

Universidade Federal de Itajubá
Instituto de Física e Química
Programa de Pós-Graduação em Física

Leonardo Peixoto de Moura

**Método Variacional Aplicado ao Cálculo da Taxas de Tunelamento em Teoria
Quântica de Campos**

Itajubá

4 de janeiro de 2018

Leonardo Peixoto de Moura

**Método Variacional Aplicado ao Cálculo da Taxas de Tunelamento em Teoria
Quântica de Campos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Itajubá, na área de concentração em Teoria de Campos Gravitação e Cosmologia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física

Orientador: Gabriel Flores-Hidalgo

Itajubá

4 de janeiro de 2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Moura, Leonardo.

Método Variacional Aplicado ao Cálculo da Taxas de Tunelamento em Teoria Quântica de Campos / Leonardo Peixoto de Moura. – 4 de janeiro de 2018.

53 f. : il.

Orientador: Gabriel Flores-Hidalgo

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá, Instituto de Física e Química. Programa de Pós-Graduação em Física, 4 de janeiro de 2018.

1. — Dissertações. 2. — Dissertações. I. Orientador. II. Título.

Leonardo Peixoto de Moura

Método Variacional Aplicado ao Cálculo da Taxas de Tunelamento em Teoria
Quântica de Campos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Itajubá, na área de concentração em Teoria de Campos Gravitação e Cosmologia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física

Aprovada em: 07/12/2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gabriel Flores-Hidalgo - Orientador
Universidade Federal de Itajubá

Prof. Dr. Alexis Roa Aguirre
Universidade Federal de Itajubá

Prof. Dr. Rodolfo Alvan Casana Sifuentes
Universidade Federal do Maranhão

AGRADECIMENTOS

Principalmente aos meus pais, pela força que sempre me dão.

Ao professor Gabriel Flores-Hidalgo pela orientação, amizade e principalmente, pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos professores do curso de Pós Graduação em física pelos seus ensinamentos e aos funcionários do curso, que durante esses anos, contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional. Agradeço à CAPES pela bolsa de mestrado.

“Texto em que o autor apresenta uma citação, seguida de autoria, relacionada com a matéria
tratada no corpo do trabalho”

(ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2011, p. 2)

A epígrafe elaborada conforme NBR 10520 (Epígrafe - Opcional)

RESUMO

Um dos fenômenos mais peculiares da mecânica quântica é a possibilidade de tunelamento através de uma barreira de potencial. Em teoria quântica de campos existe o fenômeno análogo, quando a densidade de energia potencial possui um mínimo relativo. Nesse caso o mínimo relativo é quanticamente associado com o chamado falso vácuo. O falso vácuo é instável e pode decair, via tunelamento quântico ou por flutuações térmicas, para o verdadeiro vácuo. Essa transição se dá de forma análoga a como acontece uma transição de fase entre um gás e um líquido, onde bolhas da fase líquida se formam, devido a flutuações térmicas e quânticas, dentro da fase gasosa. Uma das quantidades de interesse é a rapidez com a qual bolhas do verdadeiro vácuo se formam dentro da fase do falso vácuo, quantidade chamada de taxa de nucleação ou de tunelamento. O cálculo dessa quantidade é bastante complicado, já que passa pela solução de uma equação diferencial altamente não linear e de outro lado há que se somar os modos descritos pelo operador diferencial de estabilidade associado, o qual em geral é infinito, i.e, precisaremos regularizar e renormalizar. Nessa dissertação propomos uma nova forma de cálculo da taxa de tunelamento onde em lugar de resolver a equação altamente não linear, consideramos uma abordagem variacional do problema. A vantagem do método está em que em lugar de resolvermos uma equação diferencial não linear, resolveremos uma equação algébrica. Aplicações do método serão realizados no modelo φ^4 .

Palavras-chaves: Falso Vácuo, Taxa de Tunelamento, Método Variacional.

ABSTRACT

One of the most peculiar phenomena of quantum mechanics is the possibility of tunneling through a potential barrier. In quantum field theory there is the analogous phenomenon, when the potential energy density has a relative minimum. In this case the relative minimum is quantically associated with the so-called false vacuum. The false vacuum is unstable and can decay, via quantum tunneling or thermal fluctuations, to the true vacuum. This transition occurs in a manner analogous to how a phase transition occurs between a gas and a liquid, where liquid phase bubbles form due to thermal and quantum fluctuations within the gas phase. One of the quantities of interest is the speed with which bubbles of true vacuum form within the phase of the false vacuum, a quantity called nucleation or tunneling rate. The calculation of this quantity is quite complicated, since it passes through the solution of a highly nonlinear differential equation and on the other side one has to add the modes described by the associated differential stability operator, which in general is infinite, that is, we will need to regularize and renormalize. In this dissertation we propose a new way of calculating the tunneling rate where, instead of solving the highly nonlinear equation, we consider a variational approach to the problem. The advantage of the method is that instead of solving a nonlinear differential equation, we solve an algebraic equation. Applications of the method will be performed on the model φ^4 .

Keywords: False Vacuum, Tunneling Rate, Variational Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Energia potencial em função da posição para uma partícula com um estado fundamental falso [12]. | 16 |
| Figura 2 – Potencial com um falso estado fundamental em teoria quântica de campos [12]. | 17 |
| Figura 3 – (a) Potencial de uma partícula que possui um único estado fundamental. (b) O mesmo potencial mas com sinal negativo. [12] | 22 |
| Figura 4 – Potencial ilustrado na figura (1) negativo. | 23 |
| Figura 5 – Forma qualitativa do bounce | 23 |
| Figura 6 – configuração de multi-bounce | 23 |
| Figura 7 – Potencial negativo da figura (2). | 30 |
| Figura 8 – Forma do bounce | 31 |
| Figura 9 – Método de aproximação de parede fina. | 32 |
| Figura 10 – Gráfico de $B(\beta)$ para densidade de energia, $\epsilon = 1, 4$ | 40 |
| Figura 11 – O bounce variacional para $\epsilon = 1, 4$ | 40 |
| Figura 12 – Gráfico de $B(\beta)$ para densidade de energia, $\epsilon = 1, 2$ | 41 |
| Figura 13 – O bounce variacional para $\epsilon = 1, 2$ | 41 |
| Figura 14 – Gráfico de $B(\beta)$ para densidade de energia, $\epsilon = 1, 0$ | 41 |
| Figura 15 – O bounce variacional para $\epsilon = 1, 0$ | 41 |
| Figura 16 – Gráfico de $B(\beta)$ para densidade de energia, $\epsilon = 0, 8$ | 42 |
| Figura 17 – O bounce variacional para $\epsilon = 0, 8$ | 42 |
| Figura 18 – Gráfico de $B(\beta)$ para densidade de energia, $\epsilon = 0, 8$ | 42 |
| Figura 19 – O bounce variacional para $\epsilon = 0, 6$ | 42 |
| Figura 20 – Gráfico de $B(\beta)$ para densidade de energia, $\epsilon = 0, 4$ | 43 |
| Figura 21 – O bounce variacional para $\epsilon = 0, 4$ | 43 |
| Figura 22 – Gráficos dos bounces variacional e numérico para $\epsilon = 1, 4$ | 45 |
| Figura 23 – Densidades de ação euclidiana, variacional e numérica para $\epsilon = 1, 4$ | 45 |
| Figura 24 – Gráficos dos bounces variacional e numérico para $\epsilon = 1, 2$ | 45 |
| Figura 25 – Densidades de ação euclidiana, variacional e numérica para $\epsilon = 1, 2$ | 45 |
| Figura 26 – Gráficos dos bounces variacional e numérico para $\epsilon = 1, 0$ | 46 |
| Figura 27 – Densidades de ação euclidiana, variacional e numérica para $\epsilon = 1, 0$ | 46 |
| Figura 28 – Gráficos dos bounces variacional e numérico para $\epsilon = 0, 8$ | 46 |
| Figura 29 – Densidades de ação euclidiana, variacional e numérica para $\epsilon = 0, 8$ | 46 |
| Figura 30 – Gráficos dos bounces variacional e numérico para $\epsilon = 0, 6$ | 47 |
| Figura 31 – Densidades de ação euclidiana, variacional e numérica para $\epsilon = 0, 6$ | 47 |
| Figura 32 – Gráficos dos bounces variacional e numérico para $\epsilon = 0, 4$ | 47 |
| Figura 33 – Densidades de ação euclidiana, variacional e numérica para $\epsilon = 0, 4$ | 47 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT Associação Brasileira de Normas Técnicas

UNIFEI Universidade Federal de Itajubá

TQC Teoria Quântica de Campos

LISTA DE SÍMBOLOS

\forall Para todo

\in Pertence

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 12 |
| 2 | Taxa de decaimento em mecânica quântica unidimensional | 16 |
| 2.1 | Introdução | 16 |
| 2.2 | Integral Funcional Euclidiana | 18 |
| 2.3 | Estados instáveis e o Bounce | 22 |
| 3 | Taxa de tunelamento em teoria quântica de campos | 27 |
| 3.1 | Generalização para o caso de um campo escalar real | 27 |
| 3.2 | O bounce em teoria quântica de campos | 28 |
| 3.3 | Método de aproximação de "parede fina"(thin wall approximation) | 31 |
| 4 | Estimativas para a taxa de tunelamento através do Método Vari- | |
| | acional | 35 |
| 4.1 | O método Variacional | 35 |
| 4.2 | Bounce variacional no modelo φ^4 em $D = 4$ | 37 |
| 4.3 | Comparação entre o bounce variacional e o numérico | 44 |
| 5 | Conclusões | 49 |
| A | Apêndice: Como Calcular o Determinante | 50 |
| | Bibliografia | 52 |

1 Introdução

O interesse pelas consequências cosmológicas das teorias de grande unificação, teve um aumento considerável nos anos 70, e ainda hoje é de interesse para comunidade científica como podemos ver os artigos. Esse interesse é justificado, pois estas teorias, em particular o modelo padrão, podem solucionar o problema de assimetria bariônica do universo [1] [2]. É claro que o estudo futuro das propriedades das partículas elementares na faixa de energias da ordem de 10^{15} GeV , necessário para o estudo completo das teorias de grande unificação, ainda não puderam ser feitos com a ajuda dos experimentos de raios cósmicos, nem com a construção de novos aceleradores. Assim sendo, além dos experimentos ligados ao decaimento do próton, uma das grandes fontes de informação para a teoria de grande unificação é o estudo das consequências cosmológicas desta teoria. O estudo das transições de fase com quebras de simetrias, é uma etapa fundamental no estudo de processos físicos no universo primordial. Segundo a teoria de grande unificação, durante o esfriamento do universo, nas suas etapas de evolução primordial, existiram muitas quebras de simetrias [3]. Para a teoria cosmológica de produção da assimetria bariônica, é muito importante que haja uma teoria de transição de fase com quebra de simetria [2]. Em conexão com isto, é de particular importância o estudo da cinemática da transição de fase, i.e, a velocidade a qual acontece a transição de fase.

Transição de fase é um tema bem conhecido em matéria condensada. Uma substância pode ser encontrada em diversos estados, dependendo apenas da sua temperatura T e pressão P . Um caso bem conhecido é o da água. O diagrama de fase dessa substância pode ser obtido através da sua equação de estado, que relaciona temperatura, pressão e densidade. Dependendo dos valores de temperatura e pressão, essa substância pode ser encontrado nos estados sólido, líquido, ou gasoso. Os diferentes estados de fase dessa substância estão separados por linhas de transição de fase de primeira e segunda ordem. Em uma transição de fase de primeira ordem, duas fases distintas podem coexistir a uma dada temperatura crítica. Perto de uma fase de transição de primeira ordem, o comportamento de um sistema é irregular. Por exemplo, a densidade do sistema sofre uma mudança descontínua quando a linha de transição de fase é atravessada. Outra característica é, que ele pode se dar com "super-cooling" ou com "super-heating". Por exemplo, a água pode existir em fase líquida um pouco acima dos 100°C em um estado meta-estável.

As transições de fase de segunda ordem (ou transições de fase contínuas) são suaves, ao contrário das transições de primeira ordem. Não existe calor latente de transição, mas o calor específico possui um comportamento irregular à temperatura crítica.

Em alguns casos, as transições de fase de primeira e segunda ordem estão associados à quebra ou restauração de alguma simetria do estado fundamental. Por exemplo, no caso da

transição de fase gás→líquido, temos uma quebra de invariância translacional e rotacional.

Particularmente, o nosso interesse reside nas transições de fase de primeira ordem, pois neste caso os sistemas exibem fases de estado meta-estáveis. Uma transição de fase de primeira ordem se dá através de criação de bolhas de nova fase (fase estável) dentro da fase meta-estável. Por exemplo, quando um gás esfria, bolhas de fase líquida são formadas dentro da fase gasosa. Se o raio r da bolha formada for muito pequeno a bolha colapsa, pois a energia volumétrica (proporcional a $-r^3$, o sinal negativo é devido ao fato do sistema sair de um estado de maior energia para outro menor) é menor que a energia superficial (proporcional a r^2) e desta forma a pressão interna será maior que a tensão superficial da bolha. Assim, apenas bolhas de raio suficientemente grandes sobreviverão para depois expandir. Ao final da transição de fase, diferentes bolhas colidem e o volume inteiro é transformado numa nova fase, a fase líquida. Uma situação similar acontece na teoria eletro fraca no contexto do mecanismo da assimetria bariônica do universo [2].

A assimetria bariônica do universo é um problema fundamental da cosmologia moderna. Existe na natureza diferentes tipos de partículas elementares. Algumas dessas partículas possuem carga elétrica e outras são neutras. Sem ser muito criterioso, podemos dividir as partículas elementares em partículas e antipartículas. Estes dois grupos possuem cargas (elétrica, leptônica, bariônica, etc) opostas. As propriedades das partículas e antipartículas são análogos; embora tenham cargas opostas, as suas massas, spins e vidas medias são iguais. Então, por que o nosso universo consiste de matéria e não de anti-matéria?. Além disso, por que não vemos uma considerável quantidade de anti-matéria no universo. Este é o problema da assimetria bariônica ou problema da bariogênese do universo.

O Modelo padrão é uma possível solução ao problema da bariogênese, pois ele apresenta três características fundamentais para o surgimento da assimetria bariônica nas etapas primordiais do nosso universo [4]: não conservação do número bariônico [5], violação das simetrias C e CP e a quebra do equilíbrio térmico. O modelo padrão fundamenta-se no grupo de gauge $SU(3) \otimes SU(2) \otimes SU(1)$. O grupo $SU(3)$ representa a interação forte, $SU(2)$ descreve o grupo fraco, e $SU(1)$ é chamado de o grupo de hipercarga. O electromagnetismo surge em consequência da quebra de grupo $SU(2) \otimes SU(1)$ em $SU(1)_{EM}$. O modelo padrão de partículas é constituída de 3 famílias fermiônicas, 1 escalar de Higgs, 3 bosons vetoriais massivos e o foton. Para que haja assimetria bariônica de forma significativa no universo primordial, é necessário que a transição de fase aconteça durante o esfriamento do universo. Então, a transição de fase terá que ser de primeira ordem. No diagrama de fase do modelo eletro-fraco padrão para altas temperaturas, há uma linha de transição de fase de primeira ordem, que separa a fase simétrica (fase onde há violação do número bariônico) da fase de simetria quebrada (ou fase de Higgs; nesta fase, o número bariônico é conservado). Então,

na transição de fase: fase simétrica \rightarrow fase de Higgs; bolhas da fase de Higgs aparecem espontaneamente no interior da fase simétrica. Se a bolha formada tiver um raio suficientemente grande, esta se expandirá, e no final da transição de fase bolhas formadas em diferentes pontos colidem levando o universo todo a uma nova fase, a fase de Higgs, onde a matéria dominará sob a antimatéria. Uma etapa importante no estudo da cinética deste processo físico é o cálculo da taxa de nucleação (ou taxa de decaimento da fase meta-estável) das bolhas da fase de Higgs (a fase estável).

O decaimento da fase meta-estável é devido a flutuações térmicas e quânticas. Em geral, a altas temperaturas as flutuações térmicas predominam enquanto que a baixas temperaturas predominarão as flutuações quânticas. A temperatura zero, o problema da taxa de decaimento é simplesmente igual à taxa de tunelamento por uma barreira de potencial.

O problema do cálculo da taxa de decaimento ou taxa de nucleação, além dos exemplos citados anteriormente, aparece em diversas outras áreas, como por exemplo, no estudo das reações nucleares (decaimento de partículas α , fusão e fissão), no decaimento espontâneo em sistemas de He^3/He^4 , nas reações químicas, etc [6]. Em particular, o problema do tunelamento é de interesse teórico para o estudo do comportamento assintótico das series perturbativas, tanto na mecânica quântica quanto na teoria quântica de campos [7].

O problema do cálculo da taxa de nucleação na matéria condensada é um problema bem estabelecido na mecânica estatística clássica [8]. A versão moderna foi concebida por Langer em inúmeros artigos dirigidos ao estudo de sistemas meta-estáveis [9]. No caso da teoria quântica de campos a temperatura zero, o estudo da taxa de decaimento do estado meta-estável (ou segundo Coleman, o falso vácuo) foi iniciado com o trabalho de Voloshin et al. [10], e posteriormente desenvolvido por Callan e Coleman nos finais dos anos 70 [11, 12]. No caso da teoria quântica de campos a temperatura finita, as correções térmicas à taxa de decaimento foi considerada primeiro por Linde [13, 14]. Embora um assunto relativamente antigo, o cálculo da taxa de decaimento à temperatura zero ou finita é um assunto atual, conforme pode ser visto na literatura recente em diversos contextos [14–25].

Nesta tese vamos estudar o cálculo da taxa de decaimento da fase meta-estável (ou falso vácuo) na teoria quântica de um campo escalar com auto-interação que possui um estado meta-estável. No capítulo 2, seguindo o formalismo de Callan e Coleman [12] deduzimos a taxa de decaimento do estado meta-estável (o vácuo estado fundamental) para um sistema mecânico quântico em uma dimensão. No capítulo 3 estendemos o método para deduzir a taxa de decaimento do vácuo falso à temperatura zero para uma teoria de campo escalar em D dimensões espaço-temporais. Também, seguindo a referencia [11], consideramos um caso específico chamado de aproximação de parede fina (The Thin-wall approximation). No

capítulo 4, discutiremos o método variacional para o estudo do decaimento do estado meta-estável (ou falso vácuo). Também consideramos como o decaimento do vácuo falso pode ser resolvido mediante um cálculo computacional (numericamente) e comparamos com o método variacional. Por fim, no capítulo 5 consideramos as nossas conclusões.

2 Taxa de decaimento em mecânica quântica unidimensional

2.1 Introdução

Consideremos uma partícula se movimentando em uma dimensão, sujeita a um potencial do tipo ilustrado na Fig.(1). Classicamente, o estado (trajetória estática) na posição $x = 0$ é um estado estável, qualquer perturbação pequena não resultará em trajetórias que se afastam muito da posição $x = 0$. Entretanto, na versão quântica, o estado correspondente se tornará instável devido ao tunelamento quântico, pela penetração da barreira de potencial. Na literatura esse estado instável é chamado de estado fundamental falso.

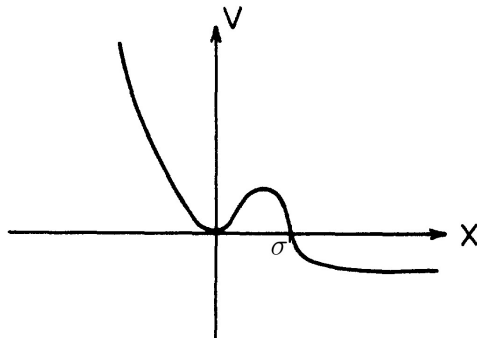


Figura 1 – Energia potencial em função da posição para uma partícula com um estado fundamental falso [12].

Em teoria quântica de campo, temos uma situação semelhante. Consideremos uma teoria de um campo escalar com densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - U(\varphi), \quad (2.1)$$

onde $U(\varphi)$ é do tipo mostrado no gráfico da figura (2). Na teoria clássica de campos, $\varphi = \varphi_-$ é uma solução estática de equilíbrio estável, e pelo menos no contexto da teoria de perturbações, quanticamente $\varphi = \varphi_-$ corresponde ao único estado de vácuo da teoria. Por outro lado a solução estática $\varphi = \varphi_+$, o qual também é um estado classicamente estável, na versão quântica corresponde a um estado instável, devido a possibilidade de tunelamento pela barreira de potencial, de forma análoga ao caso mecânico quântico acima descrito. Esse estado é conhecido, na literatura, como falso vácuo. No presente capítulo, consideraremos a taxa de decaimento, ou de tunelamento, por unidade de tempo deste falso vácuo em uma teoria de campo escalar em $D = (d + 1)$ dimensões espaço-temporais. Inicialmente, por motivos didáticos, consideraremos $D = 1$, ou seja, o caso da mecânica quântica não relativista. Em seguida, generalizaremos quase que trivialmente para o caso de $D > 1$, isto é, para teoria quântica de campos. Antes de considerar o cálculo da taxa de decaimento do vácuo falso,

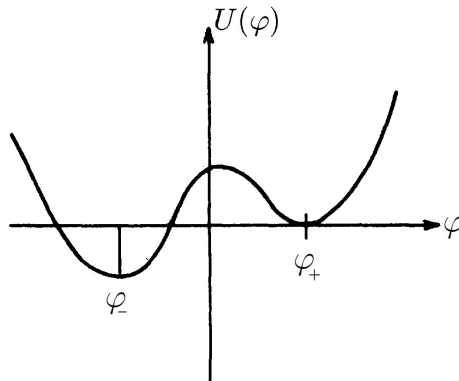


Figura 2 – Potencial com um falso estado fundamental em teoria quântica de campos [12].

consideraremos a definição desta taxa. Dado um sistema isolado, em mecânica quântica, temos que a densidade de probabilidade de encontrarmos uma partícula em torno do ponto x , é

$$\mathcal{P}(x) = \psi^*(x, t)\psi(x, t) = |\psi(x, t)|^2, \quad (2.2)$$

onde a evolução temporal da função de onda é dada por

$$\psi(x, t) = \phi(x)e^{-iEt/\hbar}, \quad (2.3)$$

e E é a energia da do estado correspondente.

Nota se que a dependência temporal para a amplitude de probabilidade desaparece quando se calcula a sua densidade de probabilidade, já que a energia E , do sistema é suposto real.

De outro lado, consideremos uma partícula sob a influencia de um potencial do tipo mostrado na Fig. (1). Vamos supor que em um tempo $t = t_0$, a partícula se encontra na posição $x = 0$, correspondente ao estado fundamental falso. Devido a efeitos quânticos a partícula pode tunelar a barreira de potencial e ser encontrado posteriormente em uma posição $x = \sigma$, no instante $t = t_0 + t_\sigma$, onde t_σ é indeterminado. Então, a densidade de probabilidade de se encontrar a partícula na posição $x = 0$, diminuirá com o decorrer do tempo. Por outro lado, pelo acima exposto, isto parece impossível do ponto de vista do formalismo da mecânica quântica, já que para energia real a probabilidade é independente do tempo. Entretanto, sendo que o estado quântico correspondente a $x = 0$ não é um estado estacionário, se espera que a energia correspondente possa adquirir uma parte imaginária, responsável pela dependência temporal da probabilidade correspondente. Neste caso, teremos para a densidade de probabilidade (2.2),

$$\mathcal{P}(x, t) = |\phi(x)|^2 \exp(-\Gamma t), \quad (2.4)$$

onde, Γ é definido como:

$$\Gamma = \frac{-2 \operatorname{Im} E}{\hbar}. \quad (2.5)$$

O que determina a existência da parte imaginária da energia de uma partícula, é a condição de fronteira do problema analisado. Podemos encontrar uma discussão profunda desses casos em livros-texto como o de Blatt e Weisskopf [26]. Assim, para determinarmos a taxa de decaimento Γ , devemos considerar o cálculo da energia associada ao falso estado fundamental. Essa é tarefa que consideraremos na próxima seção para um sistema mecânico quântico.

2.2 Integral Funcional Euclidiana

Em mecânica quântica existe uma técnica de aproximações semi-clássica, muito importante, conhecida como método WKB, devido a G. Wentzel, A. Kramers e L. Brillouin [28]. Essa técnica pode ser usada para a obtenção da parte imaginária da energia (a taxa de tunelamento) por meio da solução da equação de Schrödinger. Como a nossa intenção é generalizar o resultado para a teoria quântica de campos, vamos considerar uma técnica que se adapta imediatamente para esse caso, uma vez resolvido o caso mecânico quântico. Essa técnica está baseada em método de integrais de trajetória de Feynman [27]. Na seção 2.3, generalizaremos estes resultados à teoria quântica de um campo escalar em $D = d + 1$ dimensões espaço temporais.

Vamos lidar exclusivamente com a teoria de uma partícula sem spin e de massa unitária movendo-se sobre ação de uma potencial em uma dimensão,

$$H = \frac{p^2}{2} + V(x). \quad (2.6)$$

Nossa ferramenta fundamental será a versão Euclidiana (tempo imaginário, $\tau = it$) das integrais funcionais de Feynman [27],

$$\langle x_f | e^{-\hat{H}T/\hbar} | x_i \rangle = N \int \mathcal{D}x e^{-S_E(x)/\hbar}. \quad (2.7)$$

Ambos os lados desta equação requerem de uma explicação. O lado esquerdo, \hat{H} é o operador Hamiltoniano, $|x_i\rangle$ e $|x_f\rangle$ são autofunções das posições iniciais e finais da partícula no quadro de Heisenberg e T é um número positivo. No lado direito N é um fator de normalização, S_E é a ação Euclidiana (tempo imaginário) do sistema,

$$S_E(x) = \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right], \quad (2.8)$$

e $\mathcal{D}x$ denota a integração funcional sobre todas as funções $x(\tau)$, obedecendo as condições de contorno,

$$x\left(\frac{-T}{2}\right) = x_i, \quad x\left(\frac{T}{2}\right) = x_f.$$

O lado esquerdo da equação (2.7) é de interesse porque, se expandirmos em um conjunto completo de autoestados de energia,

$$\hat{H} |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle, \quad \sum_n |n\rangle \langle n| = \hat{\mathbb{1}}, \quad (2.9)$$

então temos

$$\begin{aligned} \langle x_f | e^{-T\hat{H}/\hbar} | x_i \rangle &= \langle x_f | e^{-T\hat{H}/\hbar} \hat{\mathbb{1}} | x_i \rangle \\ &= \sum_n e^{-E_n T/\hbar} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para um valor de $T \rightarrow \infty$, o termo principal na expressão acima é dado pela energia e a função de onda do autoestado de energia mais baixo, ou seja,

$$\langle x_f | e^{-\hat{H}T/\hbar} | x_i \rangle \approx e^{-E_0 T/\hbar} \langle x_f | 0 \rangle \langle 0 | x_i \rangle. \quad (2.11)$$

Para calcular o lado direito da Eq. (2.7) consideremos uma função $\bar{x}(\tau)$ que satisfaça as condições de contorno do problema, então, uma função geral que também obedeça as condições de contorno pode ser escrita como

$$x(\tau) = \bar{x}(\tau) + \xi(\tau), \quad (2.12)$$

onde

$$\xi(\tau) = \sum_n c_n x_n(\tau). \quad (2.13)$$

Na expressão acima consideramos que as funções $x_n(\tau)$'s formam um conjunto completo de funções ortonormais reais que se anulam no limite do contorno, ou seja,

$$\int_{-T/2}^{T/2} d\tau x_n(\tau) x_m(\tau) = \delta_{nm}, \quad (2.14)$$

e

$$x_n\left(\pm \frac{T}{2}\right) = 0. \quad (2.15)$$

Então, podemos escrever a medida $\mathcal{D}x$ em termos dos coeficientes c_n como

$$\mathcal{D}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \prod_n dc_n. \quad (2.16)$$

Esta medida é diferente em normalização da medida definida por Feynman; é por este motivo que precisamos de uma constante de normalização N em (2.7)

No lado direito da equação (2.7), podemos fazer uma avaliação da mesma, usando aproximações Gaussianas (limite semiclássico, \hbar muito pequeno ou $S_E \gg 1$). Nesse caso a

integral funcional (2.7) é dominada pelo ponto estacionário $\bar{x}(\tau)$ da ação Euclidiana, a qual satisfaz

$$\begin{aligned} \delta S_E &= 0, \\ \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{x}} \Big|_{\dot{x}=\dot{\bar{x}}} \delta \dot{x} + \frac{\partial V(x)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} \delta x \right] &= 0, \\ \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \left[\frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} - V'(\bar{x}) \right] \delta x &= 0, \\ \Rightarrow \frac{\delta S_E}{\delta \bar{x}} &= -\frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} + V'(\bar{x}) = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde o apóstrofe denota uma derivação com relação a x .

Em primeiro lugar, por simplicidade, vamos considerar que haja apenas um ponto estacionário. Caso existam outros pontos estacionários, teremos que somar a contribuição de cada um deles à integral funcional. Então, expandindo S_E em torno de $\bar{x}(\tau)$, temos

$$\begin{aligned} S_E[\bar{x}(\tau) + \delta x(\tau)] &= S_E(\bar{x}(\tau)) + \int d\tau \frac{\delta S_E}{\delta x(\tau_1)} \Big|_{x(\tau_1)=\bar{x}(\tau)} \cdot [x(\tau_1) - \bar{x}(\tau_1)] + \\ &+ \frac{1}{2!} \int d\tau_1 d\tau_2 \frac{\delta^2 S_E}{\delta x(\tau_1) \delta x(\tau_2)} \Big|_{[x(\tau_1), x(\tau_2)] = [\bar{x}(\tau_1), \bar{x}(\tau_2)]} \cdot [x(\tau_1) - \bar{x}(\tau_1)] \cdot [x(\tau_2) - \bar{x}(\tau_2)] + \dots, \end{aligned}$$

onde $\delta S_E = 0$ em $x(\tau) = \bar{x}(\tau)$. Usando a equação (2.12), temos

$$S_E[\bar{x}(\tau) + \delta x(\tau)] \simeq S_E[\bar{x}(\tau)] + \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \frac{\delta^2 S_E}{\delta \bar{x}(\tau_1) \delta \bar{x}(\tau_2)} \xi(\tau_1) \xi(\tau_2). \quad (2.18)$$

Agora, precisamos analisar a derivada segunda de S_E avaliada em $\bar{x}(\tau)$. Usando definição da derivada funcional, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 S_E}{\delta \bar{x}(\tau_1) \delta \bar{x}(\tau_2)} &= \frac{\delta^2 S_E(\tau_1)}{\delta \bar{x}^2} \delta(\tau_1 - \tau_2) \\ &= \left[-\partial_{\tau_1}^2 + V''(\bar{x}) \right] \delta(\tau_1 - \tau_2). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Se escolhermos x_n 's na equação (2.12) como sendo autofunções do operador obtido na equação (2.19), ou seja,

$$\left[-\partial_{\tau_1}^2 + V''(\bar{x}) \right] x_n(\tau) = \lambda_n x_n(\tau), \quad (2.20)$$

então, a equação (2.18) se reduz à

$$S_E[\bar{x}(\tau) + \delta x(\tau)] \simeq S_E[\bar{x}(\tau)] + \frac{1}{2} \sum_n c_n^2 \lambda_n. \quad (2.21)$$

Por fim, substituindo as equações (2.21) e (2.16) em (2.7), temos

$$\langle x_f | e^{-T\hat{H}/\hbar} | x_i \rangle \simeq \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-S_E(\bar{x})/\hbar} \prod_n \int dc_n \exp\left(-\frac{1}{2\hbar} \lambda_n c_n^2\right). \quad (2.22)$$

Com isso, identificamos um produto de integrais Gaussianas na equação (2.22), então

$$\langle x_f | e^{-T\hat{H}/\hbar} | x_i \rangle \simeq N e^{-S_E(\bar{x})/\hbar} \prod_n \lambda_n^{-1/2},$$

mas

$$\prod_n \lambda_n^{-1/2} = \{\det[-\partial_\tau + V''(\bar{x})]\}^{-1/2},$$

portanto,

$$\langle x_f | e^{-T\hat{H}/\hbar} | x_i \rangle \simeq N e^{-S_E(\bar{x})/\hbar} \det[-\partial_\tau + V''(\bar{x})]^{-1/2}. \quad (2.23)$$

Neste caso, estamos supondo que todos os autovalores (λ_n) são positivos. Em (2.23) N , é um fator de normalização que não depende dos c_n 's, pois a transformação (2.13) é linear nos c_n 's.

Note que a equação (2.17) pode ser vista como a equação de movimento de uma partícula de massa unitária movendo-se sob ação de um potencial $-V(x)$, onde τ é o parâmetro de evolução. Então, considerando-se a primeira integral, obtemos

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau} \right)^2 - V(\tau) \quad (2.24)$$

a qual pode ser interpretada como sendo a "energia" da partícula, ou seja, a sua constante de movimento. Esse fato pode ser usado para determinar as características qualitativas das soluções da equação (2.17) através de uma simples inspeção.

Vamos considerar um exemplo simples para realizar essa análise. Consideremos um potencial com apenas um mínimo, como o mostrado na figura (3-a). No caso em que $x_i = x_f = 0$, a única solução possível que obedece estas condições de contorno, na figura (3-b), é a solução trivial, $\bar{x} = 0$. Nesta solução, a ação Euclidiana é zero ($S_E = 0$). Definindo $\omega^2 = V''(0)$, então um calculo padrão, que pode ser visto no apêndice A desse trabalho, nos mostra que para T muito grande,

$$N \left[\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2) \right]^{-1/2} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\omega T}{2}\right). \quad (2.25)$$

Assim, usando (2.11) encontramos que a energia do estado fundamental é dada por

$$E_0 = \frac{1}{2} \omega \hbar [1 + O(\hbar)]. \quad (2.26)$$

Além disso, a probabilidade da partícula estar na origem quando está em seu estado fundamental é

$$|\langle x = 0 | n = 0 \rangle|^2 = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/2} [1 + O(\hbar)], \quad (2.27)$$

onde explicitamos o fato de estarmos considerando um cálculo semi-clássico ou aproximação gaussiana. Dessa forma quando $S_E(\bar{x}) \gg \hbar$, a partícula está aproximadamente no estado fundamental de um oscilador harmônico centrado em $x = 0$.

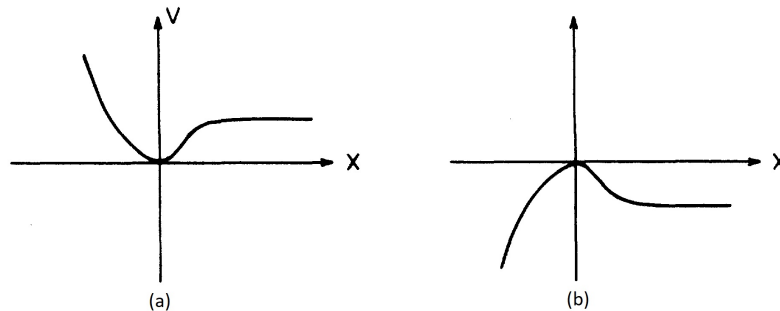


Figura 3 – (a) Potencial de uma partícula que possui um único estado fundamental. (b) O mesmo potencial mas com sinal negativo. [12]

2.3 Estados instáveis e o Bounce

Nesta seção iremos calcular a energia do falso estado fundamental, no potencial da figura (1), usando o formalismo matemático desenvolvido na seção anterior. Conforme podemos ver da figura (1), ainda devemos considerar $x_i = x_f = 0$. Desconsiderando a penetração pela barreira, no limite semiclássico, este potencial tem um autoestado de energia no fundo do poço, i.e, associado ao falso estado fundamental. Temos que calcular as correções para a energia deste estado devido a penetração pela barreira.

Considerando o potencial invertido da figura (1), na figura (4) podemos ver que além da solução trivial, $\bar{x} = 0$, agora existem soluções não triviais para a equação (2.17), que denotaremos por $\bar{x} = x_b(\tau)$. Considerando que $x_i = x_f = 0$, essas soluções devem ser obtidas usando-se (2.24), com $E = 0$. Assim as soluções não triviais, para o caso da figura (4), podem ser descritas qualitativamente como segue. A partícula pode começar o seu movimento em $x = 0$, evoluir para à direita, para em $x = \sigma$ e voltar a $x = 0$. Uma vez que estamos interessados somente na forma da integração funcional para T muito grande, iremos focar na forma limitante de tais movimentos para $T \rightarrow \infty$. Essa forma limitante de movimento será chamada de bounce daqui para frente. Um bounce, por definição, tem ação Euclidiana finita e no limite, deve satisfazer

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} x_b(\tau) = 0. \quad (2.28)$$

Denotando a ação no bounce por B , usando (2.24) na equação (2.8), temos para B ,

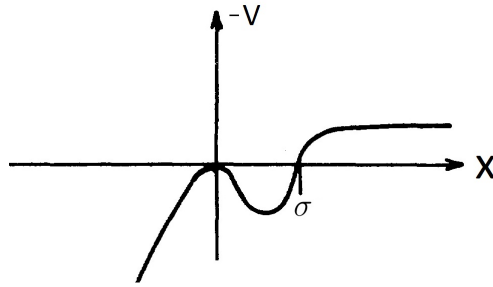


Figura 4 – Potencial ilustrado na figura (1) negativo.

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left(\frac{dx_b}{d\tau} \right)^2 \quad (2.29)$$

$$= \int_0^\sigma dx \sqrt{2V}. \quad (2.30)$$

Podemos definir "o centro do bounce" como o ponto onde $\frac{dx}{d\tau} = 0$. Devido à simetria de invariância translacional no tempo, o centro do bounce pode ser qualquer ponto ao longo do eixo τ , por exemplo, $\tau = \tau_0$. Na figura (5) ilustramos a forma qualitativa do bounce. Para

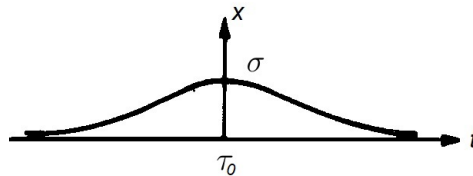


Figura 5 – Forma qualitativa do bounce

um T muito grande, um bounce centrado em qualquer parte no intervalo de integração é um ponto estacionário da integral funcional (2.23). Assim, temos soluções de configurações de multi bounces separados por grandes distâncias, centrados em $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, e mostrados figura (6), onde

$$-\frac{T}{2} > \tau_1 > \tau_2 > \dots > \frac{T}{2}.$$

Podemos avaliar a integral funcional (2.23) somando todas essas configurações. Para fazer

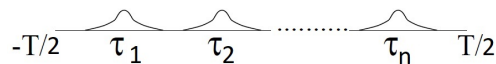


Figura 6 – configuração de multi-bounce

isso, vamos, inicialmente, considera todos os fatores que entram nesta expressão; então faremos o somatório.

O primeiro passo é analisar a exponencial da equação (2.23), isto é a ação S_E . Para n bounces, temos $S_E = nB$, onde consideramos, como ilustrado na figura (6) que os bounces estão o suficientemente afastados.

Agora, consideremos avaliação do determinante em (2.23), o qual é um pouco mais complicado. Já que os bounces estão separados por extensas regiões nas quais $x = 0$, podemos avaliar o determinante como um produto da contribuições desses n bounces cujos centros estão suficientemente afastados, isto é, uma configuração onde cada bounce ocupa um intervalo de "tempo" muito grande e onde o intervalo entre eles também é muito grande. Desta forma obtemos

$$\left(\frac{\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-\omega T}{2}\right) K^n, \quad (2.31)$$

onde K é definido de maneira que esta expressão forneça a expressão correta para o caso de um bounce. Iremos avaliar K em breve.

Por fim, devemos integrar nos centro dos bounces, já que por invariância translacional no tempo, esses centros podem estar em qualquer lugar,

$$\int_{-T/2}^{T/2} d\tau \int_{-T/2}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{-T/2}^{\tau_{n-1}} d\tau_n = \frac{T^n}{n!}. \quad (2.32)$$

Agora podemos fazer o somatório sobre todas as configurações possíveis de "multi-bounces" para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Dessa forma obtemos para a equação (2.23), a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \langle 0 | e^{-\hat{H}T/\hbar} | 0 \rangle &\simeq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \frac{(K e^{-B/\hbar} T)^n}{n!} \\ &= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\omega T}{2} + K e^{-B/\hbar} T\right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Podemos notar, pelo argumento da exponencial da equação (2.33), que essa configuração de multi-bounce modificou a energia do estado fundamental dado pela equação (2.26), e agora temos

$$E_0 = \left(\frac{\hbar\omega}{2} - \hbar K e^{-B/\hbar}\right) [1 + O(\hbar)]. \quad (2.34)$$

O termo adicional é muito pequeno em magnitude em comparação ao primeiro. Esse termo seria irrelevante se K não tivesse uma parte imaginária, como veremos em breve.

Agora, podemos voltar a nossa análise ao fator K . Como mencionado anteriormente, esse fator é definido, considerando-se a contribuição de um bounce na primeira linha da

equação (2.33), i.e, a partir de

$$Ne^{-B/\hbar} \left[\det(-\partial_\tau^2 + V''(x_b)) \right]^{-1/2} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} e^{-\omega T/2} K T e^{-B/\hbar}, \quad (2.35)$$

de onde usando a equação (2.25), obtemos

$$K = \frac{1}{T} \left[\frac{\det(-\partial_\tau^2 + V''(x_b))}{\det(-\partial_\tau^2 + V''(0))} \right]^{-1/2}. \quad (2.36)$$

Notemos que preciso investigar a equação (2.20) com $\bar{x} = x_b$, já que esse operador aparece na expressão para K . Nesse caso a equação (2.20) possui necessariamente uma autofunção com autovalor $\lambda_1 = 0$, como pode ser visto, usando-se a equação de movimento (2.17) com $\bar{x} = x_b$. Esse autovalor é consequência da invariância translacional no tempo. A autofunção correspondente, normalizada a um, vem dado por

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{B}} \frac{dx_b}{d\tau}, \quad (2.37)$$

onde o fator de normalização, \sqrt{B} , é obtido usando-se a equação (2.29). O fato de termos um autovalor nulo, invalida a suposição que fizemos quando realizamos as integrais gaussianas na equação (2.22). Note que para $\lambda_1 = 0$ nesse caso o valor da integral em c_1 diverge. Vamos mostrar que essa divergência é proporcional a $T \rightarrow \infty$. Consideremos a variação das trajetórias devida exclusivamente à variação de c_1 , ou equivalentemente devido à variação dos centros do bounce, nesse caso temos

$$dx = \frac{dx_b}{d\tau} d\tau = x_1 dc_1, \quad (2.38)$$

de onde, usando (2.37) obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} dc_1 = \sqrt{\frac{B}{2\pi\hbar}} d\tau. \quad (2.39)$$

Dessa forma, integrando em c_1 , na equação (2.22), obtemos

$$\sqrt{\frac{B}{2\pi\hbar}} T.$$

Em resumo, ao avaliar o determinante, não devemos incluir o autovalor zero, mas devemos incluir em K um fator de $(B/2\pi\hbar)^{1/2} T$.

Por outro lado, ao analisar x_1 , descobrimos que ele possui um nó, isso ocorre devido a $d\bar{x}/d\tau$ tem um zero no ponto de retorno. Assim, usando o teorema dos nós, concluímos que $\lambda_1 = 0$ não é o menor auto-valor, mas existe uma autofunção sem nós, com autovalor $\lambda_0 < 0$. Esta situação também está em desacordo com a nossa suposição inicial a respeito dos

autovalores λ quando realizamos as integrais gaussianas em (2.22). Ao integrarmos em c_0 , obteremos uma integral divergente. Neste caso não poderemos proceder de forma análoga a como fizemos com o autovalor nulo. Como estamos calculando a energia de um estado instável, um ponto essencial a ser observado é que a energia desse tipo de estados não é um autovalor do operador Hamiltoniano (H), na verdade, é um objeto que só pode ser definido por um processo de extensão analítica. Consequentemente devemos realizar a extensão analítica da integral em c_0 . Podemos obter essa extensão analítica considerando uma extensão analítica do valor da integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dc_1 e^{-\lambda_0 c_1^2} &= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_0}} \\ &= \pm i \sqrt{\frac{\pi}{|\lambda_0|}}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Obtemos dois valores para a extensão analítica e escolhemos o sinal adequado, na expressão anterior, considerando o que é esperado para a parte imaginária da energia desde o ponto de vista físico. Isto é, devemos obter uma taxa de decaimento, decrescente no tempo. Para tal, devemos consideramos o valor positivo na expressão acima. Dessa forma obtemos para K em (2.36),

$$K = i \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left| \frac{\det'(-\partial_\tau^2 + V''(x_b))}{\det(-\partial_\tau^2 + V''(0))} \right|^{-1/2}, \quad (2.41)$$

onde o apóstrofo no determinante significa que desconsideramos o modo nulo do operador. Dessa forma, substituindo em (2.34) obtemos para a parte imaginária da energia

$$\text{Im } E_0 = -\hbar e^{-B/\hbar} \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left| \frac{\det'(-\partial_\tau^2 + V''(x_b))}{\det(-\partial_\tau^2 + V''(0))} \right|^{-1/2} \quad (2.42)$$

e substituindo em (2.5) obtemos para a taxa de tunelamento por unidade de tempo

$$\Gamma = \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left| \frac{\det'[-\partial_\tau^2 + V''(x_b)]}{\det[-\partial_\tau^2 + \omega^2]} \right|^{-1/2} e^{-B/\hbar} \times [1 + O(\hbar)] \quad (2.43)$$

Deve ser notado que na equação anterior o termo relevante é o fator exponencial. Na próxima seção consideramos a extensão para o caso de um campo escalar relativista em $D = (d + 1)$ dimensões espaço temporais.

3 Taxa de tunelamento em teoria quântica de campos

3.1 Generalização para o caso de um campo escalar real

Neste capítulo, estendemos o formalismo apresentado no capítulo anterior para a Teoria Quântica de Campos (TQC). Vamos considerar uma teoria de um único campo escalar, φ , em $D = (d + 1)$ dimensões espaço temporais, cuja ação euclídeana vem dado por

$$S_E(\varphi) = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + U(\varphi) \right], \quad (3.1)$$

onde $\mu = 0, 1, 2, \dots, d$. Vamos considerar o caso em que o potencial, $U(\varphi)$, tem pelo menos dois mínimos não degenerados, como o mostrado na figura (2), ou seja, vamos trabalhar com uma teoria de um campo escalar que possui um vácuo falso. Este estado, como já comentado anteriormente, é um estado meta-estável devido às flutuações quânticas. Assim como o estado instável em mecânica quântica, o vácuo falso pode decair, isto é, tunelar a barreira de potencial. Vamos considerar a determinação da taxa de decaimento do vácuo falso, da mesma forma como realizado no capítulo anterior. A definição da taxa de decaimento ou tunelamento ainda é dada pela equação (2.5). Assim devemos considerar o cálculo da parte imaginária da energia do estado correspondente ao vácuo falso. Para tal efeito, procedendo como no caso do capítulo anterior e notando que a teoria de campo escalar acima tem como caso particular a mecânica quântica não relativista de uma partícula, mediante a identificação $\varphi \rightarrow x$ e $D = 1$, não é difícil obter a parte imaginária da energia generalizando o resultado (2.42), com as devidas adaptações.

Primeiramente, no caso da TQC, temos uma teoria em $D(d + 1)$ dimensões, então a equação que descreve o bounce, neste caso, não é uma simples equação (2.17), mas sim a equação obtida via $\delta S_E = 0$, o qual resulta em

$$\frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial \tau^2} + \sum_k^d \frac{\partial^2 \varphi_b}{dx^k} - U'(\varphi) = 0 \quad (3.2)$$

onde o apóstrofe denota a derivação com respeito a φ . Em segundo lugar, no referido caso, temos d simetrias translacionais no espaço, além da simetria translacional no tempo imaginário, τ . Então, em D dimensões existirão D autofunções de autovalor nulo proporcionais a $\partial_\mu \varphi_b$. Então, ao fazer a integração sob os módulos nulos, ou seja, integrar os centros dos bounces adquirimos um infinito proporcional ao tempo imaginário e ao volume total do espaço, VT , onde V é o volume espacial. O elemento de proporcionalidade que aparece em mecânica quântica unidimensional é $(B/(2\pi\hbar))^{1/2}$, já em TQC obtemos, como elemento de proporcionalidade, $(B/(2\pi\hbar))^{D/2}$. Dessa forma a parte imaginária para a energia do vácuo

falso resultará em

$$\text{Im } E_0 = -\hbar e^{-B/\hbar} \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{D/2} V \left| \frac{\det'(-\partial^2 + U''(\varphi_b))}{\det(-\partial^2 + U''(\varphi_+))} \right|^{-1/2}, \quad (3.3)$$

onde $B = S_E[\varphi_b]$, o apóstrofo no determinante significa que todos os autovalores nulos são desconsiderados e $U''(\varphi) = d^2U/d\varphi^2$.

Em terceiro lugar, no caso da mecânica quântica, a segunda derivada funcional da ação Euclidiana avaliada no bounce tem apenas um auto valor negativo. Será que isso ainda é valido no caso da TQC? Supondo que isto ainda seja válido no caso da TQC, usando (2.5) obtemos para a taxa de tunelamento ou decaimento por unidade de volume do vácuo falso,

$$\frac{\Gamma}{V} = \left(\frac{S_E[\varphi_b]}{2\pi\hbar} \right)^{D/2} \left| \frac{\det'(-\partial^2 + U''(\varphi_b))}{\det(-\partial^2 + U''(\varphi_+))} \right|^{-1/2} e^{-S_E[\varphi_b]/\hbar}. \quad (3.4)$$

Devemos observar que o determinante funcional que aparece na equação anterior é em geral divergente ultravioleta, como esperado sempre que se trabalha com uma Teoria Quântica de Campos relativista.

Na próxima seção, abordaremos em detalhe a existência de soluções para a equação do bounce.

3.2 O bounce em teoria quântica de campos

Em mecânica quântica (caso unidimensional), vimos que o período do bounce, T , cujo movimento começa e termina em $x = 0$, é infinito (equação (2.28)). Podemos obter a versão desta condição para o caso em TQC. Então, como uma extensão do caso da mecânica quântica, temos para a condição de contorno em τ ,

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \varphi_b(\tau, \vec{x}) = \varphi_+, \quad (3.5)$$

onde $\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^d)$. Além disso, assim como no caso da mecânica quântica, temos liberdade de escolher o centro do bounce em qualquer ponto do eixo τ . Escolhendo este ponto como sendo $\tau = 0$, temos

$$\left. \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (3.6)$$

Agora, é necessário que haja condições de contorno nas variáveis espaciais \vec{x} . É necessário que a ação Euclidiana, S_E , seja finita quando avaliada no bounce, para dessa forma termos uma contribuição diferente de zero para a taxa de tunelamento. Para termos esta condição é necessário que

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \varphi_b(\tau, \vec{x}) = \varphi_+. \quad (3.7)$$

Esta ultima condição é fisicamente consistente com o seguinte fato. O estado homogêneo $\varphi = \varphi_+$, decai para o estado $\varphi = \varphi_-$ (estado estável). Se em um certo instante o sistema se encontra no estado $\varphi = \varphi_+$, então, em um instante posterior algumas regiões do espaço estarão no estado $\varphi = \varphi_-$. Em outras palavras, vácuo verdadeiro aparece espontaneamente em qualquer parte do espaço através de flutuações quânticas e, longe destas regiões o vácuo falso permanece sem perturbações.

Agora, as condições de contorno (3.5)-(3.7) não fixam uma solução única para a equação (3.2). Dessa forma, em princípio devemos somar as contribuições para a taxa de decaimento de todas as soluções da equação (3.2) que satisfazem as condições (3.5)-(3.7). No entanto pode ser mostrado que dentre todas as soluções possíveis para essa equação, existe um certo tipo de solução que minimiza a ação euclidiana, por tanto fornece a máxima contribuição para a taxa de tunelamento. Essa solução é aquela que é esfericamente simétrica, ou $O(D)$ -invariante [29]. A equação (3.2) para um φ_b com simetria $O(D)$ é dado por,

$$\frac{d^2\varphi_b}{d\rho^2} + \frac{d}{\rho} \frac{d\varphi_b}{d\rho} = U'(\varphi_b), \quad (3.8)$$

onde

$$\rho = \left(\tau^2 + \vec{x}^2\right)^{1/2}. \quad (3.9)$$

Assim, as condições de contorno (3.5)-(3.7) tomam a forma

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \varphi_b(\rho) = \varphi_+. \quad (3.10)$$

Por fim, a equação (3.1) fica

$$S_E(\varphi_b) = \Omega_D \int_0^\infty d\rho \rho^d \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_b}{d\rho} \right)^2 + U(\varphi_b) \right], \quad (3.11)$$

onde

$$\begin{aligned} \Omega_D &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^\pi d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_d \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 \sin^3 \theta_4 \dots \sin^{d-1} \theta_d. \\ &= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

O bounce esférico deve também satisfazer

$$\left. \frac{d\varphi_b}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad (3.13)$$

canso contrário, a equação (3.8) para $\varphi_b(\rho)$, será singular em $\rho = 0$.

É possível mostrar que a equação (3.8) com as condições (3.10) e (3.13) sempre admitem uma única solução $O(D)$ invariante. Assim como fizemos no caso da equação (2.17),

se interpretarmos φ_b como a posição de uma partícula e ρ como o tempo, então a equação (3.8) pode ser interpretada como a uma equação de movimento de uma "partícula" movendo-se num potencial $-U$. Neste caso, o fator $1/\rho$ pode ser considerado como uma força de atrito à qual a partícula está submetida. De acordo com a equação (3.13), o movimento da "partícula" se inicia com velocidade zero. É possível mostra que, se escolhermos uma posição inicial apropriada, então, em um tempo infinito, $\rho \rightarrow \infty$, a partícula alcança o repouso em $\varphi = \varphi_+$, em conformidade com a condição (3.10). Da equação (3.8) segue que

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_b}{d\rho} \right)^2 - U(\varphi_b) \right] = -\frac{2}{\rho} \left(\frac{d\varphi_b}{d\rho} \right)^2 \leq 0, \quad (3.14)$$

que significa que a "partícula" perde "energia". Assim, se escolhermos a posição inicial da "partícula" à esquerda do ponto $\varphi = \varphi_-$ na figura (7), a "partícula" se movimentará à esquerda de φ_- e nunca alcançará o ponto $\varphi = \varphi_+$. Agora, considerando a "posição" inicial φ , à direita

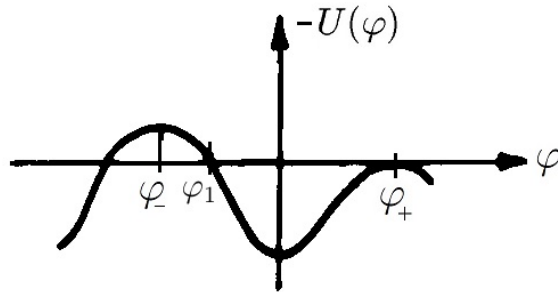


Figura 7 – Potencial negativo da figura (2).

de φ_- mas muito próximo dele, a "velocidade" da "partícula" é próximo de zero, portanto ele permanecerá perto desse ponto, por um intervalo de "tempo" apreciavelmente grande, a partir do qual o termo de atrito $1/\rho$ será praticamente desprezível e o movimento será conservativo. Dessa forma, para valores de ρ suficientemente grandes, a "partícula" atingirá a região a direita de φ_+ , realizando dessa forma um movimento ilimitado e nunca atingindo φ_+ em $\rho \rightarrow \infty$. Por outro lado consideremos um movimento tal que a posição inicial está à direita de φ_1 . Nesse caso, devido ao termo de atrito a "partícula" executará um movimento de vai e vem até atingir o repouso no mínimo de $-U(\varphi)$. Consequentemente por continuidade deve existir uma posição inicial entre φ_- e φ_1 , tal que a "partícula" atinge a posição φ_+ em $\rho \rightarrow \infty$. Dessa forma, no caso do potencial da figura (7), a solução para o bounce terá a forma mostrada na figura (8).

Nota que a equação (3.8) é uma equação altamente não linear, devido a que $U(\varphi)$ deve ser pelo menos de potência 4, em φ . Dessa forma, a solução para essa equação, em geral não poderá ser resolvida de forma exata. De outro lado, o determinante funcional que aparece

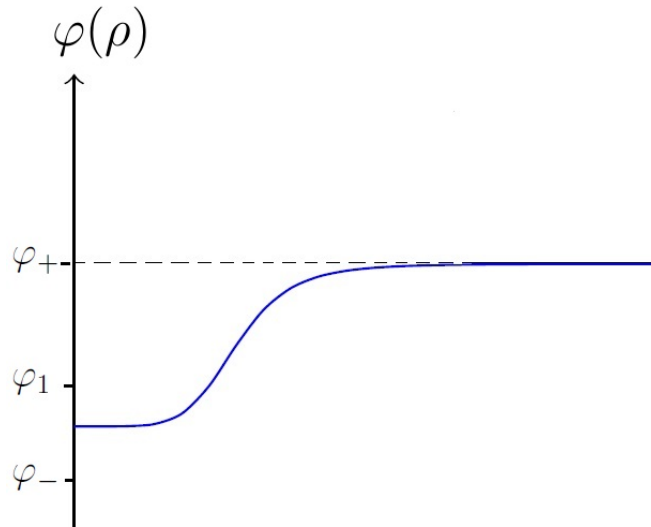


Figura 8 – Forma do bounce

na fórmula da taxa de decaimento do falso vácuo, equação (3.4), depende da solução para o bounce. Logo, fica claro que o cálculo da taxa de tunelamento é uma tarefa extremamente dura. Porém, dado que a parte dominante em Γ é o termo exponencial, para termos uma estimativa da taxa de tunelamento, bastará determinar o bounce e avaliar a ação euclidiana nessa solução.

Como já mencionado, embora a equação (3.8), seja altamente não linear, existe uma situação onde é possível determinar de forma aproximada uma expressão analítica para o bounce. Descrevemos essa situação na próxima seção.

3.3 Método de aproximação de "parede fina" (thin wall approximation)

No caso em que a diferença $U(\varphi_+) - U(\varphi_-)$ é pequeno em comparação à altura da barreira de potencial (essa restrição está ilustrado na figura (9), e ela consiste em $h \gg d$), é possível determinar de forma aproximada uma expressão analítica para o bounce. O método, conhecido como de aproximação de parede fina, foi introduzido por Coleman na referência [11]. Para ilustrar o método consideremos inicialmente uma densidade de potencial $U_+(\varphi)$ simétrica em φ ,

$$U_+(\varphi) = U_+(-\varphi), \quad (3.15)$$

com mínimos nos pontos $\pm a$, tal que

$$U'(\pm a) = 0. \quad (3.16)$$

Além disso, vamos definir

$$\mu^2 = U''(\pm a). \quad (3.17)$$

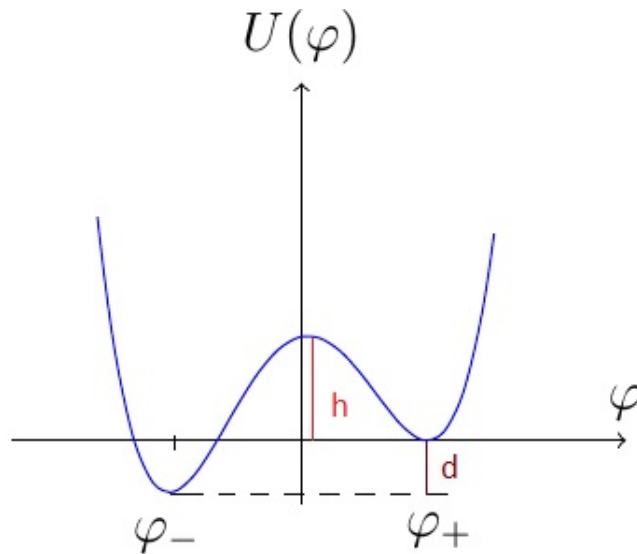


Figura 9 – Método de aproximação de parede fina.

Por exemplo, uma função da forma acima é fornecida pelo modelo φ^4 , com quebra espontânea da simetria, onde

$$U_+(\varphi) = \frac{\lambda}{8} (\varphi^2 - a^2)^2. \quad (3.18)$$

Nesse exemplo, determinamos que $\mu^2 = a^2/\lambda$.

Agora, vamos adicionar um termo pequeno a $U_+(\varphi)$, linear em φ , para quebrar a simetria dessa função,

$$U(\varphi) = U_+ + \frac{\epsilon}{2a}(\varphi - a), \quad (3.19)$$

onde ϵ é um número positivo, pequeno o suficiente. Desta forma, $U(\varphi)$, define uma teoria da classe que desejamos discutir na aproximação de parede fina. Na menor ordem não-trivial em ϵ , determinamos que

$$\varphi_{\pm} \approx \pm a, \quad (3.20)$$

e $\epsilon = U(\varphi_+) - U(\varphi_-)$ é a diferença entre as densidades de energia do vácuo falso e o verdadeiro.

Vamos mostrar que, no limite de pequenos valores de ϵ , é possível calcular a ação euclidiana no bounce, de forma fechada. No análogo de partícula mecânica, para que o sistema não perca muita energia, devido à força de atrito, $1/\rho$, nos instantes iniciais do movimento, devemos escolher $\varphi(0)$, a posição inicial da partícula no seu análogo mecânico, muito próximo de $\varphi_- \approx -a$. A partícula então permanece próximo a φ_- por um tempo bem grande, $\rho = R$. Perto do tempo R , a partícula move-se rapidamente através do vale da figura (7), praticamente sem atrito e lentamente atinge o repouso em $\varphi_+ \approx a$ em um tempo infinito. Traduzindo o análogo mecânico em termos da linguagem do campo, temos que o bounce se assemelha nesse caso, a uma grande bolha esférica de quatro dimensões de raio R , com uma parede fina que

separa o falso vácuo (parte de fora da bolha) do verdadeiro verdadeiro vácuo (parte de dentro da bolha).

Para continuar, precisamos de mais informações sobre a parede da bolha. Para $\rho \approx R$, podemos desconsiderar o termo de amortecimento viscoso na equação (3.8), e podemos também desconsiderar na mesma ordem de aproximação o termo proporcional a ϵ em $U(\varphi)$. Obtemos assim uma equação bastante familiar em TQC em uma dimensão,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = U'_+(\varphi), \quad (3.21)$$

onde x é a variável espacial na teoria unidimensional. As propriedades desta equação tem sido amplamente discutidas na literatura. A solução fundamental é uma função ímpar de x , $\varphi_1(x)$, a qual pode ser obtida considerando-se a primeira integral dessa equação, obtendo-se

$$x = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{2U_+(\varphi)}}. \quad (3.22)$$

Para a equação (3.21), a ação unidimensional correspondente é dada por

$$\begin{aligned} S_1 &= \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_1}{dx} \right)^2 + U_+(\varphi_1) \right] \\ &= \int_{-a}^a d\varphi \sqrt{2U_+(\varphi)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Para $\mu|x| \gg 1$, a equação (3.22) resulta em,

$$\varphi_1 = \pm \left(a - Ce^{-\mu|x|} \right), \quad (3.24)$$

onde C é uma constante que depende dos detalhes da forma de $U_+(\varphi)$. Por exemplo, para a teoria definida pela equação (3.18),

$$\varphi_1 = a \tanh\left(\frac{1}{2}\mu x\right), \quad (3.25)$$

$$S_1 = \frac{\mu^3}{3\lambda}, \quad (3.26)$$

e

$$C = 2a. \quad (3.27)$$

Em termos de φ_1 , podemos expressar analiticamente a nossa descrição aproximada do bounce,

$$\varphi_b(\rho) = \begin{cases} -a & \text{se } \rho \ll R; \\ \varphi_1(\rho) & \text{se } \rho \approx R; \\ a & \text{se } \rho \gg R \end{cases}$$

A única coisa que falta nesta descrição é o valor de R . Isso é facilmente obtido por um cálculo variacional. Para esse fim, substituindo a expressão anterior para o bounce na ação euclidiana (3.11), com $D = 4$, obtemos

$$\begin{aligned} S_E(\varphi_b) &= 2\pi^2 \int_0^\infty \rho^3 d\rho \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\rho} \right)^2 + U \right] \\ &= -\frac{1}{2}\pi^2 R^4 \epsilon + \pi^2 R^3 S_1, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde primeiro termo vem do interior da bolha, o segundo termo da parede. Variando em relação a R , e igualando a zero

$$\frac{dS_E}{dR} = 0 = -2\pi^2 R^3 \epsilon + 6\pi^2 R^2 S_1, \quad (3.29)$$

obtemos

$$R = \frac{3S_1}{\epsilon}. \quad (3.30)$$

Note que, R , o raio da bolha se aproxima de infinito, a medida que $\epsilon \rightarrow 0$. Substituindo a expressão de R , obtemos para $S_E(\varphi_b)$,

$$B = S_E(\varphi_b) = \frac{27\pi^2 S_1^4}{2\epsilon^3} \quad (3.31)$$

Podemos usar expressão de R , equação (3.30), para dar uma condição mais precisa da validade de aproximação de parede fina,

$$\mu R = \frac{3S_1\mu}{\epsilon} \gg 1. \quad (3.32)$$

Para o exemplo da equação (3.18), a condição para a validade da aproximação é

$$\frac{\mu^4}{\epsilon\lambda} \gg 1, \quad (3.33)$$

e a expressão aproximada para $B = S_E[\varphi_b]$ é

$$B = \frac{\pi^2 \mu^{12}}{6\epsilon^3 \lambda^4}. \quad (3.34)$$

Até onde conhecemos, fora do contexto de aproximação de parede fina (e das extensões desse método) não existe outra forma de obter expressões analíticas para o bounce e consequentemente para a ação euclidiana correspondente. Obviamente, podemos recorrer a métodos numéricos, mas esse procedimento, além de não ser trivial, impossibilitará em geral o estudo do espectro do operador diferencial que aparece na expressão para a taxa de tunelamento em (3.4). Na próxima seção introduziremos um novo método para obtermos expressões aproximadas para o bounce que nos fornecerão uma forma de estimar a taxa de tunelamento de forma analítica.

4 Estimativas para a taxa de tunelamento através do Método Variacional

4.1 O método Variacional

Muitos problemas da natureza, aparentemente complicados, podem ser compreendido de maneira mais simples através do método variacional. Na mecânica quântica, usamos o método variacional para encontrar uma solução aproximada para a energia do estado fundamental, o método também permite obter estimativas para os estados de energia excitados. O método está baseado no seguinte teorema. Dado um sistema com hamiltoniano \hat{H} e considerando vetores de estado normalizado $|\psi\rangle$, temos que

$$\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle \geq E_0, \quad \forall |\psi\rangle \in \Xi, \quad (4.1)$$

onde E_0 é a energia do estado fundamental e Ξ é o espaço de Hilbert onde residem os vetores de estado $|\psi\rangle$.

Dessa forma, pode-se fazer uma estimativa para o estado fundamental considerando-se um ansatz para o vetor de estado correspondente, da forma $|\psi, a_i\rangle$, onde a_i , são parâmetros indeterminados, que são fixados minimizando o valor médio $\langle\psi, a_i|\hat{H}|\psi, a_i\rangle$, visto como função dos parâmetros a_i . O ansatz para o vetor de estado é feito levando-se em consideração algumas propriedades gerais que este deve satisfazer, por exemplo ser de quadrado integrável, ser de paridade par (no caso de sistemas unidimensionais), etc. Quando o anstaz é adequadamente escolhido o método fornece valores mais precisos para a energia do estado fundamental, que o obtido via a técnica convencional de teoria de perturbações e em alguns casos pode fornecer a solução exata.

O método variacional não se restringe à determinação do espectro de energia de sistemas quânticos. O método pode ser usado em qualquer situação a onde o objeto de interesse está relacionado a um problema de extremo. No caso que interessa neste trabalho o bounce, φ_b segue a equação de movimento dado pela equação (3.2), o qual vem de ter considerado o extremo da ação euclidiana $S_E(\varphi_b)$. Note que em princípio todas as soluções dessa equação devem ser consideradas na avaliação da taxa de tunelamento, porém, vimos que aquela solução que fornece a máxima contribuição é o bounce esfericamente simétrico, $\varphi(\rho)$, i.e, a solução onde a ação euclidiana é mínima. O bounce $O(D)$, segue a equação (3.8), a qual pode ser vista como o extremo da ação esféricamente simétrica (3.11). Consequentemente podemos estimar $\varphi(\rho)$, considerando um asatz da forma $\varphi(\rho, a_i)$, onde os parâmetros a_i são determinados de

$$\frac{\partial}{\partial a_i} S_E(a_i) = 0. \quad (4.2)$$

Para escolher o ansatz para o bounce $\varphi_b(\rho)$, consideraremos funções que satisfazem as equações (3.10) e (3.13).

Antes de considerar um problema em específico, gostaríamos de fazer duas observações importantes. Em primeiro lugar a aplicação do método descrito, desde o ponto de vista prático, pode ser considerado tão preciso quanto a solução exata para o bounce, já que em ambos casos o valor para a taxa de decaimento correspondente, desconsiderando o fator pre exponencial

$$\frac{\Gamma}{V} = e^{-B}, \quad B = S_E(\varphi_b), \quad (4.3)$$

serão estimativas e não valores exatos. No caso do bounce variacional a afirmação é óbvia. No caso do bounce exato, a afirmação anterior procede devido a que ao considerarmos tão somente bounces esféricamente simétricos, estamos desconsiderando infinitos bounces que contribuem para Γ , com valores finitos, e que não podem ser desconsiderados desde o ponto de vista estrito. De outro lado, se considerarmos o fator pre exponencial, as correções providas do determinante funcional irão se confundir com as correções providas do valor exato para o bounce. Dessa forma concluímos que desde o ponto de vista de obtermos estimativas de ordens de grandeza para a taxa de tunelamento, Γ , o bounce variacional é suficiente.

Em segundo lugar, se lembrarmos do capítulo anterior, vimos que os autovalores do operador diferencial $[-\partial^2 + U''(\varphi_b)]$, o qual vem de considerar $\delta^2 S_E / \delta \varphi_b^2$, não são todos positivos. Consequentemente o bounce não é um mínimo da ação euclidiana, mas é apenas um ponto de sela. A direção no espaço de funções, onde $S_E(\varphi_b)$ decresce no ponto de sela, vem dado pelas funções que são obtidas mediante uma troca de escala em ρ . Esta afirmação pode ser vista, considerando-se a mudança de escala $\rho \rightarrow \sigma \rho$ no bounce $\varphi_b(\rho)$, onde σ é um fator de escala. Nesse caso temos para ação (3.1),

$$\begin{aligned} S_E[\varphi(\sigma x)] &= \int d^D x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_b \partial_\mu \varphi_b(\sigma x) + U(\varphi_b(\sigma x)) \right) \\ &= \int d^D x \left(\sigma^{2-D} \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_b \partial_\mu \varphi_b(\alpha x) + \sigma^{-D} U(\varphi_b(\alpha x)) \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde na segunda linha fizemos a mudança de variáveis $x \rightarrow x/\sigma$. Tomando a primeira derivada de $S_E[\varphi(\sigma x)]$ em relação a σ e igualando a zero obtemos,

$$\int d^D x \left(\left(1 - \frac{D}{2}\right) \sigma^{1-D} \partial_\mu \varphi_b(x) \partial_\mu \varphi_b(x) - D \sigma^{-D-1} U(\varphi_b(x)) \right) = 0 \quad (4.5)$$

Considerando a segunda derivada em σ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} S_E[\varphi_b(\alpha x)] &= \int d^D x \left(\left(1 - \frac{D}{2}\right) (1 - D) \sigma^{-D} \partial_\mu \varphi_b(x) \partial_\mu \varphi_b(x) + D(D + 1) \sigma^{-D-2} U(\varphi_b(x)) \right) \\ &= (2 - D) \sigma^{-D} \int d^D x \partial_\mu \varphi_b \partial_\mu \varphi_b. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Sendo que o bounce ϕ_b é um extremo da ação euclidiana, consideramos $\sigma = 1$ na equação (4.5). Usando essa equação em (4.6), com $\sigma = 1$, obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} S_E[\varphi_b(\alpha x)]_{\sigma=1} = (2 - D) \int d^D x \partial_\mu \varphi_b \partial_\mu \varphi_b, \quad (4.7)$$

o qual para $D > 2$ é sempre menor do que zero. Isto demonstra que para $D > 2$, o bounce não é um mínimo da ação euclidiana, mas um ponto de sela. Notando que o comportamento de tipo ponto de sela, provem somente das dilatações $\rho \rightarrow \alpha\rho$ no bounce, podemos considerar o bounce como um mínimo em relação a quaisquer outro tipo de modificações. Esta afirmação está intimamente ligada ao à existência de um único auto-valor negativo para o operador $[-\partial^2 + U''(\varphi_b)]$, o qual como vimos no capítulo anterior é responsável pela parte imaginária para a energia do falso vácuo, e, conseqüentemente pela instabilidade deste.

A segunda observação acima, será importante no ansatz para o bounce variacional, conforme ilustraremos na seguinte seção, considerando o modelo φ^4 com dois mínimos degenerados.

4.2 Bounce variacional no modelo φ^4 em $D = 4$.

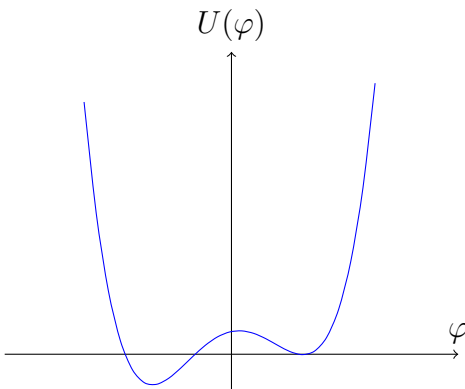
Nesta seção ilustraremos o método variacional para a obtenção do bounce, e conseqüentemente para uma estimativa da taxa de tunelamento ou decaimento do vácuo falso, no modelo com ação euclidiana

$$S_E(\varphi) = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + U(\varphi) \right), \quad (4.8)$$

com

$$U(\varphi) = \lambda (\varphi^2 - a^2)^2 + \epsilon \varphi + U_0, \quad (4.9)$$

onde $\lambda > 0$ e sem perda de generalidade consideramos ϵ positivo, e, U_0 é uma constante escolhida apropriadamente de tal forma que $U(\varphi) = 0$ em $\varphi = \varphi_+$, onde φ_+ é o mínimo associado ao vácuo falso. No caso em que $a = 1$, $\lambda = 0.5$ e $\epsilon = 0.2$ a densidade de potencial (4.9) é mostrada na figura seguinte



No que segue, sem perda de generalidade consideraremos o caso $a = 1$ e $\lambda = 1$. Os casos para $a \neq 1$ e $\lambda \neq 1$, poderão ser obtidos do caso anterior mediante uma redefinição do campo e das

coordenadas espaço-temporais, mediante transformações de escala, $\varphi \rightarrow \varphi/a$, $x \rightarrow \sqrt{\lambda}/a^2$. Dessa forma, no que segue consideraremos o cálculo da ação euclidiana esfericamente simétrica,

$$B = \Omega_4 \int_0^\infty d\rho \rho^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\rho} \right)^2 + (\varphi^2 - 1)^2 + \epsilon\varphi + U_0 \right], \quad (4.10)$$

onde U_0 , vem dado por

$$U_0 = 2\varphi_+^2 - \varphi_+^4 - \epsilon\varphi_+. \quad (4.11)$$

O ponto de mínimo relativo, φ_+ , segue a equação

$$\left. \frac{dU}{d\varphi} \right|_\varphi = 0 \Rightarrow \varphi^3 - \varphi + \frac{\epsilon}{4} = 0. \quad (4.12)$$

onde os outros dois zeros da equação, são respetivamente φ_- e o máximo da densidade de potencial.

Para escolher um ansatz para o bounce consideramos uma função que respeite as condições de contorno (3.10) e (3.13) com alguns parâmetro a serem determinados. Expressamos, $\varphi_b(\rho)$, da seguinte maneira,

$$\varphi_b(\rho) = \varphi_+ - f(\rho), \quad (4.13)$$

e consideramos funções $f(\rho)$ tal que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \varphi_b(\rho) = \varphi_+ \quad \text{e} \quad \left. \frac{d\varphi_b}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0. \quad (4.14)$$

Substituindo as equações (4.12) e (4.13) na equação (4.9), com $\lambda = 1$ e $a = 1$, obtemos

$$U(\varphi) = f^4 - 4\phi_+ f^3 + 2(3\varphi_+^2 - 1) f. \quad (4.15)$$

Assim, a ação Euclidiana (4.10) toma a seguinte forma

$$B = 2\pi^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty d\rho \rho^3 \left(\frac{df}{d\rho} \right)^2 + \int_0^\infty d\rho \rho^3 f^4 - 4\varphi_+ \int_0^\infty d\rho \rho^3 f^3 + 2(3\varphi_+^2 - 1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 f^2 \right\}. \quad (4.16)$$

Agora, vamos escolher $f(\rho)$ de duas formas, os quais nos fornecerão bounces variacionais que denotaremos por bounce 1 e bounce 2.

(i) Bounce 1: $f(\rho) = \alpha \exp\left(-\frac{\rho^\beta}{\sigma}\right)$.

Neste caso o parâmetro σ é responsável pela variação de escala que comentamos no final da seção anterior. Assim, na direção das variações de σ , a função anterior será um máximo para B . Por outro lado, ao longo das direções de variação dos parâmetros α e β a função deve ser um mínimo. Para não complicar as equações algébricas, vamos considerar em primeiro lugar

β como um parâmetro fixo. Note que os parâmetros devem ser tal que $\sigma > 0$ e $\beta > 1$ de tal forma que as condições (4.14) sejam satisfeitas. Substituindo a função escolhida e resolvendo as integrais, em (4.16) obtemos

$$B = 2\pi^2 \left\{ \frac{\alpha^2 \beta \sigma^{2/\beta}}{8(2)^{2/\beta}} \Gamma\left(2 + \frac{2}{\beta}\right) + \frac{\alpha^2 \sigma^{4/\beta}}{\beta} \Gamma\left(\frac{4}{\beta}\right) \left[\frac{\alpha^2}{4^{4/\beta}} - \frac{4\varphi_+ \alpha}{3^{4/\beta}} + \frac{2(3\varphi_+^2 - 1)}{2^{4/\beta}} \right] \right\}, \quad (4.17)$$

Como já mencionado tomando, inicialmente, α e σ como parâmetros a serem tratados no método variacional, ou seja, olhamos para ação Euclidiana como uma função do tipo $B = B(\alpha, \sigma)$. Procuramos, na referida função, um ponto de sela. De $dB/d\alpha = 0$ e $dB/d\sigma = 0$, Obtemos

$$\frac{1}{\sigma} = \left\{ -\frac{16(2)^{2/\beta} \Gamma\left(\frac{4}{\beta}\right)}{\beta^2 \Gamma\left(2 + \frac{2}{\beta}\right)} \left[\frac{\alpha^2}{4^{4/\beta}} - \frac{3}{3^{4/\beta}} \varphi_+ \alpha + \frac{1}{2^{4/\beta}} (3\varphi_+^2 - 1) \right] \right\}^{\beta/2}, \quad (4.18)$$

e

$$\alpha = \frac{3^{4/\beta}}{2^{4/\beta} \varphi_+} (3\varphi_+^2 - 1). \quad (4.19)$$

Substituindo as expressões anteriores em (4.17) obtemos

$$B(\beta) = \frac{3(18)^{2/\beta} \pi^2 \beta^3 \Gamma^2\left(2 + \frac{2}{\beta}\right) (3\varphi_+^2 - 1)}{128 \Gamma\left(\frac{4}{\beta}\right) [(2(8)^{4/\beta} - 3(3)^{8/\beta}) \varphi_+^2 + 3^{8/\beta}]}, \quad (4.20)$$

onde agora explicitamos a dependência de B em relação de β . Também, devemos lembrar que $\varphi_+ = \varphi_+(\epsilon)$.

Além das condições para os parâmetros σ e β , devemos considerar o teste da segunda derivada e portanto do determinante da matriz Hessiana o qual deve ser maior do que zero para que se possa obter um ponto de sela. Essas condições nos dão um intervalo de validade para ϵ o qual é

$$4\varphi_{max} (1 - \varphi_{max}^2) < \epsilon < \frac{8}{9} \sqrt{3} \quad (4.21)$$

onde

$$\varphi_{max} = \left\{ \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^{4/\beta}}{3 \left(\frac{3}{8}\right)^{4/\beta} - \frac{2}{3^{4/\beta}}} \right\}^{1/2}.$$

Para determinarmos β vamos considerar valores específicos de ϵ . Dessa forma, para cada valor de ϵ procuraremos o valor de β que minimiza a ação euclidiana. Vamos escolher seis

valores de ϵ , de tal forma que o intervalo de validade dado pela equação (4.21) seja satisfeito. Assim, vamos escolher os seguintes valores $\epsilon = 1,4; 1,2; 1,0; 0,8; 0,6; 0,4$.

No caso em que $\epsilon = 1,4$, temos $\varphi_+ = 0,71$, $\alpha = 1,61$ e $\sigma^{-1} = 0,33$. Na figura (10) mostramos $B(\beta)$, de onde concluimos que a ação euclidiana é mínima em aproximadamente $\beta = 2,1$. Considerando esses valores temos para o bounce variacional correspondente,

$$\varphi_b(\rho) = 0,714 - 1,61 \exp(-0,33\rho^{2,1}), \quad (4.22)$$

o qual mostramos na figura (11). O comportamento desse bounce em função de ρ é ilustrado na figura (11). Nesse caso obtemos para $B = 56,66$. No caso de $\epsilon = 1,2$ obtemos $\varphi_+ =$

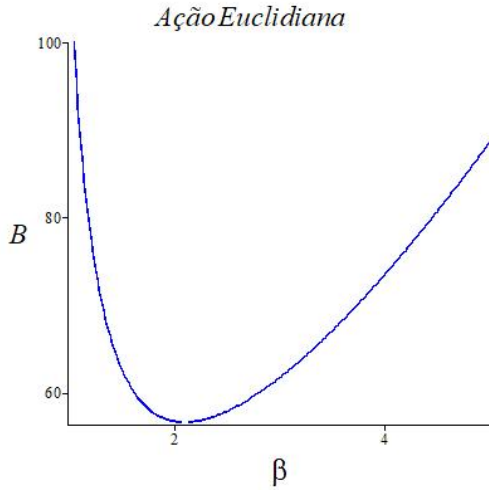


Figura 10 – Gráfico de $B(\beta)$ para densidade de energia, $\epsilon = 1,4$.

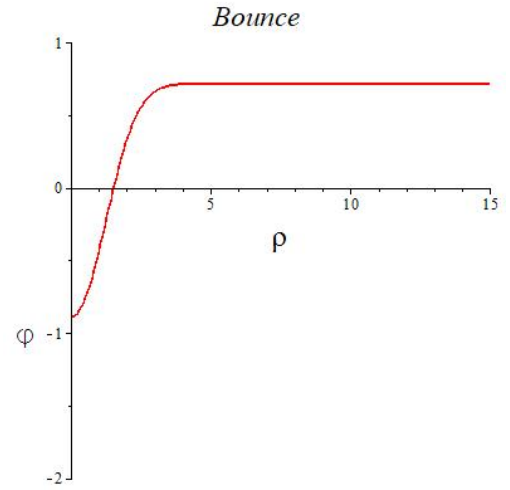


Figura 11 – O bounce variacional para $\epsilon = 1,4$.

$0,79$, $\alpha = 1,87$ e $\sigma^{-1} = 0,10$. Da figura (12) para a ação euclidiana obtemos que o mínimo vem dado aproximadamente para $\beta = 3$. O bounce variacional bem dado por

$$\varphi_b = 0,79 - 1,87 \exp(-0,10\rho^3), \quad (4.23)$$

o qual é mostrado na figura (13). Neste caso a ação tem valor $B = 169,29$

Para $\epsilon = 1,0$ temos $\varphi_+ = 0,84$, $\alpha = 1,98$ e $\sigma^{-1} = 0,02$. Neste a ação euclidiana tem seu mínimo em aproximadamente $\beta = 4$, como pode ser visto da (14). O bounce variacional vem dado por

$$\varphi_b(\rho) = 0,84 - 1,98 \exp(-0,02\rho^4), \quad (4.24)$$

o qual é mostrado na figura (15). Neste caso $B = 405,31$.

Para $\epsilon = 0,8$, temos $\varphi_+ = 0,88$, $\alpha = 2,01$ e $\sigma^{-1} = 0,0009$. Neste caso, da figura (16), a ação euclidiana tem seu mínimo em aproximadamente $\beta = 5,5$. O bounce variacional vem

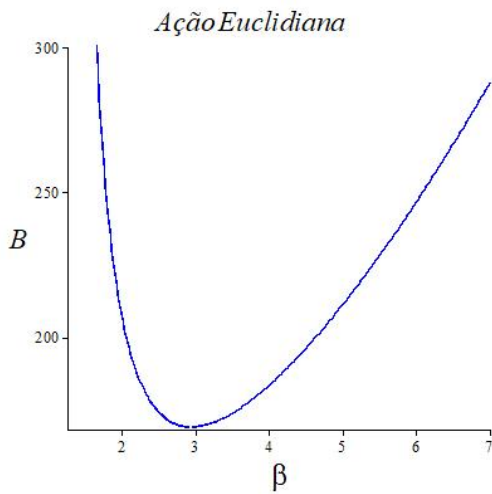


Figura 12 – Gráfico de $B(\beta)$ para densidade de energia, $\epsilon = 1, 2$.

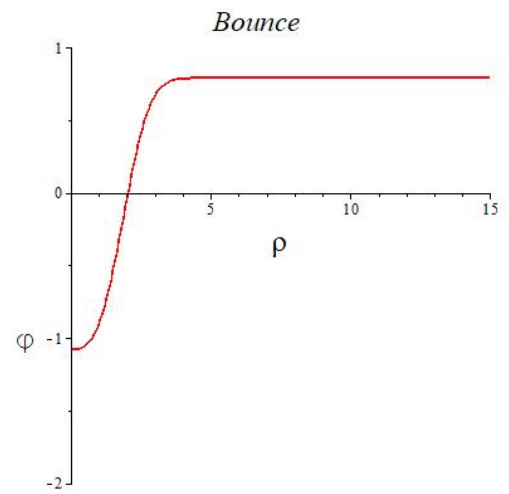


Figura 13 – O bounce variacional para $\epsilon = 1, 2$.

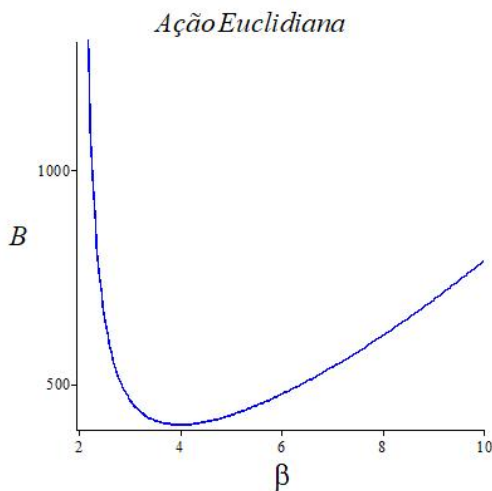


Figura 14 – Gráfico de $B(\beta)$ para densidade de energia, $\epsilon = 1, 0$.

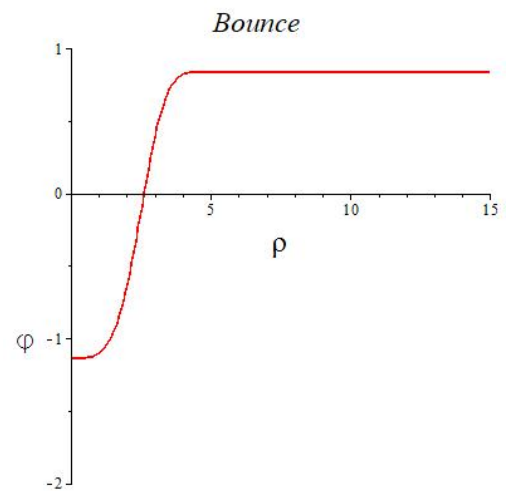


Figura 15 – O bounce variacional para $\epsilon = 1, 0$.

dado por

$$\varphi_b(\rho) = 0,88 - 2,01 \exp(-0,0009\rho^{5,5}) \quad (4.25)$$

o qual é mostrado na figura (17). A ação euclidiana correspondente é $B = 976,07$.

Para $\epsilon = 0,6$ temos $\varphi_+ = 0,91$, $\alpha = 2,02$ e $\sigma^{-1} = 4 \times 10^{-6}$. A ação Euclidiana tem seu mínimo em aproximadamente $\beta = 7,9$, conforme ilustrado na figura (18). O bounce variacional vem dado por

$$\varphi_b(\rho) = 0,91 - 2,02 \exp(-4(10)^{-6}\rho^{7,9}), \quad (4.26)$$

o qual é ilustrado na figura (19). Neste caso temos $B = 2672,06$.

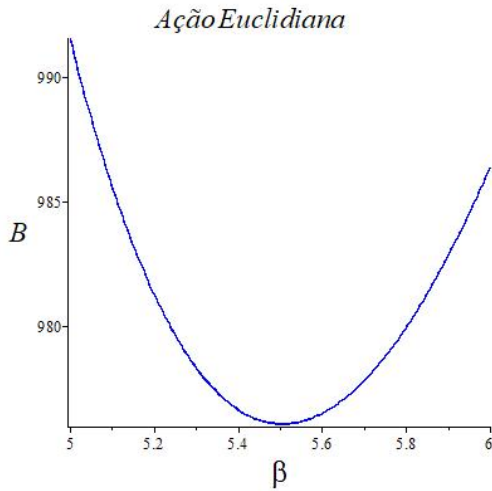


Figura 16 – Gráfico de $B(\beta)$ para densidade de energia, $\epsilon = 0,8$.

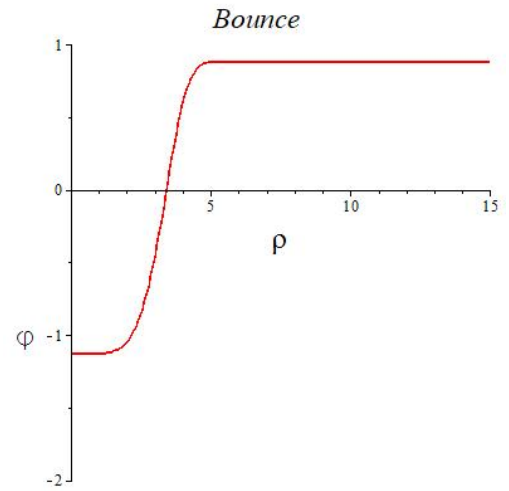


Figura 17 – O bounce variacional para $\epsilon = 0,8$.

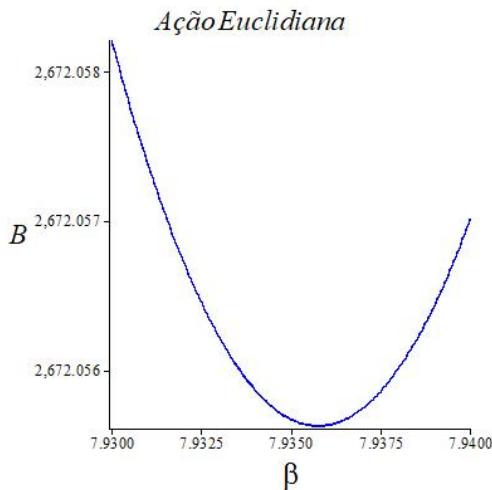


Figura 18 – Gráfico de $B(\beta)$ para densidade de energia, $\epsilon = 0,8$.

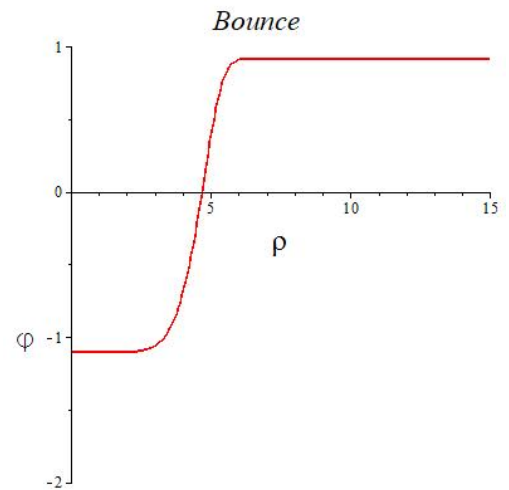


Figura 19 – O bounce variacional para $\epsilon = 0,6$.

Finalmente, para $\epsilon = 0,4$, temos $\varphi_+ = 0,95$, $\alpha = 2,01$ e $\sigma^{-1} = 10^{-11}$. A ação euclidiana tem seu mínimo em aproximadamente $\beta = 12,71$, como se pode ver da figura (20). O bounce variacional, o qual é mostrado na figura (21), vem dado por

$$\varphi_b(\rho) = 0,95 - 2,02 \exp\left(-10^{-11} \rho^{12,71}\right), \quad (4.27)$$

com ação euclidiana correspondente vem dado por $B = 9968,06$.

Podemos observar dessa série de gráficos, que conforme vamos diminuindo do valor de ϵ , a ação euclidiana no bounce se incrementa. Esse resultado está de acordo com resultado obtido no contexto da aproximação de parede fina, equação (3.34), pelo menos qualitativamente.

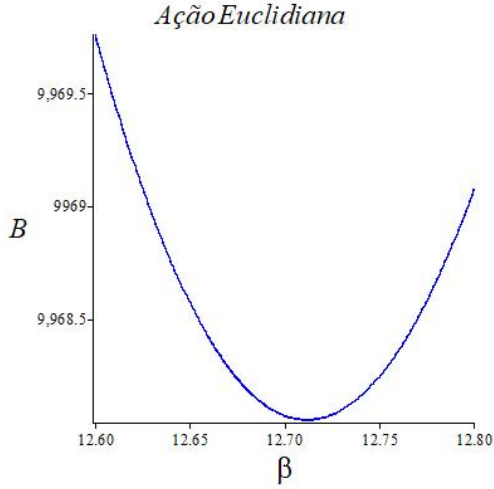


Figura 20 – Gráfico de $B(\beta)$ para densidade de energia, $\epsilon = 0, 4$.

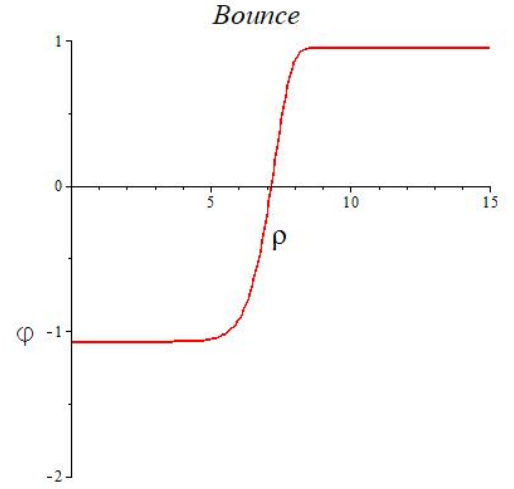


Figura 21 – O bounce variacional para $\epsilon = 0, 4$.

$$(ii) \text{Bounce 2} : f(\rho) = \frac{\xi}{1 + \mu\rho^\kappa}$$

Onde agora são considerados os parâmetros ξ , μ e κ . Neste caso μ é o parâmetro de escala, responsável pelo ponto de sela. Agora é necessário que $\mu > 0$ e $\kappa > 1$. Assim como foi feito para o Bounce 1 os cálculos para esse caso são similares, e os resultados para μ e ξ são respectivamente

$$\mu = \left\{ -\frac{2}{\kappa^2 l(\kappa)} \left[\xi^2 k(\kappa) - 3\varphi_+ \xi p(\kappa) + h(\kappa) (3\varphi_+^2 - 1) \right] \right\}^{\kappa/2} \quad (4.28)$$

e

$$\xi = \frac{h(\kappa)}{\varphi_+ p(\kappa)} (3\varphi_+^2 - 1). \quad (4.29)$$

Agora, ação Euclidiana pode ser expressa da seguinte maneira,

$$B(\kappa) = \frac{\pi^2 \xi^4 l(\kappa)^2 h(\kappa) (3\varphi_+^2 - 1)}{2 [k(\kappa)h(\kappa) - (3k(\kappa)h(\kappa) - 2p(\kappa)^2) \varphi_+^2]}, \quad (4.30)$$

onde

$$l(\kappa) = \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^3}{(1 + \rho^\kappa)^4}, \quad (4.31)$$

$$k(\kappa) = \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^{2\kappa+1}}{(1 + \rho^\kappa)^4}, \quad (4.32)$$

$$p(\kappa) = \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^3}{(1 + \rho^\kappa)^3}, \quad (4.33)$$

e

$$h(\kappa) = \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^3}{(1 + \rho^\kappa)^2}. \quad (4.34)$$

O intervalo de validade para a nova ação Euclidiana é,

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < \varphi_+ < \sqrt{\frac{h(\kappa)k(\kappa)}{3h(\kappa)k(\kappa) - 2p(\kappa)^2}} \quad (4.35)$$

Considerando os mesmos valores para ϵ , tratados anteriormente, obteremos valores de B sempre maiores do que no caso do Bounce 1. Dessa forma, podemos considerar os bounces obtidos anteriormente como os mais adequados para estimar a ação euclidiana ou equivalentemente a taxa de decaimento do vácuo falso.

Com o intuito de verificar a validade do método descrito nesta seção, na próxima seção consideramos a comparação com os valores obtidos via solução numérica para a equação diferencial satisfeita pelo bounce.

4.3 Comparação entre o bounce variacional e o numérico

Nesta seção, vamos comparar o nosso método variacional com o método numérico obtido através do programa Maple usando o comando `dsolve` e as condições de contorno adequadas. Então, a equação diferencial a ser tratada numericamente tem a seguinte forma, em $d = 3$ ($D = 4$),

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} = 4\varphi(\varphi^2 - 1) + \epsilon. \quad (4.36)$$

Os gráficos dos bounces variacionais, obtidos na seção anterior, assim como os obtidos numericamente a partir da equação (4.36) são plotados juntos, com o intuito de comparar os dois métodos, e assim, obter uma perspectiva da validade do método proposto neste trabalho. Os gráficos plotados em vermelho correspondem ao bounce variacional e os em azul são os do método numérico. Também, comparamos os gráficos das densidades de ação euclidiana, i.e, os integrandos em B .

Para começar, vamos comparar os bounces com $\epsilon = 1, 4$. Notamos nas figuras (22) e (23), uma semelhança razoável entre os dois tipos de soluções. Para a ação euclidiana, o método numérico fornece $B_N = 55, 80$, e o método variacional $B_V = 56, 66$. Obtemos um erro de 1,5%

Agora, vamos comparar os bounces com $\epsilon = 1, 2$. Obtemos através do método numérico $B_N = 165, 45$, e no método variacional $B_V = 169, 29$. Obtemos um erro de 2,3%. Os gráficos correspondentes para o bounce e para a densidade de ação euclidiana são mostradas nas figuras (24) e (25).

Agora, vamos comparar os bounces com $\epsilon = 1, 0$. Obtemos através do método numérico $B_N = 392, 62$, e no método variacional $B_V = 405, 31$. Obtemos um erro de 3,2%.

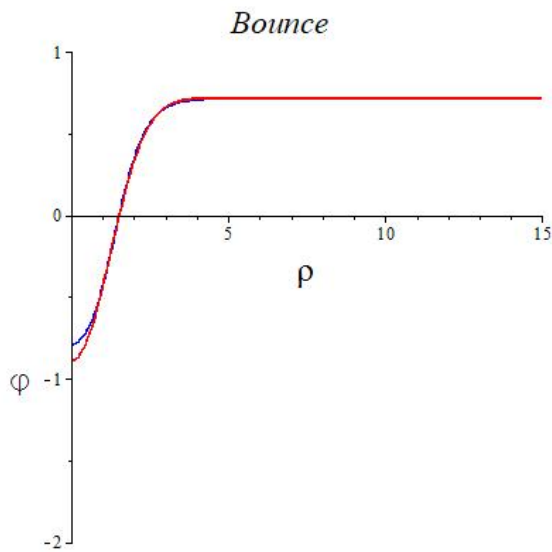


Figura 22 – Gráficos dos bounces variacional e numérico para $\epsilon = 1, 4$.

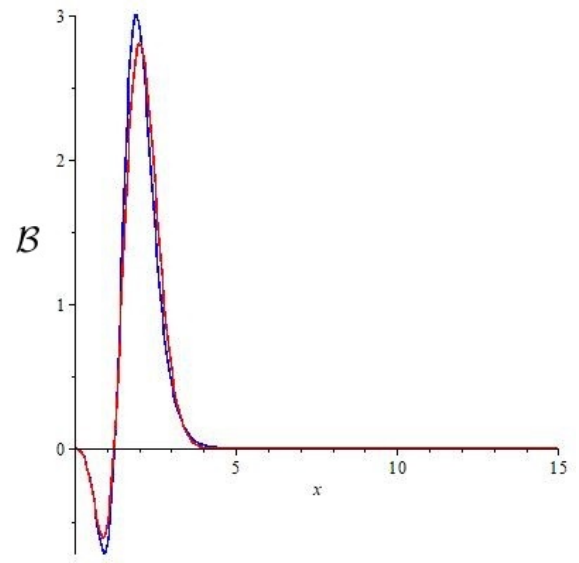


Figura 23 – Densidades de ação euclidiana, variacional e numérica para $\epsilon = 1, 4$.

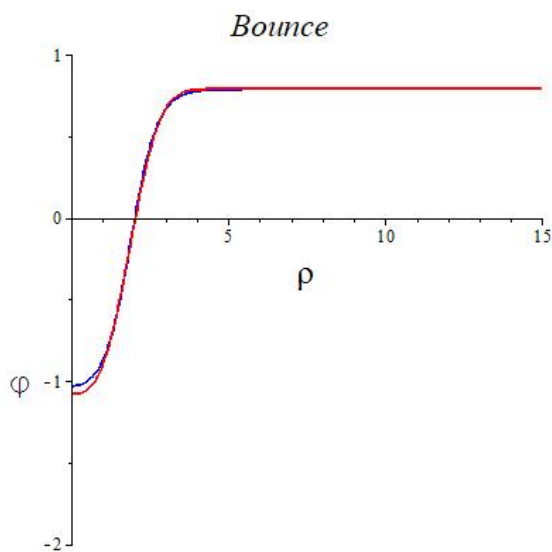


Figura 24 – Gráficos dos bounces variacional e numérico para $\epsilon = 1, 2$.

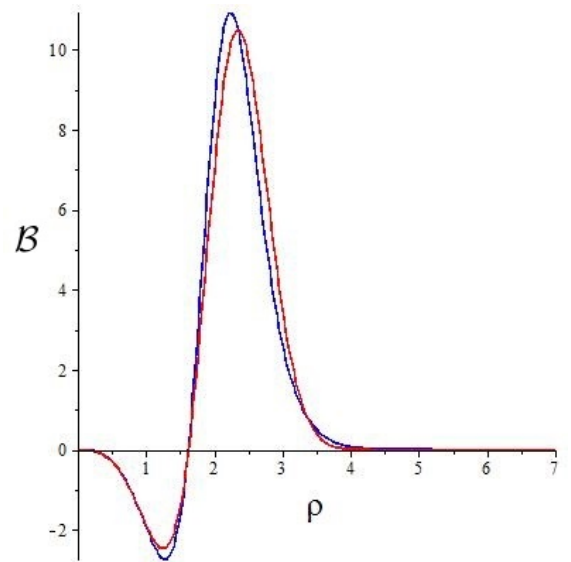


Figura 25 – Densidades de ação euclidiana, variacional e numérica para $\epsilon = 1, 2$.

Os bounces e as densidades de ação euclidiana nesse caso são comparador nas figuras (26) e (27) respectivamente.

Da mesma forma, comparando os bounces com $\epsilon = 0, 8$, obtemos através do método numérico $B_N = 935, 17$, e no método variacional $B_V = 976, 07$. Obtemos um erro de 4,4%. Neste caso os bounces e a densidade de ação euclidiana são mostradas nas figuras (28) e (29).

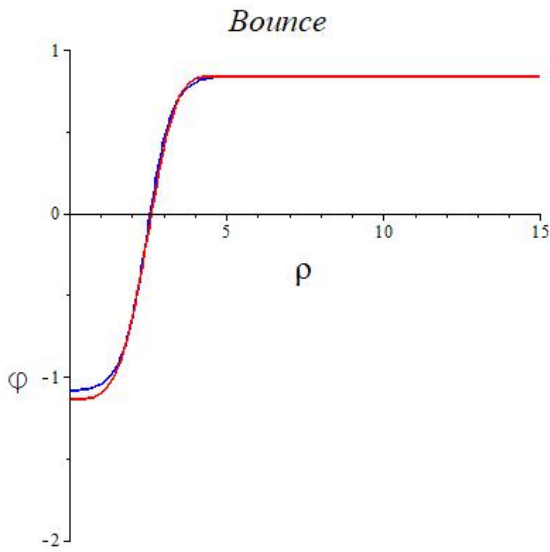


Figura 26 – Gráficos dos bounces variacional e numérico para $\epsilon = 1,0$.

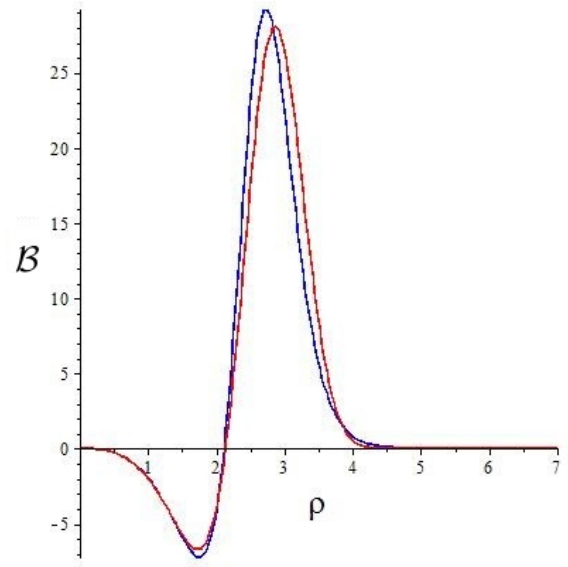


Figura 27 – Densidades de ação euclidiana, variacional e numérica para $\epsilon = 1,0$.

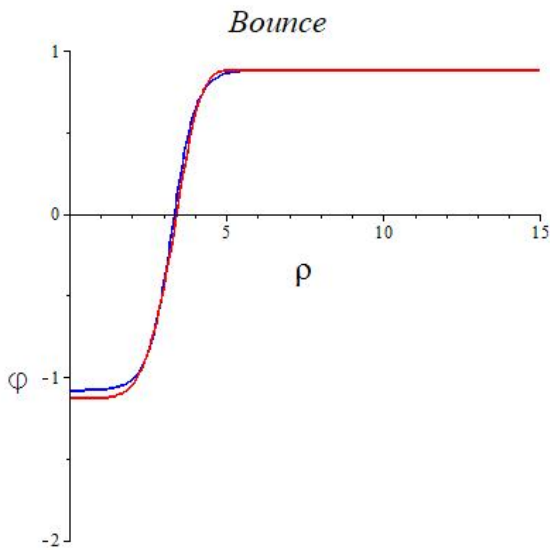


Figura 28 – Gráficos dos bounces variacional e numérico para $\epsilon = 0,8$.

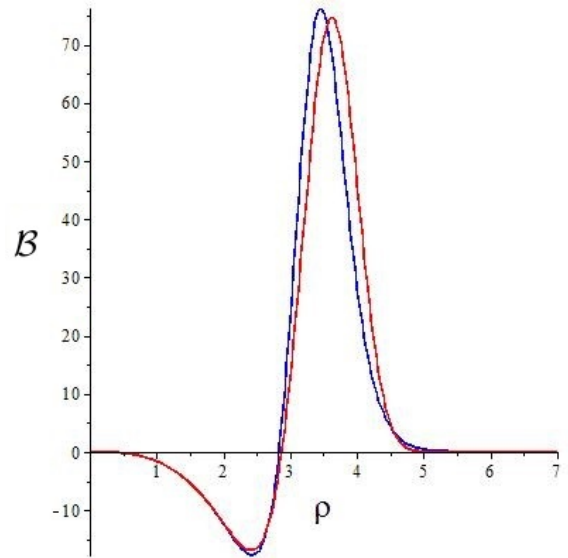


Figura 29 – Densidades de ação euclidiana, variacional e numérica para $\epsilon = 0,8$.

Agora, vamos comparar os bounces com $\epsilon = 0,6$. Obtemos através do método numérico $B_N = 2526,14$, e no método variacional $B_V = 2672,06$. Obtemos um erro de 5.8%. Nas figuras (30) e (31) são comparados os bounces e a densidade de ação euclidiana.

Finalmente, considerando $\epsilon = 0,4$. Obtemos através do método numérico $B_N = 9271,93$, e no método variacional $B_V = 9968,06$. Obtemos um erro de 7.5%. Nas figuras (32)

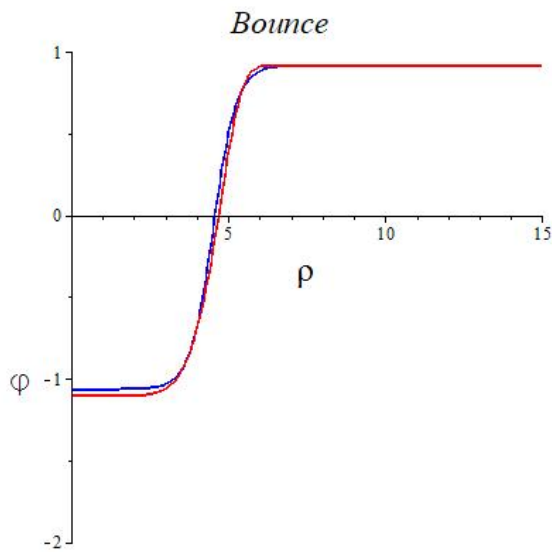


Figura 30 – Gráficos dos bounces variacional e numérico para $\epsilon = 0,6$.

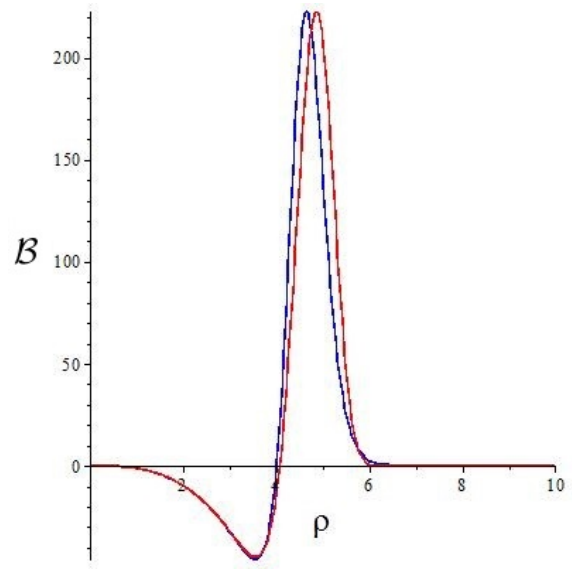


Figura 31 – Densidades de ação euclidiana, variacional e numérica para $\epsilon = 0,6$.

e (33), comparamos os bounces e a densidade de ação euclidiana.

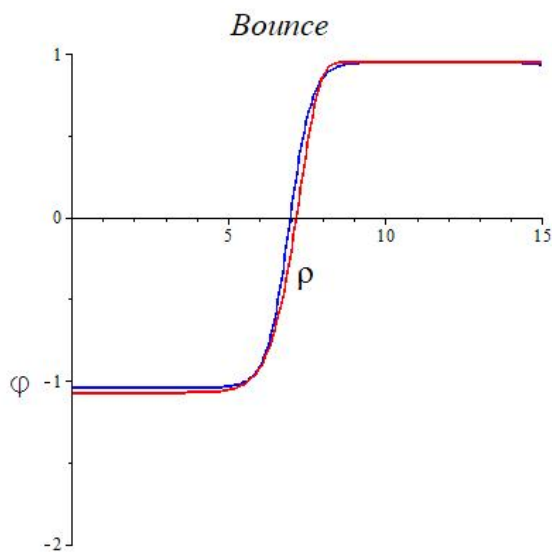


Figura 32 – Gráficos dos bounces variacional e numérico para $\epsilon = 0,4$.

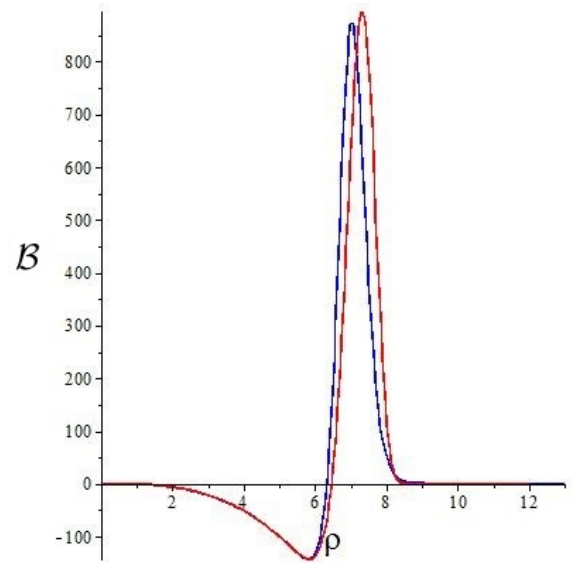


Figura 33 – Densidades de ação euclidiana, variacional e numérica para $\epsilon = 0,4$.

Conforme se pode apreciar das figuras anteriores, os bounces variacionais calculados, se aproximam de forma bastante razoável com os obtidos numericamente. Observamos que o erro cometido ao calcular a ação euclidiana, aumenta a medida que ϵ diminui. Este fato

está de acordo com o fato de que à medida que ϵ diminui, a solução que descreve o bounce será dado pela aproximação de parede fina, considerada na seção no capítulo anterior. Nesse caso, conforme vimos a forma funcional do bounce é do tipo \tanh , pelo menos na parede da bolha. Dessa forma, temos duas formas complementares de descrever o bounce no modelo ϕ^4 em $D = 4$ dimensões espaço temporais. Para valores pequenos de ϵ , usamos a aproximação de parede fina, enquanto que para valores não pequenos de ϵ podemos usar os bounces variacionais descritos neste capítulo. Finalmente observemos que em todos os casos aqui considerados o bounce numérico fornece sempre um menor valor para a ação euclidiana, como é de se esperar, já que o bounce numérico é solução da equação diferencial para o bounce que dá o verdadeiro extremo da ação euclidiana.

5 Conclusões

Nesta dissertação, estudamos em detalhe a taxa de tunelamento ou decaimento do falso vácuo à temperatura zero seguindo os cálculos desenvolvidos no artigo do S. Coleman [12], assim como os cálculos da aproximação de parede fina [11]. A proposta do trabalho era de encontrar uma solução para o bounce com simetria esférica, $O(4)$, para o modelo ϕ^4 , via método variacional. Obtivemos bounces para alguns casos específicos, onde fixamos o valor de $\lambda = 1$ e variamos a densidade de energia (ϵ) dentro de um intervalo de validade dado pela equação (4.21). Para cada valor de ϵ escolhido, obtemos um bounce e sua respectiva ação Euclidiana. Para que se possa ter uma perspectiva da validade desse método, comparamos ele ao numérico (Maple). Assim para $\epsilon = 1,4$ o bounce variacional e o numérico são bem semelhantes, assim como podemos ver na figura 22, e a ação Euclidiana obtida através do método variacional possui um erro em relação ao encontrado no numérico de 1,5%. Para $\epsilon = 1,2$, obtemos um bounce que também era bem parecido com o obtido numericamente (figura 24), e a ação Euclidiana possui um erro de 2,3% em relação ao numérico. Para $\epsilon = 1,0$, os bounces variacional e numéricos são parecidos (figura 26), e a ação Euclidiana possui um erro 3,2% em relação ao numérico. Para $\epsilon = 0,8$, os bounces variacional e numérico são parecidos (figura 28), e sua ação Euclidiana possui um erro 4,4% em relação ao numérico. Para $\epsilon = 0,6$, os bounces variacional e numérico já apresentam pequenas diferenças (figura 30), e a ação Euclidiana apresenta um erro 5,8% em relação ao numérico. Por fim, para $\epsilon = 0,4$, os bounces variacional e numérico também possui pequenas diferenças (figura 32), e a ação Euclidiana possui um erro 7,5%. Os erros obtidos, ao compararmos os dois métodos, são consideravelmente pequenos. Esses erros crescem a medida que diminuimos o valor de ϵ , esse fato está em acordo com o fato de que à medida que ϵ diminui, a solução que descreve o bounce simétrico é dado pela aproximação de parede fina, considera na seção 3.3. Nesse caso, a forma funcional do bounce é do tipo tanh, pelo menos na parede da bolha. Desta forma, o nosso modelo complementa o modelo de aproximação de parede fina proposta pelo Coleman [11] para um modelo ϕ^4 em $D = 4$ dimensões espaço temporais. Em resumo, para valores pequenos de ϵ usamos o método e parede fina, enquanto para valores não pequenos de ϵ usamos os bounces variacionais descrito no capítulo anterior. Finalmente observemos que em todos os casos aqui considerados o bounce numérico fornece sempre um menor valor para a ação euclidiana, como é de se esperar, já que o bounce numérico é solução da equação diferencial para o bounce que dá o verdadeiro extremo da ação euclidiana. Após o relativo sucesso obtido nesse trabalho, esperamos estender os nossos resultados para a taxa de tunelamento no modelo ϕ^6 e à temperatura finita.

A Apêndice: Como Calcular o Determinante

Desejamos estudar a equação

$$\left(-\partial_\tau^2 + W\right) \psi = \lambda \psi, \quad (\text{A.1})$$

onde W é alguma função limitada de τ . Vamos definir $\psi_\lambda(\tau)$ como a solução desta equação obedecendo a condição de contorno,

$$\psi_\lambda\left(-\frac{T}{2}\right) = 0, \quad \partial_\tau \psi_\lambda\left(-\frac{T}{2}\right) = 1. \quad (\text{A.2})$$

O operador $-\partial_\tau^2 + W$ (atuando no espaço de funções desaparece em $\pm T/2$) tem um autovalor λ_n , se e somente se

$$\psi_{\lambda_n}\left(\frac{T}{2}\right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Como no texto da seção (2.2), definimos

$$\det\left(-\partial_\tau^2 + W\right) = \prod_n \lambda_n. \quad (\text{A.4})$$

Agora, deixe $W^{(1)}$ e $W^{(2)}$ serem duas funções de τ , e deixe $\psi_{\lambda_n}^{(1,2)}$ ser a solução associada a eq. (A.1). Vamos provar isto através da análise da seguinte equação

$$\det\left[\frac{-\partial_\tau^2 + W^{(1)} - \lambda}{-\partial_\tau^2 + W^{(2)} - \lambda}\right] = \frac{\psi_\lambda^{(1)}(T/2)}{\psi_\lambda^{(2)}(T/2)}. \quad (\text{A.5})$$

Prova: O lado esquerdo da equação (A.5) é formada por uma função meromórfica de λ , com um zero simples em cada $\lambda_n^{(1)}$ e um polo simples em cada $\lambda_n^{(2)}$. Pela teoria elementar Fredholm, a função vai para 1 quando $\lambda \rightarrow \infty$ em qualquer direção exceto ao longo do eixo real positivo. O lado direito é também uma função meromórfica com exatamente os mesmos polos e zeros. Na teoria elementar da equação diferencial, a função também vai para 1 no mesmo limite. Assim, a razão dos dois lados desta equação, são funções analíticas de λ que vai para 1 com $\lambda \rightarrow \infty$ em qualquer direção, exceto ao longo do eixo real positivo. Ou seja, é igual a 1.

Se definirmos a quantidade N por

$$\frac{\det(-\partial_\tau + W)}{\psi_0(T/2)} = \pi \hbar N^2, \quad (\text{A.6})$$

então, pela equação (A.5), N é independente de W . Esta expressão será usada para definir a constante de normalização N na integral funcional. (Note que nenhuma definição explícita desta quantidade foi dada no texto da seção (2.2), portanto podemos defini-la como quisermos aqui.) Assim, temos a formula desejada para avaliar as integrações funcionais gaussianas,

$$N \left[\det\left(-\partial_\tau^2 + W\right) \right]^{-1/2} = [\pi \hbar \psi_0(T/2)]^{1/2}. \quad (\text{A.7})$$

Como um exemplo específico, para o oscilador harmônico, $W = \omega^2$,

$$\psi_0 = -\omega^{-1} \sinh \omega \left(\tau + \frac{T}{2} \right), \quad (\text{A.8})$$

a qual a equação (2.25) segue imediatamente.

Bibliografia

- [1] D. Weinberg, *Cosmological production of baryons*, Phys. Rev. Lett. **42**, 850 (1979)
- [2] V.A. Kuzmin, M.E. Shaposhnikov, and I.I. Tkachev, *Gauge hierarchies and unusual symmetry behaviour at high temperatures*, Phys.Lett B **105**, 159 (1981).
- [3] A.D. Linde, *Phase transitions in gauge theories and cosmology*, Rep.Prog.Phys. **42**, 389 (1979).
- [4] A.D. Sakharov, *Violation of CP-Invariance, C-Asymmetry, and Baryon Asymmetry of the Universe*, JETP Lett. **5**, 24 (1967).
- [5] M.E. Shaposhnikov, *Anomalous fermion number non-conservation*, CERN-TH-6304-91 (1991).
- [6] A. J. Leggett, S. Chakravarty, A.T. Dorsey, M.P.A. Fisher, A. Garg, and W. Zwerger, *Dynamics of the dissipative two-state system*, Rev.Mod.Phys. **59**, 1 (1987).
- [7] E. Brezin and G. Parisi, *Critical exponents and large-order behavior of perturbation theory*, J.Statis.Phys. **19**, 269 (1978).
- [8] J.D. Gunton, M. San Miguel, P.S. Sahni. *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and J L. Lebowitz, vol. 8, pag. 267 (1983)
- [9] J.S. Langer, *Statistical theory of the decay of metastable states*, Ann.Phys. **54**, 258 (1969).
- [10] M. B. Voloshin, I. Yu. Kobzarev, and L. B. Okun, Yad. Fiz. **20** 1229 (1974) [Sov. J. Nucl. Phys. **20**, 644 (1975)].
- [11] S. Coleman, Phys. Rev. D **15**, 2929 (1977).
- [12] C. Callan and S. Coleman, Phys. Rev D **16**, 1762 (1977).
- [13] A. Linde, Nucl.Phys. B**216**, 421 (1983).
- [14] A.D. Linde, *Fate of the false vacuum at finite temperature: theory and applications*, Phys.Lett. B**100**, 37 (1981).
- [15] Gabriel H. Flores, N.F. Svaiter, and Rudnei O. Ramos, *Tunneling and Nucleation Rate in the $(\lambda\phi^4/4! + \sigma\phi^6/6!)_3$ model*, Int.J.Mod.Phys. A**14**, 3715 (1999).
- [16] B. Kumar, M.B. Paranjape and U.A. Yajnik, *Fate of the false monopoles: Induced vacuum decay*, Phys.Rev. D**82**, 025022 (2010).
- [17] A. Aravind, B.S. DiNunno, D. Lorshbough, and S. Paban, *Analyzing multifield tunneling with exact bounce solutions*, Phys.Rev. D**91**, 025026 (2015).
- [18] J. S. Bagla, and S. Engineer, *Gravity and the Quantum: Pedagogical Essays on Cosmology, Astrophysics, and Quantum Gravity*, vol. 187 (Springer 2017).

- [19] K. Lee and E.J. Weinberg, *Decay of the true vacuum in curved space-time*, Phys.Rev. D**36**, 1088 (1987)
- [20] G.V. Dunne and H. Min, *Beyond the thin-wall approximation: Precise numerical computation of prefactors in false vacuum decay*, Phys.Rev. D**72**, 125004 (2005).
- [21] R. Bousso, B. Freivogel and M. Lippert, *Probabilities in the landscape: The decay of nearly flat space*, Phys.Rev. D**74**, 046008 (2006).
- [22] S. Kanno and J. Soda, *Exact Coleman-de Luccia Instantons*, Int.J.Mod.Phys. D**21**, 1250040 (2012).
- [23] M. Dine, G. Festuccia, A. Morisse and K. van den Broek, *Metastable domains of the landscape*, JHEP 0806:014 (2008).
- [24] M. Dine, G. Festuccia, A. Morisse *The fate of nearly supersymmetric vacua*, JHEP 0909:013 (2009)
- [25] A. Masoumi, S. Paban, and E.J. Weinberg, *Tunneling from a Minkowski vacuum to an AdS vacuum: A new thin-wall regime*, Phys.Rev. D**94**, 025023 (2016).
- [26] J.M. Blatt and V.F. Weisskopf, *Theoretical nuclear physics*, (Springer Science & Business Media 2012)
- [27] M.S. Swanson, *Path integrals and quantum processes*, (Courier Corporation 2014).
- [28] J.J. Sakurai and J.J. Napolitano, *Modern quantum mechanics*, (Pearson Higher Ed 2014).
- [29] S. Coleman, V. Glaser, and A. Martin, *Action minima among solutions to a class of Euclidean scalar field equations*, Comm.Math.Phys. **58**, 211 (1978).
- [30] S. Coleman, *Aspects of symmetry: selected Erice lectures*, (Cambridge University Press (1988)