

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Variedades Invariantes em Sistemas Lineares  
por Partes Contínuos em  $\mathbb{R}^3$**

**Camila Santos de Oliveira**

**Orientador: Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga**

Durante o desenvolvimento deste trabalho, a autora recebeu auxílio financeiro da  
CAPES

ITAJUBÁ, 21 DE FEVEREIRO DE 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Variedades Invariantes em Sistemas Lineares  
por Partes Contínuos em  $\mathbb{R}^3$**

**Camila Santos de Oliveira**

**Orientador: Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática

**Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias**

ITAJUBÁ – MG

21 DE FEVEREIRO DE 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Variedades Invariantes em Sistemas Lineares  
por Partes Contínuos em  $\mathbb{R}^3$**

**Camila Santos de Oliveira**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 21 de fevereiro de 2018, conferindo à autora o título de Mestre em Ciências em Matemática

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia, IBILCE – UNESP

Prof. Dr. Fabio Scalco Dias, UNIFEI

Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga (Orientador), UNIFEI

ITAJUBÁ – MG

21 DE FEVEREIRO DE 2018

*Dedico este trabalho aos meus pais, Admar e Fernanda e aos meus irmãos, Fernando e Ricardo.*

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pois deu-me saúde e força para mais essa conquista. Agradeço aos meus pais, Fernanda e Admar, pelo incentivo, pelo amor e por toda preocupação com o meu bem estar.

Agradeço aos meus irmãos, Fernando e Ricardo, por todo apoio e por sempre estarem presentes na minha vida.

Agradeço a toda minha família, principalmente minha avó Luiza, por toda ajuda, carinho e sempre se preocuparem comigo.

Agradeço ao meu orientador, Denis, por todo o conhecimento que me transmitiu, pela amizade, dedicação, profissionalismo, paciência e, por estar sempre disponível para tirar minhas dúvidas durante a elaboração desta dissertação.

Agradeço em especial ao meu namorado Rafael, pelo tanto que me ajudou para que este Mestrado fosse concluído. Durante estes dois anos, foi ele quem mais me incentivou, me apoiou e esteve comigo em todos os momentos.

Agradeço aos meus amigos, Liliane, Wilder e Kledilson, pois me ajudaram nas disciplinas e me divertiram muito em vários momentos.

Agradeço a todos os meus professores do Mestrado, principalmente o Braulio, Luis Fernando e a Mariza, por todos os ensinamentos e por serem professores tão atenciosos e prestativos.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço à banca examinadora, por ter aceitado o convite e pelas sugestões.

Enfim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste Mestrado.

*“O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis.”*

*José de Alencar*

# Resumo

O foco principal desta dissertação é o estudo da existência de variedades invariantes folheadas por soluções periódicas em um sistema linear por partes contínuo em  $\mathbb{R}^3$  com duas zonas, o qual é observável, não controlável e cujas partes lineares compartilham um par de autovalores imaginários. O estudo decorre da redução desse sistema a uma equação diferencial na reta, a qual determina os pontos de equilíbrio, as soluções periódicas e as variedades invariantes do sistema original.

**Palavras-chave:** Sistema linear por partes contínuo, Variedade invariante, Soluções periódicas.

# Abstract

The main focus of this dissertation is the study of the existence of invariant manifolds foliated by periodic solutions on a piecewise linear continuous system in  $\mathbb{R}^3$ , with two zones, which is observable, uncontrollable and whose linear parts share a pair of imaginary eigenvalues. The study follows from the reduction of this system to a differential equation on the line, which determines the equilibrium points, the periodic solutions and the invariant manifolds of the original system.

**Keywords:** Piecewise linear continuous system, Invariant manifolds, Periodic solutions.



# Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Sumário	vi
Lista de Figuras	viii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Revisão de Literatura . . . . .	2
1.3 Estrutura da Dissertação . . . . .	3
<b>2 Sistemas Lineares por Partes Contínuos em <math>\mathbb{R}^n</math>: Observabilidade e Controlabilidade</b>	<b>4</b>
2.1 Conceitos Iniciais . . . . .	4
2.2 Sistemas Lineares por Partes Contínuos em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	7
2.3 Sistemas de Controle Lineares . . . . .	14
2.4 Observabilidade de Sistemas de Controle Lineares Autônomos . . . . .	18
2.5 Controlabilidade de Sistemas de Controle Lineares Autônomos . . . . .	30

<b>3</b>	<b>Sistemas Lineares por Partes Contínuos, Observáveis e não Controláveis em <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>44</b>
3.1	Sistemas Lineares por Partes Contínuos em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	44
3.2	Análise do sistema reduzido . . . . .	55
3.3	A Aplicação de Poincaré . . . . .	65
3.4	O caso em que $t^+ = -t^- > 0$ e $a = 1$ . . . . .	90
3.5	O caso em que $t^+ > 0$ , $t^- < 0$ e $a = 1$ . . . . .	103
3.6	Prova dos Teoremas Principais . . . . .	132
	<b>Conclusões</b>	<b>143</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>145</b>

# Lista de Figuras

3.1	Gráfico qualitativo da função $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , $\theta \in [0, 2\pi]$ . . . . .	66
3.2	Gráfico qualitativo da função $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com $p > 0$ , que não muda de sinal no intervalo $[0, 2\pi]$ . . . . .	72
3.3	Gráfico qualitativo da função $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com $p < 0$ , que não muda de sinal no intervalo $[0, 2\pi]$ . . . . .	73
3.4	Gráfico qualitativo da função $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com $p > 0$ , quando $\varphi$ é transversal a $S$ em três pontos. . . . .	73
3.5	Gráfico qualitativo da função $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com $p < 0$ , quando $\varphi$ é transversal a $S$ em dois pontos. . . . .	74
3.6	Gráfico qualitativo da função $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com $p > 0$ , quando $\varphi$ é tangente a $S$ em um ponto sem alterar seu sinal e é transversal a $S$ em outro ponto. . . . .	74
3.7	Gráfico qualitativo da função $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com $p > 0$ , quando $\varphi$ é tangente a $S$ em um ponto sem alterar seu sinal e não tem mais pontos em comum com $S$ . . . . .	75
3.8	Gráfico qualitativo da função $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com $p < 0$ , quando $\varphi$ é tangente a $S$ em um ponto sem alterar seu sinal e não tem mais pontos em comum com $S$ . . . . .	75
3.9	Gráfico qualitativo da função $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com $p > 0$ , quando $\varphi$ possui apenas uma interseção não transversal com $S$ em $\theta = \pi$ e muda de sinal neste ponto. . . . .	76

- 3.10 Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com  $p < 0$ , quando  $\varphi$  possui apenas uma interseção não transversal com  $S$  em  $\theta = \pi$ , muda de sinal neste ponto e intercepta  $S$  transversalmente em outro ponto. . . . . 76
- 3.11 Gráfico da função  $\tau^+$  quando  $a = 1$ ,  $r = 1/2$ ,  $t^- = -1/5$  e  $t^+ = 2/5$  em (3.8). 79
- 3.12 Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$  quando  $\varphi$  é transversal a  $S$  em três pontos. . . . . 84
- 3.13 Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$  quando  $\varphi$  é tangente a  $S$  em  $\theta = \hat{\theta}_1$  e é transversal a  $S$  em  $\theta = \theta_2$ . . . . . 84
- 3.14 A linha preta representa o gráfico da aplicação de Poincaré II. Os valores dos parâmetros em (3.8) são  $t^+ = -t^- = 1/5$ ,  $a = 1$  e  $r = 10$ . Neste caso,  $r > \hat{r} = 7.909621$ . A linha azul tracejada corresponde à reta  $y = x$  e a linha vermelha tracejada corresponde à reta  $y = -x$ . O ponto vermelho tem coordenadas  $(\hat{p}, -\hat{p})$ . . . . . 97
- 3.15 Gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, \pi, 0)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , quando  $\hat{p} < 0$ . Os valores dos parâmetros em (3.8) são  $t^+ = -t^- = 1/5$ ,  $a = 1$  e  $r = 10$ . Neste caso,  $r > \hat{r} = 7.909621$ . . . . . 98
- 3.16 A linha preta representa o gráfico da aplicação de Poincaré II. Os valores dos parâmetros em (3.8) são  $t^+ = -t^- = 1/5$ ,  $a = 1$  e  $r = \hat{r} = 7.909621$ . A linha azul tracejada corresponde à reta  $y = x$  e a linha vermelha tracejada corresponde à reta  $y = -x$ . O ponto vermelho tem coordenadas  $(\hat{p}, -\hat{p}) = (0, 0)$ . . . . . 99
- 3.17 Gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, \pi, 0)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , quando  $\hat{p} = 0$ . Os valores dos parâmetros em (3.8) são  $t^+ = -t^- = 1/5$ ,  $a = 1$  e  $r = \hat{r} = 7.909621$ . . . . . 100
- 3.18 A linha preta representa o gráfico da aplicação de Poincaré II. Os valores dos parâmetros em (3.8) são  $t^+ = -t^- = 1/5$ ,  $a = 1$  e  $r = 2$ . Neste caso,  $r < \hat{r} = 7.909621$ . A linha azul tracejada corresponde à reta  $y = x$  e a linha vermelha tracejada corresponde à reta  $y = -x$ . O ponto vermelho tem coordenadas  $(\hat{p}, -\hat{p})$ . . . . . 101

- 3.19 A linha azul representa o gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, \pi, 0)$ , quando  $\hat{p} > 0$ , e a linha azul tracejada representa o gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, 0)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Os valores dos parâmetros em (3.8) são  $t^+ = -t^- = 1/5$ ,  $a = 1$  e  $r = 2$ . Neste caso,  $0 < 1 < r < \hat{r} = 7.909621$ . . . . . 102
- 3.20 A linha azul representa o gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, \pi, 0)$ , quando  $\hat{p} > 0$ , e a linha azul tracejada representa o gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, 0)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Os valores dos parâmetros em (3.8) são  $t^+ = -t^- = 1/5$ ,  $a = 1$  e  $r = 1/2$ . Neste caso,  $0 < r < 1 < \hat{r} = 7.909621$ . . . . . 103
- 3.21 A linha vermelha representa o gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$  e a linha azul tracejada representa o gráfico da função  $\phi = \phi(\theta, 0, p)$  quando  $t^- < 0 < t^+$  e  $t^+ < |t^-|$ . . . . . 106
- 3.22 A linha vermelha representa o gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$  e a linha azul tracejada representa o gráfico da função  $\phi = \phi(\theta, 0, p)$  quando  $t^- < 0 < t^+$  e  $|t^-| < t^+$ . . . . . 118
- 3.23 Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, \tilde{p})$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . . . . . 131
- 3.24 A linha azul representa os pontos fixos estáveis da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  em função de  $r$  quando  $a = 0$ ,  $t^- = -0,1$  e  $t^+ = -10$  em (3.8). . . . . 138
- 3.25 Algumas soluções periódicas estáveis folheando uma variedade invariante, a qual é um cone. Neste caso  $a = 0$ ,  $t^- = -0,1$  e  $t^+ = -10$  em (3.8). . . . . 139
- 3.26 A linha vermelha representa os pontos fixos instáveis da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  em função de  $r$  quando  $a = 1$ ,  $t^- = 1/5$  e  $t^+ = 2/5$  em (3.8). . . . . 139
- 3.27 Algumas soluções periódicas instáveis folheando uma variedade invariante quando  $a = 1$ ,  $t^- = 1/5$  e  $t^+ = 2/5$  em (3.8). . . . . 140
- 3.28 A linha azul representa os pontos fixos estáveis da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  em função de  $r$  quando  $a = 1$ ,  $t^- = -2/5$  e  $t^+ = 0$  em (3.8). . . . . 140
- 3.29 Algumas soluções periódicas estáveis folheando uma variedade invariante quando  $a = 1$ ,  $t^- = -2/5$  e  $t^+ = 0$  em (3.8). . . . . 141

- 3.30 A linha azul representa os pontos fixos estáveis, a linha vermelha representa os pontos fixos instáveis e o ponto preto representa o ponto fixo semiestável da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  em função de  $r$ . Neste caso,  $a = 1$ ,  $t^- = -1/5$  e  $t^+ = 2/5$  em (3.8). . . . . 141
- 3.31 Algumas soluções periódicas folheando uma esfera topológica, sendo as órbitas azuis estáveis e as órbitas vermelhas instáveis. Neste caso,  $a = 1$ ,  $t^- = -1/5$  e  $t^+ = 2/5$  em (3.8). . . . . 142
- 3.32 Esfera topológica folheada por soluções periódicas, algumas instáveis, outras estáveis e uma semiestável. Neste caso,  $a = 1$ ,  $t^- = -1/5$  e  $t^+ = 2/5$  em (3.8). . . . . 142

# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo apresentamos a ideia geral desta dissertação, assim como o que nos motivou na escolha deste assunto e a estrutura do presente trabalho.

### 1.1 Motivação

Atualmente, os sistemas lineares por partes vem sendo estudados ativamente, pois estes descrevem de forma muito realista alguns fenômenos da natureza e possuem muitas aplicações em modelos mecânicos e eletrônicos, conforme [1]. Além disto, os sistemas lineares por partes reproduzem o mesmo comportamento dinâmico de sistemas não lineares suaves, como ciclos limites, órbitas heteroclínicas, órbitas homoclínicas, atratores estranhos, entre outros.

Com o intuito de se realizar um estudo mais completo dos sistemas lineares por partes, algumas formas canônicas foram introduzidas, como, por exemplo, em [1]. Na prática, muitos sistemas não lineares podem ser adequadamente modelados por sistemas lineares por partes contínuos separados por um ou dois hiperplanos paralelos, os quais dividem o plano de fase em diferentes regiões dinâmicas lineares. Assim, as formas canônicas propostas em [1] são capazes de lidar com estes sistemas não lineares. Entretanto, mesmo para os casos em que há apenas um hiperplano de separação, a análise dos sistemas

lineares por partes não é muito satisfatória. Desta forma, alguns casos mais específicos tem sido analisados.

Nesta dissertação, estudaremos o comportamento dinâmico de um sistema linear por partes contínuo em  $\mathbb{R}^3$  com apenas duas zonas. Para facilitar a análise matemática desse sistema, as formas canônicas estudadas em [1] serão utilizadas. Neste artigo, os autores aplicaram ideias bem conhecidas da teoria de controle aos sistemas lineares por partes a fim de obter equações mais simples e, quando certas condições não genéricas se mantêm, as formas canônicas podem ser simplificadas ainda mais.

Aqui, o sistema linear por partes contínuo em  $\mathbb{R}^3$  será considerado observável, não controlável e as partes lineares compartilharão um par de autovalores imaginários. O estudo desse sistema procede de sua redução a uma equação diferencial na reta. Deste modo, mostraremos que os sistemas lineares por partes contínuos em  $\mathbb{R}^3$  terão variedades invariantes folheadas por soluções periódicas, as quais podem ser limitadas ou não limitadas. No caso limitado, a variedade invariante é uma esfera topológica e, no caso não limitado, há diversas possibilidades, dentre elas, um cone.

## 1.2 Revisão de Literatura

Os resultados apresentados nesta dissertação foram baseados no estudo de cada item presente nas referências bibliográficas.

Para as definições, teoremas e demonstrações referentes à Teoria de Controle Linear foram utilizados [5] e [9]. Além disto, foram necessárias algumas definições e resultados de Álgebra Linear e Teoria da Medida, os quais podem ser encontrados em [6] e [8], respectivamente. O livro [12] foi utilizado no entendimento do **Lema 2.5.1**. Esse livro apresenta o *Lema do Complemento de Schur*, suas aplicações e aborda o histórico de vida e dos trabalhos do matemático russo Issai Schur (1875-1941).

O artigo [1] foi importante, pois nele os autores estudam a forma canônica generalizada de Liénard, a qual foi empregada na simplificação de nosso sistema linear por partes



contínuo em  $\mathbb{R}^3$ , sob o pressuposto da observabilidade. O artigo [7] nos auxiliou no estudo das soluções periódicas da equação diferencial (3.8).

Esta dissertação foi fundamentada no artigo [2]. A maioria dos resultados apresentados no Capítulo 3 foram retirados desse artigo. No decorrer do texto foram citados alguns conceitos básicos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, os quais foram extraídos de [11].

Utilizamos o *software Wolfram Mathematica* [10] para a realização de alguns cálculos, simulações numéricas e para a construção de grande parte das figuras presentes nesta dissertação. Vale ressaltar que os resultados numéricos serão apresentados com apenas seis casas decimais.

### 1.3 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação foi dividida em três capítulos, cada um conforme a estrutura a seguir.

No presente Capítulo 1 damos uma introdução a esta dissertação, apresentando uma motivação, os materiais utilizados neste estudo e a estrutura deste texto. No Capítulo 2, começamos introduzindo alguns conceitos iniciais, definições, resultados e estabelecendo algumas notações que serão utilizadas para facilitar a leitura. Em seguida, definimos os sistemas lineares por partes contínuos em  $\mathbb{R}^n$  e os sistemas de controle lineares, com ênfase nos conceitos de observabilidade e controlabilidade.

No Capítulo 3 serão demonstrados os principais resultados desta dissertação, dentre eles a existência de variedades invariantes folheadas por soluções periódicas em um sistema linear por partes contínuo em  $\mathbb{R}^3$ , o qual é o objetivo deste trabalho. Finalmente, apresentamos nossas considerações finais e as referências bibliográficas utilizadas.

# Capítulo 2

## Sistemas Lineares por Partes Contínuos em $\mathbb{R}^n$ : Observabilidade e Controlabilidade

Iniciaremos este capítulo com alguns conceitos iniciais que ajudarão o leitor no decorrer do texto e algumas notações que serão utilizadas. Em seguida, serão apresentadas algumas definições e resultados referentes à Teoria de Controle Linear, com ênfase nos conceitos de observabilidade e controlabilidade.

### 2.1 Conceitos Iniciais

No decorrer desta dissertação, será denotado por  $\mathbb{R}^{n,m}$  o espaço vetorial real de todas as matrizes reais com  $n$  linhas e  $m$  colunas e, ainda, diremos que  $A$  é uma matriz de ordem  $n$  quando  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Se  $x \in \mathbb{R}^n$ , então  $x$  será identificado como um elemento de  $\mathbb{R}^{1,n}$ , entretanto, dependendo do contexto,  $x$  poderá ser identificado com um elemento de  $\mathbb{R}^{n,1}$ .

A adjunta de uma matriz  $A$ , assim como a transposta de uma matriz  $A$ , serão denotadas por  $A^*$ . Desta forma,  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  é dita simétrica se  $A = A^*$ . Consideraremos

$O \in \mathbb{R}^{n,m}$  como a matriz nula, cujo número de linhas e de colunas dependerão do contexto em que estiver inserida. Se  $x \in \mathbb{R}^n$  for um elemento de  $\mathbb{R}^{n,1}$ , segue que  $x^* \in \mathbb{R}^{1,n}$ , mas, utilizaremos a notação para transposto de um vetor somente nos casos em que for necessária.

Denotaremos a base canônica do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  por  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , sendo  $e_j = (e_j^1, e_j^2, \dots, e_j^n)$ , com  $e_j^j = 1$  e  $e_j^i = 0$ , para  $i \neq j$ . A inversa de uma matriz  $A$  será denotada por  $A^{-1}$  e a matriz identidade será chamada de  $E$ . As notações  $\text{Po}(A)$ ,  $\text{Nuc}(A)$  e  $\text{Img}(A)$  representarão o posto, o núcleo e a imagem de uma matriz  $A$ , respectivamente.

**Definição 2.1.1.** *Sejam  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . O produto interno usual em  $\mathbb{R}^n$  é definido por*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

**Definição 2.1.2.** *Seja  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  um elemento do  $\mathbb{R}^n$ . A norma, induzida pelo produto interno usual, é dada por*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Os próximos resultados serão utilizados na demonstração da **Proposição 2.2.1**.

**Definição 2.1.3.** *Seja  $w \in \mathbb{R}^{n,1}$  um vetor unitário. Uma matriz  $H$  é chamada Matriz de Householder, se*

$$H = E - 2ww^*.$$

**Proposição 2.1.1.** *Se  $H$  é uma matriz de Householder, então  $H$  é simétrica e ortogonal.*

**Demonstração.** De fato, como

$$H^* = (E - 2ww^*)^* = E^* - (2ww^*)^* = E - 2(w^*)^*w^* = E - 2ww^* = H,$$

segue que

$$\begin{aligned}
 HH^* &= (E - 2ww^*)^2 \\
 &= E^2 - 4ww^* + 4(ww^*)(ww^*) \\
 &= E - 4ww^* + 4w(w^*w)w^* \\
 &= E - 4ww^* + 4w \langle w, w \rangle w^* \\
 &= E - 4ww^* + 4ww^* \\
 &= E,
 \end{aligned}$$

pois  $\langle w, w \rangle = \|w\|^2 = 1$ . Portanto,  $H = H^* = H^{-1}$ . ■

**Teorema 2.1.1.** *Sejam  $x, y \in \mathbb{R}^{n,1}$  vetores unitários distintos. Existe uma matriz de Householder  $H$  tal que  $Hx = y$ .*

**Demonstração.** Temos que para qualquer vetor unitário  $w \in \mathbb{R}^{n,1}$ ,

$$Hx = (E - 2ww^*)x = x - 2ww^*x = x - 2w \langle x, w \rangle = x - 2 \langle x, w \rangle w.$$

Já que, por hipótese,  $x \neq y$ , definindo

$$w = \frac{x - y}{\|x - y\|},$$

resulta que  $w$  é um vetor unitário e

$$\begin{aligned}
 Hx &= x - 2 \left\langle x, \frac{x - y}{\|x - y\|} \right\rangle \frac{x - y}{\|x - y\|} \\
 &= x - 2 \langle x, x - y \rangle \frac{x - y}{\|x - y\|^2} \\
 &= x - \frac{2(\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle)(x - y)}{\langle x - y, x - y \rangle} \\
 &= x - \frac{2(\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle)(x - y)}{\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle} \\
 &= x - \frac{2(\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle)(x - y)}{2(\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle)} \\
 &= x - (x - y) \\
 &= y.
 \end{aligned}$$

Observe que nos cálculos anteriores foi usado o fato de  $\|x\| = \|y\| = 1$ . ■

## 2.2 Sistemas Lineares por Partes Contínuos em $\mathbb{R}^n$

**Definição 2.2.1.** *A equação diferencial ordinária autônoma*

$$x' = F(x),$$

com  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , define um **sistema linear por partes contínuo** em  $\mathbb{R}^n$  com duas zonas, se existem  $c_1, c_2, v \in \mathbb{R}^n$ , com  $v \neq 0$ ,  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n,n}$  e  $\delta \in \mathbb{R}$  tais que

$$F(x) = \begin{cases} A_1x + c_1, & \text{se } \langle x, v \rangle + \delta \leq 0, \\ A_2x + c_2, & \text{se } \langle x, v \rangle + \delta > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

e, se  $\langle x, v \rangle + \delta = 0$ ,

$$A_1x + c_1 = A_2x + c_2.$$

O hiperplano  $\langle x, v \rangle + \delta = 0$  é chamado de **região de separação**, o qual divide o espaço em duas regiões lineares.

**Proposição 2.2.1.** *Qualquer sistema linear por partes contínuo em  $\mathbb{R}^n$  com duas zonas pode ser escrito na forma*

$$x' = F(x) = \begin{cases} A^-x + c, & \text{se } x_1 \leq 0, \\ A^+x + c, & \text{se } x_1 > 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

com  $c \in \mathbb{R}^n$  e as matrizes  $A^+, A^- \in \mathbb{R}^{n,n}$  verificando a relação

$$(A^-)_{ij} = (A^+)_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

isto é, as  $n - 1$  últimas colunas das matrizes  $A^+$  e  $A^-$  coincidem.

**Demonstração.** De acordo com a **Definição 2.2.1**, seja  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Assim,  $v/\|v\|$  é um vetor unitário. Logo, pelo **Teorema 2.1.1**, existe uma matriz de Householder  $H$  tal que

$$H \frac{v}{\|v\|} = e_1,$$

ou seja,  $Hv = (\|v\|, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ . Considere a mudança de variáveis

$$y = H \left( x + \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right). \quad (2.3)$$

Sendo  $Hx = x - 2\langle x, w \rangle w$ , para algum vetor unitário  $w \in \mathbb{R}^n$ , como na demonstração do **Teorema 2.1.1**, tem-se que

$$\begin{aligned} y &= H \left( x + \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right) \\ &= Hx + H \left( \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right) \\ &= Hx + \frac{\delta}{\|v\|^2} Hv \\ &= x - 2w \langle x, w \rangle + \frac{\delta}{\|v\|^2} (v - 2w \langle v, w \rangle) \\ &= x - 2w \langle x, w \rangle + \delta \frac{v}{\|v\|^2} - 2w \frac{\delta}{\|v\|^2} \langle v, w \rangle \\ &= \left( x + \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right) - 2w \left\langle x + \delta \frac{v}{\|v\|^2}, w \right\rangle \end{aligned}$$

e, daí,

$$\begin{aligned} y' &= x' - 2w \langle x', w \rangle \\ &= F(x) - 2w \langle F(x), w \rangle \\ &= HF(x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Visto que  $\langle x, v \rangle + \delta \leq 0$  segue que  $\langle x, v \rangle \leq -\delta$ . Como  $H$  é de Householder, pela **Proposição 2.1.1**,  $H = H^{-1} = H^*$  e, por (2.3), temos que

$$x = Hy - \delta \frac{v}{\|v\|^2}.$$

Assim, sendo  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , então

$$\begin{aligned} -\delta &\geq \langle x, v \rangle \\ &= \left\langle Hy - \delta \frac{v}{\|v\|^2}, v \right\rangle \\ &= \langle Hy, v \rangle - \frac{\delta}{\|v\|^2} \langle v, v \rangle \\ &= \langle Hy, v \rangle - \delta, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
0 &\geq \langle Hy, v \rangle \\
&= \langle y, Hv \rangle \\
&= \langle (y_1, y_2, \dots, y_n), (\|v\|, 0, \dots, 0) \rangle.
\end{aligned}$$

Desta forma, concluimos que  $y_1 \|v\| \leq 0$ , donde  $y_1 \leq 0$ , pois, por hipótese, temos que  $v \neq 0$ , resultando que  $\|v\| > 0$ . Analogamente, se  $\langle x, v \rangle + \delta > 0$ , obtemos  $y_1 > 0$ . Para simplificar a escrita, considere  $A = A_i$  e  $c = c_i$ , com  $i \in \{1, 2\}$ . Assim, dos sistemas (2.1) e (2.4), temos que

$$\begin{aligned}
y' &= HF(x) \\
&= H(Ax + c) \\
&= (Ax + c) - 2w \langle Ax + c, w \rangle \\
&= Ax + c - 2w \langle Ax, w \rangle - 2w \langle c, w \rangle \\
&= HAx + Hc \\
&= HA \left( Hy - \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right) + Hc \\
&= HAHy + H \left( c - A\delta \frac{v}{\|v\|^2} \right).
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos o seguinte sistema

$$y' = \begin{cases} H A_1 H y + H \left( c_1 - A_1 \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right), & \text{se } y_1 \leq 0, \\ H A_2 H y + H \left( c_2 - A_2 \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right), & \text{se } y_1 > 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Sendo o campo vetorial contínuo, pela **Definição 2.2.1**, se  $y \in \mathbb{R}^n$  e  $y_1 = 0$ , então

$$H A_1 H y + H \left( c_1 - A_1 \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right) = H A_2 H y + H \left( c_2 - A_2 \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right).$$

Em particular, se  $y = 0 \in \mathbb{R}^n$ , então

$$H \left( c_1 - A_1 \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right) = H \left( c_2 - A_2 \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right).$$

Logo, se  $y \in \mathbb{R}^n$  e  $y_1 = 0$ , resulta que

$$H A_1 H y = H A_2 H y,$$

e, conseqüentemente,

$$HA_1He_j = HA_2He_j, \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

ou seja, as matrizes  $HA_1H$  e  $HA_2H$  coincidem em suas  $n - 1$  últimas colunas. Assim, considerando

$$A^- = HA_1H, \quad A^+ = HA_2H, \quad c = H \left( c_i - A_i \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right), \quad i \in \{1, 2\},$$

concluimos a demonstração chamando  $y$  de  $x$ . ■

O próximo lema será útil na demonstração da proposição a seguir.

**Lema 2.2.1** (Lema de Grönwall). *Sejam  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas em  $[a, b]$  tais que*

$$\phi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \gamma(s)\phi(s)ds, \quad a \leq t \leq b,$$

com  $\gamma(t) \geq 0$ , para todo  $t \in [a, b]$ . Então

$$\phi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \psi(s)\gamma(s) \exp\left(\int_s^t \gamma(\tau)d\tau\right) ds, \quad a \leq t \leq b.$$

**Demonstração.** Sugerimos a leitura de [3]. ■

No que segue, o sistema (2.2) será denotado de modo simplificado por  $x' = A^\pm x + c$ .

**Proposição 2.2.2.** *Considere a equação diferencial definida em (2.2). O problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = F(x) = A^\pm x + c, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

com  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , possui solução máxima única definida em  $\mathbb{R}$ .

**Demonstração.** De acordo com [11] é suficiente provar que o campo vetorial  $F$  é uma função Lipschitziana em  $\mathbb{R}^n$ . De fato, sejam  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e  $K = \max\{\|A^+\|, \|A^-\|\}$ . Então há os seguintes casos:



(i) Se  $x_1 \geq 0$  e  $y_1 \geq 0$ , então

$$\|F(x) - F(y)\| = \|A^+x - A^+y\| \leq \|A^+\| \|x - y\| \leq K \|x - y\|;$$

(ii) Se  $x_1 \leq 0$  e  $y_1 \leq 0$ , então

$$\|F(x) - F(y)\| = \|A^-x - A^-y\| \leq \|A^-\| \|x - y\| \leq K \|x - y\|;$$

(iii) Se  $x_1 > 0$  e  $y_1 < 0$ , tomamos

$$z = \frac{y_1}{y_1 - x_1}(x - y) + y.$$

Então,  $z_1 = 0$  e, pela continuidade do campo vetorial  $F$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\| &= \|F(x) - F(z) + F(z) - F(y)\| \\ &\leq \|F(x) - F(z)\| + \|F(z) - F(y)\| \\ &= \|A^+x - A^+z\| + \|A^-z - A^-y\| \\ &\leq \|A^+\| \|x - z\| + \|A^-\| \|z - y\| \\ &\leq \max\{\|A^+\|, \|A^-\|\} (\|x - z\| + \|z - y\|) \\ &= K \|x - y\|, \end{aligned}$$

pois sendo  $x$ ,  $y$  e  $z$  pontos colineares, a soma das normas é igual a norma da soma. Os outros casos são análogos. Portanto,  $F$  é globalmente Lipschitziana em  $\mathbb{R}^n$  e, logo, o problema de Cauchy em questão possui solução única.

Observe que

$$\|F(x)\| - \|F(y)\| \leq \| \|F(x)\| - \|F(y)\| \| \leq \|F(x) - F(y)\| \leq K \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

e, em particular, se  $y = 0 \in \mathbb{R}^n$ , temos que

$$\|F(x)\| \leq K \|x\| + \|F(0)\|.$$

Sendo assim, suponha que

$$\begin{aligned} \varphi: I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \varphi(t), \end{aligned}$$

seja solução máxima única desse problema de Cauchy, definida em  $I = (\omega_-, \omega_+)$ , com  $\omega_+ < \infty$ . Como

$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t F(\varphi(s)) ds,$$

segue que

$$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + \|F(0)\| t + K \int_0^t \|\varphi(s)\| ds \leq \psi(t) + K \int_0^t \|\varphi(s)\| ds, \quad t \in [0, \omega_+),$$

sendo  $\psi$  a função dada por  $\psi(t) = \|x_0\| + \|F(0)\| t$ . Assim, pelo **Lema 2.2.1**,

$$\begin{aligned} \|\varphi(t)\| &\leq \psi(t) + K \int_0^t \psi(s) \exp\left(\int_s^t K d\tau\right) ds \\ &= \psi(t) + K \int_0^t \psi(s) \exp(K(t-s)) ds, \\ &< M, \quad t \in [0, \omega_+), \end{aligned}$$

sendo

$$M = \psi(\omega_+) + K \int_0^{\omega_+} \psi(s) \exp(K(t-s)) ds.$$

Logo,

$$\varphi(t) \in \bar{B}(0, M) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq M\}, \quad t \in [0, \omega_+),$$

o que contradiz o *Teorema de Soluções Máximas*. Portanto,  $\omega_+ = \infty$ . Analogamente, podemos mostrar que  $\omega_- = -\infty$  e, assim, a solução máxima única do problema de Cauchy está definida em  $\mathbb{R}$ . ■

Agora, note que, se no sistema (2.2) fizermos  $c = 0 \in \mathbb{R}^n$ , obtemos seu sistema homogêneo associado

$$x' = \begin{cases} A^- x, & \text{se } x_1 \leq 0, \\ A^+ x, & \text{se } x_1 > 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

o qual ainda pode ser escrito como

$$x' = A^- x + B\eta(\langle x, e_1 \rangle), \quad (2.7)$$

sendo

$$B = (A^+ - A^-) e_1,$$

e  $\eta$  a função definida por

$$\eta(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u < 0, \\ u, & \text{se } u \geq 0. \end{cases}$$

De fato, se  $x_1 \leq 0$ , segue que  $\eta(\langle x, e_1 \rangle) = \eta(x_1) = 0$  e, assim,

$$x' = A^-x + B\eta(\langle x, e_1 \rangle) = A^-x$$

e, se  $x_1 > 0$ , então  $\eta(\langle x, e_1 \rangle) = \langle x, e_1 \rangle$ , resultando que

$$x' = A^-x + (A^+ - A^-) e_1 \langle x, e_1 \rangle = A^-x + (A^+ - A^-) e_1 e_1^* x = A^+x,$$

pois, como foi visto na **Proposição 2.2.1**,  $A^+$  e  $A^-$  compartilham as  $n-1$  últimas colunas e

$$e_1 e_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

sendo  $e_1 \in \mathbb{R}^{n,1}$ . Deste modo, podemos escrever o sistema (2.2) na forma

$$x' = A^-x + B\eta(\langle x, e_1 \rangle) + c. \quad (2.8)$$

Vale ainda ressaltar que de acordo com [1], página 612, quando  $c = 0$  no sistema anterior, temos um caso particular de um sistema de controle linear autônomo (em malha fechada) da forma

$$\begin{cases} x' = A^-x + Bu, \\ y = e_1x, \\ u = \eta(y), \end{cases} \quad (2.9)$$

com  $e_1 \in \mathbb{R}^{1,n}$  e  $x \in \mathbb{R}^{n,1}$ , o qual definiremos a seguir.

## 2.3 Sistemas de Controle Lineares

Um **sistema de controle linear** é um sistema da forma

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u, \\ y = C(t)x, \end{cases} \quad (2.10)$$

com o parâmetro  $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$  chamado de tempo,  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  o vetor de estado,  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  o vetor de controle ou vetor de entrada e  $y : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^p$  o vetor de observação ou vetor de saída.

A menos que se diga o contrário, iremos considerar as funções matriciais  $A : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $B : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n,m}$  e  $C : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{p,n}$  contínuas em  $[t_0, t_1]$ . A notação  $(A, B, C)$  será utilizada para denotar o sistema de controle linear descrito no sistema (2.10).

Quando as funções matriciais  $A$ ,  $B$  e  $C$  forem constantes, o sistema de controle linear é chamado **autônomo** ou **invariante no tempo** e, caso contrário, o sistema é chamado de **não autônomo**.

Como vetores de controle admissíveis serão considerados as funções

$$u \in L^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m),$$

as quais são funções pertencentes ao espaço vetorial de todas as classes de equivalência de funções  $v : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , Lebesgue mensuráveis que diferem apenas em um conjunto de medida nula, e satisfazem

$$\int_{t_0}^{t_1} \|v(t)\| dt < \infty.$$

**Definição 2.3.1.** *Seja  $\phi : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$  uma matriz fundamental para o sistema linear*

$$x' = A(t)x, \quad (2.11)$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ . A função matricial

$$\begin{aligned} \phi_A : [t_0, t_1] \times [t_0, t_1] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n,n} \\ (t, s) &\longmapsto \phi_A(t, s) := \phi(t) \phi^{-1}(s) \end{aligned}$$

é denominada **matriz de transição do sistema linear** (2.11).

As propriedades dessas matrizes podem ser encontradas em [5].

Nosso foco está nos sistemas de controle lineares autônomos. Outros resultados relacionados com os sistemas de controle lineares podem ser vistos com mais detalhes em [5]. Observe que, para sistemas de controle lineares autônomos, uma matriz fundamental  $\phi$  para o sistema linear

$$x' = Ax,$$

é  $\phi(t) = e^{tA}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e, ainda, satisfaz  $\phi(0) = E$ .

A seguir, apresentaremos algumas definições e resultados que serão utilizadas no decorrer do texto.

**Definição 2.3.2.** *Uma matriz simétrica  $M \in \mathbb{R}^{n,n}$  é denominada:*

- (a) Positiva definida, quando  $\langle x, Mx \rangle > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ;
- (b) Positiva semidefinida, quando  $\langle x, Mx \rangle \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ;
- (c) Negativa definida, quando  $-M$  for positiva definida;
- (d) Negativa semidefinida, quando  $-M$  for positiva semidefinida.

**Lema 2.3.1.** *Uma matriz simétrica  $M \in \mathbb{R}^{n,n}$  é positiva definida se, e somente se, for positiva semidefinida e não singular.*

**Demonstração.** Sugerimos a leitura da Seção *Operadores AutoAdjuntos* em [6]. ■

**Definição 2.3.3.** *Uma solução, em  $[t_0, t_1]$ , do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, \\ x(\bar{t}_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.12)$$

com  $\bar{t}_0 \in [t_0, t_1]$  e  $u \in L^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$  é uma função absolutamente contínua,

$$x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

que satisfaz a equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{\bar{t}_0}^t Ax(s) + Bu(s) ds$$

ou, equivalentemente, satisfaz a equação diferencial em (2.12) em quase todo ponto e a condição inicial.

O conceito de função absolutamente contínua, bem como os espaços  $L^p$ , pode ser visto em [8].

**Teorema 2.3.1.** *A solução  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  do problema de Cauchy (2.12), com  $u \in L^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ ,  $\bar{t}_0 \in [t_0, t_1]$ , é da forma*

$$x(t) = e^{(t-\bar{t}_0)A}x_0 + \int_{\bar{t}_0}^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds. \quad (2.13)$$

A demonstração desse teorema é dada em [9]. Observe ainda que, o teorema anterior também é válido para  $u \in L^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ , pois como o intervalo  $[t_0, t_1]$  é compacto, resulta da *Desigualdade de Hölder* que  $L^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^m) \subset L^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ .

Os sistemas de controle lineares autônomos possuem uma propriedade que permite reescrevê-los em uma forma especial, denominada forma normal dos sistemas de controle lineares autônomos, a qual também é conhecida como forma normal de Kalman. A vantagem é que na forma normal o sistema pode ser dividido em 4 blocos e isto será útil posteriormente. Neste sentido, considere o sistema de controle linear autônomo

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (2.14)$$

Sejam  $x = x(t)$ ,  $t \geq 0$  uma solução de (2.14) e  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  uma matriz não singular. Definindo  $z = Px$ , temos

$$\begin{aligned} z' &= Px' \\ &= PAx + PBu \\ &= PAP^{-1}z + PBu, \\ y &= Cx \\ &= CP^{-1}z. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} z' = \tilde{A}z + \tilde{B}u, \\ y = \tilde{C}z, \end{cases}$$

sendo  $\tilde{A} = PAP^{-1}$ ,  $\tilde{B} = PB$  e  $\tilde{C} = CP^{-1}$ .

**Definição 2.3.4.** *Dois sistemas de controle lineares autônomos  $(A, B, C)$  e  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  são ditos linearmente equivalentes se, e somente se, existir uma matriz não singular  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  tal que  $\tilde{A} = PAP^{-1}$ ,  $\tilde{B} = PB$  e  $\tilde{C} = CP^{-1}$ .*

Observe que, ser linearmente equivalente, de acordo com a definição anterior, define uma relação de equivalência. De fato:

(i) **Reflexividade.** O par  $(A, B, C)$  é linearmente equivalente ao par  $(A, B, C)$ , pois basta tomar  $P = E$ , sendo  $E$  a identidade do  $\mathbb{R}^{n,n}$ ;

(ii) **Simetria.** Se o par  $(A, B, C)$  é linearmente equivalente ao par  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ , então existe uma matriz não singular  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  tal que

$$\tilde{A} = PAP^{-1}, \quad \tilde{B} = PB \quad \text{e} \quad \tilde{C} = CP^{-1}.$$

Assim,

$$A = P^{-1}\tilde{A}P, \quad B = P^{-1}\tilde{B} \quad \text{e} \quad C = \tilde{C}P.$$

Logo, existe  $S = P^{-1}$  não singular tal que

$$A = S\tilde{A}S^{-1}, \quad B = S\tilde{B} \quad \text{e} \quad C = \tilde{C}S^{-1}$$

e, portanto, o par  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  é linearmente equivalente ao par  $(A, B, C)$ ;

(iii) **Transitividade.** Se o par  $(A, B, C)$  é linearmente equivalente ao par  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  e o par  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  é linearmente equivalente ao par  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ , então existem matrizes não singulares  $P, S \in \mathbb{R}^{n,n}$  tais que

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB \quad \text{e} \quad \bar{C} = CP^{-1},$$

$$\tilde{A} = S\bar{A}S^{-1}, \quad \tilde{B} = S\bar{B} \quad \text{e} \quad \tilde{C} = \bar{C}S^{-1}.$$

Logo,

$$\tilde{A} = S\bar{A}S^{-1} = SPAP^{-1}S^{-1},$$

$$\tilde{B} = S\bar{B} = SPB$$

e

$$\tilde{C} = \bar{C}S^{-1} = CP^{-1}S^{-1}.$$

Tomando  $T = SP$ , segue que  $T$  é não singular e

$$\tilde{A} = TAT^{-1},$$

$$\tilde{B} = TB$$

e

$$\tilde{C} = CT^{-1}.$$

Portanto, o par  $(A, B, C)$  é linearmente equivalente ao par  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ .

## 2.4 Observabilidade de Sistemas de Controle Lineares Autônomos

Antes de definirmos a observabilidade de um sistema de controle linear autônomo, consideremos a seguinte questão:

*Dado um sistema de controle linear autônomo  $(A, B, C)$ , conhecido o vetor de controle  $u$  e o vetor de saída  $y$ , em quais circunstâncias é possível reconstruir o estado inicial  $x_0 = x(\bar{t}_0)$ ?*

Observe que, pelo **Teorema 2.3.1**, temos

$$x(t) = e^{(t-\bar{t}_0)A}x_0 + \int_{\bar{t}_0}^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds$$

e, assim,

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{(t-\bar{t}_0)A}x_0 + \int_{\bar{t}_0}^t Ce^{(t-s)A}Bu(s) ds,$$



ou seja,

$$y(t) = Ce^{(t-\bar{t}_0)A}x_0 + y_1(t),$$

sendo

$$y_1(t) = \int_{\bar{t}_0}^t Ce^{(t-s)A}Bu(s) ds.$$

Logo, conhecido o vetor de controle  $u$ , é possível que  $y_1$  seja calculada *a priori*, independente de conhecermos ou não a condição inicial  $x_0$ . Portanto, determinar  $x_0$  a partir do par  $(y, u)$  é equivalente a determinar  $x_0$  por meio da diferença

$$y(t) - y_1(t) = Ce^{(t-\bar{t}_0)A}x_0,$$

a qual corresponde ao vetor de saída do sistema linear homogêneo

$$x' = Ax,$$

quando  $x(\bar{t}_0) = x_0$ . Isto significa que, para estudar a determinação do estado inicial  $x_0$  de um sistema de controle linear autônomo  $(A, B, C)$ , é suficiente estudar os sistemas de controle lineares autônomos homogêneos da forma

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (2.15)$$

O sistema anterior será denotado pelo par  $(A, C)$ . Agora temos condições de formalizar o conceito de observabilidade para sistemas de controle lineares autônomos.

**Definição 2.4.1.** *Diremos que o sistema de controle linear autônomo  $(A, C)$  é observável em  $[0, T]$ , quando para toda função  $x$  de classe  $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$  a condição*

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ Cx = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

*para todo  $t \in [0, T]$ , implicar em  $x(0) = x_0 = 0$ .*

Em outras palavras, a observabilidade do sistema  $(A, C)$  é equivalente ao fato da aplicação linear a seguir ser injetiva,

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^n &\longrightarrow C([0, T], \mathbb{R}^n) \\ x_0 &\longmapsto G(x_0), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} G(x_0) : [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto G(x_0)(t) = Ce^{tA}x_0. \end{aligned}$$

O teorema a seguir trata de uma forma equivalente de se definir a observabilidade de um sistema de controle linear autônomo.

**Teorema 2.4.1.** *Seja  $(A, C)$  um sistema de controle linear autônomo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *O par  $(A, C)$  é observável em  $[0, T]$ ;*

(b) *A matriz*

$$W_T := \int_0^T e^{sA*} C^* C e^{sA} ds, \quad T > 0,$$

*é positiva definida.*

**Demonstração.**

(a)  $\Rightarrow$  (b) Suponha que  $W_T$  não é positiva definida. Observe que a matriz  $W_T$  é simétrica, pois o integrando é uma matriz simétrica para cada  $s \in [0, T]$  e, além disto, é positiva semidefinida já que

$$\begin{aligned} \langle x, W_T x \rangle &= \left\langle x, \left( \int_0^T e^{sA*} C^* C e^{sA} ds \right) x \right\rangle \\ &= \int_0^T \langle x, e^{sA*} C^* C e^{sA} x \rangle ds \\ &= \int_0^T \langle Ce^{sA} x, Ce^{sA} x \rangle ds \\ &= \int_0^T \|Ce^{sA} x\|^2 ds \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Portanto, pelo **Lema 2.3.1**,  $W_T$  é singular, ou seja, existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que

$$\langle x_0, W_T x_0 \rangle = 0.$$

Temos que a função  $x$  definida por  $x(t) = e^{tA}x_0$ ,  $t \in [0, T]$ , é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

De fato,

$$\begin{aligned} x'(t) &= (e^{tA}x_0)' \\ &= Ae^{tA}x_0 \\ &= Ax(t) \end{aligned}$$

e, além disto,

$$x(0) = e^{0A}x_0 = Ex_0 = x_0.$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^T \|Cx(s)\|^2 ds &= \int_0^T \|Ce^{sA}x_0\|^2 ds \\ &= \int_0^T \langle Ce^{sA}x_0, Ce^{sA}x_0 \rangle ds \\ &= \int_0^T \langle x_0, e^{sA*}C^*Ce^{sA}x_0 \rangle ds \\ &= \left\langle x_0, \left( \int_0^T e^{sA*}C^*Ce^{sA} ds \right) x_0 \right\rangle \\ &= \langle x_0, W_T x_0 \rangle = 0, \end{aligned}$$

segue que  $Cx(t) = 0$ , para todo  $t \in [0, T]$ , com  $x(0) = x_0 \neq 0$  e, portanto, o par  $(A, C)$  não é observável em  $[0, T]$ .

**(b)  $\Rightarrow$  (a)** Suponha que  $x$  seja uma função satisfazendo (2.16) para todo  $t \in [0, T]$ . Logo, tem-se que

$$x(t) = e^{tA}x_0, \quad \forall t \in [0, T],$$

donde  $x(0) = x_0$  e

$$\langle x_0, W_T x_0 \rangle = \int_0^T \|Cx(s)\|^2 ds = 0.$$

Como  $W_T$  é positiva definida, resulta que  $x_0 = 0$ . Portanto, o par  $(A, C)$  é observável. ■

O teorema a seguir é de grande importância no estudo de sistemas de controle lineares autônomos. No que segue, a matriz

$$\mathcal{O} := \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix},$$

é chamada de matriz de observabilidade e

$$W_T := \int_0^T e^{sA*} C^* C e^{sA} ds, \quad T > 0,$$

definida no teorema anterior, é denominada Gramiano de observabilidade.

**Teorema 2.4.2.** *Seja  $(A, C)$  um sistema de controle linear autônomo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) O par  $(A, C)$  é observável em  $[0, T]$  para todo  $T > 0$ ;
- (b) O par  $(A, C)$  é observável em  $[0, T]$  para algum  $T > 0$ ;
- (c) A matriz  $W_T$  é não singular para algum  $T > 0$ ;
- (d) A matriz  $W_T$  é não singular para todo  $T > 0$ ;
- (e)  $\text{Po}(\mathcal{O}) = n$ ;
- (f)  $\bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k) = \{0\}$ .

**Demonstração.**

(a)  $\Rightarrow$  (b) Não há nada o que fazer.

(b)  $\Rightarrow$  (c) Suponha que o par  $(A, C)$  é observável em  $[0, T]$  para algum  $T > 0$ . Assim, pelo **Teorema 2.4.1**,  $W_T$  é positiva definida para algum  $T > 0$  e, do **Lema 2.3.1**, segue que  $W_T$  é não singular para algum  $T > 0$ .

(c)  $\Rightarrow$  (d) Suponha que  $W_T$  é não singular para algum  $T > 0$ , escolhido de acordo com (c) e seja  $\tilde{T} > 0$  arbitrário, porém fixado. Como

$$\langle x_0, W_{\tilde{T}}x_0 \rangle = \int_0^{\tilde{T}} \|Ce^{sA}x_0\|^2 ds,$$

temos que

$$\langle x_0, W_{\tilde{T}}x_0 \rangle = 0$$

implica em

$$a(s) := Ce^{sA}x_0 = 0, \quad \forall s \in [0, \tilde{T}].$$

Assim, derivando a função  $a = a(s)$   $k$  vezes em relação a  $s$ , e calculando em  $s = 0$ , segue que

$$a^{(k)}(0) = CA^k e^{sA}x_0|_{s=0} = CA^k x_0 = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Logo,  $CA^k s^k x_0 = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots$  e  $s \in [0, T]$ . Com isto, obtemos que

$$\begin{aligned} \langle x_0, W_T x_0 \rangle &= \int_0^T \|Ce^{sA}x_0\|^2 ds \\ &= \int_0^T \left\| C \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k s^k \right) x_0 \right\|^2 ds \\ &= \int_0^T \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} CA^k s^k x_0 \right\|^2 ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como  $W_T$  é não singular e positiva semidefinida segue, do **Lema 2.3.1**, que  $W_T$  é positiva definida. Portanto,  $x_0 = 0$  e  $\langle x_0, W_{\tilde{T}}x_0 \rangle = 0$  se, e somente se,  $x_0 = 0$ , ou seja,  $W_{\tilde{T}}$  é não singular. Como  $\tilde{T}$  é arbitrário, concluímos que  $W_T$  é não singular para todo  $T > 0$ .

(d)  $\Rightarrow$  (e) Suponha que  $W_T$  é não singular para todo  $T > 0$  e, por contradição, que  $\text{Po}(\mathcal{O}) < n$ . Desta forma, as linhas da matriz  $\mathcal{O}$ ,  $np \times n$ , formam um conjunto linearmente dependente. Pelo *Teorema do Núcleo e da Imagem* (ver [6]), temos que

$$\dim \text{Nuc}(\mathcal{O}) + \dim \text{Im}(\mathcal{O}) = n,$$

ou seja,

$$\dim \text{Nuc}(\mathcal{O}) + \text{Po}(\mathcal{O}) = n.$$

Portanto,  $\dim \text{Nuc}(\mathcal{O}) \geq 1$ , isto é, existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $\mathcal{O}x_0 = 0$ , ou seja,

$$CA^k x_0 = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Considere o polinômio característico da matriz  $A$

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda E - A) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda^k.$$

Pelo *Teorema de Cayley-Hamilton* (ver [6]), temos que

$$\begin{aligned} p_A(A) &= A^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k \\ &= A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 E = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$A^n = -\alpha_{n-1} A^{n-1} - \dots - \alpha_2 A^2 - \alpha_1 A - \alpha_0 E$$

e, assim,

$$CA^n x_0 = -\alpha_{n-1} CA^{n-1} x_0 - \dots - \alpha_2 CA^2 x_0 - \alpha_1 CA x_0 - \alpha_0 CE x_0 = 0.$$

Para  $n+1$ , temos

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= (-\alpha_{n-1} A^{n-1} - \dots - \alpha_2 A^2 - \alpha_1 A - \alpha_0 E) A \\ &= -\alpha_{n-1} A^n - \dots - \alpha_2 A^3 - \alpha_1 A^2 - \alpha_0 A \end{aligned}$$

e, portanto,

$$CA^{n+1} x_0 = -\alpha_{n-1} CA^n x_0 - \dots - \alpha_2 CA^3 x_0 - \alpha_1 CA^2 x_0 - \alpha_0 CA x_0 = 0.$$

Por indução, segue que  $CA^k x_0 = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots$  e, ainda,

$$A^n = \alpha_{n-1,n}A^{n-1} + \dots + \alpha_{2,n}A^2 + \alpha_{1,n}A + \alpha_{0,n}E,$$

sendo  $\alpha_{k,n} = -\alpha_k$ , para  $k = 0, \dots, n-1$ . Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= -\alpha_{n-1}A^n - \dots - \alpha_2A^3 - \alpha_1A^2 - \alpha_0A \\ &= -\alpha_{n-1}(-\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_2A^2 - \alpha_1A - \alpha_0E) - \dots \\ &\quad - \alpha_2A^3 - \alpha_1A^2 - \alpha_0A \\ &= (\alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-2})A^{n-1} + (\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3})A^{n-2} + \dots \\ &\quad + (\alpha_{n-1}\alpha_2 - \alpha_1)A^2 + (\alpha_{n-1}\alpha_1 - \alpha_0)A + (\alpha_{n-1}\alpha_0)E. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A^{n+1} = \alpha_{n-1,n+1}A^{n-1} + \dots + \alpha_{2,n+1}A^2 + \alpha_{1,n+1}A + \alpha_{0,n+1}E,$$

com  $\alpha_{0,n+1} = \alpha_{n-1}\alpha_0$  e  $\alpha_{k,n+1} = \alpha_{n-1}\alpha_k - \alpha_{k-1}$ , para  $k = 1, \dots, n-1$ . Deste modo, concluímos que

$$A^m = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,m}A^k, \quad m \geq n,$$

o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j A^j + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j A^j + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,j} A^k \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j A^j + \sum_{j=n}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j \alpha_{k,j} A^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} t^k A^k + \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \alpha_{k,j} \right) A^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{k!} t^k + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \alpha_{k,j} \right) A^k, \end{aligned}$$

resultando que

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k,$$

sendo

$$\alpha_k(t) = \frac{1}{k!} t^k + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \alpha_{k,j}.$$

Portanto,

$$C e^{tA} x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) C A^k x_0 = 0,$$

isto é,

$$\langle x_0, W_T x_0 \rangle = \int_0^T \|C e^{tA} x_0\|^2 dt = 0,$$

com  $x_0 \neq 0$ . Como  $W_T$  é não singular e positiva semidefinida segue, do **Lema 2.3.1**, que  $W_T$  é positiva definida e, assim, temos uma contradição.

**(e)  $\Leftrightarrow$  (f)** Se  $x_0 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k)$  e  $x_0 \neq 0$ , então

$$CA^k x_0 = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Logo,  $\text{Po}(\mathcal{O}) < n$  e, portanto, **(e)  $\Rightarrow$  (f)**. Se  $\text{Po}(\mathcal{O}) < n$ , então existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $CA^k x_0 = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Logo,

$$\bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k) \neq \{0\}$$

e, assim, **(f)  $\Rightarrow$  (e)**.

**(f)  $\Rightarrow$  (a)** Suponha que  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  satisfaz  $C e^{tA} x_0 = 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$ . Como visto anteriormente, podemos concluir que  $CA^k x_0 = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots$ . A hipótese em **(f)** implica que  $x_0 = 0$ . Portanto, o par  $(A, C)$  é observável em  $[0, T]$  para todo  $T > 0$ . ■

**Teorema 2.4.3.** *Se o sistema (2.2) é observável, então existe uma mudança linear de variáveis que o transforma na forma canônica generalizada de Liénard*

$$y' = \begin{cases} M^- y + c, & \text{se } y_1 \leq 0, \\ M^+ y + c, & \text{se } y_1 > 0, \end{cases} \quad (2.17)$$



com

$$M^\pm = \begin{pmatrix} \delta_1^\pm & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_2^\pm & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n-1}^\pm & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \delta_n^\pm & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

sendo  $\delta_1^\pm, \delta_2^\pm, \dots, \delta_{n-1}^\pm, \delta_n^\pm \in \mathbb{R}$  os coeficientes do polinômio característico de  $A^\pm$  e  $c_n \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração.** Se o sistema (2.6) é observável, então sua matriz de observabilidade

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_1 A^- \\ e_1 (A^-)^2 \\ \vdots \\ e_1 (A^-)^{n-1} \end{pmatrix}$$

tem posto completo, sendo  $e_1 \in \mathbb{R}^{1,n}$ . Assim, existe um único vetor  $z \in \mathbb{R}^{n,1}$  tal que

$$\begin{pmatrix} e_1 (-A^-)^{n-1} \\ e_1 (-A^-)^{n-2} \\ \vdots \\ e_1 (-A^-) \\ e_1 \end{pmatrix} z = e_1^*. \quad (2.18)$$

Considerando a matriz não singular

$$P := ((-A^-)^{n-1} z | (-A^-)^{n-2} z | \cdots | -A^- z | z),$$

temos que

$$\begin{aligned} A^- P &= -(-A^-) P \\ &= (-(A^-)^n z | -(A^-)^{n-1} z | \cdots | -(A^-)^2 z | -(A^-) z). \end{aligned}$$

Seja

$$p_{A^-}(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \delta_1^- \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} \delta_2^- \lambda^{n-2} + \cdots + (-1) \delta_{n-1}^- \lambda + \delta_n^-,$$

o polinômio característico de  $A^-$ . Assim, pelo teorema de *Cayley-Hamilton*,  $A^-$  satisfaz  $p_{A^-}(A^-) = 0$  e, deste modo,

$$-(-A^-)^n z = (\delta_1^-(-A^-)^{n-1} + \delta_2^-(-A^-)^{n-2} + \cdots + \delta_{n-1}^-(-A^-) + \delta_n^- E) z.$$

Portanto, a matriz  $A^-P$  pode ser escrita na forma

$$((-A^-)^{n-1}\delta_1^- z + \cdots + (-A^-)\delta_{n-1}^- z + \delta_n^- z | -(-A^-)^{n-1}z | \cdots | -(-A^-)^2 z | -(-A^-)z),$$

o que é equivalente ao produto

$$((-A^-)^{n-1}z | (-A^-)^{n-2}z | \cdots | -A^-z | z) \begin{pmatrix} \delta_1^- & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_2^- & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n-1}^- & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \delta_n^- & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

sendo este último igual a  $PM^-$ . Assim,  $PM^- = A^-P$  ou, equivalentemente,

$$P^{-1}A^-P = M^-.$$

Da equação (2.18), resulta que

$$e_1(-A^-)^{n-1}z = 1, \quad e_1(-A^-)^{n-j}z = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

ou seja,

$$e_1((-A^-)^{n-1}z | (-A^-)^{n-2}z | \cdots | -A^-z | z) = (1, 0, 0, \dots, 0) = e_1,$$

isto é,

$$e_1P = e_1. \tag{2.19}$$

Escrevendo o sistema (2.2) na forma (2.8) e, realizando a mudança de variáveis  $X = P^{-1}x$ , obtemos

$$\begin{aligned} X' &= P^{-1}x' \\ &= P^{-1}(A^-x + B\eta(\langle x, e_1 \rangle) + c) \\ &= P^{-1}(A^-PX + B\eta(\langle x, e_1 \rangle) + c) \\ &= P^{-1}A^-PX + P^{-1}B\eta(\langle x, e_1 \rangle) + P^{-1}c \\ &= M^-X + \tilde{B}\eta(\langle x, e_1 \rangle) + \tilde{c}, \end{aligned}$$

com  $M^- = P^{-1}A^-P$ ,  $\tilde{B} = P^{-1}B$  e  $\tilde{c} = P^{-1}c := (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Fazendo a mudança de variável

$$\begin{aligned} y &= X - E_1\tilde{c} \\ &= X - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= X - (0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}), \end{aligned}$$

observando que

$$M^- E_1\tilde{c} = (-c_1, -c_2, \dots, -c_{n-1}, 0)$$

e utilizando a equação (2.19), chegamos a

$$\begin{aligned} y' &= X' \\ &= M^-X + \tilde{B}\eta(\langle x, e_1 \rangle) + \tilde{c} \\ &= M^-y + M^-E_1\tilde{c} + \tilde{B}\eta(\langle Py + PE_1\tilde{c}, e_1 \rangle) + \tilde{c} \\ &= M^-y + \tilde{B}\eta(\langle Py, e_1 \rangle) + M^-E_1\tilde{c} + \tilde{c} \\ &= M^-y + \tilde{B}\eta(\langle y, e_1 \rangle) + c, \end{aligned}$$

sendo  $c = (0, 0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ . Observe que essa expressão coincide com (2.17), uma vez que o sistema (2.8) é equivalente ao sistema (2.2). Sobre os cálculos anteriores, vale ressaltar que

$$\langle PE_1\tilde{c}, e_1 \rangle = e_1PE_1\tilde{c} = e_1E_1\tilde{c} = \langle E_1\tilde{c}, e_1 \rangle = 0,$$

e

$$\langle Py, e_1 \rangle = e_1Py = e_1y = \langle y, e_1 \rangle.$$

■

## 2.5 Controlabilidade de Sistemas de Controle Lineares Autônomos

Observe que no sistema de controle linear autônomo (2.14) a ação do vetor de controle  $u$  interfere apenas na primeira equação. Assim, não é necessário considerar a equação  $y = Cx$ . Desta forma, utilizaremos a notação  $(A, B)$  para representar o sistema de controle linear autônomo (2.14). Com isto, definiremos quando um sistema de controle linear autônomo é controlável.

**Definição 2.5.1.** *O sistema de controle linear autônomo  $(A, B)$  é dito controlável em  $[0, T]$ , quando para todo par de estados  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ , existe um vetor de controle  $u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$  de forma que a solução  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.20)$$

*satisfaz também a condição de contorno  $x(T) = x_1$ .*

Em outras palavras, o sistema (2.14) é controlável, quando existe uma função  $u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$  que controla a evolução do vetor de estado  $x$ , desde o estado inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  até o estado final  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , através da dinâmica de  $x' = Ax + Bu$  no intervalo  $[0, T]$ . Neste sentido, de acordo com a **Definição 2.5.1**, utilizaremos a notação

$$(0, x_0) \xrightarrow{u} (T, x_1).$$

Observe ainda que, pelo **Teorema 2.3.1**, o vetor de controle  $u$  satisfaz

$$(0, x_0) \xrightarrow{u} (T, x_1)$$

se, e somente se,

$$x_1 = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s)ds.$$

O próximo teorema mostra que existem formas equivalentes de se definir um sistema de controle linear autônomo controlável.

**Teorema 2.5.1.** *São equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) *O par  $(A, B)$  é controlável em  $[0, T]$ ;*

(b) *Para todo  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , existe uma função  $u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$  satisfazendo*

$$(0, 0) \xrightarrow{u} (T, x_1);$$

(c) *Para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , existe uma função  $u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$  satisfazendo*

$$(0, x_0) \xrightarrow{u} (T, 0).$$

### Demonstração.

Observe que as implicações **(a)**  $\Rightarrow$  **(b)** e **(a)**  $\Rightarrow$  **(c)** são imediatas, pois como valem para todo  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ , em particular, valem para  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 0$ .

**(b)**  $\Rightarrow$  **(a)** Tome  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$  arbitrários. Logo,  $(x_1 - e^{TA}x_0) \in \mathbb{R}^n$  e, por **(b)**, existe  $u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$  tal que

$$(0, 0) \xrightarrow{u} (T, x_1 - e^{TA}x_0),$$

ou seja,

$$x_1 - e^{TA}x_0 = e^{TA}0 + \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s) ds.$$

Desta forma,

$$x_1 = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s) ds$$

e, portanto,  $(0, x_0) \xrightarrow{u} (T, x_1)$ , resultando que o par  $(A, B)$  é controlável em  $[0, T]$ .

**(c)**  $\Rightarrow$  **(a)** Tome  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$  arbitrários. Logo,  $(x_0 - (e^{TA})^{-1}x_1) \in \mathbb{R}^n$  e, por **(c)**, existe  $u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$  tal que

$$(0, x_0 - (e^{TA})^{-1}x_1) \xrightarrow{u} (T, 0),$$

isto é,

$$0 = e^{TA}(x_0 - (e^{TA})^{-1}x_1) + \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s) ds.$$

Assim,  $(0, x_0) \xrightarrow{u} (T, x_1)$ , pois

$$0 = e^{TA}x_0 - x_1 + \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s) ds,$$

implica que

$$x_1 = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s) ds.$$

Portanto, o par  $(A, B)$  é controlável em  $[0, T]$ . ■

A propriedade apresentada no item (c) do teorema anterior é chamada **controlabilidade ao zero**.

A matriz  $V_T$  definida por

$$V_T := \int_0^T e^{-sA}BB^*e^{-sA^*} ds,$$

sendo  $T$  um número real positivo, exerce um papel importante no estudo da controlabilidade de um sistema de controle linear autônomo  $(A, B)$ . Observe que esta matriz é real, pois  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n,m}$  e, ainda, é simétrica, visto que  $(V_T)^* = (V_T)$ . De fato, a simetria decorre de

$$(e^{sA})^* = e^{sA^*}, \quad (e^{-sA}BB^*e^{-sA^*})^* = e^{-sA}BB^*e^{-sA^*}, \quad \forall s \in [0, T].$$

Além disto, para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} \langle x, V_T x \rangle &= \left\langle x, \left( \int_0^T e^{-sA}BB^*e^{-sA^*} ds \right) x \right\rangle \\ &= \int_0^T \langle x, e^{-sA}BB^*e^{-sA^*} x \rangle ds \\ &= \int_0^T \langle B^*e^{-sA^*} x, B^*e^{-sA^*} x \rangle ds \\ &= \int_0^T \|B^*e^{-sA^*} x\|^2 ds \geq 0, \end{aligned} \tag{2.21}$$

pois o integrando é não negativo. Portanto, de acordo com a **Definição 2.3.2**,  $V_T$  é positiva semidefinida. Este resultado será útil na demonstração do teorema a seguir.

**Teorema 2.5.2.** *Seja  $(A, B)$  um sistema de controle linear autônomo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) O par  $(A, B)$  é controlável em  $[0, T]$  para todo  $T > 0$ ;
- (b) O par  $(A, B)$  é controlável em  $[0, T]$  para algum  $T > 0$ ;
- (c) A matriz  $V_T$  é não singular para algum  $T > 0$ ;
- (d) A matriz  $V_T$  é não singular para todo  $T > 0$ ;
- (e)  $\text{Po}(\mathcal{C}) = n$ , sendo  $\mathcal{C} = (B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B)$  a matriz de controlabilidade.

**Demonstração.**

(a)  $\Rightarrow$  (b) Nada a fazer.

(b)  $\Rightarrow$  (c) Suponha que o par  $(A, B)$  seja controlável em  $[0, T]$ , para algum  $T > 0$  e, por contradição, que  $V_T$  seja singular. Sendo  $V_T$  singular, existe  $x_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $V_T x_1 = 0$ . Assim, de (2.21), temos que

$$\langle x_1, V_T x_1 \rangle = \int_0^T \|B^* e^{-sA^*} x_1\|^2 ds = 0.$$

Logo, segue que

$$B^* e^{-tA^*} x_1 = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Como o par  $(A, B)$  é controlável em  $[0, T]$ , pelo item (c) do Teorema 2.5.1, existe  $u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$  tal que

$$(0, x_1) \xrightarrow{u} (T, 0),$$

isto é,

$$0 = e^{TA} \left( x_1 + \int_0^T e^{-sA} B u(s) ds \right)$$

e, assim,

$$x_1 = - \int_0^T e^{-sA} B u(s) ds.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \|x_1\|^2 &= \langle x_1, x_1 \rangle \\ &= \left\langle x_1, - \int_0^T e^{-sA} B u(s) ds \right\rangle \\ &= - \int_0^T \langle x_1, e^{-sA} B u(s) \rangle ds \\ &= - \int_0^T \langle B^* e^{-sA^*} x_1, u(s) \rangle ds = 0, \end{aligned}$$

o que implica que  $x_1 = 0$ , chegando a uma contradição. Portanto,  $V_T$  é não singular para algum  $T > 0$ .

(c)  $\Rightarrow$  (d) Suponha que  $V_T$  é não singular para algum  $T > 0$  e tome  $\tilde{T} > 0$  arbitrário, porém fixado. Sendo

$$\langle x_1, V_{\tilde{T}} x_1 \rangle = \int_0^{\tilde{T}} \|B^* e^{-sA^*} x_1\|^2 ds, \quad (2.22)$$

segue que para  $\langle x_1, V_{\tilde{T}} x_1 \rangle = 0$  devemos ter

$$a(s) = B^* e^{-sA^*} x_1 = 0, \quad \forall s \in [0, \tilde{T}].$$

Derivando a função  $a = a(s)$   $k$  vezes em relação a  $s$ , e calculando em  $s = 0$ , obtemos

$$a^{(k)}(0) = (-1)^k B^* (A^*)^k x_1 = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Multiplicando a igualdade anterior por  $s^k/k!$ , resulta que

$$B^* \frac{(-1)^k s^k}{k!} (A^*)^k x_1 = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad \text{e} \quad s \in [0, T].$$

Desta forma,

$$\langle x_1, V_T x_1 \rangle = \int_0^T \|B^* e^{-sA^*} x_1\|^2 ds = \int_0^T \left\| \sum_{k=0}^{\infty} B^* \frac{(-1)^k s^k}{k!} (A^*)^k x_1 \right\|^2 ds = 0,$$

ou seja,

$$x_1 = 0.$$

Logo,  $T > 0$  tal como no item (c) implica em  $x_1 = 0$ . Assim, de (2.22), segue que  $V_{\tilde{T}}$  é positiva definida e, portanto, não singular. Como  $\tilde{T}$  é arbitrário, temos que  $V_T$  é não singular para todo  $T > 0$ .

(d)  $\Rightarrow$  (a) De acordo com o **Lema 2.3.1**, o item (d) é equivalente a  $V_T$  ser positiva definida para todo  $T > 0$ . Deste modo, tome  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  e defina a função  $u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$  como

$$u(t) = B^* e^{-tA^*} V_T^{-1} e^{-TA} x_1, \quad t \in [0, T],$$



a qual está bem definida pelo fato de  $V_T$  ser não singular. Assim,

$$\begin{aligned}
 x(T) &= e^{TA}0 + e^{TA} \int_0^T e^{-sA} B B^* e^{-sA^*} V_T^{-1} e^{-TA} x_1 ds \\
 &= e^{TA} \left( \int_0^T e^{-sA} B B^* e^{-sA^*} ds \right) V_T^{-1} e^{-TA} x_1 \\
 &= e^{TA} V_T V_T^{-1} e^{-TA} x_1 \\
 &= x_1.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$(0, 0) \xrightarrow{u} (T, x_1).$$

Portanto, pelo **Teorema 2.5.1**, o par  $(A, B)$  é controlável para todo  $T > 0$ .

**(d)  $\Rightarrow$  (e)** Iremos mostrar a contrapositiva. Suponha que o posto da matriz

$$\mathcal{C} = (B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B)$$

é menor que  $n$ , ou seja,  $\text{Po}(\mathcal{C}) < n$ . Então, existe  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ , tal que

$$vA^i B = 0,$$

para todo  $0 \leq i \leq n-1$ . Seja

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda^k,$$

o polinômio característico de  $A$ . Pelo *Teorema de Cayley-Hamilton* (ver [6]), temos que

$p_A(A) = 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
 p_A(A) &= A^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k \\
 &= A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 E = 0,
 \end{aligned}$$

isto é,

$$A^n = -\alpha_{n-1} A^{n-1} - \dots - \alpha_2 A^2 - \alpha_1 A - \alpha_0 E.$$

Portanto,

$$vA^n B = -\alpha_{n-1} vA^{n-1} B - \dots - \alpha_2 vA^2 B - \alpha_1 vAB - \alpha_0 vB = 0.$$

Para  $n + 1$ , temos

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= (-\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_2A^2 - \alpha_1A - \alpha_0E) A \\ &= -\alpha_{n-1}A^n - \dots - \alpha_2A^3 - \alpha_1A^2 - \alpha_0A, \end{aligned}$$

resultando que

$$vA^{n+1}B = -\alpha_{n-1}vA^nB - \dots - \alpha_2vA^3B - \alpha_1vAB - \alpha_0vAB = 0.$$

Por indução, segue que  $vA^kB = 0$  para  $k = 0, 1, \dots$  e, ainda,

$$A^n = -\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_2A^2 - \alpha_1A - \alpha_0E,$$

sendo  $\alpha_{k,n} = -\alpha_k$ , para  $k = 0, \dots, n - 1$ . Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= -\alpha_{n-1,n}A^n - \dots - \alpha_{2,n}A^3 - \alpha_{1,n}A^2 - \alpha_{0,n}A \\ &= -\alpha_{n-1}(-\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_2A^2 - \alpha_1A - \alpha_0E) - \dots \\ &\quad -\alpha_2A^3 - \alpha_1A^2 - \alpha_0A \\ &= (\alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-2})A^{n-1} + (\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3})A^{n-2} + \dots \\ &\quad + (\alpha_{n-1}\alpha_2 - \alpha_1)A^2 + (\alpha_{n-1}\alpha_1 - \alpha_0)A + (\alpha_{n-1}\alpha_0)E. \end{aligned}$$

Logo,

$$A^{n+1} = \alpha_{n-1,n+1}A^{n-1} + \dots + \alpha_{2,n+1}A^2 + \alpha_{1,n+1}A + \alpha_{0,n+1}E,$$

sendo  $\alpha_{0,n+1} = \alpha_{n-1}\alpha_0$  e  $\alpha_{k,n+1} = \alpha_{n-1}\alpha_k - \alpha_{k-1}$ , para  $k = 1, \dots, n - 1$ . Concluimos que

$$A^m = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,m}A^k, \quad m \geq n.$$

Isso nos permite escrever

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j A^j + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j A^j + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,j} A^k \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j A^j + \sum_{j=n}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j \alpha_{k,j} A^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} t^k A^k + \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \alpha_{k,j} \right) A^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{k!} t^k + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \alpha_{k,j} \right) A^k
\end{aligned}$$

e, então,

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k,$$

sendo

$$\alpha_k(t) = \frac{1}{k!} t^k + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \alpha_{k,j}.$$

Assim,

$$v e^{tA} B = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) v A^k B = 0,$$

para todo  $t$ , ou seja,

$$\langle v, V_T v \rangle = 0,$$

mostrando que  $V_T$  não é positiva definida para qualquer  $T > 0$ . Com isto, segue do **Lema 2.3.1** que  $V_T$  é singular, como queríamos.

**(e)  $\Rightarrow$  (d)** Suponha que  $\text{Po}(\mathcal{C}) = n$  e, por contradição, que  $V_T$  seja singular para algum  $T > 0$ . Então, existe  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ , tal que

$$\langle v, V_T v \rangle = 0,$$

ou seja,

$$ve^{tA}B = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Assim, considerando  $t = 0$ , obtemos que

$$vB = 0.$$

Calculando a  $j$ -ésima derivada de  $ve^{tA}B = 0$ , em relação a  $t$ , aplicada em  $t = 0$ , chegamos a

$$vA^jB = 0, \quad j > 0.$$

Desta forma,

$$v(B|AB|A^2B|\cdots|A^{n-1}B) = 0,$$

ou seja,  $\text{Po}(\mathcal{C}) < n$ , contrariando a hipótese. Portanto,  $V_T$  é não singular para todo  $T > 0$ . ■

A propriedade apresentada no item (e) do teorema anterior também é conhecida como Critério de Kalman.

**Definição 2.5.2.** *Um sistema de controle linear autônomo  $(A, B)$ , satisfazendo o Critério de Kalman, é chamado de sistema de controle linear autônomo completamente controlável.*

**Teorema 2.5.3.** *Se o  $\text{Po}(\mathcal{C}) = r < n$ , sendo  $\mathcal{C} = (B|A^-B|(A^-)^2B|\cdots|(A^-)^{n-1}B)$ , então o par  $(A^-, B)$  é linearmente equivalente ao par  $(M^-, N)$ , sendo*

$$M^- = \begin{pmatrix} M_{11}^- & M_{12}^- \\ O & M_{22}^- \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N_1 \\ O \end{pmatrix},$$

com  $M_{11}^- \in \mathbb{R}^{r,r}$  e  $N_1 \in \mathbb{R}^{r,1}$ . Além disto, o par  $(M_{11}^-, N_1)$  é controlável e  $\text{Po}(\mathcal{C}_1) = r$ , sendo  $\mathcal{C}_1 = (N_1|M_{11}^-N_1|(M_{11}^-)^2N_1|\cdots|(M_{11}^-)^{n-1}N_1)$ .

**Demonstração.** Suponha que o  $\text{Po}(\mathcal{C}) = r < n$ . Logo, a matriz

$$\mathcal{C} = (B|A^-B|(A^-)^2B|\cdots|(A^-)^{n-1}B)$$

possui  $r$  colunas linearmente independentes. Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_r$  estas colunas. Então, o conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  forma uma base para o subespaço  $\text{Im}(\mathcal{C})$ . Assim, existem vetores  $v_{r+1}, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  tais que  $\{v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$  é uma base do  $\mathbb{R}^n$ . Desta forma, considere a matriz não singular

$$P^{-1} = (v_1 | v_2 | \dots | v_r | v_{r+1} | \dots | v_n).$$

Assim, segue que

$$A^- P^{-1} = (A^- v_1 | A^- v_2 | \dots | A^- v_r | A^- v_{r+1} | \dots | A^- v_n).$$

Como  $v_1, v_2, \dots, v_r$  são as colunas linearmente independentes da matriz  $\mathcal{C}$ , resulta que  $A^- v_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , é combinação linear destas colunas. Se  $v_i = (A^-)^{n-1} B$  para algum  $i = 1, \dots, r$ , então

$$A^- v_i = A^- (A^-)^{n-1} B = (A^-)^n B,$$

mas, pelo *Teorema de Cayley-Hamilton*, para cada  $j \geq n$ ,  $(A^-)^j$  é combinação linear de  $(A^-)^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Portanto, existem escalares  $m_{ij}^-$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , eventualmente nulos, tais que

$$\begin{aligned} A^- v_1 &= m_{1,1}^- v_1 + \dots + m_{r,1}^- v_r + 0v_{r+1} + \dots + 0v_n, \\ &\vdots \\ A^- v_r &= m_{1,r}^- v_1 + \dots + m_{r,r}^- v_r + 0v_{r+1} + \dots + 0v_n, \\ A^- v_{r+1} &= m_{1,r+1}^- v_1 + \dots + m_{r,r+1}^- v_r + m_{r+1,r+1}^- v_{r+1} + \dots + m_{n,r+1}^- v_n, \\ &\vdots \\ A^- v_n &= m_{1,n}^- v_1 + \dots + m_{r,n}^- v_r + m_{r+1,n}^- v_{r+1} + \dots + m_{n,n}^- v_n. \end{aligned}$$

Com isto,

$$\begin{aligned}
A^- P^{-1} &= (A^- v_1 | A^- v_2 | \cdots | A^- v_r | A^- v_{r+1} | \cdots | A^- v_n) \\
&= (v_1 | v_2 | \cdots | v_r | v_{r+1} | \cdots | v_n) \begin{pmatrix} m_{1,1}^- & \cdots & m_{1,r}^- & m_{1,r+1}^- & \cdots & m_{1,n}^- \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{r,1}^- & \cdots & m_{r,r}^- & m_{r,r+1}^- & \cdots & m_{r,n}^- \\ 0 & \cdots & 0 & m_{r+1,r+1}^- & \cdots & m_{r+1,n}^- \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n,r+1}^- & \cdots & m_{n,n}^- \end{pmatrix} \\
&= P^{-1} \begin{pmatrix} M_{11}^- & M_{12}^- \\ O & M_{22}^- \end{pmatrix} \\
&= P^{-1} M^-,
\end{aligned}$$

sendo  $M_{11}^- \in \mathbb{R}^{r,r}$ , isto é,  $A^- = P^{-1} M^- P$ . Analogamente, como  $B$  é uma das colunas da matriz  $\mathcal{C}$ , segue que  $B$  também é combinação linear de cada  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Deste modo, existem escalares  $n_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , com alguns nulos, tais que

$$\begin{aligned}
B &= n_1 v_1 + n_2 v_2 + \cdots + n_r v_r + 0 v_{r+1} + \cdots + 0 v_n \\
&= (v_1 | v_2 | \cdots | v_r | v_{r+1} | \cdots | v_n) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= P^{-1} \begin{pmatrix} N_1 \\ O \end{pmatrix} \\
&= P^{-1} N,
\end{aligned}$$

com

$$N = \begin{pmatrix} N_1 \\ O \end{pmatrix}$$

e  $N_1 \in \mathbb{R}^{r,1}$ . Resta mostrar que o par  $(M_{11}^-, N_1)$  é controlável e que  $\text{Po}(\mathcal{C}_1) = r$ , sendo

$$\mathcal{C}_1 = (N_1 | M_{11}^- N_1 | (M_{11}^-)^2 N_1 | \cdots | (M_{11}^-)^{n-1} N_1).$$

Para isto, basta observar que  $\text{Po}(\mathcal{C}) = r$  e

$$\mathcal{C} = P^{-1} \begin{pmatrix} N_1 & M_{11}^- N_1 & \cdots & (M_{11}^-)^{r-1} N_1 & (M_{11}^-)^r N_1 & \cdots & (M_{11}^-)^{n-1} N_1 \\ O & O & \cdots & O & O & \cdots & O \end{pmatrix}.$$

Mas, pelo *Teorema de Cayley-Hamilton*, para cada  $j \geq r$ ,  $(M_{11}^-)^j$  é combinação linear de  $(M_{11}^-)^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, r-1$ . Assim,  $\text{Po}(\mathcal{C}_1) = r$  e, portanto, o par  $(M_{11}^-, N_1)$  é controlável. ■

No que segue, considere

$$e_1^* P^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix},$$

com  $Q_1 \in \mathbb{R}^{1,r}$  e  $Q_2 \in \mathbb{R}^{1,n-r}$ . Como

$$A^+ = A^- + (A^+ - A^-) e_1 e_1^*,$$

temos que

$$P A^+ P^{-1} = P A^- P^{-1} + P (A^+ - A^-) e_1 e_1^* P^{-1},$$

isto é, de acordo com o teorema anterior

$$\begin{aligned}
M^+ &= M^- + P(A^+ - A^-)e_1e_1^*P^{-1} \\
&= M^- + PBe_1^*P^{-1} \\
&= M^- + PBe_1^*P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} M_{11}^- & M_{12}^- \\ O & M_{22}^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1 \\ O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M_{11}^- & M_{12}^- \\ O & M_{22}^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1Q_1 & N_1Q_2 \\ O & O \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M_{11}^- + N_1Q_1 & M_{12}^- + N_1Q_2 \\ O & M_{22}^- \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M_{11}^+ & M_{12}^+ \\ O & M_{22}^+ \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

sendo  $M_{11}^+ = M_{11}^- + N_1Q_1$ ,  $M_{12}^+ = M_{12}^- + N_1Q_2$ ,  $M_{22}^+ = M_{22}^-$ , com  $M_{22}^\pm := M_{22} \in \mathbb{R}^{n-r, n-r}$ .

Este resultado será importante na demonstração do próximo corolário, mas, antes, vamos enunciar um lema que também será útil.

**Lema 2.5.1** (Complemento de Schur). *Seja  $W$  uma matriz de ordem  $n$  escrita em blocos, isto é,*

$$W = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right),$$

com  $A$  um matriz de ordem  $p$  e  $D$  uma matriz de ordem  $q$  de modo que  $n = p + q$ . Então, se  $A$  é não singular,

$$\det(W) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B)$$

e, se  $D$  é não singular,

$$\det(W) = \det(D) \det(A - BD^{-1}C).$$



**Demonstração.** Indicamos a leitura de [12]. ■

**Corolário 2.5.1.** *Se  $\text{Po}(\mathcal{C}) = \text{Po}(B|A^-B|(A^-)^2B|\cdots|(A^-)^{n-1}B) = r < n$ , então as matrizes  $A^+$  e  $A^-$  compartilham  $n - r$  autovalores.*

**Demonstração.** De fato, como visto no **Teorema 2.5.3**, as matrizes  $A^+$  e  $A^-$  podem ser escritas na forma

$$A^+ = P^{-1}M^+P \quad \text{e} \quad A^- = P^{-1}M^-P,$$

sendo  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  uma matriz não singular e

$$M^\pm = \begin{pmatrix} M_{11}^\pm & M_{12}^\pm \\ O & M_{22} \end{pmatrix},$$

com  $M_{11}^\pm \in \mathbb{R}^{r,r}$  e  $M_{22} \in \mathbb{R}^{n-r,n-r}$ . Sendo

$$p_{A^\pm}(\lambda) = p_{M^\pm}(\lambda) = \det(M^\pm - \lambda E),$$

o polinômio característico das matrizes  $A^\pm$ , de acordo com o **Lema do Complemento de Schur**, se  $\det(M_{11}^\pm - \lambda E) \neq 0$ , então

$$\begin{aligned} p_{A^\pm}(\lambda) &= \det(M_{11}^\pm - \lambda E) \det \left[ (M_{22} - \lambda E) - O(M_{11}^\pm - \lambda E)^{-1} M_{12}^\pm \right] \\ &= \det(M_{11}^\pm - \lambda E) \det(M_{22} - \lambda E). \end{aligned}$$

Resulta que,  $p_{A^\pm}(\lambda) = 0$  se, e somente se,  $\det(M_{22} - \lambda E) = 0$ . Portanto, as matrizes  $A^+$  e  $A^-$  compartilham  $n - r$  autovalores. ■

# Capítulo 3

## Sistemas Lineares por Partes Contínuos, Observáveis e não Controláveis em $\mathbb{R}^3$

O objetivo deste capítulo é estudar a existência de variedades invariantes folheadas por soluções periódicas no sistema (3.1), quando tal sistema é observável, não controlável e as matrizes  $A^\pm$  compartilham o par de autovalores complexos conjugados  $\pm i\beta$ ,  $\beta > 0$ . Com tais propriedades, o sistema (3.1) será transformado no sistema (3.6), por meio de algumas mudanças lineares e, o estudo do sistema (3.6) decorrerá de sua redução à equação diferencial (3.8).

### 3.1 Sistemas Lineares por Partes Contínuos em $\mathbb{R}^3$

Vamos estudar os *sistemas lineares por partes contínuos* (SLPC) em  $\mathbb{R}^3$  com duas zonas, cujo plano de separação coincide com o plano  $x_1 = 0$ , dados por

$$x' = F(x) = A^\pm x + c = \begin{cases} A^- x + c, & \text{se } x_1 \leq 0, \\ A^+ x + c, & \text{se } x_1 > 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

sendo  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $A^-$ ,  $A^+$  matrizes reais  $3 \times 3$  e  $c \in \mathbb{R}^3$ . Ainda, a saber,  $x'$  denota a derivada de  $x$  em relação ao tempo  $t$  e  $F$  indica o campo vetorial correspondente.

Conforme a **Proposição 2.2.1**, a hipótese de continuidade implica que as matrizes  $A^+$  e  $A^-$  diferem somente na primeira coluna, isto é,

$$A^+ - A^- = (A^+ - A^-) e_1 e_1^*.$$

Consideramos o polinômio característico das matrizes  $A^\pm$  como

$$p_{A^\pm}(\lambda) = \lambda^3 - t^\pm \lambda^2 + m^\pm \lambda - d^\pm,$$

sendo  $t^\pm, d^\pm \in \mathbb{R}$  o traço e o determinante das matrizes  $A^\pm$ , respectivamente e,  $m^\pm \in \mathbb{R}$ .

Note que o sistema (3.1) é um caso particular do sistema (2.2) quando  $n = 3$ . Assim, de acordo com o **Teorema 2.4.2**, o sistema (3.1) é observável, se a matriz de observabilidade

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_1 A^- \\ e_1 (A^-)^2 \end{pmatrix},$$

tem posto completo. Além disto, pelo **Teorema 2.5.2**, o sistema é controlável se a matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C} = (B \mid A^- B \mid (A^-)^2 B)$$

tem posto completo, sendo  $B = (A^+ - A^-) e_1$ . Se o sistema (3.1) é observável, a forma canônica generalizada de Liénard, vista no **Teorema 2.4.3**, será utilizada.

**Proposição 3.1.1.** *Se o sistema (3.1) é observável, então existe uma mudança linear de variáveis que o transforma na forma*

$$x' = \begin{pmatrix} t^\pm & -1 & 0 \\ m^\pm & 0 & -1 \\ d^\pm & 0 & 0 \end{pmatrix} x - b e_3, \quad (3.2)$$

com  $b \in \mathbb{R}$  e  $e_3$  o último vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^3$ .

**Demonstração.** Segue diretamente do **Teorema 2.4.3**. ■

Como visto no **Corolário 2.5.1**, se o sistema (3.1) não é controlável, então as matrizes  $A^+$  e  $A^-$  compartilham alguns autovalores e os seguintes resultados podem ser obtidos.

**Proposição 3.1.2.** *Se o sistema (3.1) é observável e as matrizes  $A^+$  e  $A^-$  compartilham um autovalor  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então existe uma mudança linear de variáveis que transforma o sistema (3.1) na forma*

$$x' = \begin{pmatrix} t^\pm - \lambda & -1 & 0 \\ m^\pm + \lambda^2 - \lambda t^\pm & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} x - be_3. \quad (3.3)$$

**Demonstração.** Devido à observabilidade, o sistema (3.1) pode ser transformado em (3.2). Desta forma, considere a seguinte mudança linear de variáveis

$$\begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = \lambda y_1 + y_2, \\ x_3 = \lambda y_2 + y_3. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} y_1' &= x_1' \\ &= t^\pm x_1 - x_2 \\ &= t^\pm y_1 - \lambda y_1 - y_2 \\ &= (t^\pm - \lambda)y_1 - y_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2' &= (x_2 - \lambda y_1)' \\ &= x_2' - \lambda y_1' \\ &= m^\pm y_1 - \lambda y_2 - y_3 - \lambda [(t^\pm - \lambda)y_1 - y_2] \\ &= (m^\pm + \lambda^2 - \lambda t^\pm)y_1 - y_3, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y_3' &= (x_3 - \lambda y_2)' \\
&= x_3' - \lambda y_2' \\
&= d^\pm y_1 - b - \lambda [(m^\pm - \lambda t^\pm + \lambda^2)y_1 - y_3] \\
&= (-\lambda^3 + \lambda^2 t^\pm - \lambda m^\pm + d^\pm)y_1 + \lambda y_3 - b \\
&= \lambda y_3 - b.
\end{aligned}$$

Observe que na última passagem foi usado que  $\lambda$  é autovalor das matrizes  $A^\pm$  e, assim,  $p_{A^\pm}(\lambda) = 0$ . Deste modo, chegamos ao sistema

$$y' = \begin{pmatrix} t^\pm - \lambda & -1 & 0 \\ m^\pm + \lambda^2 - \lambda t^\pm & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} y - b e_3,$$

sendo  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ , o qual é equivalente ao sistema (3.3) chamando  $y$  de  $x$ . ■

Note que o sistema (3.3) é bidimensional e não autônomo, visto que a última equação em (3.3) pode ser simplesmente integrada. Entretanto, não estudaremos esse caso aqui.

**Proposição 3.1.3.** *Se o sistema (3.1) é observável e as matrizes  $A^+$  e  $A^-$  compartilham os autovalores  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , então existe uma mudança linear de variáveis que transforma o sistema (3.1) na forma*

$$x' = \begin{pmatrix} t^\pm - \lambda - \mu & -1 & 0 \\ 0 & \mu & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} x - b e_3. \tag{3.4}$$

**Demonstração.** Supondo que o sistema (3.1) é observável, sabemos que ele pode ser transformado em (3.2). Agora, considere a mudança linear de variáveis

$$\begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = (\lambda + \mu)y_1 + y_2, \\ x_3 = \lambda\mu y_1 + \lambda y_2 + y_3. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 y_1' &= x_1' \\
 &= t^\pm x_1 - x_2 \\
 &= t^\pm y_1 - (\lambda + \mu)y_1 - y_2 \\
 &= (t^\pm - \lambda - \mu)y_1 - y_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_2' &= [x_2 - (\lambda + \mu)y_1]' \\
 &= x_2' - (\lambda + \mu)y_1' \\
 &= m^\pm y_1 - \lambda\mu y_1 - \lambda y_2 - y_3 - (\lambda + \mu) [(t^\pm - \lambda - \mu)y_1 - y_2] \\
 &= [m^\pm + \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 - t^\pm(\lambda + \mu)] y_1 + \mu y_2 - y_3.
 \end{aligned}$$

Sendo

$$t^\pm = \lambda_1^\pm + \lambda + \mu$$

e

$$m^\pm = \lambda_1^\pm \lambda + \lambda_1^\pm \mu + \lambda\mu,$$

com  $\lambda_1^\pm$  o outro autovalor das matrizes  $A^\pm$ , temos que

$$m^\pm + \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 - t^\pm(\lambda + \mu) = 0$$

e, portanto,

$$y_2' = \mu y_2 - y_3.$$

E, ainda,

$$\begin{aligned}
 y_3' &= (x_3 - \lambda\mu y_1 - \lambda y_2)' \\
 &= x_3' - \lambda\mu y_1' - \lambda y_2' \\
 &= d^\pm y_1 - b - \lambda\mu [(t^\pm - \lambda - \mu)y_1 - y_2] - \lambda(\mu y_2 - y_3) \\
 &= (d^\pm - \lambda\mu t^\pm + \lambda^2\mu + \lambda\mu^2)y_1 + \lambda y_3 - b \\
 &= \lambda y_3 - b,
 \end{aligned}$$

pois, já que

$$t^\pm = \lambda_1^\pm + \lambda + \mu$$

e

$$d^\pm = \lambda\mu\lambda_1^\pm,$$

segue que

$$\begin{aligned} d^\pm - \lambda\mu t^\pm + \lambda^2\mu + \lambda\mu^2 &= d^\pm - \lambda\mu(\lambda_1^\pm + \lambda + \mu) + \lambda^2\mu + \lambda\mu^2 \\ &= d^\pm - \lambda\mu\lambda_1^\pm \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, chegamos ao sistema

$$y' = \begin{pmatrix} t^\pm - \lambda - \mu & -1 & 0 \\ 0 & \mu & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} y - be_3,$$

com  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ , o qual corresponde ao sistema (3.4) chamando  $y$  de  $x$ . ■

Observe que o sistema (3.4) pode ser reduzido a uma equação diferencial não autônoma integrando as duas últimas equações. Mas, esse caso não será considerado aqui.

**Proposição 3.1.4.** *Se o sistema (3.1) é observável e as matrizes  $A^+$  e  $A^-$  compartilham o par de autovalores complexos conjugados  $\alpha \pm i\beta$ , com  $\beta > 0$ , então existe uma mudança linear de variáveis que transforma o sistema (3.1) na forma*

$$x' = \begin{pmatrix} t^\pm - 2\alpha & -1 & 0 \\ 0 & 2\alpha & -1 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 & 0 \end{pmatrix} x - be_3. \quad (3.5)$$

**Demonstração.** Pelo fato de ser observável, o sistema (3.1) pode ser transformado em (3.2) e, para obter o sistema (3.5), basta fazer a mudança linear de variáveis

$$\begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = 2\alpha y_1 + y_2, \\ x_3 = (\alpha^2 + \beta^2)y_1 + y_3. \end{cases}$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
 y'_1 &= x'_1 \\
 &= t^\pm x_1 - x_2 \\
 &= t^\pm y_1 - 2\alpha y_1 - y_2 \\
 &= (t^\pm - 2\alpha)y_1 - y_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y'_2 &= (x_2 - 2\alpha y_1)' \\
 &= x'_2 - 2\alpha y'_1 \\
 &= m^\pm y_1 - (\alpha^2 + \beta^2)y_1 - y_3 - 2\alpha [(t^\pm - 2\alpha)y_1 - y_2] \\
 &= (m^\pm - 2\alpha t^\pm + 3\alpha^2 - \beta^2)y_1 + 2\alpha y_2 - y_3 \\
 &= 2\alpha y_2 - y_3,
 \end{aligned}$$

pois, sendo

$$t^\pm = \lambda_1^\pm + (\alpha + i\beta) + (\alpha - i\beta) = \lambda_1^\pm + 2\alpha$$

e

$$m^\pm = \lambda_1^\pm(\alpha + i\beta) + \lambda_1^\pm(\alpha - i\beta) + (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = 2\alpha\lambda_1^\pm + \alpha^2 + \beta^2,$$

resulta que

$$m^\pm - 2\alpha t^\pm + 3\alpha^2 - \beta^2 = 2\alpha\lambda_1^\pm + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha(\lambda_1^\pm + 2\alpha) + 3\alpha^2 - \beta^2 = 0.$$

Além disto,

$$\begin{aligned}
 y'_3 &= [x_3 - (\alpha^2 + \beta^2)y_1]' \\
 &= x'_3 - (\alpha^2 + \beta^2)y'_1 \\
 &= d^\pm y_1 - b - (\alpha^2 + \beta^2) [(t^\pm - 2\alpha)y_1 - y_2] \\
 &= [d^\pm - (t^\pm - 2\alpha)(\alpha^2 + \beta^2)] y_1 + (\alpha^2 + \beta^2)y_2 - b \\
 &= (\alpha^2 + \beta^2)y_2 - b,
 \end{aligned}$$

pois, como

$$d^\pm = \lambda_1^\pm(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \lambda_1^\pm(\alpha^2 + \beta^2)$$



e

$$t^\pm = 2\alpha + \lambda_1^\pm,$$

vem que

$$d^\pm - (t^\pm - 2\alpha)(\alpha^2 + \beta^2) = \lambda_1^\pm(\alpha^2 + \beta^2) - (2\alpha + \lambda_1^\pm - 2\alpha)(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Enfim, chegamos ao sistema

$$y' = \begin{pmatrix} t^\pm - 2\alpha & -1 & 0 \\ 0 & 2\alpha & -1 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 & 0 \end{pmatrix} y - be_3,$$

com  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ , o qual é equivalente ao sistema (3.5) chamando  $y$  de  $x$ . ■

Vale ressaltar que as duas últimas equações do sistema (3.5) são desacopladas e, portanto, definem um sistema linear planar. Além disto, se o sistema (3.5) tem uma órbita periódica, então devemos ter  $\alpha = 0$  e, sendo assim, podemos prosseguir com o procedimento de simplificação do sistema (3.1).

**Proposição 3.1.5.** *Se  $\alpha = 0$  no sistema (3.5), então existe uma mudança linear de variáveis e parâmetros e um reescalonamento no tempo  $t$  que transforma o sistema (3.5) na forma*

$$x' = \begin{pmatrix} t^\pm & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x - ae_3, \quad a \in \{0, 1\}. \quad (3.6)$$

**Demonstração.** Fazendo  $\alpha = 0$  em (3.5), temos

$$x' = \begin{pmatrix} t^\pm & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \beta^2 & 0 \end{pmatrix} x - be_3.$$

Agora, considere a mudança linear de variáveis

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\beta^3} y_1, \\ x_2 = \frac{1}{\beta^2} y_2, \\ x_3 = \frac{1}{\beta} y_3, \end{cases}$$

o reescalonamento no tempo  $t$ , fazendo  $t = \tau/\beta$  e, uma mudança linear nos parâmetros  $t^\pm$  para  $t^\pm = \beta \bar{t}^\pm$ . Deste modo, resulta que

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{dx_1}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\beta} \left( t^\pm \frac{1}{\beta^3} y_1 - \frac{1}{\beta^2} y_2 \right) = \frac{1}{\beta^3} \frac{dy_1}{d\tau}, \\ \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{dx_2}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\beta} \left( -\frac{1}{\beta} y_3 \right) = \frac{1}{\beta^2} \frac{dy_2}{d\tau}, \\ \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{dx_3}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\beta} \left( \beta^2 \frac{1}{\beta^2} y_2 - b \right) = \frac{1}{\beta} \frac{dy_3}{d\tau}, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = t^\pm \frac{y_1}{\beta} - y_2 = \beta \bar{t}^\pm \frac{y_1}{\beta} - y_2 = \bar{t}^\pm y_1 - y_2 \\ \frac{dy_2}{d\tau} = -y_3, \\ \frac{dy_3}{d\tau} = y_2 - b. \end{cases}$$

Logo, chegamos ao sistema

$$y' = \begin{pmatrix} \bar{t}^\pm & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} y - b e_3,$$

com  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ . Em seguida, se  $b \neq 0$ , considere a mudança adicional  $y = |b|z$ .

Assim, temos que

$$|b|z' = y' = \begin{pmatrix} \bar{t}^\pm & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} |b|z - b e_3,$$

isto é,

$$z' = \begin{pmatrix} \bar{t}^\pm & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} z - \text{sign}(b)e_3, \quad (3.7)$$

sendo  $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$  e  $\text{sign}$  a função sinal dada por

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Observe que se  $b \geq 0$ , então o sistema (3.7) é compatível com o sistema (3.6), entretanto, se  $b < 0$ , é suficiente fazer em (3.7) a mudança linear de variáveis

$$\begin{cases} z_1 = -w_1, \\ z_2 = -w_2, \\ z_3 = -w_3, \end{cases}$$

a qual implica em

$$-w' = z' = \begin{pmatrix} \bar{t}^\pm & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (-w) - \text{sign}(b)e_3,$$

isto é,

$$w' = \begin{pmatrix} \bar{t}^\pm & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} w + \text{sign}(b)e_3,$$

com  $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ . Portanto, sendo  $b < 0$ , o sistema anterior é equivalente ao sistema (3.6) com  $a = 1$  e  $\bar{t}^\pm = t^\pm$ . ■

Agora iremos concentrar no sistema (3.6), o qual é um sistema linear por partes contínuo em  $\mathbb{R}^3$  observável e não controlável, cujas matrizes  $A^-$  e  $A^+$  compartilham o par de

autovalores complexos conjugados  $\pm i\beta$ ,  $\beta > 0$ . Observe que as duas últimas equações no sistema (3.6) são desacopladas. Assim sendo, considere o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} x_2' = -x_3, \\ x_3' = x_2 - a, \\ x_2(0) = a + r, \\ x_3(0) = 0, \end{cases}$$

com  $a \in \{0, 1\}$  e  $r \geq 0$ . Fazendo a seguinte mudança para coordenadas polares,

$$\begin{cases} x_2 - a = r \cos \theta, \\ x_3 = r \sin \theta, \end{cases}$$

com  $\theta \in \mathbb{R}$ , é imediato que

$$x_2(\theta) = a + r \cos \theta, \quad x_3(\theta) = r \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

satisfazem o problema de valor inicial e, além disto, cada cilindro da família

$$(x_2 - a)^2 + x_3^2 = r^2$$

é invariante pela dinâmica do sistema (3.6). Assim, podemos estudar a dinâmica do sistema (3.6) no correspondente cilindro através da seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\theta} &= g(x_1, \theta) = t^\pm x_1 - a - r \cos \theta \\ &= \begin{cases} t^- x_1 - a - r \cos \theta, & \text{se } x_1 \leq 0, \\ t^+ x_1 - a - r \cos \theta, & \text{se } x_1 > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

De fato, já que

$$\begin{aligned}
 \theta' &= \left( \arctan \left( \frac{x_3}{x_2 - a} \right) \right)' \\
 &= \frac{1}{1 + \left( \frac{x_3}{x_2 - a} \right)^2} \frac{x_3'(x_2 - a) - x_3 x_2'}{(x_2 - a)^2} \\
 &= \frac{x_3'(x_2 - a) - x_3 x_2'}{(x_2 - a)^2 + x_3^2} \\
 &= \frac{(x_2 - a)^2 + x_3^2}{r^2} \\
 &= \frac{r^2}{r^2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

e

$$\frac{dx_1}{dt} = t^\pm x_1 - x_2,$$

resulta que

$$\frac{dx_1}{d\theta} = \frac{dx_1}{dt} \frac{dt}{d\theta} = t^\pm x_1 - a - r \cos \theta = g(x_1, \theta).$$

## 3.2 Análise do sistema reduzido

Observe que a função  $g$  em (3.8) é globalmente Lipschitziana com respeito à primeira variável e, assim, temos existência e unicidade de soluções para (3.8). De fato, considerando  $K = \max \{|t^+|, |t^-|\}$ ,

(i) Se  $x_1 \leq 0$  e  $y_1 \leq 0$ , então

$$|g(x_1, \theta) - g(y_1, \theta)| = |t^-(x_1 - y_1)| = |t^-| |x_1 - y_1| \leq K |x_1 - y_1|;$$

(ii) Se  $x_1 > 0$  e  $y_1 > 0$ , então

$$|g(x_1, \theta) - g(y_1, \theta)| = |t^+(x_1 - y_1)| = |t^+| |x_1 - y_1| \leq K |x_1 - y_1|;$$

(iii) Se  $x_1 > 0$  e  $y_1 \leq 0$ , então

$$\begin{aligned}
 |g(x_1, \theta) - g(y_1, \theta)| &= |g(x_1, \theta) - g(0, \theta) + g(0, \theta) - g(y_1, \theta)| \\
 &\leq |g(x_1, \theta) - g(0, \theta)| + |g(0, \theta) - g(y_1, \theta)| \\
 &= |t^+ x_1| + |t^- y_1| \\
 &= |t^+| |x_1| + |t^-| |y_1| \\
 &\leq \max\{|t^+|, |t^-|\} (|x_1| + |y_1|) \\
 &= K|x_1 - y_1|.
 \end{aligned}$$

Além disto, visto que (3.8) é uma equação diferencial ordinária linear, se  $x_1 \leq 0$  ou  $x_1 > 0$ , resulta que em ambos os casos a solução está definida para todo  $\theta \in \mathbb{R}$  e, ainda, temos dependência contínua das soluções em relação aos valores iniciais e aos parâmetros (veja [11]).

A próxima proposição refere-se aos pontos de equilíbrio da equação diferencial (3.8).

**Proposição 3.2.1.** *Se  $r > 0$ , então a equação diferencial (3.8) não possui pontos de equilíbrio. Se  $r = 0$ , temos que:*

- (a) *Se  $a = 0$  e  $t^+ = 0$  (respectivamente,  $t^- = 0$ ), então todos os pontos da semirreta  $x_1 \geq 0$  (respectivamente,  $x_1 \leq 0$ ) são pontos de equilíbrio da equação diferencial (3.8);*
- (b) *Se  $a = 0$  e  $t^+ t^- \neq 0$ , então a origem é o único ponto de equilíbrio da equação diferencial (3.8), sendo assintoticamente estável, se  $t^+ < 0$  e  $t^- < 0$ , instável, se  $t^+ > 0$  e  $t^- > 0$  e, semiestável, se  $t^+ t^- < 0$ ;*
- (c) *Se  $a = 1$  e  $t^+ > 0$ , então  $\bar{x}_1^+ = 1/t^+$  é um ponto de equilíbrio instável da equação diferencial (3.8);*
- (d) *Se  $a = 1$  e  $t^- < 0$ , então  $\bar{x}_1^- = 1/t^-$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável da equação diferencial (3.8);*

(e) Se  $a = 1$ ,  $t^+ \leq 0$  e  $t^- \geq 0$ , então a equação diferencial (3.8) não tem pontos de equilíbrio.

**Demonstração.** A demonstração segue diretamente. ■

Vale ressaltar que, no item (e) do teorema anterior, cada equação diferencial possui um ponto de equilíbrio pertencente à outra zona, o qual é conhecido como **ponto de equilíbrio virtual**.

Os dois próximos resultados são variações do **Lema 2.2.1** e serão úteis na demonstração da **Proposição 3.2.2**.

**Corolário 3.2.1.** *Sejam  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas em  $[a, b]$ , com  $\gamma(t) \geq 0$ ,  $t \in [a, b]$ . Se*

$$\phi(t) \leq L_1 + L_2 \int_a^t \gamma(s)\phi(s)ds, \quad a \leq t \leq b,$$

sendo  $L_1$  e  $L_2$  números reais e  $L_2 \geq 0$ , então

$$\phi(t) \leq L_1 \exp\left(L_2 \int_a^t \gamma(s)ds\right), \quad a \leq t \leq b.$$

**Demonstração.** A demonstração é análoga à demonstração do próximo corolário. ■

**Corolário 3.2.2.** *Sejam  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas em  $[a, b]$ , com  $\gamma(t) \geq 0$ ,  $t \in [a, b]$ . Se*

$$\phi(t) \leq L_1 + L_2 \int_t^b \gamma(s)\phi(s)ds, \quad a \leq t \leq b,$$

sendo  $L_1$  e  $L_2$  números reais e  $L_2 \geq 0$ , então

$$\phi(t) \leq L_1 \exp\left(L_2 \int_t^b \gamma(s)ds\right), \quad a \leq t \leq b.$$

**Demonstração.** Definindo  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$v(t) = L_1 + L_2 \int_t^b \gamma(s)\phi(s)ds,$$

resulta que

$$v'(t) = -L_2\gamma(t)\phi(t), \quad t \in [a, b].$$

Como por hipótese  $\phi(t) \leq v(t)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ , temos que

$$v'(t) \geq -L_2\gamma(t)v(t),$$

e, assim,

$$v'(t)e^{-L_2 \int_t^b \gamma(s)ds} + L_2\gamma(t)v(t)e^{-L_2 \int_t^b \gamma(s)ds} \geq 0,$$

implicando que

$$\left( v(t)e^{-L_2 \int_t^b \gamma(s)ds} \right)' \geq 0, \quad t \in [a, b].$$

Portanto, a função

$$t \mapsto v(t)e^{-L_2 \int_t^b \gamma(s)ds}$$

é crescente em  $[a, b]$ . Desta forma,

$$v(t)e^{-L_2 \int_t^b \gamma(s)ds} \leq v(b) = L_1,$$

ou seja,

$$v(t) \leq L_1 e^{L_2 \int_t^b \gamma(s)ds},$$

isto é,

$$\phi(t) \leq v(t) \leq L_1 e^{L_2 \int_t^b \gamma(s)ds}, \quad t \in [a, b].$$

■

Denotaremos por  $\varphi = \varphi(\theta, \theta_0, x_0)$  a solução de (3.8) que satisfaz  $\varphi(\theta_0, \theta_0, x_0) = x_0$ . Também utilizaremos a notação

$$x_1(\theta) = \varphi(\theta, 0, x_1(0)).$$



Agora vamos nos concentrar em encontrar as soluções periódicas da equação diferencial (3.8), ou seja, as soluções não constantes que satisfazem  $\varphi(\theta + T, \theta_0, x_0) = \varphi(\theta, \theta_0, x_0)$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$  e algum número real  $T \neq 0$ . O período das soluções periódicas será o ínfimo dos valores positivos de  $T$  que verificam a relação anterior.

A próxima proposição trata de algumas propriedades importantes das soluções de (3.8).

**Proposição 3.2.2.** *As soluções da equação diferencial (3.8) possuem as seguintes propriedades:*

- (a) Se  $x_0 < y_0$ , então  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0) < \varphi(\theta, \theta_0, y_0)$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ ;
- (b) Para todo  $\theta_0, x_0 \in \mathbb{R}$  e todo número inteiro  $k$ , vale a seguinte propriedade de translação:

$$\varphi(\theta + 2k\pi, \theta_0, x_0) = \varphi(\theta, \theta_0, \varphi(\theta_0 + 2k\pi, \theta_0, x_0)); \quad (3.9)$$

- (c) Se uma solução da equação diferencial (3.8) é periódica, então ela tem período  $2\pi$ ;
- (d) A solução  $x_1 = x_1(\theta)$  da equação diferencial (3.8) é periódica se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} t^\pm x_1(\theta) d\theta = 2\pi a.$$

**Demonstração.**

- (a) Suponha que  $x_0 < y_0$ . Temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (\varphi(\theta, \theta_0, x_0) - \varphi(\theta, \theta_0, y_0)) &= g(\varphi(\theta, \theta_0, x_0), \theta) - g(\varphi(\theta, \theta_0, y_0), \theta) \\ &= \begin{cases} t^-(\varphi(\theta, \theta_0, x_0) - \varphi(\theta, \theta_0, y_0)), & \text{se } \theta \in I^-, \\ t^-\varphi(\theta, \theta_0, x_0) - t^+\varphi(\theta, \theta_0, y_0), & \text{se } \theta \in I, \\ t^+(\varphi(\theta, \theta_0, x_0) - \varphi(\theta, \theta_0, y_0)), & \text{se } \theta \in I^+, \end{cases} \end{aligned}$$

sendo  $I^-$  o intervalo em que  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0) \leq 0$  e  $\varphi(\theta, \theta_0, y_0) \leq 0$ ,  $I^+$  o intervalo em que  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0) \geq 0$  e  $\varphi(\theta, \theta_0, y_0) \geq 0$  e,  $I$  o intervalo em que  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0) \leq 0$  e  $\varphi(\theta, \theta_0, y_0) \geq 0$ .

Definindo  $\phi$  por  $\phi(\theta) = \varphi(\theta, \theta_0, x_0) - \varphi(\theta, \theta_0, y_0)$ ,  $\theta \in \mathbb{I}^\pm$ , resulta que  $\phi$  é solução do seguinte problema de Cauchy,

$$\begin{cases} z'(\theta) = t^\pm z(\theta), \\ z(\theta_0) = x_0 - y_0, \end{cases}$$

e, portanto,

$$\phi(\theta) = e^{t^\pm(\theta-\theta_0)}(x_0 - y_0) < 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{I}^\pm.$$

Em outras palavras, para aqueles valores de  $\theta$  em que  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0) \leq 0$  e  $\varphi(\theta, \theta_0, y_0) \leq 0$ , ou,  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0) \geq 0$  e  $\varphi(\theta, \theta_0, y_0) \geq 0$ , temos que

$$\varphi(\theta, \theta_0, x_0) < \varphi(\theta, \theta_0, y_0).$$

Agora, observe que se para algum valor de  $\theta$ ,  $\varphi(\theta, \theta_0, y_0) > 0$  e  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0) \leq 0$ , ainda continua valendo o resultado. Portanto, em todos os casos, se  $x_0 < y_0$ , segue que  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0) < \varphi(\theta, \theta_0, y_0)$ ,  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ .

**(b)** Suponha que  $\varphi = \varphi(\theta, \theta_0, x_0)$  seja solução de (3.8), com  $\theta_0, x_0 \in \mathbb{R}$ . Assim,  $\varphi$  satisfaz a equação integral, ou seja,

$$\varphi(\theta, \theta_0, x_0) = x_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} g(\varphi(s, \theta_0, x_0), s) ds, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Da mesma forma, para qualquer número inteiro  $k$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(\theta + 2k\pi, \theta_0, x_0) &= x_0 + \int_{\theta_0}^{\theta+2k\pi} g(\varphi(s, \theta_0, x_0), s) ds \\ &= x_0 + \varphi(\theta_0 + 2k\pi, \theta_0, x_0) + \int_{\theta_0}^{\theta+2k\pi} g(\varphi(s, \theta_0, x_0), s) ds - \\ &\quad \left( x_0 + \int_{\theta_0}^{\theta_0+2k\pi} g(\varphi(s, \theta_0, x_0), s) ds \right) \\ &= \varphi(\theta_0 + 2k\pi, \theta_0, x_0) + \int_{\theta_0+2k\pi}^{\theta+2k\pi} g(\varphi(s, \theta_0, x_0), s) ds. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis  $u = s - 2k\pi$  e, mantendo a integral na variável  $s$ , resulta que

$$\varphi(\theta + 2k\pi, \theta_0, x_0) = \varphi(\theta_0 + 2k\pi, \theta_0, x_0) + \int_{\theta_0}^{\theta} g(\varphi(s + 2k\pi, \theta_0, x_0), s) ds.$$

Além disto, temos que

$$\varphi(\theta, \theta_0, \varphi(\theta_0 + 2k\pi, \theta_0, x_0)) = \varphi(\theta_0 + 2k\pi, \theta_0, x_0) + \int_{\theta_0}^{\theta} g(\varphi(s, \theta_0, \varphi(\theta_0 + 2k\pi, \theta_0, x_0)), s) ds.$$

Definindo  $\phi$  por  $\phi(\theta) = \varphi(\theta + 2k\pi, \theta_0, x_0) - \varphi(\theta, \theta_0, \varphi(\theta_0 + 2k\pi, \theta_0, x_0))$ , segue que

$$\phi(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} [g(\varphi(s + 2k\pi, \theta_0, x_0), s) - g(\varphi(s, \theta_0, \varphi(\theta_0 + 2k\pi, \theta_0, x_0)), s)] ds,$$

resultando que

$$|\phi(\theta)| \leq \int_{\theta_0}^{\theta} |g(\varphi(s + 2k\pi, \theta_0, x_0), s) - g(\varphi(s, \theta_0, \varphi(\theta_0 + 2k\pi, \theta_0, x_0)), s)| ds \leq K \int_{\theta_0}^{\theta} |\phi(s)| ds,$$

sendo  $K > 0$  uma constante global de Lipschitz. Assim, pelo **Lema 3.2.1**, temos que se  $\theta \geq \theta_0$ , então

$$0 \leq |\phi(\theta)| \leq 0e^{K(\theta - \theta_0)} = 0,$$

implicando que  $\phi(\theta) = 0$ , ou seja,

$$\varphi(\theta + 2k\pi, \theta_0, x_0) = \varphi(\theta, \theta_0, \varphi(\theta_0 + 2k\pi, \theta_0, x_0)),$$

como desejávamos. Agora, se  $\theta \leq \theta_0$ , com cálculos análogos e usando o **Lema 3.2.2**, segue o resultado.

(c) Primeiramente, observe que se  $r = 0$ , então a equação diferencial (3.8) não possui soluções periódicas. Deste modo, suponha  $r > 0$  e que  $\varphi = \varphi(\theta, \theta_0, x_0)$  seja uma solução periódica da equação diferencial (3.8), com período  $T$ , ou seja,

$$\varphi(\theta + T, \theta_0, x_0) = \varphi(\theta, \theta_0, x_0).$$

Vamos mostrar que  $T = 2\pi$ . Note que

$$\varphi'(\theta, \theta_0, x_0) = g(\varphi(\theta, \theta_0, x_0), \theta) \tag{3.10}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} \varphi'(\theta, \theta_0, x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\theta + h, \theta_0, x_0) - \varphi(\theta, \theta_0, x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\theta + T + h, \theta_0, x_0) - \varphi(\theta + T, \theta_0, x_0)}{h} \\ &= \varphi'(\theta + T, \theta_0, x_0). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Assim, de (3.10) e (3.11) resulta que

$$g(\varphi(\theta, \theta_0, x_0), \theta) = \varphi'(\theta + T, \theta_0, x_0) = g(\varphi(\theta + T, \theta_0, x_0), \theta + T) = g(\varphi(\theta, \theta_0, x_0), \theta + T)$$

e, portanto,  $T = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Resta mostrar que  $n = 1$ . Para isto, faremos uma construção bem semelhante ao que foi feito em [4], página 113.

De acordo com [4], podemos supor  $\theta_0 = 0$  e estudar o comportamento assintótico da solução  $\varphi = \varphi(\theta, 0, x_0)$  através da sequência de funções  $\Phi_{2\pi k} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , definida por

$$\begin{aligned}\Phi_0(\theta) &= \varphi(\theta, 0, x_0), \\ \Phi_{2\pi}(\theta) &= \varphi(\theta + 2\pi, 0, x_0), \\ &\vdots \\ \Phi_{2\pi k}(\theta) &= \varphi(\theta + 2\pi k, 0, x_0).\end{aligned}$$

Esta sequência de funções é monótona, isto é, se  $\Phi_{2\pi}(0) \geq \Phi_0(0) = x_0$ , então  $\Phi_{2\pi(k+1)}(\theta) \geq \Phi_{2\pi k}(\theta)$ , ou, se  $\Phi_{2\pi}(0) \leq \Phi_0(0) = x_0$ , então  $\Phi_{2\pi(k+1)}(\theta) \leq \Phi_{2\pi k}(\theta)$ . De fato, suponha que  $\Phi_{2\pi}(0) \geq \Phi_0(0) = x_0$  (o outro caso é análogo), ou seja,

$$\varphi(2\pi, 0, x_0) \geq \varphi(0, 0, x_0) = x_0.$$

Se  $\varphi(2\pi, 0, x_0) = x_0$ , então acabou.

Se  $\tilde{x}_0 := \varphi(2\pi, 0, x_0) > x_0$ , então pelo item **(a)**,

$$\varphi(\theta + 2\pi k, 0, \tilde{x}_0) > \varphi(\theta + 2\pi k, 0, x_0).$$

Mas, pelo item **(b)**,

$$\begin{aligned}\varphi(\theta + 2\pi k, 0, \tilde{x}_0) &= \varphi(\theta + 2\pi k, 0, \varphi(2\pi, 0, x_0)) \\ &= \varphi(\theta + 2\pi k + 2\pi, 0, x_0) \\ &= \varphi(\theta + 2\pi(k+1), 0, x_0).\end{aligned}$$

Assim,

$$\varphi(\theta + 2\pi(k+1), 0, x_0) > \varphi(\theta + 2\pi k, 0, x_0),$$

isto é,

$$\Phi_{2\pi(k+1)}(\theta) > \Phi_{2\pi k}(\theta).$$

Como por hipótese  $\varphi$  é periódica e, por sua vez,  $\varphi$  é contínua, segue que  $\varphi$  é limitada. Logo, esta sequência de funções é limitada e, portanto, convergente. Seja  $\Phi = \Phi(\theta)$  a função limite, ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{2\pi k}(\theta) = \Phi(\theta).$$

Visto que pela equação (3.9)

$$\Phi_{2\pi k}(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi k, 0, x_0) = \varphi(\theta, 0, \varphi(2\pi k, 0, x_0)) = \varphi(\theta, 0, \Phi_{2\pi k}(0))$$

e  $\varphi = \varphi(\theta, 0, x_0)$  é contínua em  $\theta, \theta_0, x_0$ , segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{2\pi k}(\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\theta, 0, \Phi_{2\pi k}(0)),$$

implicando que

$$\Phi(\theta) = \varphi(\theta, 0, \Phi(0)).$$

Portanto,  $\Phi$  também é solução da equação diferencial (3.8) no intervalo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e, da equação (3.9) resulta que

$$\begin{aligned} \Phi(2\pi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(2\pi, 0, \Phi_{2\pi k}(0)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(2\pi, 0, \varphi(2\pi k, 0, x_0)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(2\pi + 2\pi k, 0, x_0) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(2\pi(k+1), 0, x_0) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{2\pi(k+1)}(0) \\ &= \Phi(0). \end{aligned}$$

Desta forma,  $\Phi$  é uma solução periódica de período  $2\pi$  e, conseqüentemente,  $\varphi$  é periódica de período  $2\pi$  como queríamos.

(d) Integrando ambos os membros de (3.8) em relação a  $\theta$ , de  $\theta = 0$  até  $\theta = 2\pi$ , segue que

$$\int_0^{2\pi} x_1'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (t^\pm x_1(\theta) - a - r \cos \theta) d\theta$$

e, assim, pelo *Teorema Fundamental do Cálculo*, obtemos que

$$x_1(2\pi) - x_1(0) = \int_0^{2\pi} t^\pm x_1(\theta) d\theta - 2\pi a.$$

Dos itens **(b)** e **(c)**, decorre que a solução  $x_1 = x_1(\theta)$  é periódica se, e somente se,  $x_1(2\pi) = x_1(0)$ , ou seja, se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} t^\pm x_1(\theta) d\theta = 2\pi a.$$

■

Agora, a partir do item **(d)** da **Proposição 3.2.2**, vamos enunciar o primeiro resultado referente à não existência de soluções periódicas para (3.8).

**Proposição 3.2.3.** *A equação diferencial (3.8) satisfaz as seguintes propriedades:*

- (a) *Se  $a = 1$ ,  $t^+ \leq 0$  e  $t^- \geq 0$ , então a equação diferencial (3.8) não possui soluções periódicas;*
- (b) *Se  $a = 0$  e  $t^+ t^- < 0$ , então a equação diferencial (3.8) não possui soluções periódicas.*

**Demonstração.**

(a) Supondo  $a = 1$ , pelo item **(d)** da **Proposição 3.2.2**, a solução  $x_1 = x_1(\theta)$  é periódica se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} t^\pm x_1(\theta) d\theta = 2\pi.$$

Sendo  $t^+ \leq 0$  e  $t^- \geq 0$ , temos os seguintes casos:

(i) Se  $x_1(\theta) > 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ , então

$$\int_0^{2\pi} t^+ x_1(\theta) d\theta \leq 0;$$

(ii) Se  $x_1(\theta) \leq 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ , então

$$\int_0^{2\pi} t^- x_1(\theta) d\theta \leq 0;$$

(iii) Se

$$\begin{cases} x_1(\theta) \leq 0, & 0 \leq \theta \leq \theta_1, \\ x_1(\theta) > 0, & \theta_1 < \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

então

$$\int_0^{2\pi} t^\pm x_1(\theta) d\theta = \int_0^{\theta_1} t^- x_1(\theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{2\pi} t^+ x_1(\theta) d\theta \leq 0.$$

Portanto, em todos os casos, a solução de (3.8) não é periódica.

(b) Suponha  $a = 0$  e, primeiramente, que  $t^+ < 0$  e  $t^- > 0$ . De forma análoga a demonstração do item (a), vemos que em todos os casos,

$$\int_0^{2\pi} t^\pm x_1(\theta) d\theta < 0.$$

Portanto, pelo item (d) da **Proposição 3.2.2**, a equação diferencial (3.8) não possui soluções periódicas. Agora, se  $t^+ > 0$  e  $t^- < 0$ , novamente de modo similar à demonstração do item (a), obtemos que

$$\int_0^{2\pi} t^\pm x_1(\theta) d\theta > 0,$$

mostrando que nenhuma solução de (3.8) é periódica. ■

### 3.3 A Aplicação de Poincaré

Definiremos a aplicação de Poincaré  $\mathcal{P} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\mathcal{P}(p) = \varphi(2\pi, 0, p)$  e, claramente, de acordo com a **Proposição 3.2.2**, os pontos fixos da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  determinam as soluções periódicas de (3.8). Veja a Figura 3.1.

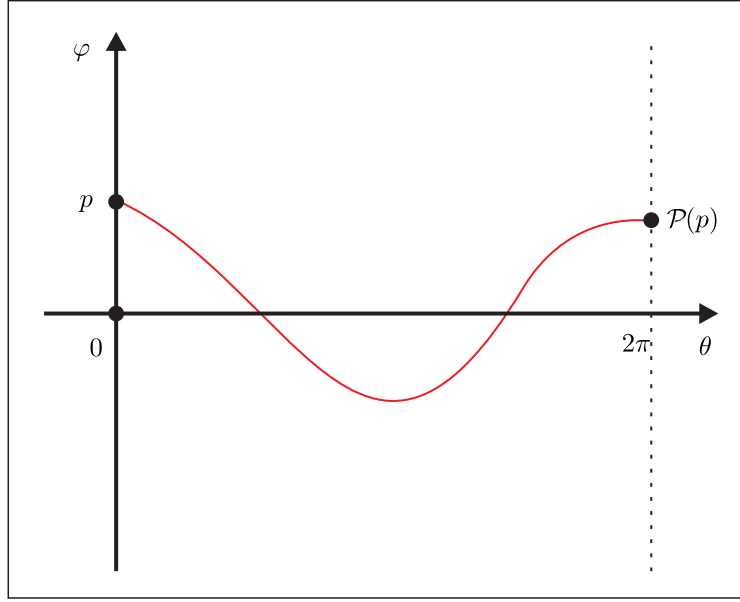


Figura 3.1: Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Observe que  $\theta_0 = 0$  na aplicação de Poincaré, pois independe do  $\theta_0$  escolhido. De fato, queremos mostrar que se  $\varphi$  é periódica, então

$$\varphi(\theta_0 + 2\pi, \theta_0, p) = \varphi(2\pi, 0, p), \quad \forall \theta_0 \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} g(\varphi(s, \theta_0, p), s) ds = \int_0^{2\pi} g(\varphi(s, 0, p), s) ds.$$

Definindo a função  $h$  por  $h(s, p) = g(\varphi(s, \theta_0, p), s)$ , é suficiente mostrar que a função  $F$  definida por

$$F(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} h(s, p) ds, \quad \theta_0 \in \mathbb{R},$$

é uma função constante. Com efeito, visto que

$$F(\theta_0) = \int_a^{\theta_0+2\pi} h(s, p) ds - \int_a^{\theta_0} h(s, p) ds,$$

sendo  $a \in \mathbb{R}$ , segue do *Teorema Fundamental do Cálculo* que

$$F'(\theta_0) = h(\theta_0 + 2\pi, p) - h(\theta_0, p) = 0.$$



Como

$$F(0) = \int_0^{2\pi} g(\varphi(s, 0, p), s) ds,$$

resulta que

$$F(\theta_0) = \int_0^{2\pi} g(\varphi(s, 0, p), s) ds, \quad \theta_0 \in \mathbb{R},$$

como desejávamos.

Para conhecer a aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$ , primeiramente, temos que determinar os pontos do segmento  $S := \{(x_1, \theta) = (0, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}$  nos quais  $\varphi(\theta, 0, p)$  muda de sinal. Com este objetivo, no próximo lema, vamos estudar o sinal de  $x'_1(0, \theta) = g(0, \theta)$  e os diferentes casos que surgem dependendo dos valores dos parâmetros  $r$  e  $a$ .

Daqui em diante, diremos que  $\varphi(\theta, 0, p)$  intercepta  $S$  quando o conjunto  $\gamma(p) = \{\theta \in [0, 2\pi] : \varphi(\theta, 0, p)\}$  interceptar  $S$ .

**Lema 3.3.1.** *As soluções da equação diferencial (3.8) satisfazem as seguintes propriedades:*

- (a) *Se  $0 \leq r < 1$  e  $a = 1$ , então as soluções que interceptam  $S$  são transversais a  $S$  e tem derivada negativa nos pontos de interseção;*
- (b) *Se  $r = a = 1$ , então as soluções que interceptam  $S$  em  $(0, \theta)$ , sendo  $\theta \neq \pi$ , são transversais a  $S$  e tem derivada negativa nos pontos de interseção. Além disto, a solução que intercepta  $S$  em  $(0, \pi)$ , muda de sinal e sua derivada se anula neste ponto;*
- (c) *Se  $r > 1$  e  $a = 1$  ou  $r > 0$  e  $a = 0$ , então, definindo*

$$\hat{\theta}_1 = \cos^{-1}\left(\frac{-a}{r}\right), \quad \hat{\theta}_2 = 2\pi - \hat{\theta}_1,$$

*resulta que:*

- (c1) *As soluções que interceptam  $S$  em  $(0, \theta)$ ,  $\theta \in [0, \hat{\theta}_1) \cup (\hat{\theta}_2, 2\pi]$  são transversais a  $S$  e tem derivada negativa nos pontos de interseção;*

- (c2) As soluções que interceptam  $S$  em  $(0, \theta)$ ,  $\theta \in (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  são transversais a  $S$  e tem derivada positiva nos pontos de interseção;
- (c3) A solução interceptando  $S$  em  $(0, \hat{\theta}_1)$  tem um mínimo local neste ponto;
- (c4) A solução interceptando  $S$  em  $(0, \hat{\theta}_2)$  tem um máximo local neste ponto.

**Demonstração.**

(a) Suponha que  $0 \leq r < 1$  e  $a = 1$  em (3.8). Assim,

$$x_1'(0, \theta) = -1 - r \cos \theta.$$

Como  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , segue que

$$-1 - r \leq -1 - r \cos \theta \leq -1 + r,$$

o que implica que  $x_1'(0, \theta) < 0$ .

(b) Se  $r = a = 1$  em (3.8), então

$$x_1'(0, \theta) = -1 - \cos \theta < 0, \quad \text{se } \theta \neq \pi.$$

Em particular, se  $\theta = \pi$ ,

$$x_1'(0, \pi) = -1 - \cos \pi = 0.$$

(c1) Sejam

$$\hat{\theta}_1 = \cos^{-1}\left(\frac{-a}{r}\right), \quad \hat{\theta}_2 = 2\pi - \hat{\theta}_1$$

e, suponha primeiramente que  $r > 0$  e  $a = 0$  em (3.8). Assim,

$$\hat{\theta}_1 = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\hat{\theta}_2 = 2\pi - \hat{\theta}_1 = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

As soluções interceptando  $S$  em  $(0, \theta)$ ,  $\theta \in [0, \hat{\theta}_1) \cup (\hat{\theta}_2, 2\pi]$  satisfazem

$$x_1'(0, \theta) = -r \cos \theta < 0,$$

pois  $\cos \theta > 0$  para todo  $\theta$ . Agora, se  $r > 1$  e  $a = 1$  em (3.8), segue que

$$x'_1(0, \theta) = -1 - r \cos \theta, \quad \hat{\theta}_1 = \cos^{-1} \left( \frac{-1}{r} \right),$$

implicando que

$$\hat{\theta}_1 \in \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right) \quad e \quad \hat{\theta}_2 \in \left( \pi, \frac{3\pi}{2} \right).$$

Observe ainda que, sendo  $\cos \hat{\theta}_1 = -1/r$ , resulta que

$$\cos \hat{\theta}_2 = \cos(2\pi - \hat{\theta}_1) = \cos \hat{\theta}_1 = \frac{-1}{r}.$$

Se  $\theta \in [0, \pi/2]$ , então  $\cos \theta \geq 0$  e, portanto,  $x'_1(0, \theta) < 0$ . Se

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \hat{\theta}_1,$$

como a função  $\theta \mapsto \cos \theta$  é decrescente nesse intervalo, temos que

$$\cos \hat{\theta}_1 < \cos \theta < 0.$$

Logo,

$$0 < -r \cos \theta < -r \cos \hat{\theta}_1,$$

ou seja,

$$0 < -r \cos \theta < 1.$$

Assim,  $-1 < -1 - r \cos \theta < 0$ , isto é,  $x'_1(0, \theta) < 0$ , para todo  $\theta \in [0, \hat{\theta}_1)$ . Agora, se

$$\hat{\theta}_2 < \theta < \frac{3\pi}{2},$$

visto que a função  $\theta \mapsto \cos \theta$  é crescente nesse intervalo, resulta que

$$\cos \hat{\theta}_2 < \cos \theta < 0$$

e, logo,

$$0 < -r \cos \theta < -r \cos \hat{\theta}_2,$$

o que é equivalente a

$$0 < -r \cos \theta < 1.$$

Assim,

$$-1 < -1 - r \cos \theta < 0,$$

isto é,  $x'_1(0, \theta) < 0$ . E, ainda, se  $\theta \in [3\pi/2, 2\pi]$ , então  $\cos \theta > 0$  e, portanto, também temos que  $x'_1(0, \theta) < 0$ . Com isto, provamos que  $x'_1(0, \theta) < 0$  para todo  $\theta \in [0, \hat{\theta}_1) \cup (\hat{\theta}_2, 2\pi]$ .

**(c2)** Se  $r > 0$  e  $a = 0$ , então sabemos que

$$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \left( \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right).$$

Deste modo,

$$x'_1(0, \theta) = -r \cos \theta > 0, \quad \theta \in \left( \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right),$$

pois neste intervalo  $\cos \theta < 0$ . Agora, se  $r > 1$  e  $a = 1$ , como vimos no item **(c1)**,

$$\hat{\theta}_1 \in \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right) \quad e \quad \hat{\theta}_2 \in \left( \pi, \frac{3\pi}{2} \right).$$

Se  $\hat{\theta}_1 < \theta \leq \pi$ , como a função  $\theta \mapsto \cos \theta$  é decrescente nesse intervalo, segue que

$$-1 \leq \cos \theta < \cos \hat{\theta}_1,$$

resultando que

$$-r \cos \hat{\theta}_1 < -r \cos \theta \leq r,$$

ou seja,

$$1 < -r \cos \theta \leq r.$$

Logo,

$$0 < -1 - r \cos \theta \leq 1 + r.$$

Portanto,  $x'_1(0, \theta) > 0$ . Agora, se  $\pi \leq \theta < \hat{\theta}_2$ , usando que a função  $\theta \mapsto \cos \theta$  é crescente nesse intervalo, de modo análogo ao que foi feito anteriormente chegamos a  $x'_1(0, \theta) > 0$ .

Desta forma, concluímos novamente que  $x'_1(0, \theta) > 0$  para todo  $\theta \in (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ .

**(c3)** Primeiramente, observe que  $(0, \hat{\theta}_1)$  é um ponto crítico da solução  $x_1$ , pois

$$x'_1(0, \hat{\theta}_1) = -a - r \cos \hat{\theta}_1 = -a - r \cos \left( \cos^{-1} \left( \frac{-a}{r} \right) \right) = 0.$$

Para mostrar que a solução que intercepta  $S$  em  $(0, \hat{\theta}_1)$  tem um mínimo local neste ponto, devemos mostrar que

$$x_1''(0, \hat{\theta}_1) = r \operatorname{sen} \hat{\theta}_1 > 0.$$

De fato, se  $r > 0$  e  $a = 0$ , então  $\hat{\theta}_1 = \pi/2$  e, assim,

$$x_1''(0, \hat{\theta}_1) = x_1''\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = r > 0.$$

E, se  $r > 1$  e  $a = 1$ , então  $\hat{\theta}_1 \in (\pi/2, \pi)$  e, portanto,

$$x_1''(0, \hat{\theta}_1) = r \operatorname{sen} \hat{\theta}_1 > 0,$$

pois  $\operatorname{sen} \hat{\theta}_1 > 0$ .

(c4) Se  $r > 0$  e  $a = 0$ , então  $\hat{\theta}_2 = 3\pi/2$ . Logo,

$$x_1'(0, \hat{\theta}_2) = -r \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

e

$$x_2''(0, \hat{\theta}_2) = r \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -r < 0.$$

Deste modo, concluímos que a solução que intercepta  $S$  em  $(0, \hat{\theta}_2) = (0, 3\pi/2)$  tem um máximo local neste ponto. Agora, se  $r > 1$  e  $a = 1$ , então  $\hat{\theta}_2 \in (\pi, 3\pi/2)$  e temos que

$$x_1'(0, \hat{\theta}_2) = -1 - r \cos \hat{\theta}_2 = -1 - r \cos\left(2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{-1}{r}\right)\right) = -1 - r \left(\frac{-1}{r}\right) = 0$$

e

$$x_1''(0, \hat{\theta}_2) = r \operatorname{sen} \hat{\theta}_2 < 0,$$

já que, neste caso,  $\operatorname{sen} \hat{\theta}_2 < 0$ . Com isto, provamos novamente que a solução interceptando  $S$  em  $(0, \hat{\theta}_2)$  tem um máximo local neste ponto. ■

**Corolário 3.3.1.** *As soluções da equação diferencial (3.8) podem ter apenas um dos seguintes comportamentos:*

(a) *A solução não muda de sinal;*

- (b) *A solução é transversal a  $S$  em um, dois ou três pontos;*
- (c) *A solução é tangente a  $S$  em um ponto sem alterar seu sinal e é transversal a  $S$  em um outro ponto ou não tem mais pontos em comum com  $S$ ;*
- (d) *A solução possui apenas um ponto de interseção não transversal com  $S$  e muda de sinal neste ponto.*

Todos esses casos estão ilustrados nas figuras a seguir.

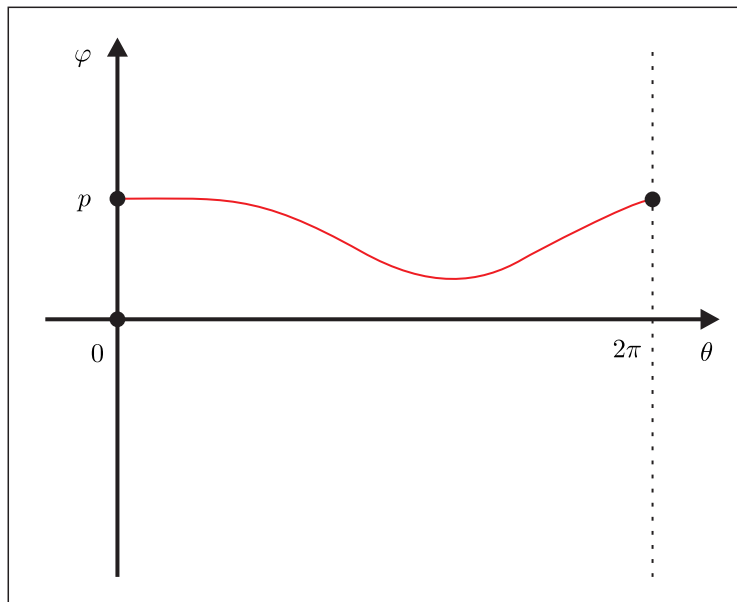


Figura 3.2: Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com  $p > 0$ , que não muda de sinal no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

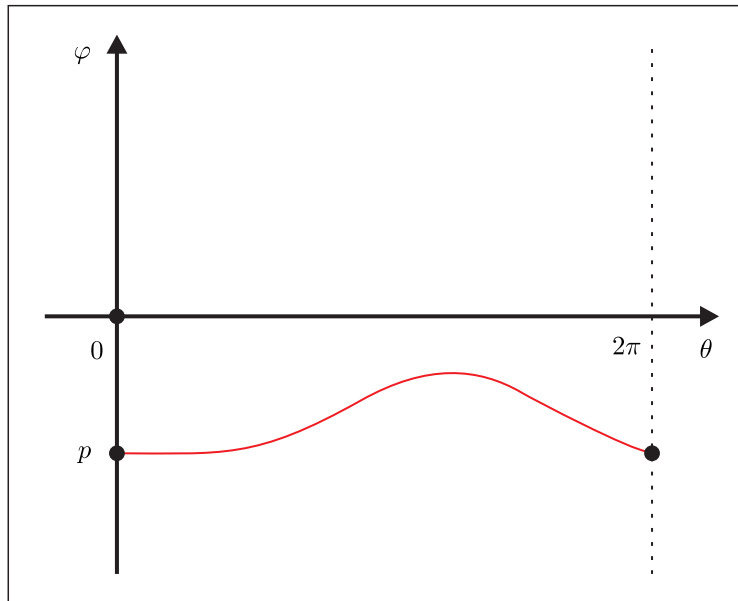


Figura 3.3: Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com  $p < 0$ , que não muda de sinal no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

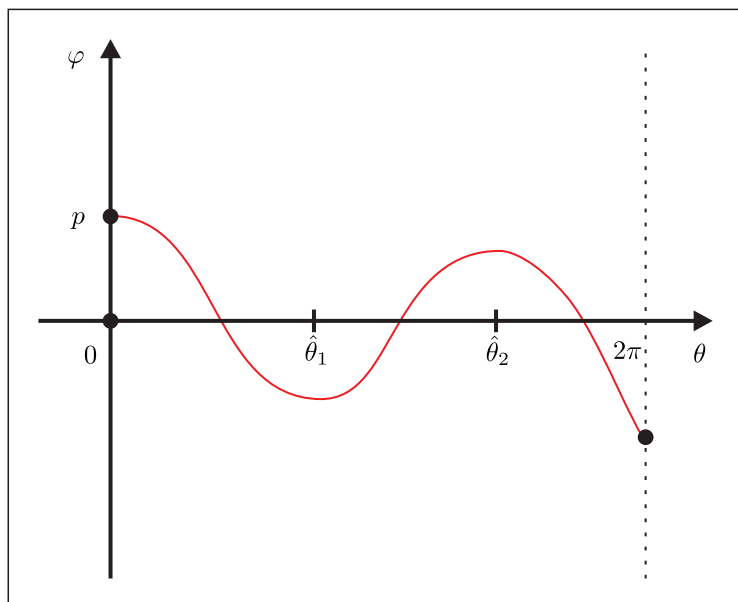


Figura 3.4: Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com  $p > 0$ , quando  $\varphi$  é transversal a  $S$  em três pontos.

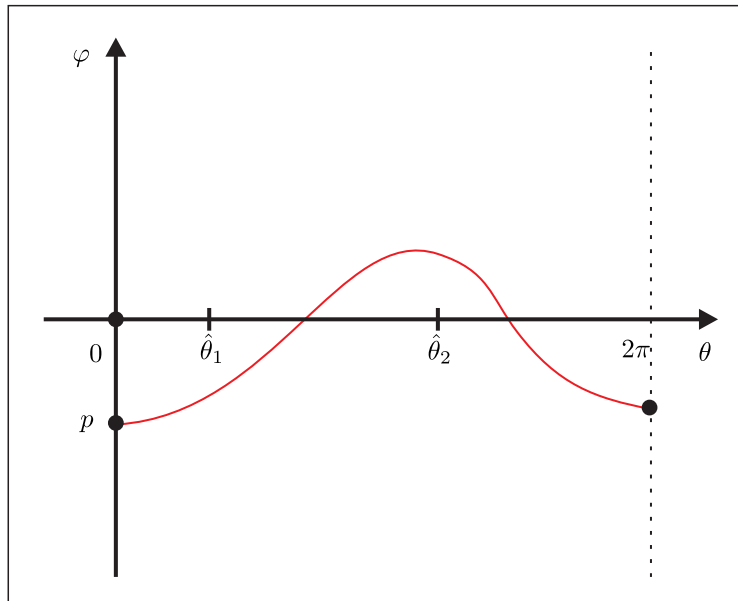


Figura 3.5: Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com  $p < 0$ , quando  $\varphi$  é transversal a  $S$  em dois pontos.

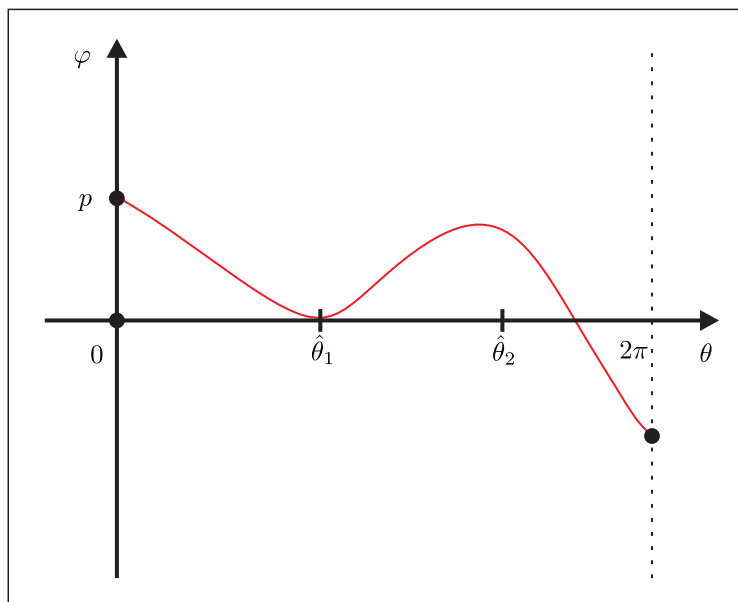


Figura 3.6: Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com  $p > 0$ , quando  $\varphi$  é tangente a  $S$  em um ponto sem alterar seu sinal e é transversal a  $S$  em outro ponto.



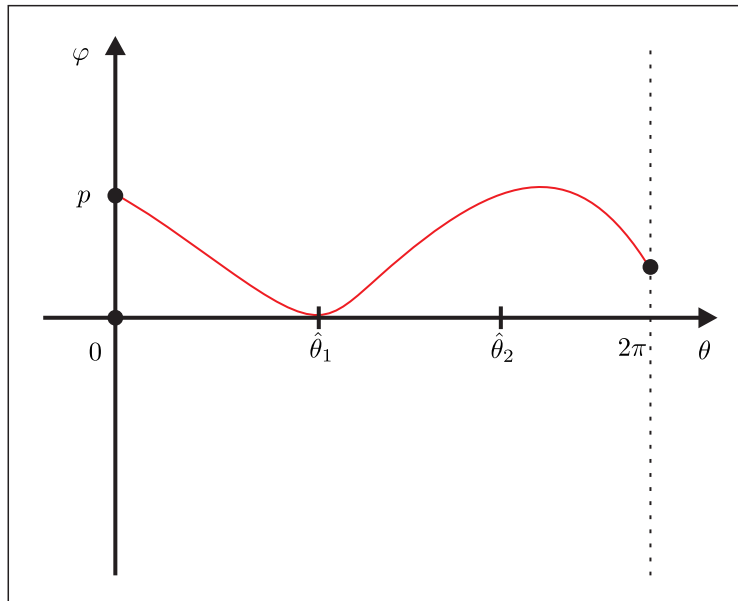


Figura 3.7: Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com  $p > 0$ , quando  $\varphi$  é tangente a  $S$  em um ponto sem alterar seu sinal e não tem mais pontos em comum com  $S$ .

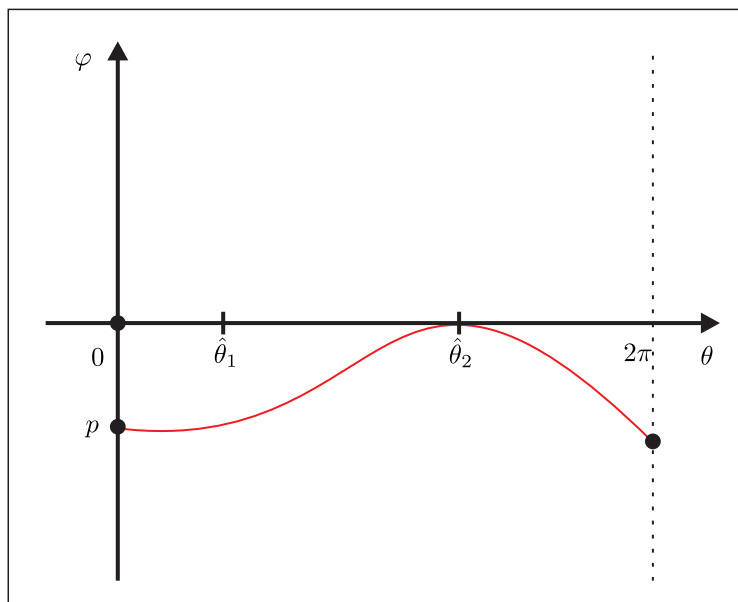


Figura 3.8: Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com  $p < 0$ , quando  $\varphi$  é tangente a  $S$  em um ponto sem alterar seu sinal e não tem mais pontos em comum com  $S$ .

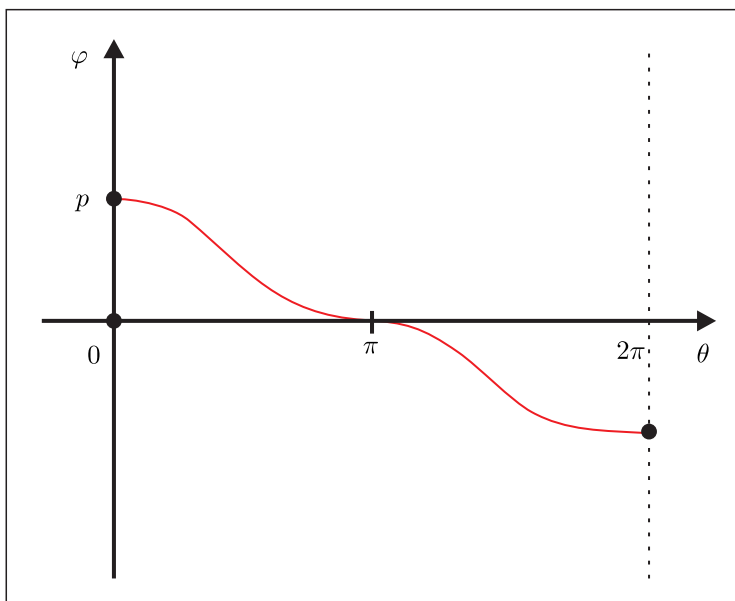


Figura 3.9: Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com  $p > 0$ , quando  $\varphi$  possui apenas uma interseção não transversal com  $S$  em  $\theta = \pi$  e muda de sinal neste ponto.

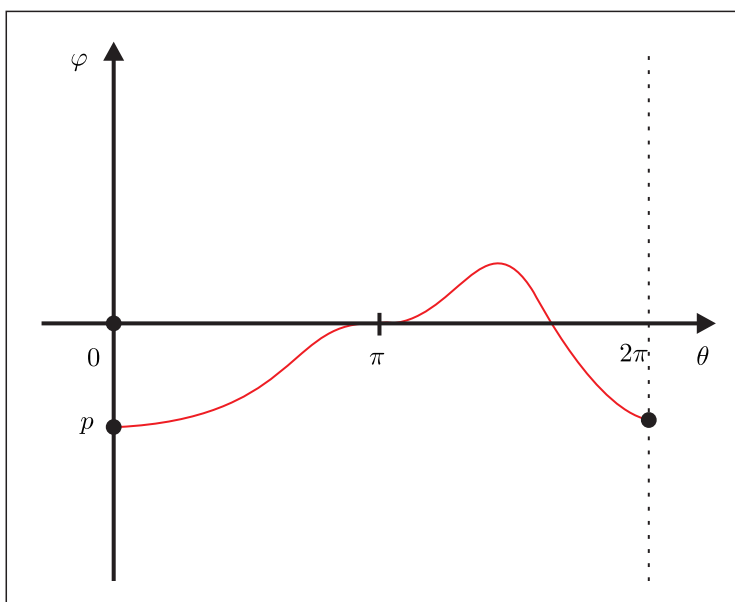


Figura 3.10: Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$ , com  $p < 0$ , quando  $\varphi$  possui apenas uma interseção não transversal com  $S$  em  $\theta = \pi$ , muda de sinal neste ponto e intercepta  $S$  transversalmente em outro ponto.

A solução de (3.8) que não altera seu sinal no intervalo  $[0, 2\pi]$  é dita ser de **uma zona**, positiva, se  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0) \geq 0$  e negativa, se  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0) \leq 0$ . Neste caso, podemos ter uma expressão explícita da aplicação de Poincaré, visto que a equação diferencial (3.8) é linear restrita a cada zona.

Se  $\varphi = \varphi(\theta, \theta_0, x_0)$  é de uma zona, então

$$\varphi(\theta, \theta_0, x_0) = e^{t(\theta-\theta_0)} \left( x_0 - \int_{\theta_0}^{\theta} e^{-t(s-\theta_0)} (a + r \cos s) ds \right), \quad (3.12)$$

sendo  $t = t^+$ , se  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0) \geq 0$  ou  $t = t^-$ , se  $\varphi(\theta, \theta_0, x_0) \leq 0$ .

Desta forma, supondo  $p > 0$  e  $\varphi(\theta, 0, p) \geq 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , por (3.12), obtemos que

$$\varphi(\theta, 0, p) = e^{t^+\theta} \left( p - \int_0^{\theta} e^{-t^+s} (a + r \cos s) ds \right).$$

Analogamente, se  $\varphi(\theta, 0, p) \leq 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , então

$$\varphi(\theta, 0, p) = e^{t^-\theta} \left( p - \int_0^{\theta} e^{-t^-s} (a + r \cos s) ds \right).$$

Assim, definindo

$$M = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \int_0^{\theta} e^{-t^+s} (a + r \cos s) ds,$$

segue que para  $p \geq M \geq 0$ , a aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  é dada por

$$\mathcal{P}(p) = e^{2\pi t^+} \left( p - \int_0^{2\pi} e^{-t^+s} (a + r \cos s) ds \right). \quad (3.13)$$

Da mesma forma, definindo

$$m = \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \int_0^{\theta} e^{-t^-s} (a + r \cos s) ds,$$

temos que para  $p \leq \min\{m, 0\}$ , a aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  é dada por

$$\mathcal{P}(p) = e^{2\pi t^-} \left( p - \int_0^{2\pi} e^{-t^-s} (a + r \cos s) ds \right). \quad (3.14)$$

Note que, anteriormente, o parâmetro  $t$  não denota o tempo. A notação  $t = t^+$  ou  $t = t^-$  também será empregada no restante deste capítulo, bem como a notação  $t = t^+ = -t^-$ .

A solução que muda de sinal no intervalo  $[0, 2\pi]$  é dita ser de **duas zonas**. Neste caso, não é possível obter uma expressão explícita para a aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$ . Além disto, como a derivada parcial de  $g$  com respeito a  $x_1$  não é contínua, conforme [11] temos que a diferenciabilidade da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  com respeito as condições iniciais não é garantida. Entretanto, veremos na próxima proposição que a aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  é continuamente diferenciável.

No que segue, seja  $\tau^+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  a função que a cada  $p \in \mathbb{R}$  associa a medida do conjunto  $\{\theta \in [0, 2\pi] : \varphi(\theta, 0, p) \geq 0\}$ . Afirmamos que  $\tau^+$  é contínua. De fato, tome  $p_0 \in \mathbb{R}$  arbitrário, porém fixado, e suponha que  $\varphi(\theta, 0, p_0)$  intercepta  $S$  transversalmente em três pontos (os outros casos são análogos), digamos

$$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3,$$

como na Figura 3.4.

Seja  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência qualquer de pontos convergindo a  $p_0$ . Como  $\varphi$  é contínua em relação a parâmetros e valores iniciais, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que se  $n > N$ , então

$$|\varphi(\theta, 0, p_n) - \varphi(\theta, 0, p_0)| < \varepsilon, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]. \quad (3.15)$$

Assim, para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno, e  $n > N$ ,  $\varphi(\theta, 0, p_n)$  também intercepta  $S$  em pelo menos três pontos. Mas, sabemos pelo **Corolário 3.3.1** que qualquer solução da equação diferencial (3.8) intercepta  $S$  no máximo em três pontos. Portanto,  $\varphi(\theta, 0, p_n)$  intercepta  $S$  exatamente em três pontos, quais sejam  $\theta = \theta_{i_n}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Note que de (3.15), se  $n > N$ , então

$$|\varphi(\theta_i, 0, p_n) - \varphi(\theta_i, 0, p_0)| = |\varphi(\theta_i, 0, p_n)| < \varepsilon.$$

Em outras palavras, dado  $\eta > 0$ , para cada  $i$ , existe  $N_i \in \mathbb{N}$  tal que se  $n > N_i$ , então

$$|\theta_{i_n} - \theta_i| < \eta, \quad i = 1, 2, 3.$$

Tomando  $\bar{N} = \max\{N_i : i = 1, 2, 3\}$ , resulta que para  $n > \bar{N}$ ,

$$|\theta_{i_n} - \theta_i| < \eta, \quad \forall i.$$

Logo, se  $n > \bar{N}$ , então

$$\begin{aligned}
 |\tau^+(p_n) - \tau^+(p_0)| &= |(\theta_{1_n} + \theta_{3_n} - \theta_{2_n}) - (\theta_1 + \theta_3 - \theta_2)| \\
 &= |(\theta_{1_n} - \theta_1) + (\theta_2 - \theta_{2_n}) + (\theta_{3_n} - \theta_3)| \\
 &< |\theta_{1_n} - \theta_1| + |\theta_2 - \theta_{2_n}| + |\theta_{3_n} - \theta_3| \\
 &< 3\eta.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\tau^+$  é contínua em  $p_0$ . Como  $p_0 \in \mathbb{R}$  é arbitrário, segue que  $\tau^+$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .

Note que se  $p > 0$  é suficientemente grande, então  $\tau^+(p) = 2\pi$  e, se  $p < 0$  é suficientemente grande em módulo, então  $\tau^+(p) = 0$ . Além disto, a função  $\tau^+$  é não decrescente, pois se  $p_1 > p_2$ , então pelo item **(a)** da **Proposição 3.2.2**

$$\varphi(\theta, 0, p_1) > \varphi(\theta, 0, p_2)$$

e, conseqüentemente,

$$\tau^+(p_1) \geq \tau^+(p_2).$$

Sendo assim, o gráfico da função  $\tau^+$  é tal como ilustrado na Figura 3.11.

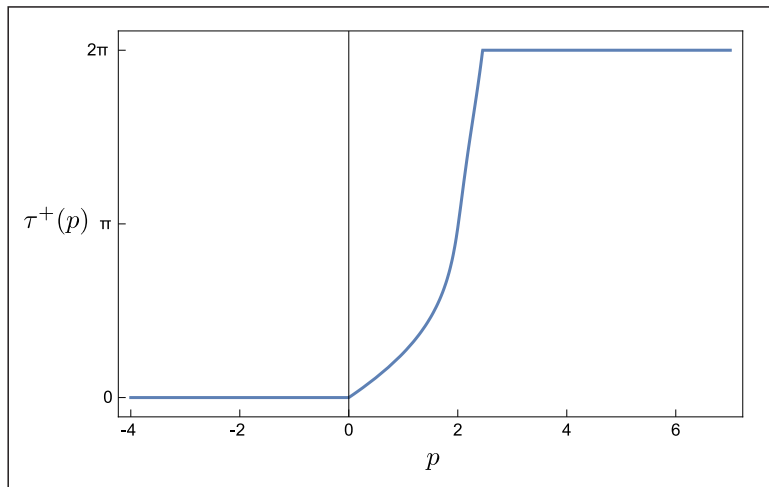


Figura 3.11: Gráfico da função  $\tau^+$  quando  $a = 1$ ,  $r = 1/2$ ,  $t^- = -1/5$  e  $t^+ = 2/5$  em (3.8).

Escolhidos os valores dos parâmetros  $a$  e  $r$ , numericamente, a Figura 3.11 é obtida a partir de

$$p \in \mathbb{R} \mapsto \tau^+(p) = \int_0^{2\pi} \chi(\theta, p) \, d\theta,$$

sendo

$$(\theta, p) \mapsto \chi(\theta, p) = \begin{cases} 0, & \varphi(\theta, 0, p) < 0, \\ 1, & \varphi(\theta, 0, p) \geq 0. \end{cases}$$

**Proposição 3.3.1.** *A aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  é continuamente diferenciável com derivada*

$$\mathcal{P}'(p) = e^{(t^+ - t^-)\tau^+(p)} e^{2\pi t^-}. \quad (3.16)$$

**Demonstração.** Para determinar a derivada da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  vamos estudar os casos listados no **Corolário 3.3.1**.

(a) Se  $\varphi(\theta, 0, p)$  tem sinal constante para  $\theta \in [0, 2\pi]$ , como visto anteriormente, segue que a aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  é dada por (3.13) ou (3.14). Portanto, temos que

$$\mathcal{P}'(p) = \begin{cases} e^{2\pi t^+}, & \text{se } \varphi(\theta, 0, p) > 0, \\ e^{2\pi t^-}, & \text{se } \varphi(\theta, 0, p) < 0, \end{cases}$$

ou seja,  $\mathcal{P}'(p)$  é como em (3.16) com  $\tau^+(p) = 2\pi$ , se  $\varphi(\theta, 0, p) > 0$  e  $\tau^+(p) = 0$ , se  $\varphi(\theta, 0, p) < 0$ .

(b) Suponhamos  $p > 0$  e que  $\varphi(\theta, 0, p)$  intercepta  $S$  apenas transversalmente. Vamos fazer o caso em que  $\varphi(\theta, 0, p)$  é transversal a  $S$  em três pontos, digamos  $\theta_1, \theta_2$  e  $\theta_3$  satisfazendo

$$0 < \theta_1 < \hat{\theta}_1 < \theta_2 < \hat{\theta}_2 < \theta_3 < 2\pi, \quad (3.17)$$

sendo  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$  como no **Lema 3.3.1** (veja a Figura 3.12). Os outros casos estão incluídos neste. Considerando  $U(z)$  como sendo uma vizinhança de um ponto  $z \in \mathbb{R}$ , iremos definir as seguintes aplicações de transição

$$\xi_0 : U(p) \rightarrow U(\theta_1),$$

$$\xi_1 : U(\theta_1) \rightarrow U(\theta_2),$$

$$\xi_2 : U(\theta_2) \rightarrow U(\theta_3),$$

e

$$\xi_3 : U(\theta_3) \rightarrow U(P(p)).$$

Deste modo, podemos expressar a aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  em uma vizinhança de  $p$  por

$$\mathcal{P}(p) = (\xi_3 \circ \xi_2 \circ \xi_1 \circ \xi_0)(p), \quad p \in \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

Assim, temos que

$$\xi_0'(p) = \frac{d\theta_1}{dp} = \frac{1}{a + r \cos \theta_1} e^{t+\theta_1},$$

$$\xi_1'(\theta_1) = \frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{a + r \cos \theta_1}{a + r \cos \theta_2} e^{t-(\theta_2-\theta_1)},$$

$$\xi_2'(\theta_2) = \frac{d\theta_3}{d\theta_2} = \frac{a + r \cos \theta_2}{a + r \cos \theta_3} e^{t+(\theta_3-\theta_2)},$$

e

$$\xi_3'(\theta_3) = \frac{d\mathcal{P}}{d\theta_3} = (a + r \cos \theta_3) e^{t-(2\pi-\theta_3)}.$$

De fato, como

$$\varphi(\theta_1, 0, p) = e^{t+\theta_1} \left( p - \int_0^{\theta_1} e^{-t+s} (a + r \cos s) ds \right) = 0,$$

ou seja,

$$p = \int_0^{\theta_1} e^{-t+s} (a + r \cos s) ds,$$

resulta do *Teorema Fundamental do Cálculo* que

$$\frac{dp}{d\theta_1} = e^{-t+\theta_1} (a + r \cos \theta_1)$$

e, assim, pelo *Teorema da Função Inversa*, segue que

$$\frac{d\theta_1}{dp} = \frac{1}{a + r \cos \theta_1} e^{t+\theta_1}.$$

Analogamente, se demonstra os outros casos. Agora, usando a *Regra da Cadeia* em (3.18), obtemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}'(p) &= \xi_3'(\xi_2 \circ \xi_1 \circ \xi_0)(p) \xi_2'(\xi_1 \circ \xi_0)(p) \xi_1'(\xi_0(p)) \xi_0'(p) \\ &= \xi_3'(\theta_3)\xi_2'(\theta_2)\xi_1'(\theta_1)\xi_0'(p) \\ &= \exp((t^+ - t^-)(\theta_1 - \theta_2 + \theta_3) + 2\pi t^-).\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que  $\mathcal{P}'(p)$  é como em (3.16) com  $\tau^+(p) = \theta_1 - \theta_2 + \theta_3$ .

(c) Iremos mostrar o caso no qual  $\varphi(\theta, 0, p)$  é tangente a  $S$  em um ponto sem alterar seu sinal e é transversal a  $S$  em outro ponto. Pelo **Lema 3.3.1**,  $\varphi(\theta, 0, p)$  é tangente a  $S$  em  $\theta = \hat{\theta}_1$  ou  $\theta = \hat{\theta}_2$ . Supondo que  $p > 0$ , então  $\varphi(\theta, 0, p)$  é tangente a  $S$  em  $\theta = \hat{\theta}_1$  e transversal a  $S$  em  $\theta = \hat{\theta}_2$ , com  $\hat{\theta}_2 < \theta_2 \leq 2\pi$ . Assim, para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno,  $\varphi(\theta, 0, p + \varepsilon)$  intercepta transversalmente  $S$  em um ponto  $\tilde{\theta}_2 = \theta_2 + o(\varepsilon)$  e,  $\varphi(\theta, 0, p - \varepsilon)$  intercepta  $S$  transversalmente em três pontos, digamos

$$\tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - o(\varepsilon), \quad \bar{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 + o(\varepsilon) \quad \text{e} \quad \bar{\theta}_2 = \theta_2 - o(\varepsilon)$$

e, em todos os casos,  $o(\varepsilon) > 0$  e converge a zero quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  (veja a Figura 3.13). Pelo item (b), segue que

$$\mathcal{P}'(p + \varepsilon) = \exp\left((t^+ - t^-)\tilde{\theta}_2 + 2\pi t^-\right)$$

e

$$\mathcal{P}'(p - \varepsilon) = \exp\left((t^+ - t^-)(\tilde{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1) + 2\pi t^-\right).$$

Agora, observe que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{P}'(p + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{P}'(p - \varepsilon) = \exp\left((t^+ - t^-)\theta_2 + 2\pi t^-\right),$$

resultando que  $\mathcal{P}$  é diferenciável em  $p$  e  $\mathcal{P}'(p)$  é como em (3.16) com  $\tau^+(p) = \theta_2$ .

No caso em que a solução é tangente a  $S$  em um ponto sem alterar seu sinal e não tem mais pontos em comum com  $S$ , segue que

$$\mathcal{P}'(p) = \begin{cases} e^{2\pi t^+}, & \text{se } p > 0, \\ e^{2\pi t^-}, & \text{se } p \leq 0, \end{cases}$$



e, assim, novamente  $\mathcal{P}'(p)$  é dada por (3.16), com  $\tau^+(p) = 2\pi$ , se  $p > 0$  e,  $\tau^+(p) = 0$ , se  $p \leq 0$ .

(d) De acordo com o **Lema 3.3.1**, se  $\varphi(\theta, 0, p)$  possui algum ponto de interseção não transversal com  $S$  e muda de sinal neste ponto, deve ser em  $\theta = \pi$ . De forma análoga à demonstração do item (c), suponha que  $p > 0$  e para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno,  $\varphi(\theta, 0, p - \varepsilon)$  intercepta transversalmente  $S$  no ponto  $\theta_1 = \pi - o(\varepsilon)$  e  $\varphi(\theta, 0, p + \varepsilon)$  intercepta  $S$  transversalmente no ponto  $\theta_2 = \pi + o(\varepsilon)$ , com  $o(\varepsilon) > 0$  convergindo para zero quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Pelo item (b),

$$\mathcal{P}'(p - \varepsilon) = \exp((t^+ - t^-)\theta_1 + 2\pi t^-)$$

e

$$\mathcal{P}'(p + \varepsilon) = \exp((t^+ - t^-)\theta_2 + 2\pi t^-).$$

Visto que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{P}'(p + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{P}'(p - \varepsilon) = \exp((t^+ - t^-)\pi + 2\pi t^-),$$

segue que  $\mathcal{P}$  é diferenciável em  $p$  e  $\mathcal{P}'(p)$  é como em (3.16) com  $\tau^+(p) = \pi$ . Observe que se  $p \leq 0$ , então a solução pode interceptar  $S$  novamente. Neste caso, a demonstração está contida na demonstração do item (b).

Note que, em todos casos, a continuidade de  $\mathcal{P}'$  segue diretamente da continuidade da função exponencial e de  $\tau^+$ . ■

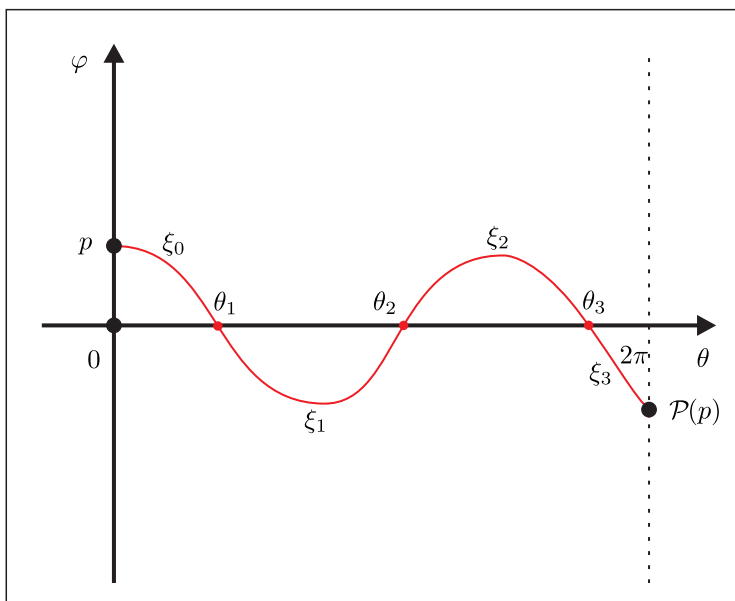


Figura 3.12: Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$  quando  $\varphi$  é transversal a  $S$  em três pontos.

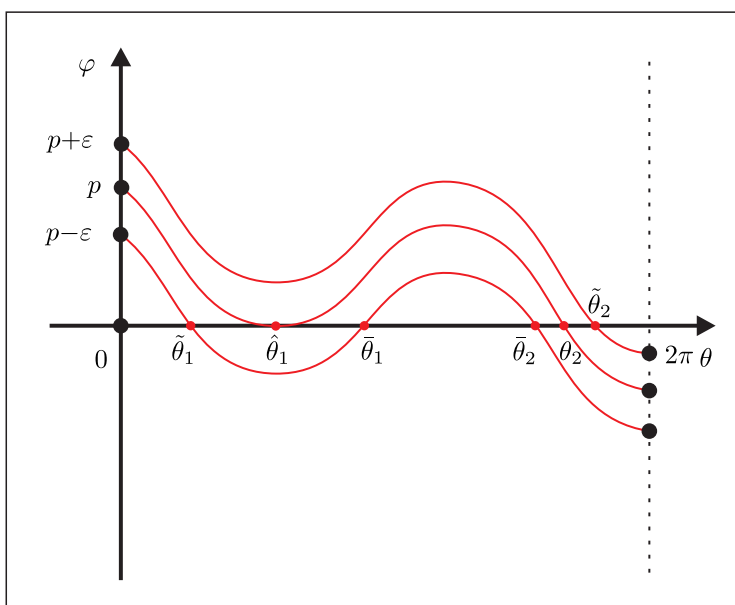


Figura 3.13: Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$  quando  $\varphi$  é tangente a  $S$  em  $\theta = \hat{\theta}_1$  e é transversal a  $S$  em  $\theta = \theta_2$ .

Vale ressaltar que, pela proposição anterior, a aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  é crescente.

**Corolário 3.3.2.** *A derivada da aplicação de Poincaré é não decrescente, se  $t^+ - t^- \geq 0$  e, não crescente, se  $t^+ - t^- \leq 0$ .*

**Demonstração.** De fato, se  $p_1 < p_2$ , visto que  $\tau^+$  é uma função não decrescente, segue que

$$\tau^+(p_1) \leq \tau^+(p_2).$$

Assim, se  $t^+ - t^- \geq 0$ , resulta que

$$(t^+ - t^-)\tau^+(p_1) \leq (t^+ - t^-)\tau^+(p_2).$$

Logo,

$$(t^+ - t^-)\tau^+(p_1) + 2\pi t^- \leq (t^+ - t^-)\tau^+(p_2) + 2\pi t^-,$$

implicando que

$$\exp((t^+ - t^-)\tau^+(p_1) + 2\pi t^-) \leq \exp((t^+ - t^-)\tau^+(p_2) + 2\pi t^-),$$

ou seja,

$$\mathcal{P}'(p_1) \leq \mathcal{P}'(p_2).$$

Portanto, se  $t^+ - t^- \geq 0$ , temos que  $\mathcal{P}'$  é não decrescente. Por outro lado, se  $t^+ - t^- \leq 0$ , de modo análogo, mostra-se que

$$\mathcal{P}'(p_1) \geq \mathcal{P}'(p_2),$$

isto é, que  $\mathcal{P}'$  é não crescente. ■

Ao longo do texto, utilizaremos com frequência a função  $d$  definida por

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto d(p) = \mathcal{P}(p) - p, \end{aligned}$$

a qual é conhecida como **função separação** ou **função deslocamento**. Estamos interessados nos pontos em que  $d$  se anula, pois esses são os pontos fixos da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$ . Observe que como  $\mathcal{P}$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , temos que  $d$  também é contínua em  $\mathbb{R}$ .

No próximo teorema, através da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$ , vamos estudar a existência de soluções periódicas para a equação diferencial (3.8). Antes, note que a equação diferencial (3.8) é invariante sob as transformações

$$x_1 \rightarrow -x_1, \quad \theta \rightarrow -\theta, \quad t^+ \rightarrow -t^-, \quad t^- \rightarrow -t^+, \quad (3.19)$$

lembrando que a função cosseno é par. Com isto, será possível reduzir o número de casos diferentes a serem considerados. Começaremos com o caso em que  $t^+t^- \geq 0$ .

**Teorema 3.3.1.** *Suponha que  $t^+t^- \geq 0$  e  $r > 0$  em (3.8). Assim, temos que:*

- (a) *Se  $a = 1$ ,  $t^- < 0$  e  $t^+ \leq 0$  (respectivamente,  $t^- \geq 0$  e  $t^+ > 0$ ), então a equação diferencial (3.8) possui apenas uma solução periódica, a qual é hiperbólica e assintoticamente estável (respectivamente, instável);*
- (b) *Se  $a = 0$  e  $t^+t^- > 0$ , então a equação diferencial (3.8) possui apenas uma solução periódica, a qual é de duas zonas, hiperbólica e assintoticamente estável, se  $t^+ + t^- < 0$  e instável, se  $t^+ + t^- > 0$ ;*
- (c) *Se  $a = 0$  e  $t^+t^- = 0$ , sendo  $t^+ + t^- \neq 0$ , então a equação diferencial (3.8) possui um contínuo de soluções periódicas de uma zona e não possui soluções periódicas de duas zonas;*
- (d) *Se  $a = 0$  e  $t^+ = t^- = 0$ , então toda solução é periódica.*

### Demonstração.

(a) Suponha que  $a = 1$ ,  $t^- < 0$  e  $t^+ \leq 0$ . Observe que, pela invariância da equação diferencial (3.8), o outro caso pode ser reduzido a este. Se  $|p|$  é suficientemente grande, então, de (3.13), nós obtemos que  $d(p) = \mathcal{P}(p) - p < 0$ , se  $p > 0$  e, por (3.14),  $d(p) > 0$ , se  $p < 0$ . De fato, visto que

$$-1 \leq \cos s \leq 1,$$

segue que

$$e^{-ts}(1-r) \leq e^{-ts}(1+r \cos s) \leq e^{-ts}(1+r)$$

e, assim,

$$\int_0^{2\pi} e^{-ts}(1-r)ds \leq \int_0^{2\pi} e^{-ts}(1+r \cos s)ds \leq \int_0^{2\pi} e^{-ts}(1+r)ds. \quad (3.20)$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-ts}(1+r)ds &= \frac{(1+r)}{t}(1-e^{-2\pi t}), \\ \int_0^{2\pi} e^{-ts}(1-r)ds &= \frac{(1-r)}{t}(1-e^{-2\pi t}) \end{aligned}$$

e

$$d(p) = \mathcal{P}(p) - p = (e^{2\pi t} - 1)p - e^{2\pi t} \int_0^{2\pi} e^{-ts}(1+r \cos s)ds,$$

por (3.20), resulta que

$$(e^{2\pi t} - 1)p - e^{2\pi t} \frac{(1+r)}{t}(1-e^{-2\pi t}) \leq d(p) \leq (e^{2\pi t} - 1)p - e^{2\pi t} \frac{(1-r)}{t}(1-e^{-2\pi t}), \quad (3.21)$$

sendo  $t = t^+$  ou  $t = t^-$ .

Se  $t^+ = 0$ , então  $d(p) = -2\pi < 0$ . Se  $t^+ < 0$ ,  $p > 0$  e  $r < 1$ , então, de (3.21), segue que  $d(p) < 0$ . Agora, se  $r > 1$  e  $p > 0$  for suficientemente grande, de forma que

$$(e^{2\pi t^+} - 1)p < e^{2\pi t^+} \frac{(1-r)}{t^+}(1-e^{-2\pi t^+}),$$

resulta também que  $d(p) < 0$ . Se  $t^- < 0$  e  $p < 0$  for suficientemente grande em módulo, segue diretamente de (3.21) que  $d(p) > 0$ , como desejávamos.

Desta forma, pelo *Teorema do Valor Intermediário*, a aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  tem pelo menos um ponto fixo  $\bar{p}$ . Agora, vamos estudar a estabilidade dos possíveis pontos fixos de  $\mathcal{P}$ . De (3.16), temos que  $\mathcal{P}'(\bar{p}) = \exp(v(\bar{p}))$ , sendo

$$v(\bar{p}) = t^+ \tau^+(\bar{p}) + t^-(2\pi - \tau^+(\bar{p})) \leq 0. \quad (3.22)$$

Note que  $v(\bar{p}) < 0$  para toda solução periódica, pois se  $v(\bar{p}) = 0$ , resulta que  $t^+ = 0$  e  $\tau^+(\bar{p}) = 2\pi$  e, portanto,  $\varphi(\theta, 0, \bar{p}) \geq 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Deste modo, de (3.13), segue que  $\mathcal{P}(\bar{p}) = \bar{p} - 2\pi$ , o que é uma contradição.

Assim, sendo  $v(\bar{p}) < 0$  para toda solução periódica, temos que  $0 < \mathcal{P}'(\bar{p}) < 1$  e, logo, todos os pontos fixos de  $\mathcal{P}$  são hiperbólicos e assintoticamente estáveis. Visto que a aplicação de

Poincaré  $\mathcal{P}$  não pode ter dois pontos fixos hiperbólicos estáveis consecutivos, concluimos que  $\mathcal{P}$  possui apenas um ponto fixo. Portanto, neste caso, a equação diferencial (3.8) possui apenas uma solução periódica.

(b) A demonstração é análoga à demonstração do item anterior. O fato da solução periódica ser de duas zonas decorre do item (d) da **Proposição 3.2.2**, pois sendo  $a = 0$ , segue que qualquer solução  $x_1 = x_1(\theta)$  é periódica se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} t^\pm x_1(\theta) d\theta = 0.$$

Como  $t^+ t^- > 0$ , resulta que  $x_1(\theta) < 0$  para alguns valores de  $\theta \in [0, 2\pi]$  e,  $x_1(\theta) > 0$  para os outros valores de  $\theta \in [0, 2\pi]$ , ou seja,  $x_1 = x_1(\theta)$  é de duas zonas.

(c) Suponha primeiramente que  $a = 0$ ,  $t^+ = 0$  e  $t^- \neq 0$ . De (3.12) temos que

$$\varphi(\theta, 0, p) = p - r \operatorname{sen} \theta$$

e, já que  $-1 \leq \operatorname{sen} \theta \leq 1$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , segue que

$$p - r \leq \varphi(\theta, 0, p) \leq p + r, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Portanto, se  $p \geq r$  resulta que  $\varphi(\theta, 0, p) = p - r \operatorname{sen} \theta \geq 0$ ,  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$  e, logo, temos um contínuo de soluções periódicas, pois

$$\mathcal{P}(p) = \varphi(2\pi, 0, p) = p - r \operatorname{sen}(2\pi) = p, \quad \forall p \geq r.$$

De modo análogo, se  $a = 0$ ,  $t^- = 0$  e  $t^+ \neq 0$ , então de (3.12) resulta que

$$\varphi(\theta, 0, p) = p - r \operatorname{sen} \theta$$

e, conseqüentemente,

$$p - r \leq \varphi(\theta, 0, p) \leq p + r, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Assim, se  $p \leq -r$  segue que  $\varphi(\theta, 0, p) = p - r \operatorname{sen} \theta \leq 0$ ,  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$  e, novamente temos um contínuo de soluções periódicas.

A inexistência de soluções periódicas de duas zonas segue diretamente do item **(d)** da **Proposição 3.2.2**.

**(d)** Se  $a = 0$  e  $t^+ = t^- = 0$ , então a equação diferencial (3.8) tem uma solução  $x_1$  dada por

$$x_1(\theta) = -r \operatorname{sen} \theta,$$

a qual é periódica para todo  $r > 0$ . ■

Observe que supondo  $a = 1$  e fazendo a mudança  $x_1 = ru$  em (3.8), obtemos que

$$\frac{dx_1}{d\theta} = r \frac{du}{d\theta}$$

e, assim,

$$r \frac{du}{d\theta} = t^\pm ru - 1 - r \cos \theta,$$

ou seja,

$$\frac{du}{d\theta} = t^\pm u - \frac{1}{r} - \cos \theta.$$

Logo, obtemos a equação diferencial

$$\frac{du}{d\theta} + f(u, \theta) = q, \tag{3.23}$$

sendo  $f(u, \theta) = \cos \theta - t^\pm u$  e  $q = -1/r$ .

Notamos que a análise do número de soluções periódicas da equação diferencial (3.23), quando  $t^+ > 0$  e  $t^- < 0$ , está relacionado com o problema considerado em [7]. Nesse artigo, os autores mostraram que existe algum  $q_0$  de modo que a equação diferencial (3.23) tem nenhuma, pelo menos uma ou pelo menos duas soluções periódicas dependendo se  $q > q_0$ ,  $q = q_0$  ou  $q < q_0$ . Além disto, se a função  $f(\cdot, \theta)$  é estritamente convexa, para cada  $\theta \in \mathbb{R}$  fixado, então temos exatamente nenhuma, uma ou duas soluções periódicas. Entretanto, já que no nosso caso  $f(\cdot, \theta)$  não é estritamente convexa, para cada  $\theta \in \mathbb{R}$  fixado, então torna-se necessário fazer um estudo particular da equação diferencial (3.23) para determinar o número exato de soluções periódicas. Neste sentido, primeiramente vamos considerar  $t^+ = -t^-$  e, posteriormente, um caso mais geral em que  $t^+ > 0$  e  $t^- < 0$ .

### 3.4 O caso em que $t^+ = -t^- > 0$ e $a = 1$

Sendo  $t^+ = -t^- > 0$  e  $a = 1$  em (3.8), observe que

$$g(x_1, \theta) = g(-x_1, \theta),$$

pois se  $x_1 > 0$  (o outro caso é análogo), então

$$g(-x_1, \theta) = -t^- x_1 - 1 - r \cos \theta = t^+ x_1 - 1 - r \cos \theta = g(x_1, \theta).$$

Por outro lado, temos que para qualquer solução  $\varphi = \varphi(\theta, \theta_0, p)$  de (3.8), a solução  $\varphi(\theta, \theta_0, -\varphi(2\pi - \theta_0, \theta_0, p))$  satisfaz

$$\varphi(\theta, \theta_0, -\varphi(2\pi - \theta_0, \theta_0, p)) = -\varphi(2\pi - \theta, \theta_0, p). \quad (3.24)$$

De fato, definindo

$$h(\theta) = \varphi(\theta, \theta_0, -\varphi(2\pi - \theta_0, \theta_0, p)) + \varphi(2\pi - \theta, \theta_0, p),$$

de modo análogo à demonstração do item (b) da **Proposição 3.2.2**, segue o resultado. Assim, a equação (3.8) é reversível. Denotaremos a aplicação de Poincaré associada à equação reversível por  $\Pi$ .

A próxima proposição refere-se a algumas propriedades da aplicação de Poincaré  $\Pi$ .

**Proposição 3.4.1.** *Suponha  $a = 1$  e  $t^+ = -t^- = t > 0$  em (3.8). Então:*

(a) *O gráfico da aplicação de Poincaré  $\Pi$  é simétrico em relação à bissetriz do segundo quadrante, isto é,*

$$\Pi(-\Pi(p)) = -p, \quad p \in \mathbb{R}; \quad (3.25)$$

(b) *Existe um único ponto  $\hat{p}$  satisfazendo  $\Pi(\hat{p}) = -\hat{p}$ . Além disto,  $\hat{p}$  é o único ponto em que a derivada de  $\Pi$  é igual a 1;*

(c) *Se  $\bar{p}$  é um ponto fixo de  $\Pi$ , então  $-\bar{p}$  também é um ponto fixo de  $\Pi$ .*



**Demonstração.**

(a) Fazendo  $\theta = 2\pi$ ,  $\theta_0 = 0$  e tomando  $p \in \mathbb{R}$  em (3.24), resulta que

$$\varphi(2\pi, 0, -\varphi(2\pi, 0, p)) = -\varphi(0, 0, p) = -p.$$

Assim,

$$\Pi(-\Pi(p)) = \varphi(2\pi, 0, -\varphi(2\pi, 0, p)) = -p.$$

(b) Tomando  $\theta = 2\pi$ ,  $\theta_0 = \pi$  e  $p = 0$  em (3.24), temos que

$$\varphi(2\pi, \pi, -\varphi(\pi, \pi, 0)) = \varphi(2\pi, \pi, 0) = -\varphi(0, \pi, 0).$$

Definindo  $\hat{p} = \varphi(0, \pi, 0)$ , resulta que  $\Pi(\hat{p}) = -\hat{p}$ . De fato, como  $\varphi = \varphi(\theta, \pi, 0)$  é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} x_1' = g(x_1, \theta), \\ x_1(\pi) = 0, \end{cases}$$

segue do *Teorema de Existência e Unicidade de Soluções* que  $\Pi(\hat{p}) = \varphi(2\pi, \pi, 0) = -\varphi(0, \pi, 0) = -\hat{p}$ . Devido à monotonicidade de  $\Pi$ ,  $\hat{p}$  é o único ponto que satisfaz a igualdade acima. De fato, suponha por absurdo que exista  $p^* < \hat{p}$  (o outro caso é análogo) satisfazendo  $\Pi(p^*) = -p^*$ . Como  $\Pi$  é crescente, segue que

$$\Pi(p^*) < \Pi(\hat{p}),$$

resultando que

$$-p^* < -\hat{p},$$

o que é uma contradição. Além disto, de (3.25), temos que

$$\Pi'(-\Pi(\hat{p}))(-\Pi'(\hat{p})) = -1,$$

ou seja,

$$\Pi'(\hat{p})\Pi'(\hat{p}) = 1$$

isto é,

$$(\Pi'(\hat{p}))^2 = 1$$

e, assim, pela **Proposição 3.3.1**, resulta que  $\Pi'(\hat{p}) = 1$ . Afirmamos que  $\hat{p}$  é o único ponto em que a derivada de  $\Pi$  é igual a 1. Com efeito, já que  $t = t^+ = -t^- > 0$ , segue de (3.16) que  $\Pi'(p) = 1$  se, e somente se,

$$(t^+ - t^-)\tau^+(p) + 2\pi t^- = 2t\tau^+(p) - 2\pi t = 2t(\tau^+(p) - \pi) = 0,$$

ou seja,  $\Pi'(p) = 1$  se, e somente se,

$$\tau^+(p) = \pi,$$

implicando que  $\tau^+(\hat{p}) = \pi$ . Desta forma,  $\varphi(\theta, 0, \hat{p})$  é de duas zonas e, pelo item (a) da **Proposição 3.2.2**, temos que se  $p > \hat{p}$  (respectivamente,  $p < \hat{p}$ ), então  $\tau^+(p) > \tau^+(\hat{p})$  (respectivamente,  $\tau^+(p) < \tau^+(\hat{p})$ ). Logo,  $\hat{p}$  é o único ponto satisfazendo  $\Pi'(\hat{p}) = 1$ .

(c) Se  $\Pi(\bar{p}) = \bar{p}$ , segue diretamente de (3.25) que  $\Pi(-\bar{p}) = -\bar{p}$  e, portanto,  $-\bar{p}$  também é ponto fixo de  $\Pi$ . ■

Veremos no próximo teorema que a equação diferencial (3.8) tem uma bifurcação sela-nó de soluções periódicas para um determinado valor do parâmetro  $r$ . Mas, antes iremos enunciar um lema que será fundamental na demonstração do teorema mencionado.

**Lema 3.4.1.** *Se  $a = 1$  e  $t^+ = -t^- = t > 0$  em (3.8), então para todo  $p \in \mathbb{R} \setminus \{\hat{p}\}$ ,  $H(p) > 0$ , sendo*

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} \setminus \{\hat{p}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto H(p) = \Pi(p) - p + 2\hat{p} = d(p) + 2\hat{p}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

**Demonstração.** Como  $\Pi'$  é não decrescente,  $d'(p) = \Pi'(p) - 1$  e, pelo item (b) da **Proposição 3.4.1**,  $\hat{p}$  é o único ponto em que  $\Pi'(\hat{p}) = 1$ , segue que se  $p^* > \hat{p}$ , então  $d'(p^*) > 0$  e, se  $p^* < \hat{p}$ , então  $d'(p^*) < 0$ . Logo,  $d$  é crescente no intervalo  $(\hat{p}, \infty)$  e decrescente no intervalo  $(-\infty, \hat{p})$ , isto é, se  $p > \hat{p}$  então

$$d(p) > d(\hat{p}),$$

implicando que

$$d(p) - d(\hat{p}) > 0.$$

Visto que  $d(\hat{p}) = -2\hat{p}$ , de (3.26) resulta que

$$H(p) = d(p) + 2\hat{p} > 0.$$

Se  $p < \hat{p}$ , então  $d(p) > d(\hat{p})$  e, analogamente, segue o resultado. ■

Note que, do lema anterior, temos que se  $t^+ = -t^- = t > 0$ , então o gráfico da aplicação de Poincaré  $\Pi$  está sempre acima da reta  $y = p - 2\hat{p}$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , a qual é tangente ao gráfico da aplicação de Poincaré  $\Pi$  no ponto  $(\hat{p}, -\hat{p})$ .

**Teorema 3.4.1.** *Suponha  $a = 1$ ,  $t^+ = -t^- = t > 0$  em (3.8) e seja*

$$\hat{r} = \frac{1+t^2}{t^2} \tanh\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

*Assim:*

- (a) *Se  $r > \hat{r}$ , então a equação diferencial (3.8) não possui soluções periódicas;*
- (b) *Se  $r = \hat{r}$ , então a equação diferencial (3.8) possui apenas uma solução periódica, a qual é semiestável;*
- (c) *Se  $0 < r < \hat{r}$ , então a equação diferencial (3.8) possui duas soluções periódicas, as quais são hiperbólicas, sendo uma delas assintoticamente estável e a outra instável.*

**Demonstração.** Vamos estudar a existência de pontos fixos de  $\Pi$  dependendo do sinal de  $\hat{p}$ , pois facilita a análise do comportamento das soluções, conforme o **Lema 3.3.1**. Antes vale ressaltar que, de acordo com (3.13),  $\Pi(p) > p$  para  $p > 0$  suficientemente grande. De fato, sendo  $\Pi(p)$  como em (3.13),  $t^+ > 0$  e, de (3.21),

$$(e^{2\pi t^+} - 1)p - e^{2\pi t^+} \frac{(1+r)}{t^+} (1 - e^{-2\pi t^+}) \leq d(p) \leq (e^{2\pi t^+} - 1)p - e^{2\pi t^+} \frac{(1-r)}{t^+} (1 - e^{-2\pi t^+}),$$

segue que se  $p > 0$  é suficientemente grande, então  $d(p) > 0$ .

- (a) Se  $\hat{p} < 0$ , então a aplicação de Poincaré  $\Pi$  não tem pontos fixos (veja a Figura 3.14). Com efeito, suponha por absurdo que  $\bar{p}$  é ponto fixo de  $\Pi$ . Logo, de (3.26) obtemos que

$$H(\bar{p}) = \Pi(\bar{p}) - \bar{p} + 2\hat{p} = 2\hat{p} < 0,$$

o que contradiz o **Lema 3.4.1**. Além disto, analisando os itens do **Lema 3.3.1**, temos que  $\varphi(\theta, \pi, 0) \leq 0$  para todo  $\theta \in [0, \pi]$ , como está representado na Figura 3.15 e, assim, de (3.12)

$$\hat{p} = \varphi(0, \pi, 0) = e^{-\pi t^-} \int_0^\pi e^{-t^-(s-\pi)}(1 + r \cos s)ds < 0. \quad (3.27)$$

Como  $t = -t^-$ , segue que

$$\hat{p} = e^{\pi t} \int_0^\pi e^{t(s-\pi)}(1 + r \cos s)ds < 0,$$

ou seja,

$$\int_0^\pi e^{ts} ds + r \int_0^\pi (e^{ts} \cos s)ds < 0. \quad (3.28)$$

Temos que

$$\int_0^\pi e^{ts} ds = \frac{e^{ts}}{t} \Big|_0^\pi = \frac{e^{\pi t} - 1}{t} \quad (3.29)$$

e, usando *Integração por Partes* obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (e^{ts} \cos s)ds &= e^{ts} \sin s \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (te^{ts} \sin s)ds \\ &= - \int_0^\pi (te^{ts} \sin s)ds \\ &= - \left( -te^{ts} \cos s \Big|_0^\pi + \int_0^\pi (t^2 e^{ts} \cos s)ds \right) \\ &= te^{ts} \cos s \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (t^2 e^{ts} \cos s)ds, \end{aligned}$$

resultando que

$$\int_0^\pi (1 + t^2)(e^{ts} \cos s)ds = te^{ts} \cos s \Big|_0^\pi.$$

Logo,

$$\int_0^\pi (e^{ts} \cos s)ds = \frac{te^{ts} \cos s}{1 + t^2} \Big|_0^\pi = \frac{-te^{\pi t} - t}{1 + t^2}. \quad (3.30)$$

Assim, substituindo (3.29) e (3.30) em (3.28), resulta que

$$\frac{e^{\pi t} - 1}{t} - rt \frac{e^{\pi t} + 1}{1 + t^2} < 0,$$

implicando que

$$r > \frac{1 + t^2}{t^2} \frac{e^{\pi t} - 1}{e^{\pi t} + 1},$$

isto é,  $r > \hat{r}$  como queríamos.

(b) Se  $\hat{p} = 0$ , então, conforme a Figura 3.16, a origem é o único ponto fixo da aplicação de Poincaré  $\Pi$ . De fato, supondo por absurdo que  $\bar{p} \neq 0$  é outro ponto fixo de  $\Pi$ , de (3.26) obtemos que

$$H(\bar{p}) = \Pi(\bar{p}) - \bar{p} + 2\hat{p} = 0,$$

o que contradiz o **Lema 3.4.1**. Por outro lado, pelo item (b) da **Proposição 3.4.1**, temos que  $\Pi'(0) = 1$  e, portanto, a solução  $\varphi = \varphi(\theta, 0, 0)$  é a única solução periódica, a qual é semiestável pelo **Lema 3.4.1**. Ainda, de acordo com o **Lema 3.3.1**, sabemos que  $\varphi(\theta, \pi, 0) \leq 0$  para todo  $\theta \in [0, \pi]$  (veja Figura 3.17) e, logo, visto que  $\hat{p} = 0$ , de (3.27) segue que  $r = \hat{r}$ .

(c) Se  $\hat{p} > 0$ , então  $\Pi(\hat{p}) = -\hat{p} < 0$  e  $d(\hat{p}) = -2\hat{p} < 0$ . Como  $\Pi(p^*) > p^*$ , se  $p^* > 0$  é suficientemente grande, isto é,  $d(p^*) > 0$ , resulta do *Teorema do Valor Intermediário* que existe  $\bar{p}$  satisfazendo  $0 < \hat{p} < \bar{p} < p^*$  e  $d(\bar{p}) = 0$ , ou seja,  $\Pi(\bar{p}) = \bar{p}$ . Assim, pelo item (c) da **Proposição 3.4.1**,  $\bar{p}$  e  $-\bar{p}$  são pontos fixos de  $\Pi$ . Além disto, temos que  $-\bar{p} < \hat{p} < \bar{p}$ , pois definindo a função  $\Delta$  por  $\Delta(p) = \Pi(p) + p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , segue que

$$\Delta(\bar{p}) = \Pi(\bar{p}) + \bar{p} = 2\bar{p} > 0$$

e

$$\Delta(-\bar{p}) = \Pi(-\bar{p}) - \bar{p} = -2\bar{p} < 0.$$

Desta forma, pelo *Teorema do Valor Intermediário*, existe  $p_1 \in (-\bar{p}, \bar{p})$  tal que  $\Delta(p_1) = 0$ . Entretanto, pelo item (b) da **Proposição 3.4.1**,  $\hat{p}$  é o único ponto satisfazendo  $\Delta(\hat{p}) = 0$ . Portanto,  $p_1 = \hat{p} \in (-\bar{p}, \bar{p})$ . Por outro lado, como  $\hat{p}$  também é o único ponto em que  $\Pi'(\hat{p}) = 1$  e, do **Corolário 3.3.2**,  $\Pi'$  é não decrescente, resulta que

$$\Pi'(-\bar{p}) < 1 < \Pi'(\bar{p}).$$

Deste modo,  $-\bar{p}$  corresponde a uma solução periódica hiperbólica assintoticamente estável e  $\bar{p}$  corresponde a uma solução periódica hiperbólica instável.

Afirmamos que  $\Pi$  tem exatamente estes dois pontos fixos, como ilustrado na Figura 3.18. De fato, se  $\tilde{p}$  fosse outro ponto fixo de  $\Pi$ , como  $\Pi'$  é não decrescente, a única possibilidade

seria  $\tilde{p} \in (-\bar{p}, \bar{p})$  e  $\tilde{p}$  corresponder a uma solução periódica semiestável, isto é,  $\Pi'(\tilde{p}) = 1$ . No entanto, isto é uma contradição, visto que o único ponto com tal propriedade é  $\hat{p}$ , o qual não é ponto fixo da aplicação de Poincaré  $\Pi$ . Além disto, já que  $\hat{p} > 0$ , segue do **Lema 3.3.1** e do *Teorema de Existência e Unicidade de Soluções* que  $\varphi(\theta, 0, 0) \leq 0$  para todo  $\theta \in [0, \pi]$  (veja as Figuras 3.19 e 3.20). Assim, de (3.12), temos que

$$\varphi(\pi, 0, 0) = -e^{\pi t} \int_0^\pi e^{-t-s} (1 + r \cos s) ds < 0,$$

ou seja,

$$\varphi(\pi, 0, 0) = -e^{-\pi t} \int_0^\pi e^{ts} (1 + r \cos s) ds < 0.$$

De (3.29) e (3.30) isto é equivalente a dizer que

$$-e^{-\pi t} \left( \frac{e^{\pi t} - 1}{t} - rt \frac{e^{\pi t} + 1}{1 + t^2} \right) < 0,$$

resultando que

$$\frac{e^{-\pi t} - 1}{t} + rt \frac{1 + e^{-\pi t}}{1 + t^2} < 0.$$

Portanto,

$$r < \frac{1 + t^2}{t^2} \frac{1 - e^{-\pi t}}{1 + e^{-\pi t}},$$

ou seja,  $r < \hat{r}$ . ■

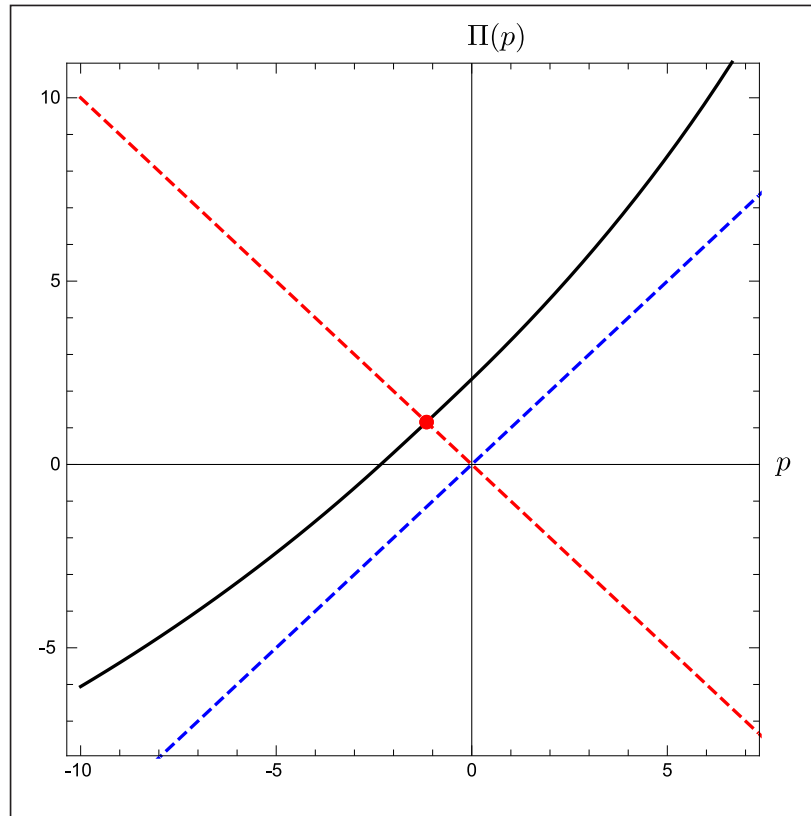


Figura 3.14: A linha preta representa o gráfico da aplicação de Poincaré  $\Pi$ . Os valores dos parâmetros em (3.8) são  $t^+ = -t^- = 1/5$ ,  $a = 1$  e  $r = 10$ . Neste caso,  $r > \hat{r} = 7.909621$ . A linha azul tracejada corresponde à reta  $y = x$  e a linha vermelha tracejada corresponde à reta  $y = -x$ . O ponto vermelho tem coordenadas  $(\hat{p}, -\hat{p})$ .

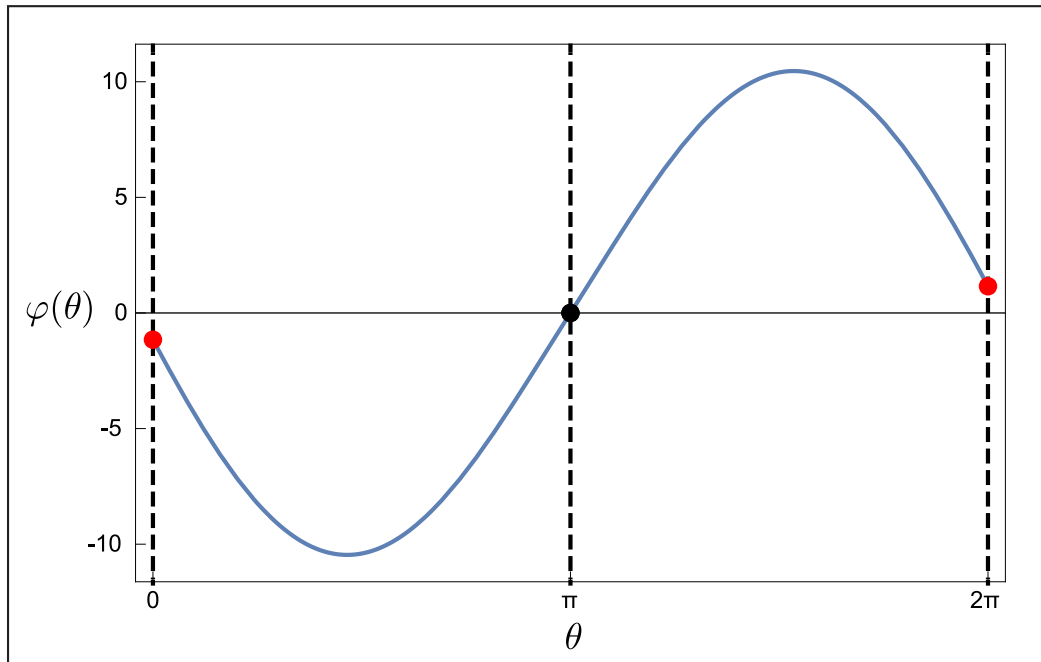


Figura 3.15: Gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, \pi, 0)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , quando  $\hat{p} < 0$ . Os valores dos parâmetros em (3.8) são  $t^+ = -t^- = 1/5$ ,  $a = 1$  e  $r = 10$ . Neste caso,  $r > \hat{r} = 7.909621$ .



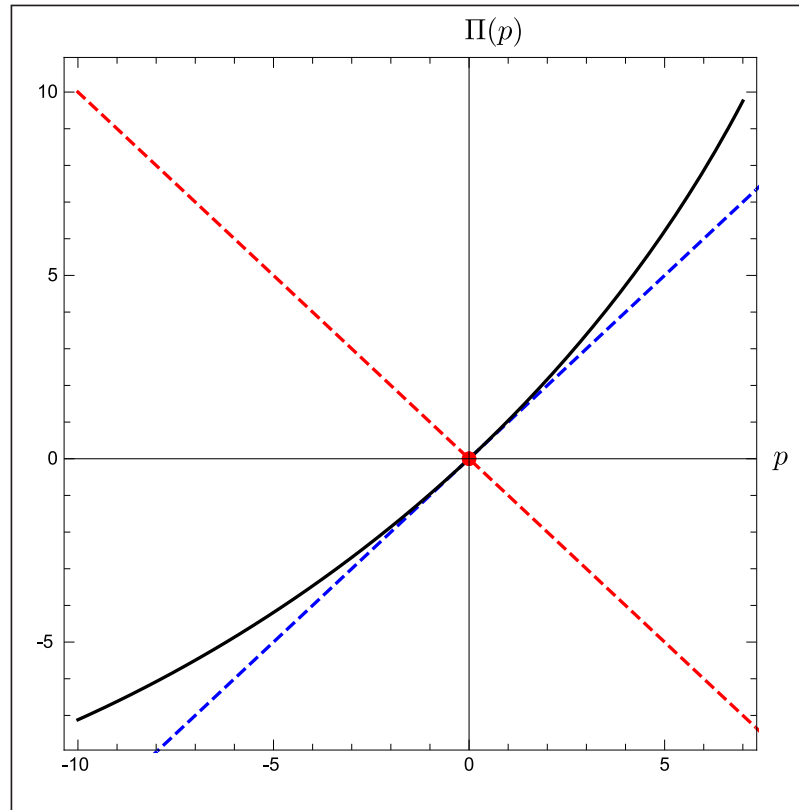


Figura 3.16: A linha preta representa o gráfico da aplicação de Poincaré  $\Pi$ . Os valores dos parâmetros em (3.8) são  $t^+ = -t^- = 1/5$ ,  $a = 1$  e  $r = \hat{r} = 7.909621$ . A linha azul tracejada corresponde à reta  $y = x$  e a linha vermelha tracejada corresponde à reta  $y = -x$ . O ponto vermelho tem coordenadas  $(\hat{p}, -\hat{p}) = (0,0)$ .

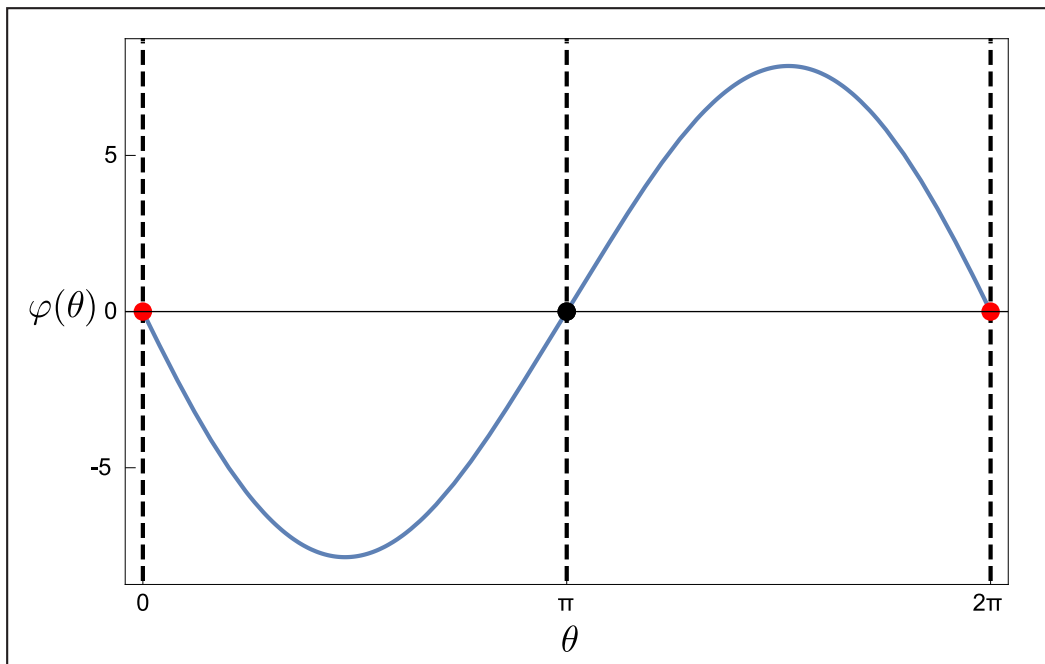


Figura 3.17: Gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, \pi, 0)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , quando  $\hat{p} = 0$ . Os valores dos parâmetros em (3.8) são  $t^+ = -t^- = 1/5$ ,  $a = 1$  e  $r = \hat{r} = 7.909621$ .

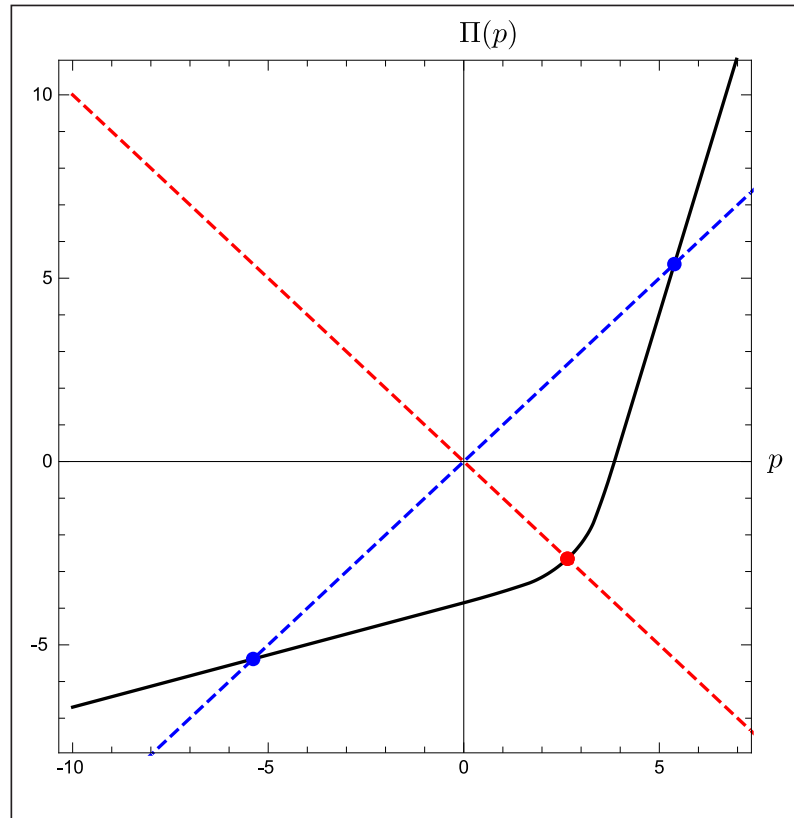


Figura 3.18: A linha preta representa o gráfico da aplicação de Poincaré  $\Pi$ . Os valores dos parâmetros em (3.8) são  $t^+ = -t^- = 1/5$ ,  $a = 1$  e  $r = 2$ . Neste caso,  $r < \hat{r} = 7.909621$ . A linha azul tracejada corresponde à reta  $y = x$  e a linha vermelha tracejada corresponde à reta  $y = -x$ . O ponto vermelho tem coordenadas  $(\hat{p}, -\hat{p})$ .

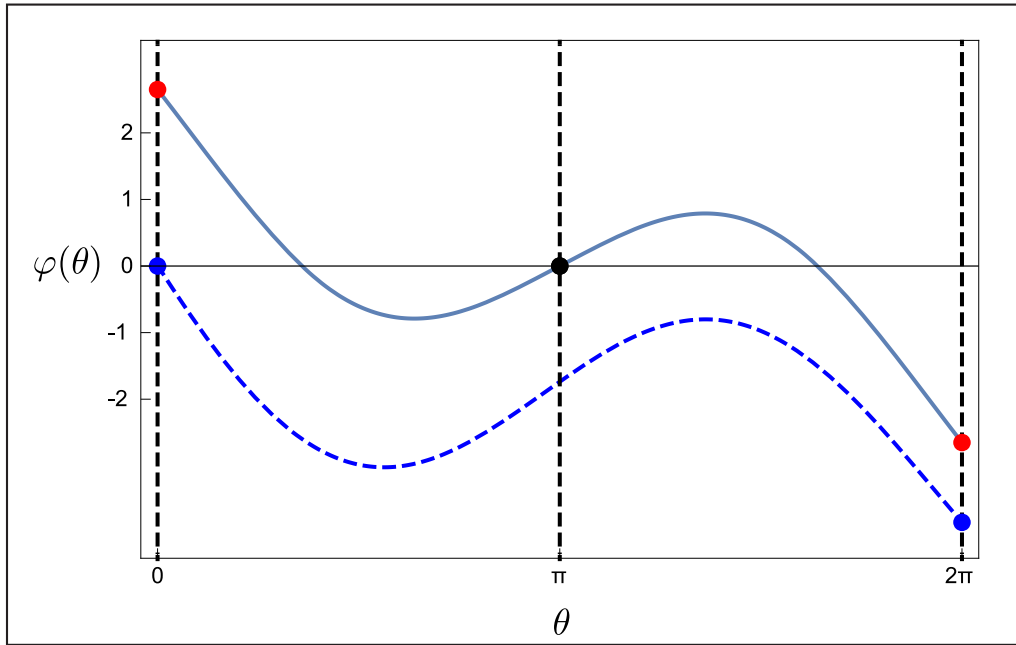


Figura 3.19: A linha azul representa o gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, \pi, 0)$ , quando  $\hat{p} > 0$ , e a linha azul tracejada representa o gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, 0)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Os valores dos parâmetros em (3.8) são  $t^+ = -t^- = 1/5$ ,  $a = 1$  e  $r = 2$ . Neste caso,  $0 < 1 < r < \hat{r} = 7.909621$ .

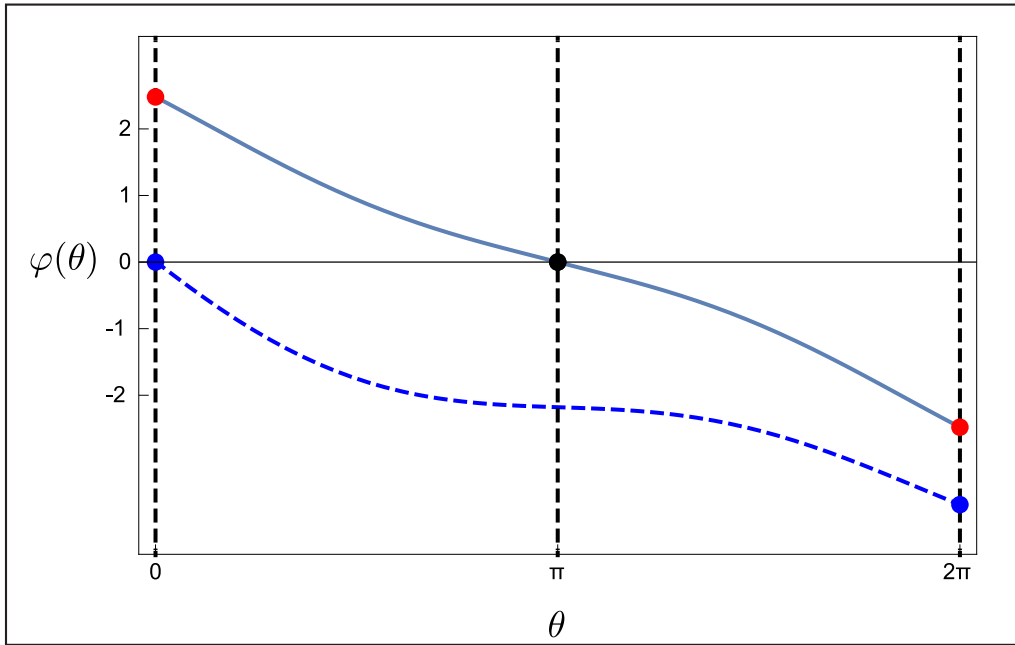


Figura 3.20: A linha azul representa o gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, \pi, 0)$ , quando  $\hat{p} > 0$ , e a linha azul tracejada representa o gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, 0)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Os valores dos parâmetros em (3.8) são  $t^+ = -t^- = 1/5$ ,  $a = 1$  e  $r = 1/2$ . Neste caso,  $0 < r < 1 < \hat{r} = 7.909621$ .

**Corolário 3.4.1.** *Suponha  $a = 1$ ,  $t^+ = -t^- = t > 0$  em (3.8) e seja*

$$\hat{r} = \frac{1+t^2}{t^2} \tanh\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

*Se  $r > \hat{r}$ , isto é, se  $\hat{p} < 0$ , então a aplicação de Poincaré  $\Pi$  satisfaz  $\Pi(p) > p$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração.** Pelo item (a) do Teorema 3.4.1, se  $\hat{p} < 0$ , então a aplicação de Poincaré  $\Pi$  não tem pontos fixos, ou seja,  $d(p) \neq 0$  para todo  $p \in \mathbb{R}$ . Como  $d(\hat{p}) = -2\hat{p} > 0$ , por continuidade, resulta que  $d(p) > 0$  para todo  $p \in \mathbb{R}$ , isto é,  $\Pi(p) > p$ ,  $\forall p \in \mathbb{R}$ . ■

### 3.5 O caso em que $t^+ > 0$ , $t^- < 0$ e $a = 1$

O próximo lema aborda a monotonicidade das soluções de (3.8) com respeito aos parâmetros  $t^+$  e  $t^-$  e será importante na demonstração da proposição a seguir.

**Lema 3.5.1.** *Sejam  $x_1 = x_1(\theta)$  e  $y_1 = y_1(\theta)$  as soluções dos seguintes problemas de Cauchy*

$$\begin{cases} x_1'(\theta) = \lambda x_1 - 1 - r \cos \theta, \\ x_1(\theta_1) = p, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1'(\theta) = \mu y_1 - 1 - r \cos \theta, \\ y_1(\theta_1) = p, \end{cases}$$

sendo  $\lambda, \mu, \theta_1, p \in \mathbb{R}$ . Se  $\lambda < \mu$  e existe  $\theta_2 > \theta_1$  de modo que  $y_1(\theta) < 0$ , para todo  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ , então  $x_1(\theta) > y_1(\theta)$ , para todo  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ .

**Demonstração.** De fato, temos que a função  $z = x_1 - y_1$  satisfaz o problema de Cauchy

$$\begin{cases} z'(\theta) = \lambda z + (\lambda - \mu)y_1(\theta), \\ z(\theta_1) = 0, \end{cases}$$

pois

$$z' = x_1' - y_1' = \lambda x_1 - \mu y_1 = \lambda x_1 - \lambda y_1 + \lambda y_1 - \mu y_1 = \lambda z + (\lambda - \mu)y_1.$$

Pela solução desse problema de Cauchy, envolvendo uma equação diferencial linear, segue que

$$z(\theta) = (\lambda - \mu)e^{\lambda\theta} \int_{\theta_1}^{\theta} e^{-\lambda s} y_1(s) ds > 0, \quad \forall \theta \in (\theta_1, \theta_2),$$

visto que  $\lambda < \mu$  e  $y_1(\theta) < 0$ . Portanto,  $x_1(\theta) > y_1(\theta)$ , para todo  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ . ■

A proposição seguinte refere-se a monotonicidade da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  dependendo dos parâmetros  $t^+$  e  $t^-$ .

**Proposição 3.5.1.** *Suponha que  $a = 1$  e  $t^- < 0 < t^+$  em (3.8), com  $t^+ < |t^-|$ . Considere a equação diferencial reversível*

$$\frac{dx_1}{d\theta} = t^+ |x_1| - 1 - r \cos \theta = \begin{cases} t^+ x_1 - 1 - r \cos \theta, & \text{se } x_1 > 0, \\ -t^+ x_1 - 1 - r \cos \theta, & \text{se } x_1 \leq 0, \end{cases} \quad (3.31)$$

e, sejam  $\mathcal{P}$  e  $\Pi$  as aplicações de Poincaré associadas às equações diferenciais (3.8) e (3.31), respectivamente. Então,  $\Pi(p) \leq \mathcal{P}(p)$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração.** Temos que considerar os diferentes casos conforme o sinal de  $p$  e o número de interseções da solução  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$  de (3.8) com o segmento  $S$ , como indicado no **Corolário 3.3.1**.

Se  $p > 0$  e  $\varphi(\theta, 0, p) \geq 0$ , então segue diretamente que  $\mathcal{P}(p) = \Pi(p)$ .

Se  $p > 0$  e  $\varphi(\theta, 0, p)$  intercepta o segmento  $S$  nos pontos  $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$  (veja a Figura 3.21), resulta que

$$\phi(\theta, 0, p) = \varphi(\theta, 0, p), \quad \forall \theta \in [0, \theta_1],$$

sendo  $\phi = \phi(\theta, 0, p)$  a solução da equação diferencial reversível (3.31). Como  $t^- < -t^+$ , do **Lema 3.5.1** temos que

$$\phi(\theta, 0, p) < \varphi(\theta, 0, p), \quad \forall \theta \in (\theta_1, \theta_2]$$

e, diferentes casos podem surgir dependendo do comportamento de  $\phi = \phi(\theta, 0, p)$ .

(a) Se  $\phi(\theta, 0, p)$  intercepta  $S$  novamente, então o deve fazer em  $\theta = \theta_{2R} > \theta_2$  e, pelo *Teorema de Existência e Unicidade de Soluções*, segue que  $\phi(\theta, 0, p)$  intercepta  $S$  mais uma vez em  $\theta = \theta_{3R} < \theta_3$ , com

$$\phi(\theta, 0, p) < \varphi(\theta, 0, p), \quad \forall \theta \in [\theta_2, \theta_3]$$

e, portanto,

$$\phi(2\pi, 0, p) < \varphi(2\pi, 0, p),$$

ou seja,

$$\Pi(p) < \mathcal{P}(p).$$

Caso contrário, se  $\Pi(p) \geq \mathcal{P}(p)$ , então existiria um valor  $\theta_4 > \theta_3$  de forma que

$$\phi(\theta_4, 0, p) = \varphi(\theta_4, 0, p)$$

e, do **Lema 3.5.1** teríamos que

$$\phi(\theta, 0, p) < \varphi(\theta, 0, p), \quad \forall \theta \in [\theta_4, 2\pi]$$

e, assim, chegamos em uma contradição.

(b) Se  $\phi(\theta, 0, p)$  não intercepta o segmento  $S$  novamente, então, se necessário, usando o **Lema 3.5.1** concluímos que  $\Pi(p) < \mathcal{P}(p)$ .

Observe que os outros casos podem ser mostrados de modo análogo. Note ainda que, se  $p \leq 0$ , segue diretamente do **Lema 3.5.1** e do *Teorema de Existência e Unicidade de Soluções* que

$$\phi(\theta, 0, p) < \varphi(\theta, 0, p), \quad \forall \theta \in (0, 2\pi]$$

e, portanto, também temos que  $\Pi(p) < \mathcal{P}(p)$ . ■

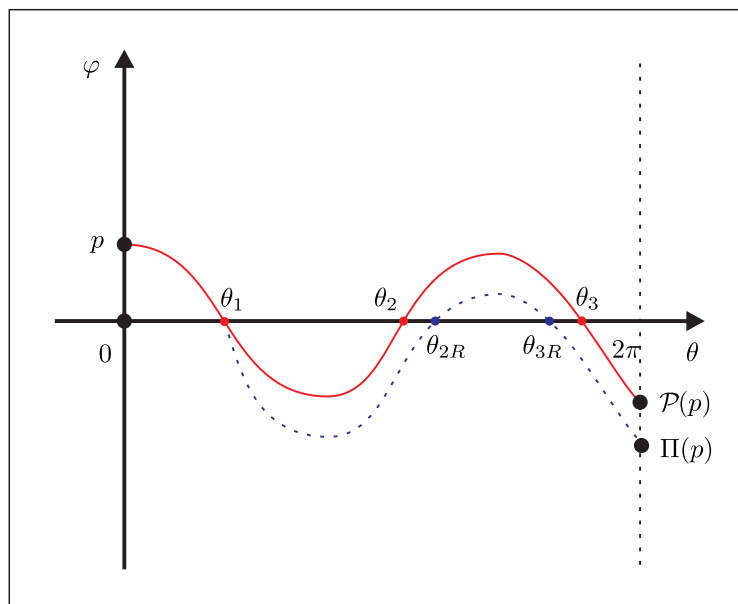


Figura 3.21: A linha vermelha representa o gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$  e a linha azul tracejada representa o gráfico da função  $\phi = \phi(\theta, 0, p)$  quando  $t^- < 0 < t^+$  e  $t^+ < |t^-|$ .

Em seguida, serão apresentados dois lemas que fornecem condições para a existência de soluções periódicas de uma zona.

**Lema 3.5.2.** *Suponha  $a = 1$ ,  $t^+ > 0$  em (3.8) e defina*

$$r_c^+ = \sqrt{1 + \frac{1}{(t^+)^2}} \quad e \quad p^+ = \frac{1}{t^+} + \frac{rt^+}{1 + (t^+)^2} > 0.$$



Se  $0 < r \leq r_c^+$ , então a única solução periódica positiva da equação diferencial (3.8) é  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p^+)$ , a qual é hiperbólica e instável. Caso contrário, se  $r > r_c^+$ , então a equação diferencial (3.8) não possui soluções periódicas positivas.

**Demonstração.** Começaremos estabelecendo as condições necessárias para a existência de soluções periódicas na zona  $x_1 \geq 0$ . Suponha que  $\varphi(\theta, 0, p) \geq 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Logo, de (3.13) segue que  $p = p^+$  é o único ponto fixo da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$ . De fato, de (3.13)

$$\mathcal{P}(p) = e^{2\pi t^+} \left( p - \int_0^{2\pi} e^{-t^+ s} (1 + r \cos s) ds \right) = p$$

se, e somente se,

$$(e^{2\pi t^+} - 1)p = e^{2\pi t^+} \int_0^{2\pi} e^{-t^+ s} (1 + r \cos s) ds,$$

ou seja,

$$p = \frac{e^{2\pi t^+} \int_0^{2\pi} e^{-t^+ s} (1 + r \cos s) ds}{e^{2\pi t^+} - 1}. \quad (3.32)$$

Usando *Integração por Partes* obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (e^{-t^+ s} \cos s) ds &= e^{-t^+ s} \operatorname{sen} s \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} (t^+ e^{-t^+ s} \operatorname{sen} s) ds \\ &= \int_0^{2\pi} (t^+ e^{-t^+ s} \operatorname{sen} s) ds \\ &= -t^+ e^{-t^+ s} \cos s \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} ((t^+)^2 e^{-t^+ s} \cos s) ds, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^{2\pi} (1 + (t^+)^2) (e^{-t^+ s} \cos s) ds = -t^+ e^{-t^+ s} \cos s \Big|_0^{2\pi}$$

e, logo,

$$\int_0^{2\pi} (e^{-t^+ s} \cos s) ds = \frac{-t^+ e^{-t^+ s} \cos s}{1 + (t^+)^2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{-t^+ e^{-2\pi t^+} + t^+}{1 + (t^+)^2}. \quad (3.33)$$

Como

$$\int_0^{2\pi} e^{-t^+ s} ds = \frac{-e^{-t^+ s}}{t^+} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1 - e^{-2\pi t^+}}{t^+}, \quad (3.34)$$

substituindo (3.33) e (3.34) em (3.32) resulta que

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{e^{2\pi t^+} \left( \frac{1 - e^{-2\pi t^+}}{t^+} + r t^+ \frac{1 - e^{-2\pi t^+}}{1 + (t^+)^2} \right)}{e^{2\pi t^+} - 1} \\
 &= \frac{\frac{e^{2\pi t^+} - 1}{t^+} + r t^+ \frac{e^{2\pi t^+} - 1}{1 + (t^+)^2}}{e^{2\pi t^+} - 1} \\
 &= \frac{1}{t^+} + \frac{r t^+}{1 + (t^+)^2} \\
 &= p^+.
 \end{aligned}$$

Agora, vamos determinar o valor de  $r$  tal que  $\varphi(\theta, 0, p^+) \geq 0$  é tangente ao segmento  $S$ . Note que pelo item (c) do **Lema 3.3.1**, isto deve ocorrer em  $\theta = \hat{\theta}_1$ . De (3.12), temos que se

$$\varphi(\hat{\theta}_1, 0, p^+) = e^{\hat{\theta}_1 t^+} \left( p^+ - \int_0^{\hat{\theta}_1} e^{-t^+ s} (1 + r \cos s) ds \right) = 0, \quad (3.35)$$

então

$$p^+ = \int_0^{\hat{\theta}_1} e^{-t^+ s} (1 + r \cos s) ds,$$

ou seja,

$$\frac{1}{t^+} + \frac{r t^+}{1 + (t^+)^2} = \int_0^{\hat{\theta}_1} e^{-t^+ s} (1 + r \cos s) ds. \quad (3.36)$$

Por *Integração por Partes*,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\hat{\theta}_1} (e^{-t^+ s} \cos s) ds &= e^{-t^+ s} \Big|_0^{\hat{\theta}_1} + \int_0^{\hat{\theta}_1} (t^+ e^{-t^+ s} \sin s) ds \\
 &= e^{-t^+ \hat{\theta}_1} \sin \hat{\theta}_1 + \int_0^{\hat{\theta}_1} (t^+ e^{-t^+ s} \sin s) ds \\
 &= e^{-t^+ \hat{\theta}_1} \sin \hat{\theta}_1 - t^+ e^{-t^+ s} \cos s \Big|_0^{\hat{\theta}_1} - \int_0^{\hat{\theta}_1} ((t^+)^2 e^{-t^+ s} \cos s) ds \\
 &= e^{-t^+ \hat{\theta}_1} \sin \hat{\theta}_1 - t^+ e^{-t^+ \hat{\theta}_1} \cos \hat{\theta}_1 + t^+ - \int_0^{\hat{\theta}_1} ((t^+)^2 e^{-t^+ s} \cos s) ds
 \end{aligned}$$

e, assim,

$$\int_0^{\hat{\theta}_1} (e^{-t^+ s} \cos s) ds = \frac{e^{-t^+ \hat{\theta}_1} \sin \hat{\theta}_1 - t^+ e^{-t^+ \hat{\theta}_1} \cos \hat{\theta}_1 + t^+}{1 + (t^+)^2}. \quad (3.37)$$

Já que

$$\int_0^{\hat{\theta}_1} e^{-t^+s} ds = \frac{-e^{-st^+}}{t^+} \Big|_0^{\hat{\theta}_1} = \frac{1 - e^{-t^+\hat{\theta}_1}}{t^+}, \quad (3.38)$$

substituindo (3.37) e (3.38) em (3.36) resulta que

$$\frac{1}{t^+} + \frac{rt^+}{1 + (t^+)^2} = \frac{1 - e^{-t^+\hat{\theta}_1}}{t^+} + r \left( \frac{e^{-t^+\hat{\theta}_1} \operatorname{sen} \hat{\theta}_1 - t^+ e^{-t^+\hat{\theta}_1} \cos \hat{\theta}_1 + t^+}{1 + (t^+)^2} \right),$$

isto é,

$$r \left( \frac{e^{-t^+\hat{\theta}_1} \operatorname{sen} \hat{\theta}_1 - t^+ e^{-t^+\hat{\theta}_1} \cos \hat{\theta}_1}{1 + (t^+)^2} \right) - \frac{e^{-t^+\hat{\theta}_1}}{t^+} = 0.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade anterior por  $e^{-t^+\hat{\theta}_1}$ , segue que

$$r \left( \frac{\operatorname{sen} \hat{\theta}_1 - t^+ \cos \hat{\theta}_1}{1 + (t^+)^2} \right) - \frac{1}{t^+} = 0$$

e, logo,

$$r = \frac{1 + (t^+)^2}{t^+ (\operatorname{sen} \hat{\theta}_1 - t^+ \cos \hat{\theta}_1)}.$$

Visto que do **Lema 3.3.1**

$$\cos \hat{\theta}_1 = \frac{-1}{r},$$

segue que

$$(\operatorname{sen} \hat{\theta}_1)^2 = 1 - (\cos \hat{\theta}_1)^2 = 1 - \frac{1}{r^2} = \frac{r^2 - 1}{r^2},$$

implicando que

$$\operatorname{sen} \hat{\theta}_1 = \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r},$$

pois  $\hat{\theta}_1 \in (\pi/2, \pi)$  e, portanto,  $\operatorname{sen} \hat{\theta}_1 > 0$ . Logo,

$$r = \frac{1 + (t^+)^2}{t^+ \left( \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r} + \frac{t^+}{r} \right)} = \frac{r(1 + (t^+)^2)}{t^+(\sqrt{r^2 - 1} + t^+)}$$

e, dividindo ambos os membros por  $r$  resulta que

$$1 = \frac{(1 + (t^+)^2)}{t^+(\sqrt{r^2 - 1} + t^+)},$$

ou seja,

$$1 + (t^+)^2 = t^+ \sqrt{r^2 - 1} + (t^+)^2,$$

implicando que

$$1 = t^+ \sqrt{r^2 - 1}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos que

$$1 = (t^+)^2 (r^2 - 1),$$

isto é,

$$r = \sqrt{1 + \frac{1}{(t^+)^2}} = r_c^+.$$

Desta forma, afirmamos que  $\varphi(\theta, 0, p^+) \geq 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$  se, e somente se,  $0 < r \leq r_c^+$ . Com efeito, suponha, por contradição, que  $\varphi(\theta, 0, p^+) \geq 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$  e que  $r > r_c^+$ . Como

$$\cos \hat{\theta}_1 = \frac{-1}{r} < 0$$

e

$$\text{sen } \hat{\theta}_1 = \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r} > 0,$$

resulta de (3.37) que

$$\int_0^{\hat{\theta}_1} (e^{-t^+ s} \cos s) ds > 0$$

e, assim,

$$r \int_0^{\hat{\theta}_1} (e^{-t^+ s} \cos s) ds > r_c^+ \int_0^{\hat{\theta}_1} (e^{-t^+ s} \cos s) ds,$$

implicando que

$$e^{\hat{\theta}_1 t^+} \left( p^+ - \int_0^{\hat{\theta}_1} e^{-t^+ s} (1 + r \cos s) ds \right) < e^{\hat{\theta}_1 t^+} \left( p^+ - \int_0^{\hat{\theta}_1} e^{-t^+ s} (1 + r_c^+ \cos s) ds \right),$$

ou seja,

$$\varphi(\hat{\theta}_1, 0, p^+) < 0,$$

o que contradiz o fato de  $\varphi(\theta, 0, p^+) \geq 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Agora, note que se  $\varphi(\theta, 0, p^+) < 0$ , para algum  $\theta \in [0, 2\pi]$ , então pelo **Lema 3.3.1**,  $\varphi(\hat{\theta}_1, 0, p^+) < 0$  (veja a Figura 3.4). Portanto, se  $\varphi(\hat{\theta}_1, 0, p^+) \geq 0$  segue que  $\varphi(\theta, 0, p^+) \geq 0$ , para todo  $\theta \in$

$[0, 2\pi]$ . Deste modo, para mostrar a volta é suficiente mostrar que se  $0 < r \leq r_c^+$ , então  $\varphi(\hat{\theta}_1, 0, p^+) \geq 0$ . De fato, se  $0 < r \leq r_c^+$ , então

$$r \int_0^{\hat{\theta}_1} (e^{-t^+s} \cos s) ds \leq r_c^+ \int_0^{\hat{\theta}_1} (e^{-t^+s} \cos s) ds$$

e, logo,

$$e^{\hat{\theta}_1 t^+} \left( p^+ - \int_0^{\hat{\theta}_1} e^{-t^+s} (1 + r \cos s) ds \right) \geq e^{\hat{\theta}_1 t^+} \left( p^+ - \int_0^{\hat{\theta}_1} e^{-t^+s} (1 + r_c^+ \cos s) ds \right),$$

isto é,

$$\varphi(\hat{\theta}_1, 0, p^+) \geq 0,$$

como queríamos. Finalmente, pela **Proposição 3.3.1**, como  $\tau^+(p^+) = 2\pi$ , segue que

$$\mathcal{P}'(p^+) = e^{(t^+ - t^-)\tau^+(p^+)} e^{2\pi t^-} = e^{2\pi t^+} > 1,$$

pois, por hipótese,  $t^+ > 0$ . Com isto, concluímos que se  $0 < r \leq r_c^+$ , então  $\varphi(\theta, 0, p^+)$  é uma solução periódica positiva, hiperbólica e instável. ■

**Lema 3.5.3.** *Suponha  $a = 1$ ,  $t^- < 0$  em (3.8) e defina*

$$r_c^- = \sqrt{1 + \frac{1}{(t^-)^2}} \quad e \quad p^- = \frac{1}{t^-} + \frac{rt^-}{1 + (t^-)^2} < 0.$$

*Se  $0 < r \leq r_c^-$ , então a única solução periódica negativa da equação diferencial (3.8) é  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p^-)$ , a qual é hiperbólica e assintoticamente estável. Caso contrário, se  $r > r_c^-$ , então a equação diferencial (3.8) não possui soluções periódicas negativas.*

**Demonstração.** A demonstração é similar à demonstração do lema anterior. Primeiramente, vamos estabelecer as condições necessárias para a existência de soluções periódicas na zona  $x_1 \leq 0$ . Supondo que  $\varphi(\theta, 0, p) \leq 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ , obtemos que o único ponto fixo da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  é  $p = p^-$ . De fato, com cálculos análogos aos que foram feitos no lema anterior, temos de (3.14) que

$$\mathcal{P}(p) = e^{2\pi t^-} \left( p - \int_0^{2\pi} e^{-t^-s} (1 + r \cos s) ds \right) = p$$

se, e somente se,

$$p = \frac{1}{t^-} + \frac{rt^-}{1 + (t^-)^2} = p^-.$$

Agora, vamos determinar o valor de  $r$  tal que  $\varphi(\theta, 0, p) \leq 0$  é tangente ao segmento  $S$ .

Observe que pelo item (c) do **Lema 3.3.1**, isto deve ocorrer em  $\theta = \hat{\theta}_2$ . Deste modo, segue de (3.12) que

$$\varphi(\hat{\theta}_2, 0, p^-) = e^{\hat{\theta}_2 t^-} \left( p^- - \int_0^{\hat{\theta}_2} e^{-t^- s} (1 + r \cos s) ds \right) = 0,$$

implica que

$$p^- = \frac{1}{t^-} + \frac{rt^-}{1 + t^-} = \int_0^{\hat{\theta}_2} e^{-t^- s} (1 + r \cos s) ds < 0. \quad (3.39)$$

Como em (3.37), temos que

$$\int_0^{\hat{\theta}_2} (e^{-t^- s} \cos s) ds = \frac{e^{-t^- \hat{\theta}_2} \sin \hat{\theta}_2 - t^- e^{-t^- \hat{\theta}_2} \cos \hat{\theta}_2 + t^-}{1 + (t^-)^2} \quad (3.40)$$

e, visto que

$$\int_0^{\hat{\theta}_2} e^{-t^- s} ds = \frac{-e^{-st^-}}{t^-} \Big|_0^{\hat{\theta}_2} = \frac{1 - e^{-t^- \hat{\theta}_2}}{t^-}, \quad (3.41)$$

substituindo (3.40) e (3.41) em (3.39), resulta que

$$\frac{1}{t^-} + \frac{rt^-}{1 + (t^-)^2} = \frac{1 - e^{-t^- \hat{\theta}_2}}{t^-} + r \left( \frac{e^{-t^- \hat{\theta}_2} \sin \hat{\theta}_2 - t^- e^{-t^- \hat{\theta}_2} \cos \hat{\theta}_2 + t^-}{1 + (t^-)^2} \right),$$

isto é,

$$r \left( \frac{e^{-t^- \hat{\theta}_2} \sin \hat{\theta}_2 - t^- e^{-t^- \hat{\theta}_2} \cos \hat{\theta}_2}{1 + (t^-)^2} \right) - \frac{e^{-t^- \hat{\theta}_2}}{t^-} = 0.$$

Dividindo ambos os membros por  $e^{-t^- \hat{\theta}_2}$ , segue que

$$r \left( \frac{\sin \hat{\theta}_2 - t^- \cos \hat{\theta}_2}{1 + (t^-)^2} \right) - \frac{1}{t^-} = 0,$$

ou seja,

$$r = \frac{1 + (t^-)^2}{t^- (\sin \hat{\theta}_2 - t^- \cos \hat{\theta}_2)}.$$

Conforme o **Lema 3.3.1**,

$$\cos \hat{\theta}_2 = \cos(2\pi - \hat{\theta}_1) = \cos \hat{\theta}_1 = \frac{-1}{r}$$

e

$$\text{sen } \hat{\theta}_2 = \text{sen}(2\pi - \hat{\theta}_1) = \text{sen}(2\pi) \cos \hat{\theta}_1 - \cos(2\pi) \text{sen } \hat{\theta}_1 = -\text{sen } \hat{\theta}_1 = -\frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r}.$$

Logo,

$$r = \frac{1 + (t^-)^2}{t^- \left( -\frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r} + \frac{t^-}{r} \right)} = \frac{r(1 + (t^-)^2)}{(t^-)^2 - t^- \sqrt{r^2 - 1}}$$

e, dividindo ambos os membros por  $r$ , segue que

$$(t^-)^2 - t^- \sqrt{r^2 - 1} = 1 + (t^-)^2,$$

ou seja,

$$-t^- \sqrt{r^2 - 1} = 1.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, resulta que

$$(t^-)^2 (r^2 - 1) = 1,$$

isto é,

$$r = \sqrt{1 + \frac{1}{(t^-)^2}} = r_c^-.$$

Com isto, afirmamos que  $\varphi(\theta, 0, p^-) \leq 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$  se, e somente se,  $0 < r \leq r_c^-$ . Com efeito, suponha por contradição que  $\varphi(\theta, 0, p^-) \leq 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$  e que  $r > r_c^-$ . De (3.39), temos que

$$\int_0^{\hat{\theta}_2} (e^{-t^-s} \cos s) ds < 0$$

e, assim,

$$r \int_0^{\hat{\theta}_2} (e^{-t^-s} \cos s) ds < r_c^- \int_0^{\hat{\theta}_2} (e^{-t^-s} \cos s) ds,$$

resultando que

$$e^{\hat{\theta}_2 t^-} \left( p^- - \int_0^{\hat{\theta}_2} e^{-t^-s} (1 + r \cos s) ds \right) > e^{\hat{\theta}_2 t^-} \left( p^- - \int_0^{\hat{\theta}_2} e^{-t^-s} (1 + r_c^- \cos s) ds \right),$$

ou seja,

$$\varphi(\hat{\theta}_2, 0, p^-) > 0,$$

contrariando o fato de  $\varphi(\theta, 0, p^-) \leq 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Para mostrar a volta, vale ressaltar que se  $\varphi(\theta, 0, p^-) > 0$ , para algum  $\theta \in [0, 2\pi]$ , então pelo **Lema 3.3.1**,  $\varphi(\hat{\theta}_2, 0, p^-) > 0$  (veja a Figura 3.5). Portanto, se  $\varphi(\hat{\theta}_2, 0, p^-) \leq 0$ , resulta que  $\varphi(\theta, 0, p^-) \leq 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Desta forma, basta mostrar que se  $0 < r \leq r_c^-$ , então  $\varphi(\hat{\theta}_2, 0, p^-) \leq 0$ . De fato, se  $0 < r \leq r_c^-$ , segue que

$$r \int_0^{\hat{\theta}_2} (e^{-t-s} \cos s) ds \geq r_c^- \int_0^{\hat{\theta}_2} (e^{-t-s} \cos s) ds$$

e, logo,

$$e^{\hat{\theta}_2 t^-} \left( p^- - \int_0^{\hat{\theta}_2} e^{-t-s} (1 + r \cos s) ds \right) \leq e^{\hat{\theta}_2 t^-} \left( p^- - \int_0^{\hat{\theta}_2} e^{-t-s} (1 + r_c^- \cos s) ds \right),$$

isto é,

$$\varphi(\hat{\theta}_2, 0, p^-) \leq 0,$$

como desejávamos.

Além disto, visto que  $\tau^+(p^-) = 0$ , segue da **Proposição 3.3.1** que

$$\mathcal{P}'(p^-) = e^{(t^+ - t^-)\tau^+(p^-)} e^{2\pi t^-} = e^{2\pi t^-} < 1,$$

pois, por hipótese,  $t^- < 0$ . Deste modo, concluímos que se  $0 < r \leq r_c^-$ , então  $\varphi(\theta, 0, p^-)$  é uma solução periódica negativa, hiperbólica e assintoticamente estável. ■

O próximo resultado é consequência direta dos **Lemas 3.5.2** e **3.5.3**.

**Corolário 3.5.1.** *Suponha  $a = 1$ ,  $t^- < 0 < t^+$  em (3.8) e seja  $r_c = \min\{r_c^-, r_c^+\}$ . Se  $0 < r \leq r_c$ , então a equação diferencial (3.8) tem pelo menos duas soluções periódicas, a saber,  $\varphi(\theta, 0, p^-) \leq 0$  e  $\varphi(\theta, 0, p^+) \geq 0$ .*

O resultado a seguir refere-se a uma propriedade importante da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  e será útil na demonstração da próxima proposição.

**Lema 3.5.4.** *Para qualquer ponto  $p_0 \in \mathbb{R}$ , o gráfico da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  está acima da reta tangente ao gráfico de  $\mathcal{P}$  no ponto  $(p_0, \mathcal{P}(p_0))$ .*



**Demonstração.** Tomando  $p_0 \in \mathbb{R}$  qualquer e definindo

$$\begin{aligned} G: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto G(p) = \mathcal{P}(p) - \mathcal{P}(p_0) - \mathcal{P}'(p_0)(p - p_0), \end{aligned} \tag{3.42}$$

queremos mostrar que  $G(p) \geq 0$  para todo  $p \in \mathbb{R}$ . De fato, sendo  $G'(p) = \mathcal{P}'(p) - \mathcal{P}'(p_0)$  e  $\mathcal{P}'$  não decrescente, resulta que se  $p > p_0$ , então  $G'(p) \geq 0$ , ou seja,  $G$  é não decrescente e, logo,  $G(p) \geq G(p_0) = 0$ . Por outro lado, se  $p < p_0$ , segue que  $G'(p) \leq 0$ , isto é,  $G$  é não crescente e, assim,  $G(p) \geq G(p_0) = 0$ . Portanto,  $G(p) \geq 0$  para todo  $p \in \mathbb{R}$ . ■

A proposição a seguir é uma extensão do **Teorema 3.4.1**.

**Proposição 3.5.2.** *Suponha  $a = 1$ ,  $t^- < 0 < t^+$  e  $t^+ < |t^-|$  em (3.8). Sejam*

$$\begin{aligned} r_c^- &= \sqrt{1 + \frac{1}{(t^-)^2}}, & r_c^+ &= \sqrt{1 + \frac{1}{(t^+)^2}}, \\ p^- &= \frac{1}{t^-} + \frac{rt^-}{1 + (t^-)^2} < 0, & p^+ &= \frac{1}{t^+} + \frac{rt^+}{1 + (t^+)^2} > 0, \end{aligned}$$

como nos **Lemas 3.5.2 e 3.5.3** e,

$$r^+ = \frac{1 + (t^+)^2}{(t^+)^2} \tanh\left(\frac{\pi t^+}{2}\right).$$

*Temos que:*

- (a) *Se  $0 < r \leq r_c^-$ , então a equação diferencial (3.8) possui exatamente duas soluções periódicas, a saber,  $\varphi(\theta, 0, p^+) \geq 0$  e  $\varphi(\theta, 0, p^-) \leq 0$ . Ambas são hiperbólicas e de uma zona, sendo  $\varphi(\theta, 0, p^+)$  instável e  $\varphi(\theta, 0, p^-)$  assintoticamente estável;*
- (b) *Se  $r > r^+$ , então a equação diferencial (3.8) não possui soluções periódicas.*

**Demonstração.**

(a) Visto que  $t^+ < |t^-|$ , segue que

$$(t^+)^2 < (t^-)^2$$

e, portanto,

$$1 + \frac{1}{(t^+)^2} > 1 + \frac{1}{(t^-)^2},$$

resultando que  $r_c^+ > r_c^-$ . Assim, do **Corolário 3.5.1**, resulta que se  $0 < r \leq r_c^-$ , então a equação diferencial (3.8) possui pelo menos duas soluções periódicas, sendo elas  $\varphi(\theta, 0, p^+) \geq 0$  e  $\varphi(\theta, 0, p^-) \leq 0$ . Afirmamos que a equação diferencial (3.8) tem exatamente essas duas soluções periódicas. De fato, já que  $\mathcal{P}'$  é não decrescente,  $\varphi(\theta, 0, p^+)$  é uma solução periódica hiperbólica instável e  $\varphi(\theta, 0, p^-)$  é uma solução periódica hiperbólica assintoticamente estável, a única possibilidade é termos mais uma solução periódica semiestável, ou seja, existir  $\bar{p} \in (p^-, p^+)$  satisfazendo  $\mathcal{P}(\bar{p}) = \bar{p}$  e  $\mathcal{P}'(\bar{p}) = 1$ . Sendo assim, suponha por absurdo que exista tal  $\bar{p}$ . Aplicando o **Lema 3.5.4** a  $p_0 = \bar{p}$ , temos que para todo  $p \in \mathbb{R}$ ,

$$G(p) = \mathcal{P}(p) - \mathcal{P}(\bar{p}) - \mathcal{P}'(\bar{p})(p - \bar{p}) = \mathcal{P}(p) - \bar{p} - p + \bar{p} = \mathcal{P}(p) - p \geq 0,$$

isto é,  $\mathcal{P}(p) \geq p$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$ . Desta forma, todo ponto fixo da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  deve ser semiestável, o que contradiz o fato de  $p^+$  ser um ponto fixo hiperbólico instável e  $p^-$  ser um ponto fixo hiperbólico assintoticamente estável.

(b) Consideremos novamente a equação diferencial reversível

$$\frac{dx_1}{d\theta} = t^+|x_1| - 1 - r \cos \theta = \begin{cases} t^+x_1 - 1 - r \cos \theta, & \text{se } x_1 > 0, \\ -t^+x_1 - 1 - r \cos \theta, & \text{se } x_1 \leq 0, \end{cases}$$

e seja  $\Pi$  a aplicação de Poincaré associada à ela. Da **Proposição 3.5.1**, temos que  $\mathcal{P}(p) \geq \Pi(p)$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$  e, do **Corolário 3.4.1**, se  $r > r^+$ , então  $\Pi(p) > p$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$ . Portanto, se  $r > r^+$  segue que  $\mathcal{P}(p) > p$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$  e, logo, a equação diferencial (3.8) não possui soluções periódicas. ■

A proposição anterior possui uma dual, cuja prova necessita de algumas adaptações no **Lema 3.5.1** e na **Proposição 3.5.1**.

**Lema 3.5.5.** *Sejam  $x_1 = x_1(\theta)$  e  $y_1 = y_1(\theta)$  as soluções dos seguintes problemas de Cauchy*

$$\begin{cases} x_1'(\theta) = \lambda x_1 - 1 - r \cos \theta, \\ x_1(\theta_1) = p, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1'(\theta) = \mu y_1 - 1 - r \cos \theta, \\ y_1(\theta_1) = p, \end{cases}$$

sendo  $\lambda, \mu, \theta_1, p \in \mathbb{R}$ . Se  $\lambda < \mu$  e existe  $\theta_2 > \theta_1$  de modo que  $x_1(\theta) > 0$ , para todo  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ , então  $y_1(\theta) > x_1(\theta)$ , para todo  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ .

**Demonstração.** De fato, note que a função  $z = y_1 - x_1$  satisfaz o problema de Cauchy

$$\begin{cases} z'(\theta) = \mu z + (\mu - \lambda)x_1(\theta), \\ z(\theta_1) = 0, \end{cases}$$

pois

$$z' = y_1' - x_1' = \mu y_1 - \lambda x_1 = \mu y_1 - \mu x_1 + \mu x_1 - \lambda x_1 = \mu z + (\mu - \lambda)x_1.$$

Pela solução deste problema de Cauchy, o qual envolve uma equação diferencial linear, resulta que

$$z(\theta) = (\mu - \lambda)e^{\mu\theta} \int_{\theta_1}^{\theta} e^{-\mu s} x_1(s) ds > 0, \quad \forall \theta \in (\theta_1, \theta_2),$$

já que  $\lambda < \mu$  e  $x_1(\theta) > 0$ . Portanto,  $y_1(\theta) > x_1(\theta)$ , para todo  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ . ■

**Proposição 3.5.3.** *Suponha que  $a = 1$  e  $t^- < 0 < t^+$  em (3.8), com  $|t^-| < t^+$ . Considere a equação diferencial reversível*

$$\frac{dx_1}{d\theta} = |t^- x_1| - 1 - r \cos \theta = \begin{cases} -t^- x_1 - 1 - r \cos \theta, & \text{se } x_1 > 0, \\ t^- x_1 - 1 - r \cos \theta, & \text{se } x_1 \leq 0, \end{cases} \quad (3.43)$$

e, sejam  $\mathcal{P}$  e  $\Pi$  as aplicações de Poincaré associadas às equações diferenciais (3.8) e (3.43), respectivamente. Então,  $\Pi(p) \leq \mathcal{P}(p)$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração.** Conforme o **Corolário 3.3.1**, vamos considerar o sinal de  $p$  e o número de interseções da solução  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$  da equação diferencial (3.8) com o segmento  $S$ .

Se  $p \leq 0$  e  $\varphi(\theta, 0, p) \leq 0$ , então  $\mathcal{P}(p) = \Pi(p)$ .

Se  $p \leq 0$  e  $\varphi(\theta, 0, p)$  intercepta  $S$  nos pontos  $\theta_1 < \theta_2$  (veja a Figura 3.22), temos que

$$\varphi(\theta, 0, p) = \phi(\theta, 0, p), \quad \forall \theta \in [0, \theta_1],$$

sendo  $\phi = \phi(\theta, 0, p)$  a solução da equação diferencial reversível (3.43). Visto que  $-t^- < t^+$ , do **Lema 3.5.5**, segue que

$$\phi(\theta, 0, p) < \varphi(\theta, 0, p), \quad \forall \theta \in (\theta_1, \theta_2]$$

e, logo,  $\phi(\theta, 0, p)$  intercepta  $S$  novamente em  $\theta = \theta_{2R} < \theta_2$ . Portanto, pelo *Teorema de Existência e Unicidade de Soluções* obtemos que

$$\phi(2\pi, 0, p) < \varphi(2\pi, 0, p),$$

ou seja,

$$\Pi(p) < \mathcal{P}(p).$$

Note que a demonstração dos demais casos é análoga e, se  $p > 0$ , resulta do **Lema 3.5.5** e do *Teorema de Existência e Unicidade de Soluções* que

$$\phi(\theta, 0, p) < \varphi(\theta, 0, p), \quad \forall \theta \in (0, 2\pi]$$

e, assim, concluímos que  $\Pi(p) < \mathcal{P}(p)$ . ■

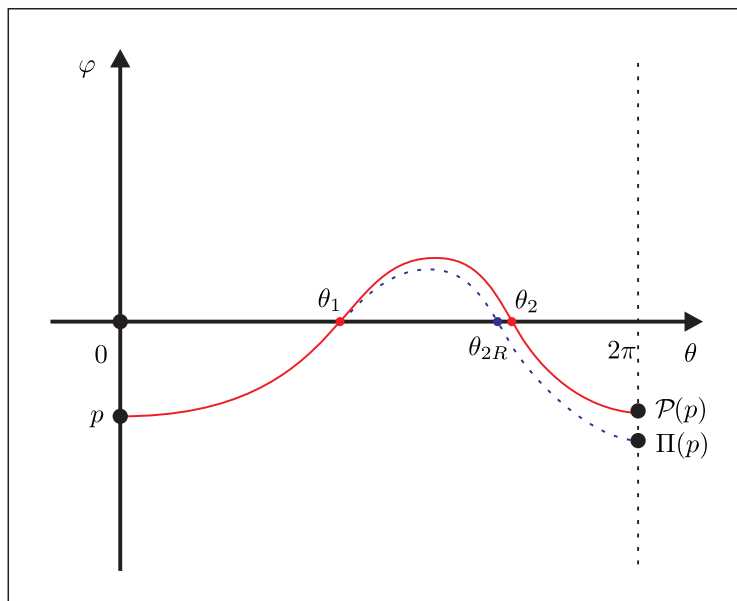


Figura 3.22: A linha vermelha representa o gráfico da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, p)$  e a linha azul tracejada representa o gráfico da função  $\phi = \phi(\theta, 0, p)$  quando  $t^- < 0 < t^+$  e  $|t^-| < t^+$ .

**Proposição 3.5.4.** *Suponha  $a = 1$ ,  $t^- < 0 < t^+$  e  $|t^-| < t^+$  em (3.8). Sejam*

$$r_c^- = \sqrt{1 + \frac{1}{(t^-)^2}}, \quad r_c^+ = \sqrt{1 + \frac{1}{(t^+)^2}},$$

$$p^- = \frac{1}{t^-} + \frac{rt^-}{1 + (t^-)^2} < 0, \quad p^+ = \frac{1}{t^+} + \frac{rt^+}{1 + (t^+)^2} > 0,$$

como nos **Lemas 3.5.2** e **3.5.3** e,

$$r^- = \frac{1 + (t^-)^2}{(t^-)^2} \tanh\left(\frac{\pi|t^-|}{2}\right).$$

Assim:

- (a) *Se  $0 < r \leq r_c^+$ , então a equação diferencial (3.8) possui exatamente duas soluções periódicas, a saber,  $\varphi(\theta, 0, p^+) \geq 0$  e  $\varphi(\theta, 0, p^-) \leq 0$ . Ambas são hiperbólicas e de uma zona, sendo  $\varphi(\theta, 0, p^+)$  instável e  $\varphi(\theta, 0, p^-)$  assintoticamente estável;*
- (b) *Se  $r > r^-$ , então a equação diferencial (3.8) não possui soluções periódicas.*

**Demonstração.**

(a) Como  $|t^-| < t^+$ , segue que

$$(t^-)^2 < (t^+)^2$$

e, logo,

$$1 + \frac{1}{(t^-)^2} > 1 + \frac{1}{(t^+)^2},$$

ou seja,  $r_c^- > r_c^+$ . Assim, pelo **Corolário 3.5.1**, sabemos que se  $0 < r \leq r_c^+$ , então a equação diferencial (3.8) tem pelo menos duas soluções periódicas, sendo elas  $\varphi(\theta, 0, p^+) \geq 0$  e  $\varphi(\theta, 0, p^-) \leq 0$ . Afirmamos que existem apenas essas duas soluções periódicas. De fato, devido à monotonicidade de  $\mathcal{P}'$ , se houvesse outra solução periódica, tal solução deveria ser semiestável, isto é, existiria  $\bar{p} \in (p^-, p^+)$  com  $\mathcal{P}(\bar{p}) = \bar{p}$  e  $\mathcal{P}'(\bar{p}) = 1$ . Suponha, por absurdo, que exista tal  $\bar{p}$ . Deste modo, aplicando o **Lema 3.5.4** a  $p_0 = \bar{p}$ , resulta que para todo  $p \in \mathbb{R}$ ,

$$G(p) = \mathcal{P}(p) - \mathcal{P}(\bar{p}) - \mathcal{P}'(\bar{p})(p - \bar{p}) = \mathcal{P}(p) - \bar{p} - p + \bar{p} = \mathcal{P}(p) - p \geq 0,$$

ou seja,  $\mathcal{P}(p) \geq p$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$ . Com isto, concluímos que todo ponto fixo da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  deve ser semiestável, contrariando o fato de  $p^+$  ser um ponto fixo hiperbólico instável e  $p^-$  ser um ponto fixo hiperbólico assintoticamente estável.

(b) Consideremos a equação diferencial reversível

$$\frac{dx_1}{d\theta} = |t^- x_1| - 1 - r \cos \theta = \begin{cases} -t^- x_1 - 1 - r \cos \theta, & \text{se } x_1 > 0, \\ t^- x_1 - 1 - r \cos \theta, & \text{se } x_1 \leq 0, \end{cases}$$

e seja  $\Pi$  a aplicação de Poincaré associada à ela. Da **Proposição 3.5.3** temos que  $\mathcal{P}(p) \geq \Pi(p)$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$  e, do **Corolário 3.4.1**, se  $r > r^-$ , então  $\Pi(p) > p$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$ . Portanto, se  $r > r^-$  resulta que  $\mathcal{P}(p) > p$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$  e, conseqüentemente, a equação diferencial (3.8) não possui soluções periódicas. ■

Sob as hipóteses do **Teorema 3.4.1**, a equação diferencial (3.8) é reversível e tem uma bifurcação sela-nó de soluções periódicas para  $r = \hat{r}$ . As **Proposições 3.5.2** e **3.5.4** sugerem a existência de tal bifurcação para o caso não reversível, ou seja, que existe pelo menos um valor  $\tilde{r} > 0$  (dependendo de  $t^+$  e  $t^-$ ) de modo que a equação diferencial (3.8) tenha uma bifurcação sela-nó de soluções periódicas. Neste sentido, alguns resultados serão apresentados para auxiliar na construção da existência, unicidade e do valor de  $\tilde{r}$ .

**Lema 3.5.6.** *Para cada  $r > 0$ , a função*

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto d(p) = \mathcal{P}(p) - p \end{aligned}$$

*é convexa.*

**Demonstração.** Temos que mostrar que para qualquer ponto  $p_0 \in \mathbb{R}$ , o gráfico da função  $d$  está acima da reta tangente ao gráfico de  $d$  no ponto  $(p_0, d(p_0))$ . De fato, tomando  $p_0 \in \mathbb{R}$  qualquer e definindo

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto f(p) = d(p) - d(p_0) - d'(p_0)(p - p_0), \end{aligned}$$

queremos mostrar que  $f(p) \geq 0$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$ . Com efeito, sendo

$$f'(p) = d'(p) - d'(p_0) = \mathcal{P}'(p) - 1 - (\mathcal{P}'(p_0) - 1) = \mathcal{P}'(p) - \mathcal{P}'(p_0),$$

segue que se  $p > p_0$ , como  $\mathcal{P}'$  é não decrescente, resulta que  $f'(p) \geq 0$ , ou seja,  $f$  é não decrescente e, logo,  $f(p) \geq f(p_0) = 0$ . Se  $p < p_0$ , visto que  $\mathcal{P}'$  é não decrescente, segue que  $f'(p) \leq 0$ , isto é,  $f$  é não crescente e, assim,  $f(p) \geq f(p_0) = 0$ . Desta forma, concluímos que  $f(p) \geq 0$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$ . ■

No que segue, vamos destacar que  $d$ ,  $\mathcal{P}$  e  $\tau^+$  também são funções de  $r$ , denotando  $d$  por  $d(p, r)$ ,  $\mathcal{P}$  por  $\mathcal{P}(p, r)$  e  $\tau^+$  por  $\tau^+(p, r)$ . As expressões  $d'(p, r)$  e  $\mathcal{P}'(p, r)$  denotarão a derivada da função  $d$  e da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  em relação a  $p$ , respectivamente.

**Lema 3.5.7.** *Para cada  $r > 0$ , existe um único ponto  $p = \rho(r)$  satisfazendo  $d'(\rho(r), r) = 0$ . Além disto,  $p = \rho(r)$  é ponto de mínimo global da função  $d$ .*

**Demonstração.** De fato, para cada  $r > 0$ , se  $p_1 > 0$  é suficientemente grande, então  $\varphi(\theta, 0, p_1) \geq 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$  e, logo,  $\tau^+(p_1, r) = 2\pi$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(p_1, r) &= e^{(t^+ - t^-)\tau^+(p_1, r)} e^{2\pi t^-} \\ &= e^{(t^+ - t^-)2\pi} e^{2\pi t^-} \\ &= e^{2\pi t^+} > 1, \end{aligned}$$

pois  $t^+ > 0$ . Portanto,  $d'(p_1, r) = \mathcal{P}'(p_1, r) - 1 > 0$ .

Se  $p_2 < 0$  é suficientemente grande em módulo, então  $\varphi(\theta, 0, p_2) \leq 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$  e  $\tau^+(p_2, r) = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(p_2, r) &= e^{(t^+ - t^-)\tau^+(p_2, r)} e^{2\pi t^-} \\ &= e^{2\pi t^-} < 1, \end{aligned}$$

pois  $t^- < 0$  e, assim,  $d'(p_2, r) = \mathcal{P}'(p_2, r) - 1 < 0$ . Deste modo, pelo *Teorema do Valor Intermediário*, existe  $p = \rho(r) \in (p_1, p_2)$  tal que  $d'(\rho(r), r) = 0$ . Observe que, como  $\mathcal{P}$  é continuamente diferenciável em relação a  $p$ , segue que  $d$  também é. Com isto, temos que  $p = \rho(r)$  é um ponto crítico da função  $d$ . Visto que  $d$  é convexa, sabemos que se ela tem

um ponto de mínimo local, então esse ponto de mínimo é global. Portanto,  $p = \rho(r)$  é um ponto de mínimo global da função  $d$  e é o único satisfazendo  $d'(\rho(r), r) = 0$ . ■

Do lema anterior resulta que para cada  $r > 0$  está associado um único ponto  $p = \rho(r)$  de modo que  $d'(\rho(r), r) = 0$ . Assim, fica bem definida a função

$$\begin{aligned} \rho : (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto \rho(r), \end{aligned}$$

sendo  $\rho(r)$  o ponto em que  $d'(\rho(r), r) = 0$ , ou seja, o ponto de mínimo global da função  $d$ . Afirmamos que  $\rho$  é contínua. Com efeito, suponha por absurdo que  $\rho$  não é contínua em algum  $r_0 > 0$  fixado, porém arbitrário. Logo, existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$ , existe  $r > 0$  satisfazendo

$$|r - r_0| < \delta \quad e \quad |\rho(r) - \rho(r_0)| > \varepsilon.$$

Para  $\delta = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , existe uma sequência  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$|r_n - r_0| < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

e

$$|\rho(r_n) - \rho(r_0)| > \varepsilon.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_0.$$

A sequência de números reais  $\{\rho(r_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência monótona. Seja  $\{\rho(r_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$  essa subsequência. Logo, há dois casos:

(i) Se  $\{\rho(r_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$  é limitada e, portanto, convergente, isto é, existe  $q \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(r_{n_k}) = q,$$

então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\rho(r_{n_k}) - \rho(r_0)| = |q - \rho(r_0)| > \varepsilon,$$



ou seja,  $q \neq \rho(r_0)$ . Como

$$d(\rho(r_0), r_{n_k}) > d(\rho(r_{n_k}), r_{n_k}), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

pois  $d(\rho(r_{n_k}), r_{n_k})$  é ponto de mínimo global da função  $d$ , pela continuidade da função  $d$  segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(\rho(r_0), r_{n_k}) > \lim_{k \rightarrow \infty} d(\rho(r_{n_k}), r_{n_k}),$$

ou seja,

$$d(\rho(r_0), r_0) \geq d(q, r_0),$$

o que contradiz o fato de  $d(\rho(r_0), r_0)$  ser um ponto de mínimo global da função  $d$ .

**(ii)** Se  $\{\rho(r_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$  não é limitada, resulta que para  $k > 0$  suficientemente grande,

$$\rho(r_{n_k}) > \rho(r_0) + \varepsilon > \rho(r_0).$$

Assim, sendo  $d$  uma função convexa e  $d(\rho(r_{n_k}), r_{n_k})$  ponto de mínimo global da função  $d$ , segue que  $d$  é decrescente no intervalo  $(-\infty, \rho(r_{n_k}))$  e, portanto,

$$d(\rho(r_0), r_{n_k}) > d(\rho(r_0) + \varepsilon, r_{n_k}).$$

Logo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(\rho(r_0), r_{n_k}) > \lim_{k \rightarrow \infty} d(\rho(r_0) + \varepsilon, r_{n_k}),$$

isto é,

$$d(\rho(r_0), r_0) \geq d(\rho(r_0) + \varepsilon, r_0),$$

o que contradiz a minimalidade de  $d(\rho(r_0), r_0)$ .

De **(i)** e **(ii)** concluímos que  $\rho$  é contínua em  $(0, \infty)$ . Em outras palavras, mostramos que se  $r$  está arbitrariamente próximo de  $r_0$ , então o ponto de mínimo global  $p = \rho(r)$  está arbitrariamente próximo do ponto de mínimo global  $p_0 = \rho(r_0)$  da função  $d$ .

Por outro lado, fica bem definida a função

$$\begin{aligned} \psi : (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto \psi(r) = \min \{d(p, r) : p \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

já que pelo **Lema 3.5.7**, para cada  $r > 0$  existe um único ponto  $p = \rho(r)$  o qual é ponto de mínimo local e, portanto, global da função convexa  $d$ . Assim,

$$\psi(r) = d(\rho(r), r), \quad \forall r > 0$$

e, logo,  $\psi$  é contínua, pois é a composição de funções contínuas.

**Lema 3.5.8.** *Seja*

$$\begin{aligned} \psi : (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto \psi(r) = \min \{d(p, r) : p \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

como anteriormente. Existe  $\tilde{r} > 0$  satisfazendo  $\psi(\tilde{r}) = 0$ .

**Demonstração.** De fato, pela **Proposição 3.5.2**, se  $t^- < 0 < t^+$  e  $t^+ < |t^-|$ , então para  $0 < r_1 \leq r_c^-$ , a equação diferencial (3.8) tem exatamente duas soluções periódicas, ou seja, existem dois pontos, a saber,  $p = p^+$  e  $p = p^-$ , tais que  $d(p^+, r_1) = d(p^-, r_1) = 0$ . Assim, já que  $d$  é convexa, segue do *Teorema de Rolle* que  $\psi(r_1) < 0$ . Por outro lado, usando novamente a **Proposição 3.5.2**, temos que se  $r_2 > r^+$ , então a equação diferencial (3.8) não possui soluções periódicas e  $\mathcal{P}(p, r_2) > p$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$ , isto é,  $d(p, r_2) > 0$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $\psi(r_2) > 0$ . Logo, pelo *Teorema do Valor Intermediário*, existe  $\tilde{r} \in (r_1, r_2)$  satisfazendo  $\psi(\tilde{r}) = 0$ .

Note que, de acordo com a **Proposição 3.5.4**, se  $t^- < 0 < t^+$  e  $|t^-| < t^+$ , então a demonstração é análoga. ■

Dos **Lemas 3.5.7** e **3.5.8** concluímos que existe  $\tilde{r}$  e  $\tilde{p} = \rho(\tilde{r})$  tal que

$$d(\tilde{p}, \tilde{r}) = d'(\tilde{p}, \tilde{r}) = 0,$$

isto é,  $\tilde{p}$  é um ponto fixo semiestável da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  para  $r = \tilde{r}$ . Deste modo, no próximo resultado vamos demonstrar a unicidade de  $\tilde{r}$ , determinar seu valor e, conseqüentemente, confirmar que os resultados obtidos em [7], para funções estritamente convexas, podem ser estendidos para nossa equação diferencial (3.8).

**Teorema 3.5.1.** *Suponha  $a = 1$  e  $t^- < 0 < t^+$  na equação diferencial (3.8). Sejam*

$$r_c^- = \sqrt{1 + \frac{1}{(t^-)^2}}, \quad r_c^+ = \sqrt{1 + \frac{1}{(t^+)^2}}$$

e

$$\tilde{r} = \frac{\sqrt{2}r_c^-r_c^+ \sinh\left(\frac{-\Delta\theta t^-}{2}\right)}{\sqrt{\cosh(\Delta\theta t^-) - \cos(\Delta\theta)}}, \quad (3.44)$$

sendo

$$\Delta\theta = \frac{2\pi t^+}{t^+ - t^-}.$$

Temos que:

- (a) *Se  $0 < r < \tilde{r}$ , então a equação diferencial (3.8) possui duas soluções periódicas, as quais são hiperbólicas, sendo uma delas assintoticamente estável e a outra instável;*
- (b) *Se  $r = \tilde{r}$ , então a equação diferencial (3.8) possui apenas uma solução periódica, a qual é semiestável;*
- (c) *Se  $r > \tilde{r}$ , então a equação diferencial (3.8) não possui soluções periódicas.*

**Demonstração.** A existência de uma bifurcação sela-nó de soluções periódicas para  $r = \tilde{r}$  segue dos **Lemas 3.5.6, 3.5.7 e 3.5.8**, das **Proposições 3.5.2 e 3.5.4** e do **Teorema 3.4.1**. Resta mostrar a unicidade de  $\tilde{r}$  e determinar seu valor. Como vimos, para  $r = \tilde{r}$  existe apenas uma solução periódica, a qual é não hiperbólica, isto é, a aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  tem somente um ponto fixo  $\tilde{p}$  e  $\mathcal{P}'(\tilde{p}) = 1$ . Além disto, esta órbita periódica deve ser de duas zonas. De fato, de (3.16), temos que

$$\mathcal{P}'(\tilde{p}) = e^{(t^+ - t^-)\tau^+(\tilde{p})} e^{2\pi t^-} = 1,$$

implica que

$$(t^+ - t^-)\tau^+(\tilde{p}) + 2\pi t^- = 0, \quad (3.45)$$

ou seja,

$$\tau^+(\tilde{p}) = \frac{-2\pi t^-}{t^+ - t^-}. \quad (3.46)$$

Se  $\varphi(\theta, 0, \tilde{p}) \geq 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ , então  $\tau^+(\tilde{p}) = 2\pi$ . Assim, de (3.46), teríamos que  $t^+ = 0$ , o que é uma contradição. Por outro lado, se  $\varphi(\theta, 0, \tilde{p}) \leq 0$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ , então  $\tau^+(\tilde{p}) = 0$  e, logo, de (3.46) resultaria que  $t^- = 0$ , chegando novamente em uma contradição. Portanto,  $\varphi = \varphi(\theta, 0, \tilde{p})$  é de duas zonas.

Suponha que  $\tilde{p} > 0$  (se  $\tilde{p} < 0$ , então os cálculos são análogos). Do **Corolário 3.3.1**, existe  $\theta_1 \in (0, 2\pi)$  e  $\theta_2 > \theta_1$  tal que  $\varphi(\theta_1, 0, \tilde{p}) = \varphi(\theta_2, 0, \tilde{p}) = 0$ ,  $\varphi(\theta, 0, \tilde{p}) < 0$  para  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$  e  $\varphi(\theta, 0, \tilde{p}) > 0$  para  $\theta \in (\theta_2, \theta_1 + 2\pi)$ , lembrando que  $\varphi(\theta, 0, \tilde{p})$  é periódica (veja a Figura 3.23).

Conseqüentemente, de (3.12), temos que

$$\varphi(\theta_2, \theta_1, 0) = -e^{t^-(\theta_2 - \theta_1)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-t^-(s - \theta_1)} (1 + \tilde{r} \cos s) ds = 0,$$

isto é,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-t^-(s - \theta_1)} ds + \tilde{r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (e^{-t^-(s - \theta_1)} \cos s) ds = 0. \quad (3.47)$$

Por outro lado, de (3.12), também segue que

$$\varphi(\theta_1 + 2\pi, \theta_2, 0) = -e^{t^+(\theta_1 + 2\pi - \theta_2)} \int_{\theta_2}^{\theta_1 + 2\pi} e^{-t^+(s - \theta_2)} (1 + \tilde{r} \cos s) ds = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\theta_2}^{\theta_1 + 2\pi} e^{-t^+(s - \theta_2)} ds + \tilde{r} \int_{\theta_2}^{\theta_1 + 2\pi} (e^{-t^+(s - \theta_2)} \cos s) ds = 0. \quad (3.48)$$

Visto que  $\tau^+(\tilde{p}) = \theta_1 + 2\pi - \theta_2$ , resulta de (3.45) que

$$(t^+ - t^-)(\theta_1 + 2\pi - \theta_2) + 2\pi t^- = 0$$

e, assim,

$$t^-(\theta_2 - \theta_1) + t^+(\theta_1 + 2\pi - \theta_2) = 0. \quad (3.49)$$

Definindo  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ , de (3.49), segue que

$$\Delta\theta = \frac{2\pi t^+}{t^+ - t^-} \quad (3.50)$$

e as expressões (3.47) e (3.48) podem ser transformadas em

$$\frac{1 - e^{-t^-\Delta\theta}}{t^-} + \tilde{r} \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \Delta\theta} (e^{-t^-(s - \theta_1)} \cos s) ds = 0 \quad (3.51)$$

e

$$\frac{1 - e^{t^- \Delta \theta}}{t^+} + \tilde{r} \int_{\theta_1 + \Delta \theta}^{\theta_1 + 2\pi} (e^{-t^+(s-\theta_1-\Delta\theta)} \cos s) ds = 0. \quad (3.52)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-t^-(s-\theta_1)} ds &= e^{t^-\theta_1} \left( \frac{-e^{-t^-s}}{t^-} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \right) \\ &= e^{t^-\theta_1} \left( \frac{e^{-t^-\theta_1} - e^{-t^-\theta_2}}{t^-} \right) \\ &= \frac{1 - e^{-t^-(\theta_2-\theta_1)}}{t^-} \\ &= \frac{1 - e^{-t^- \Delta \theta}}{t^-} \end{aligned} \quad (3.53)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\theta_2}^{\theta_1 + 2\pi} e^{-t^+(s-\theta_2)} ds &= e^{t^+\theta_2} \left( \frac{-e^{-t^+s}}{t^+} \Big|_{\theta_2}^{\theta_1+2\pi} \right) \\ &= e^{t^+\theta_2} \left( \frac{e^{-t^+\theta_2} - e^{-t^+(\theta_1+2\pi)}}{t^+} \right) \\ &= \frac{1 - e^{t^+(\theta_2-\theta_1)-2\pi t^+}}{t^+} \\ &= \frac{1 - e^{t^+\Delta\theta-2\pi t^+}}{t^+} \\ &= \frac{1 - e^{t^- \Delta \theta}}{t^+}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Assim, substituindo (3.53) em (3.47), (3.54) em (3.48) e observando que  $\theta_1 + \Delta\theta = \theta_2$ , obtemos as expressões (3.51) e (3.52), respectivamente. Considere agora as funções

$$I_1(\theta) = \int_{\theta}^{\theta + \Delta \theta} (e^{-t^-(s-\theta)} \cos s) ds = A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta$$

e

$$I_2(\theta) = \int_{\theta + \Delta \theta}^{\theta + 2\pi} (e^{-t^+(s-\theta-\Delta\theta)} \cos s) ds = A_2 \sin \theta + B_2 \cos \theta,$$

sendo  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$  certas expressões que dependem de  $t^+$  e  $t^-$ . De (3.51) e (3.52), temos que

$$\tilde{r} = -\frac{1 - e^{-t^- \Delta \theta}}{t^- I_1(\theta_1)} = -\frac{1 - e^{t^- \Delta \theta}}{t^+ I_2(\theta_1)} \quad (3.55)$$

e, logo,

$$\frac{1 - e^{-t^- \Delta \theta}}{t^-} I_2(\theta_1) - \frac{1 - e^{t^- \Delta \theta}}{t^+} I_1(\theta_1) = 0,$$

o que sugere a introdução da função

$$I(\theta) = \frac{1 - e^{-t^- \Delta \theta}}{t^-} I_2(\theta) - \frac{1 - e^{t^- \Delta \theta}}{t^+} I_1(\theta) = A \operatorname{sen} \theta + B \cos \theta,$$

sendo  $A$  e  $B$  outras expressões que dependem de  $t^+$  e  $t^-$ . A equação  $I(\theta) = 0$  tem as três soluções  $\theta = \theta_1$  e  $\theta = \theta_1 \pm \pi$ . De fato, sendo  $I(\theta_1) = A \operatorname{sen} \theta_1 + B \cos \theta_1 = 0$ , resulta que

$$\begin{aligned} I(\theta_1 + \pi) &= A \operatorname{sen}(\theta_1 + \pi) + B \cos(\theta_1 + \pi) \\ &= A(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \pi + \operatorname{sen} \pi \cos \theta_1) + B(\cos \theta_1 \cos \pi - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \pi) \\ &= -A \operatorname{sen} \theta_1 - B \cos \theta_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I(\theta_1 - \pi) &= A \operatorname{sen}(\theta_1 - \pi) + B \cos(\theta_1 - \pi) \\ &= A(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \pi - \operatorname{sen} \pi \cos \theta_1) + B(\cos \theta_1 \cos \pi + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \pi) \\ &= -A \operatorname{sen} \theta_1 - B \cos \theta_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mas, apenas duas dessas soluções estão no intervalo  $[0, 2\pi)$ , sendo elas  $\theta = \theta_1$  e  $\theta = \theta_1 + \pi$ , pois, pelo **Lema 3.3.1**,  $\theta_1 < \hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_1 \in (\pi/2, \pi)$ . Entretanto, como  $I_i(\theta_1) = -I_i(\theta_1 + \pi)$ , para  $i = 1, 2$ , de (3.55) ambas as soluções determinam um único valor de  $\tilde{r}$ , a saber,

$$\tilde{r} = \left| \frac{e^{-t^- \Delta \theta} - 1}{t^- I_1(\theta_1)} \right|.$$

Com efeito, para  $\theta = \theta_1$ , de (3.55), obtemos que

$$\tilde{r} = \frac{e^{-t^- \Delta \theta} - 1}{t^- I_1(\theta_1)}$$

e, para  $\theta = \theta_1 + \pi$ ,

$$\tilde{r} = \frac{e^{-t^- \Delta \theta} - 1}{t^- I_1(\theta_1 + \pi)} = -\frac{e^{-t^- \Delta \theta} - 1}{t^- I_1(\theta_1)},$$

já que  $I_1(\theta_1 + \pi) = -I_1(\theta_1)$ . Com auxílio do *software Wolfram Mathematica* [10] obtemos os valores explícitos de  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B$  dependendo de  $t^+$  e  $t^-$  e, a partir deles chegamos que

$$\begin{aligned}
\tilde{r} &= \pm \frac{e^{2\pi t^+} (e^{\Delta\theta t^-} - 1) \sqrt{(1 + (t^-)^2)(1 + (t^+)^2)(1 + e^{2\Delta\theta t^-} - 2e^{\Delta\theta t^-} \cos(\Delta\theta))}}{t^- t^+ (e^{2\pi t^+} + e^{\Delta\theta t^- + \Delta\theta t^+} - 2e^{\Delta\theta t^+} \cos(\Delta\theta))} \\
&= \frac{\pm e^{2\pi t^+} \left( \frac{e^{(\Delta\theta t^-)/2}}{e^{(-\Delta\theta t^-)/2}} - 1 \right) \sqrt{\left(1 + \frac{1}{(t^-)^2}\right) \left(1 + \frac{1}{(t^+)^2}\right) (1 + e^{2\Delta\theta t^-} - 2e^{\Delta\theta t^-} \cos(\Delta\theta))}}{(e^{2\pi t^+} + e^{\Delta\theta t^- + \Delta\theta t^+} - 2e^{\Delta\theta t^+} \cos(\Delta\theta))} \\
&= \pm \frac{2e^{2\pi t^+ + (\Delta\theta t^-)/2} \sinh\left(\frac{\Delta\theta t^-}{2}\right) r_c^- r_c^+ \sqrt{1 + e^{2\Delta\theta t^-} - 2e^{\Delta\theta t^-} \cos(\Delta\theta)}}{(e^{2\pi t^+} + e^{\Delta\theta t^- + \Delta\theta t^+} - 2e^{\Delta\theta t^+} \cos(\Delta\theta))} \\
&= \pm \frac{2e^{2\pi t^+ + (\Delta\theta t^-)/2} \sinh\left(\frac{\Delta\theta t^-}{2}\right) r_c^- r_c^+ \sqrt{2e^{\Delta\theta t^-} \left(\frac{e^{-\Delta\theta t^-}}{2} + \frac{e^{\Delta\theta t^-}}{2} - \cos(\Delta\theta)\right)}}{2e^{\Delta\theta t^+} \left(\frac{e^{2\pi t^+ - \Delta\theta t^+}}{2} + \frac{e^{\Delta\theta t^-}}{2} - \cos(\Delta\theta)\right)} \\
&= \pm \frac{\sqrt{2} r_c^- r_c^+ \sinh\left(\frac{\Delta\theta t^-}{2}\right) \sqrt{\cosh(\Delta\theta t^-) - \cos(\Delta\theta)} e^{2\pi t^+ + \Delta\theta t^- - \Delta\theta t^+}}{\cosh(\Delta\theta t^-) - \cos(\Delta\theta)} \\
&= \frac{\pm \sqrt{2} r_c^- r_c^+ \sinh\left(\frac{-\Delta\theta t^-}{2}\right)}{\sqrt{\cosh(\Delta\theta t^-) - \cos(\Delta\theta)}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde{r} = \frac{\sqrt{2} r_c^- r_c^+ \sinh\left(\frac{-\Delta\theta t^-}{2}\right)}{\sqrt{\cosh(\Delta\theta t^-) - \cos(\Delta\theta)}} > 0,$$

como desejávamos. Sobre os cálculos acima, vale ressaltar que foi utilizada a equação (3.50) e o fato da função seno hiperbólico ser uma função ímpar. Note que, se  $t^+ = -t^- > 0$ , de (3.50), resulta que  $\Delta\theta = \pi$  e o valor de  $\tilde{r}$  coincide com o valor de  $\hat{r}$  estabelecido no

**Teorema 3.4.1.** De fato, sendo  $t = t^+ = -t^- > 0$  e  $\Delta\theta = \pi$ , segue que

$$\begin{aligned} r_c^- r_c^+ &= \sqrt{1 + \frac{1}{(t^-)^2}} \sqrt{1 + \frac{1}{(t^+)^2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \\ &= \frac{1 + t^2}{t^2} \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, de (3.44),

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \frac{\sqrt{2} \frac{1+t^2}{t^2} \sinh\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{\cosh(-\pi t) - \cos \pi}} \\ &= \frac{1+t^2}{t^2} \sinh\left(\frac{\pi t}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{\frac{e^{-\pi t} + e^{\pi t}}{2} + 1}} \\ &= \frac{1+t^2}{t^2} \sinh\left(\frac{\pi t}{2}\right) \sqrt{\frac{4}{(e^{(\pi t)/2} + e^{(-\pi t)/2})^2}} \\ &= \frac{\frac{1+t^2}{t^2} \sinh\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi t}{2}\right)} \\ &= \frac{1+t^2}{t^2} \tanh\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\ &= \hat{r}. \end{aligned}$$

Se  $\tilde{p} < 0$ , então a construção é similar. Neste caso,

$$\Delta\theta = \frac{2\pi t^-}{t^- - t^+}$$

e  $\tilde{r}$  é dado por

$$\tilde{r} = \frac{\sqrt{2} r_c^- r_c^+ \sinh\left(\frac{\Delta\theta t^+}{2}\right)}{\sqrt{\cosh(\Delta\theta t^+) - \cos(\Delta\theta)}}.$$

Note que o valor  $\tilde{r}$  não é alterado, pois a função seno hiperbólico é uma função ímpar, a



função cosseno hiperbólico é uma função par e, além disto,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi t^+}{t^+ - t^-}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi t^+}{t^+ - t^-} - 2\pi\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi t^-}{t^+ - t^-}\right) \\ &= \cos\left(\frac{-2\pi t^-}{t^- - t^+}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi t^-}{t^- - t^+}\right), \end{aligned}$$

lembrando que a função cosseno é par. Todos os cálculos foram feitos para o caso em que  $\tilde{p} < 0$ , mas, serão omitidos aqui, pois são análogos. ■

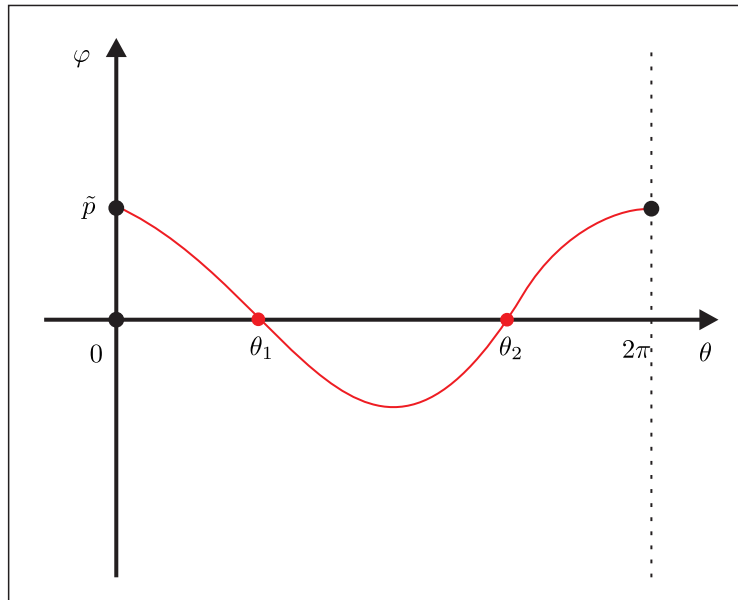


Figura 3.23: Gráfico qualitativo da função  $\varphi = \varphi(\theta, 0, \tilde{p})$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Vale ressaltar que o valor de  $\tilde{r}$  dado em (3.44) não confere com o valor que está no artigo estudado. Foram feitas algumas simulações numéricas no *software Wolfram Mathematica* e os resultados confirmaram que o valor de  $\tilde{r}$  dado em (3.44) está correto.

### 3.6 Prova dos Teoremas Principais

Observe que a solução do sistema (3.6) com a condição inicial

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (x_0, a + r, 0)$$

é dada por

$$(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta)) = (\varphi(\theta, 0, x_0), a + r \cos \theta, r \sin \theta). \quad (3.56)$$

Assim, temos a seguinte relação entre as soluções periódicas da equação diferencial (3.8) e as soluções periódicas do sistema (3.6).

**Lema 3.6.1.** *Toda solução periódica da equação diferencial (3.8) determina uma solução periódica para o sistema (3.6) e, se a equação diferencial (3.8) não possui soluções periódicas, então o sistema (3.6) não pode ter soluções periódicas. Além disso, se  $a = 0$  e a equação diferencial (3.8) tem uma solução periódica, então o sistema (3.6) possui um contínuo de soluções periódicas folheando um cone.*

**Demonstração.** Se  $\varphi = \varphi(\theta, 0, x_0)$  é uma solução periódica da equação diferencial (3.8), então, de (3.56), o sistema (3.6) também possui uma solução periódica. Por outro lado, se a equação diferencial (3.8) não possui soluções periódicas, de (3.56), temos que o sistema (3.6) não pode ter soluções periódicas. Se  $a = 0$  e  $(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta))$  é uma solução do sistema (3.6), então para todo  $k > 0$ ,  $k(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta))$  também é solução do sistema (3.6). De fato, definindo  $y_i(\theta) = kx_i(\theta)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , segue que

$$y_1'(\theta) = (kx_1(\theta))' = kx_1'(\theta) = k(t^\pm x_1(\theta) - x_2(\theta)) = t^\pm(kx_1(\theta)) - (kx_2(\theta)) = t^\pm y_1(\theta) - y_2(\theta),$$

$$y_2'(\theta) = (kx_2(\theta))' = kx_2'(\theta) = -kx_3(\theta) = -y_3(\theta)$$

e

$$y_3'(\theta) = (kx_3(\theta))' = kx_3'(\theta) = kx_2(\theta) = y_2(\theta).$$

Assim, se  $a = 0$  e  $(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta))$  for uma solução periódica do sistema (3.6), então para todo  $k > 0$ ,  $k(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta))$  também será uma solução periódica. Logo, o sistema (3.6) possui um contínuo de soluções periódicas folheando um cone. Note que  $k$

deve ser positivo, pois  $k < 0$  muda a orientação e, conseqüentemente, a estabilidade das órbitas. ■

Como estamos estudando a dinâmica do sistema (3.6) em cada cilindro da família

$$(x_2 - a)^2 + x_3^2 = r^2,$$

através da equação diferencial (3.8), temos que (3.56) é uma solução periódica assintoticamente estável do sistema (3.6), restrita ao cilindro, se  $\varphi = \varphi(\theta, 0, x_0)$  é uma solução periódica assintoticamente estável da equação diferencial (3.8), ou seja, se  $x_0$  é um ponto fixo hiperbólico assintoticamente estável da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$ . Se  $\varphi = \varphi(\theta, 0, x_0)$  for uma solução periódica instável ou semiestável, então (3.56) é uma solução periódica instável ou semiestável do sistema (3.6), respectivamente, restrita ao cilindro.

**Lema 3.6.2.** *Se  $\bar{x}_1$  é um ponto de equilíbrio da equação diferencial (3.8), então o ponto  $(\bar{x}_1, a, 0)$  é um ponto de equilíbrio do sistema (3.6).*

**Demonstração.** A demonstração é imediata. ■

Se  $t^+ - t^- \geq 0$ , então, pelo **Corolário 3.3.2**,  $\mathcal{P}'$  é não decrescente e, conseqüentemente,  $d$  é convexa, como demonstrado no **Lema 3.5.6**. Se  $t^+ - t^- \leq 0$ , então, novamente pelo **Corolário 3.3.2**,  $\mathcal{P}'$  é não crescente e, de modo análogo à demonstração do **Lema 3.5.6**, é possível mostrar que  $d$  é côncava. Assim, supondo  $d$  convexa (se  $d$  é côncava, basta fazer a mesma construção para  $-d$ , pois  $-d$  é convexa) e tendo em conta que para cada  $r > 0$  existe um único ponto  $p$  tal que  $d(p, r) = 0$ , conforme os itens (a) e (b) do **Teorema 3.3.1**, segue que  $d$  é crescente ou  $d$  é decrescente.

Além disto, fica bem definida a função

$$\begin{aligned} \alpha : (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto \alpha(r), \end{aligned}$$

sendo  $\alpha(r)$  o ponto em que  $d(\alpha(r), r) = 0$ . Afirmamos que  $\alpha$  é contínua. De fato, suponha por absurdo que  $\alpha$  não é contínua em algum  $r_0 > 0$  fixado, porém arbitrário. Assim, existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$ , existe  $r > 0$  satisfazendo

$$|r - r_0| < \delta \quad \text{e} \quad |\alpha(r) - \alpha(r_0)| > \varepsilon.$$

Para  $\delta = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , existe uma sequência  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$|r_n - r_0| < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

e

$$|\alpha(r_n) - \alpha(r_0)| > \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_0.$$

A sequência de números reais  $\{\alpha(r_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência monótona. Seja  $\{\alpha(r_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$  essa subsequência. Portanto, existem dois casos:

(i) Se  $\{\alpha(r_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$  é limitada e, conseqüentemente, convergente, então existe  $q \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(r_{n_k}) = q,$$

com  $q \neq \alpha(r_0)$ . Sabemos que

$$d(\alpha(r_0), r_0) = d(\alpha(r_{n_k}), r_{n_k}) = 0$$

e, portanto, pela continuidade da função  $d$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(\alpha(r_{n_k}), r_{n_k}) = d(q, r_0) = 0,$$

o que é uma contradição.

(ii) Se  $\{\alpha(r_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$  não é limitada, então dado  $q \in \mathbb{R}$ , com  $q > \alpha(r_0)$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $k > k_0$ , então

$$\alpha(r_{n_k}) > q > \alpha(r_0).$$

Se  $d$  é crescente (se  $d$  é decrescente, a demonstração é análoga), então

$$0 = d(\alpha(r_{n_k}), r_{n_k}) > d(q, r_{n_k}) > d(\alpha(r_0), r_{n_k}).$$

Tomando o limite quando  $k$  tende ao infinito em todos os membros, segue que

$$0 \geq d(q, r_0) \geq d(\alpha(r_0), r_0) = 0,$$

ou seja,  $d(q, r_0) = 0$  e novamente temos uma contradição.

De **(i)** e **(ii)** resulta que  $\alpha$  é contínua em  $(0, \infty)$ . Em outras palavras, mostramos que os pontos fixos da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  variam continuamente com  $r$ .

Agora, considere a função

$$\begin{aligned} h_a : \mathbb{R} \times (a, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) &\longmapsto h_a(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0), \end{aligned}$$

com  $a \in \{0, 1\}$ . Temos que

$$Dh_a(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \{0, 1\}$$

e, sendo  $F$  o campo vetorial dado pelo sistema (3.6), segue que

$$F(h_a(x_1, x_2)) = F(x_1, x_2, 0) = \begin{pmatrix} t^\pm x_1 - x_2 \\ 0 \\ x_2 - a \end{pmatrix}.$$

Como

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & t^\pm x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - a \end{pmatrix} = x_2 - a,$$

segue que  $Dh_a(x_1, x_2)$  e  $F(h_a(x_1, x_2))$  geram o  $\mathbb{R}^3$  para todo  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (a, \infty)$ . Definindo

$$\Sigma_a = h_a(\mathbb{R} \times (a, \infty))$$

e, tendo em conta que  $h_a : \mathbb{R} \times (a, \infty) \rightarrow \Sigma_a$  é um difeomorfismo, resulta que  $\Sigma_a$  é seção transversal de  $F$ , para  $a \in \{0, 1\}$ , conforme [11], página 104.

Sendo  $x_1 = p$  e  $x_2 = a + r$ , quando  $\theta = 0$ , com  $p$  ponto fixo da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  associada à equação diferencial (3.8), levando cada curva de pontos  $(p, r)$  nessas seções transversais (veja as Figuras 3.24, 3.26, 3.28 e 3.30), através do fluxo do sistema (3.6), obtemos as variedades invariantes folheadas por soluções periódicas.

Assim, temos condições para provar os teoremas principais. Vale ressaltar que a estabilidade dos pontos de equilíbrio e das soluções periódicas estão dadas no sentido de Lyapunov.

**Teorema 3.6.1.** *Se  $a = 0$  no sistema (3.6), temos que:*

- (a) *Se  $t^+ = 0$  (respectivamente,  $t^- = 0$ ) e  $t^+ + t^- \neq 0$ , então todos os pontos  $(x_1, 0, 0)$  com  $x_1 \geq 0$  (respectivamente,  $x_1 \leq 0$ ) são pontos de equilíbrio do sistema (3.6). Além disto, o sistema possui um contínuo de variedades invariantes ilimitadas (cones) situadas na zona  $x_1 \geq 0$  (respectivamente,  $x_1 \leq 0$ ), as quais são folheadas por soluções periódicas estáveis e, o sistema (3.6) não possui soluções periódicas de duas zonas;*
- (b) *Se  $t^+t^- < 0$ , então a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (3.6) e o sistema não possui soluções periódicas;*
- (c) *Se  $t^+t^- > 0$ , então a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (3.6), o qual é estável, se  $t^+ + t^- < 0$  e, instável, se  $t^+ + t^- > 0$ . Além disto, o sistema possui uma variedade invariante ilimitada (cone) folheada por soluções periódicas de duas zonas e, tais soluções possuem a mesma estabilidade da origem.*

**Demonstração.**

- (a) A primeira afirmação segue diretamente do item (a) da **Proposição 3.2.1** e do **Lema 3.6.2**. A segunda afirmação resulta do item (c) do **Teorema 3.3.1** juntamente com o **Lema 3.6.1**.

(b) A primeira afirmação decorre do item (b) da **Proposição 3.2.1** e do **Lema 3.6.2**. A segunda afirmação decorre do item (b) da **Proposição 3.2.3** e do **Lema 3.6.1**.

(c) A primeira afirmação resulta do item (b) da **Proposição 3.2.1** e do **Lema 3.6.2**. A segunda afirmação segue do item (b) do **Teorema 3.3.1** juntamente com o **Lema 3.6.1**. Veja a Figura 3.25. ■

**Teorema 3.6.2.** *Se  $a = 1$  no sistema (3.6), temos que:*

(a) *Se  $t^+ > 0$  e  $t^- \geq 0$ , então o ponto  $(1/t^+, 1, 0)$  é o único ponto de equilíbrio do sistema (3.6), o qual é instável. Além disto, o sistema possui uma variedade invariante ilimitada folheada por soluções periódicas instáveis;*

(b) *Se  $t^+ \leq 0$  e  $t^- \geq 0$ , então o sistema (3.6) não possui pontos de equilíbrio e também não possui soluções periódicas;*

(c) *Se  $t^+ \leq 0$  e  $t^- < 0$ , então o ponto  $(1/t^-, 1, 0)$  é o único ponto de equilíbrio do sistema (3.6), o qual é estável. Além disto, o sistema possui uma variedade invariante ilimitada folheada por soluções periódicas estáveis;*

(d) *Se  $t^+ > 0$  e  $t^- < 0$ , então os únicos pontos de equilíbrio do sistema (3.6) são os pontos  $(1/t^-, 1, 0)$ , o qual é estável e  $(1/t^+, 1, 0)$ , o qual é instável. O segmento unindo os pontos de equilíbrios determina uma órbita heteroclínica  $\varphi_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por*

$$\varphi_h(t) = \begin{cases} \left( \frac{1}{t^+} - \frac{e^{tt^+}}{t^+}, 1, 0 \right), & \text{se } t \leq 0, \\ \left( \frac{1}{t^-} - \frac{e^{tt^-}}{t^-}, 1, 0 \right), & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

*Além disto, o sistema possui uma variedade invariante limitada (esfera topológica) folheada por soluções periódicas, algumas estáveis, outras instáveis e uma semiestável.*

**Demonstração.**

(a) A primeira afirmação resulta do item (c) da **Proposição 3.2.1** e do **Lema 3.6.2**. Visto que, pelo item (a) do **Teorema 3.3.1**, para cada  $r > 0$  a equação diferencial (3.8) possui apenas uma solução periódica, a segunda afirmação decorre do **Lema 3.6.1**. Veja a Figura 3.27.

(b) A primeira afirmação segue do item (e) da **Proposição 3.2.1** e do **Lema 3.6.2**. A segunda afirmação decorre do item (a) da **Proposição 3.2.3** e do **Lema 3.6.1**.

(c) A primeira afirmação resulta do item (d) da **Proposição 3.2.1** e do **Lema 3.6.2**. A segunda afirmação também segue do item (a) do **Teorema 3.3.1** e do **Lema 3.6.1**, lembrando que, neste caso, para cada  $r > 0$  a equação diferencial (3.8) possui apenas uma solução periódica. Veja a Figura 3.29.

(d) A primeira afirmação decorre dos itens (c) e (d) da **Proposição 3.2.1** juntamente com o **Lema 3.6.2**. A segunda afirmação segue do **Teorema 3.5.1** e do **Lema 3.6.1** e, está ilustrada nas Figuras 3.31 e 3.32. ■

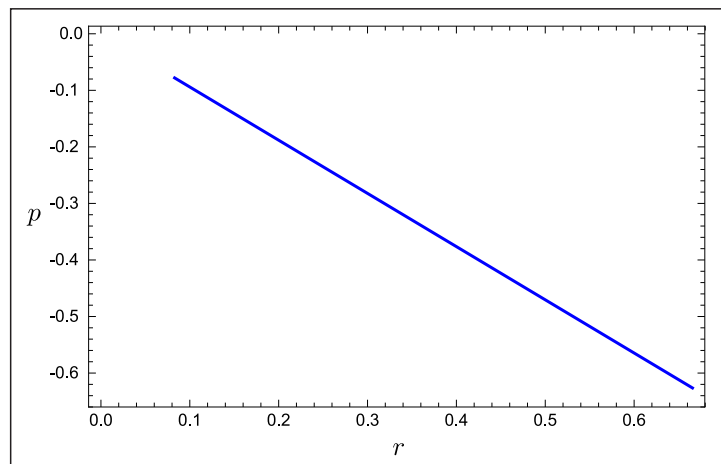


Figura 3.24: A linha azul representa os pontos fixos estáveis da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  em função de  $r$  quando  $a = 0$ ,  $t^- = -0,1$  e  $t^+ = -10$  em (3.8).



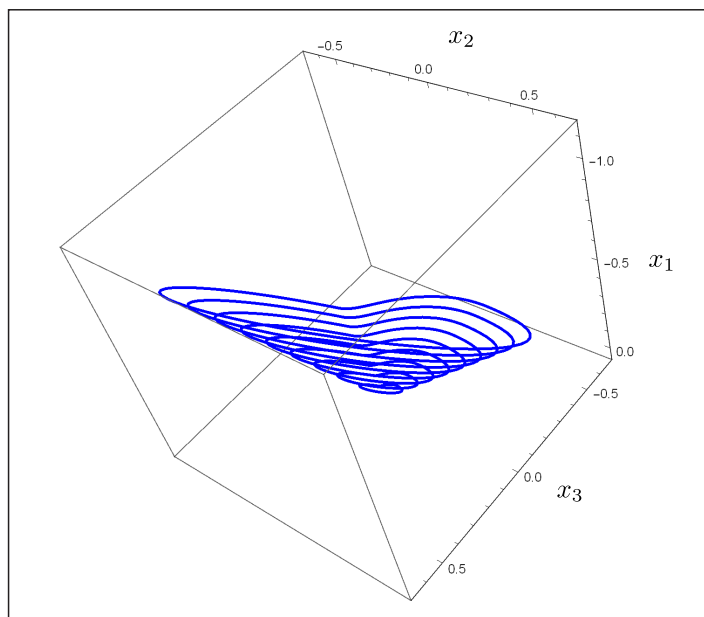


Figura 3.25: Algumas soluções periódicas estáveis folheando uma variedade invariante, a qual é um cone. Neste caso  $a = 0$ ,  $t^- = -0,1$  e  $t^+ = -10$  em (3.8).

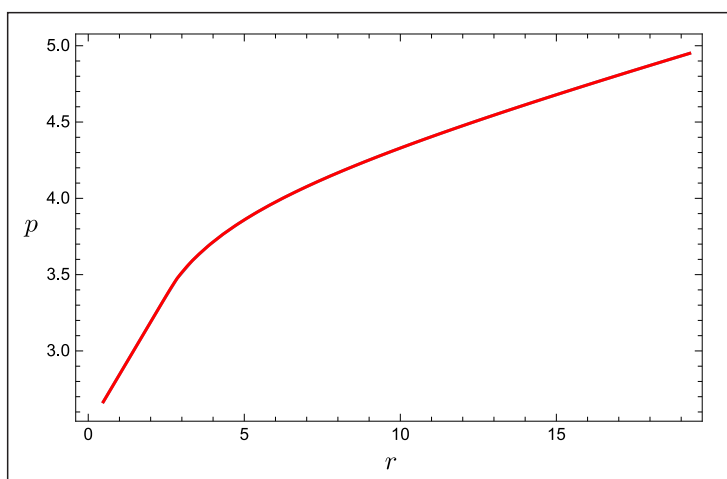


Figura 3.26: A linha vermelha representa os pontos fixos instáveis da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  em função de  $r$  quando  $a = 1$ ,  $t^- = 1/5$  e  $t^+ = 2/5$  em (3.8).

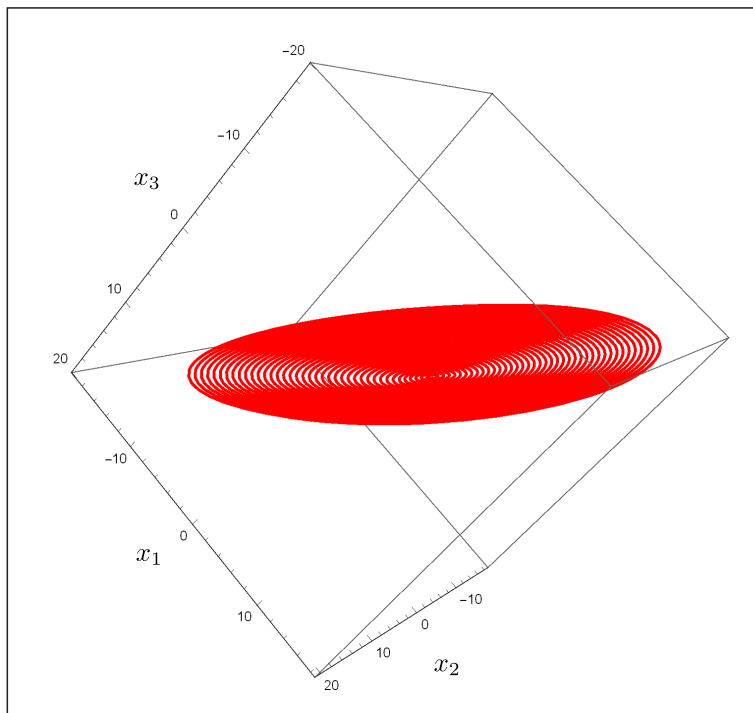


Figura 3.27: Algumas soluções periódicas instáveis folheando uma variedade invariante quando  $a = 1$ ,  $t^- = 1/5$  e  $t^+ = 2/5$  em (3.8).

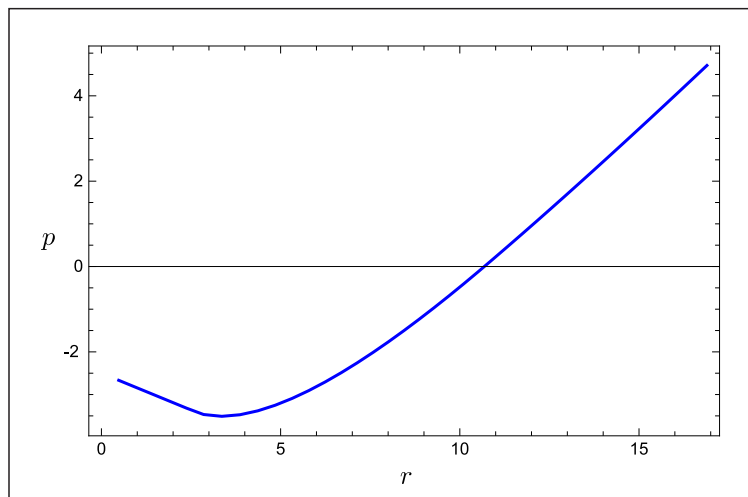


Figura 3.28: A linha azul representa os pontos fixos estáveis da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  em função de  $r$  quando  $a = 1$ ,  $t^- = -2/5$  e  $t^+ = 0$  em (3.8).

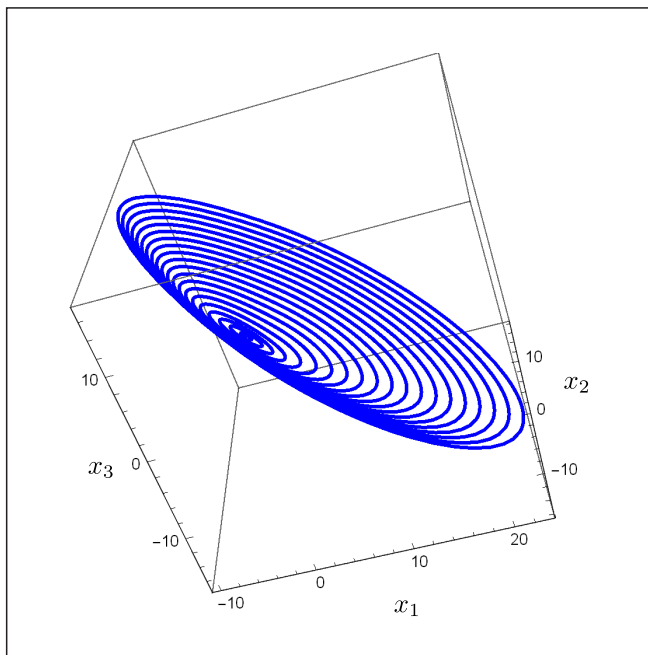


Figura 3.29: Algumas soluções periódicas estáveis folheando uma variedade invariante quando  $a = 1$ ,  $t^- = -2/5$  e  $t^+ = 0$  em (3.8).

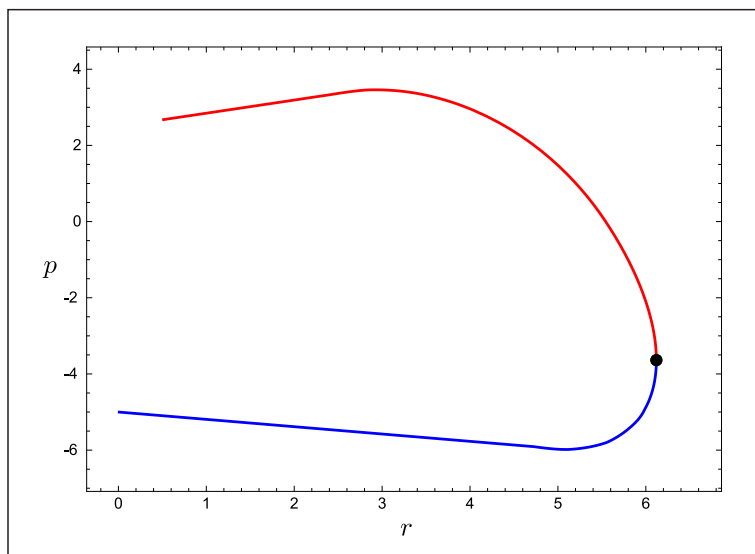


Figura 3.30: A linha azul representa os pontos fixos estáveis, a linha vermelha representa os pontos fixos instáveis e o ponto preto representa o ponto fixo semiestável da aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  em função de  $r$ . Neste caso,  $a = 1$ ,  $t^- = -1/5$  e  $t^+ = 2/5$  em (3.8).

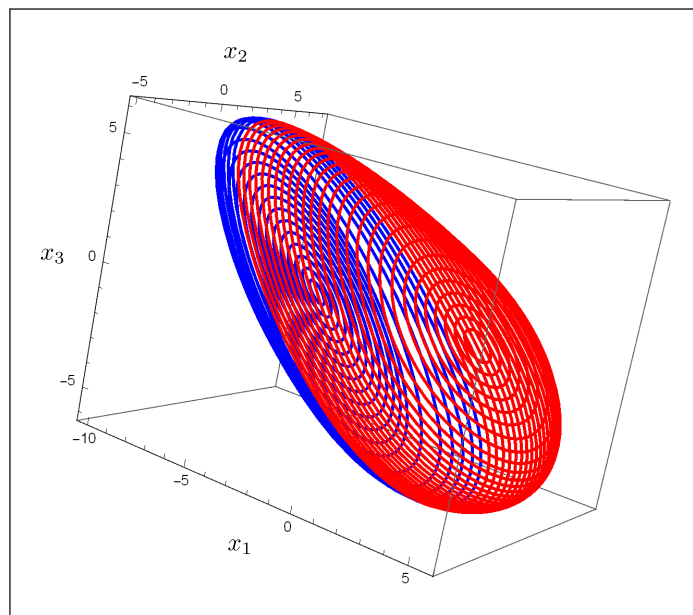


Figura 3.31: Algumas soluções periódicas folheando uma esfera topológica, sendo as órbitas azuis estáveis e as órbitas vermelhas instáveis. Neste caso,  $a = 1$ ,  $t^- = -1/5$  e  $t^+ = 2/5$  em (3.8).

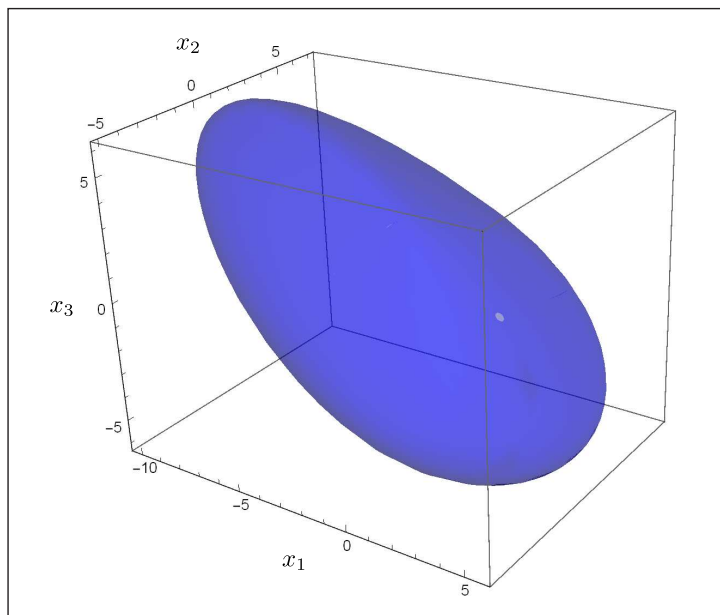


Figura 3.32: Esfera topológica folheada por soluções periódicas, algumas instáveis, outras estáveis e uma semiestável. Neste caso,  $a = 1$ ,  $t^- = -1/5$  e  $t^+ = 2/5$  em (3.8).

# Conclusões

Nesta dissertação estudamos a existência de variedades invariantes folheadas por soluções periódicas em um sistema linear por partes contínuo em  $\mathbb{R}^3$ . Após o estudo dos conceitos sobre a observabilidade e a controlabilidade de um sistema de controle linear, demonstramos o **Corolário 2.5.1** e encontramos a forma canônica generalizada de Liénard para sistemas lineares por partes contínuos em  $\mathbb{R}^n$ , vista no **Teorema 2.4.3**. Esses resultados foram fundamentais para transformar o sistema (3.1) no sistema (3.6) através de algumas mudanças lineares de variáveis.

Para estudar a dinâmica do sistema (3.6), reduzimos o sistema em questão à equação diferencial (3.8) e analisamos o comportamento das soluções dessa equação diferencial. Com esse propósito, os resultados mais utilizados foram a **Proposição 3.2.2** e o **Lema 3.3.1**. A **Proposição 3.3.1** foi essencial para determinarmos as soluções periódicas da equação diferencial (3.8) e suas respectivas estabilidades.

Por fim, conhecendo as soluções periódicas e os pontos de equilíbrio da equação diferencial (3.8), demonstramos nossos resultados principais, que são os **Teoremas 3.6.1** e **3.6.2**. Tais teoremas mostram que o comportamento de um sistema linear por partes contínuo pode não ser tão simples. Após reduzirmos o sistema (3.6) à equação diferencial (3.8), a qual parece ser uma equação diferencial trivial, todo o estudo presente neste trabalho teve que ser feito para garantirmos a existência das variedades invariantes folheadas por soluções periódicas.

Vale ressaltar que demonstramos os resultados com o máximo de detalhes possíveis e, assim, tornou-se necessário que fizéssemos alguns. Além disto, algumas demonstrações

importantes foram omitidas no artigo estudado, sendo elas as demonstrações das **Proposições 3.2.2, 3.2.3 e 3.5.4**, e do **Lema 3.3.1**. Propusemos e enunciamos os **Lemas 3.4.1 e 3.5.4** para auxiliar na demonstração do **Teorema 3.4.1** e das **Proposições 3.5.2 e 3.5.4**, respectivamente. Para provar a **Proposição 3.5.4**, ainda fizemos o **Lema 3.5.5** e a **Proposição 3.5.3**. Com o objetivo de garantirmos a existência da bifurcação sela-nó de soluções periódicas, quando  $t^- < 0 < t^+$ , enunciamos e demonstramos os **Lemas 3.5.6, 3.5.7 e 3.5.8**.

# Referências Bibliográficas

- [1] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce, F. Torres, *On simplifying and classifying piecewise linear systems*, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, **49** (2002), 609-620.
- [2] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce, F. Torres, *Invariant manifolds of periodic orbits for piecewise linear three-dimensional systems*, IMA Journal of Applied Mathematics, **69** (2004), 71-91.
- [3] S. S. Dragomir, *Some Grönwall Type Inequalities and Applications*, 1<sup>st</sup> Edition, Nova Biomedical, 2003.
- [4] J. Hale, H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, 1<sup>st</sup> Edition, Springer, New York, 1991.
- [5] A. C. G. Leitão, J. Baumeister, *Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica*, 1<sup>a</sup> Edição, IMPA, 2014.
- [6] E. L. Lima, *Álgebra Linear*, 8<sup>a</sup> Edição, IMPA, 2012.
- [7] J. Mawhin, *First order ordinary differential equations with several periodic solutions*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, **38** (1987), 257-265.
- [8] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill, 1987.
- [9] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, 2<sup>nd</sup> Edition, Springer, New York, 1998.

- [10] Software **Wolfram Mathematica**: [www.wolfram.com/mathematica/](http://www.wolfram.com/mathematica/).
- [11] J. Sotomayor, *Equações Diferenciais Ordinárias*, 1ª Edição, Livraria da Física, 2011.
- [12] F. Zhang, *The Schur complement and its applications*, Springer, New York, 2005.