Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Equações de reação-difusão autônomas e não autônomas com expoentes variáveis e difusão grande

Marcela Carvalho Gonçalves

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da CAPES

Itajubá, 23 de Fevereiro de 2018

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Equações de reação-difusão autônomas e não autônomas com expoentes variáveis e difusão grande

Marcela Carvalho Gonçalves

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática.

Área de Concentração: Análise Matemática

Itajubá – MG
23 de Fevereiro de 2018

Dedico este trabalho à minha família.

Agradecimentos

Inicialmente agradeço a Deus que, pela sua infinita bondade, me deu forças para essa longa jornada.

A minha família, em especial ao meus pais, por sempre me incentivar a lutar e nunca desistir e a minha irmã Renata pelo apoio.

Ao meu namorado e colega de mestrado Joél, pelo conhecimentos compartilhados e principalmente pelo apoio e carinho.

Ao meu orientador Jacson Simsen pelos inúmeros ensinamentos, conselhos, dedicação e pela infinita paciência.

A todos os professores do IMC, em especial ao Antônio, Bráulio, Denis, Luis Fernando e Mariza.

Aos meus colegas de mestrado, por todos os momentos vividos. Agradeço ainda, a Debora, que se tornou grande amiga durante essa caminhada.

Aos amigos de Itajubá, que foram a minha família.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

"[...]A sabedoria é a coisa principal: adquire pois a sabedoria; sim, com tudo o que possuis adquire o conhecimento[...]" (Provérbios 4:7)

Resumo

Neste trabalho apresentamos o estudo das equações diferenciais de reação-difusão autônomas e não autônomas com expoentes variáveis e difusão grande. Garantimos existência de soluções e de atratores *pullback* para a família de equações diferenciais parciais e para os respectivos problemas limites que, nestes casos de difusão grande, são equações diferenciais ordinárias. Por último, provamos a semicontinuidade superior dos atratores. Para o caso não autônomo apresentamos resultados inéditos.

Palavras–chave: Equações não autônomas, Difusão grande, Atrator *pullback*, Expoentes variáveis.

Abstract

In this work we present the study of autonomous and non-autonomous differential reaction-diffusion equations with variable exponents and large diffusion. We guarantee the existence of solutions and attractors for the family of partial differential equations and for the respective limit problems that, in these cases of large diffusion, are ordinary differential equations. Finally, we prove the upper semicontinuity of the attractors. For the non-autonomous case we present new results.

Keywords: Non-autonomous equations, Large diffusion, Pullback attractor, Variable exponents.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Os sistemas de reação-difusão com difusão grande têm sido utilizados para descrever matematicamente sistemas físicos, químicos e biológicos. Modelos matemáticos com expoentes variáveis aparecem com frequência em aplicações em fluídos eletroreológicos e processamento de imagens. (ver [12], [24] e as referências lá contidas.)

Estudar a dinâmica assintótica dessas equações é avaliar seu comportamento quando o tempo cresce. Nesse sentido, é importante estudar a semicontinuidade dos atratores com o intuito de verificar se a dinâmica do atrator não é perdida quando o sistema é pertubado, isto é, analisar a estabilidade do modelo.

Sendo assim, faremos um estudo detalhado de [24] no qual os autores consideraram o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_s}{\partial t}(t) - \operatorname{div}(D_s|\nabla u_s|^{p_s(x)-2}\nabla u_s) + |u_s|^{p_s(x)-2}u_s = B(u_s(t)), \quad t > 0, \\ u_s(0) = u_{0s}, \end{cases} \tag{1.1}$$

sob condição de fronteira Neumann homogênea, onde $u_{0s} \in H := L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ é um domínio suave limitado, $B : H \to H$ é uma aplicação globalmente Lipschitziana, com constante de Lipschitz $L \geq 0$, $D_s \in [1, \infty)$, $p_s(\cdot) \in C(\bar{\Omega})$, $p_s^- := \text{inf ess } p_s \geq p$, $p_s^+ := \text{sup ess } p_s \leq a$, para todo $s \in \mathbb{N}$. Assumiremos que $p_s(\cdot) \to p$ em $L^\infty(\Omega)$ e $D_s \to \infty$ quando $s \to \infty$, com $a, p > 2$ constantes positivas.

O objetivo é fazer um estudo da dinâmica assintótica, isto é, garantir a continuidade do fluxo e a semicontinuidade superior da família de atratores globais $\{\mathcal{A}_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ com respeito ao par de parâmetros (D_s, p_s), onde D_s é o coeficiente de difusão e p_s o expoente variável.

O Capítulo 4 é o ponto principal deste trabalho onde consideramos a seguinte versão não autônoma do problema (1.1). Neste caso, o operador depende do tempo t. Considere o problema *pullback*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_s}{\partial t}(t) - D_s \mathrm{div}(|\nabla u_s|^{p_s(x)-2}\nabla u_s) + C(t)|u_s|^{p_s(x)-2}u_s = B(u_s(t)), \ \ t > \tau, \\ u_s(\tau) = u_{\tau s}, \end{cases} \tag{1.2}$$

sob condição de fronteira Neumann homogênea, onde $u_\tau \in H := L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ um domínio suave limitado, $B : H \to H$ uma aplicação globalmente lipschitziana, com constante de Lipschitz $L \geq 0$, $D \in [1, \infty)$ e $C(\cdot) \in C([\tau, T], \mathbb{R})$, com $C(t) \leq C(s)$, para todo $s \leq t$ e $0 < \alpha \leq C(t) \leq M$. Aqui, investigamos a continuidade das soluções e a semicontinuidade da família dos atratores *pullback* $\{\mathcal{U}_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ quando $s \to \infty$ do problema (1.2) em relação ao par de parâmetros $(D_s, p_s(\cdot))$.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 2 serão apresentadas definições e resultados de Análise, Análise Funcional, Teoria da Medida, Topologia, operadores maximais monótonos do tipo subdiferencial, uma breve revisão dos espaços $L^{p(x)}(\Omega)$, $W^{p(x)}(\Omega)$ e da Teoria de Semigrupos. O Capítulo 3 é um estudo detalhado do artigo [24]. Finalmente, no Capítulo 4, apresentaremos resultados inéditos, como a semicontinuidade da família de atratores *pullback* do problema (1.2).

Capítulo 2

Conceitos iniciais

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho.

2.1 Uma coletânea de resultados

As definições e resultados dessa seção podem ser encontrados em [6, 16–19, 25].

Definição 2.1.1. *Uma norma num espaço vetorial X sobre o corpo $\mathbb{F}$ (real ou complexo) é uma aplicação $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz*

(i) $||\xi|| \geq 0$ *para todo* $\xi \in X$, *e* $||\xi|| = 0$ *se, e somente se,* $\xi = 0$.

(ii) $||\alpha\xi|| = |\alpha|||\xi||$, *para todo* $\xi \in X$ *e qualquer* $\alpha \in \mathbb{F}$.

(iii) $||\xi + \eta|| \leq ||\xi|| + ||\eta||$ *para todos* $\xi, \eta \in X$.

Definição 2.1.2. *Uma métrica num conjunto X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in X$:*

(i) $d(x, x) = 0$ *e se* $x \neq y$, *então* $d(x, y) > 0$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Definição 2.1.3. *Um espaço normado* $(X, ||\cdot||)$ *que é completo com a métrica induzida pela norma* $d(x,y) = \|x-y\|$ *é um espaço de Banach, isto é, se toda sequência de Cauchy em* $(X, ||\cdot||)$ *é convergente em* X.

Definição 2.1.4. *Um operador linear entre os espaços vetoriais* X *e* Y *é uma aplicação* $T : dom\, T \subset X \to Y$ *em que seu domínio* $dom\, T$ *é um subespaço vetorial e*

$$T(\xi + \alpha\eta) = T(\xi) + \alpha T(\eta)$$

para todos $\xi, \eta \in dom\, T$ *e todo escalar* $\alpha \in \mathbb{F}$. *Se* $Y = \mathbb{F}$, *então temos que* $T : dom\, T \subset X \to Y$ *é chamado de funcional linear.*

Definição 2.1.5. *Seja* (X, d) *um espaço métrico completo. Um conjunto* $A \subset X$ *é relativamente compacto ou precompacto, se seu fecho* $\overline{A}$ *é compacto.*

Definição 2.1.6. *Seja* (X, d) *um espaço métrico e* A *um subconjunto não vazio de* X. *Definiremos*

$$dist(a, X) = inf_{x \in X}\{d(a, x)\}.$$

Definição 2.1.7. *Sejam* X *e* Y *espaços normados. Um operador linear* $T : X \to Y$ *é compacto, se a imagem* $T(A)$ *de todo subconjunto limitado* $A \subset X$ *é precompacta em* Y.

Definição 2.1.8. *Se* X *é um espaço normado, então o espaço de Banach* $B(X, \mathbb{F})$ *será denotado por* X^* *e chamado de espaço dual de* X. *Cada elemento de* X^* *é chamado de funcional linear contínuo em* X.

Definição 2.1.9. *O espaço bidual* X^{**} *de* X *é o espaço dual de* X^*, *isto é,* $X^{**} = (X^*)^*$.

Observação 2.1.10. *Há uma forma natural de identificar elementos de* X *com elementos do seu bidual: a cada* $\xi \in X$ *associa-se* $\hat{\xi} \in X^{**}$ *por*

$$\hat{\xi}(f) := f(\xi), \text{ para } f \in X^*.$$

Essa aplicação é chama de injeção canônica de X *em* X^{**}.

Definição 2.1.11. *Sejam X e Y espaços normados. Uma aplicação $f : X \to Y$ é uma imersão isométrica quando $||f(x) - f(y)||_Y = ||x - y||_X$ para todos $x, y \in X$.*

Definição 2.1.12. *Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetora.*

Proposição 2.1.13. *A aplicação $\hat{}: X \to X^{**}$ é uma isometria (linear).*

Definição 2.1.14. *Se a aplicação $\hat{}: X \to X^{**}$ é sobrejetora, então o espaço normado X é chamado de espaço reflexivo. Em outras palavras, X é reflexivo se ele é isomorfo a X^{**} e o isomorfismo sendo dado por essa aplicação.*

Definição 2.1.15. *Seja $0 < p < \infty$ e (X, σ, μ) um espaço de medida. O espaço $L^p_\mu(X)$ consiste do conjunto de todas as funções complexas mensuráveis em X tais que*

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Teorema 2.1.16. *Sejam $(X, \sum, \mu)$ um espaço de medida finita. Então $L^p_\mu(X)$ é um espaço reflexivo para cada $1 < p < \infty$.*

Definição 2.1.17. *Seja X um espaço de Banach e $0 < T < \infty$. Defiremos $L^p([0, T]; X)$ com $1 \leq p < \infty$, o espaço de todas as funções mensuráveis $u :]0, T[\to X$ cuja norma*

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \ dt \right)^{\dfrac{1}{p}} < \infty.$$

Teorema 2.1.18. *(**Convergência Dominada**) Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e considere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções complexas mensuráveis em X tal que*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

exista para cada $x \in X$. Suponha que exista $g \in L^1(X)$ satisfazendo

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, $f \in L^1(X)$ e:

(i) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f| \ d\mu = 0;$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \; d\mu = \int_X f \; d\mu.$

Definição 2.1.19. *Um produto interno no espaço vetorial* X *é um funcional* $(\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, \eta \rangle$, *de* $X \times X \to \mathbb{F}$, *de forma que para quaisquer* $\xi, \eta, \zeta \in X$ *e* $\alpha \in \mathbb{F}$,

(i) $\langle \alpha\xi + \eta, \zeta \rangle = \overline{\alpha}\langle \xi, \zeta \rangle + \langle \eta, \zeta \rangle$;

(ii) $\langle \xi, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, \xi \rangle}$;

(iii) $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$ *e* $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ *se, e somente se* $\xi = 0$,

com $\overline{\alpha}$ *o complexo cunjugado do escalar* α.

Proposição 2.1.20. *(**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**) Seja* X *um espaço com produto interno. Então, para todos* $\xi, \eta \in X$ *vale*

$$|\langle \xi, \eta \rangle| \leq ||\xi||_X \; ||\eta||_X,$$

com $||\xi||_X = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$, *que será chamado de norma induzido pelo produto interno.*

Definição 2.1.21. *Um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *é um espaço com produto interno que é completo com a norma induzida pelo produto interno.*

Teorema 2.1.22. *(**Teorema do Valor Médio**) Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* (a, b), *então existe um ponto* $x \in (a, b)$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x).$$

Definição 2.1.23. *Seja* X *um espaço de Banach e* $0 < T < \infty$. *O espaço* $C^m([0, T], X)$, *com* $m = 1, 2, 3, \ldots$, *representa todas as funções* $f : [0, T] \to X$ *que são* m *vezes diferenciáveis e cujas derivadas são contínuas em [0,T].*

Definição 2.1.24. *O espaço topológico* X *é localmente compacto, se todo ponto de* X *possui uma vizinhança cujo fecho é compacto.*

Definição 2.1.25. *O espaço* X *é chamado de espaço de Hausdorff, se* $p \in X, q \in X$ *e* $p \neq q$, *então* p *possui uma vizinhança* U *e* q *possui uma vizinhança* V *tal que* $U \cap V = \phi$.

Observação 2.1.26. *Todo espaço métrico X é Hausdorff.*

Definição 2.1.27. *Se X é Hausdorff localmente compacto, então a função contínua $f : X \to \mathbb{C}$ se anula no infinito, se dado $\varepsilon > 0$ existe um compacto $K \subset X$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$, se $x \notin K$. O espaço dessas funções será denotado por $C_o(X)$.*

Definição 2.1.28. *Seja X_1 e X_2 espaços normados. Dizemos que $X_1 \subset X_2$ com imersão contínua se, existe $c > 0$ tal que*

$$||x||_{X_2} \leq c||x||_{X_1}, \ \ \forall x \in X_1,$$

e a inclusão $X_1 \subset X_2$ é densa, se $\overline{X_1}^{X_2} = X_2$.

Lema 2.1.29. *Para quaisquer $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ temos a seguinte desigualdade para $p \geq 2$ constante*

$$\left(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right)(\xi - \eta) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^p |\xi - \eta|^p.$$

Lema 2.1.30. *(**Desigualdade de Young**) Sejam $p, p' > 1$ expoentes conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então, para quaisquer números reais positivos a, b temos que*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

Definição 2.1.31. *Seja X um espaço normado. Uma sequência $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge a $\xi \in X$ se, $||\xi_n - \xi||_X \to 0$ quando $n \to \infty$. Denotaremos essa convergência por $\xi_n \to \xi$.*

Definição 2.1.32. *Uma sequência $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge fracamente a $\xi \in X$ se, $\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(\xi)$ para todo $f \in X^*$. Denotaremos essa convergência por $\xi_n \rightharpoonup \xi$.*

Teorema 2.1.33. *Se X é um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X possui subsequência fracamente convergente.*

Lema 2.1.34. *(**Desigualdade de Tartar**) Seja $p \geq 2$. Então, para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$*

$$\langle \|\xi\|^{p-2}\xi - \|\eta\|^{p-2}\eta, \xi - \eta\rangle \geq \gamma_0 \|\xi - \eta\|^p,$$

com γ_0 positivo e dependente apenas de p e m.

Lema 2.1.35. *[25] Seja y uma função positiva absolutamente contínua em $(0,\infty)$ que satisfaz*

$$y' + \gamma y^p \leq \delta$$

com $p > 1, \gamma > 0, \delta \geq 0$. Então, para $t \geq 0$

$$y(t) \leq \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/p} + (\gamma(p-1)t)^{-1/p-1}.$$

Lema 2.1.36. *(**Gronwall**) Sejam $m \in L^1(0,T;H)$ tal que $m \geq 0$ q.t.p. em $(0,T)$ e a uma constante não negativa. Se ϕ é uma função contínua de [0,T] em $\mathbb{R}$ tal que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds,$$

para todo $t \in [0,T]$. Então,

$$|\phi(t)| \leq a + \int_0^t m(s)ds.$$

Lema 2.1.37. *[25] (**Lema Uniforme de Gronwall**) Sejam g, h, y três funções positivas localmente integráveis em $]t_0, +\infty[$ tal que y' é localmente integrável em $]t_0, +\infty[$ e os quais satisfazem $\frac{dy}{dt} \leq gy + hparat \geq t_0$,*

$$\int_t^{t+r} g(s) \leq a_1, \int_t^{t+r} h(s) \leq a_2, \int_t^{t+r} y(s) \leq a_3, \quad para \quad t \geq t_0,$$

sendo que r, a_1, a_2, a_3 são constantes positivas. Então,

$$y(t+r) \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right) e^{a_1}, \forall t \geq t_0.$$

Lema 2.1.38. *(**Gronwall-Bellman**) Seja $m \in L^1(0,T;R)$ tal que $m \geq 0$ q.t.p em $(0,T)$ e seja $a \geq 0$. Seja também ϕ uma função contínua de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$ verificando*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\phi(s)ds, \quad t \in [0,T].$$

Então,

$$\phi(t) \leq ae^{\int_0^t m(s)ds},$$

para todo $t \in [0,T]$.

2.2 O Espaço $L^{p(x)}(\Omega)$

Os resultados dessa seção podem ser encontrados nas seguintes referências [10, 12, 13].

Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$. Para qualquer função contínua $p : \Omega \to (1, \infty)$ denotaremos

$$p^- = \inf\ \text{ess}\, p \ \text{ e } \ p^+ = \sup \text{ess}\, p.$$

O espaço generalizado de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ é definido por

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{u é mensurável} e \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, um conjunto mensurável e $p \in L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ mensurável}, |u(x)| \leq C, q.t.\ x \in \Omega, C > 0\}$, com $p^- \geq 1$.

Seja o conjunto $L^\infty_+ := \{q \in L^\infty(\Omega) : \inf \text{ess} \geq 1\}$. Para $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $p \in L^\infty_+$ definiremos

$$\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx.$$

A função ρ é chamada de modular.

Proposição 2.2.1. *A norma de Luxemburg* $||u||_{p(x)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$ *é uma norma em* $L^{p(x)}$.

Proposição 2.2.2. $L^{p(x)}(\Omega)$ *é um espaço de Banach.*

Teorema 2.2.3. *[12] Seja* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. *Então:*

(i) $||u||_{p(x)} < 1 (= 1; > 1)$ *se, e somente se,* $\rho(u) < 1 (= 1; > 1)$;

(ii) *Se* $||u||_{p(x)} > 1$, *então* $||u||^{p^-}_{p(x)} \leq \rho(u) \leq ||u||^{p^+}_{p(x)}$;

(iii) *Se* $||u||_{p(x)} < 1$, *então* $||u||^{p^+}_{p(x)} \leq \rho(u) \leq ||u||^{p^-}_{p(x)}$.

Teorema 2.2.4. ***(i)*** *O espaço* $L^{p(x)}(\Omega)$ *é separável;*

(ii) *Se* $p^- > 1$, *então* $L^{p(x)}(\Omega)$ *é reflexivo.*

Teorema 2.2.5. *Seja* Ω *um domínio limitado de* $\mathbb{R}^n$ *e* $p, q \in L^\infty_+(\Omega)$. *Então,*

$$L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

se, e somente se, $q(x) \leq p(x)$ para q.t. $x \in \Omega$, e neste caso, a imersão é contínua.

Proposição 2.2.6. *(**Desigualdade de Hölder**) Sejam $p^- > 1$ e $q \in L^\infty_+(\Omega)$ tal que $1/p(x) + 1/q(x) = 1$ para todo $x \in \Omega$. Se, $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ então*

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \right) ||u||_{p(x)} ||v||_{q(x)}.$$

2.3 O Espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Os resultados dessa seção podem ser encontrados em [10, 12, 13].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O espaço de Sobolev generalizado $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é definido por

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(x)}(\Omega), j = 1, \ldots, n \right\},$$

onde $\partial u / \partial x_j$ é a j-ésima derivada fraca de u, isto é,

$$-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi = \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Dado $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ definiremos

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Assim, o espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$ pode ser escrito como

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega) \right\}.$$

Em $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é definida a seguinte norma

$$||u||_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = ||u||_{L^{p(x)}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_{L^{p(x)}(\Omega)}.$$

Podemos considerar a norma equivalente

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}} = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}.$$

Teorema 2.3.1. *$W^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Proposição 2.3.2. *O espaço* $W^{1,p(x)}(\Omega)$ *é separável e reflexivo, se* $p^- > 1$.

Teorema 2.3.3. *Sejam* $p, q \in L^\infty_+(\Omega)$ *tais que* $q(\cdot) \leq p(\cdot)$, *q.t.p. em* Ω. *Então,*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset W^{1,q(x)}(\Omega),$$

e tal imersão é contínua.

Definição 2.3.4. *O espaço* $W_o^{1,p(x)}(\Omega)$ *é definido por*

$$W_o^{1,p(x)}(\Omega) = \overline{C_o^\infty(\Omega)}^{W^{1,p(x)}(\Omega)}.$$

Teorema 2.3.5. ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Suponha que* Ω *é um aberto limitado. Seja* $p \in C(\overline{\Omega})$ *tal que* $p^- > 1$. *Então, existe uma constante* C, *tal que*

$$||u||_{L^{p(x)}} \leq C||\nabla u||_{L^{p(x)}}, \tag{2.1}$$

para todo $u \in W_o^{1,p(x)}(\Omega)$.

Teorema 2.3.6. *Sejam* $p, q \in C(\overline{\Omega})$ *tais que* $p^-, q^- \leq 1$. *Se* $q(x) < p^*(x)$, *para todo* $x \in \overline{\Omega}$, *com*

$$p^*(x) = \begin{cases} Np(x)/(N - p(x)), & p(x) < N \\ \infty, & p(x) \geq N \end{cases},$$

então

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

é uma imersão contínua e compacta.

2.4 Funções convexas, subdiferenciais e operadores maximais monótonos

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [3, 4, 6, 9].

Definição 2.4.1. *Seja* X *um espaço de Banach com dual* X^*. *Uma função convexa e própria em* X *é uma função* $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$, *com* $\varphi(u_o) < \infty$ *para algum* $u_o \in X$, *satisfazendo a desigualdade*

$$\varphi((1-t)u+tv) \leq (1-t)\varphi(u)+t\varphi(v),$$

para todo $u, v \in X$ *e* $t \in [0,1]$.

Definição 2.4.2. *A função* $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ *é semicontínua inferiormente (s.c.i) se,*

$$\varphi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n)$$

para toda sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com* $u_n \to u$ *em* X.

Dada uma função $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ convexa, própria e s.c.i, denotaremos o domínio de φ por

$$\mathcal{D}(\varphi) = \{u \in X : \varphi(u) < \infty\}.$$

Definição 2.4.3. *Dada uma função* $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ *convexa, própria e s.c.i, a aplicação* $\partial\varphi : X \to X^*$ *definida por*

$$\partial\varphi(u) = \{x \in X^* : \varphi(v) \geq \varphi(u) + \langle x, v-u\rangle_{X^*,X}, \forall\, v \in \mathcal{D}(\varphi)\}$$

é chamada a subdiferencial de φ.

Notação:$\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*,X}$ é o produto escalar na dualidade X^*, X, isto é, dada $f \in X^*$ e $u \in X$ denotaremos: $\langle f, u\rangle_{X^*,X} = f(u)$.

Definição 2.4.4. *Um operador* $A : X \to X^*$ *é dito ser monótono, se para todos* $u, v \in X$,

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_{X^*,X} \geq 0.$$

O operador $A : X \to X^*$ *é maximal monótono se ele não está propriamente contido em qualquer outro operador monótono de* X *em* X^*.

Definição 2.4.5. *Seja* X *um espaço de Banach. Dizemos que um operador* $A : X \to X^*$ *é hemicontínuo, se para todo* $u, v \in X$

$$A(u+\lambda v) \rightharpoonup Au,$$

quando $\lambda \to 0$.

Definição 2.4.6. *Seja X um espaço de Banach. Um operador $A : X \to X^*$ é coercivo, se para toda sequência $(u_j) \subset X$, com $\lim_{j\to\infty} \|u_j\|_X = \infty$,*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\langle Au_j, u\rangle_{X^*,X}}{\|u_j\|_X} = \infty.$$

Teorema 2.4.7. *[3] Seja X um espaço de Banach real e $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i. Então, $\partial\varphi : X \to X^*$ é um operador maximal monótono.*

Definição 2.4.8. *[9] Seja X um espaço de Banach, Λ um espaço topológico e $\mathcal{A}_\lambda \subset X, \lambda \in \Lambda$. A família de conjuntos $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em $\lambda = \lambda_0$ se,*

$$sup_{x_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda} dist(x_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \to 0$$

quando $\lambda \to \lambda_0$.

Lema 2.4.9. *[9] Seja $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Se qualquer sequência $\{x_{\lambda_n}\}$, com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_\lambda$, $\lambda_n \to \lambda_0$ possui uma subsequência convergente com o limite pertencente ao conjunto $\mathcal{A}_{\lambda'}$, então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0.*

2.5 Teoria de semigrupos não lineares

Nesta seção apresentaremos definições e resultados da teoria de semigrupos não lineares que utilizamos ao longo do trabalho. Os resultados podem ser encontrados em [15].

Definição 2.5.1. *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Um semigrupo é uma família de operadores $\{V_t, t \in \mathbb{R}^+, X\}$, $V_t : X \to X$ contínuo, satisfazendo:*

(i) $V_0 = I$ *(identidade em X);*

(ii) $V_{t+s} = V_t V_s, \forall t, s \geq 0,$

Observação 2.5.2. *O semigrupo é não linear quando X não for espaço vetorial ou se existe $t_0 > 0$ tal que $V_{t_0} : X \to X$ é não linear.*

Definição 2.5.3. *Dado $x \in X$, a semitrajetória positiva do ponto x é definida por*

$$\gamma^+(x) := \{V_t(x) : t \in \mathbb{R}^+\} = \bigcup_{t\geq 0} V_t(x).$$

Definição 2.5.4. *Dado $A \subset X$, $A \neq \phi$.a semitrajetória positiva do conjunto A é definida por*

$$\gamma^+(A) := \bigcup_{x \in A} \gamma^+(x) = \bigcup_{t \geq 0} V_t(A).$$

Definição 2.5.5. *Uma trajetória completa $\gamma(x)$ através do ponto x é a curva $x(t)$, $-\infty < t < \infty$, satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $x(t) \in X$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $x(0) = x$;

(iii) $V_\tau(x(t)) = x(t + \tau)$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e* $\tau \in \mathbb{R}^+$.

Definição 2.5.6. *Dado $A \subset X, A \neq \phi$, A é positivamente invariante (em relação ao semigrupo $\{V_t\}_{t \geq 0}$), se $V_t(A) \subset A$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$; negativamente invariante, se $A \subset V_t(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$; invariante se $V_t(A) = A$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.*

Definição 2.5.7. *Sejam A e M subconjuntos não vazios de X. A atrai M (pelo semigrupo $\{V_t\}_{t \geq 0}$) se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $t(\varepsilon, M) \geq 0$ tal que $V_t(M) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$ para todo $t \geq t(\varepsilon, M)$, com $\mathcal{O}_\varepsilon(A) := \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$.*

Definição 2.5.8. *Seja A é um subconjunto não vazio de X. A é um atrator global de pontos, se A atrai cada ponto $x \in X$; A é um B-atrator global, se A atrai cada conjunto limitado de X; A é um B-atrator global minimal fechado (ou um atrator global de pontos minimal fechado) se A é um B-atrator global fechado (ou um atrator global de pontos fechado) e qualquer subconjunto próprio fechado de A não é um B-atrator global (ou um atrator global de pontos).*

Denotaremos por $\overline{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{M}$, o atrator global de pontos minimal fechado e o B-atrator global minimal fechado, respectivamente.

Definição 2.5.9. *O semigrupo $\{V_t\}_{t \geq 0}$ é pontualmente dissipativo, se $\{V_t\}_{t \geq 0}$ possui um atrator global de pontos limitado; B-dissipativo, se $\{V_t\}_{t \geq 0}$ possui um B-atrator global limitado.*

Definiremos $\mathcal{B} := \{B$ é um conjunto não vazio e limitado em$X\}$.

Definição 2.5.10. *Um semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é limitado, se $\gamma^+(B) \in \mathcal{B}$ para cada $B \in \mathcal{B}$; é B-limitado se para cada $B \in \mathcal{B}$, existe um $t(B) \geq 0$ para o qual $\gamma^+_{t(B)} \in \mathcal{B}$.*

Definição 2.5.11. *Um semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe $\mathcal{K}$, se $V_t : X \to X$ é um operador compacto para cada t>0.*

Teorema 2.5.12. *Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe $\mathcal{K}$. Suponha que o semigrupo é B-dissipativo ou limitado e pontualmente dissipativo. Então, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ tem um B-atrator global minimal fechado $\mathcal{M}$, que é compacto e invariante.*

Capítulo 3

Equações de reação-difusão autônomas com expoentes variáveis e difusão grande

Este capítulo é baseado no artigo [24].

Considere o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_s}{\partial t}(t) - \operatorname{div}(D_s|\nabla u_s|^{p_s(x)-2}\nabla u_s) + |u_s|^{p_s(x)-2}u_s = B(u_s(t)), \ \ t > 0, \\ u_s(0) = u_{0s}, \end{cases} \tag{3.1}$$

sob condição de fronteira Neumann homogênea, onde $u_{0s} \in H := L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ é um domínio suave limitado, $B : H \to H$ é uma aplicação globalmente lipschitziana, com constante de Lipschitz $L \geq 0$, $D_s \in [1, \infty)$, $p_s(\cdot) \in C(\bar{\Omega})$, $p_s^- :=$ inf ess $p_s \geq p$, $p_s^+ :=$ sup ess $p_s \leq a$, para todo $s \in \mathbb{N}$. Assumiremos que $p_s(\cdot) \to p$ em $L^\infty(\Omega)$ e $D_s \to \infty$ quando $s \to \infty$, com $a, p > 2$ constantes positivas.

3.1 Operador maximal monótono do tipo subdiferencial

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e consideremos $X_s = W^{1,p_s(x)}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ e $p_s(x) \in C(\overline{\Omega})$ com $p_s(x) > 2$ para q.t. $x \in \Omega$, com norma $||\cdot||_{X_s} := ||\cdot||_{W^{1,p_s(x)}(\Omega)}$.

Pelo Teorema 2.3.6, temos que $X_s \subset H$, como $H \equiv H^* \subset X_s^*$ vem que $X_s \subset H \subset X_s^*$ são imersões contínuas e densas. De acordo com [22] o operador $A^s u$, definido como

$$A^s u := -div(D_s|\nabla u|^{p_s(x)-2}\nabla u) + |u|^{p_s(x)-2}u,$$

é a realização do operador $A_1^s : X_s \to X_s^*$, $X_s^* := (W^{1,p_s(x)}(\Omega))^*$,

$$\langle A_1^s u, v\rangle_{X_s^*, X_s} := \int_\Omega D_s|\nabla u(x)|^{p_s(x)-2}\nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_\Omega |u(x)|^{p_s(x)-2}u(x)v(x)dx,$$

definido por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A^s) := \{u \in X_s : A_1^s u \in H\}, \\ A^s u = A_1^s u, \quad \text{se} \quad u \in \mathcal{D}(A^s) \end{cases}.$$

Definição 3.1.1. **(i)** *A função $u_s \in C([0,T]; H)$ é uma solução forte para (3.1), se u_s é absolutamente contínua em qualquer subintervalo compacto de $(0,T)$, $u_s(t) \in \mathcal{D}(A^s)$ para $t-$ q.t.p. em $(0,T)$ e*

$$\frac{du_s}{dt}(t) + A^s(u_s(t)) = B(u_s(t)) q.t.p, t \in (0,T).$$

(ii) *A função $u_s \in C([0,T]; H)$ é chamada uma solução fraca para (3.1), se existe uma sequência $\{u_s^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de soluções fortes para u_s em $C([0,T]; H)$.*

Lema 3.1.2. *Seja $u \in X_s$. Então*

$$\langle A^s u, u\rangle_{X_s^*, X_s} \geq \begin{cases} \frac{1}{2^{p_s^+-1}}||u||_{X_s}^{p_s^+}, & \text{se} \ ||u||_{p_s(x)} \leq 1 \ \text{ e } \ ||\nabla u||_{p_s(x)} \leq 1, \\ \frac{1}{2^{p_s^--1}}||u||_{X_s}^{p_s^-}, & \text{se} \ ||u||_{p_s(x)} \geq 1 \ \text{ e } \ ||\nabla u||_{p_s(x)} \geq 1, \\ ||\nabla u||_{p_s(x)}^{p_s^-} + ||u||_{p_s(x)}^{p_s^+}, & \text{se} \ ||u||_{p_s(x)} \leq 1 \ \text{ e } \ ||\nabla u||_{p_s(x)} \geq 1, \\ ||\nabla u||_{p_s(x)}^{p_s^+} + ||u||_{p_s(x)}^{p_s^-}, & \text{se} \ ||u||_{p_s(x)} \geq 1 \ \text{ e } \ ||\nabla u||_{p_s(x)} \leq 1. \end{cases}$$

Demonstração: *Caso 1*: $||u||_{p_s(x)} \leq 1$ e $||\nabla u||_{p_s(x)} \leq 1$.

Pelo Teorema 2.2.3 e observando que $D_s \in [1, \infty)$, temos

$$\begin{aligned}
\langle A^s u, u\rangle_{X_s{}^*, X_s} &= \int_\Omega D_s |\nabla u|^{p_s(x)-2} \nabla u . \nabla u dx + \int_\Omega |u|^{p_s(x)-2} u . u dx \\
&= \int_\Omega D_s |\nabla u|^{p_s(x)} dx + \int_\Omega |u|^{p_s(x)} dx = D_s \rho(\nabla u) + \rho(u) \\
&\geq \rho(\nabla u) + \rho(u) \geq ||\nabla u||_{p_s(x)}^{p_s{}^+} + ||u||_{p_s(x)}^{p_s+} \\
&\geq \frac{1}{2^{p_s{}^+ - 1}} \left(||\nabla u||_{p_s(x)} + ||u||_{p_s(x)} \right)^{p_s{}^+} = \frac{1}{2^{p_s{}^+ - 1}} ||u||_{X_s}^{p_s{}^+}.
\end{aligned}$$

Caso 2: $||u||_{p_s(x)} \geq 1$ e $||\nabla u||_{p_s(x)} \geq 1$.

Novamente pelo Teorema 2.2.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle A^s u, u\rangle_{X_s{}^*, X_s} &= \int_\Omega D_s |\nabla u|^{p_s(x)-2} \nabla u . \nabla u dx + \int_\Omega |u|^{p_s(x)-2} u . u dx \\
&= D_s \rho(\nabla u) + \rho(u) \\
&\geq \rho(\nabla u) + \rho(u) \geq ||\nabla u||_{p_s(x)}^{p_s{}^-} + ||u||_{p_s(x)}^{p_s-} \\
&\geq \frac{1}{2^{p_s{}^- - 1}} \left(||\nabla u||_{p_s(x)} + ||u||_{p_s(x)} \right)^{p_s{}^-} \\
&= \frac{1}{2^{p_s{}^- - 1}} ||u||_{X_s}^{p_s{}^-}.
\end{aligned}$$

Caso 3: $||u||_{p_s(x)} \geq 1$ e $||\nabla u||_{p_s(x)} \leq 1$.

Como $\langle A^s u, u\rangle_{X_s{}^*, X_s} = D_s \rho(\nabla u) + \rho(u)$, utilizando o Teorema 2.2.3, temos

$$\langle A^s u, u\rangle_{X_s{}^*, X_s} = D_s \rho(\nabla u) + \rho(u) \geq ||\nabla u||_{p_s(x)}^{p_s+} + ||u||_{p_s(x)}^{p_s-}.$$

Caso 4: $||u||_{p_s(x)} \leq 1$ e $||\nabla u||_{p_s(x)} \geq 1$.

Da mesma forma como no caso anterior obtém-se o resultado. ■

Provaremos que a realização A^s do operador A_1^s é um operador maximal monótono em H, seguindo as ideias de [22].

Lema 3.1.3. *O operador $A^s : X_s \to X_s^*$ é monótono.*

Demonstração: Sejam $u, v \in X_s$. Usando o Lema 2.1.29 para cada $x \in \Omega$ fixado e observando que $D_s \in [1,\infty)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\langle A^s u - A^s v, u-v\rangle_{X_s^*,X_s} &= \langle A^s u, u-v\rangle_{X_s^*,X_s} - \langle A^s v, u-v\rangle_{X_s^*,X_s}\\
&= \int_\Omega D_s|\nabla u|^{p_s(x)-2}\nabla u.\nabla(u-v)dx + \int_\Omega |u|^{p_s(x)-2}u.(u-v)dx\\
&- \int_\Omega D_s|\nabla v|^{p_s(x)-2}\nabla v.\nabla(u-v)dx - \int_\Omega |v|^{p_s(x)-2}v.(u-v)dx\\
&= \int_\Omega D_s\left(|\nabla u|^{p_s(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p_s(x)-2}\nabla v\right)(\nabla u - \nabla v)\,dx\\
&+ \int_\Omega \left(|u|^{p_s(x)-2}u - |v|^{p_s(x)-2}v\right)(u-v)\,dx\\
&\geq \int_\Omega D_s\left(\frac{1}{2}\right)^{p_s(x)}|\nabla u - \nabla v|^{p_s(x)}dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\right)^{p_s(x)}|u-v|^{p_s(x)}dx\\
&\geq \left(\frac{1}{2}\right)^{{p_s}^+}\left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p_s(x)}dx + \int_\Omega |u-v|^{p_s(x)}dx\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

■

Lema 3.1.4. *O operador $A^s : X_s \to X_s^*$ é coercivo.*

Demonstração: Observe que para $u \in X_s = W^{1,p_s(x)}(\Omega)$, com $||u||_{X_s} \geq 1$, temos pelo Lema 3.1.2 que se $||\nabla u||_{p_s(x)} \geq 1$ e $||u||_{p_s(x)} \geq 1$, então

$$\frac{\langle A^s u, u\rangle_{X_s^*,X_s}}{||u||_{X_s}} \geq \frac{1}{2^{{p_s}^- -1}}\frac{||u||_{X_s}^{{p_s}^-}}{||u||_{X_s}} = \frac{1}{2^{{p_s}^- -1}}||u||_{X_s}^{{p_s}^- -1}. \tag{3.2}$$

Se $||u||_{p_s(x)} \leq 1$ e $||\nabla u||_{p_s(x)} \geq 1$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\langle A^s u, u\rangle_{X_s^*,X_s}}{||u||_{X_s}} &\geq \frac{||\nabla u||_{p_s(x)}^{{p_s}^-} + ||u||_{p_s(x)}^{{p_s}^+}}{||\nabla u||_{p_s(x)} + ||u||_{p_s(x)}} \geq \frac{||\nabla u||_{p_s(x)}^{{p_s}^-}}{||\nabla u||_{p_s(x)} + 1} \geq \frac{||\nabla u||_{p_s(x)}^{{p_s}^-}}{2||\nabla u||_{p_s(x)}}\\
&= \frac{1}{2}||\nabla u||_{p_s(x)}^{{p_s}^- -1},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

e se $||\nabla u||_{p_s(x)} \leq 1$ e $||u||_{p_s(x)} \geq 1$,

$$\frac{\langle A^s u, u\rangle_{X_s^*,X_s}}{||u||_{X_s}} \geq \frac{||\nabla u||_{p_s(x)}^{{p_s}^+} + ||u||_{p_s(x)}^{{p_s}^-}}{||\nabla u||_{p_s(x)} + ||u||_{p_s(x)}} \geq \frac{||u||_{p_s(x)}^{{p_s}^-}}{1 + ||u||_{p_s(x)}} \geq \frac{||u||_{p_s(x)}^{{p_s}^-}}{2||u||_{p_s(x)}} = \frac{1}{2}||u||_{p_s(x)}^{{p_s}^- -1}. \tag{3.4}$$

Seja $(u_j) \subset X_s$ uma sequência tal que $\lim\limits_{j\to\infty} ||u_j||_{X_s} = \infty$. Como $||u_j||_{X_s} = ||\nabla u_j||_{p_s(x)} + ||u_j||_{p_s(x)}$ temos três casos para analisar.

Caso 1: $\lim\limits_{j\to\infty} ||\nabla u_j||_{p_s(x)} = \infty$ e $\lim\limits_{j\to\infty} ||u_j||_{p_s(x)} = \infty$.

Existe $j_o \in \mathbb{N}$ tal que $||\nabla u_j||_{p_s(x)} \geq 1$ e $||u_j||_{p_s(x)} \geq 1$, se $j \geq j_o$. Logo, segue de (3.2) que

$$\frac{\langle A^s u_j, u_j\rangle_{X_s^*,X_s}}{||u_j||_{X_s}} \geq \frac{1}{2^{p_s{}^- -1}}||u_j||_{X_s}^{p_s{}^- -1}$$

para todo $j \geq j_o$. Como

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{2^{p_s{}^- -1}}||u_j||_{X_s}^{p_s{}^- -1} = \infty,$$

temos

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\langle A^s u_j, u_j\rangle_{X_s^*,X_s}}{||u_j||_{X_s}} = \infty.$$

Caso 2: $\lim\limits_{j\to\infty} ||\nabla u_j||_{p_s(x)} = \infty$.

Existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que $||\nabla u_j||_{p_s(x)} \geq 1$ se $j \geq j_1$. Sejam $N_1 = \{j \geq j_1; ||u_j||_{p_s(x)} < 1\}$ e $N_2 = \{j \geq j_1; ||u_j||_{p_s(x)} \geq 1\}$. Se N_1 é finito, basta analisarmos $j \geq j_1$ tal que $j \in N_2$. Assim, de (3.2) vem que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\langle A^s u_j, u_j\rangle_{X_s^*,X_s}}{||u_j||_{X_s}} = \infty.$$

Se N_2 é finito, basta analisarmos $j \geq j_1$ tal que $j \in N_1$. Logo, de (3.3) temos

$$\frac{\langle A^s u_j, u_j\rangle_{X_s^*,X_s}}{||u_j||_{X_s}} \geq \frac{1}{2}||\nabla u_j||_{p_s(x)}^{p_s{}^- -1}$$

para todo $j \geq j_1$, $j \in N_1$. Como

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{2}||\nabla u_j||_{p_s(x)}^{p_s{}^- -1} = \infty,$$

segue que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\langle A^s u_j, u_j\rangle_{X_s^*,X_s}}{||u_j||_{X_s}} = \infty.$$

Se N_1 e N_2 são infinitos, por (3.2) e (3.3) temos

$$\frac{\langle A^s u_j, u_j\rangle_{X_s^*,X_s}}{||u_j||_{X_s}} \geq \begin{cases} \dfrac{1}{2^{p_s{}^- -1}}||u||_{X_s}^{p_s{}^-} \ , \ se \ \ j \geq j_1 \ \ e \ \ j \in N_2 \\ \dfrac{||\nabla u_j||_{p_s(x)}^{p_s{}^- -1}}{2} \ , \ sej \geq j_1 \ \ e \ \ j \in N_1 \end{cases}$$

e, portanto,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\langle A^s u_j, u_j\rangle_{X_s^*,X_s}}{||u_j||_{X_s}} = \infty.$$

Caso 3: $\lim\limits_{j\to\infty} ||u_j||_{p_s(x)} = \infty$.

Existe $j_2 \in \mathbb{N}$ tal que $||u_j||_{p_s(x)} \geq 1$, se $j \geq j_2$. Sejam $\widetilde{N}_1 = \{j \geq j_2; ||\nabla u_j||_{p_s(x)} < 1\}$ e $\widetilde{N}_2 = \{j \geq j_2; ||\nabla u_j||_{p_s(x)} \geq 1\}$. Se $\widetilde{N}_1$ é finito, basta analisarmos $j \geq j_2$ tal que $j \in \widetilde{N}_2$. Assim, de (3.2) vem que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\langle A^s u_j, u_j\rangle_{X_s^*,X_s}}{||u_j||_{X_s}} = \infty.$$

Se $\widetilde{N}_2$ é finito, basta analisarmos $j \geq j_2$ tal que $j \in \widetilde{N}_1$. Logo, de (3.4)

$$\frac{\langle A^s u_j, u_j\rangle_{X_s^*,X_s}}{||u_j||_{X_s}} \geq \frac{1}{2}||u_j||_{p_s(x)}^{p_s{}^- - 1}$$

e como

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{2}||u_j||_{p_s(x)}^{p_s{}^- - 1} = \infty,$$

vem que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\langle A^s u_j, u_j\rangle_{X_s^*,X_s}}{||u_j||_{X_s}} = \infty.$$

Se $\widetilde{N}_1$ e $\widetilde{N}_2$ são infinitos, por (3.2) e (3.4), temos

$$\frac{\langle A^s u_j, u_j\rangle_{X_s^*,X_s}}{||u_j||_{X_s}} \geq \begin{cases} \dfrac{1}{2^{p_s{}^- - 1}}||u_j||_{X_s}^{p_s{}^-} \ , \ se \ \ j \geq j_2 \ \ e \ \ j \in \widetilde{N}_2 \\ \dfrac{||u_j||_{p_s(x)}^{p_s{}^- - 1}}{2} \ , \ se \ \ j \geq j_2 \ \ e \ \ j \in \widetilde{N}_1 \end{cases}$$

e, portanto,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\langle A^s u_j, u_j\rangle_{X_s^*,X_s}}{||u_j||_{X_s}} = \infty.$$

■

Lema 3.1.5. *O operador $A^s : X_s \to X_s^*$ é hemicontínuo.*

Demonstração: Vamos mostrar que $A^s(u + tv) \rightharpoonup A^s u$ quando $t \to 0$ para todo $u, v \in X_s = W^{1,p_s(x)}(\Omega)$. Como $p_s^- > 1$, segue da Proposição 2.3.2 que X_s é reflexivo. Logo, provaremos que

$$\lim_{t\to 0}\langle A^s(u+tv), \phi\rangle_{X_s^*,X_s} = \langle A^s u, \phi\rangle_{X_s^*,X_s}$$

para toda $\phi \in X_s$. Sejam $u, v, \phi \in X_s$ e $t \in (-1, 1)$. Definindo

$$f_t(x) = D_s|\nabla(u + tv)|^{p_s(x)-2}\nabla(u + tv)\nabla\phi + |u + tv|^{p_s(x)-2}(u + tv)\phi$$

e

$$f(x) = D_s|\nabla u|^{p_s(x)-2}\nabla u\nabla\phi + |u|^{p_s(x)-2}u\phi,$$

então,

$$|\langle A^s(u+tv),\phi\rangle_{X_s^*,X_s}-\langle A^s u,\phi\rangle_{X_s^*,X_s}|=\left|\int_\Omega f_t(x)dx-\int_\Omega f(x)dx\right|=\left|\int_\Omega \left[f_t(x)-f(x)\right]dx\right|.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} f_t(x) &= \lim_{t\to 0} D_s|\nabla(u+tv)|^{p_s(x)-2}\nabla(u+tv)\nabla\phi+|u+tv|^{p_s(x)-2}(u+tv)\phi\\
&= D_s\lim_{t\to 0}\nabla(u+tv)|^{p_s(x)-2}\nabla(u+tv)\nabla\phi+|u+tv|^{p_s(x)-2}(u+tv)\phi\\
&= D_s|\nabla u|^{p_s(x)-2}\nabla u\nabla\phi+|u|^{p_s(x)-2}u\phi\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

e, para todo $x\in\Omega$,

$$\begin{aligned}
|f_t(x)| &= |D_s|\nabla(u+tv)|^{p_s(x)-2}\nabla(u+tv)\nabla\phi+|u+tv|^{p_s(x)-2}(u+tv)\phi|\\
&\leq |D_s|\nabla(u+tv)|^{p_s(x)-2}\nabla(u+tv)\nabla\phi|+||u+tv|^{p_s(x)-2}(u+tv)\phi|\\
&= D_s|\nabla(u+tv)|^{p_s(x)-1}|\nabla\phi|+|u+tv|^{p_s(x)-1}|\phi|\\
&\leq D_s\left(|\nabla u|+|t||\nabla v|\right)^{p_s(x)-1}|\nabla\phi|+\left(|u|+|t||v|\right)^{p_s(x)-1}|\phi|\\
&\leq 2^{p_s(x)-2}D_s\left(|\nabla u|^{p_s(x)-1}+|\nabla v|^{p_s(x)-1}\right)|\nabla\phi|+2^{p_s(x)-2}\left(|u|^{p_s(x)-1}+|v|^{p_s(x)-1}\right)|\phi|\\
&= 2^{p_s(x)-2}\left[D_s\left(|\nabla u|^{p_s(x)-1}+|\nabla v|^{p_s(x)-1}\right)|\nabla\phi|+\left(|u|^{p_s(x)-1}+|v|^{p_s(x)-1}\right)|\phi|\right].
\end{aligned}$$

Como $\phi,u,v\in X_s=W^{1,p_s(x)}(\Omega)$, $p_s(x)\in L^\infty(\Omega)$ e $p_s(x)\geq 2$, isto é, $p_s(x)-1\geq 1$ o que implica $L^{p_s(x)-1}(\Omega)\subset L^1(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega |2^{p_s(x)-2}|\left|\left[\left(D_s|\nabla u|^{p_s(x)-1}+|\nabla v|^{p_s(x)-1}\right)|\nabla\phi|+\left(|u|^{p_s(x)-1}+|v|^{p(x)-1}\right)|\phi|\right]dx\right|<\infty$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\begin{aligned}
0\leq\lim_{t\to 0}|\langle A^s(u+tv),\phi\rangle_{X_s^*,X_s}-\langle A^s u,\phi\rangle_{X_s^*,X_s}| &= \lim_{t\to 0}\left|\int_\Omega\left[f_t(x)-f(x)\right]dx\right|\\
&\leq \lim_{t\to 0}\int_\Omega|f_t(x)-f(x)|dx\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 0}\langle A^s(u+tv),\phi\rangle_{X_s^*,X_s}=\langle A^s u,\phi\rangle_{X_s^*,X_s}.$$

■

Pelo Teorema 2.4 em [2] o operador $A^s : X_s \to X_s^*$ é maximal monótono. Mostraremos agora que A^s é a subdiferencial de uma função convexa, própria e semicontínua inferiormente. Considere a função

$$\varphi_{p_s(x)}(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{D_s}{p_s(x)} |\nabla u|^{p_s(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{p_s(x)} |u|^{p_s(x)} dx \quad , se \ \ u \in X_s \\ +\infty, \ \ \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Lema 3.1.6. *A aplicação $\varphi_{p_s(x)}$ é convexa e própria.*

Demonstração: Seja $u \in X_s = W^{1,p_s(x)}(\Omega)$. Então, $u \in L^{p_s(x)}(\Omega)$ e $\nabla u \in L^{p_s(x)}(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_{p_s(x)}(u) &= \int_\Omega \frac{D_s}{p_s(x)} |\nabla u|^{p_s(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{p_s(x)} |u|^{p_s(x)} dx \\ &\leq \frac{D_s}{2} \left[\int_\Omega |\nabla u|^{p_s(x)} dx + \int_\Omega |u|^{p_s(x)} dx \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\int_\Omega |\nabla u|^{p_s(x)} dx + \int_\Omega |u|^{p_s(x)} dx \right] < \infty \end{aligned}$$

donde $\varphi_{p_s(x)}$ é própria. Como a aplicação λ^p é convexa, para $\lambda > 0$, para $u, v \in X_s$ e $0 \leq t \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \varphi_{p_s(x)}(tu + (1-t)v) &= \int_\Omega \frac{D_s}{p_s(x)} |\nabla(tu + (1-t)v)|^{p_s(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{p_s(x)} |tu + (1-t)v|^{p_s(x)} dx \\ &= \int_\Omega \frac{D_s}{p_s(x)} |t\nabla u + (1-t)\nabla v|^{p_s(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{p_s(x)} |tu + (1-t)v|^{p_s(x)} dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{D_s}{p_s(x)} \left(t|\nabla u| + (1-t)|\nabla v|\right)^{p_s(x)} dx \\ &+ \int_\Omega \frac{1}{p_s(x)} \left(t|u| + (1-t)|v|\right)^{p_s(x)} dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{D_s}{p_s(x)} \left(t|\nabla u|^{p_s(x)} + (1-t)|\nabla v|^{p_s(x)}\right) dx \\ &+ \int_\Omega \frac{1}{p_s(x)} \left(t|u|^{p_s(x)} + (1-t)|v|^{p_s(x)}\right) dx \\ &= t\int_\Omega \frac{D_s}{p_s(x)} |\nabla u|^{p_s(x)} dx + t\int_\Omega \frac{1}{p_s(x)} |u|^{p_s(x)} dx \\ &+ (1-t)\int_\Omega \frac{D_s}{p_s(x)} |\nabla v|^{p_s(x)} dx \\ &+ (1-t)\int_\Omega \frac{1}{p_s(x)} |v|^{p_s(x)} dx \\ &= t\varphi_{p_s(x)}(u) + (1-t)\varphi_{p_s(x)}(v) \end{aligned}$$

e, portanto $\varphi_{p_s(x)}$ é convexa. ■

Lema 3.1.7. *A aplicação $\varphi_{p_s(x)}$ é semicontínua inferiormente.*

Demonstração: Seja então (u_n) uma sequência tal que $u_n \to u$ em H. Mostraremos que

$$\varphi_{p_s(x)}(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi_{p_s(x)}(u_n).$$

Se

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi_{p_s(x)}(u_n) = +\infty,$$

então

$$\varphi_{p_s(x)}(u) \leq +\infty = \liminf_{n\to\infty} \varphi_{p_s(x)}(u_n).$$

Por outro lado, se $\liminf\limits_{n\to\infty} \varphi_{p_s(x)}(u_n) = a < +\infty$, então existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset X_s$ de (u_n) tal que

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_{p_s(x)}(u_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} \left(\int_\Omega \frac{D_s}{p_s(x)} |\nabla u_{n_j}|^{p_s(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{p_s(x)} |u_{n_j}|^{p_s(x)} dx \right) = a.$$

Como $\varphi_{p_s(x)}(u_{n_j}) \to a$ quando $j \to \infty$, temos que $\varphi_{p_s(x)}(u_{n_j})$ é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que

$$|\varphi_{p_s(x)}(u_{n_j})| \leq M,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Como $D_s \in [1, \infty)$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{p_s(x)}(u_{n_j}) &= \int_\Omega \frac{D_s}{p_s(x)} |\nabla u_{n_j}|^{p_s(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{p_s(x)} |u_{n_j}|^{p_s(x)} dx \\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{p_s(x)} |u_{n_j}|^{p_s(x)} dx \geq \frac{1}{p_s^+} \int_\Omega |u_{n_j}|^{p_s(x)} dx \\ &= \frac{1}{p_s^+} \rho(u_{n_j}) \end{aligned}$$

e, assim,

$$\frac{1}{p_s^+} \rho(u_{n_j}) \leq \varphi_{p_s(x)}(u_{n_j}) \leq M.$$

Logo,

$$\rho(u_{n_j}) \leq p_s^+ M. \tag{3.6}$$

Da mesma forma vem que

$$\rho(\nabla u_{n_j}) \leq p_s^+ M. \tag{3.7}$$

Usando (3.6), (3.7) e o Teorema 2.2.3 obtemos que

$$||u_{n_j}||_{p_s(x)} \leq \begin{cases} (p_s{}^+ M)^{\frac{1}{p_s{}^-}}, & se \;\; ||u_{n_j}||_{p_s(x)} \geq 1 \\ (p_s{}^+ M)^{\frac{1}{p_s{}^+}}, & se \;\; ||u_{n_j}||_{p_s(x)} < 1 \end{cases}$$

e

$$||\nabla u_{n_j}||_{p_s(x)} \leq \begin{cases} (p_s{}^+ M)^{\frac{1}{p_s{}^-}}, & se \;\; ||\nabla u_{n_j}||_{p_s(x)} \geq 1 \\ (p_s{}^+ M)^{\frac{1}{p_s{}^+}}, & se \;\; ||\nabla u_{n_j}||_{p_s(x)} < 1 \end{cases}.$$

Assim, concluímos que $||u_{n_j}||_{X_s}$ é uma sequência limitada no espaço de Banach reflexivo $X_s = W^{1,p_s(x)}(\Omega)$. Logo, pelo Teorema 2.1.33, (u_{n_j}) possui uma subsequência (que também denotaremos por (u_{n_j})) tal que $u_{n_j} \rightharpoonup v$ em X_s para algum $v \in X_s$. Como $H^* \subset X_s^*$ temos que $u_{n_j} \rightharpoonup v$ em H, e pela unicidade do limite fraco $u = v \in X_s$. Considerando a subdiferencial $\partial\varphi_{p_s(x)}$ de $\varphi_{p_s(x)}$, temos

$$\langle \partial\varphi_{p_s(x)}(u), u_{n_j} - u\rangle_{X_s^*,X_s} \leq \varphi_{p_s(x)}(u_{n_j}) - \varphi_{p_s(x)}(u)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo

$$\langle \partial\varphi_{p_s(x)}(u), u_{n_j} - u\rangle_{X_s^*,X_s} + \varphi_{p_s(x)}(u) \leq \varphi_{p_s(x)}(u_{n_j})$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $u_{n_j} \rightharpoonup u$ em X_s e $\varphi_{p_s(x)}(u) \in X_s^*$ vem que

$$\langle \partial\varphi_{p_s(x)}(u), u_{n_j} - u\rangle_{X_s^*,X_s} \to 0$$

quando $j \to \infty$. Portanto,

$$\varphi_{p_s(x)}(u) \leq \lim_{j\to\infty} \varphi_{p_s(x)}(u_{n_j}) = a = \liminf_{j\to\infty} \varphi_{p_s(x)}(u_n).$$

∎

Teorema 3.1.8. *A^s é a subdifirencial $\partial\varphi_{p_s(x)}$ de $\varphi_{p_s(x)}$.*

Demonstração: A realização A^s de A_1^s e $\partial\varphi_{p_s(x)}$ são maximais monótonos em H e, assim, é suficiente mostrar que para qualquer $u \in H$

$$A^s u \subset \partial\varphi_{p_s(x)}(u).$$

Sejam $u \in \mathcal{D}(A^s) := \{u \in X_s; A_1^s u \in H\}$ e $v = A^s u = A_1^s u$. Então, para todo $\xi \in X_s$ temos

$$\begin{aligned}
\langle v, \xi - u\rangle_{X_s^*, X_s} &= \langle A^s u, \xi - u\rangle_{X_s^*, X_s} \\
&= \int_\Omega D_s |\nabla u|^{p_s(x)-2}\nabla u.(\nabla\xi - \nabla u)dx + \int_\Omega |u|^{p_s(x)-2}u.(\xi - u)dx \\
&= \int_\Omega D_s |\nabla u|^{p_s(x)-2}\nabla u.\nabla\xi dx - \int_\Omega D_s|\nabla u|^{p_s(x)}dx \\
&+ \int_\Omega |u|^{p_s(x)-2}u.\xi dx - \int_\Omega |u|^{p_s(x)}dx.
\end{aligned}$$

Considerando $q_s(x)$ tal que $1/p_s(x) + 1/q_s(x) = 1$ e utilizando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
&\langle v, \xi - u\rangle_{X_s^*, X_s} + \int_\Omega D_s|\nabla u|^{p_s(x)}dx + \int_\Omega |u|^{p_s(x)}dx \leq \int_\Omega D_s|\nabla u|^{p_s(x)-2}\nabla u\nabla\xi dx \\
&+ \int_\Omega |u|^{p_s(x)-2}u\xi dx \leq \int_\Omega D_s|\nabla u|^{p_s(x)-1}|\nabla\xi|dx + \int_\Omega |u|^{p_s(x)-1}|\xi|dx \\
&\leq \int_\Omega \frac{D_s}{q_s(x)}|\nabla u|^{(p_s(x)-1)q_s(x)} + \frac{D_s}{p_s(x)}|\nabla\xi|^{p_s(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{q_s(x)}|u|^{(p_s(x)-1)q_s(x)} + \frac{1}{p_s(x)}|\xi|^{p_s(x)}dx \\
&= \int_\Omega \frac{D_s}{q_s(x)}|\nabla u|^{p_s(x)}dx + \int_\Omega \frac{D_s}{p_s(x)}|\nabla\xi|^{p_s(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{q_s(x)}|u|^{p_s(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p_s(x)}|\xi|^{p_s(x)}dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\langle v, \xi - u\rangle_{X_s^*, X_s} + \int_\Omega D_s\left(1 - \frac{1}{q_s(x)}\right)|\nabla u|^{p_s(x)}dx + \int_\Omega \left(1 - \frac{1}{q_s(x)}\right)|u|^{p_s(x)}dx \\
&\leq \int_\Omega \frac{D_s}{p_s(x)}|\nabla\xi|^{p_s(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p_s(x)}|\xi|^{p_s(x)}dx.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\langle v, \xi - u\rangle_{X_s^*, X_s} \leq \varphi_{p_s(x)}(\xi) - \varphi_{p_s(x)}(u),$$

para todo $\xi \in X_s$. Se $\xi \in H - X_s$, então $\varphi_{p_s(x)}(\xi) = \infty$ e a desigualdade acima vale. Isso mostra que $A^s u = v \in \partial\varphi_{p_s(x)}(u)$. ■

Se considerarmos o expoente variável do termo de difusão diferente do expoente do termo de absorção não linear, então não é possível definir um operador maximal monótono do tipo subdiferencial.

3.2 Existência de soluções e atratores globais

Provaremos a existência de soluções para o problema (3.1) seguindo [7] e a existência de atratores seguindo [23]. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A(u(t)) = B(u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0 \in H \end{cases} . \tag{3.8}$$

Hipótese (H_1):

(i) Seja X é um espaço de Banach reflexivo tal que

$$X_s \subset H \subset X_s^*$$

com inclusões contínuas. Assumos ainda que X_s é denso em H.

(ii) Seja A^s um operador não linear, monótono, coercivo, hemicontínuo tal que $A^s : X_s \to X_s^*$.

(iii) Seja $B : H \to H$ uma aplicação globalmente Lipschitziana.

Proposição 3.2.1. *[7] Se (H_1) vale, então o problema de valor inicial (3.8) define um semigrupo de operadores não lineares $\{T_s(t) : H \to H, t \geq 0\}$, onde para cada $u_{0s} \in H$, $t \mapsto T_s(t)u_{0s}$ é uma solução global fraca de (3.1) começando em u_{0s}.*

Como o operador A^s é a subdiferencial da aplicação $\varphi_{p_s(x)}$ convexa, própria, semicontínua inferiormente em H com $\min\{\varphi_{p_s(x)}u : u \in H\} = 0$ e $f(\cdot) := B(u(\cdot)) \in L^2(0, T; H)$, segue de [Teorema 3.6 em [4]] que a solução fraca é uma solução forte para (3.1).

Considerando $h \equiv 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em [23], temos $F = B : H \to H$ globalmente lipschitziana. Então, pelo Teorema 3.3 em [23] temos que o problema (3.1) tem um atrator global $\mathcal{A}^s$.

3.3 Estimativas Uniformes

Neste capítulo apresentaremos estimativas uniformes para a solução forte do problema (3.1). Sabemos que $X_s \subset H \subset X_s^*$ são imersões contínuas e densas. Pelo Corolário 3.3.4 de [11], vem que

$$\begin{aligned} \|u_s\|_H \leq & 2(|\Omega|+1)\|u_s\|_{p_s(x)} \\ \leq & 4(|\Omega|+1)^2\|u\|_{X_s}, \quad \forall \ \ u_s \in X_s \ \text{ e } \ s \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Lema 3.3.1. *Seja u_s uma solução de (3.1) com $u_s(0) = u_{0s} \in H$. Dado $T_0 > 0$, existe um número positivo r_0 tal que $\|u_s(t)\|_H \leq r_0$, para cada $t \geq T_0$ e $s \in \mathbb{N}$. Além disso, dado um conjunto limitado $B \subset H$, então existe $\tilde{D}_1 > 0$ tal que $\|u_s(t)\|_H \leq \tilde{D}_1$, para todo $t \geq 0$ e $s \in \mathbb{N}$ tal que $u_{0s} \in B$.*

Demonstração: É suficiente considerar $u_{0s} \in \mathcal{D}(A^s)$, pois o domínio do operador A^s é denso em H e a solução é forte quando o dado inicial pertence ao domínio do operador. Seja $\tau > 0$, multiplicando a equação (3.1) por $u_s(\tau)$, temos

$$\left\langle \frac{d}{dt}u_s(\tau), u_s(\tau) \right\rangle + \langle A^s(u_s(\tau)), u_s(\tau)\rangle = \langle B(u_s(\tau)), u_s(\tau)\rangle..$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_s(\tau)||_H^2 \quad = \quad -\langle A^s(u_s(\tau)), u_s(\tau)\rangle + \langle B(u_s(\tau)), u_s(\tau))\rangle.$$

Dado $T_0 > 0$, se $||u_s(\tau)||_{p_s(x)} \geq 1$ e $||\nabla u_s(\tau)||_{p_s(x)} \geq 1$, pelo Lema 3.1.2 e por Cauchy-Schwarz,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(\tau)\|_H^2 \leq -\frac{1}{2^{p_s^- -1}}\|u_s(\tau)\|_{X_s}^{p_s^-} + \|B(u_s(\tau))\|_H\|u_s(\tau)\|_H.$$

Como $2 < p < p_s^- \leq p_s^+ \leq a$ e B é globalmente Lipschitziana, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(\tau)\|_H^2 \leq & -\frac{1}{2^{p_s^- -1}}\|u_s(\tau)\|_{X_s}^{p_s^-} + \|B(u_s(\tau))\|_H\|u_s(\tau)\|_H \\ \leq & -\frac{1}{2^{p_s^- -1}}\|u_s(\tau)\|_{X_s}^{p_s^-} + (\|B(u_s(\tau)) - B(0)\|_H + \|B(0)\|_H)\, \|u_s(\tau)\|_H \\ \leq & -\frac{1}{2^{a-1}}\|u_s(\tau)\|_{X_s}^{p} + L\|u_s(\tau)\|_H^2 + \|B(0)\|_H\|u_s(\tau)\|_H, \end{aligned}$$

com L a constante de Lipschitz. Por (3.9) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(\tau)\|_H^2 \leq -\frac{1}{2^{a-1}}\|u_s(\tau)\|_{X_s}^p + L\left[4(|\Omega|+1)^2\right]^2\|u_s(\tau)\|_{X_s}^2$$
$$+\|B(0)\|_H 4(|\Omega|+1)^2\|u_s(\tau)\|_{X_s}.$$

Fazendo $K := 4(|\Omega|+1)^2$, $C_0 := \|B(0)\|_H \geq 0$, $C_1 := LK^2$ e $C_2 := C_0K$ independentes de s, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(\tau)\|_H^2 \leq -\frac{1}{2^{a-1}}\|u_s(\tau)\|_{X_s}^p + C_1\|u_s(\tau)\|_{X_s}^2 + C_2\|u_s(\tau)\|_{X_s}.$$

Note que $C_2 = 0$ se, e somente se, $B(0) = 0$. Agora, considere $\epsilon > 0$ arbitrário, $\alpha := p/2$, $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$ e $1/p + 1/p' = 1$. Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(\tau)\|_H^2 \leq -\frac{1}{2^{a-1}}\|u_s(\tau)\|_{X_s}^p + \frac{C_1}{\varepsilon}\varepsilon\|u_s(\tau)\|_{X_s}^2 + \frac{C_2}{\varepsilon}\varepsilon\|u_s(\tau)\|_{X_s}.$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(\tau)\|_H^2 &\leq -\frac{1}{2^{a-1}}\|u_s(\tau)\|_{X_s}^p + \left(\frac{1}{\alpha'}\left(\frac{C_1}{\varepsilon}\right)^{\alpha'} + \frac{1}{\alpha}\varepsilon^\alpha\|u_s(\tau)\|_{X_s}^{2\alpha}\right)\\ &+ \frac{1}{p'}\left(\frac{C_2}{\varepsilon}\right)^{p'} + \frac{1}{p}\varepsilon^p\|u_s(\tau)\|_{X_s}^p.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(\tau)\|_H^2 \leq \left(-\frac{1}{2^{a-1}}+\frac{1}{\alpha}\epsilon^\alpha+\frac{1}{p}\epsilon^p\right)\|u_s(\tau)\|_{X_s}^p+\left(\frac{1}{\alpha'}\left(\frac{C_1}{\epsilon}\right)^{\alpha'}+\frac{1}{p'}\left(\frac{C_2}{\epsilon}\right)^{p'}\right).$$

Se $B(0) \neq 0$ escolha $\epsilon_0 > 0$, suficientemente pequeno, tal que

$$\frac{1}{\alpha}\epsilon_0^\alpha + \frac{1}{p}\epsilon_0^p < \frac{1}{2^a}.$$

E se $B(0) = 0$ escolha $\epsilon_0 > 0$, suficientemente pequeno, de forma que

$$\frac{1}{\alpha}\epsilon_0^\alpha < \frac{1}{2^a},$$

em ambos os casos obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(\tau)\|_H^2 \leq -\frac{1}{2^a}\|u_s(\tau)\|_{X_s}^p + C_3,$$

com $C_3 = C_3(L, K, \epsilon_0) > 0$ uma constante independente de s. Então, por (3.9),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(\tau)\|_H^2 \leq -\frac{1}{2^a}K^{-p}\|u_s(\tau)\|_H^p + C_3.$$

Seja $I_s := \{\tau \in (0,\infty); ||u_s(\tau)||_{p_s(x)} \geq 1$ e $||\nabla u_s(\tau)||_{p_s(x)} \geq 1\}$ e $y_s : I_s \to \mathbb{R}$, $y_s(\tau) := \|u_s(\tau)\|_H^2$ satisfazendo a inequação

$$y_s'(\tau) \leq -\frac{K^{-p}}{2^{a-1}}[y_s(\tau)]^{\frac{p}{2}} + 2C_3.$$

Logo, pelo Lema 2.1.35, obtemos

$$\|u_s(\tau)\|_H^2 \leq \Big(2^a C_3 K^p\Big)^{2/p} + \Big[\frac{1}{2^a K^p}(p-2)T_0\Big]^{\frac{-2}{(p-2)}} =: K_1, \forall\, \tau \geq T_0.$$

Similarmente para os casos $||u_s(\tau)||_{p_s(x)} \geq 1$ e $||\nabla u_s(\tau)||_{p_s(x)} \leq 1$; $||u_s(\tau)||_{p_s(x)} \leq 1$ e $||\nabla u_s(\tau)||_{p_s(x)} \geq 1$; $||u_s(\tau)||_{p_s(x)} \leq 1$ e $||\nabla u_s(\tau)||_{p_s(x)} \leq 1$, obtemos as constantes K_3 e K_4 tais que

$$\|u_s(\tau)\|_H^2 \leq K_i, \forall\, \tau \geq T_0$$

e $i = 1, 2, 3, 4$, respectivamente. Então, definindo $r_0 := \max\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ obtemos

$$\|u_s(\tau)\|_H \leq r_0, \forall\, \tau \geq T_0,\ s \in \mathbb{N},$$

e a primeira parte do lema está provada. Agora, seja $\tau > 0$. Multiplicando a equação (3.1) por $u_s(\tau)$ temos

$$\Big\langle \frac{d}{dt}u_s(\tau), u_s(\tau)\Big\rangle + \langle A^s(u_s(\tau)), u_s(\tau)\rangle = \langle B(u_s(\tau)), u_s(\tau)\rangle.$$

Dado $T_0 > 0$, se $||u_s(\tau)||_{p_s(x)} \geq 1$ e $||\nabla u_s(\tau)||_{p_s(x)} \geq 1$, pelo Lema 3.1.2 e por Cauchy-Schwarz,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(\tau)\|_H^2 \leq -\frac{1}{2^{p_s^- -1}}\|u_s(\tau)\|_{X_s}^{p_s^-} + \|B(u_s(\tau))\|_H\|u_s(\tau)\|_H.$$

Como,

$$-\frac{1}{2^{p_s^- -1}}\|u_s(\tau)\|_{X_s}^{p_s^-} \leq 0$$

e B é globalmente Lipschitziana, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(\tau)\|_H^2 \leq& -\frac{1}{2^{p_s^- -1}}\|u_s(\tau)\|_{X_s}^{p_s^-} + \|B(u_s(\tau))\|_H\|u_s(\tau)\|_H\\ \leq& \|B(u_s(\tau)) - B(0)\|_H\|u_s(\tau)\|_H + \|B(0)\|_H\|u_s(\tau)\|_H\\ \leq& L\|u_s(\tau)\|_H^2 + C_4\|u_s(\tau)\|_H,\end{aligned}$$

com $C_4 = \|B(0)\|_H \geq 0$. Pela Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(\tau)\|_H^2 &\leq L\|u_s(\tau)\|_H^2 + \frac{1}{2}C_4^2 + \frac{1}{2}\|u_s(\tau)\|_H^2 \\ &\leq C_4^2 + (2L+1)\|u_s(\tau)\|_H^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Integrando (3.10) de 0 a t, com $t \leq T_0$, obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\|u_s(\tau)\|_H^2 d\tau \leq \int_0^t C_4^2 + (2L+1)\|u_s(\tau)\|_H^2 d\tau.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} \|u_s(t)\|_H^2 - \|u_s(0)\|_H^2 &\leq C_4^2 T_0 + \int_0^t (2L+1)\|u_s(\tau)\|_H^2 d\tau \\ \|u_s(t)\|_H^2 &\leq \|u_{0s}\|_H^2 + C_4^2 T_0 + \int_0^t (2L+1)\|u_s(\tau)\|_H^2 d\tau. \end{aligned}$$

Como $\|u_{0s}\|_H \leq C_5$, temos

$$\begin{aligned} \|u_s(t)\|_H^2 &\leq C_5^2 + C_4^2 T_0 + \int_0^t (2L+1)\|u_s(\tau)\|_H^2 d\tau \\ \|u_s(t)\|_H^2 &\leq C_6 + \int_0^t (2L+1)\|u_s(\tau)\|_H^2 d\tau, \end{aligned}$$

com $C_6 = C_5^2 + C_4 T_0$ independente de s. Pelo Lema de Gronwall-Belmann

$$\|u_s(\tau)\|_H^2 \leq C_6 \; e^{\int_0^t 2L+1 d\tau} \leq C_6 \; e^{(2L+1)T_0} = D_1,$$

com $D_1 = C_6 \; e^{(2L+1)T_0} > 0 \;\; \forall t \geq T_0$. Tomando $\tilde{D}_1 = max\{K_i, D_1\}$ obtemos

$$\|u_s(\tau)\|_H \leq \tilde{D}_1, \quad \forall \;\; t \geq 0.$$

Assim, o lema está provado. ■

Observação 3.3.2. *As constantes r_0 e $\tilde{D}_1$ no Lema 3.3.1 não dependem do dado inicial nem de s.*

Corolário 3.3.3. *Existe um conjunto limitado B_0 em H tal que $\mathcal{A}_s \subset B_0$ para todo $s \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Seja o atrator $\mathcal{A}_s = T_s(T_0)\mathcal{A}_s$ e tome $x_s \in \mathcal{A}_s$. Assim,

$$x_s = T_s(T_0)w_s, \qquad w_s \in \mathcal{A}_s.$$

Pelo Lema 3.3.1

$$\|u_s(\tau)\|_H \leq r_0, \quad \forall \;\; t \geq T_0.$$

Logo,

$$\|x_s\|_H = \|u_s(T_0)\|_H \leq r_0$$

e implica que $x_s \in B_0 = B_H(0, r_0)$, $\forall x_s \in \mathcal{A}_s$. Portanto,

$$\mathcal{A}_s \subset B_0, \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

■

Lema 3.3.4. *Sejam u_s uma solução de (3.1) e $T_1 > 0$. Tome $T_0 \in (0, T_1)$. Considerando $\varphi_{p_s(x)}$ como em (3.5), então*

$$\varphi_{p_s(x)}(u_s(\tau)) \leq \tilde{r_1},$$

para todo $\tau \geq T_1$ e $s \in \mathbb{N}$, com $\tilde{r_1} = \tilde{r_1}(T_1, T_0, L, r_0)$ e r_0 como no Lema 3.3.1.

Demonstração: Considere a identidade

$$\frac{d}{dt}\varphi_{p_s(x)}(u_s(t)) = \Big\langle \partial\varphi_{p_s(x)}(u_s(t)), \frac{\partial u_s}{\partial t}(t)\Big\rangle. \tag{3.11}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi_{p_s(x)}(u_s(t)) &= \Big\langle \partial\varphi_{p_s(x)}(u_s(t)), \frac{\partial u_s}{\partial t}(t)\Big\rangle \\
&= \Big\langle B(u_s(t)) - \frac{\partial u_s(t)}{\partial t}, \frac{\partial u_s}{\partial t}(t)\Big\rangle \\
&= \Big\langle B(u_s(t)) - \frac{\partial u_s(t)}{\partial t}, \frac{\partial u_s}{\partial t}(t) - B(u_s(t)) + B(u_s(t))\Big\rangle \\
&= -\Big\|B(u_s(t)) - \frac{\partial u_s(t)}{\partial t}\Big\|_H^2 + \Big\langle B(u_s(t)) - \frac{\partial u_s(t)}{\partial t}, B(u_s(t))\Big\rangle \\
&\leq -\Big\|B(u_s(t)) - \frac{\partial u_s(t)}{\partial t}\Big\|_H^2 + \Big\|B(u_s(t)) - \frac{\partial u_s(t)}{\partial t}\Big\|_H \|B(u_s(t))\|_H.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi_{p_s(x)}(u_s(t)) &\leq -\left\|B(u_s(t))-\frac{\partial u_s(t)}{\partial t}\right\|_H^2+\frac{1}{2}\left\|B(u_s(t))-\frac{\partial u_s(t)}{\partial t}\right\|_H^2+\frac{1}{2}\|B(u_s(t))\|_H^2\\ &= -\frac{1}{2}\left\|B(u_s(t))-\frac{\partial u_s(t)}{\partial t}\right\|_H^2+\frac{1}{2}\|B(u_s(t))\|_H^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\varphi_{p_s(x)}(u_s(t))+\frac{1}{2}\left\|B(u_s(t))-\frac{\partial u_s(t)}{\partial t}\right\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|B(u_s(t))\|_H^2.$$

Em particular,

$$\frac{d}{dt}\varphi_{p_s(x)}(u_s(t)) \leq \frac{1}{2}\|B(u_s(t))\|_H^2 \leq \frac{1}{2}C_2^2 \quad \forall\ t \geq T_0, \tag{3.12}$$

com $C_2 = C_2(L, r_0) > 0$ uma constante e $r_0 = r_0(T_0)$. Como $X_s = W^{1,p_s(x)}$ podemos tomar $v = 0 \in X_s$. Usando a definição de subdiferencial temos

$$\varphi_{p_s(x)}(0)-\varphi_{p_s(x)}(u_s(t)) \geq \left\langle \partial\varphi_{p_s(x)}(u_s(t)), 0-u_s(t)\right\rangle_{X_s^*,X_s}.$$

Então,

$$\varphi_{p_s(x)}(u_s(t)) \leq \left\langle \partial\varphi_{p_s(x)}(u_s(t)), u_s(t)\right\rangle. \tag{3.13}$$

Note que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t)\|_H^2+\varphi_{p_s(x)}(u_s(t)) = \left\langle \frac{\partial u_s(t)}{\partial t}, u_s(t)\right\rangle+\varphi_{p_s(x)}(u_s(t)).$$

Por (3.11) vem que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t)\|_H^2+\varphi_{p_s(x)}(u_s(t)) &\leq \left\langle \frac{\partial u_s(t)}{\partial t}, u_s(t)\right\rangle+\left\langle \partial\varphi_{p_s(x)}(u_s(t)), u_s(t)\right\rangle\\ &= \left\langle \frac{\partial u_s(t)}{\partial t}+\partial\varphi_{p_s(x)}(u_s(t)), u_s(t)\right\rangle\\ &= \langle B(u_s(t)), u_s(t)\rangle \leq \|B(u_s(t))\|_H\|u_s(t)\|_H \leq C_2 r_0,\end{aligned}$$

$\forall\ t \geq T_0$. Seja $t \geq T_0$ e $r := T_1 - T_0 > 0$. Integrando (3.14) de t a $t+r$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+r}\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|u_s(\tau)\|_H^2\ d\tau+\int_t^{t+r}\varphi_{p_s(x)}(u_s(\tau))d\tau \leq \int_t^{t+r} C_2 r_0\ d\tau\\ &\frac{1}{2}\left(\|u_s(t+r)\|_H^2-\|u_s(t)\|_H^2\right)+\int_t^{t+r}\varphi_{p_s(x)}(u_s(\tau))\ d\tau \leq C_2 r_0 r.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\|u_s(t+r)\|_H^2+\int_t^{t+r}\varphi_{p_s(x)}(u_s(\tau))\ d\tau \leq C_2 r_0 r+\frac{1}{2}\|u_s(t)\|_H^2.$$

Pelo Lema 3.3.1 temos

$$\int_t^{t+r} \varphi_{p_s(x)}(u_s(\tau))\, d\tau \leq C_2 r_0 r + \frac{1}{2} r_0^2, \qquad \forall\, t \geq T_0.$$

Considerando $g \equiv 0$, $h := \frac{1}{2}C_1$, $y_s(\tau) := \varphi_{p_s(x)}(u_s(\tau))$ no Lema Uniforme de Gronwall, obtemos

$$\varphi_{p_s(x)}(u_s(\tau)) \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right) e^{a_1} = \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right) := \tilde{r_1}, \qquad \forall\, \tau \geq T_1.$$

Portanto,

$$\varphi_{p_s(x)}(u_s(\tau)) \leq \tilde{r_1}, \qquad \forall\, \tau \geq T_1.$$

■

Lema 3.3.5. *Seja u_s uma solução de (3.1). Dado $T_1 > 0$, então existe uma constante positiva $r_1 > 0$, independente de s, tal que*

$$\|u_s(t)\|_{X_s} \leq r_1,$$

$\forall t \geq T_1$ e $s \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja u_s uma solução de (3.1) e considere $T_1 > 0$. Tome $T_0 \in (0, T_1)$. Considerando $\varphi_{p_s(x)}$ como em (3.5), usando o Lema 3.3.4, obtemos

$$\varphi_{p_s(x)}(u_s(\tau)) \leq \tilde{r_1},$$

para todo $\tau \geq T_1$ e $s \in \mathbb{N}$, com $\tilde{r_1} = \tilde{r_1}(T_1, T_0, L, r_0)$ e r_0 como no Lemma 3.3.1. Assim,

$$\varphi_{p_s(x)}(u_s(\tau)) = \int_\Omega \frac{D_s}{p_s(x)} \left|\nabla u_s(\tau)\right|^{p_s(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{p_s(x)} \left|u_s(\tau)\right|^{p_s(x)} dx \leq \tilde{r_1},$$

para todo $\tau \geq T_1$ e $s \in \mathbb{N}$. Como $p_s^+ \leq a$ e $D_s \in [1, \infty)$, temos

$$\begin{aligned} \varphi_{p_s(x)}(u_s(\tau)) &= \int_\Omega \frac{D_s}{p_s(x)} \left|\nabla u_s(\tau)\right|^{p_s(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{p_s(x)} \left|u_s(\tau)\right|^{p_s(x)} dx \\ &\geq \frac{1}{a} \int_\Omega \left|\nabla u_s(\tau)\right|^{p_s(x)} dx + \frac{1}{a} \int_\Omega \left|u_s(\tau)\right|^{p_s(x)} dx. \end{aligned}$$

para todo $\tau \geq T_1$ e $s \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\frac{1}{a} \int_\Omega \left|\nabla u_s(\tau)\right|^{p_s(x)} dx + \frac{1}{a} \int_\Omega \left|u_s(\tau)\right|^{p_s(x)} dx \leq \varphi_{p_s(x)}(u_s(\tau)) \leq \tilde{r}_1.$$

Agora, considerando $\rho_s(v) := \int_\Omega |v(x)|^{p_s(x)}dx$, temos

$$\rho_s\left(\nabla u_s(\tau)\right) + \rho_s\left(u_s(\tau)\right) \leq a\tilde{r_1}, \tag{3.14}$$

para todo $\tau \geq T_1$ e $s \in \mathbb{N}$. Se $\tau \geq T_1$ e $\|u_s(\tau)\|_{X_s} \leq 1$, o lema está provado. Se $\tau \geq T_1$ e $\|u_s(\tau)\|_{X_s} > 1$ então temos quatro casos para analisar. *Caso 1*: Se $\|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)} \geq 1$ e $\|u_s(\tau)\|_{p_s(x)} \geq 1$, então pelo Teorema 2.2.3 vem que

$$\|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^-} \leq \rho_s(\nabla u_s(\tau)) \leq \|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^+},$$

e

$$\|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^-} \leq \rho_s(u_s(\tau)) \leq \|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^+}.$$

Como $p \leq p_s^- \leq p_s^+ \leq a$, temos

$$\|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p} + \|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p} \leq \|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^-} + \|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^-} \leq \rho_s(\nabla u_s(\tau)) + \rho_s(u_s(\tau)) \leq a\tilde{r_1}.$$

Pela definição de norma em X_s, obtemos

$$\|u_s(\tau)\|_{X_s} = \|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)} + \|u_s(\tau)\|_{p_s(x)} \leq 2[a\tilde{r_1}]^{1/p}.$$

Caso 2: Se $\|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)} \geq 1$ e $\|u_s(\tau)\|_{p_s(x)} \leq 1$, então, pelo Teorema 2.2.3, temos

$$\|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^-} \leq \rho_s(\nabla u_s(\tau)) \leq \|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^+},$$

e

$$\|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^+} \leq \rho_s(u_s(\tau)) \leq \|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^-}.$$

Como $p \leq p_s^- \leq p_s^+ \leq a$, temos que

$$\|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p} \leq \|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^-} \leq \rho_s(\nabla u_s(\tau))$$

e

$$\|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{a} \leq \|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^+} \leq \rho_s(u_s(\tau)).$$

Usando (3.14) obtemos que

$$\begin{aligned}
\|u_s(\tau)\|_{X_s} =& \|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)} + \|u_s(\tau)\|_{p_s(x)} \\
\leq& [\rho_s(\nabla u_s(\tau))]^{\frac{1}{p}} + [\rho_s(u_s(\tau))]^{\frac{1}{a}} \\
\leq& (a\tilde{r_1})^{1/p} + (a\tilde{r_1})^{1/a}.
\end{aligned}$$

Caso 3: Se $\|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)} \leq 1$ e $\|u_s(\tau)\|_{p_s(x)} \geq 1$, então, pelo Teorema 2.2.3, temos

$$\|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^+} \leq \rho_s(\nabla u_s(\tau)) \leq \|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^-},$$

e

$$\|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^-} \leq \rho_s(u_s(\tau)) \leq \|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^+}.$$

Como $p \leq p_s^- \leq p_s^+ \leq a$, temos que

$$\|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{a} \leq \|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^+} \leq \rho_s(\nabla u_s(\tau))$$

e

$$\|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p} \leq \|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^-} \leq \rho_s(u_s(\tau)).$$

Usando (3.14) obtemos que

$$\begin{aligned}\|u_s(\tau)\|_{X_s} =& \|u_s(\tau)\|_{p_s(x)} + \|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)} \\ \leq& [\rho_s(u_s(\tau))]^{\frac{1}{p}} + [\rho_s \nabla(u_s(\tau))]^{\frac{1}{a}} \\ \leq& (a\tilde{r_1})^{1/p} + (a\tilde{r_1})^{1/a}.\end{aligned}$$

Caso 4: Se $\|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)} \leq 1$ e $\|u_s(\tau)\|_{p_s(x)} \leq 1$, então, pelo Teorema 2.2.3, temos

$$\|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^+} \leq \rho_s(\nabla u_s(\tau)) \leq \|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^-},$$

e

$$\|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^+} \leq \rho_s(u_s(\tau)) \leq \|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^-}.$$

Usando (3.14), obtemos

$$\|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^+} + \|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{p_s^+} \leq \rho_s(\nabla u_s(\tau)) + \rho_s(u_s(\tau)) \leq a\tilde{r_1}.$$

Como $p \leq p_s^- \leq p_s^+ \leq a$, temos que

$$\|\nabla u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{a} + \|u_s(\tau)\|_{p_s(x)}^{a} \leq \rho(\nabla u_s(\tau)) + \rho(u_s(\tau)) \leq a\tilde{r_1}.$$

Logo,

$$\|u_s(\tau)\|_{X_s} \leq 2(a\tilde{r_1})^{1/a}.$$

Considerando $r_1 := \max\{1, 2(a\tilde{r_1})^{1/p} + 2(a\tilde{r_1})^{1/a}\}$, concluímos que

$$\|u_s(\tau)\|_{X_s} \leq r_1 \text{ para todo } \tau \geq T_1 \text{ e } s \in \mathbb{N}.$$

■

Corolário 3.3.6. *(a) Seja $X := W^{1,p}(\Omega)$ e u_s solução do problema (3.1). Dado $T_1 > 0$, existe uma constante positiva r_2, independente de s, tal que*

$$\|u_s(t)\|_X \leq r_2,$$

para todo $t \geq T_1$ e $s \in \mathbb{N}$.

(b) Existem conjuntos limitados B_1 em X e B_1^s em X_s tais que $\mathcal{A}_s \subset B_1^s$ e $\mathcal{A}_s \subset B_1$ para todo $s \in \mathbb{N}$.

(c) $\mathcal{A} := \overline{\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_s}$ é um subconjunto compacto de H.

Demonstração: (a) Pelo Lema 3.3.5, existe $r_1 > 0$ tal que

$$\|u_s(t)\|_{X_s} \leq r_1 \quad \forall\, t \geq T_1,\ s \in \mathbb{N}.$$

Como $L^{p_s(x)}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ e é uma imersão contínua, então

$$\begin{aligned}
\|u_s(t)\|_X &= \|\nabla u_s(t)\|_p + \|u_s(t)\|_p \leq 2(|\Omega|+1)\left(\|\nabla u_s(t)\|_{p_s(x)} + \|u_s(t)\|_{p_s(x)}\right) \\
&= 2(|\Omega|+1)\|u_s(t)\|_{X_s} \leq 2(|\Omega|+1)r_1,
\end{aligned}$$

para todo $t \geq T_1$ e $s \in \mathbb{N}$ e o resultado segue com $r_2 := 2(|\Omega|+1)r_1$.

(b) Seja o atrator $\mathcal{A}_s = T_s(T_1)\mathcal{A}_s$, com $x_s \in \mathcal{A}_s$, isto é,

$$x_s = T_s(T_1)w_s, \qquad w_s \in \mathcal{A}_s.$$

Pelo Lema 3.3.5, temos

$$\|x_s\|_{X_s} = \|u_s(T_1)\|_{X_s} \leq r_1, \forall s \in \mathbb{N},$$

e implica que $x_s \in B_1^s := B_{X_s}(0, r_1) \subset X_s, \forall s \in \mathbb{N}$. Portanto, $\mathcal{A}_s \subset B_1^s$, $\forall s \in \mathbb{N}$. Por (a) temos

$$\|x_s\| = \|u_s(T_1)\|_X < r_2 \ \forall t \leq T_1$$

e, assim

$$x_s \in B_1 := B_X(0, r_2) \subset X \Rightarrow \mathcal{A}_s \subset B_1 \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

(c) Por (b), existe um conjunto limitado B_1 em X tal que $\mathcal{A}_s \subset B_1$ para todo $s \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_s \subset B_1 \Rightarrow \overline{\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_s}^H \subset \overline{B_1}^H \subset X.$$

Como $X \subset H$ é uma imersão contínua e compacta, então

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_s}$$

é compacto. ■

3.4 O problema limite e propriedades de convergência

O objetivo desta seção é provar que o problema limite do problema (3.1), quando D_s cresce para o infinito e $p_s(\cdot) \to p > 2$ em $L^\infty(\Omega)$ quando $s \to \infty$, é descrito por uma equação diferencial ordinária. Primeiramente, observe que os gradientes das soluções u_s do problema (3.1) convergem em norma para zero quando $s \to \infty$, o que nos permite exibir o problema limite

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + |u(t)|^{p-2}u(t) = \tilde{B}(u(t)), \;\; t > 0, \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.15}$$

com $\tilde{B} := B_{|\mathbb{R}}$. Identificaremos $\mathbb{R}$ com as funções constantes que estão em H, visto que Ω é um conjunto limitado.

As demonstrações dos próximos dois resultados seguem as ideias de [20] e mais alguns ajustes que são necessários para este caso de expoente variável.

Teorema 3.4.1. *Dado $T_0 > 0$, se para cada s, u_s é uma solução de (3.1), em $(0, \infty)$, então para cada $t \geq T_0$, a sequência de números reais $\{\|\nabla u_s(t)\|_H\}$ tem uma subsequência $\{\|\nabla u_{s_\ell}(t)\|_H\}$ que converge para zero quando $\ell \to \infty$.*

Demonstração: Seja $T > T_0$ e $t \in (T_0, T)$. Como u_s é uma solução forte de (3.1) podemos multiplicar u_s em (3.1), então

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{d}{dt}u_s(t), u_s(t)\right\rangle_H + \langle A^s u_s(t), u_s(t)\rangle_H = \langle B(u_s(t)), u_s(t)\rangle \\
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t)\|_H^2 + D_s\int_\Omega |\nabla u_s(t)|^{p_s(x)}dx + \int_\Omega |u_s(t)|^{p_s(x)}dx = \langle B(u_s(t)), u_s(t)\rangle_H.
\end{aligned}$$

Como B é globalmente Lipschitziana vem que

$$\begin{aligned}
\langle B(u_s(t)), u_s(t)\rangle_H &\leq \|B(u_s(t))\|_H\|u_s(t)\|_H \\
&\leq \|B(u_s(t)) - B(0)\|_H\|u_s(t)\|_H + \|B(0)\|_H\|u_s(t)\|_H \\
&\leq L\|u_s(t)\|_H^2 + \|B(0)\|_H\|u_s(t)\|_H.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.3.1, obtemos

$$\langle B(u_s(t)), u_s(t)\rangle_H \leq Lr_0^2 + \|B(0)\|_H r_0 \leq K$$

q.t.p. em (T_0, T), com $K = Lr_0^2 + \|B(0)\|_H r_0$ e $r_0 > 0$ uma constante independente de s. Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t)\|_H^2 + D_s\int_\Omega |\nabla u_s(t)|^{p_s(x)}dx \leq K, \tag{3.16}$$

q.t.p. em (T_0, T). Integrando (3.16) de T_0 a T, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t)\|_H^2 dt + D_s\int_{T_0}^T\int_\Omega \|\nabla u_s(t)\|^{p_s(x)}dxdt &\leq \int_{T_0}^T K dt \\
\frac{1}{2}\|u_s(T)\|_H^2 + D_s\int_{T_0}^T\int_\Omega |\nabla u_s(t)|^{p_s(x)}dxdt &\leq \frac{1}{2}\|u_s(T_0)\|_H^2 + K(T - T_0) \\
&\leq \frac{1}{2}r_0^2 + KT =: K_2(T).
\end{aligned}$$

Em particular,

$$D_s\int_{T_0}^T\int_\Omega |\nabla u_s(t)|^{p_s(x)}dxdt \leq K_2(T),$$

o que implica

$$\int_{T_0}^T\int_\Omega |\nabla u_s(t)|^{p_s(x)}dxdt \leq \frac{K_2(T)}{D_s} \to 0 \quad \text{quando } s \to \infty.$$

Logo, existe uma subsequência $\{\int_\Omega |\nabla u_{s_\ell}(t)|^{p_{s_\ell}(x)}dx\}$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_{s_\ell}(t)|^{p_{s_\ell}(x)}dx \to 0 \quad \text{quando } \ell \to \infty, \text{ para q.t. } t \in (T_0, T),$$

e, então, existe um subconjunto $J \subset (T_0, T)$ com medida de Lebesgue $m((T_0,T) \setminus J) = 0$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_{s_\ell}(t)|^{p_{s_\ell}(x)} dx \to 0 \quad \text{quando } \ell \to \infty,$$

para todo $t \in J$.

Afirmação: Dado $t \in (T_0, T)$, existe pelo menos um $\tau \in J$ com $\tau < t$. De fato, se não existisse teríamos que $(T_0,t) \cap J = \phi$ e, assim $m((T_0,T) \setminus J) > 0$. O que é uma contradição. Agora, tome $\tau \in J$, com $T_0 < \tau < t$, e seja $h = t - \tau$. Sejam $\epsilon > 0$ e $\ell_0 = \ell(\epsilon)$ tais que se $\ell > \ell_0$, então

$$\int_\Omega |\nabla u_{s_\ell}(\tau)|^{p_{s_\ell}(x)} dx < \frac{p}{3a}\epsilon. \tag{3.17}$$

Usando a identidade (3.11) e por (3.12) vem que

$$\frac{d}{dt'} \varphi_{p_{s_\ell}(x)}(u_{s_\ell}(\tau + t')) = \left\langle \partial \varphi_{p_{s_\ell}(x)}(u_{s_\ell}(\tau + t')), \frac{d}{dt'} u_{s_\ell}(\tau + t') \right\rangle \leq \frac{1}{2} C_2^2, \tag{3.18}$$

para $q.t.$ $t' \in (0,T)$, onde $\varphi_{p_{s_\ell}(x)}$ é dado por (3.5) , r_0 como no Lema 3.3.1 e $C_2 = C_2(L, r_0)$. Integrando (3.18) de $\tau + h$ a τ, obtemos

$$\int_\tau^{\tau+h} \frac{d}{dt'} \varphi_{p_{s_\ell}(x)}(u_{s_\ell}(t')) dt' \leq \int_\tau^{\tau+h} \frac{1}{2} C_2^2 \; dt'.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\varphi_{p_{s_\ell}(x)}(u_{s_\ell}(\tau + h)) - \varphi_{p_{s_\ell}(x)}(u_{s_\ell}(\tau)) \leq \int_\tau^{\tau+h} \frac{1}{2} C_2^2 \; dt'.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&D_{s_\ell} \int_\Omega \frac{1}{p_{s_\ell}(x)} |\nabla u_{s_\ell}(\tau + h)|^{p_{s_\ell}(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{p_{s_\ell}(x)} |u_{s_\ell}(\tau + h)|^{p_{s_\ell}(x)} dx \\
&- D_{s_\ell} \int_\Omega \frac{1}{p_{s_\ell}(x)} |\nabla u_{s_\ell}(\tau)|^{p_{s_\ell}(x)} dx - \int_\Omega \frac{1}{p_{s_\ell}(x)} |u_{s_\ell}(\tau)|^{p_{s_\ell}(x)} dx \\
&\leq \frac{1}{2} C_2^2 h \leq \frac{1}{2} C_2^2 (T - T_0).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&D_{s_\ell} \int_\Omega \frac{1}{p_{s_\ell}(x)} |\nabla u_{s_\ell}(\tau + h)|^{p_{s_\ell}(x)} dx \leq \frac{1}{2} C_2^2 (T - T_0) + D_{s_\ell} \int_\Omega \frac{1}{p_{s_\ell}(x)} |\nabla u_{s_\ell}(\tau)|^{p_{s_\ell}(x)} dx \\
&+ \quad \int_\Omega \frac{1}{p_{s_\ell}(x)} |u_{s_\ell}(\tau)|^{p_{s_\ell}(x)} dx - \int_\Omega \frac{1}{p_{s_\ell}(x)} |u_{s_\ell}(\tau + h)|^{p_{s_\ell}(x)} dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{1}{p_{s_\ell}(x)}|\nabla u_{s_\ell}(\tau+h)|^{p_{s_\ell}(x)}dx \quad &\leq \quad \frac{1}{2D_{s_\ell}}C_2^2(T-T_0)+\int_\Omega \frac{1}{p_{s_\ell}(x)}|\nabla u_{s_\ell}(\tau)|^{p_{s_\ell}(x)}dx \\ &+ \quad \frac{1}{D_{s_\ell}}\int_\Omega \frac{1}{p_{s_\ell}(x)}|u_{s_\ell}(\tau)|^{p_{s_\ell}(x)}dx. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Usando o Lema 3.3.5 e $p \leq p_{s_\ell}^- \leq p_{s_\ell}^+ \leq a$, segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{1}{p_{s_\ell}(x)}|u_{s_\ell}(\tau)|^{p_{s_\ell}(x)}dx \quad &\leq \quad \frac{1}{p}\int_\Omega |u_{s_\ell}(\tau)|^{p_{s_\ell}(x)}dx \\ &= \quad \frac{1}{p}\,\rho(u_{s_\ell}(\tau)).\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.2.3 vem que

$$\int_\Omega \frac{1}{p_{s_\ell}(x)}|u_{s_\ell}(\tau)|^{p_{s_\ell}(x)}dx \quad \leq \quad \frac{1}{p}\max\left\{\|u_{s_\ell}(\tau)\|_{p_{s_\ell}(x)}^{p_{s_\ell}^-}, \|u_{s_\ell}(\tau)\|_{p_{s_\ell}(x)}^{p_{s_\ell}^+}\right\}.$$

Logo,

$$\int_\Omega \frac{1}{p_{s_\ell}(x)}|u_{s_\ell}(\tau)|^{p_{s_\ell}(x)}dx \quad \leq \quad \frac{1}{p}\max\left\{\|u_{s_\ell}(\tau)\|_{X_{s_\ell}}^{p_{s_\ell}^-}, \|u_{s_\ell}(\tau)\|_{X_{s_\ell}}^{p_{s_\ell}^+}\right\} \leq K_3, \tag{3.20}$$

com K_3 uma constante positiva sem dependência de s. Agora, escolha $\ell_1 = \ell_1(\epsilon)$, suficientemente grande, tal que

$$\frac{1}{2D_{s_\ell}}C_2^2(T-T_0) < \frac{\epsilon}{3a}, \quad \text{e} \quad \frac{K_3}{D_{s_\ell}} < \frac{\epsilon}{3a}, \tag{3.21}$$

sempre que $\ell > \ell_1$ e considere $\ell_2 = \ell_2(\epsilon) = \max\{\ell_0, \ell_1\}$. Para $\ell > \ell_2$, de (3.17), (3.19), (3.20) e (3.21), vem que

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\int_\Omega |\nabla u_{s_\ell}(t)|^{p_{s_\ell}(x)}dx \leq &\frac{1}{2D_{s_\ell}}C_2^2(T-T_0)+\int_\Omega \frac{1}{p_{s_\ell}(x)}|\nabla u_{s_\ell}(\tau)|^{p_{s_\ell}(x)}dx + \frac{1}{D_{s_\ell}}K_3 \\ \leq &\frac{1}{2D_{s_\ell}}C_2^2(T-T_0)+\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_{s_\ell}(\tau)|^{p_{s_\ell}(x)}dx + \frac{1}{D_{s_\ell}}K_3 \\ < &\frac{\epsilon}{3a}+\frac{\epsilon}{3a}+\frac{\epsilon}{3a} = \frac{\epsilon}{a}.\end{aligned}$$

Logo, se $\ell > \ell_2$, pelo Teorema 2.2.3, temos que

$$\min\{\|\nabla u_{s_\ell}(t)\|_{p_{s_\ell}(x)}^{p_{s_\ell}^-}, \|\nabla u_{s_\ell}(t)\|_{p_{s_\ell}(x)}^{p_{s_\ell}^+}\} \leq \rho(\nabla u_{s_\ell}(t)) = \int_\Omega |\nabla u_{s_\ell}(t)|^{p_{s_\ell}(x)}dx < \epsilon$$

e, então, $\|\nabla u_{s_\ell}(t)\|_{p_{s_\ell}(x)} \to 0$ quando $\ell \to \infty$. Como $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), p > 2$, então $\|\nabla u_{s_\ell}(t)\|_H \leq C\|\nabla u_{s_\ell}(t)\|_{p_{s_\ell}(x)}$, com C uma constante independente de s. Assim, concluímos que $\|\nabla u_{s_\ell}(t)\|_H \to 0$ quando $\ell \to \infty$. ■

O Lema acima mostra que a equação (3.15) é uma forte candidata para o problema limite. Além disso, pelo Lema 3.2 e o Teorema 3.1 em [20], o problema (3.15) possui uma única solução global e um $B-$atrator global $\mathcal{A}^\infty$ maximal compacto invariante, dado como a união de todas as trajetórias completas limitadas em $\mathbb{R}$.

O próximo resultado garante que (3.15) é de fato o problema limite para (3.1) quando $s \to \infty$.

Teorema 3.4.2. *Seja u_s uma solução de (3.1), com $u_s(0) = u_{0s}$, e seja u uma solução de (3.15), com $u(0) = u_0$. Se $u_{0s} \to u_0$ em H quando $s \to \infty$, então para cada $T > 0$, $u_s \to u$ em $C([0,T]; H)$ quando $s \to +\infty$.*

Demonstração: Seja $T > 0$ fixado e suponha que $u_{0s} \to u_0$ em H quando $s \to \infty$. Subtraindo as duas equações em (3.1) e (3.15) e fazendo o produto interno com $u_s - u$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{du_s}{dt}(t) - \frac{du}{dt}(t), u_s(t) - u(t) \right\rangle_H + \left\langle A^s u_s(t) - |u(t)|^{p-2}u(t), u_s(t) - u(t) \right\rangle_H \\
&= \langle B(u_s(t)) - B(u(t)), u_s(t) - u(t) \rangle_H .
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 + \int_\Omega D_s |\nabla u_s(t)|^{p_s(x)-2}\nabla u_s(t)(\nabla u_s(t) - \nabla u(t))dx \\
+ &\int_\Omega |u_s(t)|^{p_s(x)-2}u_s(t)(u_s(t) - u(t))dx - \int_\Omega |u(t)|^{p-2}u(t)(u_s(t) - u(t))dx \\
= &\ \langle B(u_s(t)) - B(u(t)), u_s(t) - u(t) \rangle_H .
\end{aligned}$$

Usando que B é globalmente Lipschitziana, temos

$$\langle B(u_s(t)) - B(u(t)), u_s(t) - u(t) \ \rangle_H \leq L\|u_s(t) - u(t)\|_H^2.$$

Observando que u é independente de x, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 + \int_\Omega D_s |\nabla u_s(t)|^{p_s(x)}dx + \int_\Omega |u_s(t)|^{p_s(x)-2}u_s(t)(u_s(t) - u(t))dx \\
&- \int_\Omega |u(t)|^{p-2}u(t)(u_s(t) - u(t))dx \leq L\|u_s(t) - u(t)\|_H^2.
\end{aligned}$$

Assim, visto que $\int_\Omega D_s|\nabla u_s(t)|^{p_s(x)}dx \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t)-u(t)\|_H^2 + \int_\Omega |u_s(t)|^{p_s(x)-2}u_s(t)(u_s(t)-u(t))dx \\
&-\int_\Omega |u(t)|^{p_s(x)-2}u(t)(u_s(t)-u(t))dx + \int_\Omega |u(t)|^{p_s(x)-2}u(t)(u_s(t)-u(t))dx \\
&-\int_\Omega |u(t)|^{p-2}u(t)(u_s(t)-u(t))dx \leq L\|u_s(t)-u(t)\|_H^2.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1.29, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |u_s(t)|^{p_s(x)-2}u_s(t)(u_s(t)-u(t))dx - \int_\Omega |u(t)|^{p_s(x)-2}u(t)(u_s(t)-u(t))dx \\
&= \int_\Omega \left(|u_s(t)|^{p_s(x)-2}u_s(t) - |u(t)|^{p_s(x)-2}u(t)\right)(u_s(t)-u(t))dx \\
&\geq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\right)^{p_s(x)} |u_s(t)-u(t)|^{p_s(x)}dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t)-u(t)\|_H^2 \leq & L\|u_s(t)-u(t)\|_H^2 - \int_\Omega \left(|u(t)|^{p_s(x)-2} - |u(t)|^{p-2}\right)u(t)(u_s(t)-u(t))dx \\
\leq & L\|u_s(t)-u(t)\|_H^2 + \int_\Omega \left||u(t)|^{p_s(x)-2} - |u(t)|^{p-2}\right| \, |u(t)| \, |u_s(t)-u(t)|dx \\
= & L\|u_s(t)-u(t)\|_H^2 + \int_\Omega \left||u(t)|^{p_s(x)-1} - |u(t)|^{p-1}\right| |u_s(t)-u(t)|dx,
\end{aligned}$$

q.t.p. em $(0,T)$. Agora, vamos estimar o termo

$$\int_\Omega \left||u(t)|^{p_s(x)-1} - |u(t)|^{p-1}\right| |u_s(t)-u(t)|dx,$$

do Teorema 3.1 em [20], existe uma constante positiva K_∞, independente de x e s, satisfazendo $|u(t)| \leq K_\infty$ para todo $t \in [0,T]$. Pelo Teorema do Valor Médio, para cada $x \in \Omega$ e $s \in \mathbb{N}$ existe um $q \in (p, p_s(x))$ tal que

$$\left||u(t)|^{p_s(x)-1} - |u(t)|^{p-1}\right| = \left||u(t)|^{q-1}\ln|u(t)|\right| |p_s(x)-p|,$$

desde que $u(t) \neq 0$. Considere a função contínua $g_\theta : [0, K_\infty] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_\theta(w) = \begin{cases} w^\theta \ln w & \text{se} \quad w \in (0, K_\infty] \\ 0 & \text{se} \quad w = 0, \end{cases}$$

com $\theta \geq 1$. Usando a função acima definida no conjunto compacto $[0, K_\infty]$, com $\theta = 1$ quando $|u(t)| < 1$ e com $\theta = a - 1$ quando $|u(t)| \geq 1$, então existe uma constante positiva κ tal que

$$\left| |u(t)|^{q-1} \ln |u(t)| \right| \leq \kappa,$$

para todo $t \in [0, T]$, com $u(t) \neq 0$, pois uma função contínua em um conjunto compacto é limitada. Então,

$$\left| |u(t)|^{p_s(x)-1} - |u(t)|^{p-1} \right| \leq \kappa |p_s(x) - p|,$$

para todo $t \in [0, T]$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 \leq & L\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 + \int_\Omega \kappa |p_s(x) - p| \; |u_s(t) - u(t)| dx \\ = & L\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 + \kappa \|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u_s(t) - u(t)| dx. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 \leq & L\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 + \kappa \|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u_s(t) - u(t)| dx \\ \leq & L\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 \\ & + \kappa \|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)} \left[\frac{1}{2}|\Omega| + \frac{1}{2}\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 \right], \end{aligned} \tag{3.22}$$

q.t.p. em $(0, T)$. Integrando (3.22) de 0 a t, $t \leq T$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(\tau) - u(\tau)\|_H^2 \, d\tau \leq & \int_0^t L\|u_s(\tau) - u(\tau)\|_H^2 \, d\tau \\ & + \int_0^t \kappa \|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)} \left[\frac{1}{2}|\Omega| + \frac{1}{2}\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 \right] \, d\tau. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|u_s(t) - u(t)\|_H^2 \leq & \|u_{0s} - u_0\|_H^2 + \kappa \|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega| T \\ & + \int_0^t (2L + \kappa \|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)}) \|u_s(\tau) - u(\tau)\|_H^2 \, d\tau. \end{aligned}$$

Então, pelo Lema de Gronwall-Bellman, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_s(t) - u(t)\|_H^2 & \leq \left(\|u_{0s} - u_0\|_H^2 + \kappa \|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega| T \right) e^{\int_0^t 2L + \kappa \|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)} \, d\tau} \\ & \leq \left(\|u_{0s} - u_0\|_H^2 + \kappa \|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega| T \right) e^{(2L + \kappa \|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)})T}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$. Portanto, $u_s \to u$ em $C([0, T]; H)$ quando $s \to +\infty$. ■

3.5 Semicontinuidade superior dos atratores globais

Provaremos nesta seção, a semicontinuidade superior da família de atratores globais $\{\mathcal{A}_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ com $s\to\infty$ para o problema (3.1) com respeito ao par de parâmetros D_s e p_s.

O lema a seguir mostra que os elementos relevantes para descrever o comportamento assintótico desses problemas estão em torno da média espacial, se s é suficientemente grande.

Lema 3.5.1. *Se para cada $s\in\mathbb{N}$, $u_{0s}\in\mathcal{A}_s$ e $u_0=\lim\limits_{s\to\infty}u_{0s}$ em H, então u_0 é uma função constante.*

Demonstração: Usando a Desigualdade de Poincaré-Wirtinger (p.194 em [5]) e a invariância do atrator, temos que

$$\|u_{0s}-\overline{u_{0s}}\|_H\le C\|\nabla u_{0s}\|_H,$$

com $\overline{u_{0s}}:=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_{0s}(x)dx$. Pelo Teorema 3.4.1, a menos de uma subsequência temos que

$$\|u_{0s}-\overline{u_{0s}}\|_H\le C\|\nabla u_{0s}\|_H\to 0$$

quando $s\to\infty$. Então,

$$\|u_{0s}-\overline{u_{0s}}\|_H\to 0, \tag{3.23}$$

quando $s\to\infty$. Como, $u_{0s}\to u_0$ em H temos que $u_{0s}\rightharpoonup u_0$ em H. Considerando a função característica $\chi_\Omega\subset H$ vem que

$$\langle\chi_\Omega,u_{0s}\rangle=\int_\Omega\chi_\Omega u_{0s}(x)\ dx\to\int_\Omega\chi_\Omega u_0(x)\ dx=\langle\chi_\Omega,u_0\rangle,$$

o que implica

$$\int_\Omega u_{0s}(x)\ dx\to\int_\Omega u_0(x)\ dx.$$

Assim,

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_{0s}(x)\ dx\to\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)\ dx$$

e, então, $\overline{u_{0s}}\to\overline{u_0}$ em $\mathbb{R}$. Observando que

$$\|\overline{u_{0s}}-\overline{u_0}\|_H^2=\int_\Omega|u_{0s}-u_0|^2dx\ \ =\ \ |u_{0s}-u_0|^2\int_\Omega dx=|u_{0s}-u_0|^2|\Omega|\to 0,$$

quando $s \to \infty$, vem que $\overline{u_{0s}} \to \overline{u_0}$ em H. Segue de (3.23) e do fato que $u_{0s} \to u_0$ em H que $\overline{u_{0s}} \to u_0$ em H. Logo, pela unicidade do limite concluímos que $u_0 = \overline{u_0}$ e então u_0 é uma função constante. ■

Seguindo as ideias e adaptando alguns argumentos do Teorema 4.1 em [20] temos a prova do seguinte Teorema:

Teorema 3.5.2. *A família de B-atratores globais $\{\mathcal{A}_s;\ s \in \mathbb{N}\}$ associada com o problema (3.1) é semicontínua superiormente quando $s \to \infty$, na topologia de H.*

Demonstração: Seja $\{u_0^s\}$ uma sequência qualquer com $u_0^s \in \mathcal{A}_s$, para $s \geq 1$, $s \to \infty$. Para obtermos a semicontinuidade superior da família de B-atratores globais, pelo Lema 2.4.9, é suficiente mostrar que $\{u_0^s\}$ possui subsequência convergente e que o limite pertence ao B-atrator global $\mathcal{A}^\infty$ do problema limite. Pelo Corolário 3.3.6, $\mathcal{A}_s = \overline{\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_s}$ é um subconjunto compacto. Logo, existe uma subsequência $\{u_0^{s_j}\}$ de $\{u_0^s\}$ tal que $u_0^{s_j} \to u_0$ em H quando $j \to \infty$. Pelo Lema 3.5.1, $u_0 \in \mathbb{R}$. Nosso objetivo é mostrar que $u_0 \in \mathcal{A}^\infty$. Usando a Proposição 2.2 em [15], é suficiente mostrar que passa uma trajetória completa limitada $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por u_0. Sejam $\{T^{s_j}(\tau)\}$ e $\{T(\tau)\}$ os semigrupos associados aos problemas (3.1) e (3.15), respectivamente. Para cada $j \in \mathbb{N}$, considere $t_j > j$, $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ e $x_j \in \mathcal{A}_{s_j}$ tais que

$$T^{s_j}(t_j)(x_j) = u_0^{s_j} \to u_0,$$

quando $j \to \infty$. Do Teorema 3.4.2, temos

$$T^{s_j}(t)u_0^{s_j} = T^{s_j}(t_j + t)(x_j) \to T(t)u_0,$$

em H. Agora considere a sequência

$$\{T^{s_j}(t_j - 1)(x_j)\} \subset \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_s \subset \overline{\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_s},$$

contida num compacto. Então, passando para uma subsequência, se necessário, temos

$$T^{s_j}(t_j - 1)(x_j) \to z_1,$$

em H. Pelo Lema 3.5.1, $z_1 \in \mathbb{R}$. Aplicando o Teorema 3.4.2, obtemos

$$T^{s_j}(t_j - 1 + t)(x_j) = T^{s_j}(t)T^{s_j}(t_j - 1)(x_j) \to T(t)z_1,$$

para $t \geq 0$ em H.

Afirmação: $T(1)z_1 = u_0$. De fato,

$$\begin{aligned} T(1)z_1 &= \lim_{j\to\infty} T^{s_j}(t_j - 1 + 1)(x_j) \\ &= \lim_{j\to\infty} T^{s_j}(t_j)(x_j) = u_0 =: z_0. \end{aligned}$$

Analogamente, existe $z_2 \in \mathbb{R}$ tal que $T^{s_j}(t_j - 2 + t)(x_j) \to T(t)z_2$ e

$$\begin{aligned} T(1)z_2 &= \lim_{j\to\infty} T^{s_j}(t_j - 2 + 1)(x_j) \\ &= \lim_{j\to\infty} T^{s_j}(t_j - 1)(x_j) = z_1. \end{aligned}$$

Procedendo indutivamente, escolha para cada $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$ um número real z_r tal que,

$$T(1)z_{r+1} = z_r.$$

Dado $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$\varphi(t) := T(t + r)z_r, \quad \text{para} \quad r > -t,$$

isto é,

$$\varphi(t) := \begin{cases} T(t)u_0, & t \geq 0, \\ T(t+1)z_1, & t \in [-1, 0), \\ \quad\vdots & \\ T(t+r)z_r, & t \in [-r, -(r-1)), \\ \quad\vdots & \end{cases}$$

como mostra a Figura 3.1

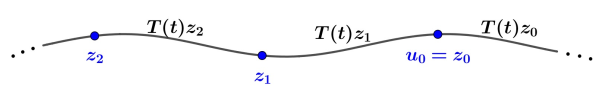

Figura 3.1: Curva definida por φ.

Provaremos agora que φ é uma trajetória completa. Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $\tau \geq 0$ de forma que $-r \leq t + \tau < -r + 1$. Assim, se $-r \leq t < -r + 1$, temos

$$\varphi(t + \tau) = T(t + \tau + r)z_r = T(\tau)T(t + r)z_r = T(\tau)\varphi(t).$$

Se $t < -r$. Então, $t \in [-r-j, -r-j+1)$, para algum $j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned} T(\tau)\varphi(t) =& T(\tau)T(t+r+j)z_{r+j} = T(\tau+t+r+j)z_{r+j} \\ =& T(\tau+t+r+j-1)T(1)z_{r+j} = \ldots = T(t+\tau+r)z_r = \varphi(t+\tau). \end{aligned}$$

Portanto, φ é uma trajetória completa. Resta mostrar que φ é uma trajetória limitada. Note que para cada $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$ temos que cada

$$T(t+r)z_r = \lim_{j \to \infty} T^{s_j}(t_j + t)(x_j) \ \text{ e } \ T^{s_j}(t_j+t)(x_j) \in \mathcal{A}_s, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Usando o Lema 3.5.1, concluímos que cada $\varphi_r(t) := T(t+r)z_r$ é independente de x e, consequentemente, $\varphi(t)$ é uma função constante em x. Como

$$\mathcal{A}_s \subset \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_s,$$

então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\varphi_r(t)\|_H \leq C, \ \forall \ t \in [-r, -(r-1)), \quad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

Assim, em particular, temos que $\varphi(t)$ é limitada em H. Então, existe uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que

$$|\varphi(t)| = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \|\varphi(t)\|_H \leq \tilde{C}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, concluímos que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma trajetória completa limitada para $\{T(\tau)\}_{\tau \geq 0}$.

■

Capítulo 4

Equação de reação-difusão não autônomas com expoentes variáveis e difusão grande

Neste capítulo consideramos o seguinte problema não autônomo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_s}{\partial t}(t) - D_s \mathrm{div}(|\nabla u_s|^{p_s(x)-2}\nabla u_s) + C(t)|u_s|^{p_s(x)-2}u_s = B(u_s(t)), \;\; t > \tau, \\ u_s(\tau) = u_{\tau s}, \end{cases} \tag{4.1}$$

sob condições homogêneas de fronteira de Neumann, $u_0 \in H := L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ um domínio regular limitado, $B : H \to H$ uma aplicação globalmente Lipschitziana, com constante de Lipschitz $L \geq 0$, $D \in [1, \infty)$ e $C(\cdot) \in C([\tau, T], \mathbb{R})$, com $C(t) \leq C(s)$, para todo $s \leq t$ e $0 < \alpha \leq C(t) \leq M$. Assumiremos que $p_s(\cdot) \to p$ em $L^\infty(\Omega)$ e $D_s \to \infty$ quando $s \to \infty$, com $a, p > 2$ constantes positivas.

Lema 4.0.1. *[1]Sejam λ e μ números arbitrários não negativos. Se para todos α e β positivos, tais que $\alpha \geq \beta$, então*

$$\lambda^\alpha + \mu^\beta \geq \frac{1}{2^\alpha} \begin{cases} (\lambda+\mu)^\alpha, & se \;\; \lambda + \mu < 1, \\ (\lambda+\mu)^\beta, & se \;\; \lambda+\mu \geq 1 \end{cases} . \tag{4.2}$$

4.1 Operador maximal monótono do tipo subdiferencial

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e consideremos $X = W^{1,p(x)}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ e $p(x) \in C(\overline{\Omega})$ com $p(x) > 2$ para q.t. $x \in \Omega$, com norma $||\cdot||_X := ||\cdot||_{W^{1,p(x)}(\Omega)}$. Nesta seção provaremos que o operador $A(t) : X \to X^*$, definido por

$$\langle A(t)u, v\rangle_{X^*,X} := \int_\Omega D|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_\Omega C(t)|u(x)|^{p(x)-2}u(x)v(x)dx,$$

e sua realização $A_H(t) : H \to H$ dada por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A(t)) := \{u \in X : A_H(t)u \in H\}, \\ A(t)u = A_H(t)u, \quad \text{se} \quad u \in \mathcal{D}(A(t)) \end{cases},$$

são um operadores maximais monótonos. De agora em diante, denotaremos

$$A_H(t)u := -div(D|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + C(t)|u|^{p(x)-2}u.$$

Lema 4.1.1. *Seja $u \in X := W^{1,p(x)}(\Omega)$. Para cada $t \geq 0$ temos*

$$\langle A(t)u, u\rangle_{X^*,X} \geq \frac{min\{1,\alpha\}}{2^{p^+}} \begin{cases} \|u\|_X^{p^+}, & se \quad \|u\|_X < 1 \\ \|u\|_X^{p^-}, & se \quad \|u\|_X \geq 1 \end{cases}. \tag{4.3}$$

Demonstração: Dado $u \in X$ arbitrário, denote $\lambda = \|\nabla u\|_{p(x)}$ e $\mu = \|u\|_{p(x)}$. Pelo Lema 4.0.1 e o Teorema 2.2.3, temos

$$\begin{aligned} \langle A(t)u, u\rangle_{X^*,X} &= \int_\Omega D|\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega C(t)|u|^{p(x)}dx \\ &= D\rho(\nabla u) + C(t)\rho(u) \geq \rho(\nabla u) + \alpha\rho(u) \\ &\geq min\{\|\nabla u\|_{p(x)}^{p+}, \|\nabla u\|_{p(x)}^{p-}\} + \alpha \; min\{\|u\|_{p(x)}^{p+}, \|u\|_{p(x)}^{p-}\} \\ &= min\{\lambda^{p+}, \lambda^{p-}\} + \alpha \;\; min\{\mu^{p+}, \mu^{p-}\} \\ &\geq min\{1,\alpha\}\left(min\{\lambda^{p+}, \lambda^{p-}\} + min\{\mu^{p+}, \mu^{p-}\}\right) \\ &\geq \frac{min\{1,\alpha\}}{2^{p+}} \begin{cases} (\lambda+\mu)^{p^+}, & \text{se} \quad \lambda+\mu < 1 \\ (\lambda+\mu)^{p^-}, & \text{se} \quad \lambda+\mu \geq 1 \end{cases} \\ &= \frac{min\{1,\alpha\}}{2^{p+}} \begin{cases} \|u\|_X^{p^+}, & \text{se } \|u\|_X < 1 \\ \|u\|_X^{p^-}, & \text{se } \|u\|_X \geq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

■

Lema 4.1.2. *Para cada $t \geq 0$, o operador $A(t) : X \to X^*$ é monótono.*

Demonstração: Sejam $u, v \in X$. Usando o Lema 2.1.29 para cada $x \in \Omega$ fixado e observando que $D \in [1, \infty)$ e $0 < \alpha \leq C(t)$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \langle A(t)u - A(t)v, u - v\rangle_{X^*,X} = \langle A(t)u, u - v\rangle_{X_*,X} - \langle A(t)v, u - v\rangle_{X^*,X} \\
= & \int_\Omega D|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla(u-v)dx + \int_\Omega C(t)|u|^{p(x)-2}u.(u-v)dx \\
- & \int_\Omega D|\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v.\nabla(u-v)dx - \int_\Omega C(t)|v|^{p(x)-2}v.(u-v)dx \\
= & \int_\Omega D\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v\right)(\nabla u - \nabla v)\,dx \\
+ & \int_\Omega C(t)\left(|u|^{p(x)-2}u - |v|^{p(x)-2}v\right)(u-v)\,dx \\
\geq & \int_\Omega D\left(\frac{1}{2}\right)^{p(x)} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)}dx + \int_\Omega C(t)\left(\frac{1}{2}\right)^{p(x)} |u-v|^{p(x)}dx \\
\geq & \left(\frac{1}{2}\right)^{p^+}\left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p(x)}dx + \int_\Omega C(t)|u-v|^{p(x)}dx\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

■

Lema 4.1.3. *Para cada $t \geq 0$, o operador $A(t) : X \to X^*$ é coercivo.*

Demonstração: *Considere $(u_j) \subset X$ tal que $\lim_{j\to\infty} ||u_j||_X = \infty$. Então, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||u_j||_X \geq 1$, se $j \geq j_0$. Assim, pelo Lema 4.1.1 temos que*

$$\frac{\langle A(t)u_j, u_j\rangle_{X^*,X}}{||u_j||_X} \geq \frac{min\{1,\alpha\}\|u_j\|_X^{p^-}}{2^{p^+}\|u_j\|_X} = \frac{min\{1,\alpha\}\|u_j\|_X^{p^- -1}}{2^{p^+}},$$

para todo $j \geq j_0$. Como

$$\lim_{j\to\infty} \frac{min\{1,\alpha\}}{2^{p^+}}||u_j||_X^{p^- -1} = \infty,$$

temos

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\left\langle A(t)u_j, u_j\right\rangle_{X^*,X}}{||u_j||_X} = \infty.$$

■

Lema 4.1.4. *Para cada $t \geq 0$, o operador $A(t) : X \to X^*$ é hemicontínuo.*

Demonstração: Vamos mostrar que $A(t)(u+\lambda v) \rightharpoonup A(t)u$ quando $\lambda \to 0$, para todo $u, v \in X = W^{1,p(x)}(\Omega)$. Como $p^- > 1$, segue da Proposição 2.3.2 que X é reflexivo. Logo, basta mostrar que

$$\lim_{\lambda \to 0} \langle A(t)(u+\lambda v), \phi \rangle_{X^*,X} = \langle A(t)u, \phi \rangle_{X^*,X},$$

para toda $\phi \in X$. Sejam $u, v, \phi \in X$ e $\lambda \in (-1,1)$. Definindo

$$f_\lambda^t(x) = D|\nabla(u+\lambda v)|^{p(x)-2}\nabla(u+\lambda v).\nabla\phi + C(t)|u+\lambda v|^{p(x)-2}(u+\lambda v)\phi$$

e

$$f^t(x) = D|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla\phi + C(t)|u|^{p(x)-2}u\phi,$$

então,

$$\begin{aligned}
\langle A(t)(u+\lambda v), \phi \rangle_{X^*,X} - \langle A(t)u, \phi \rangle_{X^*,X}| &= \left| \int_\Omega f_\lambda^t(x)dx - \int_\Omega f^t(x)dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega \left[f_\lambda^t(x) - f^t(x) \right] dx \right|.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to 0} f_\lambda^t(x) = &\lim_{\lambda \to 0} D|\nabla(u+\lambda v)^{p(x)-2}|\nabla(u+\lambda v).\nabla\phi + C(t)|u+\lambda v|^{p(x)-2}(u+\lambda v)\phi \\
= &\; D \lim_{\lambda \to 0} |\nabla(u+\lambda v)|^{p(x)-2}\nabla(u+\lambda v).\nabla\phi + C(t)|u+\lambda v|^{p(x)-2}(u+\lambda v)\phi \\
= &\; D|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla\phi + C(t)|u|^{p(x)-2}u\phi \\
= &\; f^t(x)
\end{aligned}$$

e, para cada $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
|f_\lambda^t(x)| = &\; |D|\nabla(u+\lambda v)|^{p(x)-2}\nabla(u+\lambda v).\nabla\phi + C(t)|u+\lambda v|^{p(x)-2}(u+\lambda v)\phi| \\
\leq &\; |D|\nabla(u+\lambda v)|^{p(x)-2}\nabla(u+\lambda v).\nabla\phi| + |C(t)||u+\lambda v|^{p(x)-2}(u+\lambda v)\phi| \\
= &\; D|\nabla(u+\lambda v)|^{p(x)-1}|\nabla\phi| + |C(t)||u+\lambda v|^{p(x)-1}|\phi| \\
\leq &\; D\left(|\nabla u| + |\lambda||\nabla v|\right)^{p(x)-1}|\nabla\phi| + |C(t)|\left(|u| + |\lambda||v|\right)^{p(x)-1}|\phi| \\
\leq &\; 2^{p(x)-2}D\big(|\nabla u|^{p(x)-1} + |\nabla v|^{p(x)-1}\big)|\nabla\phi| + |C(t)|2^{p(x)-2}\big(|u|^{p(x)-1} + |v|^{p(x)-1}\big)|\phi| \\
\leq &\; 2^{p(x)-2}\left[D\left(|\nabla u|^{p(x)-1} + |\nabla v|^{p(x)-1}\right)|\nabla\phi| + M\left(|u|^{p(x)-1} + |v|^{p(x)-1}\right)|\phi|\right] \\
=: &\; g(x).
\end{aligned}$$

Como $u, v, \phi \in X,\ p(x) \in L_\infty(\Omega)$ e $p(x) \geq 2$, temos que $L^{p(x)-1}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. Assim,

$$\int_\Omega |g(x)| < \infty$$

e, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{\lambda\to 0} |\langle A(t)(u+\lambda v), \phi\rangle_{X^*,X} - \langle A(t)u, \phi\rangle_{X^*,X}| &= \lim_{\lambda\to 0}\left|\int_\Omega \left[f_\lambda^t(x) - f^t(x)\right] dx\right| \\ &\leq \lim_{\lambda\to 0}\int_\Omega |f_\lambda^t(x) - f^t(x)| dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\lambda\to 0}\langle A(t)(u+\lambda v), \phi\rangle_{X^*,X} = \langle A(t)u, \phi\rangle_{X^*,X}.$$

■

Pelo Teorema 2.4 em [2], o operador $A(t) : X \to X^*$ é maximal monótono. Mostraremos agora que $A_H(t)$ é a subdferencial de uma função convexa, própria e semicontínua inferiormente. Considere a função

$$\varphi^t_{p(x)}(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{D}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{C(t)}{p(x)}|u|^{p(x)}dx, \text{se } \ u \in X \\ +\infty, \ \ \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Lema 4.1.5. *A aplicação $\varphi^t_{p(x)}$ é convexa e própria.*

Demonstração: Seja $u \in X = W^{1,p(x)}(\Omega)$. Então, $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $\nabla u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{D}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{C(t)}{p(x)}|u|^{p(x)}dx &\leq \frac{1}{2}\left[D\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + C(t)\int_\Omega |u|^{p(x)}dx\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\left[D\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + M\int_\Omega |u|^{p(x)}dx\right] < \infty, \end{aligned}$$

donde $\varphi^t_{p(x)}$ é própria. Como a aplicação γ^p é convexa, para $\gamma > 0$ dado e $u, v \in X$ e

$0 \leq \lambda \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
\varphi^t_{p(x)}(\lambda u + (1-\lambda)v) = & \int_\Omega \frac{D}{p(x)}|\nabla(\lambda u + (1-\lambda)v)|^{p(x)}dx \\
+ & \int_\Omega \frac{C(t)}{p(x)}|\lambda u + (1-\lambda)v|^{p(x)}dx \\
\leq & \int_\Omega \frac{D}{p(x)}\left(\lambda|\nabla u|^{p(x)} + (1-\lambda)|\nabla v|^{p(x)}\right)dx \\
+ & \int_\Omega \frac{C(t)}{p(x)}\left(\lambda|u|^{p(x)} + (1-\lambda)|v|^{p(x)}\right)dx \\
= & \lambda\int_\Omega \frac{D}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + \lambda\int_\Omega \frac{C(t)}{p(x)}|u|^{p(x)}dx \\
+ & (1-\lambda)\int_\Omega \frac{D}{p(x)}|\nabla v|^{p(x)}dx + (1-\lambda)\int_\Omega \frac{C(t)}{p(x)}|v|^{p(x)}dx \\
= & \lambda\varphi^t_{p(x)}(u) + (1-\lambda)\varphi^t_{p(x)}(v),
\end{aligned}$$

e, portanto, $\varphi^t_{p(x)}$ é convexa. ■

Lema 4.1.6. *A aplicação* $\varphi^t_{p(x)}$ *é semicontínua inferiormente.*

Demonstração: Seja, então (u_n) uma sequência tal que $u_n \to u$ em H. Mostraremos que

$$\varphi^t_{p(x)}(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi^t_{p(x)}(u_n),$$

quando $u_n \to u \in H$. Se

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi^t_{p(x)}(u_n) = +\infty,$$

então

$$\varphi^t_{p(x)}(u) \leq +\infty = \liminf_{n\to\infty} \varphi^t_{p(x)}(u_n).$$

Por outro lado, se

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi_{p(x)}(u_n) = a < +\infty,$$

então existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset X$ de (u_n) tal que

$$\lim_{j\to\infty} \varphi^t_{p(x)}(u_{n_j}) = \lim_{j\to\infty}\left(\int_\Omega \frac{D}{p(x)}|\nabla u_{n_j}|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{C(t)}{p(x)}|u_{n_j}|^{p(x)}dx\right) = a.$$

Como $\varphi^t_{p(x)}(u_{n_j}) \to a$ quando $j \to \infty$, temos que $\varphi^t_{p(x)}(u_{n_j})$ é limitada, isto é, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi^t_{p(x)}(u_{n_j})| \leq \delta,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Como $D \in [1, \infty)$ e $C(t) \leq M$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi^t_{p(x)}(u_{n_j}) &= \int_\Omega \frac{D}{p(x)} |\nabla u_{n_j}|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{C(t)}{p(x)} |u_{n_j}|^{p(x)} dx \\
&\geq \int_\Omega \frac{C(t)}{p(x)} |u_{n_j}|^{p(x)} dx \geq \frac{C(t)}{p^+} \int_\Omega |u_{n_j}|^{p(x)} dx \\
&\geq \frac{\alpha}{p^+} \rho(u_{n_j}).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{\alpha}{p^+} \rho(u_{n_j}) \leq \varphi^t_{p(x)}(u_{n_j}) \leq \delta.$$

Logo,

$$\rho(u_{n_j}) \leq \frac{p^+ \delta}{\alpha}. \tag{4.5}$$

Da mesma forma obtemos que

$$\rho(\nabla u_{n_j}) \leq p^+ \delta. \tag{4.6}$$

Usando (4.5), (4.6) e o Lema 2.2.3, temos que

$$||u_{n_j}||_{p(x)} \leq \begin{cases} \left(\dfrac{p^+\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p^-}}, & se \ \ ||u_{n_j}||_{p(x)} \geq 1 \\ \left(\dfrac{p^+\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p^+}}, & se \ \ ||u_{n_j}||_{p(x)} < 1 \end{cases}$$

e

$$||\nabla u_{n_j}||_{p(x)} \leq \begin{cases} (p^+\delta)^{\frac{1}{p^-}}, & se \ \ ||\nabla u_{n_j}||_{p(x)} \geq 1 \\ (p^+\delta)^{\frac{1}{p^+}}, & se \ \ ||\nabla u_{n_j}||_{p(x)} < 1 \end{cases}.$$

Assim, concluímos que $||u_{n_j}||_X$ é uma sequência limitada no espaço de Banach reflexivo $X = W^{1,p(x)}(\Omega)$. Logo, pelo Teorema 2.1.33, (u_{n_j}) possui uma subsequência (que também denotaremos por (u_{n_j})) tal que $u_{n_j} \rightharpoonup v$ em X para algum $v \in X$. Como $H^* \subset X^*$, temos que $u_{n_j} \rightharpoonup v$ em H e, pela unicidade do limite fraco, $u = v \in X$. Considerando a subdiferencial $\partial\varphi^t_{p(x)}$ de $\varphi^t_{p(x)}$, temos

$$\langle \partial\varphi^t_{p(x)}(u), u_{n_j} - u \rangle_{X^*,X} \leq \varphi^t_{p(x)}(u_{n_j}) - \varphi^t_{p(x)}(u),$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $u_{n_j} \rightharpoonup u$ em X e $\varphi^t_{p(x)}(u) \in X^*$, vem que

$$\langle \partial\varphi^t_{p(x)}(u), u_{n_j} - u\rangle_{X^*,X} \to 0$$

quando $j \to \infty$. Portanto,

$$\varphi^t_{p(x)}(u) \le \lim_{j\to\infty} \varphi^t_{p(x)}(u_{n_j}) = a = \liminf_{n\to\infty} \varphi^t_{p(x)}(u_n).$$

■

Teorema 4.1.7. *$A_H(t)$ é a subdiferencial $\partial\varphi^t_{p(x)}$ de $\varphi^t_{p(x)}$.*

Demonstração: A realização $A_H(t)$ de $A(t)$ e $\partial\varphi^t_{p(x)}$ são maximais monótonos em H e, assim, é suficiente mostrar que para qualquer $u \in H$

$$A_H(t)u \subset \partial\varphi^t_{p(x)}(u).$$

Sejam $u \in \mathcal{D}(A_H(t)) := \{u \in X; A(t)u \in H\}$ e $v \in A_H(t)u = A(t)u$. Então, para todo $\xi \in X$ temos

$$\begin{aligned}
\langle v, \xi - u\rangle_{X^*,X} &= \langle A(t)u, \xi - u\rangle_{X^*,X} \\
&= \int_\Omega D|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.(\nabla\xi - \nabla u)dx + \int_\Omega C(t)|u|^{p(x)-2}u.(\xi - u)dx \\
&= \int_\Omega D|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla\xi dx - \int_\Omega D|\nabla u|^{p(x)}dx \\
&+ \int_\Omega C(t)|u|^{p(x)-2}u.\xi dx - \int_\Omega C(t)|u|^{p(x)}dx.
\end{aligned}$$

Considerando $q(x)$ tal que $1/p(x) + 1/q(x) = 1$, temos

$$\begin{aligned}
&\langle v, \xi - u\rangle_{X^*,X} + \int_\Omega D|\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega C(t)|u|^{p(x)}dx \\
&= \int_\Omega D|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\xi dx + \int_\Omega C(t)|u|^{p(x)-2}u\xi dx \\
&\le \int_\Omega D|\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla\xi|dx + \int_\Omega C(t)|u|^{p(x)-1}|\xi|dx \\
&\le \int_\Omega \frac{D}{q(x)}|\nabla u|^{(p(x)-1)q(x)} + \frac{D}{p(x)}|\nabla\xi|^{p(x)}dx \\
&+ \int_\Omega \frac{C(t)}{q(x)}|u|^{(p(x)-1)q(x)} + \frac{C(t)}{p(x)}|\xi|^{p(x)}dx \\
&= \int_\Omega \frac{D}{q(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{D}{p(x)}|\nabla\xi|^{p(x)}dx \\
&+ \int_\Omega \frac{C(t)}{q(x)}|u|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{C(t)}{p(x)}|\xi|^{p(x)}dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\langle v, \xi - u\rangle_{X^*,X} + \int_\Omega D\left(1-\frac{1}{q(x)}\right)|\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega C(t)\left(1-\frac{1}{q(x)}\right)|u|^{p(x)}dx\\ \leq\ & \int_\Omega \frac{D}{p(x)}|\nabla \xi|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{C(t)}{p(x)}|\xi|^{p(x)}dx.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\langle v, \xi - u\rangle_{X^*,X} \leq \varphi^t_{p(x)}(\xi) - \varphi^t_{p(x)}(u),$$

para todo $\xi \in X$. Se $\xi \in H - X$, então $\varphi^t_{p(x)}(\xi) = \infty$ e a desigualdade anterior vale. Isto mostra que $A_H(t)u = v \in \partial\varphi^t_{p(x)}(u)$. ■

4.2 Existência de Solução

Provaremos a existência de solução global usando resultados de [26], seguindo as ideias de [14] e fazendo as adaptações necessárias. Considere o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi^t u(t) = f(t), \ \ t > \tau, \\ u(\tau) = u_0 \in H, \end{cases} \tag{4.7}$$

Hipótese A: Seja $T > \tau$ fixado:

A.1: Existe um conjunto $0 \notin Z \subset [\tau, T]$ de medida nula tal que φ^t é uma função convexa, própria e semicontínua inferiormente em H para $(-\infty, \infty]$ com um domínio não vazio para cada $t \in [\tau, T] - Z$;

A.2: Para qualquer inteiro positivo r, existem uma constante $K_r > 0$, uma função $g_r : [\tau, T] \to \mathbb{R}$ absolutamente contínua, com $g_r' \in L^\beta(\tau, T)$, e uma função de variação limitada $h_r : [\tau, T] \to \mathbb{R}$ tais que se $t \in [\tau, T] - Z$, $w \in \mathcal{D}(\varphi^t)$, com $|w| \leq r$, e $s \in [t, T] - Z$, então existe um elemento $\tilde{w} \in \mathcal{D}(\varphi^s)$ satisfazendo

$$|\tilde{w} - w| \leq |g_r(s) - g_r(t)|(\varphi^t(w) + K_r)^\alpha \tag{4.8}$$

e

$$\varphi^s(\tilde{w}) \leq \varphi^t(w) + |h_r(s) - h_r(t)|(\varphi^t(w) + K_r), \tag{4.9}$$

com α uma constante $0 \leq \alpha \leq 1$ e

$$\beta := \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \dfrac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Teorema 4.2.1. *[26] Suponha que a Hipótese A é satisfeita. Então, para cada $f \in L^2(\tau, T; H)$ e $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\varphi^\tau)}$ o problema (4.7) possui uma única solução forte em $[\tau, T]$ com $u(\tau) = u_0$.*

Lema 4.2.2. *Se $f, g \in L^2(\tau, T; H)$ e u, v são soluções das equações*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi^t u(t) = f(t), \\ u(\tau) = u_0 \in H, \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) + \partial\varphi^t v(t) = g(t), \\ v(\tau) = v_0 \in H, \end{cases} \tag{4.11}$$

então, para $\tau \leq s \leq t \leq T$,

$$\|u(t) - v(t)\|_H \leq \|u(s) - v(s)\|_H + \int_s^t \|f(r) - g(r)\|_H dr.$$

Demonstração: Temos que

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial\varphi^t u(t) - \frac{dv}{dt}(t) - \partial\varphi^t v(t) = f(t) - g(t).$$

Então,

$$\frac{d}{dt}(u(t) - v(t)) + \partial\varphi^t u(t) - \partial\varphi^t v(t) = f(t) - g(t). \tag{4.12}$$

Multiplicando a equação (4.12) por $u(t) - v(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{d}{dt}(u(t) - v(t)), u(t) - v(t) \right\rangle + \langle \partial\varphi^t u(t), u(t) - v(t) \rangle - \langle \partial\varphi^t v(t), u(t) - v(t) \rangle \\ = \ & \langle f(t) - g(t), u(t) - v(t) \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(u(t) - v(t)), u(t) - v(t) \right\rangle \ &+ \ \langle \partial\varphi^t u(t) - \partial\varphi^t v(t), u(t) - v(t) \rangle \\ &= \ \langle f(t) - g(t), u(t) - v(t) \rangle. \end{aligned}$$

Usando a monotonicidade de $\partial\varphi^t$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)-v(t)\|_H^2 \leq \langle f(t)-g(t), u(t)-v(t)\rangle. \tag{4.13}$$

Integrando (4.13) de s a t, com $\tau \leq s \leq t \leq T$, vem que

$$\int_s^t \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\|u(r)-v(r)\|_H^2 dr \leq \int_s^t \langle f(r)-g(r), u(r)-v(r)\rangle dr.$$

Por Cauchy-Schwartz e o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\frac{1}{2}\|u(t)-v(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|u(s)-v(s)\|_H^2 + \int_s^t \|f(r)-g(r)\|_H\|u(r)-v(r)\|_H dr.$$

Usando o Lema de Gronwall, segue que

$$\|u(t)-v(t)\|_H \leq \|u(s)-v(s)\|_H + \int_s^t \|f(r)-g(r)\|_H dr.$$

■

A demonstração do próximo teorema é análoga à demonstração do Teorema 1 em [21]. Por completude também apresentaremos aqui.

Teorema 4.2.3. *Se $B : H \to H$ é globalmente Lipschitziana e $u_0 \in H$, então existe uma única $u \in C([\tau, T], H)$, tal que $du(t)/dt + \partial\varphi^t u(t) = B(u(t))$ q.t.p. t em $[\tau, T]$ e $u(\tau) = u_0$.*

Demonstração: Existência: Fixe $s \in [\tau, T]$. Para $t \in [\tau, T]$, temos

$$\|B(u(t)) - B(u(s))\|_H^2 \leq L^2\|u(t)-u(s)\|_H^2.$$

Assim,

$$\|B(u(t))\|_H^2 \leq 4\left(L^2\|u(t)-u(s)\|_H^2 + \|B(u(s))\|_H^2\right). \tag{4.14}$$

Se $u \in C(\tau, T, H)$, então $f(t) := B(u(t)) \in L^2(\tau, T; H)$. De fato, usando (4.14) e observando que $[\tau, T] \ni t \mapsto \|u(t)-u(s)\|_H^2 \in \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua, obtemos

$$\int_\tau^T \|f(t)\|_H^2 dt \leq \int_\tau^T 4L^2\|u(t)-u(s)\|_H^2 dt + \int_\tau^T \|B(u(s))\|_H^2 dt.$$

Assim,

$$\int_\tau^T \|f(t)\|_H^2 dt \leq 4L^2CT + \int_\tau^T \|B(u(s)\|_H^2 dt < \infty.$$

Seja $u_0 \in H$. Considere a sequência iterada definida como $u_0(t) = u_0$ e u_{n+1} uma solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{du_{n+1}}{dt}(t) + A(t)u_{n+1}(t) = B(u_n(t)) := f_n, \quad t > \tau, \\ u_{n+1}(\tau) = u_0 \in H, \end{cases} \tag{4.15}$$

onde $A(t) := \partial\varphi^t$. Usando o Lema 4.2.2, para $\tau \leq t \leq T$, temos

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_H &\leq \|u_{n+1}(\tau) - u_n(\tau)\|_H + \int_\tau^T \|B(u_n(r)) - B(u_{n-1}(r))\|_H dr \\ &\leq L\int_\tau^T \|u_n(r) - u_{n-1}(r)\|_H dr. \end{aligned}$$

Assim, para todo $t \in [\tau, T]$ e $n \in \mathbb{N}$ vem que

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_H \leq \frac{(Lt)^2}{n!}\|u_1 - u_0\|_{L^\infty(\tau,T;H)},$$

e, então $\{u_n\}$ converge uniformemente para a solução fraca de (4.7), com $u(\tau) = u_0$. Observe que $u_n \to u$ em $C([\tau, T]; H)$ e $f_n \to f$ em $L^1(\tau, T; H)$, pois

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L^1(\tau,T;H)} &= \int_\tau^T \|f_n(t) - f(t)\|_H dt \\ &= \int_\tau^T \|B(u_n(t)) - B(u(t))\|_H dt \\ &\leq L\int_\tau^T \|u_n(t) - u(t)\|_H dt \to 0, \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Como $f(t) := B(u(t)) \in L^2(\tau, T; H)$, pelo Teorema 4.2.1, existe uma única função $y(t)$, com $y \in C([\tau, T], H)$, satisfazendo

$$\frac{du}{dt}(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad q.t.p. \text{ em } (\tau, T) \text{ e } y(\tau) = u_0.$$

Pelo Lema 4.2.2, para $\tau \leq t \leq T$, obtemos

$$\begin{aligned} \|y(t) - u_n(t)\|_H &\leq \|y(\tau) - u_n(\tau)\|_H + \int_\tau^t \|f(r) - B(u_{n-1}(r))\|_H dr \\ &\leq L\int_\tau^t \|(u(r) - u_{n-1}(r)\|_H dr. \end{aligned}$$

Como $\{u_{n-1}\}$ converge uniformemente para u em $[\tau, T]$, temos $u_n \to y$ em $C([\tau, T], H)$. Logo, $u = y$. Então, u é uma solução forte para o problema (4.7).

Unicidade: Se u e v são soluções fortes de (4.7), temos

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) = B(u(t)), \;\; t > \tau, \\ u(\tau) = u_0 \in H. \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) + A(t)v(t) = B(v(t)), \;\; t > \tau, \\ v(\tau) = v_0 \in H. \end{cases}$$

Então,

$$\frac{d}{dt}(u(t) - v(t)) + A(t)u(t) - A(t)v(t) = B(u(t)) - B(v(t)). \tag{4.16}$$

Multiplicando a equação (4.16) por $u(t) - v(t)$, temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(u(t) - v(t)), u(t) - v(t) \right\rangle \;\; &+ \;\; \langle A(t)u(t), u(t) - v(t)\rangle - \langle A(t)v(t), u(t) - v(t)\rangle \\ &= \;\; \langle B(u(t)) - B(v(t)), u(t) - v(t)\rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(u(t) - v(t)), u(t) - v(t) \right\rangle \;\; &+ \;\; \langle A(t)u(t) - Av(t), u(t) - v(t)\rangle \\ &= \;\; \langle B(u(t)) - B(v(t)), u(t) - v(t)\rangle. \end{aligned}$$

Usando a monotonicidade de $A(t)$ e que B é globalmente Lipschtziana, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|_H^2 \le \langle B(u(t)) - B(v(t)), u(t) - v(t)\rangle \le L\|u(t) - v(t)\|_H^2. \tag{4.17}$$

Integrando (4.17) de τ a t, $t \in [\tau, T]$ segue que

$$\int_\tau^t \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|u(s) - v(s)\|_H^2 ds \le \int_\tau^t L\|u(s) - v(s)\|_H^2 ds.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\|u(t) - v(t)\|_H^2 \le \frac{1}{2}\|u(\tau) - v(\tau)\|_H^2 + \int_\tau^t L\|u(s) - v(s)\|_H^2 ds,$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_H^2 \;\; &\le \;\; \|u(\tau) - v(\tau)\|_H^2 + \int_\tau^t 2L\|u(s) - v(s)\|_H^2 ds \\ &= \;\; \int_\tau^t 2L\|u(s) - v(s)\|_H^2 ds. \end{aligned}$$

Usando o Lema de Gronwall-Belmann obtemos

$$0 \leq \|u(t) - v(t)\|_H^2 \leq 0e^{2L(T-\tau)} = 0,$$

para todo $t \in [\tau, T]$. Portanto, $u = v$.

Considerando o problema com nosso operador específico

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi^t_{p(\cdot)} u(t) = f(t), \quad t > \tau, \\ u(\tau) = u_0 \in H, \end{cases} . \tag{4.18}$$

verificaremos se a Hipótese A do Teorema 4.2.1 é satisfeita.

De fato, se $Z = \phi$, então $\varphi^t_{p(x)}$ é uma função convexa, própria e semicontínua inferiormente para cada $t \in [\tau, T]$. Considere r um inteiro postivo, $K_r := r$ e $\alpha := 1/2$. Defina $g_r : [\tau, T] \to \mathbb{R}$ por $g_r(t) := t + r$, e $h_r(t) := r$. Temos que g_r é um função absolutamente contínua, com $g_r' = 1 \in L^2(\tau, T)$, e h_r é uma função de variação limitada. Para todo $t \in [\tau, T], w \in \mathcal{D}(\varphi^t_{p(x)}) = X := W^{1,p(x)}(\Omega)$, com $\|w\| \leq r$ e $s \in [t, T]$. Considere o elemento $\tilde{w} := w \in X = \mathcal{D}(\varphi^t_{p(x)})$. Verifiquemos que $\tilde{w}$ satisfaz (4.8) e (4.9). Note que

$$\int_\Omega \frac{D}{p(x)} |\nabla w|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{C(t)}{p(x)} |w|^{p(x)} dx \geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\tilde{w} - w| = 0 \quad &\leq \quad |s - t| \left(\int_\Omega \frac{D}{p(x)} |\nabla w|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{C(t)}{p(x)} |w|^{p(x)} dx + r \right)^{1/2} \\ &= \quad |g_r(s) - g_r(t)| (\varphi^t_{p(x)}(w) + K_r)^\alpha. \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \varphi^s_{p(x)}(\tilde{w}) &= \int_\Omega \frac{D}{p(x)} |\nabla \tilde{w}|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{C(s)}{p(x)} |\tilde{w}|^{p(x)} dx \\ &= \int_\Omega \frac{D}{p(x)} |\nabla w|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{C(s)}{p(x)} |w|^{p(x)} dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{D}{p(x)} |\nabla w|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{C(t)}{p(x)} |w|^{p(x)} dx \\ &= \varphi^t_{p(x)}(w). \end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi^s_{p(x)}(\tilde{w}) \leq \varphi^t_{p(x)}(w) + |h_r(s) - h_r(t)| (\varphi^t_{p(x)}(w) + K_r).$$

e, portanto, pelo Teorema 4.2.1 obtemos a existência de solução global para o problema (4.7).

Teorema 4.2.4. *O problema (4.1) tem uma única solução forte.*

Demonstração: Basta aplicar o Teorema 4.2.3 com $A(t) = \partial\varphi^t_{p(x)}$. ■

4.3 Estimativas de soluções

De agora em diante, denotaremos $X_s := W^{1,p_s(x)}(\Omega)$ e $Y := W^{1,p}(\Omega)$. Nesta seção apresentaremos estimativas uniformes para as soluções do problema (4.1).

Sabemos que $X_s \subset H$ é uma imersão contínua e densa. Além disso, como já foi mostrado na Seção 3.4 do capítulo anterior, temos que

$$\|u_s\|_H \leq 4(|\Omega|+1)^2\|u_s\|_{X_s},$$

para todo $u_s \in X_s$ e $s \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.3.1. *Seja u_s uma solução de (4.1), com $u_s(\tau) = u_{\tau s} \in H$. Dado $T_1 > 0$, existe um número positivo r_0 tal que $\|u_s(t)\|_H \leq r_0$, para cada $t \geq T_1 + \tau$ e $s \in \mathbb{N}$. Além disso, dado um conjunto limitado $B \subset H$, então existe $\tilde{D}_1 > 0$ tal que $\|u_s(t)\|_H \leq \tilde{D}_1$, para todo $t \geq \tau$ e $s \in \mathbb{N}$ tal que $u_{\tau s} \in B$.*

Demonstração: Seja $t > \tau$. Multiplicando a equação (4.7) por $u_s(t)$ temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_s(t)||^2_H + \langle A^s(t)u_s(t), u_s(t)\rangle + \langle B(u_s(t)), u_s(t)\rangle.$$

Sejam $T > \tau$ arbitrário fixado e $I = (\tau, T) = I^1_s \cup I^2_s$ onde $I^1_s = \{t \in (\tau, T); \|u_s(t)\|_{X_s} < 1\}$ e $I^2_s = \{t \in (\tau, T); \|u_s(t)\|_{X_s} \geq 1\}$.

Como $X \subset H \subset X^*$, temos

$$\|u_s(t)\|_H \leq 4(|\Omega|+1)^2\|u_s(t)\|_{X_s} \leq 4(|\Omega|+1)^2, \quad \forall\, t \in I^1_s.$$

Dado $T_1 > 0$ arbitrário, se $\|u_s(t)\|_{X_s} \geq 1$, pelo Lema 4.1.1, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t))\|^2_H \leq -\frac{min\{1,\alpha\}}{2^{p_s^+}}\|u_s(t)\|^{p_s^-}_{X_s} + \langle B(u_s(t)), u_s(t)\rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t))\|_H^2 \leq& -\frac{min\{1,\alpha\}}{2^a}\|u_s(t)\|_{X_s}^p + L\|u_s(t)\|_H^2 + \|B(0)\|_H\|u_s(t)\|_H \\ \leq& -\frac{min\{1,\alpha\}}{2^a}\|u_s(t)\|_{X_s}^p + C_1\|u_s(t)\|_{X_s}^2 + C_2\|u_s(t)\|_{X_s},\end{aligned}$$

onde $C_1 := LK^2$ e $C_2 := C_0K$, com $K := 4(|\Omega|+1)^2$ e $C_0 := \|B(0)\|_H \geq 0$. Seja $\theta := p/2$, com $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$. Agora, considere $\epsilon > 0$ arbitrário. Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t))\|_H^2 \leq -\frac{\min\{1,\alpha\}}{2^a}\|u_s(t)\|_{X_s}^p + \frac{C_1}{\varepsilon}\varepsilon\|u_s(t)\|_{X_s}^2 + \frac{C_2}{\varepsilon}\varepsilon\|u_s(t)\|_{X_s}.$$

Pela desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t))\|_H^2 \leq& -\frac{\min\{1,\alpha\}}{2^a}\|u_s(t)\|_{X_s}^p + \frac{1}{\theta'}\left(\frac{C_1}{\varepsilon}\right)^{\theta'} + \frac{1}{\theta}\varepsilon^{\theta}\|u_s(t)\|_{X_s}^p \\ &+\frac{1}{q}\left(\frac{C_2}{\varepsilon}\right)^q + \frac{1}{p}\varepsilon^p\|u_s(t)\|_{X_s}^p.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t))\|_H^2 + \left(\frac{\min\{1,\alpha\}}{2^a} - \frac{1}{\theta}\varepsilon^{\theta} - \frac{1}{p}\varepsilon^p\right)\|u_s(t)\|_{X_s}^p \leq \frac{1}{\theta'}\left(\frac{C_1}{\varepsilon}\right)^{\theta'} + \frac{1}{q}\left(\frac{C_2}{\varepsilon}\right)^q.$$

No caso $C_0 \neq 0$ escolha $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\gamma := \frac{min\{1,\alpha\}}{2^a} - \frac{1}{\theta}\varepsilon_0^{\theta} - \frac{1}{p}\varepsilon_0^p > 0.$$

Para o caso $C_0 = 0$ escolha $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\gamma := \frac{min\{1,\alpha\}}{2^a} - \frac{1}{\theta}\varepsilon_0^{\theta} > 0.$$

Então,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t))\|_H^2 + \gamma\|u_s(t))\|_{X_s}^p \leq \frac{1}{\theta'}\left(\frac{C_1}{\varepsilon_0}\right)^{\theta'} + \frac{1}{q}\left(\frac{C_2}{\varepsilon_0}\right)^q.$$

Sejam

$$\xi := \frac{2}{\theta'}\left(\frac{C_1}{\varepsilon_0}\right)^{\theta'} + \frac{2}{q}\left(\frac{C_2}{\varepsilon_0}\right)^q,$$

$$\tilde{\gamma} := \frac{2\gamma}{[4(|\Omega|+1)^2]^p}$$

e $y_s : I_s^2 \to \mathbb{R},\ y_s(t) := \|u_s(t)\|_H^2$. Então,

$$y_s'(t) + \tilde{\gamma}y_s(t)^{p/2} \leq \xi, \qquad \forall\ t \in I_s^2.$$

Pelo Lema 2.1.35, obtemos

$$y_s(t) \leq \left(\frac{\xi}{\tilde{\gamma}}\right)^{2/p} + \left[\tilde{\gamma}\left(\frac{p-2}{2}\right)(t-\tau)\right]^{\dfrac{-2}{p-2}} \leq \left(\frac{\xi}{\tilde{\gamma}}\right)^{2/p} + \left[\tilde{\gamma}\left(\frac{p-2}{2}\right)T_1\right]^{\dfrac{-2}{p-2}},$$

para todo $t \in I_s^2$, com $t - \tau \geq T_1$.

Considerando,

$$K_1 := \left[\left(\frac{\xi}{\tilde{\gamma}}\right)^{2/p} + \left[\tilde{\gamma}\left(\frac{p-2}{2}\right)T_1\right]^{\dfrac{-2}{p-2}}\right]^{1/2},$$

temos

$$\|u_s(t)\|_H \leq K_1,$$

para todo $t \in I_s^2$, com $t \geq T_1 + \tau$. Portanto, tomando $r_0 := \max\{4(|\Omega|+1)^2, K_1\}$, obtemos

$$\|u_s(t)\|_H \leq r_0, \forall\, t \geq T_1 + \tau,\ s \in \mathbb{N},$$

e a primeira parte do lema está provada.

Observação 4.3.2. *As constantes r_0 e $\tilde{D}_1$ no Teorema 4.3.1 não dependem da condição inicial nem de s.*

Teorema 4.3.3. *Seja u_s uma solução de (4.1). Dado $T_2 > 0$, existe uma constante positiva $r_1 > 0$, independente de s, tal que*

$$\|u_s(t)\|_{X_s} \leq r_1,$$

para todo $t \geq T_2 + \tau$ e $s \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja u_s uma solução de (4.1) e considere $T_2 > 0$. Tome $T_1 \in (0, T_2)$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi^t_{p_s(x)}(u_s(t)) &= \left\langle \partial\varphi^t_{p_s(x)}(u_s(t)), \frac{du_s}{dt}(t)\right\rangle \\
&= \left\langle B(u_s(t)) - \frac{du_s}{dt}(t), \frac{du_s}{dt}(t)\right\rangle \\
&= -\left\| B(u_s(t)) - \frac{du_s}{dt}(t)\right\|_H^2 + \left\langle B(u_s(t)) - \frac{du_s}{dt}(t), B(u_s(t))\right\rangle \\
&\leq -\left\| B(u_s(t)) - \frac{du_s}{dt}(t)\right\|_H^2 + \left\| B(u_s(t)) - \frac{du_s}{dt}(t)\right\|_H \|B(u_s(t))\|_H.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi^t_{p(x)}(u_s(t)) &\leq -\left\|B(u_s(t)) - \frac{du_s}{dt}(t)\right\|_H^2 + \frac{1}{2}\left\|B(u_s(t)) - \frac{du_s}{dt}(t)\right\|_H^2 + \frac{1}{2}\|B(u_s(t))\|_H^2 \\ &= -\frac{1}{2}\left\|B(u_s(t)) - \frac{du_s}{dt}(t)\right\|_H^2 + \frac{1}{2}\|B(u_s(t))\|_H^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\varphi^t_{p_s(x)}(u_s(t)) + \frac{1}{2}\left\|B(u_s(t)) - \frac{du_s}{dt}(t)\right\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|B(u_s(t))\|_H^2.$$

Pelo Teorema 4.3.1 vem que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi^t_{p_s(x)}(u_s(t)) &\leq \frac{1}{2}\left(\left\|B(u_s(t)) - B(0)\right\|_H + \|B(0))\|_H\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(L\|u_s(t)\|_H + C_0\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(Lr_0 + C_0\right)^2 =: \frac{1}{2}K_1^2 \end{aligned}$$

para todo $t \geq T_1 + \tau$.

Pela definição da subdiferencial, temos

$$\varphi^t_{p_s(x)}(u_s(t)) \leq \left\langle \partial\varphi^t_{p_s(x)}(u_s(t)), u_s(t)\right\rangle. \tag{4.19}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t)\|_H^2 + \varphi^t_{p_s(x)}(u_s(t)) &\leq \left\langle \frac{du_s}{dt}(t), u_s(t)\right\rangle + \left\langle \partial\varphi^t_{p_s(x)}(u_s(t)), u_s(t)\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{du_s}{dt}(t) + \partial\varphi^t_{p_s(x)}(u_s(t)), u_s(t)\right\rangle \\ &= \langle B(u_s(t)), u_s(t)\rangle \leq \|B(u_s(t))\|_H\|u_s(t)\|_H \\ &\leq K_1 r_0, \quad \forall t \geq T_1 + \tau. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Fixando $r > 0$ e integrando (4.21) de t a $t + r$, com $t \geq T_1 + \tau$, temos

$$\int_t^{t+r} \frac{1}{2}\frac{d}{d\ell}\|u_s(\ell)\|_H^2 \, d\ell + \int_t^{t+r} \varphi^\ell_{p_s(x)}(u_s(\ell))d\ell \leq \int_t^{t+r} K_1 r_0 d\ell.$$

Então,

$$\frac{1}{2}\left(\|u_s(t+r)\|_H^2 - \|u_s(t)\|_H^2\right) + \int_t^{t+r} \varphi^\ell_{p_s(x)}(u_s(\ell))d\ell \leq K_1 r_0 r.$$

Assim,

$$\int_t^{t+r} \varphi^\ell_{p_s(x)}(u_s(\ell))d\ell \leq \frac{1}{2}\|u_s(t)\|_H^2 + K_1 r_0 r \leq \frac{1}{2}{r_0}^2 + K_1 r_0 r =: a_3.$$

Fazendo $g \equiv 0$, $h := \frac{1}{2}{K_1}^2$, $y_s(\ell) := \varphi^{\ell}_{p_s(x)}(u_s(\ell))$, então

$$\int_t^{t+r} g(\ell)d\ell = 0 =: a_1, \quad \int_t^{t+r} h(\ell)d\ell =: a_2, \quad \text{e} \quad \int_t^{t+r} y(\ell)d\ell \leq a_3.$$

Pelo Teorema Uniforme de Gronwall, obtemos

$$\varphi^{t}_{p_s(x)}(u_s(t)) \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right) e^0 =: \tilde{r}_1, \quad \forall\, t \geq T_2 + \tau.$$

Assim,

$$\varphi^{t}_{p_s(x)}(u_s(t)) = \int_\Omega \frac{D_s}{p_s(x)} \Big|\nabla u_s(t)\Big|^{p_s(x)} dx + \int_\Omega \frac{C(t)}{p_s(x)} \Big|u_s(t)\Big|^{p_s(x)} dx \leq \tilde{r}_1,$$

para todo $t \geq T_2 + \tau$. Como $p_s \leq p_s^+$, $D_s \in [1, \infty)$ e $\alpha \leq C(t)$, temos

$$\frac{1}{p_s^+} \int_\Omega \Big|\nabla u_s(t)\Big|^{p_s(x)} dx + \frac{\alpha}{p_s^+} \int_\Omega \Big|u_s(t)\Big|^{p_s(x)} dx \leq \varphi^{t}_{p_s(x)}(u_s(t)) \leq \tilde{r}_1.$$

para todo $\tau \geq T_2 + \tau$. Considerando $\rho_s(v) := \int_\Omega |v(x)|^{p_s(x)} dx$, temos

$$\frac{\min\{1, \alpha\}}{p_s^+} \left[\rho_s(\nabla u_s(t)) + \rho_s(u_s(t))\right] \leq \frac{1}{p_s^+}\rho_s(\nabla u_s(t)) + \frac{\alpha}{p_s^+}\rho_s(u_s(t)) \leq \tilde{r}_1, \quad \forall t \geq T_2 + \tau.$$

Consequentemente,

$$(\rho_s(\nabla u_s(t)) + \rho_s(u_s(t)) \leq \frac{a}{\min\{1, \alpha\}} \tilde{r}_1, \qquad \forall t \geq T_2 + \tau. \tag{4.21}$$

Se $t \geq T_2 + \tau$ e $\|u_s(t)\|_{X_s} < 1$ o lema está provado.

Se $t \geq T_2 + \tau$ e $\|u_s(t)\|_{X_s} \geq 1$ temos quatro casos para analisar.

Caso 1: Se $\|\nabla u_s(t)\|_{p_s(x)} \geq 1$ e $\|u_s(t)\|_{p_s(x)} \geq 1$, pelo Teorema 2.2.3 vem que

$$\|\nabla u_s(t)\|^{p}_{p_s(x)} \leq \|\nabla u_s(t)\|^{p_s^-}_{p_s(x)} \leq \rho_s(\nabla u_s(t)) \leq \|\nabla u_s(t)\|^{p_s^+}_{p_s(x)}$$

e

$$\|u_s(t)\|^{p}_{p_s(x)} \leq \|u_s(t))\|^{p_s^-}_{p_s(x)} \leq \rho_s(u_s(t)) \leq \|u_s(t))\|^{p_s^+}_{p_s(x)}.$$

Pela definição de norma em X, temos

$$\begin{aligned} \|u_s(t)\|_{X_s} = \|\nabla u_s(t)\|_{p_s(x)} + \|u_s(t)\|_{p_s(x)} &\leq [\rho_s(\nabla u_s(t))]^{1/p} + [\rho_s(u_s(t))]^{1/p} \\ &\leq 2\left[\frac{a}{\min\{1, \alpha\}}\tilde{r}_1\right]^{1/p}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_s(t)\|_{X_s} \leq 2\left[\frac{a}{\min\{1,\alpha\}}\tilde{r}_1\right]^{1/p} =: R_1, \quad \forall\, t \geq T_2+\tau.$$

Caso 2: Se $\|\nabla u_s(t)\|_{p(x)} \geq 1$ e $\|u(t)\|_{p(x)} \leq 1$, pelo Teorema 2.2.3 temos

$$\|\nabla u_s(t)\|^{p}_{p_s(x)} \leq \|\nabla u_s(t)\|^{p_s^-}_{p_s(x)} \leq \rho_s(\nabla u_s(t)) \leq \|\nabla u_s(t)\|^{p_s^+}_{p_s(x)}$$

e

$$\|u_s(t)\|^{a}_{p_s(x)} \leq \|u_s(t))\|^{p_s^+}_{p_s(x)} \leq \rho_s(u_s(t)) \leq \|u_s(t))\|^{p_s^-}_{p_s(x)}.$$

Usando (4.21) temos

$$\begin{aligned}\|u_s(t)\|_{X_s} =& \|\nabla u_s(t)\|_{p_s(x)} + \|u_s(t))\|_{p_s(x)}\\ \leq& [\rho_s(\nabla u_s(t))]^{1/p} + [\rho_s(u_s(t))]^{1/a}\\ \leq& \left[\frac{a}{\min\{1,\alpha\}}\tilde{r}_1\right]^{1/p} + \left[\frac{a}{\min\{1,\alpha\}}\tilde{r}_1\right]^{1/a} =: R_2,\end{aligned}$$

para todo $t \geq T_2+\tau$.

Caso 3: Se $\|\nabla u_s(t)\|_{p_s(x)} \leq 1$ e $\|u_s(t)\|_{p_s(x)} \geq 1$, pelo Teorema 2.2.3 temos

$$\|\nabla u_s(t)\|^{a}_{p_s(x)} \leq \|\nabla u_s(t))\|^{p_s^+}_{p_s(x)} \leq \rho_s(\nabla u_s(t)) \leq \|\nabla u_s(t)\|^{p_s^-}_{p_s(x)}$$

e

$$\|u_s(t)\|^{p}_{p_s(x)} \leq \|u_s(t))\|^{p_s^-}_{p_s(x)} \leq \rho_s(u_s(t)) \leq \|u_s(t)\|^{p_s^+}_{p_s(x)}.$$

Por (4.21) obtemos

$$\|u_s(t)\|_{X_s} \leq R_3 := R_2, \quad \forall \;\; t \geq T_2+\tau.$$

Caso 4: Se $\|\nabla u_s(t)\|_{p_s(x)} \leq 1$ e $\|u_s(t)\|_{p_s(x)} \leq 1$, pelo Teorema 2.2.3 temos

$$\|\nabla u_s(t)\|^{a}_{p_s(x)} \leq \|\nabla u_s(t)\|^{p_s^+}_{p_s(x)} \leq \rho_s(\nabla u_s(t))) \leq \|\nabla u_s(t)\|^{p_s^-}_{p_s(x)}$$

e

$$\|u_s(t)\|^{a}_{p_s(x)} \leq \|u_s(t)\|^{p_s^+}_{p_s(x)} \leq \rho_s(u_s(t)) \leq \|u_s(t))\|^{p_s^-}_{p_s(x)}.$$

Usando (4.21) obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_s(t)\|_{X_s} &= \|\nabla u_s(t)\|_{p_s(x)} + \|u_s(t)\|_{p_s(x)} \\
&\leq [\rho_s(\nabla u_s(t))]^{1/a} + [\rho_s(u_s(t))]^{1/a} \\
&\leq 2\left[\frac{a}{\min\{1,\alpha\}}\tilde{r}_1\right]^{1/a}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_s(t)\|_{X_s} \leq 2\left[\frac{a}{\min\{1,\alpha\}}\right]^{1/a} =: R_4, \quad \forall\, t \geq T_2 + \tau.$$

Considerando

$$r_1 := \max\left\{1, 2\left[\left(\frac{a}{\min\{1,\alpha\}}\tilde{r}_1\right)^{1/p} + \left(\frac{a}{\min\{1,\alpha\}}\tilde{r}_1\right)^{1/a}\right]\right\},$$

obtemos

$$\|u_s(t)\|_{X_s} \leq r_1, \forall t \geq T_2 + \tau.$$

4.4 Atratores *Pullback*

Nesta seção apresentaremos uma breve revisão da Teoria de Processo de Evolução e a existência do atrator *pullback* para o processo de evolução do problema (4.1). Os resultados dessa seção podem ser encontrados em [14].

Definição 4.4.1. *Um processo de evolução no espaço métrico X é uma família de aplicações $\{S(t,s) : X \to X; t \geq s, s, t \in \mathbb{R}\}$ satisfazendo:*

(i) $S(t,t) = I$ (identidade) $\forall t \in \mathbb{R}$;

(ii) $S(t,s) = S(t,\tau)S(\tau,s), \forall t \geq \tau \geq s.$

Definição 4.4.2. *Uma solução global de um processo $S(\cdot,\cdot)$ é um função $\xi : \mathbb{R} \to X$ tal que*

$$S(t,s)\xi(s) = \xi(t),$$

para todo $t \geq s$. A solução global ξ é backwards-limitada, se existe um $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\{\xi(t), t \leq \tau\}$ é um subconjunto limitado de X.

Definição 4.4.3. *Um conjunto $K(X) \subset X$ pullback atrai um subconjunto C de X no instante t sob a ação do processo de evolução $\{S(t,s)\}_{t\geq s}$, se*

$$\lim_{s\to-\infty} \operatorname{dist}(S(t,s)C, K(t)) = 0.$$

Definição 4.4.4. *Uma família $\{B(t); t \in \mathbb{R}\}$ é invariante, se*

$$S(t,s)B(s) = B(t), \forall t \geq s.$$

Definição 4.4.5. *Uma família $\{A(t); t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos compactos de X é um atrator pullback, se for invariante e atrair pullback subconjuntos limitados de X no instante t, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Teorema 4.4.6. *Seja $\{S(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ um processo de evolução no espaço métrico X. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) Existe uma família de conjuntos compactos $\{K(t); t \in \mathbb{R}\}$ que pullback atraem subconjuntos limitados de X no instante t sob a ação do processo de evolução $\{S(t,s)\}_{t\geq s}$;
(ii) O processo de evolução $\{S(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ possui um atrator pullback.

Teorema 4.4.7. *O processo de evolução $\{S(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ associado ao problema (4.1) possui um atrator pullback $\mathcal{U}_s = \{A_s(t); t \in \mathbb{R}\}$.*

Demonstração: O Teorema 4.3.3 mostra que a família $K(t) = \overline{B_X(0,r_1)}^H$ de compactos de H *pullback* atrai limitados de H no instante t. Consequentemente, pelo Teorema 4.4.6, o processo de evolução $\{S(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ do problema (4.7) tem um *pullback* atrator $\mathcal{U}_s = \{A(t); t \in \mathbb{R}\}$. ■

Como consequência do Teorema 4.3.1 e do Teorema 4.3.3, temos os seguintes resultados

Corolário 4.4.8. *Existe um conjunto limitado B_0 em H tal que $\mathcal{A}_s \subset B_0$ para todo $s \in \mathbb{N}$.*

Corolário 4.4.9. *(a) Seja u_s uma solução do problema (4.1). Dado $T_2 > 0$, existe uma constante positiva r_2, independente de s, tal que*

$$\|u_s(t)\|_Y \leq r_2,$$

para todo $t \geq T_2 + \tau$ *e* $s \in \mathbb{N}$.

(b) Existem conjuntos limitados B_1 *em* Y *e* B_1^s *em* X_s *tais que* $\mathcal{A}_s \subset B_1^s$ *e* $\mathcal{A}_s \subset B_1$ *para todo* $s \in \mathbb{N}$;

(c) $\mathcal{C}(t) := \overline{\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_s(t)}$ *é um subconjunto compacto de* H *para cada* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: (a) Pelo Teorema 4.3.3, existe $r_1 > 0$ tal que

$$\|u_s(t)\|_{X_s} \leq r_1 \quad \forall\, t \geq T_2 + \tau,\ s \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|u_s(t)\|_Y &= \|\nabla u_s(t)\|_p + \|u_s(t)\|_p \leq 2(|\Omega|+1)\left(\|\nabla u_s(t)\|_{p_s(x)} + \|u_s(t)\|_{p_s(x)}\right) \\ &= 2(|\Omega|+1)\|u_s(t)\|_{X_s} \leq 2(|\Omega|+1)r_1, \end{aligned}$$

para todo $t \geq T_2 + \tau$ e $s \in \mathbb{N}$ e o resultado segue com $r_2 := 2(|\Omega|+1)r_1$.

(b) O resultado segue do Lema 4.3.3 e do item (a).

(c) Por (b), existe um conjunto limitado B_1 em Y tal que $\mathcal{A}_s \subset B_1$ para todo $s \in \mathbb{N}$. Como $Y \subset H$ é uma imersão contínua e compacta, o resultado está provado. ■

4.5 O problema limite e propriedades de convergência

Nosso objetivo nesta seção é provar que o problema limite do problema (4.1), quando $D_s \to \infty$ e $p_s(\cdot) \to p > 2$ em $L^\infty(\Omega)$ quando $s \to \infty$, é descrito por uma equação diferencial ordinária. Primeiramente, observe que os gradientes das soluções u_s do problema (4.1) convergem em norma para zero quando $s \to \infty$, o que nos permite exibir o problema limite

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + C(t)|u(t)|^{p-2}u(t) = \tilde{B}(u(t)), & t > \tau, \\ u(\tau) = u_\tau \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.22}$$

com $\tilde{B} := B_{|\mathbb{R}}$. Identificaremos $\mathbb{R}$ com as funções constantes que estão em H, desde que Ω é um conjunto limitado.

A prova do próximo resultado é análoga à prova do Teorema 3.4.1 e não apresentamos muitos detalhes na prova aqui, uma vez que o termo não autônomo $C(t)$ não apresentou dificuldades para esse resultado.

Teorema 4.5.1. *Dado $T_1 > 0$, para cada s, se u_s é uma solução de (4.1) em* $(0, \infty)$, *então para cada $t \geq T_1$, a sequência de números reais $\{\|\nabla u_s(t)\|_H\}$ tem uma subsequência $\{\|\nabla u_{s_\ell}(t)\|_H\}$ que converge para zero quando $\ell \to \infty$.*

Demonstração: Sejam $T > T_1$ e $t \in (T_1, T)$. Como u_s é uma solução de (4.1) temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t)\|_H^2 + D_s\int_\Omega |\nabla u_s(t)|^{p_s(x)}dx + C(t)\int_\Omega |u_s(t)|^{p_s(x)}dx &= \langle B(u_s(t)), u_s(t)\rangle_H \\ &\leq L\|u_s(t)\|_H^2 + \|B(0)\|_H\|u_s(t)\|_H \leq K,\end{aligned}$$

q.t. t em (T_1, T), onde $K = Lr_0^2 + \|B(0)\|_H r_0$ e $r_0 > 0$ é uma constante, que é independente de s, pelo Teorema 4.3.1. Assim, como $C(t)\int_\Omega |u_s(t)|^{p_s(x)}dx \geq 0$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t)\|_H^2 + D_s\int_\Omega |\nabla u_s(t)|^{p_s(x)}dx \leq K, \tag{4.23}$$

q.t. t em (T_1, T). Repetindo o mesmo procedimento do Teorema 4.5.1 obtemos uma subsequência $\{\nabla u_{s_\ell}(t)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ de $\{\nabla u_s(t)\}_{s\in\mathbb{N}}$ tal que $\|\nabla u_{s_\ell}(t)\|_{p_{s_\ell}(x)} \to 0$ quando $\ell \to \infty$. Como

$$\|\nabla u_{s_\ell}(t)\|_H \leq C\|\nabla u_{s_\ell}(t)\|_{p_{s_\ell}(x)},$$

com C uma constante positiva independente de s, concluímos que $\|\nabla u_{s_\ell}(t)\|_H \to 0$ quando $\ell \to \infty$. ∎

Como podemos ver, o teorema acima está nos dizendo que a equação (4.22) é uma boa candidata para o problema limite.

Vamos agora garantir a existência de uma solução global para o problema (4.22) usando o seguinte resultado abstrato de [3] para um espaço de Banach X.

Sejam $\tau \in \mathbb{R}$ e $T > \tau$. Considere a família de operadores não lineares $\mathcal{H}(t) : X \to X^*$, $t \in [\tau, T]$, satisfazendo:

(i) $\mathcal{H}(t)$ é monótono e hemicontínuo de X para X^* para quase todo $t \in (\tau, T)$;

(ii) A função $\mathcal{H}(\cdot)u(\cdot) : [\tau, T] \to X^*$ é mensurável para todo $u \in L^p(\tau, T; X)$;

(iii) Existe uma constante C tais que

$$\|\mathcal{H}(t)u\|_{X^*} \leq C(\|u\|_X^{p-1} + 1), \text{ para } u \in X \text{ e } t \in (\tau, T).$$

(iv) Existem constantes α, ω $(\omega > 0)$ tal que

$$\langle \mathcal{H}(t)u, u\rangle \leq \omega\|u\|_X^p + \alpha, \quad \text{para } u \in X \text{ e } t \in (\tau, T).$$

Proposição 4.5.2 (Teorema 4.2 em [3]). *Considere a tripla de Gelfand* (X, H, X^*) *e suponha que* $(i) - (iv)$ *valem. Se* $u_\tau \in H$ *e* $f \in L^q(\tau, T; X^*)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, *então existe uma única função* $u : [\tau, T] \to X^*$ *absolutamente contínua que satisfaz*

$$\frac{du}{dt}(t) + \mathcal{H}(t)u(t) = f(t), \quad q.t.p. \text{ em } (\tau, T),$$

com $u \in L^p(\tau, T; X) \cap C([\tau, T]; H)$, $du/dt \in L^q(\tau, T, X^*)$ *e* $u(\tau) = u_\tau$.

Teorema 4.5.3. *O problema limite (4.22) tem uma única solução forte* $u \in C([\tau, T]; \mathbb{R})$.

Demonstração: Considerando $\mathcal{H}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por $\mathcal{H}(t)u := C(t)|u|^{p-2}u$ as condições (i)-(iv) são satisfeitas para $\mathcal{H}(t)$ acima, com $X = H = X^*$. De fato, pela Desigualdade de Tartar obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}(t)u - \mathcal{H}(t)v, u - v\rangle_{X^*,X} &= \langle \mathcal{H}(t)u, u - v\rangle_{X^*,X} - \langle \mathcal{H}(t)v, u - v\rangle_{X^*,X} \\ &= C(t)(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v)(u - v) \geq \alpha\gamma|u - v|^p \geq 0, \end{aligned}$$

com $\gamma > 0$ e dependente de p. Logo, $\mathcal{H}(t)$ é monótono. É fácil ver que a função $\mathcal{H}(\cdot)u(\cdot) : [\tau, T] \to X^*$ é contínua em $[\tau, T]$e, portanto, é mensurável para todo $u \in L^p(\tau, T; X)$. Além disso, o operador $\mathcal{H}(t)$ é hemicontínuo de X para X^*. Agora, note que

$$\|\mathcal{H}(t)u\|_{X^*} = |\mathcal{H}(t)u| = |C(t)|u|^{p-2}u| = C(t)|u|^{p-1} \leq C(|u|^{p-1} + 1),$$

com $C = M$. E ainda,

$$\langle \mathcal{H}(t)u, u\rangle = C(t)|u|^{p-2}u \cdot u = C(t)|u|^p \leq \omega||u||_X^p + \alpha,$$

com $\alpha \geq 0, \omega > 0$, e $\omega = M$. Assim, para uma $f \in L^2(\tau, T; \mathbb{R})$ dada, pela Proposição 4.5.2, temos que existe uma única função $u \in C([\tau, T]; \mathbb{R})$ que é uma solução forte para o problema

$$\frac{du}{dt}(t) + \mathcal{H}(t)u(t) = f(t), \quad u(\tau) = u_\tau \in \mathbb{R}.$$

Logo, com o mesmo argumento da demonstração do Teorema 4.2.3, concluímos que o problema limite (4.22) possui uma única solução forte $u \in C([\tau, T]; \mathbb{R})$. ■

O próximo resultado garante que (4.22) é de fato o problema limite para (4.1), quando $s \to \infty$. A demonstração é análoga à prova do Teorema 3.4.2, contudo, não apresentaremos todos os detalhes da prova aqui, uma vez que o termo não autônomo $C(t)$ não apresentou dificuldades para esse resultado.

Teorema 4.5.4. *Seja u_s uma solução de (4.1) com $u_s(\tau) = u_{\tau s}$ e seja u uma solução de (4.22) com $u(\tau) = u_\tau$. Se $u_{\tau s} \to u_\tau$ em H quando $s \to \infty$, então para cada $T > \tau$, $u_s \to u$ em $C([\tau, T]; H)$ quando $s \to +\infty$.*

Demonstração: Seja $T > \tau$ fixado e suponha que $u_{\tau s} \to u_\tau$ em H quando $s \to \infty$. Subtraindo as duas equações em (4.1) e (4.22) e fazendo o produto interno com $u_s - u$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{du_s}{dt}(t) - \frac{du}{dt}(t), u_s(t) - u(t) \right\rangle_H + \left\langle A^s u_s(t) - C(t)|u(t)|^{p-2}u(t), u_s(t) - u(t) \right\rangle_H \\
&= \left\langle B(u_s(t)) - B(u(t)), u_s(t) - u(t) \right\rangle_H .
\end{aligned}$$

Usando que B é globalmente Lipschitziana e observando que u é independente de x, temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 + D_s \int_\Omega |\nabla u_s(t)|^{p_s(x)} dx \\
+ \quad & C(t) \int_\Omega |u_s(t)|^{p_s(x)-2} u_s(t)(u_s(t) - u(t)) dx \\
- \quad & C(t) \int_\Omega |u(t)|^{p-2} u(t)(u_s(t) - u(t)) dx \\
\leq \quad & L\|u_s(t) - u(t)\|_H^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 \\
\leq & L\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 - C(t) \int_\Omega \left(|u(t)|^{p_s(x)-2} - |u(t)|^{p-2}\right) u(t)(u_s(t) - u(t)) dx \\
\leq & L\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 + M \int_\Omega \left| |u(t)|^{p_s(x)-1} - |u(t)|^{p-1} \right| |u_s(t) - u(t)| dx,
\end{aligned}$$

q.t.p. em (τ, T). Agora, com um procedimento completamente análogo ao da prova do Teorema 3.4.2, obtemos que existe uma constante positiva κ tal que

$$\left| |u(t)|^{p_s(x)-1} - |u(t)|^{p-1} \right| \leq \kappa |p_s(x) - p|,$$

para todo $t \in [\tau, T]$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 \leq & \; L\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 \; + \; M\kappa\|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u_s(t) - u(t)| dx \\
\leq & L\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 \\
& + M\kappa \|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)} \left[\frac{1}{2}|\Omega| + \frac{1}{2}\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 \right],
\end{aligned} \tag{4.24}$$

q.t.p. em (τ, T). Integrando (4.24) de τ a t, $t \leq T$, temos

$$\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 \leq \|u_{\tau s} - u_\tau\|_H^2 \ + \ M\kappa\|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|T \\ + \int_\tau^t (2L + M\kappa\|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)})\|u_s(\tau) - u(\tau)\|_H^2 d\tau.$$

Então, pelo Lema de Gronwall-Bellman obtemos

$$\|u_s(t) - u(t)\|_H^2 \leq \left(\|u_{\tau s} - u_\tau\|_H^2 + M\kappa\|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|T\right) e^{(2L + M\kappa\|p_s - p\|_{L^\infty(\Omega)})T},$$

para todo $t \in [\tau, T]$. Portanto, $u_s \to u$ em $C([\tau, T]; H)$ quando $s \to +\infty$. ■

4.6 Semicontinuidade superior da família de atratores *pullback*

Começaremos esta seção comprovando a existência do atrator *pullback* para o problema limite.

Teorema 4.6.1. *O problema (4.22) tem um atrator pullback* $\mathcal{U}_\infty = \{\mathcal{A}_\infty(t);\ t \in \mathbb{R}\}$.

Demonstração: Multiplicando a equação $\dot{u} + C(t)|u|^{p-2}u = \widetilde{B}(u)$ por u temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + C(t)|u(t)|^p = \tilde{B}(u(t))u(t).$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \alpha|u(t)|^p \leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + C(t)|u(t)|^p = (\tilde{B}(u(t)) - \tilde{B}(0))u(t) + B(0)u(t).$$

Seja $\theta := p/2$ com $1/\theta + 1/\theta' = 1$ e considere $\varepsilon > 0$ arbitrário. Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \alpha|u(t)|^p \leq \tilde{L}\frac{\varepsilon}{\varepsilon}|u(t)|^2 + C|u(t)|,$$

com $C = \tilde{B}(0)$. Usando a desigualdade de Young, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \alpha|u(t)|^p \leq \frac{1}{\theta'}\left(\frac{\tilde{L}}{\varepsilon}\right)^{\theta'} + \frac{\varepsilon^\theta}{\theta}|u(t)|^p + \frac{1}{p'}C^{p'} + \frac{1}{p}|u(t)|^p.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 &\leq -\alpha|u(t)|^p - \frac{2}{p}\varepsilon^{p/2}|u(t)|^p + \frac{1}{p}|u(t)|^p + \left[\frac{1}{\theta'}\Big(\frac{\tilde{L}}{\varepsilon}\Big)^{\theta'} + \frac{1}{p'}C^{p'}\right]\\ &= \left[-\alpha - \frac{2}{p}\varepsilon^{p/2} + \frac{1}{p}\right]|u(t)|^p + \left[\frac{1}{\theta'}\Big(\frac{\tilde{L}}{\varepsilon}\Big)^{\theta'} + \frac{1}{p'}C^{p'}\right].\end{aligned}$$

Escolha $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$0 < -\frac{2}{p}\varepsilon^{p/2} + \frac{1}{p} \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 &\leq -\Big(\alpha + \frac{\alpha}{2}\Big)|u(t)|^p + \left[\frac{1}{\theta'}\Big(\frac{\tilde{L}}{\varepsilon_0}\Big)^{\theta'} + \frac{1}{p'}C^{p'}\right]\\ &\leq \frac{-\alpha}{2}|u(t)|^p + c, \qquad t \geq \tau,\end{aligned}$$

com

$$c = \left[\frac{1}{\theta'}\Big(\frac{\tilde{L}}{\varepsilon_0}\Big)^{\theta'} + \frac{1}{p'}C^{p'}\right] > 0.$$

Assim, a aplicação $y(t) := |u(t)|^2$ satisfaz a inequação

$$\frac{d}{dt}y(t) \leq -\alpha(y(t))^{p/2} + 2c,\ t \geq \tau.$$

Então, pelo Lema 2.1.35 temos

$$|u(t)|^2 \leq \Big(\frac{2c}{\alpha}\Big)^{2/p} + \left(\alpha\Big(\frac{p}{2}-1\Big)(t-\tau)\right)^{-\frac{2}{p-2}},\ \forall\ t \geq \tau.$$

Seja $\xi_0 > 0$ tal que

$$\left(\alpha\Big(\frac{p}{2}-1\Big)\xi_0\right)^{-\frac{2}{p-2}} \leq 1.$$

Logo,

$$|u(t)| \leq \left[\Big(\frac{2c}{\alpha}\Big)^{2/p} + 1\right]^{1/2} =: \kappa,\ \forall\ t \geq \xi_0 + \tau.$$

Assim, a família $K(t) = \overline{B(0,\kappa)}$ de conjuntos compactos de $\mathbb{R}$ *pullback* atraem os conjuntos limitados de $\mathbb{R}$ no instante t. Consequentemente, pelo Teorema 4.4.6 o processo de evolução $\{S_\infty(t,s)\}_{t\geq s}$ do problema limite (4.22) tem um atrator *pullback* $\mathcal{U}_\infty = \{\mathcal{A}_\infty(t);\ t \in \mathbb{R}\}$. ■

O próximo lema mostra que os elementos relevantes para descrever o comportamento assintótico desses problemas estão em torno de sua própria média espacial se s for grande o suficiente.

Lema 4.6.2. *Seja $t \in \mathbb{R}$ fixado. Para cada $s \in \mathbb{N}$, se $w_s \in \mathcal{A}_s(t)$ e $w_0 = \lim_{s\to\infty} w_s$ em H, então w_0 é uma função constante.*

Demonstração: Usando, para cada $s \in \mathbb{N}$ fixado, a invariância do atrator *pullback* temos $\mathcal{A}_s(t) = S_s(t,\tau)\mathcal{A}_s(\tau)$ para todo $\tau < t$. Considerando τ tal que $t - \tau > T_2$, pelo Teorema 4.3.3 temos que $\mathcal{A}_s(t) \subset W^{1,p_s(x)}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) = H$. Pela desigualdade de Poincaré-Wirtinger vem que

$$\|w_s - \overline{w_s}\|_H \leq C\|\nabla w_s\|_H \to 0$$

quando $s \to \infty$. Pelo Teorema 4.5.1, obtemos (a menos de uma subsequência) que $\|w_s - \overline{w_s}\|_H \to 0$ quando $s \to +\infty$, onde $\overline{w_s} := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega w_s(x)dx$. Então, considerando a função característica $\chi_\Omega \in H$, temos

$$\langle \chi_\Omega, w_s \rangle = \int_\Omega \chi_\Omega w_s(x)\, dx \to \int_\Omega \chi_\Omega w_0(x)\, dx = \langle \chi_\Omega, w_0 \rangle.$$

Assim,

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega w_s(x)\, dx \to \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega w_0(x)\, dx.$$

Então, $\overline{w_s} \to \overline{w_0} \in \mathbb{R}$. Observando que

$$\|\overline{w_s} - \overline{w_0}\|_H^2 = \int_\Omega |w_s - w_0|^2 dx \;\; = \;\; |w_s - w_0|^2 \int_\Omega dx = |w_s - w_0|^2 |\Omega| \to 0$$

quando $s \to \infty$ vem que $\overline{w_s} \to \overline{w_0}$ em H. Portanto, concluímos que $w_0 = \overline{w_0}$ e então w_0 é uma função constante. ■

Agora, apresentamos nosso resultado principal. A novidade aqui é que é necessário construir uma solução global para o processo de evolução para trás, enquanto que no caso autônomo foi necessário construir uma trajetória completa limitada para um semigrupo.

Teorema 4.6.3. *A família de atratores pullback $\{\mathcal{U}_s, s \in \mathbb{N}\}$ associado com o problema (3.1) é semicontínua superiormente quando $s \to \infty$, na topologia de H, isto é, para cada $\tau \in \mathbb{R}$, $\lim_{s\to+\infty} dist(\mathcal{A}_s(\tau), \mathcal{A}_\infty(\tau)) = 0$.*

Demonstração: Seja $\tau \in \mathbb{R}$ fixado. Considere $\{w_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária com $w_s \in \mathcal{A}_s(\tau)$ para cada $s \in \mathbb{N}$. Para mostrar que $\lim\limits_{s\to+\infty} dist(\mathcal{A}_s(\tau), \mathcal{A}_\infty(\tau)) = 0$ é suficiente mostrar que $\{w_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente cujo limite pertence a $\mathcal{A}_\infty(\tau)$ (ver Lema 3.2 em [8]). Pelo Corolário 4.4.9 (c) temos que $\overline{\bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_s(t)}$ é um subconjunto compacto de H e, portanto, existe uma subsequência $\{w_{s_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{w_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ tal que $w_{s_j} \to w$ em H quando $j \to \infty$. Pelo Lema 4.6.2, $w \in \mathbb{R}$. Nosso objetivo é mostrar que $w \in \mathcal{A}_\infty(\tau)$. Pela caracterização dada no Teorema 1.17 em [8] é suficiente mostrar que existe uma solução global *backwards*-limitada $\xi(\cdot)$ com $w = \xi(\tau)$. Seja $\{S_{s_j}(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ e $\{S_\infty(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ os processos de evolução associados com (3.1) e (4.22), respectivamente. Considere $\tau_j \searrow -\infty$. Por simplicidade, chamaremos $\{S_j(t,\tau)\}_{t\geq\tau} = \{S_{s_j}(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$, $w_0 := w$ e $w_j := w_{s_j}$ a subsequência de $\{w_s\}$ tal que $w_j \to w_0 \in \mathbb{R}$ quando $j \to +\infty$. Sem perda de generalidade, vamos considerar $\tau_j < \tau, \forall j \in \mathbb{N}$. Pela invariância dos atratores *pullback*, temos

$$\mathcal{A}_j(\tau) = S_j(\tau, \tau_j)\mathcal{A}_j(\tau_j).$$

Assim, $w_j = S_j(\tau, \tau_j)x_j$, para algum $x_j \in \mathcal{A}_j(\tau_j)$. Pelo Teorema 4.5.4,

$$S_j(t,\tau)w_j = S_j(t,\tau_j)x_j \to S_\infty(t,\tau)w_0, \ \forall\, t \geq \tau.$$

Além disso, existe um $x_{j,1} \in \mathcal{A}_j(\tau_j - 1)$ tal que $x_j = S_j(\tau_j, \tau_j - 1)x_{j,1}$. Agora, considere a subsequência

$$\{S_j(\tau-1, \tau_j - 1)x_{j,1}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_j(\tau-1) \subset \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_j(\tau-1)} \in K(H),$$

com $K(H) = \{K \subset H; K \text{ é não vazio e compacto}\}$. Assim, (a menos de uma subsequência), temos

$$S_j(\tau-1, \tau_j - 1)x_{j,1} \to w_1 \text{ quando } j \to +\infty.$$

Pelo Lema 4.6.2, temos $w_1 \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 4.5.4,

$$S_j(t, \tau-1)S_j(\tau-1, \tau_j-1)x_{j,1} \to S_\infty(t, \tau-1)w_1, \ \forall\, t \geq \tau - 1,$$

quando $j \to \infty$.

Afirmação 1: $S_\infty(\tau,\tau-1)w_1 = w_0$. De fato,

$$\begin{aligned} S_\infty(\tau,\tau-1)w_1 &= \lim_{j\to+\infty} S_j(\tau,\tau-1)S_j(\tau-1,\tau_j-1)x_{j,1} \\ &= \lim_{j\to+\infty} S_j(\tau,\tau_j-1)x_{j,1} \\ &= \lim_{j\to+\infty} S_j(\tau,\tau_j)S_j(\tau_j,\tau_j-1)x_{j,1} \\ &= \lim_{j\to+\infty} S_j(\tau,\tau_j)x_j = \lim_{j\to+\infty} w_j = w_0. \end{aligned}$$

Novamente, pela invariância dos atratores *pullback*, existe um $x_{j,2} \in \mathcal{A}_j(\tau_j-2)$ tal que

$$x_{j,1} = S_j(\tau_j-1,\tau_j-2)x_{j,2}.$$

Considere a sequência

$$\{S_j(\tau-2,\tau_j-2)x_{j,2}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_j(\tau-2)} \in K(H).$$

Então, (a menos de uma subsequência) temos

$$S_j(\tau-2,\tau_j-2)x_{j,2} \to w_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{quando} \quad j\to\infty.$$

Pelo Teorema 4.5.4 vem que

$$S_j(t,\tau-2)S_j(\tau-2,\tau_j-2)x_{j,2} \to S_\infty(t,\tau-2)w_2,\ \forall\, t \geq \tau-2,$$

quando $j\to\infty$. **Afirmação 2:** $w_1 = S_\infty(\tau-1,\tau-2)w_2$. De fato,

$$\begin{aligned} S_\infty(\tau-1,\tau-2)w_2 &= \lim_{j\to+\infty} S_j(\tau-1,\tau-2)S_j(\tau-2,\tau_j-2)x_{j,2} \\ &= \lim_{j\to+\infty} S_j(\tau-1,\tau_j-2)x_{j,2} \\ &= \lim_{j\to+\infty} S_j(\tau-1,\tau_j-1)S_j(\tau_j-1,\tau_j-2)x_{j,2} \\ &= \lim_{j\to+\infty} S_j(\tau-1,\tau_j-1)x_{j,1} = w_1. \end{aligned}$$

Procedendo indutivamente definimos

$$\xi(t) := \begin{cases} S_\infty(t,\tau)w_0, & t \geq \tau, \\ S_\infty(t,\tau-1)w_1, & t\in[\tau-1,\tau), \\ S_\infty(t,\tau-2)w_2, & t\in[\tau-2,\tau-1), \\ \quad\vdots & \\ S_\infty(t,\tau-r)w_r, & t\in[\tau-r,\tau-(r-1)), \\ \quad\vdots & \end{cases}.$$

Afirmação 3: ξ é uma solução global, isto é, $S_\infty(t,\ell)\xi(\ell) = \xi(t),\ \forall\, t \geq \ell$.

De fato, o caso $t = \ell$ é trivial. Considere um par (t,ℓ) arbitrariamente fixado, com $t > \ell$.

Caso 1: $\ell < t \leq \tau$. Neste caso, $\ell \in [\tau - r, \tau - (r-1))$ para algum $r \in \mathbb{N}, r \geq 1$ e $t \in [\tau - \tilde{r}, \tau - (\tilde{r}-1))$ para algum $\tilde{r} \in \mathbb{N}$ com $1 \leq \tilde{r} \leq r$. Logo,

$$\xi(\ell) = S_\infty(\ell, \tau - r)w_r \ \text{ e } \ \xi(t) = S_\infty(t, \tau - \tilde{r})w_{\tilde{r}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S_\infty(t,\ell)\xi(\ell) &= S_\infty(t,\ell)S_\infty(\ell,\tau - r)w_r \\ &= S_\infty(t,\ell)S_\infty(\ell,\tau-\tilde{r})S_\infty(\tau-\tilde{r},\tau-r)w_r \\ &= S_\infty(t,\tau-\tilde{r})w_{\tilde{r}} = \xi(t). \end{aligned}$$

Caso 2: $t > \ell \geq \tau$. Neste caso, $\xi(\ell) = S_\infty(\ell,\tau)w_0$. Assim,

$$\begin{aligned} S_\infty(t,\ell)\xi(\ell) &= S_\infty(t,\ell)S_\infty(\ell,\tau)w_0 \\ &= S_\infty(t,\tau)w_0 = \xi(t). \end{aligned}$$

Caso 3: $\ell < \tau \leq t$

Neste caso, $\ell \in [\tau - r, \tau - (r-1))$ para algum natural $r \geq 1$ e $\xi(\ell) = S_\infty(\ell,\tau - r)w_r$. Temos, $\xi(t) = S_\infty(t,\tau)w_0$. Então,

$$\begin{aligned} S_\infty(t,\ell)\xi(\ell) &= S_\infty(t,\ell)S_\infty(\ell,\tau-r)w_r \\ &= S_\infty(t,\tau-r)w_r \\ &= S_\infty(t,\tau)S_\infty(\tau,\tau-r)w_r \\ &= S_\infty(t,\tau)w_0 = \xi(t). \end{aligned}$$

Portanto, ξ é uma solução global.

Mostraremos agora que ξ é limitada (em particular *backwards*-limitada). Primeiro, note que para cada $t \in \mathbb{R}$, $\xi(t) = S_\infty(t,\tau - r)w_r$ para algum $r \in \{0,1,2,3,\ldots\}$ e

$$S_\infty(t,\tau-r)w_r = \lim_{j\to\infty} S_j(t,\tau_j - r)(x_{j,r}) \text{ e } S_j(t,\tau_j - r)(x_{j,r}) \in \mathcal{A}_j(t), \forall j \in \mathbb{N}.$$

Usando o Lema 4.6.2, concluímos que para cada termo $S_\infty(t,\tau-r)w_r$ é indepentende de x. Consequentemente, $\xi(t)$ é uma função constante na variável espacial x. Como para cada $t \in \mathbb{R}$ e $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{A}_j(t) \subset \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_s(t)$$

e o último é limitado (pois é relativamente compacto), então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|S_\infty(t,\tau-r)w_r\|_H \leq C, \ \forall\, t \in \mathbb{R}\ (r = 0,1,2,\ldots).$$

Em particular, temos que $\xi(\cdot)$ é limitada em H. Então, existe uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que

$$|\xi(t)| = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}}\|\xi(t)\|_H \leq \tilde{C}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, concluímos que $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma solução global com $w = w_0 = \xi(\tau)$. $\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] ALVES, C. O.; SHMAREV S.; SIMSEN J.; SIMSEN M., The Cauchy problem for a class of parabolic equations in weighted variable Sobolev spaces: existence and asymptotic behavior, J. Math. Anal. Appl. **443**, n. 1, p. 265-294, 2016.

[2] BARBU, V., Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces, New York: Springer, 2010.

[3] BARBU, V., Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space, Noordhoff International, 1976.

[4] BRÉZIS, H., Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert, Amsterdam/New York: Math Studies, v. 5, North-Holland, 1973.

[5] BRÉZIS, H., Analyse fonctionnelle: théorie et applications, Paris: Masson, 1983.

[6] BRÉZIS, H., Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, New York, 2011.

[7] CARVALHO, A.N.; CHOLEWA, J.W.; DLOTKO, T., Global attractors for problems with monotone operators, Boll. U.M.I., n. 3, v. 2, p. 693-706, 1999.

[8] CARVALHO, A.N.; LANGA, J.A.; ROBINSON, J.C., Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems, Applied Mathematical Sciences, 182, Springer, New York, 2013.

[9] CARVALHO, A. N.; PISKAREV, S., A general approximation scheme forattractors of abstract parabolic problems, Cadernos De Matemática, v. 5, p. 71-120, 2004.

[10] CRUZ-URIBE, D.; FIORENZA, A., Variable Lebesgue spaces: Foundations and Harmonic Analysis, Springer Science & Business Media, 2013.

[11] DIENING, L. et al. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Springer, 2011.

[12] FAN, X.L.; ZHAO, D., On the Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$, Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 263, p. 424-446, 2001.

[13] GUIMARÃES, C. J., Sobre os espaços de Lebesgue e Sobolev generalizados e aplicações envolvendo o $p(x)$-laplaciano. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2006.

[14] KLOEDEN, P. E.; SIMSEN, J., *Pullback* attractors for non-autonomous evolution equations with spatially variable exponents, Commun. Pure Appl. Anal. **13**, n. 6, p. 2543-2557,2014.

[15] LADYSHENSKAYA, O., Attractors for semigroups and evolution equations. Lezioni Lincee, Cambridge University Press, 1991.

[16] LIMA, E.L., Espaços Métricos, IMPA, Rio de Janeiro, ed. 5, 2015.

[17] OLIVEIRA, C.R., Introdução à análise funcional, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, Impa, 2010.

[18] RUDIN, W., Principles of Mathematical Analysis, New York: McGraw-Hill, 1976.

[19] RUDIN, W., Real and Complex Analysis, New York: McGraw-Hill, 1987.

[20] SIMSEN, J.; GENTILE, C.B., Well-posed p-laplacian problems with large diffusion, Nonlinear Anal. **71**, p. 4609-4617, 2009.

[21] SIMSEN, J.; NASCIMENTO, M. J. D.; SIMSEN, M. S., Existence and upper semicontinuity of *pullback* attractors for non-autonomous $p-$Laplacian parabolic problems, J. Math. Anal. Appl., **413**, n. 2, p. 685-699, 2014.

[22] SIMSEN, J.; SIMSEN, M.S.; ROCHA, F.B., "Existence of solutions for some classes of parabolic problems involving variable exponents", Nonlinear Studies, n. 1, v. 21, p. 113-128, 2014.

[23] SIMSEN, J., A global attractor for a $p(x)$-Laplacian inclusion, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I., **351**, p. 87-90, 2013.

[24] SIMSEN, J.; SIMSEN, M.S.; PRIMO, M.R.T., "Reaction-Difusion equations with spatially variable exponents and large diffusion", Communications on Pure and Applied Analysis, n. 2, v. 15, p. 495-506, 2016.

[25] TEMAM, R., Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, New York, 1988.

[26] YOTSUTANI, S., Evolution equations associated with the subdifferentials, J. Math. Soc. Japan, n.31, p. 623-646, 1978.