarrow 0$. Esses resultados estão de acordo com os resultados obtidos para a pressão anisotrópica no modelo BSS obtidos a partir das equações de Einstein no limites de alta e baixa temperatura.

Como não conseguimos encontrar um resultado que mostre a compatibilidade do modelo BSS com a termodinâmica de Israel, observamos com maior atenção as quantidades que consideramos constantes. Dentre estas constantes temos a massa das partículas, no entanto, o modelo BSS apresenta um universo permeado por fótons que são partículas não massivas. Devido a isso, imaginamos que é necessário buscar um modo de eliminar a massa na equação para $\pi^{\mu\nu}$, para isso vamos usar a definição de B deixando em evidência a massa que existe na expressão de $\chi^{\lambda\mu\alpha\beta}$

$$B = m^{-3} (h_{\lambda\alpha} h_{\mu\beta} - \frac{1}{3} h_{\lambda\mu} h_{\alpha\beta}) \chi^{\lambda\mu\alpha\beta} \quad (4.26)$$

substituindo na equação para π^2 encontramos

$$\pi^2 = \left[-\frac{5m^2 k^3 T^3 n^2}{Bpc^6} - \frac{30k^4 T^4 n(\rho + p)}{Bpc^8} \right] \frac{d\pi^2}{dt} \quad (4.27)$$

fazendo $m \rightarrow 0$ temos

$$\pi^2 = -\frac{30k^4 T^4 n(\rho + p)}{Bpc^8} \frac{d\pi^2}{dt} \quad (4.28)$$

continuamos usando a dependência de B para alta e baixa temperatura como anteriormente e temos que

$$\begin{cases} \frac{d\pi^2}{\pi^2} = -s^2 a da \\ \pi^2 = \pi_0^2 \exp(-s^2 a^2) \end{cases} \quad \text{para alta temperatura} \quad (4.29)$$

e para baixa temperatura

$$\begin{cases} \frac{d\pi^2}{\pi^2} = -q^2 a^7 da \\ \pi^2 = \pi_0^2 \exp(-q^2 a^8) \end{cases} \quad \text{para baixa temperatura} \quad (4.30)$$

Do mesmo modo que realizado anteriormente, avaliamos as soluções nos limites de alta e baixa temperatura. No caso em que $T \rightarrow 0$ encontramos que a pressão anisotrópica $\pi^2 \rightarrow 0$ e quando $T \rightarrow \infty$ temos que $\pi^2 \rightarrow \pi_0^2$, ou seja, no limite de alta temperatura, encontramos que a pressão anisotrópica é uma constante, enquanto no limite de baixa temperatura temos o valor da pressão anisotrópica tendendo a zero.

Após diversas tentativas utilizando a termodinâmica de Israel, não conseguimos em nenhuma delas encontrar uma solução satisfatória para pressão anisotrópica, pois esta não está de acordo com a encontrada através das equações quasi-maxwellianas. A pressão anisotrópica encontrada por meio da termodinâmica sempre apresenta uma solução expressa por exponenciais enquanto a solução encontrada pelas equações quasi-maxwellianas nos apresentam uma solução descrita como uma lei de potência.

4.3 Relação entre r e χ no modelo BSS

No artigo em que é apresentado o modelo BSS, a única relação entre r e χ abordada é para valores positivos de k e ϵ nulo. Nesta seção apresentamos todas as possíveis combinações para estas quantidades e conseqüentemente as relações entre ambos. Para encontrar essas relações partimos da equação (3.9)

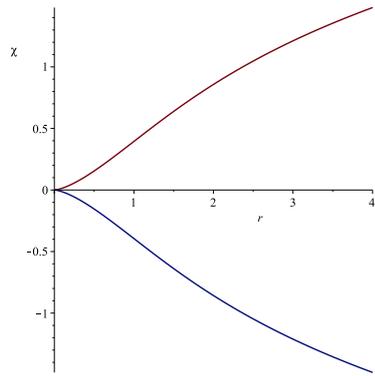
$$r' = \pm \sqrt{1 - r^2 \epsilon - \frac{2k}{r}}$$

Utilizamos os softwares Mathematica e Maple para resolver a equação e plotar os gráficos para cada uma das combinações. E obtivemos seis combinações possíveis. Uma delas não possui significado físico (para $\epsilon = 1$ e $k = 1$), as demais são mostradas abaixo.

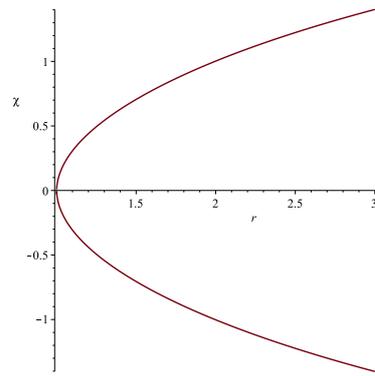
Podemos notar nas figuras (a) e (b), que para as combinações de $\epsilon = -1$, $k = -1$ e $k = 1$ temos um modelo que apresenta singularidade, ou seja, o raio tende a zero.

Do mesmo modo que nas combinações anteriores, mostradas por (a) e (b), as combinações para $k = -1$, $\epsilon = 1$ e $\epsilon = 1$ mostradas por (c) e (d) também representam um universo com singularidade, com se raio tendendo a zero.

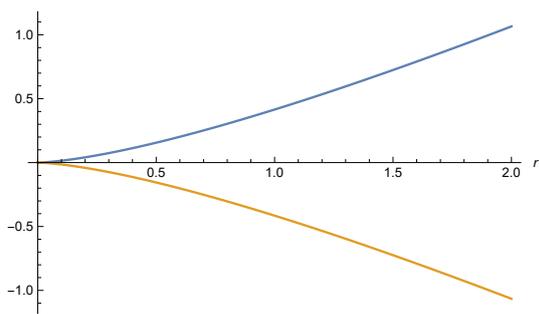
De todas as combinações possíveis, a única combinação que apresenta um valor diferente de zero para o raio é a dada por $\epsilon = 0$ e $k = 1$, como podemos ver na figura (e). Assim, temos um valor mínimo para o raio, fazendo com que assim não haja mais uma singularidade. Deste modo, o raio diminui até um determinado valor e logo após volta a crescer.



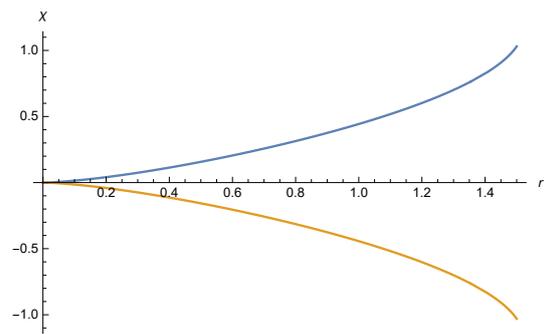
(a) Para $\epsilon = -1$ e $k = -1$



(b) Para $\epsilon = -1$ e $k = 1$



(c) Para $\epsilon = 0$ e $k = -1$



(d) Para $\epsilon = 1$ e $k = -1$

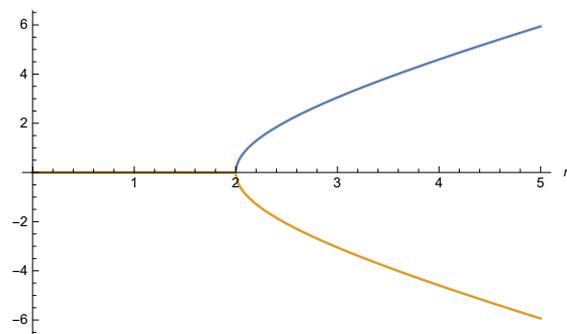


Figura 4.2: Para $\epsilon = 0$ e $k = 1$

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho estudamos o modelo BSS que é uma solução exata das equações de Einstein, estudamos suas propriedades e similaridades com o modelo padrão de cosmologia. Embora o modelo BSS possua o mesmo tipo de geometria que modelo FLRW, seu tensor energia-momento possui uma pressão anisotrópica e esta faz com que tenhamos a parte elétrica do tensor de Weyl diferente de zero. De posse dessas informações investigamos como é o comportamento do fator de escala nesse modelo, assim como o comportamento de seu raio e também buscamos por uma termodinâmica que pudesse descrevê-lo.

O estudo do comportamento do fator de escala nos mostra duas soluções para $a(t)$ que nos dão três possíveis comportamentos (dependendo dos valores das constantes escolhidas), em uma delas temos que em um instante de tempo o fator é nulo e logo em seguida cresce chegando a um ponto de máximo e logo após decresce até chegar a um valor nulo novamente. No segundo caso, temos um fator de escala nulo em um determinado instante de tempo e crescendo logo em seguida, no entanto, diferente do primeiro caso este não possui um valor de máximo, assim o fator de escala continua crescendo com o passar do tempo, tendo um crescimento inicial acelerado e posteriormente crescendo linearmente e também um fator de escala que tem um valor inicialmente nulo e cresce descrevendo uma linha reta. Deste modo o modelo BSS nos dá três possibilidades para a expansão do universo, na primeira temos um universo que se expande até um ponto máximo e logo após inicia uma fase de contração. No segundo caso ele se expande de maneira acelerada até um certo ponto e depois continua a expandir de maneira linear. Na terceira possibilidade, temos um universo que se expande linearmente desde seu início. Os comportamentos do fator de escala para o modelo BSS são iguais ao seu comportamento no modelo padrão de cosmologia.

Para a relação entre o raio r e o comprimento χ , calculamos todas as combinações possíveis para a quantidade ϵ e a constante k , obtendo seis configurações possíveis, uma delas foi descartada por não haver sentido físico. Quatro delas nos mostram soluções com singularidade, ou seja, temos o valor do raio igual a zero. E por fim, uma única solução que representa um universo sem singularidade em relação ao raio. Essa solução nos mostra que pode haver um ponto de mínimo diferente de zero para o raio e após atingir este ponto seu valor volta a crescer novamente como mostram os gráfico abaixo.

No estudo realizado para obter uma termodinâmica que descrevesse o modelo, utilizamos a termodinâmica desenvolvida por W. Israel e J. Stewart. Buscamos a partir desta teoria encontrar uma expressão para a pressão anisotrópica que fosse similar a obtida através das equações de Einstein, como é mostrada no artigo que apresenta o modelo BSS. No entanto, após realizar diversas tentativas foi possível encontrar o mesmo comportamento para essa pressão apenas nos regimes de alta e baixa temperatura, pois as expressões que descrevem a pressão

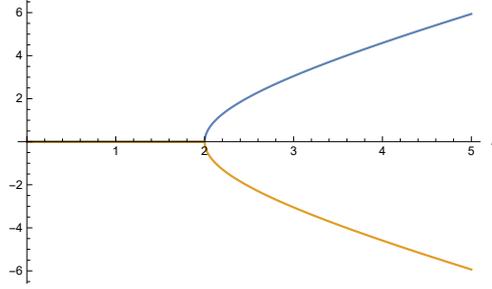


Figura 5.1: Para $\epsilon = 0$ e $k = 1$

anisotrópica são muito distintas quando obtidas pela termodinâmica de Israel. A pressão anisotrópica obtida através das equações pra gravitação aparecem como uma lei de potência no fator de escala, enquanto pela termodinâmica esta aparece como sendo uma exponencial. Deste modo, chegamos a conclusão que deve ser feita uma análise ainda mais detalhada da compatibilidade do modelo BSS com a termodinâmica de Israel e Stewart. Um ponto que deve ser investigado com maiores detalhes e que pode ser um motivo para essa incompatibilidade pode estar nas hipóteses utilizadas no modelo BSS, que são: tri escalar de Ricci sendo constante e a pressão sendo proporcional a densidade de energia.

Visto que não obtivemos sucesso na tentativa de utilizar a termodinâmica de Israel e Stewart para descrever o modelo BSS até o momento, em estudos futuros, pretendemos investigar com mais detalhes a importância e as consequências das hipóteses consideradas no modelo e continuar a busca por uma termodinâmica que possa descrevê-lo

Bibliografia

- [1] Ancient Rishi's Pathways to Hinduism. Hindu Cosmology. http://www.hinduwisdom.info/Hindu_Cosmology.htm. Acesso em julho de 2017.
- [2] B. Ryden, "Introduction to Cosmology", Addison Wesley, San Francisco, 2003.
- [3] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, "Exact Solutions of Einstein's Field Equations", Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [4] G. Ellis, R. Maartens, M. MacCallum, "Relativistic Cosmology", Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [5] G. Ellis, "Flat and curved space-time", Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [6] E. Bittencourt, J. M. Salim, G. B. Santos, "Magnetic field and the Weyl tensor in early universe", *General Relativity and Gravitation* **46** (2014) 1790. DOI 10.1007/s10714-014-1790-3.
- [7] L. Landau, E. Lifshitz, "Teoria do Campo", Mir, Moscou, 1980.
- [8] A. Danehkar, "On the significance of the Weyl curvature in a relativistic cosmological model", Arxiv:07072987v5.
- [9] H. B. Callen, "Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1985.
- [10] W. Israel, J. M. Stewart, "Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory", *Annals of Physics* **118** (1979) 341.
- [11] E. Bittencourt, J. M. Salim, "Friedmann-like solutions with a non-vanishing Weyl tensor", Arxiv:1301.3079v2.
- [12] W. Israel, J. M. Stewart, "Thermodynamics of nonstationary and transient effects in a relativistic gas", *Physics Letters* **58 A** (1976) 2013.
- [13] W. Israel, "The relativistic Boltzmann equations", L. O'Riada, General Relativity, Papers in honor of J. L. Synge, Oxford University Press, London, 1972
- [14] W. Israel, "Nonstationary irreversible thermodynamics: A causal relativistic theory", *Annals of physics* **100** (1976) 310.
- [15] W. Israel, J. N. Vedral, "Transport coefficients of a relativistic quantum gas", *Lettere al Nuovo Cimento* **Vol. IV, 19** (1970) 887.

- [16] W. A. van Leeuwen, P. H. Polak, S. R. de Groot, “On relativistic kinetic gas theory”, *Physica* **63** (1973) 65.
- [17] B. Schutz, “A first course in general relativity”, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.