

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Considerações Sobre a Anisotropia em Modelos Bianchi Tipo I

Dairo Antonio Cuellar Mateus

Orientador: Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
CAPES

ITAJUBÁ – MG
28 DE FEVEREIRO DE 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Considerações Sobre a Anisotropia em Modelos Bianchi Tipo I

Dairo Antonio Cuellar Mateus

Orientador: Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Topologia e Geometria

ITAJUBÁ – MG
28 DE FEVEREIRO DE 2018



Ministério da Educação
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
 Criada pela Lei nº 10.435, de 24 de abril de 2002

ANEXO I
FOLHA DE JULGAMENTO DA BANCA EXAMINADORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Título da Dissertação: "Considerações sobre Anisotropia em Modelos Bianchi Tipo I"

Autor: Dairo Antonio Cuellar Mateus

JULGAMENTO

Examinadores	Conceito		Rubrica
	A = Aprovado	R = Reprovado	
1º	A		
2º	A		
3º	A		

Observações:

- (1) O Trabalho será considerado Aprovado se todos os Examinadores atribuírem conceito A.
 - (2) O Trabalho será considerado Reprovado se forem atribuídos pelos menos 2 conceitos R.
 - (3) O Trabalho será considerado Insuficiente (I) se for atribuído pelo menos um conceito R. Neste caso o candidato deverá apresentar novo trabalho. A banca deve definir como avaliar a nova versão da Dissertação.
- Este documento terá a validade de 30 (trinta) dias a contar da data da defesa da Dissertação.

Resultado Médio: **Conceito:** A, ou seja, Aprovado

Observações: _____

Itajubá, 23 de fevereiro de 2018.

Prof. Dr. Márcio Eduardo da Silva Alves
 1º Examinador – UNESP

Prof. Dr. Eduardo Henrique Silva Bittencourt
 2º Examinador – UNIFEI

Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes
 3º Examinador (Orientador) - UNIFEI

Agradecimentos

O Brasil sendo um país que também sofre os problemas da América do Sul, chegou num ponto de sua história recente no qual tomou a decisão de apostar pela ciência. Nas últimas 3 décadas, o avanço científico e tecnológico do Brasil superou os demais países da região. Algo muito importante nisto foi oferecer a sua casa como lar para pessoas que procuram o conhecimento, especialmente em busca de aprimorar suas vidas profissionais. A oportunidade que o gigante da América do Sul me deu, especificamente a UNIFEI, para eu poder continuar no caminho da ciência é algo pelo qual estou profundamente agradecido. Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por me oferecer o auxílio financeiro para minha estadia neste belo país.

Agradeço ao Leandro Gustavo Gomes por ser um excelente orientador nesta pesquisa, pois, ele teve muita paciência. Também aos professores que me ensinaram matemática e física durante o mestrado, especialmente aos professores: Braulio Garcia e Renato Barcellos.

Por último agradeço às pessoas que de alguma forma me ajudaram a conseguir terminar esta etapa da minha vida.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma introdução matemática ao estudo de modelos cosmológicos espacialmente homogêneos, em especial aos modelos Bianchi tipo I, que são espacialmente planos. Neste caso analisamos como a geometria espacial evolui sob certas condições da anisotropia. Ao final analisamos a possibilidade destes modelos substituírem o modelo Robertson-Walker plano com constante cosmológica.

Palavras-chave: Anisotropia , modelos cosmológicos, Espaços-tempo de Bianchi.

Abstract

In this work we present a mathematical introduction to the study of spatially homogeneous cosmological models, specially to the type I Bianchi models, which are spatially flat. In this case we analyse how the spatial geometry evolves under specific conditions for the anisotropy. By the end we analyse the possibility of such models replace the Robertson-Walker model with a cosmological constant.

Keywords: Anisotropy, cosmological models, Bianchi spacetime.

Sumário

Agradecimentos	3
Resumo	4
Abstract	6
Introdução	10
1 Conceitos de Geometria Diferencial	13
1.1 Álgebra Multilinear	13
1.1.1 Formas lineares	13
1.1.2 Formas bilineares	14
1.1.3 Formas multilineares	16
1.1.4 Tensores	17
1.1.5 Transformação de base	18
1.1.6 Traço de um tensor	19
1.1.7 Levantamento e abaixamento de índices	20
1.2 Variedades Diferenciáveis	20
1.3 Variedades semi-Riemannianas	22
1.4 Variedades Lorentzianas	25
2 Grupos de Simetria	27
2.1 Grupo de Lie e Álgebras de Lie	27
2.2 Constantes de Estrutura	30
2.3 Classificação das Álgebras de Lie de dimensão 3 segundo Winternitz	30
2.3.1 Álgebra de Lie abeliana ($\dim \mathfrak{g}^1 = 0$)	31
2.3.2 Álgebra de Lie com posto 1 ($\dim \mathfrak{g}^1 = 1$)	31
2.3.3 Álgebra de Lie com posto 2 ($\dim \mathfrak{g}^1 = 2$)	32

2.3.4	Álgebra de Lie com posto 3 ($\dim \mathfrak{g}^1 = 3$)	33
2.4	Ações de Grupos e Álgebra de Lie sobre uma Variedade	34
2.4.1	Isometrias.	35
3	Noções de Modelos Cosmológicos	37
3.1	Equações de Einstein	37
3.2	Modelos Cosmológicos Espacialmente Homogêneos	39
3.3	Modelos Espacialmente Homogêneos e Isotrópicos	39
4	Efeito da Anisotropia em um Modelo Espacialmente Plano	43
4.1	O Modelo Bianchi-I Diagonal	44
4.2	Equações de estado	47
4.2.1	Amplitude de anisotropia constante: $\epsilon = 0$	50
4.2.2	Amplitude de anisotropia não constante: $\epsilon \neq 0$	55
	Considerações Finais	57

Introdução

As tentativas de oferecer uma explicação do que é observado no céu noturno fez com que muitas das culturas conhecidas até agora criassem sistemas bem elaborados sobre a origem e comportamento dos objetos no céu. Por exemplo, os índios Pijaos, que ainda moram no sul do estado do Tolima na Colômbia, tem bem arraigada a ideia de que a terra é plana, que embaixo desta existem três torres de ouro que a mantêm acima da grande lagoa que representa o submundo, lar de duas criaturas que ainda não acordaram. Acima desta terra plana existem três camadas que dividem o céu observável. Na última camada encontra-se o sol, o pai de tudo. Mais detalhes desta cosmogonia podem ser encontrados em [8].

Em contraste com a cosmogonia das civilizações indígenas junto com as religiões, a sociedade moderna aplica o método científico para dar uma explicação do cosmos. Desde o século VI antes do ano zero, os filósofos gregos foram aprimorando suas explicações sobre o comportamento dos objetos no céu, até chegar no modelo matemático proposto por Claudio Ptolomeo há 20 séculos. Mas este modelo não era totalmente consistente com observações astronômicas da época. Indo um pouco mais a frente nesta história, com a teoria heliocêntrica ¹, junto às novas técnicas de observação astronômica desenvolvidas por Galileu Galilei e a teoria da gravitação exposta por Isaac Newton, entre os séculos XV-XVII, a descrição do cosmos foi ficando cada vez mais robusta. Os modelos de universo baseados no método científico são chamados de *modelos cosmológicos*.

Entre os anos de 1920-1930 os físicos Alexander Friedmann e Georges Lemaître concluíram que a teoria da Relatividade Geral pode ser usada para explicar um universo em expansão. Uma extensão da teoria heliocêntrica, nos diz que nossa galáxia

¹ A teoria heliocêntrica explica que os planetas e o Sol não giram em torno da Terra

não está numa região especial do universo. Estendendo isto para qualquer outra galáxia, dizemos que o universo é homogêneo, pelo menos em escalas suficientemente grandes, assim como isotrópico, quer dizer, este apresenta as mesmas condições em todas as direções visto desde qualquer ponto no espaço. Esta suposição é fundamentada nas medições da radiação cósmica de fundo. As duas suposições juntas se conhecem como o *princípio cosmológico*.

Nos anos trinta o físico Howard P. Robertson e o matemático Arthur Geoffrey Walker demonstraram que existe uma métrica subjacente em todos os modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos, chamada de *métrica de Robertson-Walker*. O modelo cosmológico homogêneo e isotrópico que aplica a métrica de Robertson-Walker é conhecido como *modelo padrão da cosmologia* ou modelo FLRW. Para obter a descrição de um universo em expansão acelerada segundo o modelo FLRW, coloca-se um termo adicional nas Equações de Einstein chamado de *constante cosmológica* Λ .

Na medição da radiação cósmica de fundo se apresentam pequenas flutuações, o que faz pensar que o universo é muito próximo do isotrópico. Uma questão que surge de tudo isto é, se existem outros modelos de universo que consigam explicar a expansão acelerada tendo em conta apenas um pequeno desvio com respeito à isotropia. Os modelos cosmológicos que preservam só a homogeneidade do espaço pertencem à família de *modelos cosmológicos tipo Bianchi*. O modelo mais "simples" desta família é o *modelo Bianchi tipo I*.

Os modelos Bianchi-I são tais que, num instante de tempo o espaço 3-dimensional é um espaço Euclideano. O objetivo deste trabalho é aplicar o modelo Bianchi-I ao espaço-tempo e poder concluir se, colocando certas condições sobre a matéria do universo, pode este modelo concordar com a expansão do universo prescindindo da constante cosmológica.

Neste trabalho analisaremos a evolução da geometria espacial do universo sob certas condições da anisotropia. Assim, se faz necessária uma revisão sobre alguns conceitos da Geometria Diferencial que serão apresentados no capítulo 1. No capítulo 2 estudamos os grupos de simetria que existem num espaço homogêneo de dimensão 3. Uma breve explicação sobre modelos matemáticos em cosmologia é feita no capítulo 3. Por último, no capítulo 4 apresentamos um exemplo onde aplicamos os conceitos estudados nos capítulos 1-3.

Capítulo 1

Conceitos de Geometria Diferencial

O objeto de estudo da geometria diferencial, as variedades diferenciáveis, têm uma característica especial de que localmente podem ser analisadas com as ferramentas do cálculo diferencial do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Uma extensão do cálculo em \mathbb{R}^n , e conseqüentemente às variedades diferenciáveis é conhecida como cálculo tensorial. Neste capítulo apresentamos algumas propriedades dos tensores e das variedades diferenciáveis.

Vamos adotar a *convenção da soma de Einstein*, i. e.:

$$\sum_{i=1}^n k^i x_i = k^i x_i.$$

Esta convenção é válida só no produto de dois ou mais termos que esteja no mesmo lado da igualdade.

1.1 Álgebra Multilinear

1.1.1 Formas lineares

Neste seção vamos tratar espaços vetoriais e tensores sobre o corpo dos números reais \mathbb{R} . Para uma visão mais geral de álgebra linear veja [2].

Definição 1.1.1 *Seja E um espaço vetorial real de dimensão n . Definimos o Espaço-dual (E^*) de E como sendo o espaço de todos os funcionais lineares sobre E , $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$.*

Exemplo 1.1.1 Dada uma função real $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a derivada total $dg_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear.

É fácil mostrar que, dada uma base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E , E^* é um espaço vetorial. Definimos sua base dual de E^* por $\mathcal{B}^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ tal que

$$e^i(e_j) = \delta_j^i,$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$. A base dual de E^* depende da escolha da base de E . Existe o espaço dual de E^* chamado de espaço bidual E^{**} . Entre E^* e E^{**} tem-se um isomorfismo natural, i. e., que não depende das bases escolhidas nos espaços vetoriais.

Proposição 1.1.1 A aplicação $\Omega : E \rightarrow E^{**}$ definida como $\Omega(\omega) \cdot (v) = \omega(v)$, é um isomorfismo.

Fica claro que uma base de E^{**} é a mesma base do espaço vetorial E , pois

$$\Omega(e^i) \cdot (e_j) = e^i(e_j) = \delta_j^i,$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$. A prova pode ser encontrada em [1].

1.1.2 Formas bilineares

Definição 1.1.2 Seja E espaço vetorial e $\dim E = n$. Uma forma bilinear b é uma função $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, que é linear em cada uma de suas entradas, i.e., se $v, w, z \in E$ e $c \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} b(v + cw, z) &= b(v, z) + cb(w, z), \\ b(v, z + cw) &= b(v, z) + cb(v, w). \end{aligned}$$

O espaço das formas bilineares sobre E tem estrutura de espaço vetorial. Na continuação apresentamos dois teoremas importantes com respeito às formas bilineares em espaços vetoriais de dimensão finita. Se o leitor estiver interessado em mais propriedades e resultados das formas bilineares, estas podem ser encontradas em [2].

Teorema 1.1.1 Seja E espaço vetorial com $\dim E = n$ e seja b uma forma bilinear simétrica sobre E . Então, existe uma base de E em relação a qual b é representada por uma matriz diagonal.

Prova. Seja $v \in E$ tal que $b(v, v) \neq 0$. Seja S o subespaço gerado pelo vetor v e S^\perp o conjunto dos vetores z tal que $b(z, w) = 0$, $\forall w \in S$. Afirmamos que $E = S \oplus S^\perp$, $S \cap S^\perp = 0$. Um vetor em S é da forma cv com $c \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $cv \in S^\perp$, logo $b(cv, cv) = c^2 b(v, v) = 0$, como $b(v, v) \neq 0$, temos que $c^2 = 0$. Agora, seja y um vetor em $E = S \oplus S^\perp$, e

$$x = y - \frac{b(y, v)}{b(v, v)}v,$$

x é a componente de y em S^\perp . Assim

$$b(v, x) = b(v, y) - \frac{b(y, v)}{b(v, v)}b(v, v) = 0,$$

uma vez que b é uma forma bilinear simétrica. A restrição de b sobre qualquer subespaço de E é ainda simétrica. O processo anterior se repete sobre o subespaço S^\perp por indução. Agora, escolhemos $e_1 = v$ obtendo uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E tal que $b(e_i, e_j) = \delta_j^i$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. ■

Definição 1.1.3 Dizemos que uma forma bilinear é não-degenerada se num dado sistema de coordenadas o determinante da sua representação matricial é não nulo

$$\det(b_{ij}) \neq 0, \quad b_{ij} = b(e_i, e_j).$$

Uma forma bilinear simétrica não-degenerada é chamada de produto escalar. Se for definida positiva, i.e., $b(v, v) \geq 0$ sobre E , é chamada de produto interno em E .

Pode-se mostrar que essa definição não depende da base escolhida.

Teorema 1.1.2 Seja E espaço vetorial de dimensão n e b um produto escalar. Então, existe uma base \mathcal{B} de E em relação à qual a matriz de b é diagonal e tal que

$$b(e_i, e_i) = \pm 1 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ainda, o número de vetores da base para o qual $b(e_i, e_i) = 1$ é independente da base escolhida.

Prova. Pelo teorema 1.1.1 existe uma base $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ de E tal que

$$\begin{cases} b(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = 0, & \text{se } i \neq j; \\ b(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \neq 0, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Seja \mathcal{B} uma base com estas propriedades. Definimos E^+ como sendo o subespaço de E gerado pelos vetores e_i tal que $b(e_i, e_i) = +1$, analogamente E^- . Seja $p = \dim E^+$, o resultado importante é demonstrar a unicidade de p . Suponhamos que $v \in E^+$, teria-se

$$b(v, v) = (v^i)^2 b(e_i, e_i) = (v^i)^2 > 0,$$

onde $i = 1, 2, \dots, p$. Analogamente, se $v \in E^-$, $b(v, v) = -(v^i)^2 < 0$. Seja E^\perp o subespaço gerado pelos vetores da base tal que $b(e_j, e_j) = 0$, se $v \in E^\perp$ por definição $b(v, w) = 0, \forall w \in E$.

Afirmamos que $E = E^+ \oplus E^- \oplus E^\perp$ (\oplus soma direta de espaços vetoriais). Se escolhermos S subespaço de E^+ , temos que S, E^+, E^- são linearmente independentes. Escolhemos $v \in E^+$, $w \in E^-$ e $z \in E^\perp$ tal que $v + z + w = 0$. Logo

$$\begin{aligned} b(v, 0) &= b(v, v + w + z) = b(v, v) + b(v, w) + b(v, z) = 0, \\ b(w, 0) &= b(w, v + w + z) = b(w, v) + b(w, w) + b(w, z) = 0. \end{aligned}$$

subtraindo estas duas equações temos que $b(v, v) = b(w, w)$, pois $b(v, w) = b(w, v)$.

Já que $v \in E^+$ e $w \in E^-$, tem-se $b(v, v) = b(w, w) = 0$, o que implica que $v = w = 0$. Assim $z = 0$. Portanto, estes subespaços são linearmente independentes.

Sabemos que $\dim S \leq \dim E^+ = p$. Seja $\tilde{\mathcal{B}}$ uma outra base de E que satisfaz as condições do teorema com os subespaços correspondentes E_1^+, E_1^-, E_1^\perp . Um procedimento análogo mostra que $\dim E_1^+ \leq \dim E^+ = p$. Agora, partindo da base $\tilde{\mathcal{B}}$ e usando o mesmo argumento, obtemos que $\dim E^+ \leq \dim E_1^+ = p$. Concluimos que, a dimensão de E^+ não depende da escolha da base de E . O mesmo acontece para E^- . ■

A quantidade de “-1” na representação matricial de b relativa a uma base ortonormal como no teorema 1.1.1 é o que chamamos de *índice do produto escalar*. Se b é uma métrica de índice não nulo, dizemos que b é não-definida.

1.1.3 Formas multilineares

Até aqui mencionamos alguns tipos de formas lineares que nos são familiares. Em espaços vetoriais E , é possível definir funcionais lineares que tenham mais de duas entradas no seu domínio.

Definição 1.1.4 *Seja E espaço vetorial. Um funcional*

$$g : E \times \dots \times E \longrightarrow \mathbb{R},$$

é chamado de forma multilinear se ela é linear em cada uma de suas k -entradas, i.e.,

$$g(v_1, \dots, av_i + w, v_{i+1}, \dots, v_k) = ag(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + g(v_1, \dots, w, v_{i+1}, \dots, v_k).$$

Exemplo 1.1.2 *Sejam os vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$ em \mathbb{R}^n , e o arranjo matricial destes numa matrix $A_{n \times n}$, então, a função $D(v_1, \dots, v_n) = \det(A)$ é uma função n -linear sobre \mathbb{R}^n .*

Sendo as formas lineares e bilineares um caso particular das formas multilineares, então, por indução tem-se que o espaço das formas multilineares é um espaço vetorial.

1.1.4 Tensores

Definição 1.1.5 *Sejam as duas formas f k -linear e g s -linear sobre o espaço vetorial E . Definimos o Produto tensorial de f, g como sendo: $f \otimes g : E^{k+s} = E^k \times E^s \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f \otimes g(v_1, \dots, v_{k+s}) = f(v_1, \dots, v_k)g(v_{k+1}, \dots, v_s).$$

Definição 1.1.6 *Uma forma k -linear sobre E é chamada de tensor k -covariante, seu espaço vetorial é denotado por $\omega \in T_k^0(E)$.*

Dada uma base $\mathcal{B} = \{e_i\}$ com dual $\mathcal{B}^* = \{e^i\}$, pode-se mostrar que

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k},$$

forma uma base de $T_k^0(E)$, onde

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}(v_1, \dots, v_k) = e^{i_1}(v_1) \dots e^{i_k}(v_k).$$

Como uma forma multilinear é determinada pela ação dos vetores da base, se denotamos $\omega_{i_1 \dots i_k} := \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, temos sua representação na base \mathcal{B} :

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}.$$

Assim, uma forma bilinear b tem a representação

$$b = b_{ij} e^i \otimes e^j, \quad b_{ij} = b(e_i, e_j).$$

Da mesma maneira que definimos os tensores k -covariantes, podemos definir os tensores s -contravariantes, $T_0^s(E)$, apenas trocando os papéis de E com seu dual E^* .

De forma mais geral podemos mesclar essas duas definições e definir um tensor k-covariante e s-contravariante, que é um elemento do espaço vetorial $T_k^s(E)$. Como um exemplo ilustrativo, um tensor t 1-contravariante 2-covariante é uma aplicação 3-linear $t : E \times E \times E^* \rightarrow \mathbb{R}$ e pode ser caracterizado por

$$t = t_{ij}^k e^i \otimes e^j \otimes e_k,$$

onde $t_{ij}^k = t(e_i, e_j, e^k)$ e para $v, w \in E$ e $\alpha \in E^*$

$$e^i \otimes e^j \otimes e_k(v, w, \alpha) = e^i(v) \cdot e^j(w) \cdot e_k(\alpha).$$

De forma geral $\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}\}$ é uma base do espaço $T_k^s(E)$. Logo, um tensor t k-covariante s-contravariante fica representado por

$$t = t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}.$$

1.1.5 Transformação de base

Em alguns casos é conveniente escolher uma outra base do espaço E , por exemplo, quando mudamos os eixos coordenados pelos autovetores de uma transformação linear dada. Como foi dito acima, a base do espaço dual depende da base do espaço vetorial E . Portanto, quando trocamos de base, precisamos saber como mudam as representações dos tensores nesta nova.

Sejam $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ bases do espaço vetorial E , \mathcal{B}^* e $\tilde{\mathcal{B}}^*$ as bases duais respectivas. A seguinte regra é chamada de *lei de transformação fundamental*

$$\tilde{e}_i = a_i^k e_k,$$

onde $A = [a_i^k]$ é a matriz de transformação de base. Seja $\omega \in T_r^0(E)$, expressa nas duas bases de E

$$\omega = \omega_{i_1, \dots, i_r} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} = \tilde{\omega}_{j_1, \dots, j_r} \tilde{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{j_r},$$

onde

$$\tilde{\omega}_{j_1, \dots, j_r} = \omega(\tilde{e}_{j_1}, \dots, \tilde{e}_{j_r}) = a_{j_1}^{k_1} \dots a_{j_r}^{k_r} \omega(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}) = a_{j_1}^{k_1} \dots a_{j_r}^{k_r} \omega_{k_1, \dots, k_r}.$$

Analogamente, as bases duais estão relacionadas por uma matriz de transformação B , isto é, $\tilde{e}^j = b_l^j e^l$. Fazendo uso da definição de base dual, encontramos a relação entre as matrizes de mudança de coordenadas

$$\langle \tilde{e}^j, \tilde{e}_i \rangle = \delta_i^j = \langle b_l^j e^l, a_i^k e_k \rangle = b_l^j a_i^k \langle e^l, e_k \rangle = b_l^j a_i^k \delta_k^l = b_l^j a_i^l$$

$$\delta_i^j = b_i^j a_l^l = (BA)_i^j.$$

Assim, $B = A^{-1}$. Um tensor r-covariante e s-contravariante tem suas componentes nas duas bases relacionadas da seguinte maneira

$$\tilde{t}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = a_{i_1}^{k_1} \dots a_{i_r}^{k_r} b_{l_1}^{j_1} \dots b_{l_s}^{j_s} t_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s}.$$

Exemplo 1.1.3 *Seja $R \in L(E)$. Escrevendo $Re_i = R_i^k e_k$, então uma das coordenadas do operador R é obtida por $\langle e^j, Re_i \rangle = R_i^j$. A seguinte função faz com que tenhamos $T_1^1(E) \cong L(E)$.*

$$\phi : L(E) \longrightarrow T_1^1$$

$$R \longrightarrow \phi(R) = t_R,$$

com $t_R(\alpha, v) = \langle \alpha, Rv \rangle$. Da regra de transformação de base, temos que

$$\tilde{R}_i^j = a_i^k b_l^j R_k^l.$$

1.1.6 Traço de um tensor

Na Álgebra Linear se define o traço de uma matriz, sendo este invariante sob uma transformação de base do espaço vetorial. Como $T_1^1(E) \cong L(E)$, então tem sentido falar do traço de um tensor (1,1), para logo ser estendido a tensores de ordem maior.

Seja $T \in T_1^1(E)$, que em coordenadas se escreve $T = T_j^i e^j \otimes e_i$, então $trT = T_i^i$. O mesmo procedimento pode ser utilizado para tensores de ordem superior. Se R é um tensor 1-contravariante 3-covariante, podemos definir um tensor 2-covariante tomando seu traço da forma

$$R_{ij} = R_{ikl}^k = R_{i1j}^1 + R_{i2j}^2 + \dots + R_{inj}^n,$$

Sob uma transformação de base, lembrando que $b_k^i = (a_k^i)^{-1}$,

$$\tilde{R}_{ij} = \tilde{R}_{ikj}^k = b_{k'}^k a_i^{i'} a_l^{l'} a_j^{j'} R_{i'l'j'}^{k'}.$$

Mas, $b_{k'}^k a_k^{l'} = \delta_k^{l'}$. Portanto,

$$\tilde{R}_{ij} = a_i^{i'} a_j^{j'} \delta_{k'}^{e'} \delta_k^{l'} R_{i'l'j'}^{k'} = a_i^{i'} a_j^{j'} R_{i'j'}^{k'},$$

o que mostra que a contração não depende da base escolhida.

1.1.7 Levantamento e abaixamento de índices

Seja g um produto escalar em E e \mathcal{B} uma base. Consideremos o seguinte isomorfismo chamado de *Isomorfismo musical*.

$$\phi : E \longrightarrow E^*$$

$$v \longrightarrow \phi_g(v) = g(v, \cdot),$$

e definamos o produto escalar em E^* da forma

$$\tilde{g}(\alpha, \beta) = g(\phi_g^{-1}\alpha, \phi_g^{-1}\beta).$$

Sendo o produto escalar uma forma bilinear simétrica, sua representação em coordenadas é

$$\tilde{g} = g^{ij}e_i \otimes e_j, \quad g^{ij} = \tilde{g}(e^i, e^j).$$

O isomorfismo musical nos permite levantar e abaixar índices arbitrariamente, transformando graus de liberdade covariantes em contravariantes e vice-versa. Por exemplo

$$\omega_i = (\phi_g(v))_i = g_{ij}v^j.$$

Desta forma um tensor 4-covariante $R \in T_4^0(E)$ poder ser visto também como um tensor 1-contravariante 3-covariante, que em coordenadas

$$R = R_{ijkl}e^i \otimes e^j \otimes e^k \otimes e^l = R^i_{jkl}e_i \otimes e^j \otimes e^k \otimes e^l,$$

onde

$$R^i_{jkl} = g^{ii'}R_{i'jkl}.$$

1.2 Variedades Diferenciáveis

Uma variedade diferenciável é um conjunto M tal que localmente pode ser parametrizado por um sistema de coordenadas no qual é possível definir um espaço tangente em qualquer um de seus pontos. Como exemplo, temos as superfícies suaves em \mathbb{R}^3 . Os conceitos apresentados nesta seção podem ser estudados com mais detalhes em [14]

Definição 1.2.1 *Um espaço topológico Hausdorff M é uma variedade diferenciável de dimensão m se existir uma família de aplicações $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:*

(i) $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ com cada U_α aberto.

(ii) Para todo par α, β tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então a aplicação $\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}$ é diferenciável.

(iii) A família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ é a família maximal que cumpre as condições (i) e (ii).

As aplicações \mathbf{x}_α são chamadas de sistema de coordenadas local.

Definição 1.2.2 Uma curva suave sobre M é uma aplicação $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que sua expressão em coordenadas dada por $\mathbf{x}_\alpha \circ c : U_\alpha \cap c(I) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável.

Seja $p \in M$, denotamos por C_p o conjunto de todas as curvas $c \subset M$ tal que $c(0) = p$. O vetor tangente expresso em coordenadas é dado por

$$\dot{c} = \left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(x \circ c)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{t=0},$$

onde

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(x(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0))}{dt} \right|_{t=0}.$$

Escreveremos $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ quando não houver confusão. Dizemos que dois caminhos $c_1, c_2 \in C_p$ estão relacionados quando seus vetores tangentes expressos em coordenadas são iguais, i.e., $(x \circ c_1)'(0) = (x \circ c_2)'(0)$. É fácil mostrar que esta relação é uma relação de equivalência.

Definição 1.2.3 Seja $c \in C_p$, definimos o vetor tangente \dot{c} como sendo a classe de equivalência de c , formalmente $\dot{c} = \{d \in C_p | d \sim c\}$.

O conjunto de todos os vetores tangentes em p é chamado de *Espaço Tangente* e denotado por $T_p M$. Este espaço tem estrutura de espaço vetorial onde $\mathcal{B} = \{\partial_1, \dots, \partial_m\}$ é uma base. Denotamos seu espaço dual por $T_p M^*$, e sua respectiva base dual $\mathcal{B}^* = \{dx^1, \dots, dx^m\}$.

Da mesma maneira que falamos de tensores no contexto algébrico, podemos falar de campos tensoriais no contexto de variedades. Assim, um campo tensorial em M k-covariante s-contravariante é uma aplicação que para cada ponto $p \in M$ associa um tensor k-covariante s-contravariante em $T_p M$, tal que num sistema de coordenadas qualquer suas componentes são funções diferenciáveis. Assim, se t é um campo tensorial deste tipo, então sua representação local é da forma

$$t = t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(x) dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r} \otimes \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_s}.$$

Denotamos

- (i) $\mathcal{F}(M)$, é o conjunto das funções diferenciáveis sobre M .
- (ii) $\mathcal{X}(M)$ é conjunto dos campos vetoriais (campos tensoriais 1-contravariantes) sobre M .
- (iii) $\mathcal{T}_k^s(M)$ é espaço dos campos tensoriais k -covariantes s -contravariantes sobre M .

Um campo vetorial Y em coordenadas locais é representado por

$$Y(p) = Y^i(p)\partial_i.$$

Se $f \in \mathcal{F}(M)$ é uma função diferenciável, então definimos a nova função Yf , chamada de derivada direcional de f com respeito a Y , por

$$(Yf)(p) = (Y^i\partial_i f)(p).$$

Teorema 1.2.1 *Seja a variedade M e os campos vetoriais X e Y sobre M . Então existe um único campo vetorial $Z = [X, Y]$, chamado de colchete de Lie dos campos vetoriais X e Y , tal que, $[X, Y]f = (XY - YX)f$. Ainda, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{F}(M)$, temos*

- a) $[X, Y] = -[Y, X]$.
- b) $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$.
- c) $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.
- d) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

1.3 Variedades semi-Riemannianas

A seguir definiremos os objetos necessários que fixam a geometria da variedade M .

Definição 1.3.1 *Dizemos que γ é uma métrica de índice r em M se for um campo tensorial 2-covariante que em cada ponto $p \in M$ define um produto escalar de índice r em T_pM . O par (M, γ) é chamado de variedade semi-Riemanniana. No caso em que $r = 0$, dizemos que a variedade e a métrica são riemannianas, e se $r = 1$, dizemos que ambas são Lorentzianas.*

Assim como falamos da derivada direcional de uma função, também podemos falar da derivada de um campo vetorial na direção de outro. Porém, não existe uma maneira natural de definirmos este objeto em variedades. Esta derivada direcional se dá por meio da escolha de uma conexão:

Definição 1.3.2 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

$$(i) \quad \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ,$$

$$(ii) \quad \nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ,$$

$$(iii) \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + (Xf)Y,$$

onde $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Em coordenadas (x_1, \dots, x_n) em torno de $p \in M$, os campos vetoriais

$$X = X^i \partial_i \quad \text{e} \quad Y = Y^j \partial_j,$$

em T_pM , teremos que

$$\nabla_XY = X^i \nabla_{\partial_i}(Y^j \partial_j) = X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + X^i \partial_i(Y^j) \partial_j.$$

Definindo $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$, concluímos que

$$\nabla_XY = (X^i Y^j \Gamma_{ij}^k + X(Y^k)) \partial_k.$$

As funções Γ_{ij}^k são chamadas de *simbolos de Christoffel*. O objeto ∇_XY é chamado de *Derivada covariante* do campo Y na direção do campo X .

A seguir, o teorema fundamental da geometria semi-Riemanniana nos diz que existe uma maneira de fazermos derivada covariante quando a variedade é munida de uma métrica.

Teorema 1.3.1 *Dado uma variedade M com métrica γ , então existe uma única conexão afim ∇ em M , chamada de conexão de Levi-Civita, tal que:*

$$(a) \quad \nabla \text{ é simétrica: } \nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y],$$

$$(b) \quad \nabla \text{ é compatível com a métrica: } \nabla(\gamma(X, Y)) = \gamma(\nabla \cdot X, Y) + \gamma(X, \nabla \cdot Y).$$

Ainda, em coordenadas, seus símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \gamma^{kl} (\partial_i \gamma_{lj} + \partial_j \gamma_{li} - \partial_l \gamma_{ij}).$$

Se $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k = 0$, então $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i$ que é uma condição de curvatura nula. Sua definição formal:

Definição 1.3.3 O operador de curvatura R de uma variedade M com conexão ∇ , é uma função que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R_{XY} : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$, definida por

$$R_{XY}Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Teorema 1.3.2 O operador de curvatura define um único campo tensorial $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$, que é chamado de tensor de curvatura de Riemann. Em um sistema de coordenadas arbitrário

$$R_{jkl}^i = \partial_k \Gamma_{lj}^i - \partial_l \Gamma_{kj}^i + \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m.$$

Definindo $\gamma_{im} R_{jkl}^m = R_{ijkl}$ temos

- (a) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$;
- (b) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$;
- (c) $R_{ijkl} = R_{klij}$;
- (d) $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$;
- (e) Identidade de Bianchi: $\nabla_e R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijle} + \nabla_l R_{ijek} = 0$

Definição 1.3.4 O tensor de Ricci é o traço do tensor de curvatura segundo

$$R_{ij} = R_{ikj}^k = g^{km} R_{ikjm}.$$

A curvatura escalar de M , é a função escalar

$$S = \gamma^{ij} R_{ij},$$

onde $[\gamma^{ij}] = [\gamma_{ij}^{-1}]$.

O tensor de Einstein é construído a partir do tensor de Ricci e a curvatura escalar. Da identidade de Bianchi para o tensor de curvatura de Riemann, então, subindo um índice e contraindo com outro obtemos

$$\nabla_i (R_{jk}) + \nabla_k (R_{ji}^i) + \nabla_i (R_{jlk}^i) = 0.$$

Usando as propriedades de simetria no segundo termo, se subimos o índice j e o contraímos com l , então

$$\nabla_j(R_k^j) - \nabla_k(S) + \nabla_i(R_{jk}^{ij}) = 0.$$

Das propriedades de antissimetria no último termo, chegamos em

$$2\nabla_j(R_k^j) - \nabla_k(S) = \nabla_j(2R_k^j - \delta_k^j S) = 0.$$

Definindo o *Tensor de Einstein* como sendo o tensor simétrico G

$$G_{kj} = R_{kj} - \frac{1}{2}Sg_{kj}. \quad (1.1)$$

Então temos

$$\nabla_j G_k^j = \nabla_j(2R_k^j - \delta_k^j S) = 0.$$

Uma explicação mais completa pode ser encontrada em [9].

1.4 Variedades Lorentzianas

Os resultados apresentados na seção anterior também são válidos no contexto de variedades Lorentzianas. As demonstrações das proposições apresentadas aqui, podem ser encontradas em [4].

O espaço T_pM pode ser construído como uma soma direta dos seguintes subespaços vetoriais:

- (i) O subespaço vetorial W tal que $\gamma|_W > 0$, é chamado de *tipo espaço*,
- (ii) O subespaço vetorial W é chamado de *tipo tempo* se $\gamma|_W < 0$,
- (iii) No caso restante $\gamma|_W = 0$, chamamos o subaço W de *tipo luz*.

Esta divisão é conhecida como sendo o *caráter causal* de vetores em T_pM . Se $v \in T_pM$ e $\gamma(v) < 0$, chamamos v de vetor tipo tempo. Analogamente, vetor tipo espaço e vetor tipo luz.

Proposição 1.4.1 *Seja W um subespaço de T_pM de dimensão $n \geq 2$, então são equivalentes*

- (a) W é tipo tempo, então, ele mesmo é um espaço de Lorentz.

(b) W contém dois vetores nulos linearmente independentes.

(c) W tem um vetor tipo tempo.

Proposição 1.4.2 *Seja W um subespaço de T_pM , então são equivalentes*

(a) W é tipo luz.

(b) W tem um vetor nulo, mas, não um vetor tipo luz.

(c) A interseção de W com o conjunto dos vetores nulos forma um subespaço de dimensão 1.

Definição 1.4.1 *Seja c uma curva em M , chamamos c de curva tipo tempo, se \dot{c} é um vetor tipo tempo para todo $t \in I$.*

Analogamente definimos curva tipo luz e tipo espaço.

Definição 1.4.2 *Seja P uma subvariedade de M , se para todo $p \in P$ tem-se que $\gamma > 0$ em T_pM , então chamamos P de subvariedade tipo espaço.*

Analogamente define-se subvariedade tipo luz e tipo tempo.

Definição 1.4.3 *Numa variedade de Lorentz M , o campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M)$ é um campo vetorial tipo tempo, se $X(p)$ é um vetor tipo tempo para todo $p \in M$.*

Seja \mathcal{T} o conjunto de todos os vetores tipo tempo em T_pM . Para $v \in \mathcal{T}$ definimos o conjunto

$$C(v) = \{w \in \mathcal{T} : \langle v, w \rangle < 0\},$$

chamado de *cone de luz*. O cone oposto é $C(-v) = -C(v) = \{w \in \mathcal{T} : \langle v, w \rangle > 0\}$.

Definição 1.4.4 *Dizemos que uma variedade Lorentziana M é temporalmente orientável, se existe uma função τ que atribui a cada ponto p um cone temporal C_p em T_pM e um campo vetorial do tipo tempo tais que $X(p) \in C_p$ para todo $p \in M$. τ é uma orientação temporal.*

Definição 1.4.5 *Uma variedade de Lorentz conexa, temporalmente orientada, é chamada de espaço-tempo.*

Para maior informação da orientação temporal numa variedade de Lorentz o leitor pode consultar [5].

Capítulo 2

Grupos de Simetria

A simetria é um conceito especial na ciência, tanto na Matemática como na Física. Especificamente em nosso contexto, a simetria pode se relacionar aos “movimentos” sobre uma variedade. Como exemplo, temos os movimentos rígidos de um conjunto no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , que são feitos de forma contínua e a composição de dois movimentos rígidos é ainda um outro movimento rígido. Melhor ainda, este conjunto de movimentos no espaço Euclidiano de dimensão 3 tem estrutura de grupo e de variedade diferenciável, o que chamamos de grupo de Lie. Neste capítulo abordaremos alguns conceitos básicos de grupos de Lie e suas álgebras de Lie.

2.1 Grupo de Lie e Álgebras de Lie

Definição 2.1.1 Dizemos que um conjunto G não vazio, é um grupo se nele há definida uma operação “ \star ” chamada de operação do grupo, que tem as propriedades seguintes:

- (i) $a, b \in G$ então $a \star b \in G$.
- (ii) Se $a, b, c \in G$, se tem $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$.
- (iii) Existe $I \in G$ tal que $a \star I = I \star a$, para cada elemento de G .
- (iv) para todo $a \in G$, existe o elemento a^{-1} tal que $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = I$.

Por simplicidade de notação vamos fazer $a \star b = ab$. Existem conjuntos não discretos com uma operação de grupo bem definida que podem ser parametrizados assim como uma variedade diferenciável. Estes grupos são os *grupos de Lie*.

Definição 2.1.2 Um grupo de Lie G é um grupo com as seguintes propriedades:

- (a) G é uma variedade diferenciável.
- (b) A operação de grupo $\star : G \times G \rightarrow G$ é diferenciável.
- (c) O mapeamento inverso $i : G \rightarrow G$, $i(a) = a^{-1}$ é diferenciável.

Exemplo. Um espaço vetorial E sobre \mathbb{R} de dimensão finita é um grupo com a operação \star definida como a soma de vetores em E . A aplicação

$$x : E \times E \rightarrow E$$

$$x(a_1, a_2) = a_1 + a_2,$$

é linear, portanto, diferenciável. Da mesma forma $i(a)^{-1} = -a$ é suave. Logo E é um grupo de Lie.

Todo grupo de Lie é geometricamente homogêneo, i. e., seja $a, b \in G$ com U vizinhança de a , então existe uma vizinhança V de b tal que $V = ba^{-1}U$, pois a multiplicação em G é contínua. Em G existe um elemento que tem um comportamento algebricamente diferente: este é o elemento I definido acima.

Do comentado acima, podemos dizer que tem sentido estudar as propriedades do grupo G numa vizinhança da identidade I , para logo serem estendidas ao grupo todo, se este for conexo. Sendo G uma variedade diferenciável, então existe o espaço tangente $T_I G = \mathfrak{g}$, que pelo estudado na seção 1.2, sabemos que tem estrutura de espaço vetorial¹. Cada $X \in \mathfrak{g}$ define um campo vetorial em G por

$$X_G(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(t) \cdot g,$$

onde $h(t) \in G$ com

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(t) = X, \quad h(0) = I.$$

Dizemos que este campo é invariante à direita, pois satisfaz

$$X_G(g \cdot h) = X_G(g) \cdot h = dR_h(g) \cdot X_g(g),$$

onde $R_h(g) = gh$. Pode-se mostrar que todo campo invariante à direita é desta forma [4], implicando a existência de isomorfismo entre o espaço desses campos e \mathfrak{g} . Ainda, o comutador de campos invariantes à direita é também um campo invariante à direita. Isto faz de \mathfrak{g} uma álgebra de Lie como definida abaixo.

¹No que segue vamos tratar somente grupos de Lie de dimensão finita.

Definição 2.1.3 Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é um espaço vetorial $T_I G$ munido com uma aplicação bilinear $[-, -] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, tal que:

(i) $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

(ii) Os elementos da álgebra satisfazem a identidade de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

A aplicação aqui definida é chamada de colchete de Lie.

Tomando \mathfrak{g} a álgebra de Lie de um grupo de Lie G , se $X \in \mathfrak{g}$, então está bem definida a curva $F(t) \in G$ pela equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}F(t) = X_G(F(t)) \\ F(0) = I. \end{cases}$$

Chamamos esta solução de *exponencial* e a denotamos por

$$e^{tX} := F(t).$$

Seja $a, b \in G$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$ tal que $a = \exp(\epsilon X)$ e $b = \exp(\delta Y)$ para $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}$. Então o comutador do grupo $aba^{-1}b^{-1}$ satisfaz

$$aba^{-1}b^{-1} = e^{\epsilon X} e^{\delta Y} e^{-\epsilon X} e^{-\delta Y} = I + \epsilon\delta[X, Y] + \mathcal{O}^3(\delta, \epsilon).$$

Isto nos diz que o comutador da álgebra $([X, Y])$ caracteriza o comutador no grupo.

Embora tenhamos feito uma introdução rápida, quando G é um grupo matricial então as expressões aqui definidas de forma abstrata tomam suas formas usuais, como por exemplo

$$[X, Y] = XY - YX,$$

e

$$e^{tX} = I + tX + \frac{t^2}{2!}X^2 + \dots$$

2.2 Constantes de Estrutura

Dado G grupo de Lie e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie com base $\{e_i | i = 1, 2, \dots, n\}$, temos

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k,$$

onde $i, j, k = 1, 2, \dots, n$. As constantes C_{ij}^k são chamadas de *constantes de estrutura*, e serão importantes para determinar quando duas álgebras são isomorfas. A aplicação $[-, -] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ nem sempre é sobrejetora, mas o seu contradomínio tem estrutura de álgebra de Lie, a qual chamaremos de *álgebra derivada* \mathfrak{g}^1 .

Proposição 2.2.1 *Sejam \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 duas álgebras de Lie, ambas de dimensão n . Suponhamos que exista uma base para \mathfrak{g}_1 e uma outra para \mathfrak{g}_2 , tal que as constantes de estrutura coincidam. Então, \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 são isomorfas.*

Prova. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de \mathfrak{g}_1 e $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$ base de \mathfrak{g}_2 com

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k \quad \text{e} \quad [\hat{e}_i, \hat{e}_j] = \hat{C}_{ij}^k \hat{e}_k.$$

Definimos o mapeamento linear $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$, tal que

$$\varphi(e_i) = \hat{e}_i \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

logo, pela hipótese temos que

$$C_{ij}^k \varphi(e_k) = \hat{C}_{ij}^k \varphi(e_k) = \hat{C}_{ij}^k \hat{e}_k = [\hat{e}_i, \hat{e}_j] = [\varphi(e_i), \varphi(e_j)].$$

Portanto, φ é um isomorfismo. ■

Corolário. Se duas álgebras de Lie são isomorfas, então, suas álgebras derivadas também o serão.

2.3 Classificação das Álgebras de Lie de dimensão 3 segundo Winternitz

Neste trabalho estamos interessados na classificação das álgebras de Lie de dimensão 3, pois como será esclarecido nas seguintes seções, existe uma ligação entre grupos e álgebras de Lie de dimensão 3 com variedades lorentzianas espacialmente homogêneas. A dimensão da álgebra derivada \mathfrak{g}^1 , por simplicidade, a chamaremos de *posto*. As demonstrações dos resultados aqui apresentados podem ser encontradas em [6].

2.3.1 Álgebra de Lie abeliana ($\dim \mathfrak{g}^1 = 0$)

Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} abeliana é definida por

$$[X, Y] = 0, \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{g},$$

por vezes \mathfrak{g} é chamada de álgebra comutativa. Aqui temos que $C_{ij}^k = 0$ para todo i, j, k . Pela proposição 2.2.1 se tem que esta álgebra é única a menos de um isomorfismo. Assim, em dimensão n ela é caracterizada pelo seu modelo padrão com $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ e $[-, -] = 0$.

Pode-se mostrar que todo grupo de Lie abeliano, i. e., $ab = ba$ para todo $a, b \in G$, tem uma álgebra de Lie abeliana. De forma inversa, se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie abeliana de um grupo G , então este é abeliano.

2.3.2 Álgebra de Lie com posto 1 ($\dim \mathfrak{g}^1 = 1$)

Seja $\{X_1, X_2, X_3\}$ base de \mathfrak{g} . Aqui temos que posto de \mathfrak{g} é 1, logo existe X_1 que é base de \mathfrak{g}^1 . Assim, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$[X_1, X_2] = aX_1, \quad [X_1, X_3] = bX_1 \quad \text{e} \quad [X_2, X_3] = cX_1.$$

Procuramos uma base “canônica” que corresponda com o maior número de constantes de estrutura nulas. Supondo que $a \neq 0$, pode se ter a seguinte base

$$e_1 = X_1, \quad e_2 = \frac{1}{a}X_2 \quad \text{e} \quad e_3 = aX_3 - bX_2 + cX_1.$$

A álgebra derivada segundo esta nova base é

$$[e_1, e_2] = e_1, \quad [e_1, e_3] = 0 \quad \text{e} \quad [e_2, e_3] = 0.$$

Esta não é a única possibilidade, já que se supomos que $a = b = 0$ e $c \neq 0$, tomando $e_1 = X_2$, $e_2 = X_3$, $e_3 = cX_1$, então temos

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = 0 \quad \text{e} \quad [e_2, e_3] = 0.$$

Afirmamos que estas duas álgebras não são isomorfas, e portanto existem duas álgebras de Lie de dimensão 3 e posto 1 a menos de isomorfismos.

2.3.3 Álgebra de Lie com posto 2 ($\dim \mathfrak{g}^1 = 2$)

Neste caso, seja $\{e_1, e_2\}$ base de \mathfrak{g}^1 . Vamos escolher um $e \in \mathfrak{g}$ tal que $\{e_1, e_2, e\}$ seja base da álgebra de Lie \mathfrak{g} . Agora, temos que

$$[e_1, e_2] = ae_1 + be_2,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Neste caso precisamos definir o seguinte conceito.

Definição 2.3.1 Chamamos de representação adjunta de $X \in \mathfrak{g}$ o mapeamento

$$\begin{aligned} ad_X : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g}^1, \\ ad_X(Y) &= [X, Y]. \end{aligned}$$

Seja $X = x^1e_1 + x^2e_2 \in \mathfrak{g}^1$, a restrição a \mathfrak{g} da adjunta ad_X pode ser representada por uma matriz 2×2 que é construída pelas relações

$$\begin{cases} [X, e_1] = [x^1e_1 + x^2e_2, e_1] = x^2[e_2, e_1] = -x^2[e_1, e_2] = -ax^2e_1 - bx^2e_2, \\ [X, e_2] = [x^1e_1 + x^2e_2, e_2] = x^1[e_1, e_2] = ax^1e_1 + bx^1e_2. \end{cases}$$

Logo na base escolhida de \mathfrak{g}^1 se tem

$$[ad_X]_{\{e_1, e_2\}} = \begin{bmatrix} -ax^2 & ax^1 \\ -bx^2 & bx^1 \end{bmatrix}.$$

Afirmamos que o mapeamento $ad_X : \mathfrak{g}^1 \longrightarrow \mathfrak{g}^1$ é um isomorfismo [6]. Este operador linear possui dois autovalores, λ_1 e λ_2 , que podem ser postos em 3 casos distintos, a saber

- (i) λ_1, λ_2 autovalores reais e distintos;
- (ii) $\lambda_1 = \lambda_2$;
- (iii) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ com $\lambda_2 = \lambda_1^*$.

Sejam $X \in \mathfrak{g}_1$ e $Y \in \mathfrak{g}_2$ e $[ad_X]_{\{e_1, e_2\}}, [ad_Y]_{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}}$ suas representações matriciais correspondentes, assim mesmo λ_1, λ_2 e λ'_1, λ'_2 são seus respectivos autovalores. Definimos $k = \lambda_1/\lambda_2$ e $k' = \lambda'_1/\lambda'_2$. Agora um teorema importante nesta classificação das álgebras de Lie de dimensão 3 e $\dim \mathfrak{g}^1 = 2$.

Teorema 2.3.1 Duas álgebras de Lie \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 de dimensão 3 são isomorfas, se e somente se, k e k' definidos acima, são tais que $k = k'$ ou $k = 1/k'$.

2.3.4 Álgebra de Lie com posto 3 ($\dim \mathfrak{g}^1 = 3$)

Finalmente chegamos no caso onde $\dim[\mathfrak{g}^1] = 3$. A técnica para classificar estas álgebras é a mesma que a apresentada aqui, portanto, melhor apresentarmos um exemplo.

Exemplo. Seja $SL(2; \mathbb{R}) := SL_2$ o conjunto de matrizes 2×2 com determinante 1. Já que existe $\det A^{-1}$ para toda $A \in SL_2$ e $\det(AB) = \det(A) \det(B) = 1$, então temos que SL_2 é um grupo. Pode ser parametrizado por uma variedade diferenciável de dimensão 3, como segue:

$$(p, q, r) \longrightarrow M(p, q, r) = \begin{bmatrix} 1+p & q \\ r & \frac{1+qr}{1+p} \end{bmatrix}.$$

Uma base para $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2^1$ são os vetores:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left. \frac{\partial M(p, q, r)}{\partial p} \right|_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ e_2 &= \left. \frac{\partial M(p, q, r)}{\partial q} \right|_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ e_3 &= \left. \frac{\partial M(p, q, r)}{\partial r} \right|_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

temos que as constantes de estrutura C_{ij}^k são $C_{12}^1 = 1 = -C_{21}^1$, $C_{13}^3 = -2 = -C_{31}^3$ e $C_{23}^1 = 1 = -C_{32}^1$, pois

$$[e_1, e_2] = 2e_1, \quad [e_1, e_3] = -2e_3, \quad \text{e} \quad [e_2, e_3] = e_3.$$

A classificação fica das álgebras de Lie de dimensão 3 é exposta na tabela seguinte:

Classe	Álgebra
I	$[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$
II	$[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0, \quad [e_2, e_3] = e_1$
III	$[e_1, e_2] = [e_2, e_3] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_1$
IV	$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_1 + e_2$
V	$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2$
VI	$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = xe_2, \quad \text{onde } x \neq 0, 1.$
VII ₁	$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_3] = -e_1$
VII ₂	$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_3] = -e_1 + xe_2, \quad \text{onde } x \neq 0 (0 < x < 2).$
VIII	$[e_1, e_2] = e_1, \quad [e_1, e_3] = 2e_2, \quad [e_2, e_3] = e_3$
IX	$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2$

Existe um outro procedimento para realizar a classificação das álgebras de Lie de dimensão 3, que está baseado na decomposição de Berh [10]. Os C_{ij}^k 's podem ser expressados como

$$C_{ij}^k = \epsilon_{ijl}n^{lk} + a_l(\delta_i^k\delta_j^l - \delta_j^k\delta_i^l),$$

onde a_i se relaciona com o traço de C_{ij}^k por $C_{ij}^j = -2a_i$. É possível escolher uma base tal que $a_i = a\delta_i^3$. Na seguinte tabela segue esta classificação:

Classe	a_i	n	Constantes de Estructura
I	0	0	$C_{jk}^i = 0$
II	0	$diag(1, 0, 0)$	$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1,$ os outros $C_{jk}^i = 0$
III	$\frac{1}{2}\delta_i^3$	$-\frac{1}{2}A$	$C_{13}^1 = -C_{31}^1 = 1,$ os outros $C_{jk}^i = 0$
IV	δ_i^3	$diag(1, 0, 0)$	$C_{13}^1 = -C_{31}^1 = 1,$ $C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1,$ $C_{23}^2 = -C_{32}^2 = 1,$ os outros $C_{jk}^i = 0$
V	δ_i^3	0	$C_{13}^1 = -C_{31}^1 = 1,$ $C_{23}^2 = C_{32}^2 = 1,$ os outros $C_{jk}^i = 0$
VI _h	$\frac{h}{2}\delta_i^3$	$\frac{1}{2}(\bar{h} - 2)A$	$C_{13}^1 = -C_{31}^1 = 1,$ $C_{23}^2 = -C_{32}^2 = (\bar{h} - 2),$ os outros $C_{jk}^i = 0$
VII _h	$\frac{h}{2}\delta_i^3$	$diag(-1, -1, 0) + \frac{h}{2}A$	$C_{13}^2 = -C_{31}^2 = 1,$ $C_{23}^1 = -C_{32}^1 = -1,$ $C_{23}^2 = -C_{32}^2 = \bar{h},$ os outros $C_{jk}^i = 0$
VIII	0	$diag(-1, -1, -1)$	$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = -1,$ $C_{31}^2 = -C_{13}^2 = 1,$ $C_{12}^3 = -C_{21}^3 = 1,$ os outros $C_{jk}^i = 0$
IX	0	1	$C_{jk}^i = \epsilon_{ijk}$

2.4 Ações de Grupos e Álgebra de Lie sobre uma Variedade

Nesta seção apresentamos formalmente o conceito de simetria numa variedade.

Definição 2.4.1 *Uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade M é um mapeamento suave*

$$\begin{aligned} G \times M &\rightarrow M, \\ (g, p) &\mapsto g \cdot p \end{aligned}$$

tal que

$$I \cdot p = p$$

e

$$g \cdot (h \cdot p) = (g \star h) \cdot p,$$

onde I é a identidade e gh é o produto em G . A ação é chamada de ação livre se para todo $g \in G$ e todo $p \in M$

$$g \cdot p = p \Rightarrow g = I.$$

Como uma álgebra de Lie está intrinsecamente associada com seu grupo, é de se esperar que uma ação de um grupo de Lie também seja manifestada através de sua álgebra:

Teorema 2.4.1 *Dada uma ação de um grupo de Lie G numa variedade diferenciável M e X um elemento da correspondente álgebra de Lie \mathfrak{g} , se definimos o campo vetorial X_M , chamado de campo fundamental, por*

$$X_M(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tX} \cdot p,$$

temos que

$$[X_M, Y_M] = -[X, Y]_M,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

A prova pode ser encontrada em [7]

2.4.1 Isometrias.

Definição 2.4.2 *Sejam M e N variedades diferenciáveis com métricas de mesmo índice g, \tilde{g} , respectivamente. Se $\phi : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo tal que $\phi^*\tilde{g} = g$, onde $\phi^*\tilde{g}$ é o pullback definido por*

$$(\phi^*\tilde{g})_p(v_1, v_2) = \tilde{g}_{\phi(p)}(d\phi \cdot v_1, d\phi \cdot v_2) = g_p(v_1, v_2), \quad p \in M$$

então chamamos ϕ de Isometria. Quando $M = N$ e $g = \tilde{g}$, o conjunto de tais funções é um grupo chamado de grupo de isometrias de M :

$$\text{Isom}(M, g) \equiv \{\phi : M \rightarrow M \mid \phi \text{ é uma } g\text{-isometria}\}.$$

O grupo de isometrias será sempre um grupo de Lie [4, 10]. Ele age naturalmente em M segundo

$$\begin{aligned} Isom(M, g) &\rightarrow M, \\ (\phi, p) &\mapsto \phi(p). \end{aligned}$$

Os campos fundamentais dessa ação são chamados de campos de Killing. Pode-se mostrar que eles são caracterizados pela condição $\mathcal{L}_X g = 0$. O operador \mathcal{L}_X é conhecido como operador derivada de Lie (veja [4]).

Definimos o subgrupo de isotropia em $p \in M$ por

$$I_p(M, g) = \{\phi \in Isom(M, g) \mid \phi(p) = p\}.$$

O conjunto

$$\mathcal{O}_p = \{q \in M \mid q = \phi(p) \text{ para algum } \phi \in Isom(M, g)\},$$

é chamado de *órbita de p* sob o grupo de isometrias. Se $\mathcal{O}_p = M$ para todo $p \in M$, dizemos que M é um espaço homogêneo. Em outras palavras, para qualquer dois pontos $p, q \in M$ existe uma isometria $\phi \in Isom(M, g)$, tal que $\phi(p) = q$.

Nos capítulos seguintes apresentaremos um contexto específico onde aplicamos os conceitos estudados até aqui.

Capítulo 3

Noções de Modelos Cosmológicos

Neste capítulo vamos dar uma noção matemática sobre alguns modelos do universo que são de interesse em cosmologia, a saber, o modelo padrão FLRW e os modelos de Bianchi.

Nos modelos cosmológicos que vamos considerar, temos que o universo é descrito como uma variedade lorentziana M de dimensão 4 a qual chamamos de *espaço-tempo*. Adotaremos a notação dos índices tal como na relatividade geral, a dizer, $q = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in M$ e denotamos a coordenada x^0 como sendo a variável temporal t . Os índices gregos variam de 0 a 3, enquanto os índices latinos de 1 a 3. Assim, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico com $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, e o elemento de linha ds^2 é representado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

ou

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{i0} dt dx^i + g_{ij} dx^i dx^j,$$

onde g_{ij} é a parte espacial de $g_{\mu\nu}$.

3.1 Equações de Einstein

A hipótese que propôs Albert Einstein foi a de que a gravitação é representada por $g_{\mu\nu}$ e é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo devido a presença de matéria, esta em alguma de suas representações. Antes de apresentar as equações da gravitação de Einstein, faremos alguns comentários sobre o tensor de momento-energia.

O universo pode ser pensado como o fluxo de um fluido, onde as galáxias são entendidas como objetos pontuais. Um observador que se desloca no universo acom-

panhando o seu fluxo é chamado de observador comóvel. Estes são descritos por um campo vetorial $U = \partial_t$ tipo-tempo.

A presença de matéria é representada por um tensor 2-covariante simétrico $T_{\mu\nu}$ chamado de *tensor de momento-energia*. Como exemplo, entendemos por fluido perfeito a matéria representada pelo tensor de energia-momento

$$T_{\mu\nu} = \rho g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu)\rho, \quad (3.1)$$

onde $U_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu$, ρ é a *densidade de energia* definida por

$$\rho = T(U, U),$$

e p é a pressão isotrópica, ambas funções em M . Uma explicação mais detalhada pode ser encontrada em [4] pag 337.

A conservação de um fluido perfeito é conhecida como equação da continuidade, e tradicionalmente tem a forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(p) = 0.$$

No espaço-tempo de Minkowski, onde a métrica é dada por $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, esta lei é simplesmente representada por

$$\partial_\nu T_\mu^\nu = 0.$$

Em um espaço-tempo geral, a lei da conservação será expressa pela *equação da continuidade*

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0. \quad (3.2)$$

Pode-se mostrar que existe uma única família de tensores 2-covariantes com as seguintes propriedades:

- É construída a partir de e envolve até as segundas derivadas parciais de $g_{\mu\nu}$;
- Simetria;
- Satisfaz a equação da continuidade 3.2.

Esta família de tensores é da forma $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$, onde Λ é constante, chamada de *constante cosmológica* e $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein construído no capítulo 1.

Como já foi dito, a gravitação está em relação direta com a geometria do espaço-tempo. Assim, pode-se propor a seguinte definição.

Definição. Seja M um espaço-tempo contendo matéria representada pelo tensor de *momento-energia* $T_{\mu\nu}$, definimos as *equações de Einstein* por

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

3.2 Modelos Cosmológicos Espacialmente Homogêneos

Definição. Para cada ponto $q \in M$, se a órbita de $Isom(M)$ em q , i.e.,

$$\Sigma_q = \{\phi(q) \mid \phi \in Isom(M)\}$$

é uma subvariedade tipo-espaço mergulhada em M de co-dimensão 1, dizemos que M é espacialmente homogêneo. Se $\dim Isom(M) = 3$, M é chamado de *espaço-tempo de Bianchi*.

A métrica g restrita à hipersuperfície Σ_q , $g|_{\Sigma_q}$, será denotada por γ . Assim, o par (Σ_q, γ_q) é uma variedade riemanniana homogênea. Numa vizinhança de q existe um sistema de coordenadas (t, x^1, x^2, x^3) , tal que as hipersuperfícies Σ são caracterizadas por $t = const.$ e

$$g = -dt^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j.$$

Neste contexto os observadores comóveis são descritos pela 4-velocidade $U = \partial_t$. Dessa maneira, M pode ser localmente vista como $M = \mathbb{R} \times \Sigma$.

Um espaço-tempo de Bianchi pode ser visto localmente como $\mathbb{R} \times G$, onde G é um grupo de Lie de dimensão 3 com métrica $g = -dt^2 + \gamma$, sendo γ uma métrica riemanniana em G invariante por seu produto. Dessa maneira, podemos dividir os espaços-tempo de Bianchi em 9 famílias distintas, conforme a classificação das álgebras de Lie de dimensão 3, como na seção 2.3. Em particular, o modelo Bianchi tipo I, ou simplesmente Bianchi-I, é tal que seu grupo de isometrias é abeliano de dimensão 3.

3.3 Modelos Espacialmente Homogêneos e Isotrópicos

O modelo padrão da cosmologia faz uso do princípio cosmológico, isto é, o espaço é homogêneo e isotrópico. Do ponto de vista matemático, o espaço-tempo M é espacialmente homogêneo e, dado $q \in M$ e $u, v \in T_q \Sigma$ unitários, existe $\phi \in Isom(M)$ tal que $d\phi_q(u) = v$. Assim, dizemos que M é *espacialmente homogêneo e isotrópico*, ou simplesmente modelo Robertson-Walker (RW)[4]. Sob a hipótese desse princípio, o grupo de isometrias de M , $Isom(M)$, é de dimensão 6.

Em um modelo RW a métrica toma a forma $g = -dt^2 + \gamma$, sendo γ uma métrica de curvatura seccional constante K . Assim, existem coordenadas tais que

$$d\tau^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[dx^2 + K \frac{(x \cdot dx)^2}{1 - Kx^2} \right], \quad (3.4)$$

e as seções espaciais homogêneas são da forma:

- Σ é o espaço Euclidiano (\mathbb{R}^3), se $K = 0$;
- Σ é S^3 , se $K > 0$;
- Σ é o espaço hiperbolico 3-dimensional, se $K < 0$.

Quando $K = 0$ temos que a representação matricial de g nesse sistema de coordenadas é

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 \end{bmatrix}.$$

Neste contexto, se o espaço-tempo é preenchido por um fluido perfeito, então as equações de Einstein são equivalentes à equação de Friedmann

$$3H^2 = \rho - \frac{3K}{a^2} + \Lambda, \quad (3.5)$$

e à equação da continuidade

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (3.6)$$

onde

$$H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt}$$

é chamado de *parâmetro de Hubble*. Note que temos 3 variáveis a serem determinadas, a saber, $a(t), \rho(t), p(t)$. Como o número das equações de Einstein é 2, falta uma terceira equação para determinar o sistema. Esta chamaremos de *equação de estado*, que tipicamente tem a forma

$$p = (\gamma - 1)\rho.$$

Se substituirmos esta equação na equação 3.6, podemos obter a densidade de energia ρ em função do fator a para logo ser usada na equação de Friedmann. Assim, dependendo do modelo cosmológico analisado obtemos $a(t)$ explicitamente ou implicitamente. Segue abaixo alguns exemplos que são expostos com maior detalhe em [12].

- Poeira ($p = 0$): Se $K = 0$ e $\Lambda = 0$, neste caso temos

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3} \quad a(t) = t^{\frac{2}{3}}.$$

- Radiação ($\rho = 3p$): Se $K = 0$ e $\Lambda = 0$, temos

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^4} \quad a(t) = t^{\frac{1}{2}}.$$

- Vácuo ($\rho = p = 0$): se $\Lambda \geq 0$, temos $a(t) = e^{\sqrt{3\Lambda}t}$.

Capítulo 4

Efeito da Anisotropia em um Modelo Espacialmente Plano

O modelo padrão da cosmologia apresenta um espaço-tempo onde as seções espaciais são maximalmente simétricas, isto é, existe um grupo de Lie G de dimensão 6, representando a homogeneidade e isotropia espacial, que agem na variedade com órbitas espaciais 3-dimensionais. Isto implica que M é da forma

$$M = \bigcup_t (\{t\} \times \Sigma),$$

onde para cada t , Σ é o Espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 no caso de curvatura nula, a esfera S^3 no caso de curvatura positiva e o espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 no caso de curvatura negativa, como foi visto na seção 3.3.

Até que ponto este contexto com muita simetria é adequado para uma descrição realista do universo? É sabido que a radiação cósmica de fundo é muito próxima de ser isotrópica, porém, a distribuição das galáxias não é isotrópica e tampouco homogênea (veja [12]). Será que a aparente expansão do universo pode ser explicada sem o uso da constante cosmológica, e conseqüentemente sem a menção de “energia escura”, considerando modelos com menos isometrias? O objetivo deste capítulo é explorar esta questão no contexto do modelo de Bianchi-I.

4.1 O Modelo Bianchi-I Diagonal

O modelo de Bianchi-I é o modelo mais simples que não considera a isotropia nas seções espaciais Σ . Neste caso o grupo de isometrias $Isom(M)$ é abeliano e de dimensão 3. Em coordenadas adaptadas, onde as órbitas \mathcal{O}_p são caracterizadas por $t = const$ e o campo normal $U = \partial_t$, temos que a métrica é representada por

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{ij}(t)dx^i dx^j. \quad (4.1)$$

O modelo de universo aqui estudado é tal que a métrica tenha uma representação numa matriz diagonal e em cada instante de tempo a seção espacial seja um espaço Euclidiano. Assim, a métrica 4.1 fica na forma

$$ds^2 = -dt^2 + \ell_1(t)^2 dx^2 + \ell_2(t)^2 dy^2 + \ell_3(t)^2 dz^2. \quad (4.2)$$

É necessário mencionar que no modelo Bianchi-I nem sempre é possível encontrar um sistema de coordenadas onde a métrica seja diagonal. Para maiores detalhes, veja o apêndice do artigo [13].

A anisotropia do modelo está codificada nos fatores de escala $l_i = l_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ de cada direção espacial. Definimos o *fator de escala isotrópico* $a(t)$ pela média geométrica dos l_i 's:

$$a(t) := \sqrt[3]{\ell_1 \ell_2 \ell_3}. \quad (4.3)$$

Neste contexto $a(t)$ representa o fator de escala da expansão volumétrica, sendo ele reduzido ao fator de escala do modelo padrão com curvatura nula quando $\ell_i = \ell_j$, $i, j = 1, 2, 3$. Para se ter uma relação com os valores obtidos nas observações astronômicas, mantemos a definição do modelo padrão e colocamos a *taxa de expansão de Hubble* ou *parâmetro de Hubble* como sendo

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{\ell}_1}{\ell_1} + \frac{\dot{\ell}_2}{\ell_2} + \frac{\dot{\ell}_3}{\ell_3} \right),$$

que representa a taxa média de expansão nas diferentes direções. Assim, as variáveis

$$\sigma_i = \frac{\dot{\ell}_i}{\ell_i} - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.4)$$

representam a diferença entre a taxa de expansão em cada direção e a taxa média H .

Das equações 4.4 obtemos as seguintes relações

$$\ell_i(t) = a(t)e^{\int \sigma_i(t)dt}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.5)$$

que tão logo as substituirmos em 4.2, teremos

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2[e^{2\int \sigma_1 dt} dx^2 + e^{2\int \sigma_2 dt} dy^2 + e^{2\int \sigma_3 dt} dz^2]. \quad (4.6)$$

É fácil verificar que

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0. \quad (4.7)$$

Definimos uma nova variável que representa a magnitude de o quanto os valores das taxas de expansão em cada direção estão se afastando do parâmetro de Hubble. Em outras palavras, é uma medida da magnitude da *anisotropia* do universo em Bianchi-I:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\dot{\ell}_i}{\ell_i} - H \right)^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}. \quad (4.8)$$

O plano gerado na relação (4.7) pode ser parametrizado por σ e uma variável angular, segundo

$$\begin{cases} \sigma_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma \text{sen} \alpha, \\ \sigma_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma \text{sen} \left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right), \\ \sigma_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma \text{sen} \left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right). \end{cases} \quad (4.9)$$

Apresentaremos alguns resultados relacionados ao tensor de Einstein. Da métrica codificada na equação (4.6) obtemos os símbolos de Christoffel, omitindo aqueles que são nulos:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^0 = (H + \sigma_1)e^{2\int \sigma_1 dt}, & \Gamma_{22}^0 = (H + \sigma_2)e^{2\int \sigma_2 dt}, & \Gamma_{33}^0 = (H + \sigma_3)e^{2\int \sigma_3 dt}, \\ \Gamma_{10}^1 = H + \sigma_1, & \Gamma_{20}^2 = H + \sigma_2, & \Gamma_{30}^3 = H + \sigma_3. \end{cases}$$

Analogamente, apresentamos as componentes não nulas do tensor de Ricci

$$\begin{cases} R_0^0 = -(\sigma^2 + 3\frac{\ddot{a}}{a}) \\ R_1^1 = 3H(\sigma_2 + \sigma_3) + \dot{\sigma}_2 + \dot{\sigma}_3 - 2H^2 - \frac{\ddot{a}}{a} \\ R_2^2 = 3H(\sigma_1 + \sigma_3) + \dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_3 - 2H^2 - \frac{\ddot{a}}{a} \\ R_3^3 = 3H(\sigma_1 + \sigma_2) + \dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2 - 2H^2 - \frac{\ddot{a}}{a} \end{cases}$$

e a curvatura escalar

$$S = - \left(\sigma^2 + 6 \left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right) \right).$$

Como já foi dito, quando $t = \text{const}$ estamos no espaço Euclideano, e portanto, assumindo uma distribuição espacialmente homogênea de matéria, isto é, esta não depende da posição no espaço. Pela nossa hipótese da métrica diagonal, temos que o tensor de momento-energia deve ser igualmente diagonal, uma vez que esperamos compatibilidade nas equações de Einstein. Assim,

$$T^\mu{}_\nu := \text{diag}\{-\rho(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t)\},$$

onde $\rho(t)$ é a *densidade de energia*, $p_i(t)$ é a pressão na i -ésima direção. Entendemos que a pressão média,

$$p(t) = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3), \quad (4.10)$$

tem um papel similar à pressão no modelo padrão, e portanto a chamaremos de *pressão isotrópica*. Desta forma temos variáveis π_i que caracterizam a anisotropia na pressão:

$$\pi_i := p_i - p, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.11)$$

Logo

$$T^\mu{}_\nu := \text{diag}\{-\rho(t), p(t) + \pi_1, p(t) + \pi_2, p(t) + \pi_3\},$$

com

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 0. \quad (4.12)$$

De forma análoga à definição de σ , temos o parâmetro que nos dá a magnitude da anisotropia na pressão:

$$\Pi := \sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2}. \quad (4.13)$$

O plano (4.12) pode ser parametrizado como

$$\begin{cases} \pi_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \Pi \text{sen}(\alpha + \beta), \\ \pi_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \Pi \text{sen}\left(\alpha + \beta + \frac{2\pi}{3}\right), \\ \pi_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \Pi \text{sen}\left(\alpha + \beta + \frac{4\pi}{3}\right), \end{cases} \quad (4.14)$$

onde $\beta = \beta(t)$ representa uma diferença de fase entre as direções da anisotropia da métrica e da matéria, e portanto a chamaremos de *fase anisotrópica*.

Definimos os vetores $\vec{\Pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ e $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ como sendo elementos do espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , com produto escalar “ \cdot ”. Assim, σ e Π são as normas dos

vetores $\vec{\sigma}$ e $\vec{\Pi}$, respectivamente. Desta forma é direto verificar que β é o angulo entre estes dois vetores, pois

$$\cos \beta = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}}{\sigma \Pi} = \frac{\sigma_1 \pi_1 + \sigma_2 \pi_2 + \sigma_3 \pi_3}{\sigma \Pi}. \quad (4.15)$$

Com um procedimento análogo ao do modelo FLRW e fazendo uso da constante cosmológica obtemos o sistema de equações de Einstein (veja [13])

$$3H^2 = \rho + \frac{\sigma^2}{2} + \Lambda. \quad (4.16)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) + \Pi \sigma \cos \beta = 0. \quad (4.17)$$

$$\dot{\sigma}_i + 3H\sigma_i = \pi_i. \quad (4.18)$$

Usando as equações 4.9 e 4.14, é possível codificar as 3 equações 4.18 em termos das duas seguintes:

$$\dot{\sigma} + 3H\sigma = \Pi \cos \beta, \quad (4.19)$$

e

$$\sigma \dot{\alpha} = \Pi \sin \beta. \quad (4.20)$$

Comparando o modelo Bianchi-I e o modelo FLRW, notamos que na *equação de Friedmann* (4.16) aparece o termo de anisotropia $\sigma^2/2$. Já a *equação da continuidade* (4.17) nos diz que, para haver conservação, temos que considerar a taxa de energia produzida pela anisotropia que é representada pelo termo $\Pi \sigma \cos \beta$. Note que quando $\sigma = 0$ retomamos às equações do modelo padrão.

Para posterior referência, se derivamos a equação de Friedmann e usamos a equação 4.19 e a equação da continuidade, então obtemos

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda - \sigma^2 - \frac{1}{2}(\rho + 3p). \quad (4.21)$$

Note que a presença da anisotropia só favorece uma desaceleração nos casos de $\Lambda = 0$ e $\rho + 3p \geq 0$.

4.2 Equações de estado

O sistema das 4 equações diferenciais independentes 4.16,4.17, 4.19,4.20 apresenta as 7 variáveis $H, \rho, \sigma, p, \alpha, \beta, \Pi$. Assim, para que o sistema fique unicamente

determinado, precisamos de mais 3 equações independentes. Então, nesta seção vamos explorar este sistema sob algumas hipóteses extras referentes à pressão exercida sobre a matéria e à anisotropia da métrica.

Existem diferentes tipos de matéria que se relacionam por diferentes “equações de estado”, que em geral são meras relações algébricas ou equações diferenciais. Como em cada era no modelo padrão, tomaremos uma equação linear entre a pressão isotrópica e a densidade de energia,

$$p = (\gamma - 1)\rho, \quad (4.22)$$

onde γ é uma constante que depende da matéria em questão. Simples tal como na hipótese anterior, assumimos que

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^\epsilon, \quad (4.23)$$

com a qual esperamos que no futuro o universo em expansão seja aproximadamente isotrópico, pelo menos no caso de $\epsilon > 0$. Da equação 4.19 temos que 4.23 é equivalente à equação de estado

$$\Pi \cos \beta = (3 - \epsilon)\sigma H. \quad (4.24)$$

Assim, as soluções procuradas dependem dos valores tomados para γ e ϵ .

Se substituirmos 4.22 e 4.23 em 4.17, obtemos

$$\dot{\rho} + 3H\gamma\rho + (3 - \epsilon)\sigma_0^2 H \left(\frac{a_0}{a}\right)^{2\epsilon} = 0. \quad (4.25)$$

Então, a equação da continuidade em função do fator de escala isotrópico $a(t)$ resulta em

$$\frac{d\rho}{da} + \frac{3\gamma\rho}{a} = \frac{(\epsilon - 3)\sigma_0^2 a_0^{2\epsilon}}{a^{2\epsilon+1}}. \quad (4.26)$$

A solução geral desta equação diferencial linear de primeira ordem é obtida usando o método de variação de parâmetros, que depende da relação entre γ e ϵ , resultando em dois casos:

Caso a: $3\gamma \neq 2\epsilon$

Aqui, a solução geral da equação 4.26 tem a seguinte forma

$$\rho(a) = \left[\rho_0 - \sigma_0^2 \left(\frac{\epsilon - 3}{3\gamma - 2\epsilon} \right) \right] \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\gamma} + \sigma_0^2 \left(\frac{\epsilon - 3}{3\gamma - 2\epsilon} \right) \left(\frac{a_0}{a} \right)^{2\epsilon}. \quad (4.27)$$

Esta solução pode ser colocada na equação de Friedmann 4.16, o que nos dá

$$H = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{c_1}{a^{3\gamma}} + \frac{c_2}{a^{2\epsilon}} + \Lambda}, \quad (4.28)$$

onde

$$c_1 = \left[\rho_0 - \sigma_0^2 \left(\frac{\epsilon - 3}{3\gamma - 2\epsilon} \right) \right] a_0^{3\gamma}$$

$$c_2 = \left[\sigma_0^2 \left(\frac{\gamma - 3}{3\gamma - 2\epsilon} \right) + \frac{\sigma_0^2}{2} \right] a_0^{2\epsilon}.$$

Integrando a equação 4.28 sob a hipótese de expansão, i. e., $H > 0$, chegamos em $a(t)$ implicitamente definida pela relação

$$\sqrt{3} \int_{a_0}^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{c_1 a^{2-3\gamma} + c_2 a^{2-2\epsilon} + \Lambda a^2}} = t. \quad (4.29)$$

Caso b: $3\gamma = 2\epsilon$

De forma análoga, quando $\epsilon = \frac{3}{2}\gamma$ a solução da equação 4.26 é

$$\rho(a) = \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\gamma} \left[\rho_0 + \frac{3}{2} \sigma_0^2 (\gamma - 2) \ln \left(\frac{a}{a_0} \right) \right]. \quad (4.30)$$

Da mesma forma, a solução acima pode ser colocada na equação de Friedmann 4.16, resultando em

$$H = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{c_1}{a^{3\gamma}} + \frac{c_2}{a^{3\gamma}} \ln(a) + \Lambda}, \quad (4.31)$$

onde

$$c_1 = \left[\rho_0 + \frac{\sigma_0^2}{2} - \frac{3}{2} \sigma_0^2 (\gamma - 2) \ln(a_0) \right] a_0^{3\gamma}$$

$$c_2 = \frac{3}{2} \sigma_0^2 a_0^{3\gamma} (\gamma - 2).$$

Integrando 4.31, supondo $H > 0$, obtemos

$$\sqrt{3} \int_{a_0}^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{a^{2-3\gamma}(c_1 + c_2 \ln(a)) + \Lambda a^2}} = t. \quad (4.32)$$

Das equações 4.20 e 4.24 obtemos

$$\dot{\alpha} = (3 - \epsilon)H \tan \beta. \quad (4.33)$$

Esta equação, e conseqüentemente o sistema todo, só pode ser determinada quando tivermos uma terceira equação de estado, que por enquanto é desnecessária para nossa análise. Note que se tivermos β próximo de $\pm\pi/2$ então a velocidade angular $\dot{\alpha}$ seria em modulo muito maior do que H . Isto nos daria uma ideia de isotropia, pois a variação da anisotropia espacial seria efetivamente imperceptível em escalas cosmológicas.

É evidente que são múltiplas as opções para se analisar, porém, vamos estudar casos com valores específicos de γ e ϵ .

4.2.1 Amplitude de anisotropia constante: $\epsilon = 0$

No que se segue vamos supor $\epsilon = 0$, o que implica que a magnitude da anisotropia σ é constante, que é consequência da equação 4.24, mas não necessariamente ocorre o mesmo com o ângulo α ou a magnitude Π da anisotropia da pressão.

Caso a.1: $\gamma = 1$ e $\epsilon = 0$

No modelo padrão isotrópico chamamos de poeira quando não existe colisão entre as partículas do fluido cosmológico, em outras palavras, $p = 0$, ou $\gamma = 1$. É bem exposto na literatura [12] que quando a curvatura do espaço é nula e $\Lambda = 0$, tem-se

$$\rho(a) \propto \frac{1}{a^3} \quad \text{e} \quad a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}. \quad (4.34)$$

Já no nosso modelo anisotrópico a equação de densidade de energia 4.27, é da forma

$$\rho(a) = [\rho_0 + \sigma_0^2] \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - \sigma_0^2. \quad (4.35)$$

Esta solução pode ser substituída na equação de Friedmann 4.16, o que nos dá

$$H = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\rho_0 + \sigma_0^2) \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - \frac{\sigma_0^2}{2} + \Lambda}. \quad (4.36)$$

No que segue vamos tomar $a_0 = 1$, que representa o valor do fator de escala atual.

Caso a.1.1: $\gamma = 1$, $\epsilon = 0$ e $\Lambda = \frac{\sigma_0^2}{2}$

Realizando a mudança de variável $y = (\sigma_0^2 + \rho_0)a^{-3}$ em H e resolvendo a integral 4.29, obtemos

$$a(t) = \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{3(\sigma_0^2 + \rho_0)}(t - t_0) + 1 \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (4.37)$$

Supondo que o espaço esteja em expansão, $H > 0$, e se pensamos que $t = 0$ quando o espaço é reduzido num "ponto", $a(0) = 0$, então a idade do universo neste modelo é determinada por $t_0 = 2/\sqrt{3(\sigma_0^2 + \rho_0)}$. A densidade de energia é

$$\rho(t) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{t} \right)^2 - \sigma_0^2. \quad (4.38)$$

É importante observar que a densidade de energia tem um limite inferior negativo que depende da anisotropia, ou melhor

$$\rho \longrightarrow -\sigma_0^2 \quad \text{se} \quad t \longrightarrow \infty.$$

Porém, mesmo que ρ tenda assintoticamente a um valor negativo, não é suficiente para ter uma expansão acelerada, pois

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{2}{9} \left(\frac{1}{t} \right)^2.$$

O seguinte gráfico mostra o comportamento do fator de escala e a densidade energia

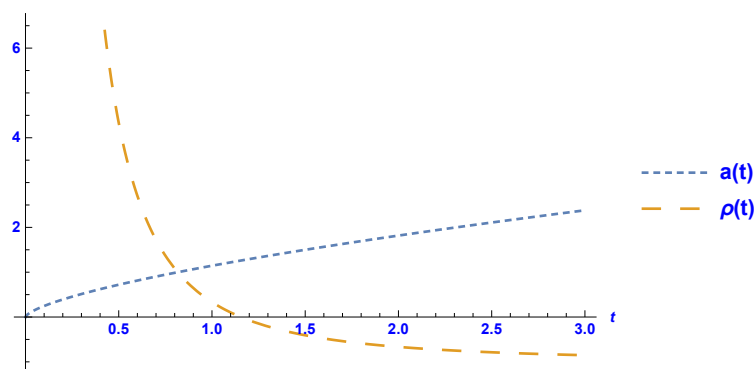


Figura 4.1: Nas duas funções escolhimos $\sigma_0^2 = \rho_0 = 1$.

Uma análise análoga pode ser feita quando $H < 0$.

Caso a.1.2: $\gamma = 1$, $\epsilon = 0$ e $\Lambda < \frac{\sigma_0^2}{2}$

Resolvendo a integral 4.29 resulta em

$$a(t) = A \cos^{\frac{2}{3}}(\omega t + \phi_0), \quad (4.39)$$

onde

$$\begin{cases} A = \left(\frac{2(\sigma_0^2 + \rho_0)}{\sigma_0^2 - 2\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}}, \\ \omega = \left(\frac{3\sigma_0^2 - 6\Lambda}{8} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Asumindo, $a = 0$ se $t = 0$, então tomamos $\phi_0 = \pi/2$. Assim, temos

$$a(t) = \left(\frac{2(\sigma_0^2 + \rho_0)}{\sigma_0^2 - 2\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \sin^{\frac{2}{3}} \left(\left(\frac{3\sigma_0^2 - 6\Lambda}{8} \right)^{\frac{1}{2}} t \right)$$

Neste modelo observamos que o universo começa com um “big bang” e termina num “big crunch” num tempo de duração $t_d = \pi/\omega$. Portanto, a densidade de energia fica determinada por

$$\rho(t) = \frac{\sigma_0^2 - 2\Lambda}{2 \sin^2(\omega t)} - \sigma_0^2. \quad (4.40)$$

Note que no tempo $t = t_d/2$, a densidade de energia chega ao seu valor mínimo, que é negativo: $\rho(t_d) = -\sigma_0^2/2$. Assumindo que $H_0 > 0$, o qual é compatível com as observações atuais, vemos que ainda estamos na primeira metade da história do universo com

$$t_0 = \left(\frac{8}{3\sigma_0^2 - 6\Lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \arcsin \left(\left(\frac{\sigma_0^2 - 2\Lambda}{2(\sigma_0^2 + \rho_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \right) < \frac{t_d}{2}.$$

Como no caso anterior, mesmo com uma densidade de energia por algum tempo negativo, o universo apresenta uma dinâmica desacelerada, pois

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_0^2}{2} - \Lambda \right) \left(1 + \frac{1}{2 \sin^2(\omega t)} \right) < 0. \quad (4.41)$$

Se tomarmos $\sigma_0^2 = \rho = 1$, teria transcorrido apenas 7% do tempo de duração do universo. Se tomarmos $t_0 = 13.7$ bilhões de anos, teríamos t_d da ordem de 190 bilhões de anos. Neste caso o comportamento de $a(t)$ e $\rho(t)$ é mostrado no seguinte gráfico

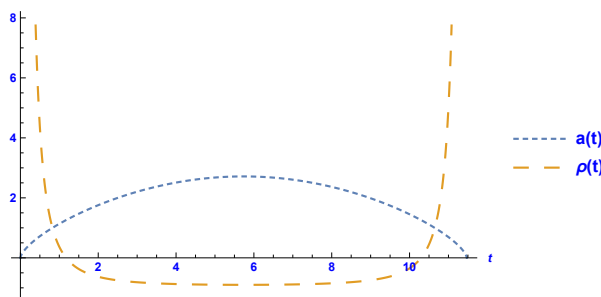


Figura 4.2: Nas duas funções escolhimos $\sigma_0^2 = \rho_0 = 1$ e $\Lambda = 0.4$

Se tomarmos $\sigma_0^2 = \rho_0 = 1$ e $\Lambda = 0$ teria transcorrido apenas 16.7% do tempo de duração do universo. Se tomarmos $t_0 = 13.7$ bilhões de anos, teríamos t_d da ordem de 82 bilhões de anos. Da mesma forma, mas fazendo $\Lambda = -1$, teria transcorrido apenas 33.3% dos 41 bilhões de anos do tempo de duração do universo. Nestes casos o comportamento de $a(t)$ e $\rho(t)$ é o mesmo que o mostrado no gráfico anterior.

Caso a.1.3: $\gamma = 1$, $\epsilon = 0$ e $\frac{\sigma_0^2}{2} < \Lambda$

Novamente, realizando um processo análogo como nos dois casos anteriores, temos que $a(t)$ apresenta o seguinte comportamento

$$a(t) = A \cosh^{\frac{2}{3}}(\omega t + \phi_0), \quad (4.42)$$

tal que

$$\begin{cases} A = \left(\frac{2(\sigma_0^2 + \rho_0)}{2\Lambda - \sigma_0^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \\ \omega = \left(\frac{6\Lambda - 3\sigma_0^2}{8} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Fazendo a substituição de $a(t)$ em $\rho(t)$ tem-se

$$\rho(t) = \left(\Lambda - \frac{\sigma_0^2}{2} \right) \operatorname{sech}^2(\omega t + \phi_0) - \sigma_0^2. \quad (4.43)$$

Neste caso, segundo nosso modelo, o universo apresenta um comportamento no qual ele não começa num “big bang”, pois $a \geq A > 0$ para todo t . Logo, escolhemos o instante de tempo em que o raio do universo tem valor mínimo como sendo nosso evento cósmico de referência $t = 0$. Neste contexto, a densidade de energia é limitada, com

$$-\sigma_0^2 \leq \rho \leq \Lambda - \sigma_0^2. \quad (4.44)$$

Observe que o limite superior

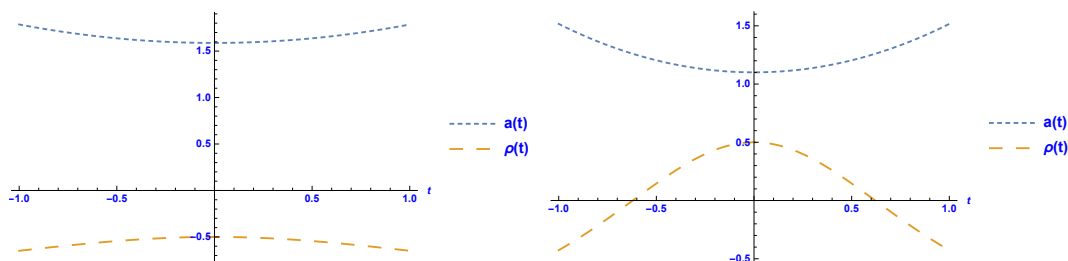


Figura 4.3: $\Lambda = 1$ e $\Lambda = 2$ respectivamente com $\sigma_0^2 = \rho_0 = 1$.

Nos dois gráficos, propondo $\sigma_0^2 = \rho_0 = 1$, vemos que o limite inferior para $a(t)$ varia inversamente a Λ , mas a densidade de energia aumenta rapidamente quando o espaço está perto de seu raio mínimo. O comportamento da aceleração neste modelo fica determinada por

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{3} \left(\Lambda - \frac{\sigma_0^2}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\left(\frac{6\Lambda - 3\sigma_0^2}{8} \right)^{\frac{1}{2}} t + \phi_0 \right) \right) \quad (4.45)$$

O seguinte grafico da uma ideia do comportamento da aceleração quando $a(t)$ está perto de seu mínimo,

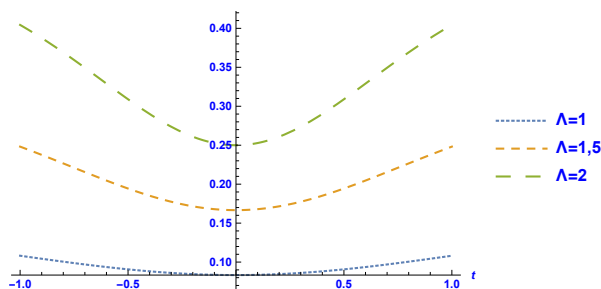


Figura 4.4: Taxa de aceleração.

nos tres casos vemos que a aceleração é positiva em todo momento.

4.2.2 Amplitude de anisotropia não constante: $\epsilon \neq 0$

Neste caso vamos analisar um modelo de universo com comportamento assintoticamente isotrópico prescindindo da constante cosmológica. Por simplicidade, escolhemos a anisotropia como sendo inversamente proporcional ao fator de escala $a(t)$. Logo, a equação 4.23 resulta em

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{1}{a} \right), \quad (4.46)$$

e portanto no nosso modelo a densidade de energia 4.27 é dada por

$$\rho(a) = [\rho_0 + 2\sigma_0^2] \left(\frac{1}{a} \right)^3 - 2\sigma_0^2 \left(\frac{1}{a} \right)^2. \quad (4.47)$$

Fazendo o mesmo processo que nas análises anteriores, temos que a integral 4.29 em sua forma simplificada é

$$\sqrt{3} \int_1^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{(\rho_0 + 2\sigma_0^2) a^{-1} - \frac{3}{2}\sigma_0^2}} = \pm(t - t_0), \quad (4.48)$$

ou

$$\frac{\sqrt{2}}{\sigma_0} \int_1^{a(t)} \sqrt{\frac{a}{s^2 - a}} da = \pm(t - t_0),$$

onde

$$s^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\rho_0}{\sigma_0^2} + 2 \right).$$

Se o “big bang” foi o começo, então tem sentido supor que $a(0) = 0$. Assim, na etapa de expansão, $H > 0$, temos

$$t = -\frac{1}{\sigma_0} \sqrt{2a(t)(s^2 - a(t))} + \frac{\sqrt{2}}{\sigma_0} s^2 \arctan \left(\sqrt{\frac{a(t)}{s^2 - a(t)}} \right). \quad (4.49)$$

A relação $t \sim a$ fica esclarecida na figura 4.1. Novamente aparece a característica de que o fator de escala é limitado, $a(t) < s^2$. Quando $a(t) \rightarrow s^2$ o primeiro termo do lado direito pode ser ignorado, o que resulta numa aproximação de t

$$t \approx \frac{\sqrt{2}}{\sigma_0} s^2 \arctan \left(\sqrt{\frac{a}{s^2 - a}} \right), \quad (4.50)$$

e conseqüentemente, a expansão acontece num tempo máximo

$$t_{max} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sigma_0} a_{max}.$$

Da função 4.50 podemos encontrar explicitamente o comportamento do fator de escala quando a expansão do universo está perto de seu final, isto é

$$a(t) \approx s^2 \sin^2 \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{2}s^2} t \right). \quad (4.51)$$

Quando $t > t_{max}$, temos que $H < 0$, logo a dinâmica é aquela referente ao “big crunch” e o tempo em função do fator de escala, assumindo a continuidade de $a(t)$, é

$$t = \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{2a(t)(s^2 - a(t))} - \frac{\sqrt{2}}{\sigma_0} s^2 \arctan \left(\sqrt{\frac{a(t)}{s^2 - a(t)}} \right) + \frac{\pi\sqrt{2}}{\sigma_0} s^2. \quad (4.52)$$

A análise do evento de contração é similar ao período de expansão. Por exemplo, da formula 4.52, pode-se ver facilmente que o tempo necessário para o colapso do universo é

$$t_d = 2t_{max} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3\sigma_0} \left(\frac{\rho_0}{\sigma_0^2} + 2 \right). \quad (4.53)$$

O gráfico de a em função do tempo t é

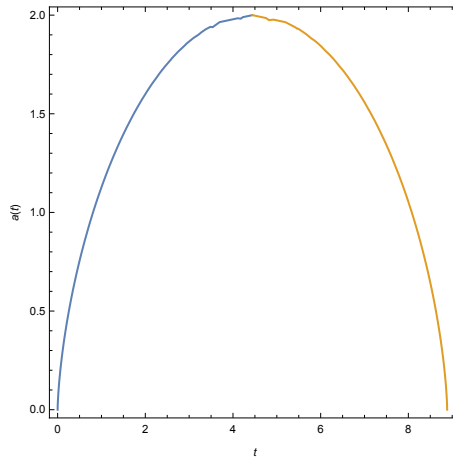


Figura 4.5: Comportamento implícito do fator de escala e o tempo quando $\rho_0 = \sigma_0^2 = 1$.

Aqui, se faz necessário ressaltar o fato de que prescindindo de Λ , $a(t)$ tem o mesmo comportamento qualitativo que no modelo **a.1.2**, no qual $\sqrt{2\Lambda} < \sigma_0$. De forma análoga, se $t \rightarrow t_{max}$ a densidade de energia se comporta como

$$\rho(t) \approx \frac{\sigma_0^2}{2s^4} \left[3 \csc^6 \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{2}s^2} t \right) - 4 \csc^4 \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{2}s^2} t \right) \right],$$

que tem seu mínimo quando $t = t_{max}$,

$$\rho_{min} = \rho(a_{max}) = -\frac{9}{8} \frac{\sigma_0^6}{\rho_0 + 2\sigma_0^2}, \quad (4.54)$$

e tende ao infinito quando $a \rightarrow 0$. A equação

$$\frac{\ddot{a}}{a} \approx -\frac{1}{4} \frac{\sigma_0^2}{s^4} \csc^6 \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{2}s^2} t \right), \quad (4.55)$$

mostra uma dinâmica desacelerada em todo momento.

Considerações finais

Neste trabalho examinamos modelos cosmológicos tipo Bianchi-I com a anisotropia da métrica caindo com uma potência de a , a saber

$$\sigma \sim \frac{1}{a^\epsilon}. \quad (4.56)$$

Diferentemente do que usualmente é feito com modelos Bianchi-I, temos um fluido com pressão anisotrópica ($\Pi \neq 0$), exceto no caso $\epsilon = 3$ (veja 4.24). Além disto, apresentamos soluções exatas para esses casos, enquanto na literatura estes tipos de soluções aparecem apenas sob o aspecto de uma análise qualitativa (veja [15, 13] e suas referências). Até o presente momento, entendemos que todas as considerações envolvendo a análise da condição 4.56 são originais.

Devido a relação entre matéria e geometria, a presença de anisotropia na expansão do universo implica na anisotropia da pressão e vice-versa, desde que $\epsilon \neq 3$. No estudo apresentado não se teve interesse nos princípios físicos que levaram à causa dessas anisotropias. A ênfase foi dada nas consequências matemáticas dos modelos. Obtemos os seguintes resultados:

- (i) A presença da anisotropia σ com a característica $\sigma_0^2 > 2\Lambda$ é suficiente para se ter um modelo espacialmente limitado ($0 < a \leq a_{max}$), pelo menos no caso $\epsilon = 0$. Por continuidade esperamos um comportamento análogo com $\epsilon > 0$, pelo menos numa vizinhança de 0. No caso $\epsilon = 1$ e $\Lambda = 0$, verificamos o mesmo tipo de comportamento.
- (ii) No modelo $\epsilon = 1$ e $\Lambda = 0$ e $p = 0$, temos que a taxa de expansão H é dada por

$$H^2 = \frac{\rho_0 + 2\sigma_0^2}{3} \left(\frac{1}{a}\right)^3 - \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^2,$$

que em comparação ao modelo FLRW, onde H é

$$H^2 = \frac{\rho_0}{3} \left(\frac{1}{a}\right)^3 - \frac{K}{a^2},$$

vemos que em nosso modelo a taxa de expansão tem o mesmo comportamento que num espaço com curvatura $K = \sigma_0^2/2$ positiva e um acréscimo de $2\sigma_0^2$ na densidade de energia.

- (iii) As equações de estado 4.22 e 4.23 propostas aqui, geraram soluções exatas (explícitas e implícitas) dos parâmetros de interesse $a(t)$ e $\rho(t)$, evidenciando um universo não estático, tipicamente em desaceleração.
- (iv) Notamos que a isotropia poderia ser efetiva se $H \ll \dot{a}$ (veja comentários abaixo da equação 4.33).

Esta foi uma primeira abordagem com o objetivo de identificar casos potencialmente condizentes com as observações astronômicas. Uma análise mais contundente em futuros estudos deverá levar em conta as entidades matemáticas relacionadas com as observações reais, como por exemplo, a relação distância luminosa \times redshift.

Referências Bibliográficas

- [1] R. J. Biezuner. *Notas de aula de Geometria Riemanniana*, Universidade Federal de Minas Gerais: Departamento de Matemática, 2016. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/geometria_riemanniana.pdf
- [2] K. Hoffman, R. Kunze. *Linear Algebra*, second edition. New Jersey: Prentice-Hall. 1971.
- [3] R. Gilmore. *Lie groups, Physics, and Geometry: An introduction for Physicists, Engineers and Chemists*, Cambridge University Press, 2008.
- [4] B. O’neil. *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*, USA: Academic Press, 1983.
- [5] R. J. Biezuner. *Relatividade Especial, Geral e Geometria Lorentziana*, Universidade Federal de Minas Gerais: Departamento de Matemática, 2016. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/relatividade.pdf
- [6] A. Bowers. *Classification of Three-Dimensional Real Lie Algebras*, 2005. Disponível em: http://www.math.ucsd.edu/~abowers/downloads/survey/3d_Lie_alg_classify.pdf
- [7] E. Meinrenken. *Group actions on manifolds*, lectures notes. University of Toronto, Spring 2003. Disponível em: <http://www.math.toronto.edu/mein/teaching/LectureNotes/action.pdf>
- [8] C. Velandia; E. Silva. *Supervivencia de una cosmogonia prehispánica en el sur del Tolima*. Disponível em: <http://www.rupestreweb.info/surdeltolima.html>.
- [9] Manuel Crespo Ballesteros. *Ecuaciones del campo de Einstein*. Universidad de Murcia. Disponível em http://webs.um.es/bussons/EcuacionesEinstein_Manuel.pdf

- [10] Øyvind Grøn, Sigbjørn Hervik. *Einstein's General Theory of Relativity*, version 9th. Springer, 2004.
- [11] J. D. Walecka. *Introduction to General Relativity*. Singapore: World Scientific, 2007.
- [12] S. Weinberg. *Cosmology*. New York: Oxford University Express, 2008.
- [13] Eduardo Bittencourt, Leandro G. Gomes, Renato Klippert. *Bianchi-I cosmology from causal thermodynamics*. *Classical Quantum Gravity*, v. 34, 2017.
- [14] M. P. do Carmo. *Geometria Riemannian*. 5 edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [15] J. Wainwright, G. F. R. Elis. *Dynamical Systems in Cosmology*. Cambridge University Press, 1997.