

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Pontos periódicos de homeomorfismos isotópicos a
transformações pseudo-Anosov**

Wilder Pinto Mendes

Orientador: Prof. Dr. Juan Valentín Mendoza Mogollón

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 16 DE FEVEREIRO DE 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Pontos periódicos de homeomorfismos isotópicos a transformações pseudo-Anosov

Wilder Pinto Mendes

Orientador: Prof. Dr. Juan Valentín Mendoza Mogollón

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos

ITAJUBÁ – MG

16 DE FEVEREIRO DE 2018

*Dedico este trabalho a minha noiva,
pelo seu companheirismo, incentivo e
ajuda dada até o presente momento.*

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço em primeiro lugar a Deus pela sabedoria e proteção durante todos os momentos.

Aos meus pais, Aluisio Pinto Mendes e Maura Maria Mendes por todo esforço e sacrifício.

A minha irmã Aline Pinto Mendes, pela ajuda dada sempre que possível.

Aos meus avôs, *in memoriam*.

Aos meus colegas de Mestrado, por toda a ajuda e companheirismo.

A todos meus professores, pela experiência e conhecimentos compartilhados, e em especial ao professor Juan Valentín Mendoza Mongollón pela paciência e atenção a mim dedicados.

Em fim, agradeço todas as palavras daqueles que acreditaram, ou não, em mim, uma vez que, as mesmas me serviram de incentivo nesta jornada.

A simplicidade é a sofisticação suprema.

Resumo

Neste trabalho estudaremos e aprofundaremos o conceito de homeomorfismo pseudo-Anosov. Trataremos as principais propriedades envolvendo tal definição, consideradas todas sobre superfícies orientáveis de gênero maior ou igual a dois, as quais nos permitirão estudar os pontos periódicos de homeomorfismos isotópicos a transformações pseudo-Anosov, fato que é tratado pelo teorema de Handel que figura como principal resultado dessa dissertação. Este teorema nos diz que do ponto de vista do sombreamento global, um homeomorfismo pseudo-Anosov tem o menor número de órbitas entre todas as aplicações em sua classe de isotopia.

Palavras-chave: Homeomorfismo pseudo-Anosov, Pontos periódicos, Classes de isotopia.

Abstract

In this work we will study and deepen the concept of pseudo-Anosov homeomorphism. We will treat the main properties involving such a definition, all of which are considered on orientable surfaces of genus greater than or equal to two, which will allow us to study the periodic points of isotope homeomorphisms to pseudo-Anosov transformations, a fact that is treated by Handel's theorem which appears as main result of this dissertation. This theorem tells us that from the point of view of global shadowing, a pseudo-Anosov homeomorphism has the least number of orbits among all maps in its isotopy class.

Keywords: Pseudo-Anosov homeomorphism, Periodic points, Isotopy class.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
1 Conceitos fundamentais	1
1.1 Preliminares	1
1.2 Geometria hiperbólica	7
1.3 Índice de ponto fixo	20
1.4 Grupo fundamental	31
2 O teorema da invariância sobre homotopia	33
2.1 Retrato de vizinhança absolutos	33
2.2 Classes de pontos fixos	34
2.3 O número de Nielsen	36
2.4 Classes H -relacionadas	37
2.5 Invariância sobre homotopia	43
3 O teorema de classificação de homeomorfismo de Thurston	48
3.1 Tipos de homeomorfismos	49
3.2 Algumas propriedades dos homeomorfismos pseudo-Anosov	50

3.3	Folheações mensuráveis aracionais	56
3.4	Folheações mensuráveis aracionais com $\lambda \neq 1$	61
3.5	Entropia topológica	64
3.6	O grupo fundamental e a entropia	68
3.7	Subshifts de tipo finito	75
3.8	A entropia topológica dos homeomorfismos pseudo-Anosov	78
3.9	Construção de uma partição de Markov para um homeomorfismo pseudo-Anosov	85
3.10	O teorema de classificação de Thurston	87
4	O teorema de Handel	88
4.1	Métrica equivariante	88
4.2	Sombreamento global	90
4.3	O teorema de Handel	96
	Conclusões	101
	Bibliografia	102

Capítulo 1

Conceitos fundamentais

Na seção 1.1 introduziremos e relembremos conceitos básicos, os quais serão utilizados por todo este trabalho nas seções seguintes. Na seção 1.2 vamos tratar os conceitos que nos serão fundamentais relativos a geometria hiperbólica de forma que os modelos para tal geometria sejam bem entendidos e suas propriedades fixadas. Na seção 1.3 vamos introduzir o conceito de índice de ponto fixo isolado e estendê-lo para o caso mais geral possível onde o ponto fixo não precisa ser isolado. Por fim, na seção 1.4, trataremos os conceitos mais importantes em nosso caso sobre levantamentos.

1.1 Preliminares

Para que nós consigamos entender o teorema de classificação de Thurston serão necessárias inicialmente algumas definições para nivelamento de conhecimento.

Definição 1.1.1. *Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ com X e Y espaços topológicos é chamada um **homeomorfismo** se possui as seguintes propriedades:*

- (i) *f é uma bijeção;*
- (ii) *f é contínua; e*
- (iii) *a função inversa f^{-1} é contínua.*

*Neste caso dizemos que X é **homeomorfo** a Y . A notação adotada será $\text{Homeo}(X, Y)$ para o conjunto dos homeomorfismos de X para Y e $\text{Homeo}(X)$ quando $X = Y$. Ainda,*

no caso em que $f \in \text{Homeo}(X)$ dizemos que $f : X \rightarrow X$ é um **endomorfismo**.

Definição 1.1.2. Um homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ onde ambos f e f^{-1} são diferenciáveis é chamado de **difeomorfismo**. Neste caso dizemos que X é **difeomorfo** a Y . A notação adotada será $\text{Diff}(X, Y)$ para o conjunto dos difeomorfismos de X para Y e $\text{Diff}(X)$ quando $X = Y$.

Definição 1.1.3. (i) Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $i : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ chama-se uma **imersão** quando, para cada $x \in U$, a derivada $Di_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ é uma transformação linear injetora.

(ii) Seja $U_0 \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Uma imersão de classe C^k , $i : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, diz-se um **mergulho** de classe C^k de U_0 em \mathbb{R}^n , quando i é um homeomorfismo de U_0 sobre $i(U_0)$.

(iii) Dizemos também que i é uma **parametrização** de classe C^k e dimensão m do subconjunto $U = i(U_0) \subset \mathbb{R}^n$.

(iv) Uma **superfície m -dimensional** do \mathbb{R}^n , de classe C^k , é um subconjunto não-vazio

$$M = M^m \subset \mathbb{R}^n$$

no qual todo ponto p possui uma vizinhança aberta U dotada de uma parametrização de classe C^k e dimensão m .

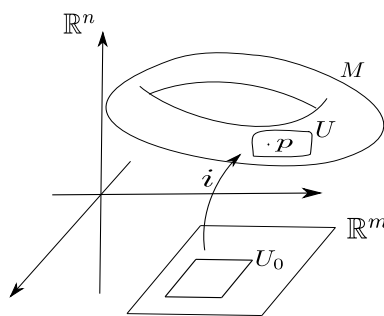


Figura 1.1: Superfície m -dimensional para $n = 3$ e $m = 2$.

Definição 1.1.4. Um **caminho** ou **curva** γ em um espaço X é uma aplicação $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow X$, dada por

$$t \mapsto \gamma(t)$$

onde $I = [0, 1]$.

Diremos que um caminho é **fechado** quando $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Definição 1.1.5. Se f e f' são aplicações contínuas entre os espaços topológicos X e Y diremos que f é **homotópica** a f' se existir uma aplicação contínua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$H(x, 0) = f(x) \text{ e } H(x, 1) = f'(x)$$

para cada $x \in X$ onde $I = [0, 1]$. A aplicação H é chamada uma **homotopia** entre f e f' . A notação adotada será $H : f \cong f'$.

Dada a homotopia $H : f \cong f'$, consideraremos, para cada $t \in I$, a aplicação contínua $H_t : X \rightarrow Y$, definida por

$$H_t(x) = H(x, t).$$

Definição 1.1.6. Dois caminhos fechados $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow X$ são ditos **livremente homotópicos** se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow X$ tal que

$$H(s, 0) = \gamma_1(s), H(s, 1) = \gamma_2(s) \text{ e } H(0, t) = H(1, t)$$

para quaisquer $s, t \in I$. A última igualdade significa que, para todo $t \in I$, o caminho $H_t : I \rightarrow X$ tal que $H_t(s) = H(s, t)$, é fechado.

Definição 1.1.7. Uma **isotopia** entre homeomorfismos $f, f' : X \rightarrow Y$ é uma homotopia $H : f \cong f'$ tal que $H_t : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo para todo $t \in I$.

Observação 1.1.8. Podemos pensar em uma homotopia como sendo uma deformação entre dois espaços topológicos envolvendo dobras, encolhimentos e alongamentos mas que não necessariamente precisa ser injetiva ou sobrejetiva. Por outro lado uma isotopia é uma deformação na qual cada homotopia é um homeomorfismo.

De acordo com a definição dada anteriormente sobre caminho temos associados os seguintes conceitos:

Definição 1.1.9. (i) Dado um caminho γ em um espaço X , definimos o **caminho inverso** pela aplicação $\gamma^{-1} : I \rightarrow X$, dada por

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$$

para todo $t \in I$.

(ii) Para caminhos $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow X$ com $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, defina a **concatenação de caminhos**, $\gamma_1\gamma_2 : I \rightarrow X$, por

$$\gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(iii) Dois caminhos $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow X$ são ditos serem **homotópicos com extremos fixos** (ou **homotópicos por caminho**) se existe uma aplicação $\Psi : I \times I \rightarrow X$, dada por

$$\begin{cases} \Psi(s, 0) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0), & \forall s \in I \\ \Psi(s, 1) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1), & \forall s \in I \\ \Psi(0, t) = \gamma_1(t), & \forall t \in I \\ \Psi(1, t) = \gamma_2(t), & \forall t \in I \end{cases}$$

(iv) Para γ um caminho em X , e $r, s \in I$, definimos $\gamma_r^s : I \rightarrow X$, por

$$\gamma_r^s(t) = \gamma(r + t(s - r)).$$

Note que a relação ser homotópico por caminho é uma relação de equivalência no conjunto de todos os caminhos em X .

Denotaremos a classe de equivalência contendo um caminho γ por $[\gamma]$. Ainda, as classes $[\gamma^{-1}]$ e $[\gamma_1\gamma_2]$ são independentes da escolha dos elementos usados para defini-las. Vemos que γ_r^s é a restrição de γ ao intervalo $[r, s] \subseteq [0, 1]$, reparametrizado de forma que γ_r^s é novamente um caminho.

Lema 1.1.10. *Seja γ um caminho, então $(\gamma_q^r)^{-1} = \gamma_r^q$ e $[\gamma_q^r\gamma_r^s] = [\gamma_q^s]$.*

Demonstração. A primeira parte é evidente pois

$$\begin{aligned} (\gamma_q^r)^{-1}(t) &= \gamma(q + (1 - t)(r - q)) \\ &= \gamma(q + r - q - tr + tr) \\ &= \gamma(r + tq - tr) \\ &= \gamma(r + t(q - r)) = \gamma_r^q(t). \end{aligned}$$

Para a segunda afirmação, defina a homotopia com pontos extremos fixos $\psi : I \times I \rightarrow X$ por

$$\psi(u, t) = \begin{cases} \gamma(u(q + t(s - q)) + (1 - u)(q + 2t(r - q))), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma(u(q + t(s - q)) + (1 - u)(r + (2t - 1)(s - r))), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Então ψ é a homotopia desejada que nos fornece a relação de equivalência entre os caminhos $\gamma_q^r \gamma_r^s$ e γ_q^s . \square

Definição 1.1.11. Uma superfície M é chamada **orientável** se é possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas de tal modo que se um ponto $p \in M$ pertence a duas dessas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem um Jacobiano positivo em p . A escolha de tal família é chamada uma **orientação** de M , e M é nesse caso chamada **orientável**. Se tal escolha não é possível, a superfície é chamada **não-orientável**.

As superfícies orientáveis compactas são classificadas de acordo com o seu **gênero** ξ maior ou igual a 0, conforme a figura 1.2 a seguir.

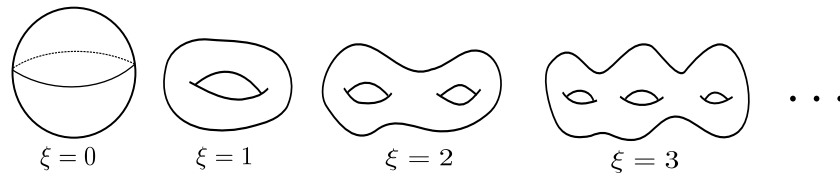


Figura 1.2: Tipos de superfície segundo o seu gênero.

Definição 1.1.12. A característica de **Euler-Poincaré** de uma superfície M , de gênero ξ , é um invariante topológico, um número que descreve a forma ou a estrutura de um espaço topológico independentemente da forma como ela é dobrada. Dessa maneira, em nosso trabalho a característica de Euler-Poincaré de uma superfície M será dada por

$$\chi(M) = 2 - 2\xi$$

Definição 1.1.13. Uma **folheação** F de uma superfície M é uma partição de M em subconjuntos unidimensionais (chamados **folhas** de F), tal que cada $x \in M$ é ou um

ponto regular (i.e. um ponto sobre a folha) ou uma ***p-prong singularidade*** para $p \geq 3$, como na figura 1.3.

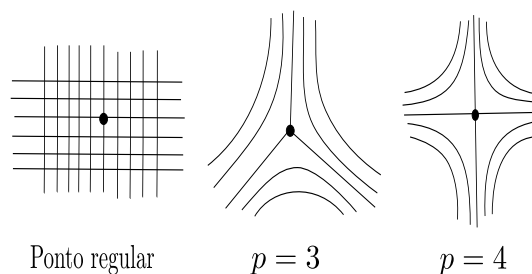


Figura 1.3: Ponto regular e prongs em uma superfície M .

Observação 1.1.14. Em nosso trabalho todas as ***singularidade*** serão do tipo ***p-prong singularidadas*** com $p \geq 3$.

Definição 1.1.15. Um arco (i.e. um caminho) $\alpha \subset M$ é ***transversal*** a F se α não interceptar as singularidades de M e é transversal a cada folha de F em cada ponto em seu interior.

Definição 1.1.16. Uma ***folheação mensurável*** (F, μ) de uma superfície orientável M é uma folheação juntamente com uma medida μ , que atribui um comprimento positivo $\mu(\alpha)$ para cada arco $\alpha \subset M$ transversal a F , com as seguintes propriedades:

i) ***Aditividade:*** $\mu(\alpha_1\alpha_2) = \mu(\alpha_1) + \mu(\alpha_2)$ em que $\alpha_1\alpha_2$ é a concatenação dos caminhos α_1 e α_2 .

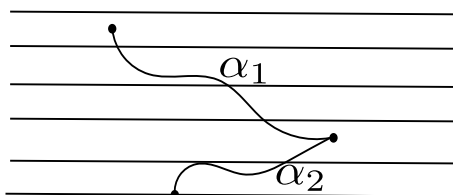


Figura 1.4: Ponto regular e prongs em uma superfície M .

ii) ***Holonomia invariante:*** $\mu(\alpha_1) = \mu(\alpha_2)$ se α_1 e α_2 tem os seus pontos inicial e final nas mesmas folhas, respectivamente.

iii) ***Sem átomos:*** se α tem diâmetro pequeno então $\mu(\alpha)$ é pequeno, i.e., " $\mu(\alpha) \rightarrow 0$ quando $\text{diam}(\alpha) \rightarrow 0$ ".

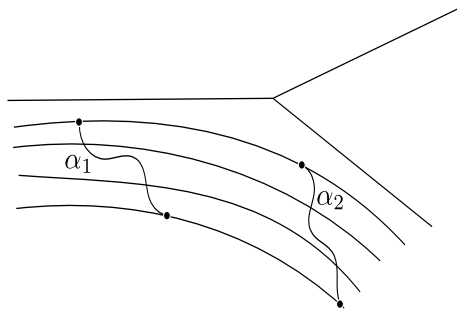


Figura 1.5: Propriedade da homologia invariante da folheação mensurável.

Para mais detalhes veja [2].

Definição 1.1.17. Duas folheações são **transversais** se para todo $x \in M$, uma singularidade (ou ponto regular), com M uma superfície, temos por exemplo uma das seguintes disposições entre duas folheações distintas conforme a figura 1.6.

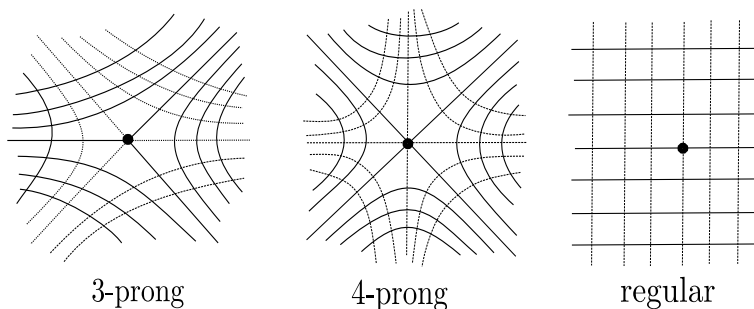


Figura 1.6: Possíveis formas de folheações transversais.

Observação 1.1.18. Dado um homeomorfismo $f : M \rightarrow M$, escrevemos $f(F, \mu) = (f(F), \mu^*)$ para a folheação mensurável cujas folhas são f -imagens de folhas de F e, que atribui a medida $\mu^*(\alpha) = \mu(f^{-1}(\alpha))$ para o arco transversal α .

1.2 Geometria hiperbólica

Definição 1.2.1. A esfera de Riemann, $\overline{\mathbb{C}}$, é dada por

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

onde ∞ é chamado **ponto no infinito**.

Definição 1.2.2. Uma *transformação de Möbius* em $\overline{\mathbb{C}}$ é uma aplicação $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ dada por

$$\varphi(z) = \frac{pz + q}{rz + s},$$

onde $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ e $z \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $ps - qr \neq 0$.

Note que, a partir da definição anterior que, $\varphi(\infty) = p/r$ e que $\varphi(-s/r) = \infty$.

Propriedade 1.2.3. As transformações de Möbius formam um grupo sobre a operação de composição.

Demonstração. Provaremos apenas o fechamento, uma vez que, os demais axiomas de grupo seguem sem grandes dificuldades. Sejam $\varphi(z) = \frac{pz + q}{rz + s}$ e $\varphi'(z) = \frac{jz + k}{lz + m}$. Assim, substituindo, temos que

$$(\varphi' \circ \varphi)(z) = \frac{(jp + kr)z + (jq + ks)}{(lp + mr)z + (lq + ms)}.$$

Uma vez que $(jp + kr)(lq + ms) - (jq + ks)(lp + mr) = (ps - qr)(jm - lk) \neq 0$, pois $(ps - qr) \neq 0$ e $(jm - lk) \neq 0$, então esta é novamente uma aplicação de Möbius. \square

Definição 1.2.4. Se duas curvas distintas C_1 e C_2 em $\overline{\mathbb{C}}$ se intersectam em um ponto P , o **ângulo** entre elas é definido como sendo o ângulo medido da tangente a C_1 para tangente a C_2 .

Definição 1.2.5. Uma aplicação $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ é chamada **conforme** (ou que **preserva ângulos**) se, sempre que curvas suaves (de classe \mathcal{C}^1) C_1 e C_2 se encontram num ponto P com ângulo (sinal) θ (medido de C_1 a C_2), então $\varphi(C_1)$ e $\varphi(C_2)$ se encontram em $\varphi(P)$ com o mesmo ângulo de C_1 para C_2 .

Definição 1.2.6. Denotaremos o conjunto das aplicações conformes $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ por $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$.

Proposição 1.2.7. As aplicações de Möbius são aplicações conformes (ou que preservam ângulos).

Demonstração. No caso de qualquer aplicação analítica complexa em qualquer ponto $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ no qual $\varphi'(z_0) \neq 0$, i.e., existe a tangente no ponto, o resultado segue diretamente. (Localmente, a aplicação é expandida por $|\varphi'(z_0)|$ e rotacionada por $\arg \varphi'(z_0)$.) Segue também que para $z \in \overline{\mathbb{C}}$, temos

$$\varphi'(z) = \left(\frac{az+b}{cz+d} \right)' = \frac{(cz+d)(a) - (az+b)(c)}{(cz+d)^2} = \frac{acz+ad-acz+bc}{(cz+d)^2} = \frac{ad+bc}{(cz+d)^2} \rightarrow 0$$

somente quando $z \rightarrow \infty$. Escrevendo em termos de $w = 1/z$, podemos também verificar que f é uma aplicação conforme em ∞ . \square

Definição 1.2.8. O conjunto $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ será chamado **disco unitário**.

Observação 1.2.9. Toda transformação de Möbius $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ pode ser escrita na forma

$$\varphi(z) = e^{i\theta} \frac{z+a}{1+\bar{a}z},$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$.

Denotaremos o grupo de Möbius por \mathcal{M} e o subgrupo que preserva o disco unitário por Γ . Notemos ainda que a identidade para tais grupos é dada por $Id(z) = z$.

Existe uma identificação natural de \mathcal{M} com o grupo das matrizes complexas 2×2 com determinante 1, módulo sinal, $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \pm Id$, onde

$$A \sim \varphi(z) \Leftrightarrow \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm A \text{ e } \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1.$$

$$\text{Observamos ainda que } SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) : \det(A) = 1 \right\}$$

Pela observação anterior segue que os elementos do subgrupo Γ corresponde as matrizes

$$\pm \begin{pmatrix} \frac{e^{i\theta/2}}{\sqrt{1-|a|^2}} & \frac{ae^{i\theta/2}}{\sqrt{1-|a|^2}} \\ \frac{e^{-i\theta/2}\bar{a}}{\sqrt{1-|a|^2}} & \frac{e^{-i\theta/2}}{\sqrt{1-|a|^2}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow e^{i\theta} \frac{z+a}{1+\bar{a}z}.$$

Definição 1.2.10. Um subgrupo G de $SL(2, \mathbb{C})$ (ou \mathcal{M}) é chamado **discreto** se existe uma vizinhança N da identidade Id em $SL(2, \mathbb{C})$ (ou \mathcal{M}) tal que $G \cap N = \{Id\}$. Alternativamente, podemos também dizer que um subgrupo G de $SL(2, \mathbb{C})$ (ou \mathcal{M}) é **discreto** se, e somente se, não existe uma sequência de elementos distintos $A_n \in G$ com $A_n \rightarrow Id$, i.e., " G não possui ponto de acumulação".

Definição 1.2.11. Um subgrupo discreto de Γ (ou $SL(2, \mathbb{R})$) é chamado de **grupo Fuchsiano**.

Agora introduziremos uma métrica em \mathbb{D} de modo que a distância entre dois pontos quaisquer seja invariante pelas transformações de Möbius.

Definição 1.2.12. A **densidade hiperbólica**, $\rho(t)|dt|$, é invariante sobre todas as aplicações de Möbius $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ e indicaremos isso por

$$\rho(\varphi(t))|\varphi'(t)| = \rho(t). \quad (1.1)$$

Observação 1.2.13. O conjunto dos automorfismos de \mathbb{D} será da forma

$$Aut(\mathbb{D}) = \{T \in Aut(\overline{\mathbb{C}}) : T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}\},$$

i.e., é o conjunto das aplicações que mantêm \mathbb{D} invariante.

Definição 1.2.14. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ um caminho unindo os pontos p e q . O **comprimento hiperbólico** de γ será dado por

$$\rho(\gamma) = \int_{\gamma} \rho(t)|dt|$$

e a **distância hiperbólica** de p até q é definida por

$$d(p, q) = \inf \rho(\gamma)$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os caminhos γ possíveis de p à q .

Agora encontraremos a expressão de $\rho(t)$. Observe que a aplicação φ move o ponto zero para o ponto a , o qual pode ser qualquer ponto em \mathbb{D} . Logo, aplicando a equação (1.1) a transformação $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ acima, nós vemos que a densidade hiperbólica em \mathbb{D} é determinada pelos seus valores em um único ponto. Para simplificar notações futuras, nós tomaremos $\rho(0) = 1$. Portanto pela equação (1.1) obtemos

$$\rho(a) = \frac{1}{\varphi'(0)} = \frac{1}{1 - |a|^2}. \quad (1.2)$$

Note que a densidade em a depende somente de sua distância Euclideana até origem.

A partir da equação da densidade hiperbólica e da definição 1.2.14, podemos encontrar a equação para distância hiperbólica entre quaisquer dois pontos p e q em \mathbb{D} .

Suponha inicialmente que um destes dois pontos, digamos q , é a origem 0 . Se o ponto p é também a origem, então, obviamente, a distância entre p e 0 é zero. Suponha que p é um ponto diferente de zero em \mathbb{D} e seja γ_0 o seguimento ligando 0 a p , i.e., $\gamma_0 = tp$, onde $0 \leq t \leq 1$. Pela equação (1.2), o comprimento hiperbólico de γ_0 é

$$\rho(\gamma_0) = \int_{\gamma_0} \rho(t) |dt| = \int_0^1 \left(\frac{1}{1 - t^2|p|^2} \right) |p| dt,$$

e então temos que

$$\rho(\gamma_0) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |p|}{1 - |p|}.$$

Agora suponha que γ é um caminho qualquer unindo 0 à p . Para obter uma estimativa do comprimento hiperbólico de γ , usamos uma partição qualquer $0 = t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n = 1$ do intervalo unitário, e estimamos a integral na definição 1.2.14 por

$$P = \sum_{i=1}^{n-1} \rho(\gamma(t_i)) |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|.$$

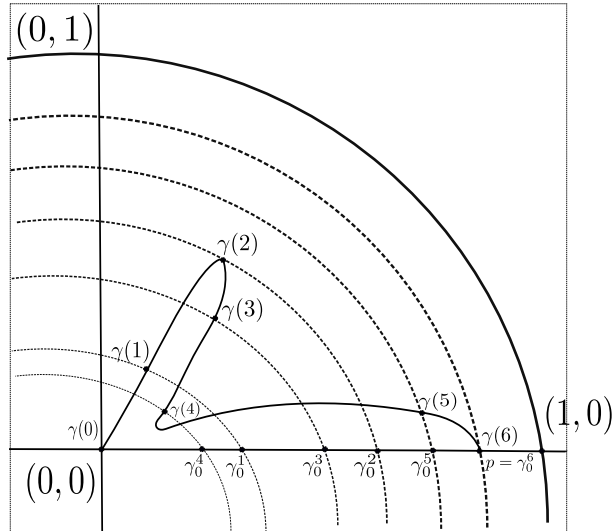


Figura 1.7: Estimativa do comprimento de γ .

Nós usamos a mesma partição $\{t_i\}_{i=1,\dots,n}$ para comparar $\rho(\gamma_0)$ e $\rho(\gamma)$. Projetamos os pontos $\gamma(t_i)$ radialmente nos pontos $\gamma_0^i = |\gamma(t_i)| \frac{\rho}{|p|}$ no segmento de reta γ_0 . Juntando γ_0^i

a γ_0^{i+1} por segmentos de reta, obtemos um caminho que pode ser movido para frente e para trás sobre si mesmo, mas definitivamente permanece no segmento de reta γ_0 .

Assim, uma estimativa para limite superior para o comprimento hiperbólico de γ_0 é dado por

$$P_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \rho(\gamma_0^i) |\gamma_0^{i+1} - \gamma_0^i|.$$

Pela invariância de $\rho(t)$ sobre rotações em volta da origem,

$$\rho(\gamma_0^i) = \rho(\gamma(t_i)),$$

e pela geometria Euclideana,

$$\gamma_0^{i+1} - \gamma_0^i < |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|,$$

assim segue que

$$P_0 \leq P.$$

Uma vez que, a partição foi tomada arbitrariamente, $\rho(\gamma_0) \leq \rho(\gamma)$. Então γ_0 tem o menor comprimento hiperbólico entre todos os caminhos unindo 0 e p , e

$$d(0, p) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |p|}{1 - |p|} \quad (1.3)$$

é portanto a **distância hiperbólica entre a origem 0 e qualquer ponto p em \mathbb{D}** .

Suponha agora que a e w são pontos de \mathbb{D} . A distância hiperbólica é invariante sobre transformações de Möbius de \mathbb{D} . Portanto, se

$$\varphi(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

então

$$d(a, w) = d(0, s),$$

onde

$$s = \varphi(w) = \frac{w - a}{1 - \bar{a}w}.$$

Usando a equação (1.3) nós obtemos a equação para a **distância hiperbólica entre dois pontos quaisquer em \mathbb{D}** :

$$d(a, w) = d(0, s) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |s|}{1 - |s|},$$

$$d(a, w) = \frac{1}{2} \log \frac{|1 - \bar{a}w| + |w - a|}{|1 - \bar{a}w| - |w - a|}. \quad (1.4)$$

Definição 1.2.15. *O espaço métrico $(\mathbb{D}, d(\cdot, \cdot))$ será chamado de **disco hiperbólico**, onde $d(\cdot, \cdot)$ é a distância hiperbólica entre dois pontos quaisquer em \mathbb{D} .*

Observação 1.2.16. *Será considerado em \mathbb{D} a métrica*

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - (x^2 + y^2))^2},$$

para que tal espaço hiperbólico tenha curvatura -1 .

Definição 1.2.17. *Se γ é uma curva no disco hiperbólico tal que para toda tríplice de pontos $p, r, q \in \gamma$ com r entre p e q temos que*

$$d(p, q) = d(p, r) + d(r, q)$$

*então γ será chamada **geodésica**.*

Observação 1.2.18. *Destacamos o fato de que uma geodésica é uma curva que minimiza distâncias entre pontos em \mathbb{D} .*

Proposição 1.2.19. *Uma curva γ que satisfaz o ínfimo na definição 1.2.14 é uma geodésica.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que γ é uma curva unindo os pontos p e q em \mathbb{D} satisfazendo o ínfimo da definição 1.2.14 e seja $r \in \gamma$. Denote por γ_1 a parte de γ unindo os pontos p e r e de γ_2 a parte de γ unindo os pontos r e q . Então por definição de comprimento integral

$$\rho(\gamma) = \rho(\gamma_1) + \rho(\gamma_2)$$

e uma vez que γ é minimal pela observação 1.2.18, $d(p, q) = \rho(\gamma)$. Então segue que $\rho(\gamma_1) = d(p, r)$ e $\rho(\gamma_2) = d(r, q)$. Identicamente, se existe uma curva menor que γ_1 unindo os pontos p e r , seguida da curva γ_2 , estas deveriam ter um comprimento menor do que a curva γ , uma contradição. A mesma condição se aplica a γ_2 e assim γ é uma geodésica. \square

Teorema 1.2.20 (Unicidade das Geodésicas). *Para quaisquer dois pontos pertencentes a \mathbb{D} , existe uma única geodésica unindo tais pontos e tal geodésica é uma arco de círculo ortogonal a \mathbb{D} .*

Demonstração. Tome dois ponto quaisquer $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ com z_0 sendo fixo. Seja uma aplicação conforme $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ definida por $\varphi(z_0) = 0$ e $\varphi(z_1) = \frac{z_1 - z_0}{1 - \overline{z_0}z_1}$. Logo, temos uma geodésica γ unindo os pontos $\varphi(z_0)$ e $\varphi(z_1)$ tendo o mesmo comprimento que a geodésica $\varphi^{-1}(\gamma)$ unindo os pontos z_0 e z_1 . Sendo que a geodésica γ é uma curva que minimiza a distância entre $\varphi(z_0)$ e $\varphi(z_1)$, então esta curva é única, pois assim não existe uma distância menor dada pela definição 1.2.14. \square

Definiremos a seguir um espaço hiperbólico que será isomorfo a \mathbb{D} e que é do ponto de vista geométrico mais intuitivo de se construir exemplos.

Definição 1.2.21. *O semiplano superior será definido por $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{I}(z) > 0\}$, onde $\mathcal{I}(z)$ é a parte imaginária de z e cuja métrica é dada por*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

O conjunto dos automorfismos de \mathbb{H} e dado por

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = \{T \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) : T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\},$$

i.e., é o conjunto das aplicações que mantém \mathbb{H} invariante.

Definição 1.2.22. *A aplicação $\mathcal{C} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ dada por*

$$z \mapsto \mathcal{C}(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

é chamada de aplicação de Cayley.

Observação 1.2.23. *O limite no infinito de \mathbb{H} é dado por*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

o qual será escrito como $\partial\mathbb{H}$. De forma similar escreveremos $\partial\mathbb{D}$ para o limite no infinito em \mathbb{D} .

Lema 1.2.24. *A aplicação de Cayley \mathcal{C} induz um automorfismo conforme (ou bijeção) $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$.*

Demonstração. Observamos inicialmente que $\mathcal{C}(\infty) = 1$, $\mathcal{C}(1) = i$ e que $\mathcal{C}(0) = -1$. Assim segue que a reta $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é levada no círculo passando por 1 , $-i$ e i , i. e., em $\partial\mathbb{D}$. Logo, \mathcal{C} deve mapear as duas componentes conexas de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ para as duas componentes conexas de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \partial\mathbb{D}$. Para ver quem é levado em quem, note que $\mathcal{C}(i) = 0$ e assim \mathbb{H} deverá ser levado em \mathbb{D} , como queríamos. \square

Definição 1.2.25. *Uma aplicação $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ é uma **isometria que preserva orientações de \mathbb{H}** se é diferenciável (como uma função de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$), se $\det(Df(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{H}$, e se $d(f(z_1), f(z_2)) = d(z_1, z_2)$ para todos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$. O conjunto de todas as isometrias que preservam orientação em \mathbb{H} é denotado por $Isom^+(\mathbb{H})$. Analogamente temos $Isom^+(\mathbb{D})$.*

Teorema 1.2.26. *Sendo \mathbb{D} e \mathbb{H} definidos como anteriormante, segue que:*

- (i) $Isom^+(\mathbb{H}) = Aut(\mathbb{H})$ e $Isom^+(\mathbb{D}) = Aut(\mathbb{D})$.
- (ii) *O automorfismo $\mathcal{C} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ é uma isometria.*

Demonstração. Veja [13]. \square

Definição 1.2.27. *Um subgrupo $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ (ou \mathcal{M}) é dito **agir descontinuamente** em $z \in \overline{\mathbb{C}}$ se existe uma vizinhança U de z tal que $U \cap \varphi(U) = \emptyset$ para toda exceto uma quantidade finita de $\varphi \in G$.*

Definição 1.2.28. *Se G é um grupo Fuchsiano, então um subconjunto $\mathcal{R} \subset \mathbb{H}$ é chamado **domínio fundamental** de G se as seguintes duas condições são válidas:*

- (i) se $x, y \in \mathcal{R}$ tal que $x = \varphi(y)$ para um elemento $\varphi \in G$, então $\varphi = Id$ (ou equivalentemente $\varphi(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R} = \emptyset$, para todo $\varphi \in G, \varphi \neq Id$); e
- (ii) $\forall z \in \mathbb{H}, \exists \varphi \in G$ tal que $\varphi(z) \in \overline{\mathcal{R}}$ (ou equivalentemente $\bigcup_{\varphi \in G} \overline{\varphi(\mathcal{R})} = \mathbb{H}$).

Observação 1.2.29. Note que temos definição análoga no caso do disco unitário \mathbb{D} de acordo com o lema 1.2.24.

Exemplo 1.2.30. Consideremos o caso particular em que nosso espaço seja o \mathbb{R}^2 e que o grupo $G = \mathbb{Z}^2$ esteja agindo em \mathbb{R}^2 por translações horizontais e verticais por 1. Assim G é gerado por $S : (x, y) \mapsto (x+1, y)$ e $T : (x, y) \mapsto (x, y+1)$, ou seja, $G = \{S^n T^m : n, m \in \mathbb{Z}\}$. O quadrado unitário $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ é um domínio fundamental para G . De fato, vemos que, a interseção de uma translações ou composição de translações aplicada a \mathcal{R} e \mathcal{R} é vazia e, a união do fecho das translações ou composição de translações aplicada a \mathcal{R} é \mathbb{R}^2 .

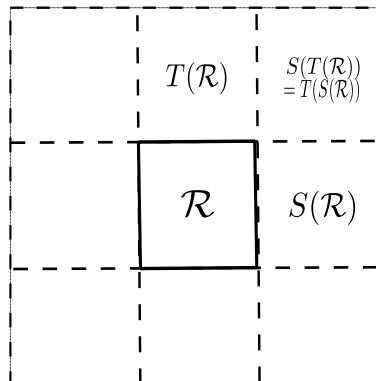


Figura 1.8: Domínio fundamental de \mathbb{Z}^2 .

Observação 1.2.31. Existem diferentes domínios fundamentais para um dado grupo Fuchsiano.

Observação 1.2.32. Se na última definição apenas a condição (i) for satisfeita dizemos que temos um **domínio fundamental parcial**.

Teorema 1.2.33 (Existência de domínios fundamentais). Digamos que G seja um grupo Fuchsiano agindo em \mathbb{H} (ou \mathbb{D}). Então existe um domínio fundamental satisfazendo as

condições (i) e (ii) da definição anterior. O domínio fundamental pode ser escolhido de maneira que tenha lados finitos se, e somente se, G é finitamente gerado.

Vamos provar tal teorema no caso dos domínios de Dirichlet. Este domínio será introduzido da seguinte maneira:

Tomemos $z_0 \in \mathbb{H}$. Para cada ponto $\varphi(z_0)$ da órbita de $\varphi \neq Id$, trace o bissetor perpendicular do seguimento de reta de z_0 até $\varphi(z_0)$. Este separa \mathbb{H} em duas partes. Para cada $\varphi \in G \setminus Id$, seja $H_\varphi = H_\varphi(z_0) \subset \mathbb{H}$ o espaço cortado pelo bissetor perpendicular de z_0 até $\varphi(z_0)$ e contendo z_0 , em outras palavras, $H_\varphi(z_0) = \{z \in \mathbb{H} : d(z, z_0) < d(z, \varphi(z_0))\}$.

Definição 1.2.34. Tome $z_0 \in \mathbb{H}$ tal que $\varphi(z_0) = z_0$ implica que $\varphi = Id$. Definimos o **domínio de Dirichlet** com centro em z_0 sendo

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{z_0} = \bigcap_{\varphi \in G \setminus \{Id\}} H_\varphi(z_0) = \{z \in \mathbb{H} : d(z, z_0) < d(z, \varphi(z_0)), \forall \varphi \neq Id\}.$$

A seguir daremos a prova do teorema 1.2.33 para o caso dos domínios de Dirichlet.

Demonstração. Vamos provar inicialmente que $h(\mathcal{R}_{z_0}) = \mathcal{R}_{hz_0}$:

$$\begin{aligned} h(\mathcal{R}_{z_0}) &= \{hz \in \mathbb{H} : d(z, z_0) < d(z, \varphi(z_0)), \forall \varphi \neq Id\} \\ &= \{hz \in \mathbb{H} : d(hz, hz_0) < d(hz, h\varphi z_0), \forall \varphi \neq Id\} \\ &= \{w \in \mathbb{H} : d(w, hz_0) < d(w, h\varphi h^{-1}hz_0), \forall \varphi \neq Id\} \\ &= \{w \in \mathbb{H} : d(w, hz_0) < d(w, khz_0), \forall k \neq Id = \mathcal{R}_{hz_0}\}, \end{aligned}$$

onde para a última igualdade usamos o fato que

$$\{h\varphi h^{-1} \in G : \varphi \neq Id\} = \{k \in G : k \neq Id\}.$$

(i) Se $z \in \mathcal{R}_{z_0} \cap \mathcal{R}_{\varphi z_0}$, então $d(z, z_0) < d(z, \varphi(z_0))$ e $d(z, \varphi z_0) < d(z, \varphi^{-1}\varphi z_0) = d(z, z_0)$.

Assim temos que

$$\mathcal{R}_{z_0} \cap \mathcal{R}_{\varphi z_0} = \mathcal{R}_{z_0} \cap \varphi(\mathcal{R}_{z_0}) = \emptyset$$

(ii) A cardinalidade $\#\{Gz_0 \cap B(z, 1)\}$ é finita para as descontinuidades próprias das ações do grupo G , onde $B(z, 1)$ é a bola de centro z e raio 1. Assim existe somente uma

quantidade finita de pontos $\varphi_1 z_0, \dots, \varphi_n z_0$ próximos de z . Assim podemos escolher um elemento φ tal que

$$d(z, \varphi(z_0)) = \inf_{h \in G} d(z, h z_0),$$

quer dizer

$$d(z, \varphi(z_0)) \leq d(z, h z_0), \forall h \neq \varphi.$$

Logo

$$d(\varphi^{-1} z, z_0) \leq d(\varphi^{-1} z, \varphi^{-1} h z_0), \forall h \neq \varphi.$$

Nós queremos concluir que isto nos dá $\varphi^{-1} z \in \overline{\mathcal{R}}$, i.e.,

$$d(w, z_0) \leq d(w, k z_0), \forall k \neq Id \tag{1.5}$$

implica que $w \in \overline{\mathcal{R}}$. Iremos fazer isto mostrando que (1.5) implica que a semi reta $[z_0, w) \subset \mathcal{R}$, do que segue imediatamente que $[z_0, w] \subset \overline{\mathcal{R}}$.

Se $\alpha \in [z_0, w)$, então

$$d(z_0, \alpha) + d(\alpha, w) = d(z_0, w) \leq d(w, h z_0), \forall h \neq Id,$$

onde a última desigualdade segue de (1.5). Assim

$$d(z_0, \alpha) \leq d(w, h z_0) - d(\alpha, w) \leq d(\alpha, h z_0), \forall h \neq Id.$$

Ainda segue que a segunda inequação é uma igualdade somente se α pertence a reta unindo $h z_0$ à w . Uma vez que esta linha intersecta $[z_0, w)$ exatamente em w , isto somente ocorre se $\alpha = w$, o que por nossa suposição não é o caso. Portanto

$$d(z_0, \alpha) < d(\alpha, h z_0), \forall h \neq Id,$$

e concluímos que $\alpha \in \mathcal{R}$. □

Exemplo 1.2.35. *Seja um subgrupo $G = SL(2, \mathbb{Z})$ agindo sobre o espaço \mathbb{H} . Vamos calcular o domínio de Dirichlet com centro em $z_0 = 2i$.*

Sejam $J(z) = -\frac{1}{z}$ e $S(z) = z + 1$. Então, segue que, $J(2i) = \frac{i}{2}$, $S(2i) = 2i + 1$ e $S^{-1}(2i) = 2i - 1$. (Lembre que na construção do domínio de Dirichlet, nós tínhamos que se $g z_0 = z_0$, então $g = Id$). Assim, por exemplo, em nosso caso não poderíamos escolher

$z_0 = i$ como centro porque $J(i) = -\frac{1}{i} = -\frac{1}{i} \left(\frac{i}{i} \right) = \frac{-i}{-1} = i$, enquanto que, $z_0 = 2i$ é permitido.

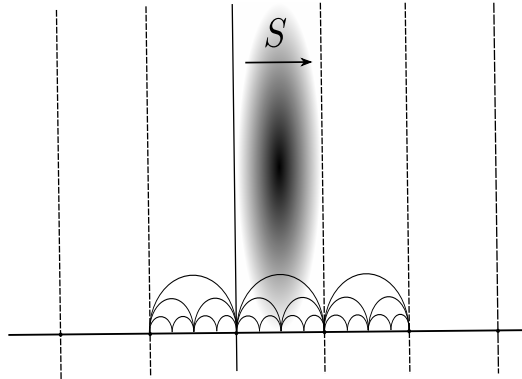


Figura 1.9: Domínio de Dirichlet com centro $z_0 = 2i$ de $G = SL(2, \mathbb{Z})$.

Definição 1.2.36. Uma *estrutura hiperbólica* em uma superfície topológica S é uma coleção maximal de cartas, i.e., conjuntos abertos $U_i \subset S$ e aplicações $\Phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{H}$ tal que:

- (i) $\Phi_i : U_i \rightarrow \Phi(U_i)$ é um homeomorfismo;
- (ii) os conjuntos abertos U_i cobrem S ; e
- (iii) as sobreposições são isometrias, i.e., $\gamma_{ij} = \Phi_i \Phi_j^{-1} : \Phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \Phi_i(U_i \cap U_j) \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$.

Uma superfície dotada de uma estrutura hiperbólica será chamada de **superfície hiperbólica**.

Definição 1.2.37. Um grupo G *atua livremente* em um espaço topológico X se para qualquer $z \in X$ e qualquer $g \in G$ tal que $gz = z$, então $g = \text{Id}$.

No que se segue trataremos da construção de uma estrutura hiperbólica sobre uma superfície. Este método requer a existências de um grupo Fuchsiano G que atua livremente em \mathbb{H} e não dependerá da escolha do domínio fundamental de G .

Método: Suponhamos que G é um grupo Fuchsiano atuando livremente em \mathbb{H} . Seja \mathbb{H}/G denotando o espaço das G -órbitas. Existe uma projeção natural $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/G$. Dotamos

a \mathbb{H}/G da topologia do quociente. Podemos mostrar \mathbb{H}/G é um espaço Hausdorff (veja a demonstração da proposição 5.1.10 em [7]). Ainda \mathbb{H}/G é um espaço métrico cuja métrica é $\bar{d}([x], [y]) = \inf \sum_{i=0}^n d(x_i, x'_i)$ onde $x_0 \in [x]$, $x_n \in [y]$ e $x'_i \sim x_{i+1}$ para $i = 0, \dots, n-1$.

Cada ponto em $[x] \in \mathbb{H}/G$ é uma G -órbita em \mathbb{H} . Para definir uma estrutura hiperbólica, tome um ponto $x \in \mathbb{H}$ o qual é projetado em $[x]$. Escolha uma bola aberta $B(x, r)$ contendo $x \in \mathbb{H}$ e de forma que não contenha nenhum outro ponto da órbita (isso porque G atua livremente e propriamente descontinuo em \mathbb{H}). Então $B(x, r)$ é projetado para um conjunto $U \subset \mathbb{H}/G$ cujo levantamento \tilde{U} para \mathbb{H} consiste de bolas abertas disjuntas $B(gx, r)$, com $g \in G$. Logo \tilde{U} é aberto em \mathbb{H} e portanto U é aberto em \mathbb{H}/G , já que, φ é uma aplicação quociente. Nós assim definimos uma carta como sendo uma aplicação que identifica $U \in \mathbb{H}/G$ com uma bola aberta $B(x, r) \in \mathbb{H}$.

Exemplo 1.2.38. \mathbb{H}/G é uma estrutura hiperbólica. De fato segue que:

(i) $\Phi_i = \varphi^{-1} : U_i \longrightarrow B(x_i, r)$ é tal que tomando $V \in U_i \cap U_{i+1} \mapsto \Phi(V) = \varphi^{-1}(V) = x_i$.

Logo Φ_i é um homeomorfismo;

(ii) Os conjuntos abertos U_i cobrem \mathbb{H}/G pois cada U_i contém uma única classe $[x_i]$; e

(iii) Como $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : \Phi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \Phi_i(U_i \cap U_j) = \varphi(U_i \cap U_j)$, então segue que $x \mapsto x$ com $x \in B(x, r)$. Logo a sobreposição $\Phi_i \circ \Phi_j \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$.

1.3 Índice de ponto fixo

Vamos agora introduzir o conceito de índice de ponto fixo isolado e extendê-lo para o caso mais geral possível onde o ponto fixo não precisa ser isolado.

Definição 1.3.1. Seja $E = \mathbb{R}^n$ um espaço Euclidiano com $U \subset E$ sendo seu subconjunto aberto. Uma aplicação contínua $f : U \longrightarrow E$ é chamada ***d-compacta*** se $f^{-1}(0)$ é compacto.

Para cada aplicação d -compacta nós iremos definir um número inteiro $\text{deg}(f) \in \mathbb{Z}$ chamado de grau da aplicação. Este inteiro mede algebricamente o número de elementos de $f^{-1}(0)$.

No seguinte apresentaremos uma definição diferenciável de grau.

Definição 1.3.2. *Sejam E e E' espaços Euclidianos, seja $U \subset E$ um subconjunto aberto e seja $f : U \rightarrow E'$ uma aplicação suave, (i.e., uma aplicação de classe C^∞). O ponto $x \in U$ é dito ser **regular** se a diferencial Df_x tem posto máximo, i.e., é um epimorfismo. Caso contrário $x \in U$ será chamado **crítico**. Um ponto $y \in E'$ é dito ser um **valor regular** se $f^{-1}(y)$ contém somente pontos regulares. Caso contrário, i.e., se $f^{-1}(y)$ contém um ponto crítico de f , então $y \in E'$ será chamado **valor crítico**. Note assim que, cada ponto $y \notin f(U)$ é um valor regular.*

Teorema 1.3.3 (Sard). *Sejam E e E' espaços Euclidianos (possivelmente de dimensões diferentes), $U \subset E$ um subconjunto aberto e $f : U \rightarrow E'$ uma aplicação suave. Então o conjunto dos valores críticos*

$$\{y \in E' : y \text{ é um valor crítico de } f\} \subset E'$$

tem medida de Lebesgue zero. Como consequência o conjunto dos valores regulares

$$\{y \in E' : y \text{ é um valor regular de } f\} \subset E' \text{ é denso em } E'.$$

Demonstração. Veja [9]. □

O lema a seguir será crucial na definição diferenciável de grau. Por tal resultado poderemos aproximar uma aplicação contínua por uma aplicação diferenciável.

Lema 1.3.4. *Sejam E e E' espaços Euclidianos (possivelmente de dimensões diferentes). Seja $U \subset E$ um subconjunto aberto e $f : U \rightarrow E'$ uma aplicação contínua. Além disso, seja $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo $\alpha(x) > 0$. Então existe uma aplicação suave $g : U \rightarrow E'$ satisfazendo*

$$\|f(x) - g(x)\| < \alpha(x),$$

para todo $x \in U$. Em particular para qualquer número $\epsilon > 0$ existe uma aproximação suave $g|_\epsilon$ de uma dada aplicação contínua f .

Demonstração. Consideremos o caso particular em que $\epsilon > 0$ e $D^n = \{x \in E = \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$. Pelo “teorema de aproximação de Weierstrass” segue que existe

uma função polinomial $g_1 : D^n \rightarrow D^n$ tal que $\|f(x) - g_1(x)\| < \epsilon$, para qualquer $\epsilon > 0$ e qualquer $x \in D^n$. Note ainda que, g_1 pode levar pontos de D^n em pontos fora de D^n . Para evitar isso, tomamos $g(x) = \frac{g_1}{(1 + \epsilon)}$. Logo segue que

$$\begin{aligned} \epsilon &> \|f(x) - (1 + \epsilon)g(x)\| \\ &= \|f(x) - g(x) - g(x)\epsilon\| \\ &> \|f(x) - g(x)\| - \|g(x)\epsilon\| \end{aligned}$$

e portanto como $\|g(x)\| \leq 1$ temos que

$$\|f(x) - g(x)\| < \epsilon + \|g(x)\epsilon\| < 2\epsilon, \text{ para qualquer } x \in D^n \text{ e qualquer } \epsilon > 0.$$

Assim $g : D^n \rightarrow D^n$ é uma aproximação ϵ -suave da aplicação contínua f . \square

Lema 1.3.5. *Seja $f : U \rightarrow E$ uma aplicação contínua d -compacta com $U \subset E$ subconjunto aberto do espaço Euclidiano E . Então segue que:*

- (i) *f é homotopicamente d -compacta a uma aplicação suave g ;*
- (ii) *a aplicação g pode ser escolhida tal que 0 seja seu valor regular; e*
- (iii) *quaisquer duas aplicações d -compactas homotópicas a f (como aplicações contínuas) são homotopicamente d -compactas suaves.*

Demonstração. (i) Sendo f d -compacta, existe um conjunto compacto $K \subset E$ tal que $f^{-1}(0) \subset \text{int}(K)$. Definimos a função $\alpha : U \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ pela equação

$$\alpha(x) = \|f(x)\|/2.$$

Então $\alpha(x) > 0$ (já que por definição $\|\cdot\| \geq 0$) para todo $x \in U \setminus K$. Pelo teorema de Tietze, conforme [10], α é estendida para uma função contínua $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$ e aqui podemos assumir ainda que $\alpha(x) > 0$ para $x \in E$. Agora, seja $g : U \rightarrow E$ uma aproximação α -suave de f , conforme o Lema anterior. Nós vamos mostra que a homotopia de caminho

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$$

entre estas aplicações é d -compacta. De fato para $x \notin K$ temos que $H(x, t) \neq 0$, já que,

$$\begin{aligned}
 \|H(x, t)\| &= \|(1-t)f(x) + tg(x)\| \\
 &= \|f(x) + t(g(x) - f(x))\| \\
 &\geq \|f(x)\| - \|t(g(x) - f(x))\| \\
 &\geq \|f(x)\| - \|\alpha(x)\| \\
 &\geq \frac{1}{2}\|f(x)\| > 0.
 \end{aligned}$$

(ii) Pode ocorrer que o ponto 0 não seja um valor regular da aplicação g . Mesmo assim pelo teorema 1.3.3 o conjunto dos valores regulares é denso em E , e assim podemos escolher um valor regular y_0 próximo de 0. Seja φ um difeomorfismo local de E que leva y_0 para 0. Assim a composição $\varphi \circ g$ tem 0 como valor regular. Por outro lado, podemos tomar a deformação φ com suporte compacto, uma vez que a homotopia de caminhos entre $\varphi \circ g$ e g é d -compacta.

(iii) Seja $\eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função dada por

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < \epsilon \\ 1, & \text{se } t > 1 - \epsilon \end{cases}$$

e crescente em $[\epsilon, 1 - \epsilon]$, como na figura 1.9. Então $H'(x, t) = H(x, \eta(t))$ é também d -compacto.

Agora nós podemos aproximar H' dentro de $U \times (\epsilon/2, 1 - \epsilon/2)$ por uma aplicação suave e estendê-la pela constante homotópica de todo $U \times [0, 1]$ para a homotopia $H'' : U \times I \rightarrow E'$.

Resta mostrar que H'' pode ser tomada d -compacta. Uma vez que, H' é d -compacta, existe um conjunto compacto $K \subset U$ tal que $H'(x, t) = 0$ implica que $x \in \text{int}(K)$. Seja $\alpha : (U \setminus \text{int}(K)) \times I \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\alpha(x, t) = \|H'(x, t)\|.$$

Como $\alpha(x, t) > 0$ para $(x, t) \in (U \setminus \text{int}(K)) \times I$, α admite uma extensão pelo teorema de Tietze para uma função contínua $\alpha : U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ a qual será positiva, i.e., $\alpha(x, t) > 0$

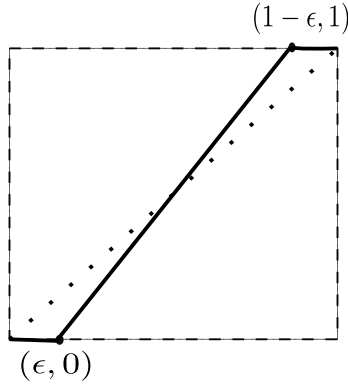


Figura 1.10: Construção de $\eta : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$.

para todo $(x, t) \in U \times I$. Se nós exigimos que H'' satisfaça $\|H''(x, t) - H'(x, t)\| < \alpha(x, t)$, então $H''(x, y) \neq 0$ para $x \notin \text{int}(K)$ uma vez que H'' é d -compacta.

□

Lema 1.3.6. *Sejam $K \subset E$ compacto e $H : K \times I \longrightarrow E'$ não tendo zeros no bordo. Então a restrição $H| : \text{int}(K \times I) \longrightarrow E'$ é d -compacta.*

Demonstração. Note que $H|^{-1}(0) = H^{-1}(0)$ é compacta assim como é subconjunto fechado do espaço compacto $K \times I$, e portanto compacta, o que termina a prova. □

Seja $f : U \longrightarrow E$ uma aplicação d -compacta onde $U \subset E$ é um subconjunto compacto. Vamos assumir que f é suave e 0 é seu valor regular. Pelo “teorema da função inversa” cada $x \in f^{-1}(0)$ é um zero isolado. Agora $f^{-1}(0)$, além de ser compacto e discreto também é finito. Considere Df_x denotando a **derivada** em um ponto $x \in f^{-1}(0)$. Uma vez que $0 \in E$ é um valor regular, a aplicação linear $Df_x : E \longrightarrow E$ tem posto máximo, i.e., é um epimorfismo e assim um isomorfismo. Iremos utilizar a notação $\text{sgn}(Df_x) = \text{sgn}(\det(Df_x))$ para designar o **sinal do determinante** da matriz representando a aplicação linear $Df_x : E \longrightarrow E$. Note que este sinal não depende da escolha da base uma vez que quaisquer duas matrizes A e B representando a mesma aplicação linear (em diferentes bases) são conjugadas, i.e., $B = PAP^{-1}$ e seus determinantes são iguais.

Definição 1.3.7. *Definimos o **grau** de uma aplicação suave d -compacta $g : U \longrightarrow E$*

como

$$\deg(g) = \sum_{x \in g^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(Dg_x).$$

Mais ainda, para uma aplicação contínua f que é homotopicamente d -compacta a g e tal que 0 é seu valor regular, definimos $\deg(f) = \deg(g)$.

Lema 1.3.8. *Se $g_0, g_1 : U \rightarrow E$ são aplicações suaves homotopicamente d -compactas tendo 0 como valor regular, então $\deg(g_0) = \deg(g_1)$.*

Demonstração. Ver [5] página 15 lema 2.1.6. □

Note que pelo lema anterior, o conceito de grau para uma aplicação contínua d -compacta f está bem definido.

Em seguida trataremos algumas propriedades do grau que serão relevantes para nós na demonstração das propriedades do índice de ponto fixo o qual será definido mais a diante.

Propriedade 1.3.9 (Localização). *Sejam $i : \mathcal{V} \rightarrow U$ a inclusão de um subconjunto aberto satisfazendo $f^{-1}(0) \subset \mathcal{V}$ e $f|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow E$ denotando a restrição de f . Então $\deg(f|_{\mathcal{V}}) = \deg(f)$.*

Demonstração. Note que podemos escolher uma aproximação suave d -compacta g satisfazendo $g^{-1}(0) \subset \mathcal{V}$. De fato podemos escolher um conjunto compacto $K \subset \mathcal{V}$ tal que $f^{-1}(0) \subset \operatorname{int}(K)$. Agora a restrição $g|_{\mathcal{V}}$ é também uma aproximação d -compacta de $f|_{\mathcal{V}}$ e, uma vez que $g|_{\mathcal{V}}^{-1}(0) = g^{-1}(0)$ pelo lema 1.3.5 segue pelo lema 1.3.8 que

$$\deg(f) = \sum_{x \in g^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(Dg_x) = \sum_{x \in g^{-1}|_{\mathcal{V}}(0)} \operatorname{sgn}(Df_x) = \deg(f|_{\mathcal{V}}).$$

□

Propriedade 1.3.10 (Invariância homotópica). *Sejam $U \subset E$ um subconjunto aberto e $H : U \times I \rightarrow E$ uma aplicação d -compacta. Então $\deg(f_0) = \deg(f_1)$, onde $f_t = H(\cdot, t)$ para $0 \leq t \leq 1$.*

Demonstração. Sejam g_0 e g_1 aproximações suaves d -compactas de f_0 e f_1 , respectivamente, tais que 0 é um valor regular de ambos g_0 e g_1 . Então pelo lema 1.3.5 existe uma homotopia suave d -compacta entre g_0 e g_1 . Agora

$$\deg(f_0) = \deg(g_0) = \deg(g_1) = \deg(f_1),$$

onde a segunda igualdade acima segue pelo lema 1.3.8. \square

Propriedade 1.3.11 (Aditividade). *Sejam $U_1, U_2 \subset U$ subconjuntos abertos tais que as restrições $f_1 = f|_{U_1}$ e $f_2 = f|_{U_2}$ são d -compactas e $U_1 \cap U_2$ é disjunto de $f^{-1}(0)$, então $\deg(f) = \deg(f_1) + \deg(f_2)$.*

Demonstração. A igualdade é clara se f é suave e 0 é seu valor regular, logo

$$\begin{aligned} \deg(f) &= \sum_{x \in f^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(Df_x) \\ &= \sum_{x \in f_1^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(Df_x) + \sum_{x \in f_2^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(Df_x) \\ &= \deg(f_1) + \deg(f_2), \end{aligned}$$

uma vez que $f^{-1}(0) = f_1^{-1}(0) \cup f_2^{-1}(0)$ é uma união disjunta.

No caso geral será suficiente encontrar uma homotopia d -compacta $H : U \times I \rightarrow E$ começando de $f = H(\cdot, 0)$ para uma aplicação suave $g = H(\cdot, 1)$ e satisfazendo $H(x, t) \neq 0$ para $x \notin U_1 \cup U_2$ e 0 sendo um valor regular de H . Então a restrição de H a U_1 e U_2 são também d -compacta e

$$\deg(f) = \deg(g) = \deg(g|_{U_1}) + \deg(g|_{U_2}) = \deg(f_1) + \deg(f_2)$$

onde a igualdade do meio segue da primeira parte da demonstração.

Resta encontrar a homotopia H . Uma vez que $f_i^{-1}(0) \subset U$ é compacto, podemos encontrar um conjunto compacto K_i satisfazendo $f_i^{-1}(0) \subset \operatorname{int}(K_i) \subset K_i \subset U_i \setminus (U_1 \cap U_2)$ para $i \in \{1, 2\}$. Seja $K = K_1 \cup K_2$. Agora podemos repetir a demonstração do lema 1.3.5 com o K acima. A homotopia obtida tem todos os zeros dentro de K que são disjuntos de $U_1 \cap U_2$. \square

Definição 1.3.12. *Diremos que $\operatorname{Fix}(X)$ é a coleção dos pontos fixos de $f : X \rightarrow X$ onde X é um espaço topológico.*

Se $X = E$, i.e., X é um espaço Euclidiano,

$$Fix(f) = F^{-1}(0)$$

onde $F : U \rightarrow E$ é dada por

$$F(x) = x - f(x),$$

sendo $U \subset E$ é aberto.

Definição 1.3.13. *Uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é **compactamente fixada** se o conjunto de seus pontos fixos é compacto.*

Observação 1.3.14. *Uma aplicação $f : E \rightarrow E$ é compactamente fixada se, e somente se, $F(x) = x - f(x)$ é d -compacta. Mais ainda, x é um ponto fixo de f se, e somente se, x é um zero de F .*

Propriedade 1.3.15 (Multiplicidade). *Se $f : U \rightarrow E$ e $f' : U' \rightarrow E'$ são aplicações compactamente fixadas, então assim é $f \times f' : U \times U' \rightarrow E \times E'$ e $deg(f \times f') = deg(f) \cdot deg(f')$.*

Demonstração. Sejam g e g' aproximações suaves d -compactas de f e f' , respectivamente, tal que 0 é um valor regular para ambos g e g' . Identificando a aplicação linear com a matrix que a representa na base canônica temos que

$$D(g \times g')_{(x,x')} = \begin{bmatrix} Dg_x & 0 \\ 0 & Dg'_{x'} \end{bmatrix},$$

o que implica que $sgn(D(g \times g')) = sgn(D(g_x)) \cdot sgn(D(g'_{x'}))$. Agora segue que

$$\begin{aligned} deg(g \times g') &= \sum_{(x,x') \in (g \times g')^{-1}(0)} sgn(D(g \times g')_{x,x'}) \\ &= \sum_{x \in g^{-1}(0), x' \in g'^{-1}(0)} sgn(Dg_x) \cdot sgn(Dg'_{x'}) \\ &= \sum_{x \in g^{-1}(0)} sgn(Dg_x) \cdot \sum_{x' \in g'^{-1}(0)} sgn(Dg'_{x'}) = deg(g) \cdot deg(g'). \end{aligned}$$

□

Definição 1.3.16. *Seja x um ponto fixo ($f(x) = x$) isolado de $f : U \rightarrow E$. Escolha uma esfera S_x^{n-1} centrada em x pequena o suficiente tal que seu bordo não contenha outro ponto fixo a não ser x . Definimos o campo de direções $\phi : S_x^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ por*

$$\phi(y) = \frac{y - f(y)}{\|y - f(y)\|},$$

para $y \in S_x^{n-1}$. Assim definimos o **índice de ponto fixo isolado** de f por

$$\text{index}(f, x) = \text{deg}(\phi).$$

Note que esta definição independe do raio de S_x^{n-1} .

O índice de ponto fixo nos fornece uma contagem algébrica dos pontos fixos contidos em um subconjunto aberto $U \subset E$ que não tem pontos fixos em seu bordo ∂U .

Vamos agora dar uma definição para o índice de ponto fixo para o caso em que o ponto fixo não precisa de ser isolado.

Definição 1.3.17. *Sejam $U \subset E$ um subconjunto aberto de um espaço Euclidiano e $f : U \rightarrow E$ uma aplicação compactamente fixada. Definimos o **índice de ponto fixo** de f por*

$$\text{index}(f, U) = \text{deg}(F)$$

onde $F(x) = x - f(x)$.

Vamos agora tratar de algumas propriedades relevantes do índice de ponto fixo. Para uma notação mais abreviada consideramos nas demonstrações das propriedades a seguir que

$$\text{index}(f, U) = \text{index}(f).$$

Propriedade 1.3.18 (Localização). *Seja $i : U' \rightarrow U$ a inclusão de um subconjunto aberto satisfazendo $\text{Fix}(f) \subset U'$. Então $f|_{U'}$ é compactamente fixada e $\text{index}(f|_{U'}) = \text{index}(f)$.*

Demonstração. Note que $\text{index}(f) = \text{deg}(id - f)$ e $\text{index}(f|_{U'}) = \text{deg}(id - f)|_{U'}$. Assim segue que

$$(id - f)^{-1}(0) = Fix(f) = Fix(f|_{U'}) = (id - f)|_{U'}^{-1}(0).$$

Agora pela propriedade 1.3.9 os graus são iguais. \square

Propriedade 1.3.19 (Invariância homotópica). *Sejam $\mathcal{W} \subset E \times [0, 1]$ um subconjunto aberto e $H : \mathcal{W} \rightarrow E$ uma aplicação compactamente fixada, i.e., o conjunto $Fix(H) = \{(x, t) \in \mathcal{W} : H(x, t) = x\}$ é compacto. Então $index(f_0) = index(f_1)$, onde $f_t = H(\cdot, t)$ para $0 \leq t \leq 1$.*

Demonstração. Podemos aplicar a propriedade 1.3.10, uma vez que $(p_1 - H(\cdot, t))^{-1}(0) = Fix(f)$ é compacto. Assim temos que

$$index(f_0) = deg(p_1 - f_0) = deg(p_1 - f_1) = index(f_1).$$

\square

Propriedade 1.3.20 (Aditividade). *Se $U_1, U_2 \subset U$ são subconjuntos tais que as restrições $f|_{U_1}$ e $f|_{U_2}$ são aplicações compactamente fixadas e $U_1 \cap U_2$ é disjuncto de $Fix(f)$, então $index(f) = index(f|_{U_1}) + index(f|_{U_2})$.*

Demonstração. A aplicação $id - f$ satisfaz as hipóteses da propriedade 1.3.11, uma vez que,

$$index(f) = deg(id - f) = deg(id - f|_{U_1}) + deg(id - f|_{U_2}) = index(f|_{U_1}) + index(f|_{U_2}).$$

\square

Propriedade 1.3.21 (Multiplicidade). *Se $f : U \rightarrow E$ e $f' : U' \rightarrow E'$ são aplicações compactamente fixadas, então assim é $f \times f' : U \times U' \rightarrow E \times E'$ e $index(f \times f') = index(f) \cdot index(f')$.*

Demonstração. Uma vez que $Fix(f \times f') = Fix(f) \times Fix(f')$ podemos aplicar a propriedade 1.3.15. Logo, segue que

$$index(f \times f') = deg(id \times id' - f \times f') = deg(id - f) \cdot deg(id' - f') = index(f) \cdot index(f').$$

\square

Propriedade 1.3.22 (Comutatividade). *Sejam $U \subset E$ e $U' \subset E'$ subconjuntos abertos dos espaços Euclidianos E e E' com $f : U \rightarrow E'$ e $g : U' \rightarrow E$ aplicações contínuas. Então as composições $g \circ f : \mathcal{V} = f^{-1}(U') \rightarrow E$ e $f \circ g : \mathcal{V}' = g^{-1}(U) \rightarrow E'$ tem conjuntos de pontos fixos homotópicos $Fix(g \circ f) = Fix(f \circ g)$. Além disso, se estes conjuntos são compactos, então $index(f \circ g) = index(g \circ f)$.*

Demonstração. Os homeomorfismos são dados pelas restrições $f| : Fix(g \circ f) \rightarrow Fix(g \circ f)$ e $g| : Fix(f \circ g) \rightarrow Fix(g \circ f)$. Por simplicidade façamos $fg = f \circ g$ e $gf = g \circ f$. De fato, se $gf(x) = x$, então $f(x) = f(gf(x)) = fg(f(x))$, e assim temos que $Fix(f) = Fix(fg)$. Similarmente $g(Fix(fg)) \subset Fix(gf)$. Note que desse modo temos que as restrições $gf|$ e $fg|$ são identidades em $Fix(gf)$ e $Fix(fg)$, respectivamente.

Nós provaremos a igualdade $index(fg) = index(gf)$ mostrando que ambos os lados são iguais a $index(\gamma)$ onde $\gamma : \mathcal{V} \times \mathcal{V}' \rightarrow E \times E'$ e dado por $\gamma(x, y) = (g(y), f(x))$.

Considere a homotopia

$$\gamma_t(x, y) = (tgf(x) + (1-t)g(y), f(x)).$$

Então $\gamma_t(x, y) = (x, y)$ significa que $y = f(x)$ e $x = tgf(x) + (1-t)g(y)$ o que implica que $x = tgf(x) + (1-t)gf(x)$, sempre que $x = gf(x)$. Agora

$$Fix(\gamma_t) = \{(x, f(x)) : x \in Fix(gf)\}.$$

Assim $Fix(\gamma_t)$ é compacto e não depende de t , uma vez que tomamos homotopicamente compactamente fixado. Nós temos que $index(\gamma_0) = index(\gamma_1)$ onde $\gamma_1 : \mathcal{V} \times \mathcal{V}' \rightarrow E \times E'$ é dado por $\gamma_1(x, y) = (gf(x), f(x))$. Considere agora a aplicação $\delta : \mathcal{V} \times E \rightarrow E \times E'$ dada mesma forma por $\delta(x, y) = (gf(x), f(x))$. Além disso, $Fix(\gamma_1) = Fix(\delta)$, onde pela propriedade 1.3.18 nós temos que $index(\gamma_1) = index(\delta)$. Agora nós consideramos a homotopia

$$\delta_t(x, y) = (gf(x), (1-t)f(x)).$$

Uma vez que $\delta_t(x, y) = (x, y)$ temos que $x = gf(x)$ e $y = (1-t)f(x)$,

$$\sum_{0 \leq t \leq 1} Fix(\delta_t) \subset Fix(gf) \times (I \cdot f(Fix(gf)))$$

é também compacto o que implica que $\text{index}(\delta_0) = \delta_1$. Mas $\delta_1 : \mathcal{V} \times E' \rightarrow E \times E'$ é dado por $\delta_1(x, y) = (gf(x), 0)$, e a propriedade 1.3.21 nos dá que $\text{index}(\delta_1) = \text{index}(gf)$.

Por simetria nós também mostramos que $\text{index}(\gamma) = \text{index}(fg)$, o que termina a prova. \square

1.4 Grupo fundamental

Definição 1.4.1. Um **laço** em algum ponto x_0 de um espaço topológico X é um curva fechada em X saindo de x_0 e terminando em x_0 .

Definição 1.4.2. O **grupo fundamental** de X com ponto base em $x_0 \in X$ é definido como sendo o conjunto das classes de equivalência de laços em x_0 munido da operação de composição. A notação adotada será $\pi_1(X, x_0)$.

Vale observar que se um espaço não é simplesmente conexo, é conveniente medir até que ponto ele deixa de ser simplesmente conexo. Isso é feito pelo grupo fundamental. Intuitivamente, o grupo fundamental mede como os furos se comportam em um espaço. Se não houver furos, o grupo fundamental é trivial e, equivalentemente, o espaço é simplesmente conexo.

Definição 1.4.3. Seja $\varphi : \widetilde{M} \rightarrow M$ uma função contínua e sobrejetiva. Suponha que cada ponto $b \in M$ possui uma vizinhança U tal que sua imagem inversa $\varphi^{-1}(U)$ seja uma união disjunta de abertos V_α tais que, para cada α , a restrição $\varphi|_\alpha : V_\alpha \rightarrow U$ seja um homeomorfismo. A aplicação φ é chamada **aplicação de recobrimento**, o espaço \widetilde{M} é chamado **recobrimento** de M , a coleção $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de **partição** de $\varphi^{-1}(U)$ em folhas e M pode ser chamado de **base**.

Definição 1.4.4. Se $\varphi : \widetilde{M} \rightarrow M$ é uma aplicação de recobrimento com \widetilde{M} sendo simplesmente conexo, dizemos que \widetilde{M} é o **recobrimento universal** de M .

Em nosso estudo o recobrimento universal de M será sempre \mathbb{D} ou \mathbb{H} .

Definição 1.4.5. Dizemos que a aplicação $\tilde{f} : X \rightarrow \widetilde{M}$ é um **levantamento** de $f : X \rightarrow M$ se $\varphi \circ \tilde{f} = f$, i.e., se o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \widetilde{M} \\
 & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \varphi \\
 X & \xrightarrow{f} & M
 \end{array} \tag{1.6}$$

Definição 1.4.6. Entenderemos por **ação (à esquerda)** sobre o grupo fundamental $\pi(M, x_o)$, no que se segue, como sendo uma aplicação contínua $\nu : \pi_1(M, x_o) \times M \longrightarrow M$ tal que:

- (i) $\nu(\epsilon, x) = x$, para $\forall x \in M$; e
- (ii) $\nu(p, \nu(q, x)) = \nu(pq, x)$, para $\forall p, q \in G$, $\forall x \in M$.

Capítulo 2

O teorema da invariância sobre homotopia

Da seção 2.1 a seção 2.4 introduziremos os conceitos de H -relação entre pontos fixos de duas coleções de ponto fixos e de H -relação entre duas classes de pontos fixos bem como trataremos alguns resultados envolvendo tais conceitos, que serão de maior importância em nosso trabalho. Por último, na seção 2.5 trataremos do principal resultado desse capítulo, i.e., o teorema da invariância sobre homotopia e um corolário imediato desse resultado, o qual será de grande importância na demonstração do teorema de Handel que será enunciado e demonstrado no capítulo 4.

2.1 Retrato de vizinhança absolutos

Definição 2.1.1. *Um subespaço A de um espaço X é chamado um **retrato de vizinhança** de X se existe um aberto U de X contendo A e uma retração de U , i.e., uma aplicação $r : U \rightarrow A$, tal que a restrição de $r|_A$ é igual a identidade.*

Definição 2.1.2. *Um espaço métrico compacto X é um **retrato de vizinhança absoluto compacto** (ANR compacto) se satisfaz a seguinte propriedade: Se A é um subespaço de um espaço métrico separável Y e A é homeomorfo a X , então A é um retrato de vizinhança de Y .*

Teorema 2.1.3. *Seja X um espaço ANR compacto, então X é ULC (contrátil localmente uniforme com métrica d), i.e., dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se*

$$W = \{(x, x') \in X \times X : d(x, x') < \delta\},$$

então existe uma aplicação $\alpha : W \times I \rightarrow X$ de forma que

$$\alpha(x, x', 0) = x, \alpha(x, x', 1) = x', \alpha(x, x, t) = x, \forall t \in I;$$

e

$$\text{diam}(\alpha((x, x') \times I)) < \epsilon, \forall (x, x') \in W.$$

Demonstração. Veja [1]. □

2.2 Classes de pontos fixos

Definição 2.2.1. *Seja \mathcal{C}_A designando a coleção de espaços ANR compactos. Tomemos \mathcal{C} sendo uma subcoleção de \mathcal{C}_A . Uma tripla (X, f, U) será chamada **\mathcal{C} -admissível** se:*

- (1) $X \in \mathcal{C}$, com X sendo um espaço ANR compacto;
- (2) $f : X \rightarrow X$;
- (3) U é aberto em X ; e
- (4) não existem pontos fixos de f no bordo de U .

Para simplificar a notação tomaremos sempre $(X, f, U) = (f, U)$, já que, o espaço X ANR compacto estará fixado. O símbolo \mathcal{C}' denotará a **coleção de todas as triplas \mathcal{C} -admissíveis**.

Propriedade 2.2.2. *Se existe um índice de ponto fixo para uma subcoleção \mathcal{C} de \mathcal{C}_A e se $(f, U) \in \mathcal{C}'$ tal que $\text{index}(f, U) \neq 0$, então f tem um ponto fixo em U .*

Demonstração. Suponha que f não tenha pontos fixos em \bar{U} . Devemos provar que $\text{index}(f, U) = 0$.

Primeiro aplicamos a propriedade da aditividade do índice de ponto fixo para $U = U_1 \cup U_2 = \emptyset$; então

$$\text{index}(f, U) = \text{index}(f, U_1) + \text{index}(f, U_2)$$

e substituindo temos que

$$\text{index}(f, \emptyset) = \text{index}(f, \emptyset) + \text{index}(f, \emptyset) = 2\text{index}(f, \emptyset).$$

Portanto, segue que $\text{index}(f, \emptyset) = 0$.

Agora, aplicamos a propriedade da aditividade do índice de ponto fixo para um dado conjunto aberto U e para $U_1 = \emptyset$. A propriedade pode ser aplicada porque existem pontos fixos de f em $U \setminus U_1 = U$. Assim

$$\text{index}(f, U) = \text{index}(f, \emptyset) = 0.$$

□

Definição 2.2.3. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação sobre um espaço X ANR compacto. Dizemos que os pontos fixos x_0 e x_1 de f são **f -equivalentes** se existe um caminho $\gamma : I \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$, e para o caminho $f(\gamma) : I \rightarrow X$ nós temos que $[f(\gamma)] = [\gamma]$. Seja $\text{Fix}(f)$ denotando a coleção dos pontos fixos de f , então temos que a relação f -equivalência é uma relação de equivalência em $\text{Fix}(f)$. As classes de equivalência com respeito a esta relação de equivalência são chamadas de **classes de pontos fixos** de f .*

Teorema 2.2.4. *Uma aplicação $f : X \rightarrow X$ sobre um espaço X ANR compacto tem um número finito de classes de pontos fixos.*

Demonstração. Pelo teorema 2.1.3, sendo X um ANR compacto segue que X é um ULC, i.e., dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se

$$W_1 = \{(x, x') \in X \times X : d(x, x') < \delta\}$$

então existe uma aplicação $\alpha_1 : W_1 \times I \rightarrow X$ tal que $\alpha_1(x, x', 0) = x$, $\alpha_1(x, x', 1) = x'$ e $\alpha_1(x, x, t) = x$, para todo $t \in I$. Pela continuidade uniforme de f , dado $\delta > 0$, existe $\zeta > 0$, $\zeta < \delta/2$, tal que se $x, y \in X$ e $d(x, y) < \zeta$, então $d(f(x), f(y)) < \delta/2$. Pelo teorema 2.1.3 novamente, dado $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que se

$$W_0 = \{(x, x') \in X \times X : d(x, x') < \eta\}$$

então existe uma aplicação $\alpha_0 : W_0 \times I \longrightarrow X$ onde $\alpha_0(x, x', 0) = x$, $\alpha_0(x, x', 1) = x'$, $\alpha_0(x, x, t) = x$ e $\text{diam}(\alpha_0((x, x') \times I)) < \zeta$. Agora suponha que $x, x' \in \text{Fix}(f)$ e $d(x, x') < \eta$, então $\gamma(t) = \alpha_0(x, x', t)$ é um caminho de x a x' tal que $\text{diam}(\gamma(I)) < \zeta < \delta/2$ e portanto $\text{diam}(f(\gamma(I))) < \delta/2$. Logo, para cada $t \in I$, $d(\gamma(t), f(\gamma(t))) < \delta$ e temos uma aplicação $H : I \times I \longrightarrow X$ dada por

$$H(s, t) = \alpha_1(\gamma(s), f(\gamma(s), t))$$

o que prova que x e x' são f -equivalentes. Assim cada classe de pontos fixos é aberta em $\text{Fix}(f)$ e como $\text{Fix}(f)$ é compacta, terminamos. \square

Definição 2.2.5. *A coleção das classes de pontos fixos de uma aplicação $f : X \longrightarrow X$ sobre um espaço X ANR compacto será dada por*

$$\text{Fix}'(f) = \{\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_n\}.$$

2.3 O número de Nielsen

Definição 2.3.1. *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação sobre um espaço X ANR compacto com classes de pontos fixos $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_n$. Pelo teorema 2.2.4, para cada $j = 1, \dots, n$ existe um aberto $U_j \subset X$ tal que $\hat{F}_j \subseteq U_j$ e $\overline{U_j} \cap \text{Fix}(f) = \hat{F}_j$. Note que, sendo $(f, U_j) \in \mathcal{C}'_A$ podemos definir o índice da classe de pontos fixos de \hat{F}_j por*

$$\text{index}(\hat{F}_j) = \text{index}(f, U_j).$$

Teorema 2.3.2. *A definição de $\text{index}(\hat{F}_j)$ é independente da escolha dos abertos $U_j \subseteq X$ tal que $\hat{F}_j \subseteq U_j$ e $\overline{U_j} \cap \text{Fix}(f) = \hat{F}_j$.*

Demonstração. Sejam U e V subconjuntos abertos de X satisfazendo as hipóteses do teorema. Se $x \in U \setminus (U \cap V)$, então, desde que x pertença a U , $x \notin \hat{F}_k$ para $k \neq j$, enquanto que $x \notin V$, implica que $x \notin \hat{F}_j$. Assim $x \notin \text{Fix}(f)$. Pelo axioma da aditividade do índice de ponto fixo segue que

$$0 = \text{index}(f, U \setminus (U \cap V)) = \text{index}(f, U) - \text{index}(f, U \cap V),$$

e assim $\text{index}(f, U) = \text{index}(f, U \cap V)$.

A mesma razão implica que $\text{index}(f, V) = \text{index}(f, U \cap V)$, o que completa a prova. \square

Definição 2.3.3. Para um espaço X ANR compacto e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação, dizemos que uma classe de pontos fixos \hat{F} de f é dita ser **essencial** se $\text{index}(\hat{F}) \neq 0$ e **inessencial** se $\text{index}(\hat{F}) = 0$. O **número de Nielsen**, $N(f)$, de f é definido como o número de classes de pontos fixos de f que são essenciais.

O seguinte resultado é uma consequência da definição anterior:

Teorema 2.3.4. Sejam X um espaço ANR compacto e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação, então f tem pelo menos $N(f)$ pontos fixos.

2.4 Classes H -relacionadas

Definição 2.4.1. Para espaços X e Y , seja $\text{Map}(X, Y)$ o conjunto de todas as aplicações de X para Y . Uma homotopia $H' : X \times I \rightarrow Y$, onde Y é métrico, induz uma aplicação (caminho) $H : I \rightarrow \text{Map}(X, Y)$ (com respeito a topologia da métrica uniforme em $\text{Map}(X, Y)$) pela regra

$$H(t)(x) = H'(x, t).$$

Assim uma homotopia pode ser pensada como um caminho em $\text{Map}(X, Y)$. Se X e Y são espaços ANR compactos, H um caminho em $\text{Map}(X, Y)$ e γ um caminho em X , então definimos um novo caminho $\langle H, \gamma \rangle : I \rightarrow Y$, como o caminho dado por

$$\langle H, \gamma \rangle(t) = H(t)(\gamma(t)) = H'(\gamma(t), t),$$

para todo $t \in I$.

Nosso primeiro resultado demonstra que a operação de tomar $\langle H, \gamma \rangle$ se comporta razoavelmente bem com respeito as operações de inversão e composição de caminhos.

Lema 2.4.2. Sejam H e H' caminhos em $\text{Map}(X, Y)$ tal que $H(1) = H'(0)$ e sejam γ e γ' caminhos em X tal que $\gamma(1) = \gamma'(0)$, então:

(i) $\langle H^{-1}, \gamma^{-1} \rangle = \langle H, \gamma \rangle^{-1}$; e

(ii) $\langle HH', \gamma\gamma' \rangle = \langle H, \gamma \rangle \langle H', \gamma' \rangle$.

Demonstração. Por definição, para $t \in I$,

$$\langle H^{-1}, \gamma^{-1} \rangle(t) = H(1-t)(\gamma(1-t)) = \langle H, \gamma \rangle^{-1}(t).$$

Pelas definições anteriores:

$$\begin{aligned} \langle HH', \gamma\gamma' \rangle(t) &= HH'(t)(\gamma\gamma'(t)) \\ &= \begin{cases} HH'(t)(\gamma(2t)), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ HH'(t)(\gamma'(2t-1)), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} H(2t)(\gamma(2t)), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H'(2t-1)(\gamma'(2t-1)), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \langle H, \gamma \rangle(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \langle H', \gamma' \rangle(2t-1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \\ &= \langle H, \gamma \rangle \langle H', \gamma' \rangle(t). \end{aligned}$$

□

O seguinte resultado mostra que a operação de tomar $\langle H, \gamma \rangle$ também tem bom comportamento com respeito a homotopia com pontos finais fixos.

Observação 2.4.3. *Note que se γ e γ' são caminhos em um espaço métrico X , então a definição de homotopia com pontos finais fixos entre γ e γ' equivale a dizer que existe um caminho α em $\text{Map}(I, X)$ tal que $\alpha(0) = \gamma$ e $\alpha(1) = \gamma'$, $\alpha(t)(0) = \gamma(0) = \gamma'(0)$ e $\alpha(t)(1) = \gamma(1) = \gamma'(1)$, para todo $t \in I$.*

Lema 2.4.4. *Se H, H' são caminhos em $\text{Map}(X, Y)$ em que X e Y são espaços ANR compactos tal que $[H] = [H']$, e γ, γ' são caminhos em X tal que $[\gamma] = [\gamma']$, então $[\langle H, \gamma \rangle] = [\langle H', \gamma' \rangle]$.*

Demonstração. Vamos encontrar uma homotopia com pontos extremos fixos entre $\langle H, \gamma \rangle$ e $\langle H', \gamma' \rangle$.

Por hipótese, existe um caminho ψ em $\text{Map}(I, \text{Map}(X, Y))$ tal que $\psi(0) = H$, $\psi(1) = H'$, $\psi(t)(0) = H(0) = H'(0)$ e $\psi(t)(1) = H(1) = H'(1)$ e um caminho α em $\text{Map}(I, X)$

onde $\alpha(0) = \gamma$, $\alpha(1) = \gamma'$, $\alpha(t)(0) = \gamma(0) = \gamma'(0)$, $\alpha(t)(1) = \gamma(1) = \gamma'(1)$, para todo $t \in I$, conforme a observação anterior.

Defina o caminho δ em $Map(I, Y)$ por $\delta(t) = \langle \psi(t), \alpha(t) \rangle$, para todo $t \in I$. Então δ é uma homotopia com pontos finais fixos entre $\langle H, \gamma \rangle$ e $\langle H', \gamma' \rangle$, de acordo com a definição 2.4.1. \square

Definição 2.4.5. *Sejam X um espaço ANR compacto, $f, g : X \rightarrow X$ aplicações, e H uma homotopia de f para g com a qual podemos descrever um caminho em $Map(X, X)$ tal que $H(0) = f$ e $H(1) = g$. Para $x_0 \in Fix(f)$ e $x_1 \in Fix(g)$, dizemos que x_0 e x_1 são **H -relacionados** se existe um caminho $\gamma : I \rightarrow X$ com $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ e $[\langle H, \gamma \rangle] = [\gamma]$. Nós escreveremos " $x_0 H x_1$ " para designar a H -relação entre x_0 e x_1 .*

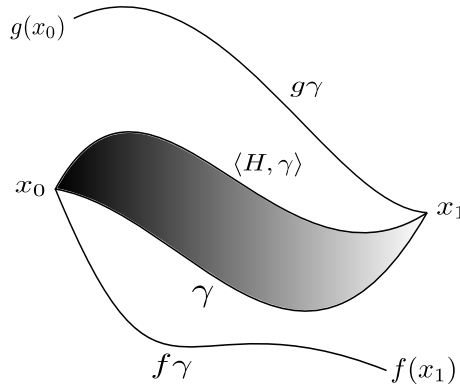


Figura 2.1: H -relação entre $x_0 \in Fix(f)$ e $x_1 \in Fix(g)$.

Pontos fixos de aplicações homotópicas são associados entre si pela H -relação. Como este conceito opera entre conjuntos diferentes, a H -relação não pode ser uma relação de equivalência. Porém os seguintes três resultados provam que a H -relação será uma relação de equivalência sob certas hipóteses.

Lema 2.4.6. *Sejam $f : X \rightarrow X$ uma aplicação e H o caminho constante em $Map(X, X)$ tal que $H(t) = f$ para todo $t \in I$. Se $x \in Fix(f)$, então $x H x$.*

Demonstração. Seja γ o caminho constante em X no ponto $x \in Fix(f)$. Então

$$\langle H, \gamma \rangle(t) = H(t)(\gamma(t)) = f(x) = x = \gamma(t)$$

para todo $t \in I$. Assim $\langle H, \gamma \rangle = \gamma$ e portanto segue que $[\langle H, \gamma \rangle] = [\gamma]$. \square

Lema 2.4.7. *Se H é um caminho em $\text{Map}(X, X)$ de f para g , com $x_0 \in \text{Fix}(f)$ e $x_1 \in \text{Fix}(g)$, então $x_0 H x_1$ implica que $x_1 H^{-1} x_0$.*

Demonstração. Como $x_0 H x_1$, por hipótese, seja γ um caminho de x_0 para x_1 , tal que $[\langle H, \gamma \rangle] = [\gamma]$. Então γ^{-1} vai de x_1 a x_0 , e temos que

$$[\langle H^{-1}, \gamma^{-1} \rangle] = [\langle H, \gamma \rangle^{-1}] = [\gamma^{-1}],$$

onde a primeira igualdade acima segue pelo lema 2.4.2 parte (i) e a segunda igualdade segue da definição de H -relação, e dessa forma $x_1 H^{-1} x_0$. \square

Lema 2.4.8. *Suponha que H e H' são caminhos em $\text{Map}(X, X)$ tal que $H(0) = f$, $H(1) = H'(0) = g$ e $H'(1) = h$. Se $x_0 \in \text{Fix}(f)$, $x_1 \in \text{Fix}(g)$ e $x_2 \in \text{Fix}(h)$ tal que $x_0 H x_1$ e $x_1 H' x_2$, então $x_0 H H' x_2$.*

Demonstração. Existe, por hipótese, um caminho γ de x_0 para x_1 com $[\langle H, \gamma \rangle] = [\gamma]$, e um caminho γ' de x_1 para x_2 com $[\langle H', \gamma' \rangle] = [\gamma']$, de acordo com a definição de H -relação. Note que $H H'$ é um caminho de f a h e $\gamma \gamma'$ é um caminho de x_0 a x_2 , e aplicando o lema 2.4.2 parte (ii) segue que

$$[\langle H H', \gamma \gamma' \rangle] = [\langle H, \gamma \rangle \langle H', \gamma' \rangle] = [\gamma \gamma'].$$

\square

Lema 2.4.9. *Sejam H e H' caminhos em $\text{Map}(X, X)$ tal que $H(0) = H'(0) = f$, $H(1) = H'(1) = g$ e $[H] = [H']$. Se $x_0 \in \text{Fix}(f)$ e $x_1 \in \text{Fix}(g)$ tal que $x_0 H x_1$, então $x_0 H' x_1$.*

Demonstração. Por hipótese, existe um caminho γ de x_0 a x_1 com $[\langle H, \gamma \rangle] = [\gamma]$. Sendo $[H] = [H']$ por hipótese, pelo lema 2.4.4 temos que $[\langle H, \gamma \rangle] = [\langle H', \gamma \rangle]$. Assim $[\langle H', \gamma \rangle] = [\gamma]$. \square

O próximo teorema mostra que a operação é H -relacionado a relaciona não somente pontos fixos individualmente de aplicações homotópicas mas, na verdade, toda a classe de pontos fixos.

Teorema 2.4.10. *Seja H um caminho em $Map(X, X)$ de f para g . Seja $x_0 \in Fix(f)$ um ponto fixo contido numa classe de pontos fixos \hat{F} de f , e seja $x_1 \in Fix(g)$ um ponto fixo contido na classe de pontos fixos \hat{G} de g . Se $x_0 H x_1$, então $x'_0 H x'_1$ para todo $x'_0 \in \hat{F}$ e $x'_1 \in \hat{G}$.*

Demonstração. Seja F um caminho constante de $Map(X, X)$ em f , e seja G o caminho constante de $Map(X, X)$ em g . Dizer que x_0 e x'_0 estão na mesma classe de pontos fixos \hat{F} de f significa que existe um caminho γ_0 em X de x_0 a x'_0 tal que $[\gamma_0] = [f\gamma_0]$. Mas, para todo $t \in I$,

$$\langle F, \gamma_0 \rangle (t) = F(t)(\gamma_0(t)) = f\gamma_0(t).$$

Assim $f\gamma_0 = \langle F, \gamma_0 \rangle$ e portanto $[\gamma_0] = [\langle F, \gamma_0 \rangle]$, i.e., $x_0 F x'_0$. Similarmente $x_1 G x'_1$. Pelo lema 2.4.7, temos que $x'_0 F^{-1} x_0$ e que $F^{-1} = F$. Assim, pelo lema 2.4.8, uma vez que $x_0 H x_1$, então $x_0 H G x'_1$. Aplicando o lema 2.4.8 novamente, segue que $x'_0 F(HG)x'_1$.

Defina o caminho ψ em $Map(I, X)$ por:

$$\psi(t)(s) = \begin{cases} F\left(\frac{2s}{1-t}\right), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \text{ e } t \neq 1 \\ H\left(\frac{4s+2(t-1)}{3t+1}\right), & \text{se } \frac{1-t}{2} \leq s \leq \frac{t+3}{4} \\ G\left(\frac{4s-t+3}{1-t}\right), & \text{se } \frac{t+3}{4} \leq s \leq 1 \text{ e } t \neq 1. \end{cases}$$

Então ψ nos mostra que $[F(HG)] = [H]$, e pelo lema 2.4.9, temos que $x'_0 H x'_1$. \square

Definição 2.4.11. *Sejam $f, g : X \rightarrow X$ aplicações em um espaço X ANR compacto e H um caminho em $Map(X, X)$ de f para g . Sejam também \hat{F} uma classe de pontos fixos de f e \hat{G} uma classe de pontos fixos de g . Dizemos que \hat{F} e \hat{G} são **H -relacionadas**, escrevemos $\hat{F} H \hat{G}$, se existem um $x_0 \in \hat{F}$ e um $x_1 \in \hat{G}$ tal que x_0 e x_1 são H -relacionados.*

O teorema 2.4.10 nos diz que a definição acima é independente da escolha de x_0 e x_1 . Os resultados a seguir são análogos, para classes de pontos fixos, aos lemas 2.4.6, 2.4.7, 2.4.8 e 2.4.9.

Lema 2.4.12. *Sejam $f : X \rightarrow X$ uma aplicação e F o caminho constante em $Map(X, X)$ em f . Duas classes de pontos fixos $\hat{F}, \hat{F}' \in Fix'(f)$ são F -relacionadas se, e somente se, são idênticas.*

Demonstração. Suponhamos que $\hat{F} = \hat{F}'$ e sejam $x \in \hat{F}$ e $x' \in \hat{F}'$. Pelo lema 2.4.6, xFx' ; e então $\hat{F}F\hat{F}'$. Por outro lado, se $\hat{F}F\hat{F}'$ então xFx' para algum $x \in \hat{F}$ e $x' \in \hat{F}'$, ou seja existe um caminho γ em X de x a x' tal que $[\langle F, \gamma \rangle] = [\gamma]$. Mas $\langle F, \gamma \rangle = f\gamma$ e assim $[f\gamma] = [\gamma]$. Portanto x e x' estão na mesma classe de pontos fixos de f e $\hat{F} \cap \hat{F}' \neq \emptyset$. Como classes de pontos fixos são classes de equivalência, temos que $\hat{F} = \hat{F}'$. \square

Lema 2.4.13. *Seja H um caminho em $Map(X, X)$ com $H(0) = f$ e $H(1) = g$. Sejam $\hat{F} \in Fix'(f)$ e $\hat{G} \in Fix'(g)$ tais que $\hat{F}H\hat{G}$, então $\hat{G}H^{-1}\hat{F}$.*

Demonstração. Por definição, existe um ponto $x \in \hat{F}$ que é H -relacionado a um ponto $x' \in \hat{G}$. Pelo lema 2.4.7, $x'H^{-1}x$; assim $\hat{G}H^{-1}\hat{F}$. \square

Lema 2.4.14. *Sejam H e H' caminhos em $Map(X, X)$ tal que $H(0) = f$, $H(1) = H'(0) = g$, e $H'(1) = h$. Sejam $\hat{F} \in Fix'(f)$, $\hat{G} \in Fix'(g)$ e $\hat{H} \in Fix'(h)$ tais que $\hat{F}H\hat{G}$ e $\hat{G}H\hat{H}$; então $\hat{F}H\hat{H}'\hat{H}$.*

Demonstração. Segue do lema 2.4.8. \square

Lema 2.4.15. *Suponhamos que $f, g : X \rightarrow X$ são aplicações e que H e H' são caminhos em $Map(X, X)$ de f para g tal que $[H] = [H']$. Se $\hat{F} \in Fix'(f)$ é H -relacionada a $\hat{G} \in Fix'(g)$, então $\hat{F}H'\hat{G}$.*

Demonstração. Segue do lema 2.4.9. \square

Finalmente temos o principal resultado desta seção:

Teorema 2.4.16. *Seja H um caminho em $Map(X, X)$ de f para g . Sejam $\hat{F}, \hat{F}' \in Fix'(f)$ e $\hat{G}, \hat{G}' \in Fix'(g)$. Se $\hat{F}H\hat{G}$ e $\hat{F}'H\hat{G}'$ então $\hat{G} = \hat{G}'$, e se $\hat{F}H\hat{G}$ e $\hat{F}'H\hat{G}$, então $\hat{F} = \hat{F}'$.*

Demonstração. Se $\hat{F}H\hat{G}$ e $\hat{F}'H\hat{G}'$, então, pelo lema 2.4.13, $\hat{G}H^{-1}\hat{F}$; assim, pelo lema 2.4.14, $\hat{G}H^{-1}H\hat{G}'$. Defina G sendo um caminho constante de $Map(X, X)$ a g e defina

uma aplicação ψ em $Map(I, Map(X, X))$ por

$$\psi(t)(s) = \begin{cases} G(s), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{t}{2} \\ H^{-1}(2s - t), & \text{se } \frac{t}{2} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H(2s + t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{2-t}{2} \\ G(s), & \text{se } \frac{2-t}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Então ψ mostra que $[H^{-1}H] = [G]$. Agora, pelo lema 2.4.15, \hat{G} é G -relacionada a \hat{G}' e assim, pelo lema 2.4.12, $\hat{G} = \hat{G}'$, o que prova a primeira parte do teorema. Para a segunda parte do teorema, suponha que $\hat{F}H\hat{G}$ e $\hat{F}'H\hat{G}$; então, pelo lema 2.4.13, $\hat{G}H^{-1}\hat{F}$ e $\hat{G}H^{-1}\hat{F}'$. \square

O teorema 2.4.16 nos diz que existe uma correspondência bijetiva induzida por H entre um subconjunto de $Fix'(f)$ e um subconjunto de $Fix'(g)$.

2.5 Invariância sobre homotopia

Lema 2.5.1. *Seja H um caminho em $Map(X, X)$ e sejam $q, r, s \in I$. Suponha para $\hat{F}(q) \in Fix'(H(q))$, $\hat{F}(r) \in Fix'(H(r))$, e $\hat{F}(s) \in Fix'(H(s))$ que $\hat{F}(q)H_q^r\hat{F}(r)$ e $\hat{F}(r)H_r^s\hat{F}(s)$; então $\hat{F}(q)H_q^s\hat{F}(s)$.*

Demonstração. Pelo lema 2.4.14, $\hat{F}(q)$ é $H_q^rH_r^s$ -relacionada a $\hat{F}(s)$. Pelo lema 1.1.10, $[H_q^rH_r^s] = [H_q^s]$. Assim, pelo lema 2.4.15, segue o resultado. \square

Lema 2.5.2. *Sejam H um caminho em $Map(X, X)$ onde X é um espaço ANR compacto, e $r \in I$. Denote as classes de pontos fixos da aplicação $H(r)$ por $\hat{F}_1(r), \dots, \hat{F}_n(r)$. Existem conjuntos abertos U_1, \dots, U_n e um $\epsilon > 0$ tal que:*

- (1) $\hat{F}_j(r) \subseteq U_j$.
- (2) $U_j \cap U_k = \emptyset$, sempre que $j \neq k$.
- (3) Se $|r - s| \leq \epsilon$ e $\hat{F}(s) \in Fix'(H(s))$, então existe um j tal que $\hat{F}(s) \subseteq U_j$ e $\hat{F}(s)$ é H_s^r -relacionada à $\hat{F}_j(r)$.
- (4) Se $|r - s| \leq \epsilon$, então $(H(s), U_j) \in \mathcal{C}'_A$ para todo $j = 1, \dots, n$.

Demonstração. Pelo teorema 2.2.4 podemos construir conjuntos abertos U'_1, \dots, U'_n satisfazendo (i) e (ii). Seja $\epsilon' > 0$ o número garantido pelo teorema 2.1.3. Então existe $\delta > 0$, $\delta < \epsilon'/4$, tal que se $x, x' \in X$, $d(x, x') < \delta$ e $|r - s| < \delta$ implica que $d(H(r)(x), H(s)(x')) < \epsilon'/4$ (porque H é uniformemente contínua). Para $x \in \hat{F}_j(r)$, escolha $\epsilon_x > 0$ tal que $\epsilon_x \leq \delta$ e $U(x, \epsilon_x) \subseteq U'_j$. Uma vez que $Fix'(H(r))$ é compacto, existe um número finito de conjuntos abertos conexos $U(x(1), \epsilon_{x(1)}), \dots, U(x(m), \epsilon_{x(m)})$, com $x(k) \in Fix'(H(r))$, tal que

$$Fix(H(r)) \subseteq \sum_{k=1}^m U(x(k), \epsilon_{x(k)}).$$

Seja $U_j = \bigcup U(x(k), \epsilon_{x(k)})$, onde a união é tomada sobre todos os k tal que $x(k) \in \hat{F}_j(r)$. Seja $x \in \hat{F}_j(r)$; então $x \in U(x(k), \epsilon_{x(k)})$ para algum k . Uma vez que $U(x(k), \epsilon_{x(k)})$ é um subconjunto aberto e conexo de X ANR (o qual, é localmente conexo por caminhos), existe um caminho γ de x para $x(k)$ em $U(x(k), \epsilon_{x(k)})$. Para $t \in I$, $d(\gamma(t), x) < \epsilon_{x(k)} \leq \delta$, o que implica que

$$d(H(r)(\gamma(t)), H(r)(x)) = d(H(r)(\gamma(t)), x) < \epsilon'/4,$$

assim $d(H(r)(\gamma(t)), \gamma(t)) < \epsilon'$ e então, pelo teorema 2.1.3 temos que $[H(r)\gamma] = [\gamma]$.

Vamos mostrar agora que x e $x(k)$ estão na mesma classe de pontos fixos de $H(r)$. Seja $x(k) \in \hat{F}_j(r)$ e $x \in U_j$, assim $\hat{F}_j(r) \subseteq U_j$. Por outro lado, $U(x(k), \epsilon_{x(k)}) \subseteq U'_j$ quando $x(k) \in \hat{F}_j(r)$, o que implica que $U_j \subseteq U'_j$. Portanto os conjuntos U_j , $j = 1, \dots, n$, satisfazem as propriedades (1) e (2). Seja ϵ_1 o menor dos números $\epsilon_{x(1)}, \dots, \epsilon_{x(m)}$. Uma vez que $Fix'(H(r)) \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_j$, existe $\eta > 0$ tal que $x \in X \setminus \bigcup_{j=1}^n U_j$ implica que $d(H(r)(x), x) > \eta$. Novamente, usando a continuidade uniforme, existe $\epsilon_2 > 0$ com a propriedade de que, se $|r - s| < \epsilon_2$, então $d(H(r)(x), H(s)(x)) < \eta$ pra todo $x \in X$. Assim, se $|r - s| < \epsilon_2$ e $x \in X \setminus \bigcup_{j=1}^n U_j$, então $H(s)(x) \neq x$. Equivalentemente, $Fix'(H(s)) \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_j$. Seja ϵ o menor dos ϵ_1 e ϵ_2 .

Resta mostrar que os conjuntos abertos U_1, \dots, U_n e o número $\epsilon > 0$ satisfazem as condições (3) e (4).

Suponha que $|r - s| \leq \epsilon$ e $x_s \in \hat{F}(s) \in Fix'(H(s))$. Uma vez que $\epsilon \leq \epsilon_2$, $x_s \in U_j$ para algum $j = 1, \dots, n$ e portanto $x_s \in U(x(k), \epsilon_{x(k)})$ para algum $x(k) \in \hat{F}_j(r)$. Seja γ um

caminho em $U(x(k), \epsilon_{x(k)})$. Para todo $t \in I$, $H_s^r(t) = H(t')$, onde $t' = s + t(r - s)$, assim

$$|r - t'| = |1 - t||r - s| \leq |r - s| < \epsilon.$$

Assim, uma vez que, $\epsilon \leq \epsilon_1 \leq \delta \leq \epsilon'/2$, nós temos que

$$\begin{aligned} d(H_s^r(t)\gamma(t), \gamma(t)) &= d(H(t')(\gamma(t)), \gamma(t)) \\ &\leq d(H(r)(\gamma(t)), H(t')(\gamma(t))) + d(H(r)(\gamma(t)), \gamma(t)) \\ &< \frac{\epsilon'}{4} + \frac{\epsilon'}{2} < \epsilon' \end{aligned}$$

e, pela definição de ϵ' , $[\langle H_s^r, \gamma \rangle] = [\gamma]$, o que significa que x_s é H_s^r -relacionado a $x(k)$. Por definição, então, $\hat{F}(s)$ é H_s^r -relacionada a $\hat{F}(r)$. Se existe um ponto $x'_s \in U_k$, pela mesma razão, $\hat{F}(s)$ seria H_s^r -relativo a $\hat{F}_k(r)$. Então, pelo teorema 2.4.16, devemos ter $k = j$, assim $\hat{F}(s) \subseteq U_j$, o que completa a prova de (3).

A condição (4) é mais clara. Uma vez que $\epsilon \leq \epsilon_2$, se $|r - s| \leq \epsilon$ então nós sabemos que $H(s)$ não tem pontos fixos em $X \setminus \bigcup_{j=1}^n U_j$; assim, em particular $H(s)$ não tem pontos fixos em $\bigcup_{j=1}^n \partial U_j$, o que implica que $(H(s), U_j) \in \mathcal{C}'_A$ como desejado. \square

Teorema 2.5.3 (Invariância sobre homotopia). *Sejam H um caminho em $\text{Map}(X, X)$ de f para g onde X é um espaço ANR compacto e $\hat{F} \in \text{Fix}'(f)$. Se \hat{F} é H -relacionada a alguma $\hat{G} \in \text{Fix}'(g)$, então $\text{index}(\hat{F}) = \text{index}(\hat{G})$; e se \hat{F} não é H -relacionada a nenhum elemento de $\text{Fix}'(g)$, então $\text{index}(\hat{F}) = 0$.*

Demonstração. Seja $x \in \hat{F} \in \text{Fix}'(f)$, e seja $\hat{H}(s)$ o conjunto dos pontos x' em $\text{Fix}(H(s))$ tal que x é H_0^s -relacionado a x' . Pelo teorema 2.4.16, $\hat{H}(s)$ é vazio ou uma classe de um único ponto fixo de $H(s)$.

Se $\hat{H}(s) = \emptyset$, então, tomando $\text{index}(\hat{H}(s)) := \text{index}(H(s), \hat{H}(s))$, temos que $\text{index}(\hat{H}(s)) = 0$ de acordo com a prova do propriedade 2.2.2. Dessa forma, em qualquer caso, o que devemos provar é que o $\text{index}(\hat{F}) = \text{index}(\hat{H}(1))$ e, de tal modo, trataremos das duas partes do nosso teorema ao mesmo tempo.

Afirmamos que, dado $r \in I$, existe $\epsilon > 0$ tal que $|r - s| < \epsilon$ implica que $\text{index}(\hat{H}(r)) = \text{index}(\hat{H}(s))$.

Se nossa afirmação está correta, então, uma vez que, I é conexo, devemos ter que

$index(\hat{H}(s)) = index(\hat{F})$ para todo $s \in I$. Nós tomaremos ϵ sendo como no lema 2.5.2.

Temos dessa maneira dois casos:

Caso (1): $\hat{H}(r) = \emptyset$.

Suponhamos que $\hat{H}(s) \neq \emptyset$. Logo pelo lema 2.5.2, item (3), $\hat{H}(s)$ está H_s^r -relacionada com algum $\hat{F}_j(r) \in Fix'(H(r))$. Agora $\hat{H}(s)$ está H_0^s -relacionada a \hat{F} , e assim, pelo lema 2.5.1, $\hat{F}_j(r)$ está H_0^r -relacionada a \hat{F} . Dessa forma, pelo teorema 2.4.16, $\hat{F}_j(r) = \hat{H}(r)$ e $\hat{H}(r) \neq \emptyset$. A contrapositiva nos diz que, se $\hat{H}(r) = \emptyset$, então $\hat{H}(s) = \emptyset$ e $index(\hat{H}(r)) = index(\hat{H}(s)) = 0$. Isto completa a prova da nossa afirmação quando $\hat{H}(r) = \emptyset$.

Caso (2): $\hat{H}(r) \neq \emptyset$.

Quando $\hat{H}(r) \neq \emptyset$, o ponto principal da demonstração é que, se $U \subset X$ é um conjunto aberto como no lema 2.5.2 contendo $\hat{H}(r)$ e $|r - s| \leq \epsilon$, então

$$U \cap Fix(H(s)) = \hat{H}(s), \quad (2.1)$$

Para provar (2.1), primeiro note que se $\hat{H}(s) \neq \emptyset$ então, pelo lema 2.5.2 temos que $\hat{H}(s) \subseteq U_j$ para algum j , e $\hat{H}(s)$ é H_s^r -relacionada a $\hat{F}_j(r)$. Mas nós já mostramos acima que $\hat{H}(r) = \hat{F}_j(r)$, assim $U_j = U$ e $\hat{H}(s) \subseteq U$. Portanto $U \cap Fix'(H(s)) = \emptyset$ implica que $\hat{H}(s) = \emptyset$, e no caso (2.1) é certamente verdadeira. Nós assumimos que $U \cap Fix(H(s)) \neq \emptyset$. Tome $x_s \in U \cap Fix(H(s))$; então x_s está em alguma classe de pontos fixos \hat{K} de $H(s)$. Pelo lema 2.5.2, $\hat{K} \subseteq U_j$, para algum j . Mas $x_s \in U \cap U_j$, assim, pelo lema 2.5.2 novamente, $U = U_j$, o que significa que $\hat{K} \subseteq U$ e portanto \hat{K} é H_s^r -relacionada a $\hat{H}(r)$. Por definição, \hat{F} é H_0^r -relacionada a $\hat{H}(r)$, assim pelo lema 2.5.1, \hat{F} é H_0^s -relacionada a \hat{K} o que, pelo teorema 2.4.16, implica que $\hat{K} = \hat{H}(s)$. Assim, se $x_s \in U \cap Fix'(H(s))$, então nós mostramos que $x_s \in \hat{H}(s)$, o que significa que $U \cap Fix'(H(s)) \subseteq \hat{H}(s)$. Por outro lado nós já vimos que $\hat{H}(s) \subseteq U$, e assim segue que $\hat{H}(s) \subseteq U \cap Fix'(H(s))$, o que prova (2.1).

Por definição, $index(\hat{H}(r)) := index(H(r), U)$, e por (2.1) podemos tomar $index(\hat{H}(s), U) = index(H(s), U)$, uma vez que o lema 2.5.2 nos diz que $(H(s), U) \in \mathcal{C}'_A$ quando $|r - s| \leq \epsilon$.

Finalmente, H_s^r é a homotopia de $H(s)$ para $H(r)$ e, para $t \in I$, $H_s^r(t) = H(t)$, onde $|r - t'| \leq |r - s| \leq \epsilon$. Assim, pelo lema 2.5.2, $(H_s^r(t), U) \in \mathcal{C}'_A$. Portanto, pela propriedade 1.3.19, i.e., pela invariância homotopia do índice de ponto fixo, $index(\hat{H}(r)) = index(\hat{H}(s))$. \square

Observação 2.5.4. *O teorema anterior deixa claro porque a classe de pontos fixos \hat{F} da aplicação $f : X \rightarrow X$ é chamada de "essencial", se $\text{index}(\hat{F}) \neq 0$. Isso se deve ao fato que qualquer caminho H em $\text{Map}(X, X)$ que começa em f deve induzir uma correspondência que leva \hat{F} para uma classe de pontos fixos de $H(1)$. Portanto, \hat{F} é essencial no sentido de não pode ser eliminada por um movimento da aplicação f através da homotopia.*

Temos como uma consequência do teorema anterior o seguinte resultado:

Corolário 2.5.5. *Sejam H um caminho em $\text{Map}(X, X)$ de f para g onde X é um espaço ANR compacto e $\hat{F} \in \text{Fix}'(f)$. Se $\text{index}(\hat{F}) \neq 0$, então \hat{F} é H -relacionada a algum elemento de $\text{Fix}'(g)$.*

Capítulo 3

O teorema de classificação de homeomorfismo de Thurston

Na seção 3.1 trataremos dos tipos de homeomorfismos que serão discutidos no presente trabalho. Na seção 3.2 discutiremos as principais propriedades dos homeomorfismos pseudo-Anosov. Da seção 3.3 a 3.9 estaremos interessados em introduzir o conceito de entropia topológica e então calcular a entropia topológica para um homeomorfismo pseudo-Anosov. Tal cálculo na prática é complicado, mas no caso dos homeomorfismos pseudo-Anosov introduziremos o conceito de subshift dado por uma matriz quadrada $A_{k \times k}$, formada por zeros e uns, que representa as possíveis transições que ocorrem pelo subshift e assim calcular a entropia topológica de tal subshift a qual estará diretamente relacionada com a entropia topológica do homeomorfismo pseudo-Anosov. Por fim, na seção 3.10 tendo em mente toda a discussão feita nas seções anteriores, seremos capazes de enunciar e entender o teorema de classificação de Thurston cuja demonstração fica fora do contexto desse trabalho, já que, é extremamente não-trivial uma vez que são necessárias ferramentas um pouco mais complexas as quais não abordaremos.

3.1 Tipos de homeomorfismos

Definição 3.1.1. Uma *curva fechada* em uma superfície orientável M de gênero maior ou igual a 2 é uma aplicação contínua $\gamma : I \rightarrow M$. E ainda, uma *curva simple* é uma aplicação $\gamma : I \rightarrow M$ injetiva. Assim, uma curva fechada simples em M definida como acima é *essencial* se esta não limita um disco.

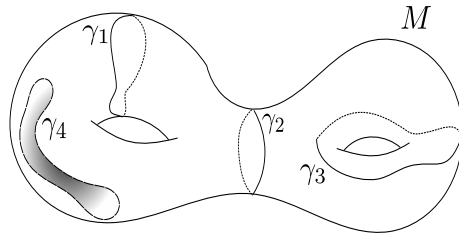


Figura 3.1: Curva não-essencial γ_4 representada pelo disco hachurado.

Definição 3.1.2. Seja M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2. Um homeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é *reduzível* se este preserva uma coleção finita de curvas essenciais mutuamente disjuntas.

Definição 3.1.3. Seja $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo com M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2. Diremos que f é de *ordem finita* se existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n = Id$ (homeomorfismo identidade).

Definição 3.1.4. Seja M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2. Um homeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é um *pseudo-Anosov* se existe um par transverso de folheções mensuráveis (F^s, μ_s) , (F^u, μ_u) e um número $\lambda > 1$ (chamado *coeficiente de dilatação*) tal que

$$f(F^s, \mu_s) = (F^s, \left(\frac{1}{\lambda}\right) \mu_s)$$

e

$$f(F^u, \mu_u) = (F^u, \lambda \mu_u),$$

onde chamamos (F^s, μ_s) de folheação estável e (F^u, μ_u) de folheação instável.

Observação 3.1.5. *A folheação estável pode ser lembrada da seguinte maneira: se tomarmos um ponto p em uma folha estável que emana de uma singularidade $x \in F^s$, então $f^n(p)$ se aproxima de x quando n vai para o infinito. A folheação instável é vista seguindo ideia análoga, porém $f^{-n}(p)$ se aproxima de x para uma singularidade $x \in F^u$.*

Observação 3.1.6. *Note que um homeomorfismo pseudo-Anosov possui apenas um número finito de singularidades e que ainda preserva as folheações estável e instável.*

3.2 Algumas propriedades dos homeomorfismos pseudo-Anosov

Proposição 3.2.1. *Sejam M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2, $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo pseudo-Anosov e $\lambda > 1$. Então, temos que:*

- (i) *f mapeia singularidades em singularidades, de forma que todas as singularidades são pontos periódicos;*
- (ii) *f preserva a medida produto μ induzida localmente por $\mu_s \times \mu_u$ em M .*

Demonstração. (i) Seja M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2. Como $f : M \rightarrow M$ é um homeomorfismo pseudo-Anosov, f vai preservar as folheações instável e estável. Dessa forma a imagem de uma singularidade não pode ser um ponto regular e assim será uma singularidade. Ainda, pela definição de homeomorfismo pseudo-Anosov, existe apenas um número finito de singularidades. Logo toda singularidade é um ponto periódico.

(ii) Sejam $A \in \eta$, $B \in \theta$, onde η e θ são σ -álgebras em M , sendo f e M como em (i). Consideremos (M, η, μ_u) e (M, θ, μ_s) espaços de medida σ -finitos. Tomemos $R = A \times B$ sendo um retângulo mensurável, i.e., um elemento básico em M . Sabemos que R tem medida $\mu(R) = \mu_u(R) \times \mu_s(R)$. Logo, $\mu(f(R)) = \mu_u(f(R)) \times \mu_s(f(R)) = (\lambda A) \cdot \left(\frac{1}{\lambda} B\right) = A \cdot B = \mu_u(R) \times \mu_s(R)$. Assim f preserva a medida produto em M . \square

Proposição 3.2.2 (Fórmula de Euler-Poincaré). *Seja M uma superfície orientável com*

uma folheação. Seja P_s denotando o número de prongs em um ponto $s \in M$. Então

$$\chi(M) = \frac{\Sigma(2 - P_s)}{2},$$

onde o somatório é tomado sobre todas as singulares da folheação.

Demonstração. Veja [2]. □

Observação 3.2.3. *A proposição anterior implica que:*

- (i) *Uma superfície orientável M com $\chi(M) > 0$ não pode transportar uma folheação.*
- (ii) *Qualquer folheação em uma superfície M com $\chi(M) = 0$ não deve ter singularidades (como no caso do Toro) e que qualquer folheação em uma superfície M com $\chi(M) < 0$ deve ter pelo menos uma singularidade.*
- (iii) *A única superfície que admite folheações sem singularidades é o Toro (lembre que o Toro é isomorfo a \mathbb{R}^2).*

Proposição 3.2.4. *Sejam M uma superfície orientável e P_s como na na proposição anterior. Assim, se M tem gênero maior ou igual a 2, então existem singularidades em M . Em particular, toda folheação em M tem singularidades.*

Demonstração. Se M tem gênero maior ou igual a 2, então $\chi(M) < 0$. Pela fórmula de Euler-Poincaré temos que $2\chi(M) = \Sigma(2 - P_s) < 0$. Assim, existe um ponto $s \in M$ tal que $2 - P_s \neq 0$ e, então $P_s \geq 3$. Logo, s é uma singularidade. □

Proposição 3.2.5. *Não existem folhas de (F^u, μ_u) (ou (F^s, μ_s)) que unem uma singularidade a outra singularidade de uma superfície orientável M de gênero maior ou igual a 2.*

Demonstração. Sejam duas singularidades $p, q \in M$ com períodos n e m , respectivamente (obedecendo a proposição 3.2.1 item (i)). Suponhamos que l seja uma folha instável de (F^u, μ_u) unindo essas duas singularidades com comprimento dado por $|l|$. Sejam ainda p_1 e p_2 os períodos dos prongs determinados por p e q , respectivamente. Assim para $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo pseudo-Anosov temos que

$$\begin{aligned}
|f^{p_1 p_2 n m}(l)| &= \lambda^{p_1 p_2 n m} |l| \\
|l| &= \lambda^{p_1 p_2 n m} |l| \\
1 &= \lambda^{p_1 p_2 n m} \\
\sqrt[p_1 p_2 n m]{1} &= \lambda \\
\lambda &= 1.
\end{aligned}$$

Absurdo, pois pela definição de homeomorfismo pseudo-Anosov temos que $\lambda > 1$. Temos resultado análogo para $l \in (F^s, \mu_s)$. \square

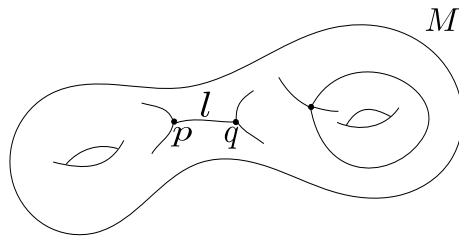


Figura 3.2: Detalhes da demonstração da proposição 3.2.5.

Para a demonstração do próximo resultado usaremos o seguinte teorema:

Teorema 3.2.6 (Recorrência de Poincaré). *Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e seja μ uma medida σ -finita invariante por f onde (M, \mathcal{B}, μ) é um espaço de medida com \mathcal{B} sendo uma σ -álgebra. Seja $E \subset M$ qualquer conjunto mensurável com $\mu(E) > 0$. Então, para todo ponto $x \in E$ μ -qtp existem infinitos valores de n para os quais $f^n(x)$ também está em E , i.e., $f^n(E) \cap E \neq \emptyset$.*

Demonstração. Veja [11]. \square

Observação 3.2.7. *Em nosso trabalho a medida considerada no teorema de recorrência de Poincaré será sempre a medida de Lebesgue.*

Proposição 3.2.8. *Seja M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2 e $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo pseudo-Anosov. Logo não existem curvas fechadas simples em M compostas de uma quantidade finita de segmentos de folhas instáveis e estáveis.*

Demonstração. Sabemos que f preserva medida (conforme a proposição 3.2.1 item(ii)). Assim, suponhamos que exista um anel \mathcal{A} formado por folhas fechadas γ_n de (F^u, μ_u) , com $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema de recorrência de Poincaré sabemos que existe um número $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Logo teremos que $f^n(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, uma vez que, sendo \mathcal{A} formado por folhas instáveis fechadas vemos que $f^n(\mathcal{A})$ intersecta transversalmente \mathcal{A} . Absurdo, pois as folhas instáveis são expandidas por $\lambda > 1$. Portanto \mathcal{A} não existe. \square

Proposição 3.2.9. *Seja M uma superfície orientável de gênero maior ou igual 2. Se U é um conjunto aberto não-vazio que é invariante sob um homeomorfismo pseudo-Anosov $f : M \rightarrow M$, então U é denso em M .*

Demonstração. É suficiente considerar o caso em que o homeomorfismo pseudo-Anosov f fixa as singularidades das folheações estável e instável. Seja W uma separatriz da folheação estável (F^s, μ_s) , emanando de uma singularidade $s \in M$. Como W é denso em M ($\overline{W} = M$), existe um segmento J de W contido em U . Sejam $a, b \in M$ os pontos finais de J . As sequências $f^n(a)$ e $f^n(b)$ convergem para s . Seja T uma placa da folheação instável (F^u, μ_u) que está contida em U e intersecta J em um ponto. A medida que aumentamos n , o arco $f^n(T)$ é alongado do ponto de vista da medida transversal da folheação estável e se aproxima de duas separatrizes W' e W'' adjacentes a W . Precisamente $W' \cup W''$ está contida no fecho de $\bigcup_{n \geq 0} f^n(T)$. Assim o fecho de U contém uma separatriz de (F^u, μ_u) inteiramente. Como uma separatriz é densa, segue que o fecho de U é denso em M . \square

Corolário 3.2.10. *Um homeomorfismo pseudo-Anosov $f : M \rightarrow M$ é topologicamente transitivo, ou seja, existe uma órbita por f que é densa em M .*

Demonstração. Sejam conjuntos U_i 's formando um base contável de abertos de M invariantes por f . A interseção $\bigcap_i \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_i) \right)$ é não-vazia pelo teorema de categorias de Baire. Logo, cada ponto da interseção tem uma órbita densa em M . \square

Proposição 3.2.11. *Seja M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2. Então, os pontos periódicos de um homeomorfismo pseudo-Anosov $f : M \rightarrow M$ são densos em M .*

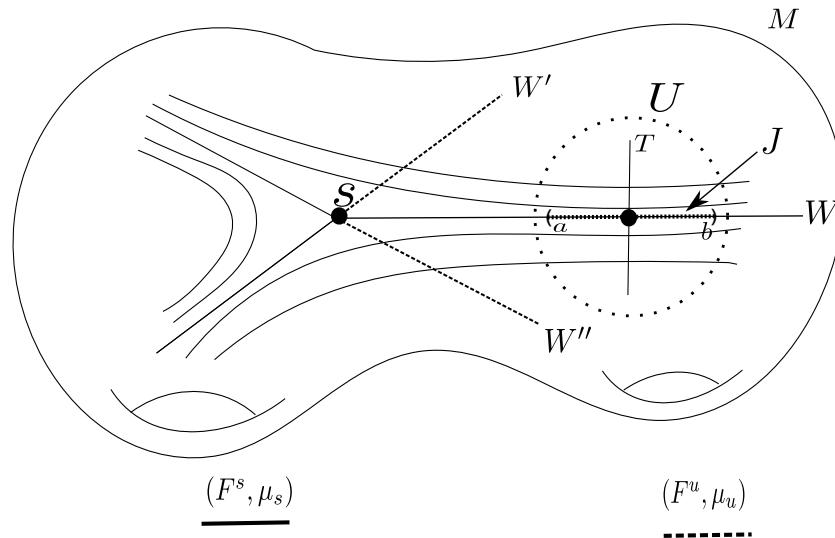


Figura 3.3: Detalhes da demonstração da proposição 3.2.9.

Demonstração. Pela proposição 3.2.1 item (i) sabemos que toda singularidade é um ponto periódico. Seja $x_0 \in M$ um ponto regular e seja U um retângulo que seja adaptado as folheações (F^u, μ_u) e (F^s, μ_s) e que seja uma vizinhança de x_0 . Seja V um outro retângulo vizinhança de x_0 que é um subconjunto próprio de U . Como o homeomorfismo pseudo-Anosov f deixa invariante uma medida que atribui uma medida não-nula a cada conjunto aberto não-vazio (a medida é dada localmente pelo produto de μ_u por μ_s), o teorema de recorrência de Poincaré aplica-se: para qualquer n_0 , existe um $n \geq n_0$ tal que $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$.

Seja $x_1 \in V$ tal que $f^n(x_1) \in V$. Seja J uma F^s -placa de U passando através de x_1 . Nós temos que $\mu_u(f^n(J)) = \lambda^{-n} \mu_u(J)$ onde λ é o coeficiente de dilatação de f . Vemos que se n_0 é escolhido para ser suficientemente grande (U e V sendo dados), seremos capazes de garantir que $f^n(J)$ está contido em U .

Identificando $f^n(J)$ a um intervalo de J (a identificação sendo dada seguindo as F^u -placas) vemos que f^n tem um "ponto fixo em J ", ou seja, existe um ponto $x_2 \in J$ onde a F^u -folha é invariante por f^n .

Seja L uma F^u -placa de x_2 ; se n_0 é escolhido para ser suficientemente grande, podemos ter certeza de que $f^n(L)$ contém L , uma vez que $f^n(L)$ e L já tem $f^n(x_2)$ em comum (esta nova condição em n_0 depende apenas dos μ_s -comprimentos de U e V). Portanto, existe

um ponto fixo para $f^n|_L$. □

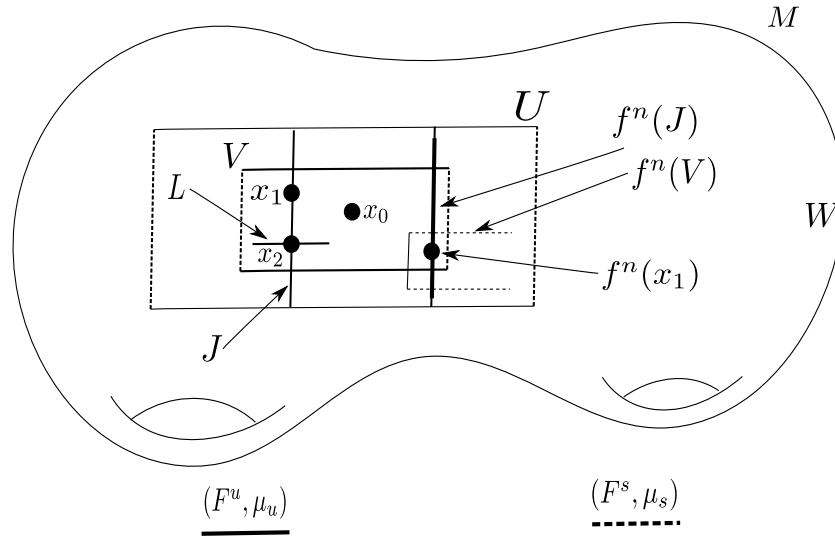


Figura 3.4: Detalhes da demonstração da proposição 3.2.11.

Observação 3.2.12. Para ver que existe um ponto fixo para f^n restrito a L , considere L sendo $[a, b]^2$ contido no plano XY . Logo, segue que, $f^n(a) < a$ e $f^n(b) > b$, e assim para um $x_3 \in [a, b]^2$ usando o teorema do valor intermediário temos que $f^n(x_3) = x_3 \in [a, b]^2$.

Proposição 3.2.13. Seja d_r uma métrica hiperbólica em uma superfície orientável M de gênero maior ou igual a 2 e α uma curva contida no conjunto das classe de isotopia de curvas simples, fechadas e conexas não homotópicas a um ponto ou a um componente do bordo de M . Denote por $l_{d_r}(\alpha)$ o comprimento de uma geodésica que minimiza a classe de α . Se $f : M \rightarrow M$ é um homeomorfismo pseudo-Anosov com coeficiente de dilatação $\lambda > 1$; a classe de isotopia de $f(\alpha)$ está bem definida. Nós temos então que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{l_{d_r}(f^n(\alpha))} = \lambda$$

Demonstração. Veja [3]. □

3.3 Folheações mensuráveis aracionais

Nesta seção faremos um estudo para o caso em que M é uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2 e que sempre terá um bordo, a menos que outra abordagem seja feita. Consideraremos que $f \in Diff(M)$ e $[f]$ seja a classe de isotopia de f . Dessa forma existirá uma folheação mensurável (F, μ) e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$f(F, \mu) \sim^m (F, \lambda\mu) = \lambda(F, \mu). \quad (3.1)$$

Observação 3.3.1. *Segue que \sim^m é uma relação de equivalência de medidas entre folheações mensuráveis.*

Observação 3.3.2. *$f(F, \mu)$ denota a imagem de F sobre f equipada com a medida μ^* definida por $\mu^*(\gamma) = \mu(f^{-1}(\gamma))$ se γ é um arco transverso.*

Definição 3.3.3. *Uma folheação mensurável parcial de uma superfície orientável M de gênero maior ou igual a 2 é uma folheação mensurável (F', μ') que está definida em uma “subsuperfície” $N \subset M$ satisfazendo:*

- (i) *Cada componente conexa do bordo de N , i.e. ∂N , é um ciclo de folhas; e*
- (ii) *Se $\Gamma \in \partial N$ limita um disco em $M \setminus \text{int}(N)$, então o número de separatrizes que saem de $\text{Sing}(F' \cap \Gamma)$ e entram em N é pelo menos 2.*

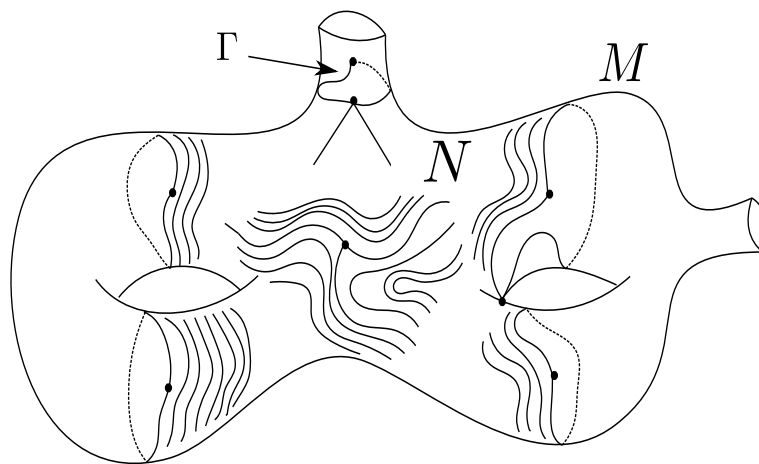


Figura 3.5: Folheação mensurável parcial de M .

Definição 3.3.4. *Se começarmos com uma folheação $(F, \mu) \subset M$ podemos de certa forma dizendo “desgrudar” (F, μ) ao longo de todas as folhas que juntam singularidades a singularidades, e fazer um “blow-up” daquelas singularidades que não estão conectadas as outras. Obtemos assim uma **folheação mensurável descolada** $U(F, \mu)$ de (F, μ) , cujas singularidades estão todas no bordo.*

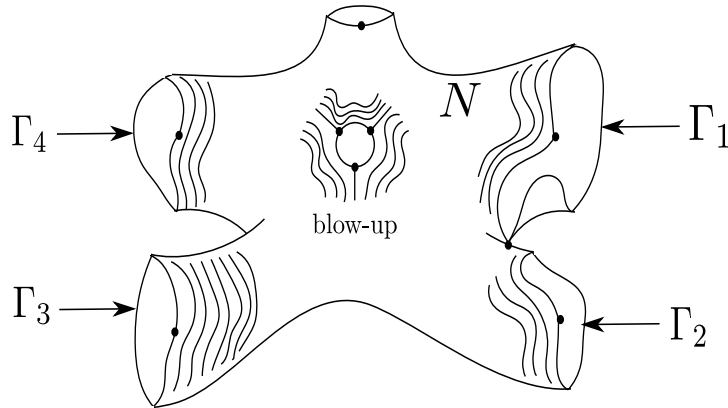


Figura 3.6: Folheação mensurável descolada $U(F, \mu)$ de (F, μ) .

Definição 3.3.5. *Escreveremos $\beta U(F, \mu)$ como sendo a união dos componentes do bordo do suporte de $U(F, \mu)$ tal que não limitam um disco em M .*

Com respeito a relação (3.1) segue que pode ocorrer o caso em que $\beta U(F, \mu) = \emptyset$ e $\lambda \neq 1$. Mostraremos mais a diante que nesse caso temos um homeomorfismo pseudo-Anosov.

Observação 3.3.6. *Observamos que nesta seção as superfícies são todas orientáveis, mas os difeomorfismos não preservam necessariamente a orientação.*

Definição 3.3.7. *Uma folheação mensurável (F, μ) onde $\beta U(F, \mu) = \emptyset$ é chamada de **aracional**.*

Pela figura 3.6 temos uma noção geométrica de $\beta U(F, \mu)$ onde podemos observar que $\beta U(F, \mu) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.

Lema 3.3.8. *Seja (F, μ) uma folheação mensurável aracional em uma superfície orientável M de gênero maior ou igual a 2, e seja X um conjunto invariante consistindo de todas as singularidades e todas as folhas unindo duas singularidades. Logo, segue que:*

- (i) *Cada componente conexa de X é contrátil em M .*
- (ii) *(F, μ) não tem quaisquer folhas sendo fechadas e suaves.*

Demonstração. (i) A superfície $\overline{M \setminus \text{Supp}(U(F, \mu))}$ pode ser colapsada em X , o que nos fornece o resultado desejado.

(ii) Suponhamos que Γ é uma folha suave de (F, μ) . Aplicando o “lema da estabilidade” (veja [3] Éxpose 5) a um dos lados de Γ , podemos encontrar um cilindro maximal $\phi : \Gamma \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que

- (i) $\phi(\Gamma \times \{0\}) = \Gamma$; e
- (ii) $\phi(\Gamma \times [0, 1])$ é um mergulho começando do lado escolhido de Γ .

Uma vez que o gênero de M é pelo menos 2, a maximalidade do cilindro implica que $\phi(\Gamma \times \{1\}) \subset X$. Em vista do item (i), o conjunto invariante $\phi(\Gamma \times \{1\})$ é contrátil e podemos mostra assim que $\phi(\Gamma \times [0, 1])$ é um disco D^2 com limite $\phi(\Gamma \times \{1\})$. Como não existe uma folheação mensurável em D^2 onde ∂D^2 é uma folha, a existência de Γ é um absurdo. Portanto, toda semi-folha de (F, μ) que não chega em uma singularidade é infinita. Logo o item (ii) está provado. \square

Definição 3.3.9. *Seja M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2. Dizemos que duas folheações mensuráveis em M são **Whitehead equivalentes** se elas diferem por:*

- (i) *isotopia; e*
- (ii) *operações de Whitehead (conforme ilustrado na figura 3.7).*

Lema 3.3.10. *Se (F, μ) é uma folheação mensurável aracional, então existe uma folheação mensurável equivalente (F', μ') que não possui nenhuma conexão entre singularidades. Esta folheação é única sobre isotopia em sua classe mensurável.*

Demonstração. Obtemos (F', μ') colapsando cada componente do conjunto F -invariante X descrito acima. O resultado desse colapso permanece invariante sobre isotopia se nós

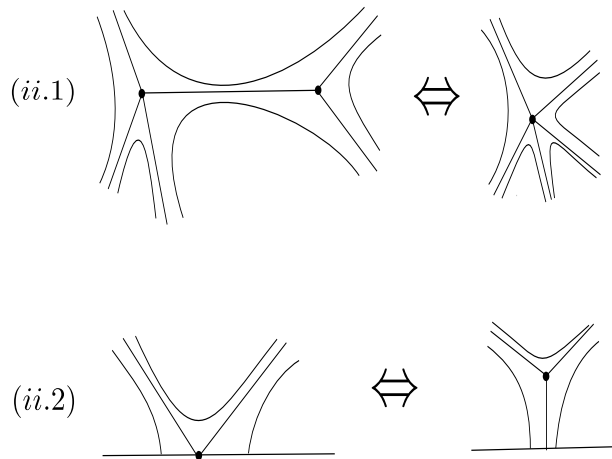


Figura 3.7: Operações de Whitehead.

aplicamos uma operação de Whitehead em X antes de colapsar. A unicidade segue diretamente. \square

Convenção. No que se segue, iremos constantemente representar uma classe de folheações aracionais pelo **modelo canônico** acima.

Observação 3.3.11. A equivalência tomada no lema 3.3.10 é a equivalência de Whitehead.

Definição 3.3.12. Seja (F, μ) uma folheação mensurável qualquer. Um **F -retângulo** é a imagem de uma imersão $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ com as seguintes propriedades:

- (i) $\varphi|_{(0,1) \times (0,1)}$ é um C^∞ -mergulho.
- (ii) $\varphi(\{t\} \times [0, 1])$ está contido em uma união finita de folhas e singularidades; se $t \in (0, 1)$ então a imagem está contida em uma única folha.
- (iii) $\varphi([0, 1] \times \{0\})$ e $\varphi([0, 1] \times \{1\})$ são transversos as folhas.

Definição 3.3.13. Para um F -retângulo R , temos a decomposição $\partial R = \partial_F R \cup \partial_\tau R$ onde $\partial_F R = \varphi(\{0, 1\} \times [0, 1])$ e $\partial_\tau R = \varphi([0, 1] \times \{0, 1\})$.

Observação 3.3.14. Denotaremos por $\partial_F^0 R$ e $\partial_F^1 R$ as imagens, respectivamente, de $\{0\} \times [0, 1]$ e $\{1\} \times [0, 1]$. Temos definição análoga para $\partial_\tau^0 R$ e $\partial_\tau^1 R$.

Observação 3.3.15. Acharemos conveniente escrever $\text{int}(R) = \varphi((0, 1) \times (0, 1))$ o qual em geral não é o interior da imagem. Note ainda que $\text{int}(R) \cap \partial(R) = \emptyset$.

Definição 3.3.16. *Um bom sistema de transversais para (F, μ) é um sistema finito $\tau = \{\tau_i : i \in I\}$ de arcos simples com as seguintes propriedades:*

- (i) *Cada arco é transversal a (F, μ) e pode somente encontrar uma singularidade em um de seus pontos finais.*
- (ii) *Dois arcos não se encontram, exceto possivelmente em um único ponto final; se este é uma singularidade os dois arcos vivem em dois setores distintos.*

Observação 3.3.17. *Não iremos requerer que todo arco contenha uma singularidade.*

Definição 3.3.18. *Seja M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2. Dados uma folheação mensurável aracional e um bom sistema de transversais τ , existe um único sistema de F -retângulos R_1, \dots, R_N , com as seguintes propriedades:*

- (i) $\bigcup_{i=1}^N R_i = M$;
- (ii) $\text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset$, para $i \neq j$;
- (iii) $\partial_\tau^\epsilon R_i$ está contido em um único arco de τ , onde $\epsilon \in \{0, 1\}$;
- (iv) Cada $\partial_F^\epsilon R_i$ contém um ponto de $\text{Sing}(F) \cap \partial\tau$, onde $\epsilon \in \{0, 1\}$, em outras palavras, todo F -retângulo R_i é maximal com respeito a condição (iii); e
- (v) Os dois lados de cada arco de τ são cobertos por estes F -retângulos.

Exemplo 3.3.19. *O exemplo mais instrutivo está no caso em que tomamos uma transversal a uma folheação do Toro e construímos os F -retângulos correspondentes.*

Lema 3.3.20. *Seja M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2. Se (F, μ) é uma folheação mensurável aracional cada semi-folha L de (F, μ) que não leva a uma singularidade é densa em M .*

Demonstração. Sabemos que L é “infinita” pelo lema 3.3.8, item (ii). Seja τ o menor arco transversal a (F, μ) e R_1, \dots, R_N um sistema de F -retângulos como na definição 3.3.18. Novamente pela definição 3.3.18, item (i), temos que $\bigcup_{i=1}^N R_i = M$ e, uma vez que L é infinito, este contém placas em $\bigcup_{i=1}^N \text{int}(R_i)$, assim L intersecta τ . Uma vez que τ foi tomado sendo arbitrário, L é denso em M . \square

3.4 Folheações mensuráveis aracionais com $\lambda \neq 1$.

Nesta seção estudaremos o caso envolvendo os homeomorfismos pseudo-Anosov. Para tal propósito iremos assumir que $f(F, \mu) = (F, \lambda\mu)$ com coeficiente de dilatação $\lambda \neq 1$ sendo (F, μ) um modelo canônico para a classe de folheações aracionais. Trocando f por f^{-1} , se necessário, podemos assumir que $\lambda > 1$.

Lema 3.4.1. *Seja (F, μ) como acima. Sobre uma mudança de f por uma isotopia que mantém (F, μ) invariante, podemos encontrar um bom sistema de transversais τ com as seguintes propriedades:*

- (i) *Existe pelo menos um arco de τ em cada setor de cada singularidade, como na figura 3.8 a seguir.*
- (ii) *$f(\tau) \subset \tau$, i.e., f leva cada arco de τ em um arco de τ .*
- (iii) *Se $x \in \partial\tau \setminus \text{Sing}(F)$, x pertence a separatriz de uma singularidade; denotamos por F_x o “arco da folha juntando x a $\text{Sing}(F)$ ”.*
- (iv) *Toda separatriz contém um F_x .*
- (v) $\bigcup F_x \subset f(\bigcup F_x)$.

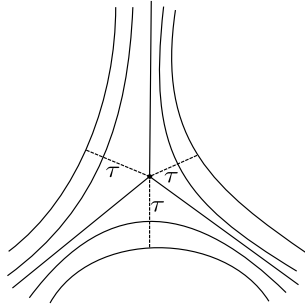


Figura 3.8: Arcos transversais de mesmo comprimento em cada setor.

Demonstração. Uma vez que, $\lambda > 1$, f contrai as transversais. Sobre uma mudança por uma isotopia de f que preserva (F, μ) , podemos encontrar um bom sistema de transversais τ'' que satisfaz (i) e (ii) e que tem um arco em cada setor. Seja α'' um arco de τ'' e L a separatriz emanando de uma singularidade s . Como pelo lema 3.3.20 temos que semi-folhas são densas, vai existir um primeiro ponto da interseção de L com α'' , começando

de s . Considerando todas as separatrizes, nós obtemos em α'' um número finito de tais vértices; nós subdividimos α'' e truncamos este o mais longe desses vértices. Seja τ' um bom sistema de transversais obtido por esta operação em cada um dos arcos de τ'' . O sistema τ' satisfaz (i), (iii) e (iv).

O bom sistema de transversais τ' também satisfaz (ii). Seja $\alpha' \in \tau'$, com pontos finais x e y . A transversal α' está contida em uma transversal α'' de τ'' , e $f(\alpha'') \subset \beta''$ para algum $\beta'' \in \tau''$. Suponhamos por agora que $f(\alpha')$ já esteja contido em $\bigcup \{\beta' : \beta' \in \tau'\}$. Se $f(\alpha')$ não está contida em um simples arco de τ' , existe uma separatriz L onde o primeiro ponto da interseção com β'' é o ponto z entre $f(x)$ e $f(y)$. Mas $f^{-1}(L)$ intersecta α'' em $t \neq f^{-1}(z)$ antes de intersectar α'' em $f^{-1}(z)$. Assim L intersecta β'' em $f(t)$, que está antes de z em L , uma contradição.

Agora um argumento análogo prova que $f(\alpha') \subset \bigcup \{\beta' : \beta' \in \tau'\}$ para todo $\alpha' \in \tau'$, o que completa a prova de τ' satisfazer (ii).

Seja n o primeiro inteiro não-negativo para o qual f^{n+1} deixa invariante cada separatriz. Seja τ uma subdivisão de τ' definida por $\tau' \vee \alpha(\tau') \vee \dots \vee \alpha^n(\tau')$, i.e., um arco α de τ está contido em um arco de τ' e é limitado por dois pontos consecutivos da forma $f^j(x)$, $f^{j'}(x')$, com $x, x' \in \partial\tau'$ e $0 \leq j, j' \leq n$. As propriedades (i), (iii) e (iv) seguem diretamente.

Para (ii), nós supomos que $f(\alpha)$, para τ' satisfazendo (ii), está contida em um certo β' de τ' , é subdividida. Assim dizemos que entre $f^{j+1}(x)$ e $f^{j'+1}(x')$, vai existir um $f^{j''}(x'')$, $j'' \leq n$.

Afirmamos que $j'' \geq 1$. Isto é verdade pois $f(\alpha)$, que está contido em β' , não é subdividido por um ponto de $\partial\tau'$. Assim α contém $\alpha^{j''-1}$, o que é uma contradição.

Nós agora provaremos (v). Seja $x \in \partial\tau$. Se $f^{-1} \in \partial\tau$, a propriedade (v) segue. Se $f^{-1}(x) \neq \partial\tau$, então $x \in \partial\tau'$. A folha L de F_x também contém $f^{n+1}(F_x)$; pela mesma construção como τ' , x é o primeiro ponto da interseção de L com um arco de τ'' que passa através de x . Assim, $f^{n+1}(F_x)$ contém F_x e $f^{-1}(F_x) \subset F_{f^n(x)}$. \square

Observação 3.4.2. *Seja $x \in \partial\tau \setminus \text{Sing}(F)$ e seja L uma folha contendo F_x . Começando da singularidade s de L , nós consideramos o primeiro ponto y que pertence a τ e não a*

F_x . Nós denotamos por F'_x o seguimento de s para y em L .

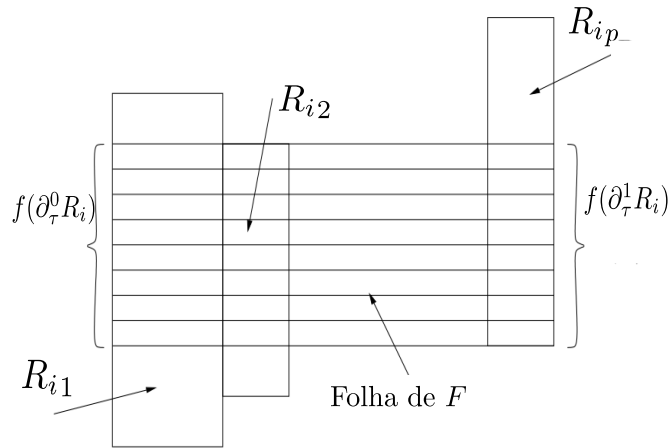
Seja \mathcal{F} (respectivamente \mathcal{F}') a união dos F_x (respectivamente F'_x). Como $f(\tau) \subset \tau$, pelo lema 3.4.1, e $f(\mathcal{F}) \supset \mathcal{F}$, segue que $f(\mathcal{F}') \supset \mathcal{F}'$.

Definição 3.4.3. Sejam M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2, (F, μ) uma folheação mensurável aracional e f um difeomorfismo tal que $f(F, \mu) = \lambda(F, \mu)$, com $\lambda > 1$. Uma **pré-partição de Markov** para (F, f) é uma coleção de F -retângulos R_1, \dots, R_n tal que:

- (i) $\bigcup_{i=1}^n R_i = M$;
- (ii) $\text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset$, para $i \neq j$;
- (iii) $f(\bigcup \partial_\tau R_i) \subset \bigcup \partial_\tau R_i$; e
- (iv) $f^{-1}(\bigcup \partial_F R_i) \subset \bigcup \partial_F R_i$.

Lema 3.4.4. Uma pré-partição de Markov também satisfaz:

- (v) Para cada $i = 1, \dots, m$ e $\epsilon \in \{0, 1\}$, $f(\partial_\tau^\epsilon R_i)$ é coberto pelo lado correspondente a $f(R_i)$ por um único F -retângulo: $f(\partial_\tau^\epsilon R_i) \subset \partial_\tau^{\eta(\epsilon, i)} R_j(\epsilon, i)$.
- (vi) Similarmente, $f^{-1}(\partial_F^\epsilon R_i)$ é coberto pelo lado correspondente a $f^{-1}(R_i)$ por um único F -retângulo. Isto quer dizer que a imagem sobre f de um F -retângulo é algumas vezes como na figura a seguir.



i_1, i_2, \dots, i_p não são necessariamente distintos

Figura 3.9: A imagem de f sobre o F -retângulo R_i .

Demonstração. Se (v) não é válido, existe um $x \in \text{int}(R_i)$ tal que $f(x) \in \partial_F R_j$, o que contradiz (iv). Similarmente, (vi) segue de (iii). \square

3.5 Entropia topológica

Se $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua em um espaço topológico compacto X e $N_n(f)$ é a “cardinalidade” do conjunto dos pontos fixos de f^n então $\limsup \frac{1}{n} \log N_n(f)$ é uma medida de quanta dinâmica f possui.

Definição 3.5.1. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua em um espaço topológico compacto X . Sejam $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ e $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ coberturas abertas de X . A cobertura aberta $\{A_i \cap B_j\}_{i \in I, j \in J}$ será denotada por $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. Se \mathcal{A} é uma cobertura,*

$$N_n(f, \mathcal{A})$$

denota a cardinalidade mínima da subcobertura $\mathcal{A} \vee f^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\mathcal{A})$ de X e

$$h(f, \mathcal{A}) = \limsup \frac{1}{n} \log N_n(f, \mathcal{A})$$

denota a entropia de f relativa a \mathcal{A} . Como X é compacto segue que $N_n(f, \mathcal{A})$ é finito, e maior ou igual a 1 (de fato, ele só pode ser igual a 1 se X for um elemento de \mathcal{A}). A entropia topológica de f é dada por

$$h(f) = \sup_{\mathcal{A}} (h(f, \mathcal{A})),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as coberturas de X .

Observação 3.5.2. *Em algum senso, "entropia" é um número que descreve a complexidade da dinâmica que uma aplicação tem.*

Teorema 3.5.3 (Bowen). *Sejam X e Y espaços topológicos compactos. Sejam ainda $g : X \rightarrow X$, $f : Y \rightarrow Y$ e $\varphi : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Suponha que φ seja sobrejetiva e que $f \circ \varphi = \varphi \circ g$, então $h(g) \geq h(f)$. Em particular, se φ é um homeomorfismo, então $h(f) = h(g)$. Assim a entropia topológica é um invariante topológico.*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{g} & X \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 Y & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

Demonstração. Tomemos X e Y sendo espaços topológicos compactos. Seja $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de Y . Consideremos as aplicações contínuas $g : X \rightarrow X$, $f : Y \rightarrow Y$ e $\varphi : X \rightarrow Y$. Seja ainda φ sobrejetiva. Logo haverá mais elementos $\varphi^{-1}(A_i)$ da cobertura aberta \mathcal{B} de X em relação aos elementos da cobertura aberta \mathcal{A} de Y , uma vez que, φ é sobrejetiva. Portanto, $h(g) = \sup_{\mathcal{B}}(h(g, \mathcal{B})) \geq \sup_{\mathcal{A}}(h(f, \mathcal{A})) = h(f)$. \square

Observação 3.5.4. No caso em que temos o diagrama comutativo do teorema 3.5.3 e φ é um homeomorfismo dizemos que φ é uma **conjugação**. No caso em que φ é sobrejetiva dizemos que φ é uma **semiconjugação**.

Definição 3.5.5. Seja $l(\mathcal{A})$ o **número de Lebesgue da cobertura** \mathcal{A} , i.e., um número l tal que qualquer conjunto de diâmetro menor do que l está contido em algum elemento da cobertura.

O seguinte teorema pressupõe que X esteja munido de uma métrica para estabelecer uma forma mais prática de calcular a entropia topológica usando coberturas abertas.

Teorema 3.5.6. Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de coberturas abertas com diâmetro indo a zero então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(f, A_n) = h(f),$$

bem entendido que os dois lados podem valer ∞ .

Demonstração. Suporemos que $h(f) < \infty$, sendo análoga a prova quando $h(f) = \infty$. Como $h(f) = \sup_{\mathcal{A}}(h(f, \mathcal{A}))$ então para todo $\epsilon > 0$ existe cobertura \mathcal{A} tal que

$$h(f, \mathcal{A}) > h(f) - \epsilon.$$

Seja $l(\mathcal{A})$ um número de Lebesgue para \mathcal{A} . Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq n_0$ implica que $\text{diam}(A_n) < l(\mathcal{A})$, logo $\mathcal{A} < A_n$, portanto

$$h(f, \mathcal{A}) \leq h(f, A_n),$$

de onde

$$h(f, A_n) > h(f) - \epsilon$$

para todo $n \geq n_0$. □

Para espaços métricos, compactos ou não, Bowen propôs a seguinte definição de “entropia topológica:

Definição 3.5.7. *Suponhamos que $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua em um espaço métrico X e suponha que exista um $K \subset X$ compacto. Seja ainda $\epsilon > 0$. Logo dizemos que:*

(i) $E \subset K$ é (n, ϵ) -**separado** se, dados $x, y \in E$ com $x \neq y$, existe um $0 \leq i \leq n$ tal que $d(f^i(x), f^i(y)) \geq \epsilon$. Tomaremos $s_K(n, \epsilon)$ sendo a **cardinalidade máxima** de um conjunto (n, ϵ) -separado contido em K .

(ii) $E \subset K$ é (n, ϵ) -**abrangente** se, dado $y \in K$, existe $x \in E$ tal que $d(f^i(x), f^i(y)) < \epsilon$, para cada $0 \leq i \leq n$. Tomaremos $r_K(n, \epsilon)$ sendo a **cardinalidade mínima** de um conjunto (n, ϵ) -abrangente contido em K .

Desa forma temos o seguinte lema:

Lema 3.5.8. *Sejam X espaço métrico, $f : X \rightarrow X$ aplicação contínua, $K \subset X$ compacto e $\epsilon > 0$ com $s_K(n, \epsilon)$ e $r_K(n, \epsilon)$ como na definição anterior. Logo segue que*

$$r_K(n, \epsilon) \leq s_K(n, \epsilon) \leq r_K(n, \epsilon/2).$$

Demonstração. Provemos primeiro a desigualdade da esquerda. Seja $E \subset K$ um conjunto (n, ϵ) -separado com cardinalidade máxima. Mostraremos que E é um conjunto (n, ϵ) -abrangente. Para isso, tome $x \in X$ que não pertença a E . Como a cardinalidade de E é máxima segue que o conjunto $E \cup \{x\}$ não é (n, ϵ) -separado, Então existe $y \in E$ tal que $d(x, y) < \epsilon$.

Agora provemos a desigualdade da direita. Sejam $E \subset K$ um conjunto (n, ϵ) -separado e $F \subset K$ um $(n, \epsilon/2)$ -abrangente. Basta provar que a cardinalidade do primeiro é menor ou igual a do segundo. Para isso, basta encontrar uma função $\phi : E \rightarrow F$ que seja injetiva. Ora, tome, para cada $x \in E$, um elemento $\phi(x) \in F$ tal que $d(x, \phi(x)) < \epsilon/2$. Não pode haver dois pontos x_1 e x_2 tais que $\phi(x_1) = \phi(x_2)$, senão a distância entre x_1 e x_2 seria menor que ϵ , contradizendo o fato de E ser (n, ϵ) -separado. \square

Assim podemos tomar

$$\bar{s}_K(\epsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s_K(n, \epsilon))$$

e

$$\bar{r}_K(\epsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r_K(n, \epsilon)).$$

Note que $\bar{s}_K(\epsilon)$ e $\bar{r}_K(\epsilon)$ são funções decrescentes de ϵ e que

$$\bar{r}_K(\epsilon) \leq \bar{s}_K(\epsilon) \leq \bar{r}_K(\epsilon/2).$$

Portando, somos capazes de definir

$$h_K(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \bar{s}_K(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \bar{r}_K(\epsilon).$$

Finalmente segue que

$$h_X(f) = \sup \{h_K(f) : K \subset X \text{ é compacto}\}.$$

Proposição 3.5.9 (Bowen). *Se X é um espaço métrico compacto e $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua, então $h_X(f) = h(f)$.*

Demonstração. Pelo lema da cobertura de Lebesgue, cada cobertura aberta de X possui uma subcobertura formada por bolas abertas de raio ϵ . Portando segue a nosso resultado. \square

Observação 3.5.10. *O número $h_X(f)$ depende da métrica em X e faz mais sentido para funções uniformemente contínuas.*

3.6 O grupo fundamental e a entropia

Definição 3.6.1. *Suponhamos que X e Y são espaços métricos. Dizemos que $\varphi : X \rightarrow Y$ é uma **aplicação de recobrimento métrica** se é sobrejetiva e satisfaz a seguinte condição:*

Existe $\epsilon > 0$ tal que para $0 < \delta < \epsilon$, algum $y \in Y$ e algum $x \in \varphi^{-1}(y)$ a aplicação $\varphi : B(x, \delta) \rightarrow B(y, \delta)$ é uma isometria bijetora, onde $B(\bullet, \delta)$ é a bola aberta de centro \bullet e raio δ .

Exemplo 3.6.2. *O principal exemplo em mente é dado pela aplicação de recobrimento $\varphi : \widetilde{M} \rightarrow M$ de uma superfície compacta orientável M de gênero maior ou igual a 2.*

Definição 3.6.3. *Dado um grupo finitamente gerado G e um conjunto finito de geradores $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_r\}$ de G , definimos o **comprimento** de um elemento $g \in G$ por*

$$L_{\mathcal{G}}(g)$$

o qual denota o mínimo comprimento de uma palavra nos g_i 's e g_i^{-1} 's representantes do elemento g .

Podemos observar ainda que se $\mathcal{G}' = \{g'_1, \dots, g'_s\}$ é um outro conjunto de geradores então

$$L_{\mathcal{G}}(g) \leq (\max L_{\mathcal{G}}(g'_i)) L_{\mathcal{G}'}(g).$$

Definição 3.6.4. *Se $A : G \rightarrow G$ é um endomorfismo, temos que*

$$\gamma_A = \sup_{g \in G} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log L_{\mathcal{G}}(A^n g) = \sup_{g_i \in \mathcal{G}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log L_{\mathcal{G}}(A^n g_i)$$

Observação 3.6.5. *Segue que γ_A é finito, pois é calculado sobre um conjunto finito de geradores, e pela inequação anterior, γ_A não depende do conjunto de geradores tomado em sua definição.*

Proposição 3.6.6. *Se $A : G \rightarrow G$ é um endomorfismo e $g \in G$ definimos $gAg^{-1} : G \rightarrow G$ por*

$$(gAg^{-1})(x) = gA(x)g^{-1}.$$

Portanto temos que $\gamma_A = \gamma_{gAg^{-1}}$.

Atenção: $(gAg^{-1})^n \neq gA^n g^{-1}$.

Para a demonstração da proposição 3.6.6 vamos precisar do seguinte lema:

Lema 3.6.7. *Sejam $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ duas sequências com a_n e b_n não-negativos, e seja k positivo. Nós temos que:*

$$(i) \limsup \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) = \max(\limsup \frac{1}{n} \log a_n, \limsup \frac{1}{n} \log b_n)$$

$$(ii) \limsup \frac{1}{n} \log(ka_n) = \limsup \frac{1}{n} \log a_n$$

$$(iii) \limsup \frac{1}{n} \log(a_n) \leq \limsup \frac{1}{n} \log(a_1 + \dots + a_n) \leq \max(0, \limsup \frac{1}{n} \log a_n)$$

Demonstração. Tomemos $a = \limsup \frac{1}{n} \log a_n$ e $b = \limsup \frac{1}{n} \log b_n$.

(i) A inequação $\max(a, b) \leq \limsup \frac{1}{n} \log(a_n + b_n)$ segue diretamente.

Se $c > \max(a, b)$, então podemos encontrar um $n_0 \geq 1$ tal que $n \geq n_0$ implica que $a_n \leq e^{nc}$ e $b_n \leq e^{nc}$. Nós obtemos para $n \leq n_0$:

$$\frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \leq \frac{1}{n} \log(2e^{nc}).$$

Uma vez que, $\limsup \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \leq \limsup \frac{1}{n} \log 2e^{nc}$.

(ii) Segue diretamente.

(iii) A inequação $a \leq \limsup \frac{1}{n} \log(a_1 + \dots + a_n)$ é direta.

Suponha que $c > \max(0, a)$. Nós podemos encontrar $n_0 \geq 1$ tal que $a_n \leq e^{nc}$ para $n \geq n_0$. Nós temos para $n \geq n_0$:

$$a_1 + \dots + a_n \leq \sum_{i=1}^{n_0-1} a_i + \frac{e^{n+1-n_0c} - 1}{e^c - 1} e^{n_0c}.$$

segue dessa forma que $\limsup \frac{1}{n} \log(a_1 + \dots + a_n) \leq c$. □

Estamos agora em condições de demonstrar a proposição 3.6.6:

Demonstração. Se $x \in G$ temos que

$$(gAg^{-1})^n(x) = gA(g) \dots A^{n-1}(g)A^n(x)A^{n-1}(g^{-1}) \dots A(g^{-1})g^{-1}.$$

De fato:

$$\begin{aligned}
(gAg^{-1})^n(x) &= (gAg^{-1})^{n-1}(gA(x)g^{-1}) \\
&= (gAg^{-1})^{n-2}((gAg^{-1})(gA(x)g^{-1})) \\
&= (gAg^{-1})^{n-2}(gA(g)A^2(x)A(g^{-1})g^{-1}) \\
&= (gAg^{-1})^{n-3}((gAg^{-1})(gA(g)A^2(x)A(g^{-1})g^{-1})) \\
&= (gAg^{-1})^{n-3}(gA(g)A^2(g)A^3(x)A^2(g^{-1})A(g^{-1})g^{-1}) \\
&= \dots \\
&= gA(g) \dots A^{n-1}(g)A^n(x)A^{n-1}(g^{-1}) \dots A(g^{-1})g^{-1}.
\end{aligned}$$

Suponhamos primeiro que $A^{n_0} = Id$ para algum n_0 , então segue pelo lema 3.6.7 item (ii) que

$$\limsup \frac{1}{n} \log L_{\mathcal{G}}((gAg^{-1})^n(x)) \leq \limsup \frac{1}{n} \log L_{\mathcal{G}}(A^n(x)).$$

Se $A^n(g) \neq Id$ para cada $n \geq 1$, nós temos que $L_{\mathcal{G}}(A^n(g)) \geq 1$, para cada $n \geq 1$. Assim segue que $\limsup \frac{1}{n} \log L_{\mathcal{G}}(A^n(g)) \geq 0$. Pelo lema 3.6.7 itens (i) e (iii), obtemos

$$\limsup \frac{1}{n} \log L_{\mathcal{G}}((gAg^{-1})^n(x)) \leq \max(\limsup \frac{1}{n} \log L_{\mathcal{G}}(A^n(g)), \limsup \frac{1}{n} \log L_{\mathcal{G}}(A^n(x))).$$

Isso nos fornece $\gamma_{gAg^{-1}} \leq \gamma_A$, e por simetria, temos que $\gamma_{gAg^{-1}} = \gamma_A$. \square

Para uma superfície orientável M de gênero maior ou igual a 2, interpretamos $\pi_1(M)$ como o **grupo das transformações de recobrimento** (ou de **Möbius**) do recobrimento universal \widetilde{M} de M .

Se $f : M \rightarrow M$ é contínua, então existe um levantamento $\widetilde{f} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ de f . Um dado levantado \widetilde{f}_1 de f determina um endomorfismo $\widetilde{f}_{1\#} : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M)$ dado por

$$\widetilde{f}_1(\varphi^{-1}(\alpha)) = \widetilde{f}_{1\#}(\varphi^{-1}(\alpha))\widetilde{f}_1$$

para qualquer $\alpha \subset M$ e $\varphi^{-1}(\alpha) \subset \widetilde{M}$ com $\varphi : \widetilde{M} \rightarrow M$ sendo a aplicação de recobrimento.

Se \widetilde{f}_1 e \widetilde{f}_2 são dois levantamentos de f , então $\widetilde{f}_1 = \varphi^{-1}(\theta)\widetilde{f}_2$ para algum $\theta \subset M$ e $\varphi^{-1}(\theta) \subset \widetilde{M}$. Assim, segue que, para algum $\alpha \subset M$ e $\varphi^{-1}(\alpha) \subset \widetilde{M}$

$$\widetilde{f}_1 = \varphi^{-1}(\theta)\widetilde{f}_2$$

e então

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1(\varphi^{-1}(\alpha)) &= \varphi^{-1}(\theta)\tilde{f}_2(\varphi^{-1}(\alpha)) = \varphi^{-1}(\theta)\tilde{f}_{2\sharp}(\varphi^{-1}(\alpha))\tilde{f}_2 \\ &= \varphi^{-1}(\theta)\tilde{f}_{2\sharp}(\varphi^{-1}(\alpha))(\varphi^{-1}(\theta))^{-1}\tilde{f}_1,\end{aligned}$$

assim

$$\tilde{f}_{1\sharp} = \varphi^{-1}(\theta)\tilde{f}_{2\sharp}(\varphi^{-1}(\theta))^{-1}.$$

De acordo com a proposição 3.6.6 temos então que

$$\gamma_{\tilde{f}_{1\sharp}} = \gamma_{\tilde{f}_{2\sharp}}.$$

Logo podemos definir

$$\gamma_{f_{\sharp}} = \gamma_{\tilde{f}_{\sharp}}$$

para qualquer levantamento $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ de f , de forma que, f_{\sharp} é definida como a seguir:

Se f tem um ponto fixo $x_0 \in M$, então existe também uma aplicação $f_{\sharp} : \pi(M, x_0) \rightarrow \pi(M, x_0)$. O grupo $\pi(M, x_0)$ é isomorfo ao grupo $\pi_1(M)$ e f pode ser levantamento para \tilde{f} tal que $\tilde{f}_{\sharp} : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M)$ é identificado com $f_{\sharp} : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(M, x_0)$ por este isomorfismo.

Suponhamos agora que M possua uma métrica hiperbólica e que podemos dotar \tilde{M} de uma métrica hiperbólica que é o levantamento da métrica tomada inicialmente em M via uma aplicação de recobrimento $\varphi : \tilde{M} \rightarrow M$. A aplicação φ é então uma aplicação de recobrimento métrica e as transformações de recobrimento são isometrias. Temos o seguinte lema proposto por Milnor:

Lema 3.6.8 (Milnor). *Sejam M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2 e \tilde{M} sendo seu levantamento. Fixe $x_0 \in \tilde{M}$. Existem duas constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que para cada $g \in \pi_1(M)$, temos que*

$$c_1 L_G(g) \leq d(x_0, gx_0) \leq c_2 L_G(g).$$

Demonstração. Seja $\delta = \text{diam}(M)$, e defina $N \subset \tilde{M}$ por

$$N = \left\{ x \in \tilde{M} : d(x, x_0) \leq \delta \right\}.$$

Temos que $\varphi(N) = M$. Note que $\{gN\}_{g \in \pi_1(M)}$ é uma cobertura localmente finita de \widetilde{M} formada por conjuntos compactos. Escolha como um conjunto finito de geradores

$$\mathcal{G} = \{g \in \pi_1(M) : gN \cap N \neq \emptyset\}$$

e note que $g \in \mathcal{G}$ se, e somente se, $g^{-1} \in \mathcal{G}$. Suponha que $L_{\mathcal{G}}(g) = n$, então podemos escrever $g = g_1 \cdot \dots \cdot g_n$, com $g_i N \cap N \neq \emptyset$. Logo segue que $d(x_0, gx_0) \leq 2\delta n$. Obtemos assim

$$d(x_0, gx_0) \leq 2\delta L_{\mathcal{G}}(g)$$

e portanto temos que

$$d(x_0, gx_0) \leq c_2 L_{\mathcal{G}}(g).$$

Agora, tomemos $\nu = \min \{d(N, gN) : N \cap gN = \emptyset\}$; por compacidade $\nu > 0$. Seja k o menor inteiro tal que $d(x_0, gx_0) < k\nu$. Ao longo da menor geodésica ligando x_0 a gx_0 , tome $k + 1$ pontos $y_0 = x_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k = gx_0$ tal que $d(y_i, y_{i+1}) < \nu$ para $i = 0, \dots, k - 1$. Então, para $1 \leq i \leq k - 1$, escolha $y'_i \in N$ e $g_i \in \mathcal{G}$ tal que $y_i = g_i y'_i$ e tome $g_0 = e$ e $g_k = g$. Nós temos que $d(g_i y'_i, g_{i+1} y'_{i+1}) < \nu$, então $g_i^{-1} g_{i+1} \in \mathcal{G}$. Por $g = (g_0^{-1} g_1) \dots (g_{k-1}^{-1} g_k)$, nós obtemos $L_{\mathcal{G}}(g) < k$.

Uma vez que k é minimal, temos que

$$L_{\mathcal{G}}(g) \leq \frac{1}{\nu} d(x_0, gx_0) + 1 \leq \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} \right) d(x_0, gx_0),$$

e portanto temos que

$$c_1 L_{\mathcal{G}}(g) \leq d(x_0, gx_0)$$

onde $\mu = \min \{d(x_0, gx_0)\} : g \neq e, g \in \pi_1(M)$. □

Considere agora $f : M \rightarrow M$ e seja $\widetilde{f} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ sendo um levantamento de f . Obtemos, para cada $x_0 \in \widetilde{M}$,

$$\gamma_{f_{\sharp}} = \max_{g \in \pi_1(M)} \limsup \frac{1}{n} \log d(x_0, \widetilde{f}_{\sharp}^n(g)x_0),$$

pois aplicando o lema 3.6.8 visto acima, temos que

$$\begin{aligned} \sup_{g \in \pi(M)} \limsup \frac{1}{n} \log(c_1 L_{\mathcal{G}}(\widetilde{f}_{\sharp}^n g)) &\leq \sup_{g \in \pi(M)} \limsup \frac{1}{n} \log(d(x_0, \widetilde{f}_{\sharp}^n(g)x_0)) \\ &\leq \sup_{g \in \pi(M)} \limsup \frac{1}{n} \log(c_2 L_{\mathcal{G}}(\widetilde{f}_{\sharp}^n g)) \end{aligned}$$

e aplicando agora o lema 3.6.7 item (ii), seque que

$$\begin{aligned} \sup_{g \in \pi(M)} \limsup \frac{1}{n} \log(L_{\mathcal{G}}(\tilde{f}_{\#}^n g)) &\leq \sup_{g \in \pi(M)} \limsup \frac{1}{n} \log(d(x_0, \tilde{f}_{\#}^n(g)x_0)) \\ &\leq \sup_{g \in \pi(M)} \limsup \frac{1}{n} \log(L_{\mathcal{G}}(\tilde{f}_{\#}^n g)) \end{aligned}$$

o que nos fornece o resultado desejado.

Lema 3.6.9. *Sejam M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2 e \tilde{M} sendo seu levantamento. Dados $x, y \in \tilde{M}$ temos que*

$$\limsup \frac{1}{n} \log d(\tilde{f}^n(x), \tilde{f}^n(y)) \leq h(f).$$

Demonstração. Escolha um arco α de x até y . Se $y_1, \dots, y_l \in \alpha$ é um conjunto $(n+1, \epsilon)$ -abrangente para α e \tilde{f} , então

$$\tilde{f}^n(\alpha) \subset \bigcup_{i=1}^l B(\tilde{f}^n(y_i), \epsilon).$$

Uma vez que, $\tilde{f}^n(\alpha)$ é conexo, isto implica que $\text{diam}(\tilde{f}^n(\alpha)) < 2\epsilon l$. Então

$$d(\tilde{f}^n(x), \tilde{f}^n(y)) \leq 2\epsilon l.$$

Tomando l sendo minimal, temos que

$$d(\tilde{f}^n(x), \tilde{f}^n(y)) \leq 2\epsilon r_{\alpha}(n+1, \epsilon).$$

Logo nós obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log d(\tilde{f}^n(x), \tilde{f}^n(y)) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log(2\epsilon r_{\alpha}(n+1, \epsilon)) = \bar{r}_{\alpha}(\epsilon) \\ &\leq h_{\alpha}(\tilde{f}) \leq h(\tilde{f}) = h(f) \end{aligned}$$

□

Podemos agora provar o seguinte resultado:

Teorema 3.6.10. *Seja M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2. Se $f : M \rightarrow M$ é uma aplicação contínua, então*

$$\gamma_{f_{\#}} \leq h(f).$$

Demonstração. Uma vez que

$$\gamma_{f_{\sharp}} = \max_{g \in \pi_1(M)} \left(\limsup \frac{1}{n} \log d(x_0, \tilde{f}_{\sharp}^n(g)x_0) \right),$$

temos que provar que para cada $g \in \pi_1(M)$:

$$\limsup \frac{1}{n} \log d(x_0, \tilde{f}_{\sharp}^n(g)x_0) \leq h(f).$$

Temos, pela desigualdade triangular, que

$$\begin{aligned} d(x_0, \tilde{f}_{\sharp}^n(g)x_0) &\leq d(x_0, \tilde{f}^n(x_0)) \\ &\quad + d(\tilde{f}^n(x_0), \tilde{f}_{\sharp}^n(g)\tilde{f}^n(x_0)) \\ &\quad + d(\tilde{f}_{\sharp}^n(g)\tilde{f}^n(x_0), \tilde{f}_{\sharp}^n(g)(x_0)). \end{aligned}$$

Uma vez que, $\tilde{f}_{\sharp}^n(g)\tilde{f}^n = \tilde{f}^n g$, e as transformações de recobrimento são isometrias, obtemos

$$d(x_0, \tilde{f}_{\sharp}^n(g)x_0) \leq 2d(x_0, \tilde{f}^n(x_0)) + d(\tilde{f}^n(x_0), \tilde{f}^n g(x_0)).$$

Observe ainda que

$$d(x_0, \tilde{f}^n(x_0)) \leq d(x_0, \tilde{f}(x_0)) + d(\tilde{f}(x_0), \tilde{f}^2(x_0)) + \dots + d(\tilde{f}^{n-1}(x_0), \tilde{f}^n(x_0)).$$

Aplicando o lema 3.6.9 e o lema 3.6.7 (juntamente com o fato de que $h(f) \geq 0$), obtemos

$$\limsup \frac{1}{n} \log d(x_0, \tilde{f}_{\sharp}^n(g)x_0) \leq h(f).$$

□

Observação 3.6.11. *Seja M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2. Para cada $\alpha \subset \pi_1(M, x_0)$, denotamos por $[\alpha]$ a classe de laços homotópicos a α . Se M tem uma métrica hiperbólica, seja $l([\alpha])$ o comprimento mínimo de um laço (suave) nesta classe. Se $f : M \rightarrow M$ é contínua, $f[\alpha]$ está bem definida como uma classe de homotopia livre formada por laços. Sejam*

$$G_f([\alpha]) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(l(f^n[\alpha]))$$

e

$$G_f = \sup_{\alpha} G_f([\alpha]).$$

Afirmamos que

$$G_f \leq \gamma_{f_{\sharp}}.$$

De fato, temos que $l(f^n[\alpha]) \leq d(x_0, \tilde{f}_{\sharp}^n(\alpha)(x_0))$, uma vez que a menor geodésica unindo x_0 a $\tilde{f}_{\sharp}^n(\alpha)(x_0)$ tem uma imagem em M que representa $f^n[\alpha]$.

Observação 3.6.12. Se $x \in M$ e ρ é um caminho juntando x a $f(x)$, teremos que $\rho_{\sharp} : \pi_1(M, f(x)) \rightarrow \pi_1(M, x)$ é um homeomorfismo. Uma vez que, $f_{\sharp} : \pi_1(M, x) \rightarrow \pi_1(M, f(x))$, a composição $\rho_{\sharp} \circ f_{\sharp} : \pi_1(M, x) \rightarrow \pi_1(M, x)$ é dada por

$$(\rho_{\sharp} \circ f_{\sharp})([\alpha]) = [\rho^{-1}\gamma\rho]$$

é um homeomorfismo de $\pi_1(M, x)$ em si mesmo. Assim, este homeomorfismo pode ser identificado com \tilde{f}_{\sharp} por um levantamento \tilde{f} de f .

3.7 Subshifts de tipo finito

Seja $A_{k \times k} = (a_{ij})_{k \times k}$ tal que $a_{ij} = 0$ ou 1 , para $1 \leq i, j \leq k$, i.e., A é uma matriz “0-1”. Tal matriz A determina “subshifts de tipo finito” que são um caso particular e importante de subconjuntos invariantes de X como será tratado a seguir.

Sejam $S_k = \{1, \dots, k\}$ um conjunto de símbolos e $X = \sum(k) = \prod_{i=-\infty}^{\infty} S_k^i$ onde $S_k^i = S_k$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Dotamos então S_k com a topologia discreta e $\sum(k)$ com a topologia produto. O conjunto $\sum_A \subset \sum(k)$ é fechado e é dado por

$$\sum_A = \{b = \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : a_{b_i b_{i+1}} = 1, \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

Note que pela definição dada de \sum_A segue que a matriz $A_{k \times k}$ fornece as transições permitidas.

Pictoricamente, imaginamos k caixas e um ponto que em um tempo discreto “ n ” possa estar em qualquer uma das caixas. A sequência bi-infinita representa todas os possíveis histórias dos pontos. Se nós adicionamos a restrição de que um ponto pode se mover de

uma caixa i para uma caixa j se, e somente se, $a_{ij} = 1$, então o conjunto de todas as possíveis histórias é precisamente \sum_A .

Definição 3.7.1. Um *subshift de tipo finito* $\sigma_A : \sum_A \longrightarrow \sum_A$ e dado por

$$\sigma_A(\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}) = \{b'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

onde $b'_n = b_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 3.7.2. Segue que σ_A é contínuo. De fato note que $\sigma_A^{-1}(\sum_A) = \sum_A \subset \sum(k)$ é fechado.

Definição 3.7.3. Seja $C_i \subset \sum(k)$ com $C_i = \{\underline{x} \in \sum(k) : x_0 = i\}$. Seja $D_i \subset C_i \cap \sum_A$, então

$$D = \{D_1, \dots, D_k\}$$

é uma **cobertura aberta** de \sum_A por elementos disjuntos. Para alguma matriz $B_{k \times k} = (b_{ij})_{k \times k}$, nos definimos a **norma** de B por

$$\|B\| = \sum_{i,j=1}^k |b_{ij}|.$$

Considere além da cobertura (ou partição) D também as coberturas (ou partições) $D^l = \bigvee_{i=0}^{l-1} f^{-i} D^l$, $l \geq 1$, que nada mais são do que caixas com l símbolos fixados. O diâmetro de D^l tende a zero quando l tende ao infinito, portanto a entropia topológica pode ser calculada por

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(f, D^n).$$

Observe também que

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i} D^l = \bigvee_{i=0}^{n+l-2} f^{-i} D^l.$$

Assim, usando o teorema 3.5.6, temos que

$$\begin{aligned} h(f, D^l) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N_n(f, \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i} D^l) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N_n(f, \bigvee_{i=0}^{n+l-2} f^{-i} D^l) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+l-2}{n} \frac{1}{n+l-2} \log N_n(f, \bigvee_{i=0}^{n+l-2} f^{-i} D^l) \\ &= h(f, D), \end{aligned}$$

e portanto segue que

$$h(f, D) = h(f).$$

Como todos os elementos de D^n são essenciais para a cobertura, então

$$N_n(f, D^n) = k^n,$$

logo

$$h(f) = \log k$$

para os shifts com k símbolos.

Para determinar a entropia topológica de $\sigma_A = f|_{\Sigma_A}$ precisamos calcular o número θ_n , isto é, o número de sequências permitidas de tamanho n . Mas uma sequência de símbolos (j_0, \dots, j_{n-1}) é permitida se, e somente se,

$$a_{j_0 j_1} a_{j_1 j_2} \dots a_{j_{n-2} j_{n-1}} = 1.$$

Assim

$$\theta_n = \sum_{(j_0, \dots, j_{n-1})} a_{j_0 j_1} a_{j_1 j_2} \dots a_{j_{n-2} j_{n-1}}.$$

Porém

$$\sum_{(j_0, \dots, j_{n-2})} a_{j_0 j_1} a_{j_1 j_2} \dots a_{j_{n-2} j_{n-1}} = a_{j_0 j_{n-1}}^{(n-1)},$$

que é a entrada (j_0, j_{n-1}) da matriz A^{n-1} , implicando que θ_n é a soma das entradas da matriz A^{n-1} . Se adotarmos como norma da matriz aquela definida anteriormente, então segue que

$$\theta_n = \|A^{n-1}\|.$$

Logo para σ_A e D como definidos anteriormente, temos que

$$\begin{aligned} h(\sigma_A) = h(\sigma_A, D) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A^{n-1}\| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \log \|A^{n-1}\|^{1/n}. \end{aligned}$$

O “teorema de Perron-Frobenius”, conforme [6], garante que uma matriz não-negativa sempre tem um autovalor não-negativo λ , com um autovetor de entradas não-negativas, que é, em valor absoluto, maior ou igual a qualquer outro autovalor.

Definição 3.7.4. O autovalor λ especificado acima é o maior autovalor positivo de A e é reconhecido como **raio espectral de A** e ainda é igual ao limite de $\|A^{n-1}\|^{1/n}$.

Portanto segue que teremos dessa forma que

$$h(\sigma_A) = \log \lambda.$$

A discussões desta seção nos fornece portanto o seguinte resultado:

Proposição 3.7.5. Para qualquer subshift de tipo finito $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$, nos temos que

$$h(\sigma_A) = \log \lambda,$$

onde λ é o raio espectral de A .

3.8 A entropia topológica dos homeomorfismos pseudo-Anosov

Lembre que para qualquer curva simples fechada não-trivial α temos que sendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (l_{d_r}(f^n(\alpha)))^{1/n} = \lambda$$

de acordo como a proposição 3.2.13 e como

$$G_f([\alpha]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \log(l(f^n[\alpha]))^{1/n}$$

pela observação 3.6.11 segue que

$$\log \lambda = G_f([\alpha]).$$

Ainda, como pela observação 3.6.11 temos que

$$G_f = \sup_{\alpha} G_f([\alpha])$$

segue que

$$\log \lambda \leq G_f.$$

Proposição 3.8.1. *Sejam M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2 e $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo pseudo-Anosov, então*

$$h(f) = \gamma_{f_{\sharp}}.$$

Em particular, f tem a menor entropia que qualquer elemento em sua classe de homotopia. Além disso,

$$h(f) = \log \lambda,$$

onde λ é o coeficiente de dilatação de f .

Demonstração. Uma vez que, $\log \lambda \leq G_f$, é suficiente mostrar que $h(f) \leq \log \lambda$ para um homeomorfismo pseudo-Anosov $f : M \rightarrow M$. Para este propósito, encontramos um subshift de tipo finito $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ e uma aplicação sobrejetiva contínua $\theta : \Sigma_A \rightarrow M$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_A & \xrightarrow{\sigma_A} & \Sigma_A \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

é comutativo (i.e., θ é uma semiconjugação). Como pela proposição 3.7.5

$$\log \lambda = \log(\text{raio espectral } A) = h(\sigma_A)$$

para λ sendo o coeficiente de dilatação, temos que

$$\log \lambda \leq G_f \leq \gamma_{f_{\sharp}} \leq h(f) \leq h(\sigma_A),$$

onde a segunda, a terceira, e a quarta desigualdades acima seguem pela observação 3.6.11, pelo teorema 3.6.10, e pelo teorema de Bowen, respectivamente. Assim, segue que

$$\log \lambda \leq h(f) \leq \log \lambda.$$

□

No que se segue, construiremos a matriz A e a aplicação θ usando as “partições de Markov”. Antes, contudo, precisamos de algumas definições.

Definição 3.8.2. Um subconjunto R de uma superfície orientável M de gênero maior ou igual a 2 é chamado de (F^s, F^u) -**retângulo**, se existe uma imersão $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ cuja imagem é R e tal que:

- (i) $\varphi|_{(0,1) \times (0,1)}$ é um mergulho;
- (ii) para qualquer $t \in [0, 1]$, $\varphi(t \times [0, 1])$ está incluído numa união finita de folhas e singularidades de (F^s, μ_s) , e de fato em uma folha se $t \in (0, 1)$; e
- (iii) para qualquer $t \in [0, 1]$, $\varphi([0, 1] \times t)$ está incluído numa união finita de folhas e singularidades de (F^u, μ_u) , e de fato em uma folha se $t \in (0, 1)$.

Adotaremos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} \text{int}(R) &= \varphi((0, 1) \times (0, 1)) \\ \partial_{F^s}^0 R &= \varphi(\{0\} \times [0, 1]) \\ \partial_{F^s}^1 R &= \varphi(\{1\} \times [0, 1]) \\ \partial_{F^s} R &= \partial_{F^s}^0 R \cup \partial_{F^s}^1 R \end{aligned}$$

e analogamente, definimos $\partial_{F^u}^0 R$, $\partial_{F^u}^1 R$ e $\partial_{F^u} R$.

Definição 3.8.3. Nós chamaremos um conjunto da forma $\varphi(\{t\} \times (0, 1))$ (respectivamente $\varphi((0, 1) \times \{t\})$) de uma F^s -**fibra** (respectivamente uma F^u -**fibra**) de R . Um (F^s, F^u) -retângulo é dito ser **bom** se φ é um mergulho.

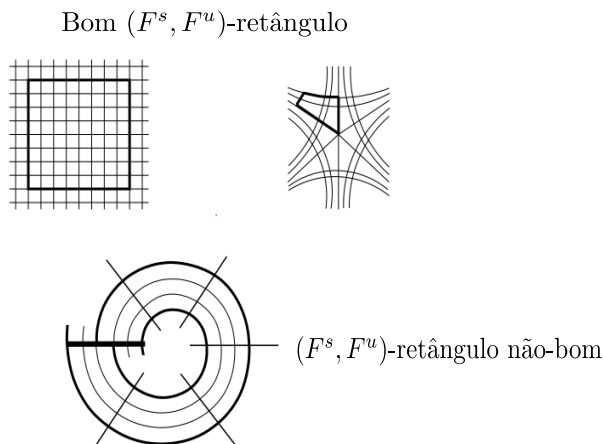


Figura 3.10: (F^s, F^u) -retângulo bom e não-bom.

Observação 3.8.4. *Se R é um bom (F^s, F^u) -retângulo, um ponto $x \in R$ que está contido em somente uma F^s -fibra, será denotado por $F^s(x, R)$. Analogamente, definimos $F^u(x, R)$.*

Observação 3.8.5. *Se R é um F^u -retângulo e $\partial_\tau^0 R$ e $\partial_\tau^1 R$ estão contidos na união de F^s -folhas e singularidades, é fácil ver que R é de fato um (F^s, F^u) -retângulo.*

Definição 3.8.6. *Se R é um (F^s, F^u) -retângulo, definimos o **comprimento** de R por*

$$\mathcal{W}(R) = \max \{ \mu_u(F^s\text{-fibra}), \mu_s(F^u\text{-fibra}) \}.$$

Lema 3.8.7. *Existe $\epsilon > 0$ tal que, se R é um (F^s, F^u) -retângulo com $\mathcal{W}(R) \leq \epsilon$, então este é um bom (F^s, F^u) -retângulo.*

Demonstração. Se um (F^s, F^u) -retângulo está contido em uma carta coordenada de uma folheação mensurável, então este é automaticamente um (F^s, F^u) -retângulo. A existência de ϵ segue da compacidade da superfície orientável M de gênero maior ou igual a 2 que o (F^s, F^u) -retângulo está contido. \square

Lema 3.8.8. *Existe $\epsilon > 0$ tal que se α (respectivamente β) é um arco contido em uma união finita de folhas e singularidades de (F^s, μ_s) (respectivamente (F^u, μ_u)) com $\mu_u(\alpha) < \epsilon$ (respectivamente $\mu_s(\beta) < \epsilon$), então a interseção de α e β é no máximo um ponto.*

Definição 3.8.9. *Seja M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2. Uma **partição de Markov** para um homeomorfismo pseudo-Anosov $f : M \rightarrow M$ é uma coleção de (F^s, F^u) -retângulos $R = \{R_1, \dots, R_k\}$ tais que:*

- (1). R_i é um bom retângulo;
- (2). $\bigcup_{i=1}^k R_i = M$;
- (3). $\text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset$ para $i \neq j$;
- (4). Se $x \in \text{int}(R_i)$ e $f(x) \in \text{int}(R_j)$, então

$$f(F^s(x, R_i)) \subset F^s(f(x), R_j)$$

e

$$f^{-1}(F^u(f(x), R_j)) \subset F^u(x, R_i),$$

(5). Se $x \in \text{int}(R_i)$ e $f(x) \in \text{int}(R_j)$, então

$$f(F^u(x, R_i)) \cap R_j = F^u(f(x), R_j)$$

e

$$f^{-1}(F^s(x, R_j)) \cap R_i = F^s(x, R_i).$$

Isto significa que $f(R_i)$ cruza R_j apenas uma vez como na figura a seguir.

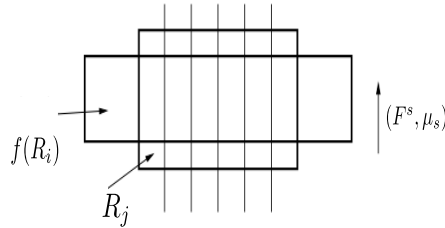


Figura 3.11: $f(R_i)$ cruzando R_j com relação a folheação instável.

Dada uma partição de Markov $R = \{R_1, \dots, R_k\}$, construímos um subshift de tipo finito $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ e uma aplicação $\theta : \Sigma_A \rightarrow M$ como segue. Seja

$$A_{k \times k} := \begin{cases} a_{ij} = 1, & \text{se } f(\text{int}(R_i)) \cap \text{int}(R_j) \neq \emptyset \\ a_{ij} = 0, & \text{se n caso contrario.} \end{cases}$$

Se $\underline{b} \in \Sigma_A$ então

$$\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{-1}(R_{b_i}) \neq \emptyset$$

e de fato consiste de um único ponto. Isto segue de seguinte lema:

Lema 3.8.10. (i) Suponha que $a_{ij} = 1$, então $f(R_i) \cap R_j$ é um bom (F^s, F^u) -retângulo que é a união de F^u -fibras de R_j .

(ii) Suponha mais ainda que \mathcal{C} é um (F^s, F^u) -retângulo contido em R_i que é a união de F^s -fibras de R_i . Então $f(\mathcal{C}) \cap R_j$ é um (F^s, F^u) -retângulo que é a união de F^u -fibras de R_j .

(iii) Dado um $\underline{b} \in \Sigma_A$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\bigcap_{i=-n}^n f^{-1}(R_{b_i})$$

é um (F^s, F^u) -retângulo. Mais ainda, temos que

$$\mathcal{W} \left(\bigcap_{i=-n}^n f^{-i}(R_{b_i}) \right) \leq \lambda^{-n} \max \{ \mathcal{W}(R_1), \dots, \mathcal{W}(R_k) \}$$

Demonstração. (i) Uma vez que $a_{ij} = 1$, podemos encontrar um $x \in \text{int}(R_i) \cap f^{-1}(\text{int}(R_j))$. Nós temos que $f(F^s(x, R_i)) \subset F^s(f(x), R_j) \subset R_j$, pelo item (3) da definição de Partição de Markov. Uma vez que cada F^u -fibra de R_i intersecta $F^s(x, R_i)$, temos que a imagem de cada F^u -fibra de R_i intersecta R_j . Mais ainda, pela item (5) da definição de partição de Markov temos que $f(R_i \setminus \partial_{F^u} R_i) \cap R_j$ é a união de F^u -fibras de R_j , então

$$f(R_i) \cap R_j = \overline{f(R_i - \partial_{F^u} R_i) \cap R_j}$$

é também a união de F^u -fibras de R_j . Isto prova o presente item.

(ii) Este item segue em análogo ao anterior.

(iii) Observamos que segue por indução em n usando o item (ii) que cada conjunto da forma $f^n(R_{b_i}) \cap f^{n-1}(R_{b_{i+1}}) \cap \dots \cap R_{b_{i+n}}$ é um (F^s, F^u) -retângulo que é a união de F^u -fibras de $R_{b_{i+n}}$. Em particular,

$$\bigcap_{i=-n}^n f^{-i}(R_{b_i})$$

é um (F^s, F^u) -retângulo em R_{b_0} . A estimativa do comprimento \mathcal{W} é clara. \square

Pelo lema anterior, se $\underline{b} \in \sum_A$, o conjunto $\bigcap f^{-i}(R_{b_i})$ é a interseção de uma sequência decrescente de conjuntos compactos não-vazios, nominalmente os conjuntos

$$\bigcap_{i=-n}^n f^{-i}(R_{b_i})$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma $\bigcap f^{-i}(R_{b_i})$ é não-vazio. Este é redutível a um ponto porque

$$\mathcal{W} \left(\bigcap_{i=-n}^n f^{-i}(R_{b_i}) \right)$$

tende a zero quando n vai para o infinito.

A aplicação $\theta : \sum_A \longrightarrow M$ dada por

$$\theta(\underline{b}) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{-i}(R_{b_i})$$

está bem definida, é contínua e faz com que o seguinte diagrama seja comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_A & \xrightarrow{\sigma_A} & \Sigma_A \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Vamos mostrar agora que θ é sobrejetivo. Primeiro observe que, para cada $i = 1, \dots, k$, segue que $\overline{\text{int}(R_i)} = R_i$. Portanto

$$V = \bigcup_{i=1}^k \text{int}(R_i)$$

é um conjunto aberto denso em M . Pelo teorema de categoria de Baire,

$$U = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{-i}(V)$$

é denso em M . Se $x \in U$, então para cada $n \in \mathbb{Z}$, o ponto $f^n(x)$ está em um único $\text{int}(R_{b_n})$ e $\underline{b} = \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é um elemento de Σ_A . É claro que $\theta(\underline{b}) = x$. Assim $U \subset \theta(\Sigma_A)$. Como Σ_A é compacto e f é contínua, temos que $\theta(\Sigma_A) = M$. Dessa forma, segue que θ é sobrejetiva e portando uma “semiconjugação”, já que, faz com que o diagrama acima seja comutativo.

Até agora, obtemos que

$$\log \lambda \leq G_f \leq \gamma_{f^\sharp} \leq h(f) \leq h(\sigma_A) = \log(\text{raio espectral de } A).$$

Resta mostrar que:

Proposição 3.8.11. *O coeficiente de dilatação de um homeomorfismo pseudo-Anosov $f : M \rightarrow M$ é igual ao raio espectral de uma matriz $A_{k \times k}$ que da origem a um subshift de tipo finito.*

Demonstração. Para ver isso, tome $y_i = \mu_u(F^s\text{-fibra de } R_i)$; é claro que esta quantidade é independente das F^s -fibras de R_i e também $y_i > 0$ pois uma medida é sempre positiva.

Sendo λ o coeficiente de dilatação nós temos a seguinte igualdade trivial:

$$y_i = \sum_{j=1}^k \frac{y_j}{\lambda} a_{ij},$$

já que, estamos em uma folheação instável, de maneira que temos

$$\lambda y_i = \sum_{j=1}^k y_j a_{ij}$$

(em particular λ é um autovalor de A). Então, nós obtemos

$$\lambda y_i \geq \left(\sum_{j=1}^k a_{ij} \right) \min_i y_i.$$

Isto nos fornece

$$\lambda \left(\sum_j y_j \right) \geq \|A\| \min_i y_i$$

Da mesma forma, nós obtemos para cada $n \geq 2$:

$$\lambda^n \left(\sum_j y_j \right) \geq \|A^n\| \min_i y_i.$$

Portanto,

$$\lambda \geq \|A^n\|^{1/n} \left(\frac{\min(y_1, \dots, y_k)}{\sum_j y_j} \right)^{1/n}.$$

Uma vez que, $\min(y_1, \dots, y_k) > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\min(y_1, \dots, y_k)}{\sum_j y_j} \right)^{1/n} = 1.$$

Obtemos assim que

$$\lambda \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} = \text{raio espectral de } A.$$

Uma vez que λ é um autovalor de A , nós obtemos que

$$\lambda = \text{raio espectral de } A.$$

□

3.9 Construção de uma partição de Markov para um homeomorfismo pseudo-Anosov

Proposição 3.9.1. *Sejam M uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2 e $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo pseudo-Anosov. Então f tem uma partição de Markov.*

Demonstração. Tomemos um bom sistema transversais para (F^u, μ_u) contidas em F^s -folhas e singularidades, para construir uma sistema \mathcal{R} de F^u -retângulos R_1, \dots, R_l , tal que:

$$(i) \bigcup_{i=1}^l R_i = M;$$

$$(ii) \text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset, \text{ para } i \neq j;$$

$$(iii) f^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^l \partial_{F^u} R_i \right) \subset \bigcup_{i=1}^l \partial_{F^u} R_i \text{ e } f^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^l \partial_{F^s} R_i \right) \subset \bigcup_{i=1}^l \partial_{F^s} R_i$$

Pela observação 3.8.5, os R_i 's com $i = 1, \dots, l$ são (F^s, F^u) -retângulos uma vez que o bom sistema de transversais está contido em F^s -folhas e singularidades.

Definimos para cada n uma família de (F^s, F^u) -retângulos $\{\mathcal{R}_n\}$ da seguinte forma: os (F^s, F^u) -retângulos de $\{\mathcal{R}_n\}$ serão os fechos das componentes conexas de conjuntos abertos não-vazios contidos em

$$\bigcup_{i=-n}^n f^i(\text{int}(R)) = \left\{ \bigcap_{i=-n}^n f^i(\text{int}(R_{a_i})) : R_{a_i} \in \mathcal{R} \right\}.$$

É fácil ver que \mathcal{R}_n continua satisfazendo as propriedades (i), (ii) e (iii) dadas acima pois os (F^s, F^u) -retângulos que formam \mathcal{R}_n são ao mesmo tempo F^u -retângulos. Mais ainda, se $R \in \mathcal{R}_n$, temos que

$$\mathcal{W}(R) \leq \frac{1}{\lambda} \max \{ \mathcal{W}(R_i) : R_i \in \mathcal{R} \},$$

um vez que, o comprimento será calculado com relação a folheação instável.

Em particular, pelo lema 3.8.7, para n suficientemente grande, cada (F^s, F^u) -retângulo em \mathcal{R}_n é bom.

Afirmamos que para n suficientemente grande \mathcal{R}_n é uma partição de Markov. De fato, devemos verificar os itens (4) e (5) da definição de partição de Markov. Notemos que o item (4) segue da propriedade (iii) dada acima (seguindo a ideia do item (6) do lema 3.4.4 no que se refere a pré-partição de Markov). Pelo lema 3.8.8, se n é suficientemente grande e $R, R' \in \mathcal{R}_n$, então se $x \in R$ e $x \in f(F^u(x, R))$ intersectam cada F^s -fibra de R' em no máximo um ponto. O item (5) segue da combinação deste fato com o item (4). \square

3.10 O teorema de classificação de Thurston

Tendo em mente todos os conceitos até aqui estudados somos capazes agora de enunciar e entender o teorema de classificação de homeomorfismo de superfícies proposto por William P. Thurston.

Teorema 3.10.1 (Thurston). *Seja $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo onde M é uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2. Sobre isotopia, f é de um dos seguintes tipos:*

- (1) *de ordem finita;*
- (2) *reduzível; ou*
- (3) *pseudo-Anosov.*

Demonstração. Uma demonstração extremamente não-trivial é dada em [3]. □

Exemplo 3.10.2. *Seja $f : M \rightarrow M$ como nas hipóteses do teorema de Thurston. Logo f é isotópico a um dos seguintes tipos:*

- (1) *De ordem finita, caso em que $f^2(S_2) = S_2$.*
- (2) *Reduzível, caso em que $f(\eta_i) = \eta_i$, onde η_i é uma coleção finita de curvas essenciais mutuamente disjuntas.*
- (3) *Pseudo-Anosov, caso onde $f(S_1) = S_1$, $f(S_3) = S_4$ e $f(S_4) = S_3$.*

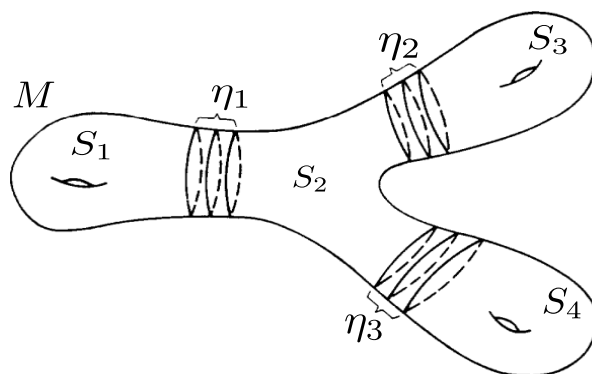


Figura 3.12: Exemplo da aplicação do teorema de Thurston.

Capítulo 4

O teorema de Handel

Na seção 4.1 iremos definir o conceito de métrica equivariante e tratar de alguns resultados envolvendo tal definição. Na seção 4.2 introduziremos o conceito de sombreamento global e trataremos de resultados relacionados a essa definição. Na seção 4.3 enunciaremos e demonstraremos o teorema de Handel o qual figura como o principal resultado deste trabalho, e que nos diz que os pontos periódicos de um homeomorfismo pseudo-Anosov $f : M \rightarrow M$, definido sobre uma superfície orientável de gênero maior ou igual a 2, não podem ser eliminados usando isotopias. Segue portanto que, a entropia topológica de uma aplicação $g : M \rightarrow M$ homotópica a f é maior ou igual a entropia topológica de f .

4.1 Métrica equivariante

No que se segue sempre teremos que $f : M \rightarrow M$ será um homeomorfismo pseudo-Anosov sobre uma superfície orientável M de gênero maior ou igual a 2 e $g : M \rightarrow M$ será uma aplicação que é homotópica a f . Sejam também \widetilde{M} o recobrimento universal de M e $\varphi : \widetilde{M} \rightarrow M$ a aplicação de recobrimento.

Definição 4.1.1. *Uma métrica \widetilde{D} é dita ser **equivariante** se para todo $r \in \text{Aut}(\widetilde{M})$ e quaisquer pontos $\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{M}$, temos que*

$$\widetilde{D}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \widetilde{D}(r.\tilde{x}, r.\tilde{y}).$$

Equivalentemente, \tilde{D} é uma métrica **equivariante** se, e somente se, é o levantamento de uma métrica D em M para \tilde{M} .

Observação 4.1.2. Notemos que, em nossas discussões, \tilde{M} será sempre \mathbb{D} ou \mathbb{H} .

A próxima propriedade nos diz que nenhum levantamento de qualquer iterada de f pode fixar dois pontos distintos em \tilde{M} .

Propriedade 4.1.3. Existem um número $\lambda > 1$ (coeficiente de dilatação) e uma métrica equivariante \tilde{D} em \tilde{M} tal que

$$\tilde{D} = \sqrt{\tilde{D}_s^2 + \tilde{D}_u^2},$$

onde $\tilde{D}_u : \tilde{M} \times \tilde{M} \rightarrow [0, \infty]$ e $\tilde{D}_s : \tilde{M} \times \tilde{M} \rightarrow [0, \infty]$ são funções equivariantes satisfazendo

$$\tilde{D}_u(f(\tilde{x}_1), f(\tilde{x}_2)) = \lambda \tilde{D}_u(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

e

$$\tilde{D}_s(f^{-1}(\tilde{x}_1), f^{-1}(\tilde{x}_2)) = \lambda \tilde{D}_s(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

para todo $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{M}$ e todo levantamento \tilde{f} de f .

Observação 4.1.4. (i) As folheações estável e instável para f são levantadas para as folheações estável e instável para \tilde{f} , respectivamente. Dados $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{M}$, $\tilde{D}_s(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ é definido como sendo o comprimento mínimo, com respeito a medida transversal na folheação estável de \tilde{f} , do arco conectando \tilde{x}_1 a \tilde{x}_2 . Analogamente definimos \tilde{D}_u com respeito a folheação instável.

(ii) Para todo recobrimento universal \tilde{M} de M teremos que $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ é um levantamento de f . Como g é homotópica a f , existe um único levantamento $\tilde{g} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ que é homotopicamente equivariante a \tilde{f} .

Propriedade 4.1.5. A ação (à esquerda) sobre o grupo fundamental $\pi_1(M, x_o)$ induzida por f nas classes de homotopias livres em M não tem órbitas periódicas. Em outras palavras, para toda classe de curvas $[\alpha]$ segue que uma curva em $[f^n(\alpha)]$ não é homotópica a $\alpha \subset M$, para $\forall n \geq 1$, pois f é um homeomorfismo pseudo-Anosov.

Demonstração. Suponhamos que exista uma curva $\alpha \subset M$ tal que $[f^n(\alpha)] \sim [\alpha]$. Então f é homotópica a um g tal que $g^n(\alpha) = \alpha$, ou seja, a classe de isotopias de f é redutível. Absurdo, pois um homeomorfismo pseudo-Anosov não é redutível. \square

Definição 4.1.6. *Em nosso trabalho caminhos em $\text{Homeo}(M)$ serão isotopias e componentes conexas de $\text{Homeo}(M)$ serão classes de isotopias. Se f é isotópica a g via isotopia H_t , usando a notação já introduzida, temos que $H_t : f \cong g$. Dessa forma, levantamentos \tilde{f} e \tilde{g} de f e g , respectivamente, são **isotopicamente equivariantes** se eles são isotópicos via um levantamento de H_t definido em M . A notação adotada será $\tilde{H}_t : \tilde{f} \cong \tilde{g}$.*

4.2 Sombreamento global

Definição 4.2.1 (A. B. Katok). *A f -órbita de $x \in M$ é **K -sombreada globalmente** pela g -órbita de $y \in M$ se existem levantamentos $\tilde{x} \in \tilde{M}$ de x e $\tilde{y} \in \tilde{M}$ de y tal que*

$$\tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{x}), \tilde{g}^k(\tilde{y})) \leq K,$$

para $\forall k \in \mathbb{Z}$ onde $K > 0$ e dita **constante de sombreamento**. A notação utilizada para tal será $(f, x) \sim^K (g, y)$ ou $(f, x) \sim (g, y)$ quando a constante K não for especificada.

Observação 4.2.2. *Note que:*

(a) $(f, x) \sim^K (g, y)$ é uma relação de equivalência.

De fato, segue que \sim^K é uma relação:

(i) *Reflexiva, pois para uma f -órbita de $x \in M$ com $\tilde{x} \in \tilde{M}$ sendo um levantamento de x temos que $0 = \tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{x}), \tilde{f}^k(\tilde{x})) < K$, onde K é a constante de sombreamento global, e assim temos $(f, x) \sim^K (f, x)$;*

(ii) *Simétrica, pois sendo a f -órbita de $x \in M$ K -sombreada globalmente pela g -órbita de $y \in M$ existem levantamentos \tilde{x} e \tilde{y} de x e y , respectivamente, tais que $\tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{x}), \tilde{g}^k(\tilde{y})) = \tilde{D}(\tilde{g}^k(\tilde{y}), \tilde{f}^k(\tilde{x}))$ de onde obtemos $\tilde{D}(\tilde{g}^k(\tilde{y}), \tilde{f}^k(\tilde{x})) < K$ e assim temos que se $(f, x) \sim^K (g, y)$, então $(g, y) \sim^K (f, x)$; e*

(iii) *Transitiva, pois supondo que $(f, x) \sim^K (g, y)$ e $(g, y) \sim^K (h, z)$ segue pela definição 4.2.1 que sendo $\tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{x}), \tilde{g}^k(\tilde{y})) < \frac{K}{2}$ e $\tilde{D}(\tilde{g}^k(\tilde{y}), \tilde{h}^k(\tilde{z})) < \frac{K}{2}$ temos que $\tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{x}), \tilde{h}^k(\tilde{z})) \leq$*

$\tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{x}), \tilde{g}^k(\tilde{y})) + \tilde{D}(\tilde{g}^k(\tilde{y}), \tilde{h}^k(\tilde{z})) < \frac{K}{2} + \frac{K}{2} = K$ e assim temos que se $(f, x) \sim^K (g, y)$ e $(g, y) \sim^K (h, z)$, então $(f, x) \sim^K (h, z)$.

Portanto a relação \sim^K é uma relação de equivalência.

(b) $(f, x) \sim^K (g, y)$ não depende da escolha da métrica equivariante tomada na definição do sombreamento global.

Definição 4.2.3. Se $x \in M$ é um ponto fixo de f^n e $\tilde{x} \in \tilde{M}$ é um levantamento de x , então $\tilde{f}^n(\tilde{x}) = s\tilde{x}$, para algum recobrimento transladado (i.e. aplicação de Möbius) s de \tilde{M} . Analogamente, se $y \in M$ é um ponto fixo de g^n e $\tilde{y} \in \tilde{M}$ é um levantamento de y , então $\tilde{g}^n(\tilde{y}) = t\tilde{y}$, para algum recobrimento transladado t de \tilde{M} . Diremos que (f^n, x) e (g^n, y) são **Nielsen equivalentes** se existem \tilde{x} e \tilde{y} , como acima, tais que $s = t$. Designaremos esta relação por $(f^n, x) \sim^{NE} (g^n, y)$. As classes de equivalência com respeito a esta relação são chamadas **classes de Nielsen**.

Lema 4.2.4. Se $x \in M$ é um ponto fixo de f^n e $y \in M$ é um ponto fixo de g^n , então $(f^n, x) \sim^{NE} (g^n, y)$ se, e somente se, $(f, x) \sim^K (g, y)$.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que $\tilde{f}^n(\tilde{x}) = t\tilde{x}$ e $\tilde{g}^n(\tilde{y}) = t\tilde{y}$, i.e., $(f^n, x) \sim^{NE} (g^n, y)$. Disso temos ainda que $\tilde{x} = \tilde{f}^{-n}(t\tilde{x})$ e $\tilde{y} = \tilde{g}^{-n}(t\tilde{y})$, aplicando as respectivas inversas. Logo segue que

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{x}), \tilde{g}^k(\tilde{y})) &= \tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{f}^{-n}(t\tilde{x})), \tilde{g}^k(\tilde{g}^{-n}(t\tilde{y}))) \\ &= \tilde{D}(\tilde{f}^{k-n}(t\tilde{x}), \tilde{g}^{k-n}(t\tilde{y})) \\ &= \tilde{D}(t'\tilde{f}^{k-n}(\tilde{x}), t'\tilde{g}^{k-n}(\tilde{y})) \\ &= \tilde{D}(\tilde{f}^{k-n}(\tilde{x}), \tilde{g}^{k-n}(\tilde{y})) \end{aligned}$$

uma vez que, $t' = \tilde{f}^{k-n}t\tilde{f}^{-(k-n)} = \tilde{g}^{k-n}t\tilde{g}^{-(k-n)}$ é um recobrimento transladado e \tilde{D} é equivariante. Assim $\tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{x}), \tilde{g}^k(\tilde{y}))$ toma apenas uma quantidade finita de valores e é limitado.

(\Leftarrow) Suponha agora que $\tilde{f}^n(\tilde{x}) = s\tilde{x}$ e $\tilde{g}^n(\tilde{y}) = t\tilde{y}$ sejam ações e que $(f, x) \sim^K (g, y)$. Como \tilde{D} é equivariante e $s^{-1}\tilde{f}^n(\tilde{x}) = \tilde{x}$, tomando como ponto fixo $\tilde{x} \in \tilde{M}$ (que em nosso

caso será sempre \mathbb{D} ou \mathbb{H}), segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{D}(\tilde{x}, (s^{-1}\tilde{g}^n)^k(\tilde{y})) &= \tilde{D}(s^{-1}\tilde{f}^n(\tilde{x}), (s^{-1}\tilde{g}^n)^k(\tilde{y})) \\
&= \tilde{D}(s^{-1}\tilde{f}^n(s^{-1}\tilde{f}^n(\tilde{x})), (s^{-1}\tilde{g}^n)^k(\tilde{y})) \\
&= \tilde{D}((s^{-1}\tilde{f}^n)^2(\tilde{x}), (s^{-1}\tilde{g}^n)^k(\tilde{y})) \\
&= \dots \\
&= \tilde{D}((s^{-1}\tilde{f}^n)^k(\tilde{x}), (s^{-1}\tilde{g}^n)^k(\tilde{y})) \leq K
\end{aligned}$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$, já que, caso contrário as iteradas tenderiam ao bordo de \tilde{M} . Uma vez que qualquer subconjunto limitado de \tilde{M} intersecta somente uma quantidade finita de levantamentos de y , então $(s^{-1}\tilde{g}^n)^k$ fixa ambos \tilde{y} e $s^{-1}\tilde{g}^n(\tilde{y}) = s^{-1}t\tilde{y}$ para algum $k > 0$. De fato, vai existir tal $k > 0$, de maneira que

$$(s^{-1}\tilde{g}^n)^k(\tilde{y}) = \tilde{y} (*)$$

e

$$(s^{-1}\tilde{g}^n)^k((s^{-1}\tilde{g}^n)(\tilde{y})) = s^{-1}\tilde{g}^n(\tilde{y})$$

(lembrando que g é homotópica a um homeomorfismo pseudo-Anosov f) e assim temos que

$$(s^{-1}\tilde{g}^n)^k((s^{-1}t)(\tilde{y})) = (s^{-1}t) \underbrace{(\tilde{y})}_{(*)} = (s^{-1}t) \underbrace{((s^{-1}\tilde{g}^n)^k(\tilde{y}))}_{(*)}$$

usando a igualdade (*). Isto implica que $(s^{-1}\tilde{g}^n)^k$ comuta com o recobrimento transladado $s^{-1}t$ e pela propriedade 4.1.5 temos que $s^{-1}t = Id$. Logo, segue que $(f^n, x) \sim^{NE} (g^n, y)$.

□

Proposição 4.2.5. *O índice de ponto fixo para o ponto fixo x de f^n nunca será zero.*

Demonstração. Suponhamos que x é um ponto regular de f com $g = f^n$. Segue que x é um ponto periódico de f e sua n -ésima iterada $f^n(x) = g(x)$ é um ponto fixo de g . As folheações (F^u, μ_u) e (F^s, μ_s) de f mostram que $f^n(x) = g(x)$ ainda é um ponto de sela. Segue assim que $index(f^n, x) = -1 \neq 0$. Se x é um 3-prong segue que $index(f^n, x) = -2 \neq 0$. Se x é um 4-prong segue que $index(f^n, x) = -3 \neq 0$. Por indução sobre o número

de prongs, segue para um p -prong, que temos $index(f^n, x) = -(p - 1) \neq 0$. Portanto concluímos que $index(f^n, x) \neq 0$. \square

Corolário 4.2.6. *O índice de ponto fixo de um p -prong (fixo) x de f^n é $index(f^n, x) = -(p - 1)$.*

Podemos reescrever o corolário 2.5.5 em relação a uma classe essencial de Nielsen da seguinte forma:

Corolário 4.2.7 (Invariância sobre homotopia). *Para todo $x \in Fix(f^n)$ que está contido em uma classe essencial de Nielsen de f (i.e., $index(f^n, x) \neq 0$) e qualquer f' homotópico a f , existe um $x' \in Fix(f^{n'})$ com $(f^n, x) \sim^{NE} (f^{n'}, x')$.*

O próximo lema nos diz que do ponto de vista da equivalência de Nielsen, f tem o menor número de pontos periódicos entre todas as aplicações em sua classe de homotopia.

Lema 4.2.8 (Thurston). *(i) Se x_1 e x_2 são pontos fixos distintos de f^n , então (f^n, x_1) e (f^n, x_2) não são Nielsen equivalentes.*

(ii) Se x é f -periódico com período pelo menos igual a n , então existe y que é g -periódico com período pelo menos igual a n e tal que (f^n, x) é Nielsen equivalente a (g^n, y) .

Demonstração. (i) Segue pela propriedade 4.1.3, já que, tal propriedade nos diz que nenhum levantamento de qualquer iterada de uma dada f pode fixar pontos distintos em M . (ii) Vamos mostrar primeiro a existência de y bem como que $(f^n, x) \sim^{NE} (g^n, y)$. Pela proposição 4.2.5 segue que o índice de ponto fixo para o ponto fixo x de f^n nunca é zero. Agora, pelo corolário 4.2.7 para todo $x \in Fix(f)$ com x contido em uma classe essencial de Nielsen de f^n , isso devido a definição 2.3.3, podemos tomar uma g homotópica a f de forma que exista um $y \in Fix(g)$ com $(f^n, x) \sim^{NE} (g^n, y)$.

Resta mostrar que y tem pelo menos período n . Suponhamos que existam levantamentos \tilde{x} e \tilde{y} de x ponto fixo de f^n e y ponto fixo de g^n , respectivamente. Seja ainda t um recobrimento transladado tal que sendo (f^n, x) e (g^n, y) Nielsen equivalentes com $\tilde{f}^n(\tilde{x}) = s\tilde{x} = t\tilde{y} = \tilde{g}^n(\tilde{y})$ temos que $t^{-1}\tilde{f}^n(\tilde{x}) = \tilde{x}$ e $t^{-1}\tilde{g}^n(\tilde{y}) = \tilde{y}$. Suponhamos por contradição que y tenha período " $m_1 < n$ ". Então (pela unicidade do levantamento de

\tilde{g}^n fixando \tilde{y}) existe um recobrimento transladado t_1 tal que $t^{-1}\tilde{g}^n = (t_1\tilde{g}^{m_1})^{m_2}$ onde $m_2 = \frac{n}{m_1} > 1$. Uma vez que, levantamentos isotopicamente equivariantes de f^n são iguais, segue que

$$t^{-1}\tilde{f}^n = (t_1\tilde{f}^{m_1})^{m_2}.$$

Isto implica que toda órbita de $t_1\tilde{f}^n$ de \tilde{x} é fixada por $t^{-1}\tilde{f}^n$ contradizendo a propriedade 4.1.3, já que, por esse resultado nenhum levantamento de uma iterada de f pode fixar dois pontos distintos. \square

Observação 4.2.9. *Deve-se resaltar o fato que levantamentos de iteradas não são usualmente iteradas de levantamentos. De forma mais explícita, sejam \tilde{f} um levantamento de f e \tilde{f}^n um levantamento de f^n . Logo qualquer levantamento de f^n pode ser escrito como $a \cdot \tilde{f}^n$, para algum $a \in \pi_1(M)$. Por outro lado, todo levantamento de f pode ser escrito como $b \cdot \tilde{f}$, para algum $b \in \pi_1(M)$. Usando a relação entre levantamentos de aplicações para o recobrimento universal e **aplicações deck** (que em nosso trabalho são considerados sobre superfícies de gênero maior ou igual a 2 e as quais são definidas como composições de elementos de um dado grupo Fuchsiano considerado) segue que*

$$\tilde{f}(b \cdot \tilde{x}) = \tilde{f}_\#(b)\tilde{f} \tag{4.1}$$

onde $\tilde{f}_\# : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M)$ é um endomorfismo induzido por f e assim temos que $(b \cdot \tilde{f})^n = b\tilde{f}_\#^1(b) \dots \tilde{f}_\#^{n-1}(b)\tilde{f}$. Assim $a \cdot \tilde{f}^n$ é a iterada de um levantamento somente no caso especial em que $a = b\tilde{f}_\#^1(b) \dots \tilde{f}_\#^{n-1}(b)$, para algum $b \in \tilde{M}$.

Proposição 4.2.10. *Sejam $f, g \in \text{Homeo}(M)$ com $H_t : f \cong g$ e levantamentos isotopicamente equivariantes $\tilde{H}_t : \tilde{f} \cong \tilde{g}$. Então $(f, x) \sim^K (g, y)$ se, e somente se, $(f, \varphi(r) \cdot x) \sim^K (g, \varphi(r) \cdot y)$, para qualquer $r \in \pi_1(M)$.*

Demonstração. Pela observação anterior, da equivariância da métrica e do fato que $\tilde{f}_\# \cong \tilde{g}_\#$ via \tilde{H}_t teremos

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\tilde{f}^n(r \cdot \tilde{x}), \tilde{g}^n(r \cdot \tilde{y})) &= \tilde{D}(\tilde{f}_\#^n(r) \cdot \tilde{f}^n(\tilde{x}), \tilde{g}_\#^n(r) \cdot \tilde{g}^n(\tilde{y})) \\ &= \tilde{D}(\tilde{f}^n(\tilde{x}), \tilde{g}^n(\tilde{y})). \end{aligned}$$

\square

Lema 4.2.11. *Existe um $K = K(g)$ tal que $(f, x) \sim (g, y)$ se, e somente se, $(f, x) \sim^K (g, y)$. Em particular, se $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, e $(f, x_n) \sim (g, y_n)$, então $(f, x) \sim (g, y)$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $R = \max[\sup_{\tilde{x} \in \tilde{M}} \tilde{D}(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{g}(\tilde{x})), \sup_{\tilde{x} \in \tilde{M}} \tilde{D}(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}), \tilde{g}^{-1}(\tilde{x}))]$. Temos que sendo a métrica \tilde{D} equivariante e M uma superfície de gênero maior ou igual a 2 (i.e., M é compacta) segue que $R < \infty$. Da propriedade 4.1.3 temos que $\tilde{D}_u(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{y})) = \lambda \tilde{D}_u(\tilde{x}, \tilde{y})$ e $\tilde{D}_s(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}), \tilde{f}^{-1}(\tilde{y})) = \lambda \tilde{D}_s(\tilde{x}, \tilde{y})$, então segue da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned} \lambda \tilde{D}_u(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \tilde{D}_u(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{y})) \\ &\leq \tilde{D}_u(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{g}(\tilde{y})) + \tilde{D}_u(\tilde{g}(\tilde{y}), \tilde{f}(\tilde{y})) \\ &\leq \tilde{D}_u(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{g}(\tilde{y})) + R \end{aligned}$$

e portanto

$$\tilde{D}_u(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{g}(\tilde{y})) \geq \lambda \tilde{D}_u(\tilde{x}, \tilde{y}) - R$$

Novamente, pela desigualdade triangular, segue que

$$\begin{aligned} \lambda \tilde{D}_s(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \tilde{D}_s(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}), \tilde{f}^{-1}(\tilde{y})) \\ &\leq \tilde{D}_s(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}), \tilde{g}^{-1}(\tilde{y})) + \tilde{D}_s(\tilde{g}^{-1}(\tilde{y}), \tilde{f}^{-1}(\tilde{y})) \\ &\leq \tilde{D}_s(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}), \tilde{g}^{-1}(\tilde{y})) + R \end{aligned}$$

e portanto

$$\tilde{D}_s(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}), \tilde{g}^{-1}(\tilde{y})) \geq \lambda \tilde{D}_s(\tilde{x}, \tilde{y}) - R.$$

Tomemos $K = K(g) = \frac{2(R+1)}{\lambda-1}$.

No caso em que $\tilde{D}_u(\tilde{x}, \tilde{y}) > K/2$, segue que

$$\begin{aligned} 2\tilde{D}_u(\tilde{x}, \tilde{y}) &> K = \frac{2(R+1)}{\lambda-1} \\ (\lambda-1)\tilde{D}_u(\tilde{x}, \tilde{y}) &> R+1 \\ (\lambda-1)\tilde{D}_u(\tilde{x}, \tilde{y}) - R &> 1 \\ \lambda\tilde{D}_u(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{D}_u(\tilde{x}, \tilde{y}) - R &> 1 \\ \lambda\tilde{D}_u(\tilde{x}, \tilde{y}) - R &> \tilde{D}_u(\tilde{x}, \tilde{y}) + 1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Pela desigualdade triangular, segue que

$$\tilde{D}_u(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{y})) \leq \tilde{D}_u(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{g}(\tilde{y})) + \tilde{D}_u(\tilde{f}(\tilde{y}), \tilde{g}(\tilde{y}))$$

e aplicando a propriedade 4.1.3 no lado esquerdo da desigualdade acima e usando a definição de R no segundo termo do lado direito da desigualdade temos que

$$\begin{aligned} \lambda \tilde{D}_u(\tilde{x}, \tilde{y}) &\leq \tilde{D}_u(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{g}(\tilde{y})) + R \\ \lambda \tilde{D}_u(\tilde{x}, \tilde{y}) - R &\leq \tilde{D}_u(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{g}(\tilde{y})) \end{aligned}$$

Pela inequação (4.2) temos que

$$1 + \tilde{D}_u(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \tilde{D}_u(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{g}(\tilde{y}))$$

Analogamente, se $\tilde{D}_s(\tilde{x}, \tilde{y}) > K/2$, segue que

$$1 + \tilde{D}_s(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \tilde{D}_s(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}), \tilde{g}^{-1}(\tilde{y})).$$

Portando, se $(f, x) \sim (g, y)$, então $(f, x) \sim^K (g, y)$.

(\Leftarrow) Segue da definição 4.2.1.

Em particular, suponhamos que $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}$, $\tilde{y}_n \rightarrow \tilde{y}$ e que $\tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{x}_n), \tilde{g}^k(\tilde{y}_n)) \leq K$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ sendo K a constante de sombreamento global. Uma vez que

$$\tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{x}), \tilde{g}^k(\tilde{y})) \leq \tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{x}), \tilde{f}^k(\tilde{x}_n)) + \tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{x}_n), \tilde{g}^k(\tilde{y}_n)) + \tilde{D}(\tilde{g}^k(\tilde{y}_n), \tilde{g}^k(\tilde{y}))$$

para todo n , e como o primeiro e o terceiro termo da soma do lado direito da desigualdade tendem a zero quando $n \rightarrow \infty$, temos assim que

$$\tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{x}), \tilde{g}^k(\tilde{y})) \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{x}_n), \tilde{g}^k(\tilde{y}_n)) \leq K.$$

Portanto $(f, x) \sim^K (g, y)$ e como $(f, x) \sim^K (g, y)$ implica $(f, x) \sim (g, y)$, nós terminamos. \square

4.3 O teorema de Handel

O próximo teorema nos diz que do ponto de vista do sombreamento global, um homeomorfismo pseudo-Anosov f tem o menor número de órbitas entre todas as aplicações em sua classe de isotopia.

Teorema 4.3.1. *Sejam $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo pseudo-Anosov definido em uma superfície orientável M de gênero maior ou igual a 2 e $g : M \rightarrow M$ uma aplicação qualquer que seja homotópica a f . Então, segue que:*

- (i) *se $(f, x_1) \sim (f, x_2)$ então $x_1 = x_2$; e*
- (ii) *para todo $x \in M$, existe um $y \in M$ tal que $(f, x) \sim (g, y)$, e ainda, se x é f -periódico com período pelo menos n , então y pode ser escolhido sendo g -periódico com período pelo menos n .*

Demonstração. (i) Segue imediatamente da propriedade 4.1.3, uma vez que, qualquer levantamento de qualquer iterada de f não pode fixar dois pontos distintos em \widetilde{M} .

(ii) Tomemos $\forall x \in M$ sendo um ponto f -periódico com período pelo menos n e $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo pseudo-Anosov com $g : M \rightarrow M$ homotópica a f . Pelo lema 4.2.8 item (ii) segue que existe $y \in M$ que é g -periódico com período pelo menos n tal que $(f^n, x) \sim^{NE} (g^n, y)$. Agora pelo lema 4.2.4 temos que $(f^n, x) \sim^{NE} (g^n, y)$ implica $(f, x) \sim^K (g, y)$. Pelo lema 4.2.11 segue que $(f, x) \sim^K (g, y)$ implica que $(f, x) \sim (g, y)$.

Seja $\forall x \in M$ não sendo um ponto f -periódico. Pela proposição 3.2.11, como os pontos periódicos de M são densos em M , vai existir uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos f -periódicos de período pelo menos n tal que $x_n \rightarrow x$. Analogamente, seja $\forall y \in M$ não sendo um ponto g -periódico de forma que pela proposição 3.2.11 como os pontos periódicos de M são densos em M , vai existir uma sequência $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos g -periódicos de período pelo menos n tal que $y_n \rightarrow y$.

Como $(f, x_n) \sim (g, y_n)$, para cada índice $n \in \mathbb{N}$, pelo lema 4.2.11 segue então que $(f, x) \sim (g, y)$ como queríamos. \square

Como uma uniformização do teorema 4.3.1 temos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.2 (Handel). *Sejam $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo pseudo-Anosov definido em uma superfície orientável M de gênero maior ou igual a 2 e $g : M \rightarrow M$ uma aplicação qualquer que seja homotópica a f . Então existe um conjunto compacto g -invariante $Y \subset M$ e uma aplicação $\pi : Y \rightarrow M$ contínua e sobrejetiva que é homotópica*

a inclusão tal que o diagrama a seguir é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g|_Y} & Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Segue em particular que $h(g|_Y) \geq h(f)$.

Demonstração. Defina o seguinte conjunto,

$$\tilde{Y} := \{\tilde{y} \in \tilde{M} : \exists \tilde{x} \in \tilde{M}, (f, x) \sim^K (g, y)\},$$

onde $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$ são levantamentos de $x, y \in M$, respectivamente. Pelo teorema 4.3.1 item (i), existe um único $\tilde{x} \in \tilde{M}$ tal que $(g|_Y, y) \sim (f, x)$ e assim podemos definir uma projeção $\tilde{\pi} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{M}$ como

$$\tilde{y} \mapsto \tilde{\pi}(\tilde{y}) = \tilde{x}. \quad (4.3)$$

Vamos mostrar que \tilde{Y} e $\tilde{\pi}$ são projetadas para Y e π com as propriedades desejadas.

Pela proposição 4.2.10, segue que \tilde{Y} é equivariante, i.e., para qualquer $r \in \pi_1(M)$ (grupo das transformações de Möbius), $r \cdot \tilde{Y} = \tilde{Y}$.

Mostremos que \tilde{Y} é fechado, i.e., vamos mostrar que o conjunto dos pontos limites de \tilde{Y} está contido em \tilde{Y} .

Assuma que $\tilde{y}_i \in \tilde{Y}$ e que $\tilde{y}_i \rightarrow \tilde{y}_0$. Tomando $K = K(g|_Y)$ como no lema 4.2.11 temos que para i suficientemente grande que $\tilde{x}_i \in B(\tilde{y}_0, 2K)$ (i.e., uma bola aberta de centro \tilde{y}_0 e raio $2K$). Assim vai existir um $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ e uma subsequência $\tilde{x}_{i,j} \rightarrow \tilde{x}_0$. Novamente pelo lema 4.2.11, para todos j e n temos que

$$\tilde{D}(\tilde{f}^n(\tilde{x}_{i,j}), \tilde{g}|_{\tilde{Y}}^n(\tilde{y}_{i,j})) \leq K.$$

Fixando n e fazendo $j \rightarrow \infty$ temos que

$$\tilde{D}(\tilde{f}^n(\tilde{x}_0), \tilde{g}|_{\tilde{Y}}^n(\tilde{y}_0)) \leq K.$$

Dessa forma, segue que $(f, x_0) \sim^K (g|_Y, y_0)$ e $\tilde{y}_0 \in \tilde{Y}$ onde \tilde{y}_0 é o levantamento de $y_0 \in Y$. Portanto, \tilde{Y} é fechado.

Vamos mostrar que $\tilde{\pi}$ é contínua.

Seja $\tilde{y}_i \rightarrow \tilde{y}_0$. Uma vez que $\tilde{x}_n = \tilde{\pi}(\tilde{y}_n)$, por (4.3), é tal que o conjunto $\{\tilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitado e como mostramos anteriormente no lema 4.2.11 que se uma subsequência $\tilde{x}_{n,j} \rightarrow \tilde{x}_0$ implica que $(f, x_0) \sim^K (g|_Y, y_0)$, temos de fato que, $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{\pi}(\tilde{y}_0) = \tilde{x}_0$ e assim $\tilde{\pi}$ é contínua.

Vamos mostrar que $\pi \circ g|_Y = f \circ \pi$ e que π é homotópica a inclusão.

Segue imediatamente da proposição 4.2.10 que \tilde{Y} é equivariante, i.e., para qualquer $r \in \pi_1(M)$, $\tilde{\pi}(r \cdot \tilde{y}) = r \cdot \tilde{\pi}(\tilde{y})$. De fato, temos que se $r \in \pi_1(M)$ então,

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(\tilde{y}) = \tilde{x} &\Leftrightarrow \tilde{\pi}(r \cdot \tilde{y}) = r \cdot \tilde{x} \\ &\Leftrightarrow \tilde{\pi}(r \cdot \tilde{y}) = r \cdot \tilde{\pi}(\tilde{y}). \end{aligned}$$

Ainda, como temos que $(f, x) \sim^K (g|_Y, y)$ se, e somente se, $(f, f(x)) \sim^K (g|_Y, g|_Y(y))$, segue que \tilde{Y} é $\tilde{g}|_{\tilde{Y}}$ -invariante. De fato, segue da definição 4.2.1 que

$$\begin{aligned} (f, x) \sim^K (g|_Y, y) &\Leftrightarrow \tilde{D}(\tilde{f}^k(\tilde{x}), \tilde{g}|_{\tilde{Y}}^k(\tilde{y})) \leq K \\ &\Leftrightarrow \tilde{D}(\tilde{f}^{k-1}(\tilde{f}(\tilde{x})), \tilde{g}|_{\tilde{Y}}^{k-1}(\tilde{g}|_{\tilde{Y}}(\tilde{y}))) \leq K \\ &\Leftrightarrow (f, f(x)) \sim^K (g|_Y, g|_Y(y)). \end{aligned}$$

Podemos ainda observar que $\tilde{\pi}(\tilde{g}|_Y(\tilde{y})) = \tilde{f}(\tilde{x})$.

Como $\tilde{\pi}$ é equivariante, contínua e $\tilde{\pi} \circ \tilde{g}|_{\tilde{Y}} = \tilde{f} \circ \tilde{\pi}$ temos que $\pi \circ g|_Y = f \circ \pi$ e π é homotópica a inclusão. Tais afirmações são válidas já que, sendo $\tilde{\pi}(\tilde{y}) = \tilde{x}$ temos que

$$(\tilde{\pi} \circ \tilde{g}|_{\tilde{Y}}) = \tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{\pi}(\tilde{y}))$$

e portanto temos que

$$\tilde{\pi} \circ \tilde{g}|_{\tilde{Y}} = \tilde{f} \circ \tilde{\pi}.$$

Agora pela definição de φ e observando os diagramas da figura 4.1 segue que

$$\pi \circ g|_Y = f \circ \pi.$$

Resta mostrar que qualquer ponto periódico de f está na imagem de π .

Uma vez que Y é compacto por hipótese, sendo π contínua, segue que $\pi(Y)$ é compacto e como pela proposição 3.2.11 os pontos periódicos de f são densos em M , temos que $\pi(Y) = M$. Logo seja $x \in M$ um ponto de período n por f . Pelo lema 4.2.8 item (i), x

é único em sua classe de Nielsen e sabemos pelo lema 4.2.5 que este tem índice de ponto fixo diferente de zero. Dessa forma, esta constitui uma classe essencial de Nielsen pela definição 2.3.3 e pelo corolário 4.2.7, existe algum $y \in \text{Fix}(g|_Y)$ com $(f^n, x) \sim^{NE} (g|_Y^n, y)$. Dessa forma, pelo lema 4.2.4, existe $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ com $(f, x) \sim^K (g|_Y, y)$ e assim $\tilde{x} \in \tilde{\pi}(\tilde{Y})$ com $x \in \pi(Y)$. \square

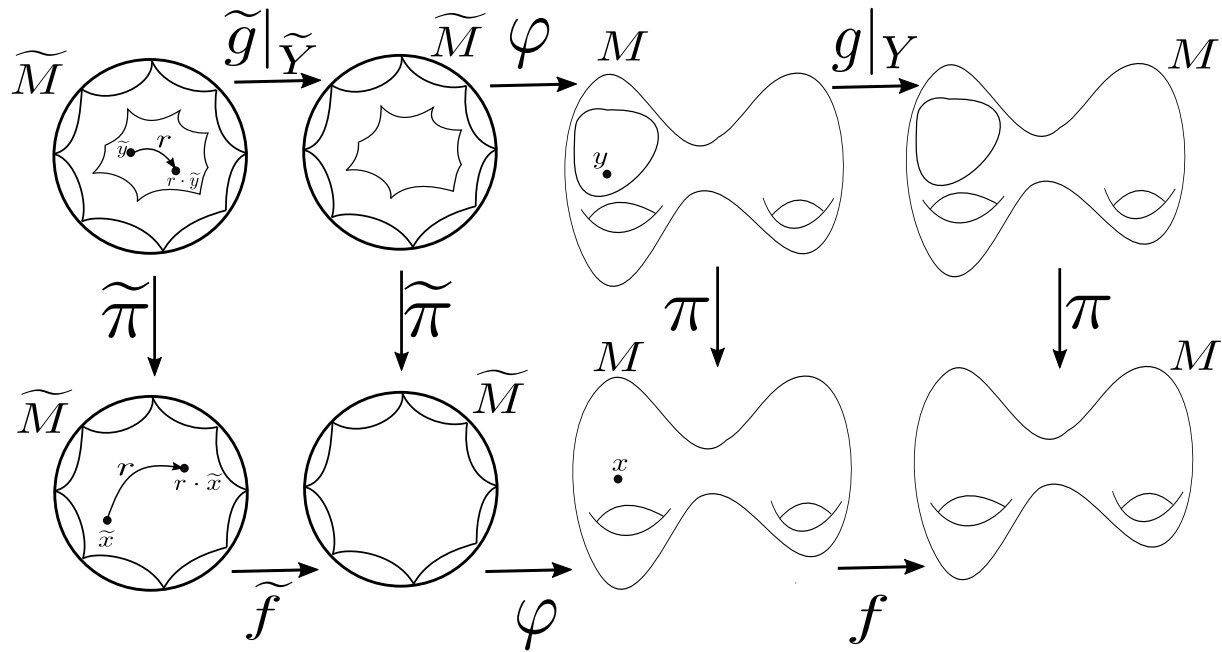


Figura 4.1: Detalhes da demonstração do teorema de Handel.

Conclusões

A realização dessa dissertação foi essencial para a compreensão do conceito de homeomorfismo pseudo-Anosov e suas propriedades, as quais foram aqui consideradas sobre superfícies orientáveis de gênero maior ou igual a dois.

Fomos capazes a partir de tal definição estudar a entropia topológica de um homeomorfismo pseudo-Anosov associada ao subshift de tipo finito, conceito que nos fornece a noção da complexidade da dinâmica que tal aplicação possui.

O estudo das propriedades do homeomorfismo pseudo-Anosov nos permitiu compreender melhor o teorema de classificação de homeomorfismo de superfícies proposto por William P. Thurston.

Por fim, fomos capazes de enunciar e demonstrar o teorema de Handel, o qual afirma que pontos periódicos de um homeomorfismo pseudo-Anosov não podem ser removidos via isotopias.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Brown. The Lefschetz Fixed Point Theorem. Scott Forestman Press, 1971.
- [2] B. Farb, D. Margalit. A Primer on Mapping Class Groups, Princeton University Press, 2011.
- [3] A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poénaru. Thurston's Work on Surfaces, Princeton University Press, 1992.
- [4] M. Handel. Global shadowing of pseudo-Anosov homeomorphisms. Ergodic Theory Dynam. Systems, 5(3):373 - 377, 1985.
- [5] J. Jezierski, W. Marzantowicz. Homotopy Methods in Topological Fixed and Periodic Points Theory, Springer Press, 2006.
- [6] A. Katok, B. Hasselblatt. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, Cambridge University Press, 1996.
- [7] L. Keen, N. Lalic. Hyperbolic Geometry from a Local Viewpoint, Cambridge University Press, 2007.
- [8] E. Lima. Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, Sociedade Brasileira de Matemática Press, 2012.
- [9] J. Milnor. Topology from the Differential Point of View, The University of Virginia Press, 1964.
- [10] J.R. Munkres, Topology, 2^a Edition, Prentice-Hall, 2002.

- [11] K. Oliveira, M. Viana. Fundamentos da Teoria Ergódica, Sociedade Brasileira de Matemática Press, 2014.
- [12] W. Rudin. Real and Complex Analysis, 3^o Edition, Mc Graw Hill International, Press, 1987.
- [13] C. Series. Hyperbolic Geometry, Press, 2013.
- [14] Thurston W. On The Geometry and Dynamics of Diffeomorphisms of Surfaces, American Mathematical Society Press, 1988.