

Guilherme Henrique Siqueira Camargo

**Influências das flutuações quânticas do vácuo
de um campo escalar sobre o movimento de
uma partícula teste em 3+1 dimensões**

Itajubá - MG

2018

Guilherme Henrique Siqueira Camargo

**Influências das flutuações quânticas do vácuo de um
campo escalar sobre o movimento de uma partícula teste
em 3+1 dimensões**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências em Física.

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Instituto de Física e Química

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci

Itajubá - MG

2018

Guilherme Henrique Siqueira Camargo

Influências das flutuações quânticas do vácuo de um campo escalar sobre o movimento de uma partícula teste em 3+1 dimensões

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências em Física.

Trabalho aprovado. Itajubá - MG, 23 de fevereiro de 2018:

Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci
Orientador

Prof. Dr. Marcelo Batista Hott
Convidado 1

**Prof. Dr. Fabrício Augusto Barone
Rangel**
Convidado 2

Itajubá - MG
2018

Aos meus pais Cláudio e Cristina, e ao sobrinho e afilhado mais fofo do mundo, Caio.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais Cláudio e Cristina, e às minhas irmãs Tamires e Thais, por todo o apoio que me deram, sempre me ajudando e se preocupando comigo, e que, apesar da distância, mantiveram-se ao meu lado. À toda minha família, por terem desempenhado um papel extremamente importante na minha formação, motivando-me muito, fazendo com que eu tenha conseguido superar esse grande desafio.

Agradeço ao professor e amigo Vitorio, aquele que enfrentou inúmeros problemas por mim, por ter me orientado e ajudado várias vezes, por ter me inspirado cada vez mais, compartilhando suas experiências comigo, por ter me mostrado um pouco do que significa ser um cientista, e por ter me ensinado muito mais do que física, ter sido um exemplo de vida para mim.

Ao meu grande amigo Murilo, por ter me acompanhado várias vezes ao Lanchão, por ter participado da minha vida nesses últimos 6 anos e ter deixado eu participar da dele.

Agradeço à minha grande inspiração Anna, por ter me acompanhado nos momentos difíceis, por ter me mostrado que, independente do desafio, sempre vale a pena continuar lutando.

Aos professores que tiveram um papel imprescindível durante o meu percurso, pelas lições transmitidas e pelas muitas vezes que me ajudaram em momentos de dificuldade.

Aos meus colegas e amigos agradeço pelo apoio e pela motivação.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos os efeitos da flutuação quântica do vácuo de um campo escalar sem massa sobre o movimento de uma partícula teste que interage com o campo na presença de uma fronteira perfeitamente refletora. Primeiramente revisamos os resultados obtidos para o caso onde uma partícula carregada interage com o campo eletromagnético, onde foram calculadas as dispersões da velocidade da partícula. Com base nos resultados obtidos nesta configuração, examinamos o sistema onde uma partícula teste interage com o campo escalar na presença de uma fronteira perfeitamente refletora. Assim como no caso eletromagnético, foram obtidos resultados divergentes ao considerarmos que a interação entre a partícula e o campo modificado pela presença da fronteira se inicia de forma instantânea. Com o objetivo de tornar o modelo mais realista, implementamos duas funções de transição suaves distintas. Ambas as funções de transição foram capazes de eliminar as divergências encontradas no caso com interação súbita. Entretanto, quando tomamos intervalos de interação muito longos, as dispersões apresentam comportamentos distintos. Verificamos que este comportamento está associado a quão rápida é efetuada a transição entre os diferentes estados do sistema.

Palavras-chaves: flutuação quântica, campo escalar, fronteira perfeitamente refletora.

Abstract

In this work, we study the effect of quantum vacuum fluctuation of a massless scalar field on the motion of a test particle that interacts with the field in the presence of a perfectly reflecting boundary. First, we review the results obtained for the case where a particle interacts with the electromagnetic field, where the dispersions of particle velocity were calculated. In this case, we examined the system where a test particle interacts with the scalar field in the presence of a perfectly reflecting boundary. As in the electromagnetic case, divergent results were obtained by considering that the interaction between the particle and the boundary begins instantaneously. In order to make the model more realistic, we implemented two different smooth transition functions. Both transition functions were able to eliminate the divergences found in the case where a sudden interaction were assumed. Finally we've found that the latetime behavior of the system depends on how fast the transition between the different states occurs.

Key-words: quantum fluctuations. scalar field. perfectly reflecting boundary.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Configuração de um possível experimento para medir a dispersão da posição da partícula induzida pelas flutuações de vácuo. Figura retirada da Ref. [1].	11
Figura 2 – Comportamento de $F_{\tau}^{(n)}(t)$ dada pela Eq. (3.4).	19
Figura 3 – Comportamento de $F_{\tau_s, \tau}(t)$ dada pela Eq. (3.7).	20
Figura 4 – Comportamento da dispersão da componente paralela da velocidade para diferentes valores de n	24
Figura 5 – Comportamento da dispersão da componente perpendicular da velocidade para diferentes valores de n	24
Figura 6 – Mudança nos limites de integração.	38
Figura 7 – Comportamento da dispersão da componente v_{\perp}	40
Figura 8 – Comportamento da dispersão da componente v_{\parallel}	41
Figura 9 – Dispersão da componente v_{\perp} , dada na Eq. (6.28), para diferentes valores de n	43
Figura 10 – Dispersão da componente v_{\perp} , dada na Eq. (6.28), para diferentes valores de n	44
Figura 11 – Dispersão da componente v_{\parallel} , dada na Eq. (6.29), para diferentes valores de n	44
Figura 12 – Dispersão da componente v_{\parallel} , dada na Eq. (6.29), para diferentes valores de n	45
Figura 13 – Dispersão da componente v_{\perp} , dada na Eq. (6.39), para diferentes valores de τ_s	47
Figura 14 – Dispersão da componente v_{\perp} , dada na Eq. (6.39), para diferentes valores de τ_s	48
Figura 15 – Dispersão da componente v_{\parallel} , dada na Eq. (6.40), para diferentes valores de τ_s	48
Figura 16 – Dispersão da componente v_{\parallel} , dada na Eq. (6.40), para diferentes valores de τ_s	49
Figura 17 – Comportamento da dispersão $\langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle_{\tau_s}$ para $\tau \rightarrow \infty$	49
Figura 18 – Comportamento da dispersão $\langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle_{\tau_s}$ para $\tau \rightarrow \infty$	50
Figura 19 – Dispersão da componente v_{\perp}	52
Figura 20 – Dispersão da componente v_{\parallel}	52

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
2	TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS NO ESPAÇO DE MINKOWSKI	13
2.1	Quantização de um campo escalar	14
2.2	Energia e momento	15
2.3	Funções de Green	16
3	PROCESSOS DE TRANSIÇÃO	18
4	REVISÃO DO CASO ELETROMAGNÉTICO	21
5	QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ESCALAR EM 3+1 DIMENSÕES NA PRESENÇA DE UMA FRONTEIRA	25
5.1	Quantização via expansão em modos normais	25
5.2	Quantização via funções de Green	28
6	COMPORTAMENTO DE UMA PARTÍCULA ESCALAR CARRE- GADA PRÓXIMA A UMA FRONTEIRA PERFEITAMENTE RE- FLETORA EM 3+1 DIMENSÕES	36
6.1	Processo de transição	41
7	CONCLUSÕES	51
	APÊNDICE A – MÉDIA DAS FUNÇÕES DE GREEN RETARDADA E AVANÇADA	54
	APÊNDICE B – DETALHAMENTO DO CÁLCULO DA EQ. (6.33)	56
	REFERÊNCIAS	57

1 Introdução

O efeito mais famoso ocasionado pelas flutuações quânticas de vácuo de campos na presença de fronteiras é o efeito Casimir. É conhecido na literatura que a força por unidade de área entre duas placas condutoras paralelas interagindo eletromagneticamente, separadas por uma distância d , é dada por [2, 3]

$$\frac{F}{A} = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4} = 0.013 \left(\frac{\mu\text{m}}{d} \right)^4 \text{ dyn cm}^{-2}.$$

No final da década de 1990 foi realizado um experimento baseado em um pêndulo de torção com a finalidade de medir tal força, obtendo um acordo com a teoria na ordem de 95% [4].

Em 1998 foi estudada a densidade de energia de um campo escalar na presença de fronteiras. É conhecido que o valor médio da densidade de energia de um campo escalar na presença de uma fronteira em $z = 0$ é dado por [5] $\langle 0 | T_{tt} | 0 \rangle = -1 / (16\pi^2 z^4)$, um resultado divergente quando avaliamos na posição da fronteira. Entretanto, foi mostrado que ao considerar que a posição q da fronteira apresenta uma incerteza em torno de $q = 0$, e fazendo uso da distribuição de probabilidade Gaussiana $f(q) = (\alpha/\pi)^{1/2} e^{-\alpha q^2}$, o valor médio da densidade de energia obtido adquire um valor finito quando fazemos $z = 0$, sendo dado por $\langle 0 | \rho | 0 \rangle = -1 / (48\pi^2 \Delta^2)$, onde $\Delta = \sqrt{\langle 0 | q^2 | 0 \rangle}$ [6].

O caso de uma carga elétrica próxima a uma parede plana perfeitamente refletora situada em $z = 0$ foi estudado em 2004 [7]. Neste caso foram encontradas divergências quando a posição da partícula é dada por $z = 0$ ou por $t = 2z$. A primeira divergência está relacionada com a condição de fronteira sobre o campo eletromagnético, e a segunda foi causada pelo fato de ter considerado o sistema idealizado, onde a interação entre a partícula e o campo modificado pela presença da parede se dá de forma repentina e também sendo a fronteira plana perfeitamente refletora. Além disso, foram encontrados valores negativos nas dispersões da velocidade e posição da partícula. Para justificar tal resultado não intuitivo, vale ressaltar que para resolver o problema foi usado o propagador do campo renormalizado, ou seja, desconsiderando a contribuição do vácuo de Minkowski. Assim, uma dispersão negativa deve ser entendida como uma redução no valor da incerteza com relação ao que seria obtido sem a presença da fronteira. Foram estudados também alguns resultados como radiação do sistema e construção de alguns modelos análogos, como flutuações no cone de luz [8].

Também em 2004 foi estudado o sistema eletromagnético onde uma partícula interage com o campo elétrico na presença de duas placas perfeitamente condutoras, mostrando que o movimento Browniano da carga elétrica na direção transversal às placas é intensificado em comparação ao caso da existência de apenas uma placa. Novamente, os

resultados negativos nas dispersões foram interpretados como uma redução das incertezas quânticas da partícula [9].

Ainda referente ao caso eletromagnético, foi estudado o sistema constituído de uma partícula de massa m e carga e a uma distância z de uma placa perfeitamente refletora e a uma temperatura T . Foi mostrado que, neste caso, as dispersões da velocidade da partícula, para $\beta \doteq 1/(kT) \gg t$ e $\beta \gg z$, são dadas por [10]

$$\langle \Delta v_x^2 \rangle \approx \frac{e^2}{\pi^2 m^2} \left\{ \frac{t}{64z^3} \ln \left[\left(\frac{2z+t}{2z-t} \right)^2 \right] - \frac{t^2}{8z^2(t^2-4z^2)} \right\} + \frac{32e^2\pi^4 t^2 z^2}{945m^2 \beta^6},$$

e

$$\langle \Delta v_z^2 \rangle \approx \frac{e^2}{\pi^2 m^2} \frac{t}{32z^3} \ln \left[\left(\frac{2z+t}{2z-t} \right)^2 \right] + \frac{64e^2\pi^4 t^2 z^2}{945m^2 \beta^6}.$$

De fato, quando é feito $\beta \rightarrow \infty$, este resultado retoma os resultados para o movimento Browniano no vácuo na presença da placa.

Em 2008 foi introduzido o processo de transição, considerando que a interação entre a partícula e o campo modificado pela presença da placa ocorre de forma suave [11]. Foram considerados dois tipos de funções de transição. A primeira foi a Lorentziana $f_\tau(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\tau^2}{t^2 + \tau^2}$, onde τ é o intervalo de interação. Entretanto, o comportamento para $\tau \gg z$ foi distinto do obtido considerando o caso a interação iniciando de forma instantânea. Ainda, foi considerado um plateau Lorentziano caracterizado pelos parâmetros τ e μ , definido por

$$F_{\tau\mu}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau/2 \\ \frac{\mu^2}{(|t|/\mu - 1/2)^2 + \mu^2}, & |t| > \tau/2 \end{cases}.$$

Neste caso, a interação da partícula com o campo modificado pela presença da placa é iniciada e terminada em intervalos distintos.

Além disso, com relação ao caso eletromagnético, foram realizados outros estudos, como a análise do sistema composto por uma partícula oscilando próxima à uma placa refletora [12], ou considerando que a partícula é dada por uma função de onda, com uma densidade de probabilidade [13]. E ainda foi estudado do movimento Browniano no espaço-tempo curvo [14].

Em 2016 foi realizado um estudo do caso eletromagnético usando uma nova função de transição, um tipo de generalização da função Lorentziana, dada por [1]

$$F_\tau^{(n)} = \frac{c_n}{1 + \left(\frac{2t}{\tau}\right)^{2n}},$$

com

$$c_n = \frac{2n}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Dessa forma, foi possível eliminar as divergências encontradas ao considerar a interação iniciando de forma instantânea. Além disso, foi sugerido um experimento para medir os

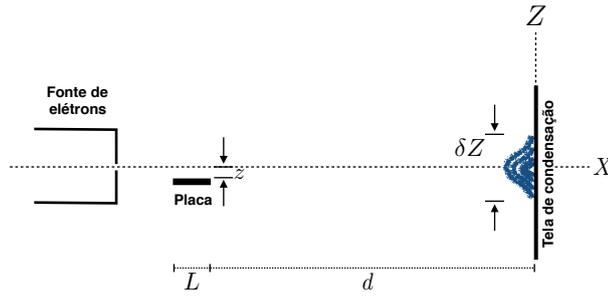


Figura 1 – Configuração de um possível experimento para medir a dispersão da posição da partícula induzida pelas flutuações de vácuo. Figura retirada da Ref. [1].

efeitos das flutuações quânticas do vácuo do campo eletromagnético. Seja a partícula teste de massa m e carga q emitida paralelamente à placa, cuja trajetória tem uma distância z da placa, e que esta está a uma distância d da tela de condensação. Com a escolha da velocidade inicial da partícula e a largura da placa tem-se $n = 65$, levando a uma predição para a dispersão da posição da partícula na tela de condensação dada por

$$\delta Z = 9.4 \left(\frac{m_e}{m} \right) \left(\frac{q}{q_e} \right) \left(\frac{1 \mu\text{m}}{z} \right) \left(\frac{d}{100\text{m}} \right) \mu\text{m},$$

onde m_e é a massa do elétron e q_e a carga do elétron. A configuração do experimento está ilustrada na Fig. 1.

Dispersões quânticas induzidas por flutuações quânticas de um campo escalar em um modelo análogo para geometria de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) na presença de uma e duas fronteiras perfeitamente refletoras foram estudadas recentemente [15]. Foi alegado que a implementação de um fator de escala dependente do tempo é suficiente para regularizar as divergências que aparecem quando uma fronteira refletora está presente, assim, fazendo o mesmo papel de realizar o processo de transição de forma suave na regularização do processo. Porém, apenas o regime para longos intervalos de tempo foi discutido, no qual nenhuma singularidade conhecida associada ao intervalo de tempo ocorre.

Com relação ao campo escalar, foi mostrado em 2014 que, em 1+1 dimensões, existem divergências em $x = 0$ (posição da fronteira) e em $t = 2x$, assim como no caso eletromagnético [16], e além disso, a dispersão na velocidade da partícula também diverge quando tomamos $t \rightarrow \infty$. Entretanto, ao considerar a natureza quântica da posição da partícula, adicionando uma flutuação estocástica em torno de x , foi obtido um resultado em termos da função hipergeométrica generalizada, regularizando as divergências em $x = 0$ e $t = 2x$, mas manteve o caráter divergente para $t \rightarrow \infty$.

Neste trabalho [17] estudamos o movimento de uma partícula teste interagindo com um campo escalar na presença de uma fronteira perfeitamente refletora em 3+1 dimensões. Os resultados mostram que o comportamento das dispersões são similares ao caso de uma

carga elétrica interagindo com o campo eletromagnético. O efeito residual relatado no caso eletromagnético também aparece no modelo do campo escalar quando o processo súbito é considerado. Entretanto, tal efeito é altamente dependente da transição adotada. Examinamos duas funções de transição convenientes e estudamos suas implicações no comportamento da dispersão da partícula.

Os conceitos usados de teoria quântica de campos estão apresentados no [Capítulo 2](#). No [Capítulo 3](#) é apresentado o mecanismo de introdução das funções de transição, estudando brevemente as características de ambas funções utilizadas. No [Capítulo 4](#) realizamos uma revisão do caso eletromagnético, estudando a regularização das divergências e o comportamento quando tomamos intervalos de tempo longos. No [Capítulo 5](#) estudamos a quantização do campo escalar na presença de uma fronteira perfeitamente refletora, efetuando tal quantização usando a expansão em modos normais e também via funções de Green. O comportamento de uma partícula teste interagindo com um campo escalar nas proximidades de uma fronteira perfeitamente refletora foi estudado no [Capítulo 6](#), obtendo as dispersões da velocidade da partícula considerando uma transição súbita e também com o uso de duas funções de transição, analisando as diferenças nos resultados e comportamentos assintóticos. Finalmente, as conclusões estão apresentadas no [Capítulo 7](#), onde foi analisada a energia cinética da partícula. Unidades são tais que $\hbar = c = 1$.

2 Teoria quântica de campos no espaço de Minkowski

Considere um campo escalar $\phi(\vec{x}, t)$ de massa m definido em todos os pontos (\vec{x}, t) de um espaço-tempo de Minkowski n -dimensional satisfazendo a equação de onda

$$\left(\square + m^2\right)\phi = 0, \quad (2.1)$$

onde $\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$, $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ e $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski. Esta equação é conhecida por equação de Klein-Gordon.

Um conjunto de soluções de Eq. (2.1) é dado por

$$u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = c_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}, \quad (2.2)$$

onde $c_{\vec{k}}$ é uma constante de normalização,

$$\omega \doteq \sqrt{k^2 + m^2}, \quad (2.3)$$

e

$$k \doteq |\vec{k}| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i^2\right)^{1/2}, \quad (2.4)$$

e as componentes Cartesianas de \vec{k} podem tomar os valores

$$-\infty < k_i < \infty, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Seja o produto de Klein-Gordon

$$\left(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}\right) = -i \int \left\{ u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) \left[\frac{\partial}{\partial t} u_{\vec{k}'}^*(\vec{x}, t) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial t} u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) \right] u_{\vec{k}'}^*(\vec{x}, t) \right\} d^{n-1}x. \quad (2.5)$$

Se escolhermos

$$u_{\vec{k}} = \frac{1}{[2\omega(2\pi)^{n-1}]^{1/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}, \quad (2.6)$$

então as funções $u_{\vec{k}}$ são normalizadas no produto de Klein-Gordon

$$\left(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}\right) = \delta^{n-1}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.7)$$

Pode ser mais conveniente restringir as soluções $u_{\vec{k}}$ no interior de um cubo de aresta L , ou seja, escolhendo condições periódicas. Neste caso,

$$u_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2L^{n-1}\omega}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}, \quad (2.8)$$

onde

$$k_i = \frac{2\pi j_i}{L}, \quad j_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Assim,

$$(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}) = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}. \quad (2.9)$$

Para converter do sistema contínuo para o discreto devemos fazer uso da mudança

$$\int d^{n-1}k \rightarrow \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \sum_{j_i} \equiv \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{n-1} \sum_{\vec{k}}.$$

2.1 Quantização de um campo escalar

Na mecânica quântica, os estados de um sistema são representados por vetores normalizados $|\psi\rangle$ de um espaço de Hilbert \mathcal{H} , onde $|\langle\varphi|\psi\rangle|^2$ é a probabilidade de encontrar o sistema descrito pelo vetor $|\psi\rangle$ no autoestado $|\varphi\rangle$ de um dado observável. Temos ainda que observáveis físicos são identificados com operadores auto-adjuntos, $A = A^\dagger$, no espaço \mathcal{H} . O valor esperado do observável A quando o sistema está no estado $|\psi\rangle$ é dado por $\langle\psi|A|\psi\rangle$ [18].

Temos que os modos normalizados dados nas Eqs. (2.6) e (2.8) e seus respectivos complexos conjugados formam uma base ortogonal com o produto escalar dado na Eq. (2.5), portanto, podemos expandir o campo ϕ na forma [19]

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \left[a_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) + a_{\vec{k}}^\dagger u_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) \right], \quad (2.10)$$

onde $a_{\vec{k}}$ e $a_{\vec{k}}^\dagger$ são os operadores aniquilação e criação [20], respectivamente, e satisfazem as relações de comutação

$$\begin{cases} [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = 0 \\ [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \\ [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \end{cases}. \quad (2.11)$$

Uma base conveniente no espaço de Hilbert \mathcal{H} é a chamada representação de Fock. A base pode ser construída partindo do vetor $|0\rangle$, definido como sendo estado de vácuo, cujo significado será discutido posteriormente. O estado $|0\rangle$ tem a propriedade de ser aniquilado por todos os operadores $a_{\vec{k}}$,

$$a_{\vec{k}} |0\rangle = 0, \quad \forall \vec{k}. \quad (2.12)$$

O estado obtido operando $a_{\vec{k}}^\dagger$ no estado $|0\rangle$ é chamado estado de uma partícula, e é denotado por $|1_{\vec{k}}\rangle$,

$$|1_{\vec{k}}\rangle = a_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle. \quad (2.13)$$

Similarmente,

$$|1_{\vec{k}_1}, 1_{\vec{k}_2}, \dots, 1_{\vec{k}_j}\rangle = a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger \cdots a_{\vec{k}_j}^\dagger |0\rangle, \quad (2.14)$$

se todos $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_j$ são distintos. Se algum $a_{\vec{k}}^\dagger$ é repetido, então

$$|1_{\vec{k}_1}, 2_{\vec{k}_2}, \dots, j_{\vec{k}_j}\rangle = (1n!2n!\cdots jn!)^{-1/2} (a_{\vec{k}_1}^\dagger)^{1n} (a_{\vec{k}_2}^\dagger)^{2n} \cdots (a_{\vec{k}_j}^\dagger)^{jn} |0\rangle. \quad (2.15)$$

Ainda,

$$a_{\vec{k}}^\dagger |n_{\vec{k}}\rangle = \sqrt{n+1} |(n+1)_{\vec{k}}\rangle, \quad (2.16)$$

e

$$a_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle = \sqrt{n} |(n-1)_{\vec{k}}\rangle. \quad (2.17)$$

2.2 Energia e momento

Para explorar o significado dos estados de Fock vamos examinar os operadores Hamiltoniana e momento para o campo. Estas quantidades são obtidas do tensor momento-energia, $T_{\mu\nu}$. O tensor $T_{\mu\nu}$ pode ser construído como [19]

$$T_{\alpha\beta} = \phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{1}{2}m^2\phi^2\eta_{\alpha\beta}. \quad (2.18)$$

Desse modo, a densidade de Hamiltoniana é

$$T_{tt} = \frac{1}{2} \left[(\partial_t\phi)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\partial_i\phi)^2 + m^2\phi^2 \right], \quad (2.19)$$

e para a densidade de momento

$$T_{ti} = \partial_t\phi\partial_i\phi, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (2.20)$$

Introduzindo a Eq. (2.10) nas Eqs. (2.19) e (2.20) e integrando em todo o espaço, teremos

$$H \equiv \int T_{tt} d^{n-1}x = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger) \omega = \sum_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \omega, \quad (2.21)$$

e

$$P_i \equiv \int T_{ti} d^{n-1}x = \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} k_i, \quad (2.22)$$

sendo os operadores Hamiltoniana e componente do momento, respectivamente, onde foram usadas as relações de comutação dadas na Eq. (2.11).

Nosso interesse agora será em torno do estado de vácuo $|0\rangle$. O valor médio do momento será dado por

$$\langle 0 | P_i | 0 \rangle = \langle 0 | \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} k_i | 0 \rangle = \sum_{\vec{k}} \langle 0 | a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} | 0 \rangle k_i = 0, \quad (2.23)$$

portanto, o estado de vácuo carrega momento nulo.

E a energia será dada por

$$\langle 0| H |0\rangle = \langle 0| \sum_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \omega |0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega. \quad (2.24)$$

Entretanto, note que, no termo da direita da Eq. (2.24) temos uma soma em \vec{k} , sendo ainda $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$, portanto, ao realizar esta soma teremos um resultado divergente, já que ω irá divergir quando tomarmos k tão grande quanto quisermos. Este resultado problemático aparece devido à energia de ponto zero $\frac{1}{2}\omega$ associada a cada modo de oscilador harmônico simples do campo escalar. Como ω não tem um limite superior, a energia de ponto zero pode ser arbitrariamente grande. A energia, como tal, não é mensurável na física não gravitacional, assim, podemos redimensionar - ou renormalizar - a energia, mesmo por uma quantidade infinita, sem afetar as quantidades observáveis. Isso pode ser feito subtraindo o termo $\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega$ na Eq. (2.21). Podemos definir a operação ordenamento normal, definida pelo símbolo $::$, fazendo com que, sempre que há um produto dos operadores de criação e aniquilação, é entendido que todos os operadores de aniquilação estão à direita dos operadores de criação. Assim, retornando à Eq. (2.21) e assumindo o ordenamento normal, temos

$$: H := \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \omega, \quad (2.25)$$

desaparecendo com o termo divergente $\frac{1}{2}\omega$.

2.3 Funções de Green

Os valores esperados no vácuo de vários produtos de um determinado campo $\phi(\vec{x}, t)$ podem ser identificados como funções de Green. Temos uma particular importância nos valores esperados do comutador e anti-comutador do campo, denotados respectivamente por

$$iG(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \langle 0| [\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t')] |0\rangle, \quad (2.26)$$

e

$$G^{(1)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \langle 0| \{\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t')\} |0\rangle, \quad (2.27)$$

onde G é conhecida como a função de Pauli-Jordan e $G^{(1)}$ é a função de Hadamard.

As funções de Pauli-Jordan e de Hadamard podem ser divididas em suas partes, uma de frequência positiva e outra de frequência negativa

$$iG(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = G^+(\vec{x}, t; \vec{x}', t') - G^-(\vec{x}, t; \vec{x}', t'), \quad (2.28)$$

e

$$G^{(1)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = G^+(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + G^-(\vec{x}, t; \vec{x}', t'), \quad (2.29)$$

onde G^\pm , conhecidas como funções de Wightman, são dadas por

$$G^+(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \langle 0 | \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}', t') | 0 \rangle, \quad (2.30)$$

e

$$G^-(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \langle 0 | \phi(\vec{x}', t') \phi(\vec{x}, t) | 0 \rangle. \quad (2.31)$$

Agora, o propagador de Feynman G_F é definido como o produto ordenado temporalmente dos campos

$$\begin{aligned} iG_F(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= \langle 0 | T(\phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}', t')) | 0 \rangle \\ &= \theta(t - t') G^+(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + \theta(t' - t) G^-(\vec{x}, t; \vec{x}', t'), \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Finalmente, as funções de Green retardada e avançada são definidas respectivamente por

$$G^{\text{Ret}}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = -\theta(t - t') G(\vec{x}, t; \vec{x}', t'), \quad (2.33)$$

e

$$G^{\text{A}}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \theta(t' - t) G(\vec{x}, t; \vec{x}', t'), \quad (2.34)$$

cuja média é denotada por

$$\bar{G}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \frac{1}{2} [G_R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + G_A(\vec{x}, t; \vec{x}', t')], \quad (2.35)$$

que está relacionada com G_F por

$$G_F(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = -\bar{G}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') - \frac{1}{2} iG^{(1)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t'). \quad (2.36)$$

A Eq. (2.36) determina a relação entre o propagador de Feynman e o propagador de Hadamard.

Para uma revisão mais completa sobre o assunto veja Ref. [19].

3 Processos de transição

Com o objetivo de tornar o sistema estudado mais realista iremos introduzir um processo de transição, que consiste em considerar que a interação entre a partícula e o campo modificado pela presença da fronteira não é mais iniciada de forma instantânea, e sim que existe um intervalo de transição entre colocar e retirar a fronteira.

Seja uma determinada quantidade \mathcal{O} dada pela integral

$$\mathcal{O} \equiv \int_0^\tau \phi(\vec{x}, t) dt = \int_{-\infty}^\infty \theta(t) \theta(\tau - t) \phi(\vec{x}, t) dt, \quad (3.1)$$

onde $\phi(\vec{x}, t)$ é um campo qualquer.

Note que no cálculo de \mathcal{O} temos que o efeito produzido pelo campo $\phi(\vec{x}, t)$ é iniciado abruptamente em $t = 0$ e desligado abruptamente em $t = \tau$. Tal comportamento não reproduz com fidelidade o que ocorre na natureza. É esperado que uma interação ocorra de forma suave. Para reproduzir tal comportamento iremos introduzir uma função de transição $F(t)$ na Eq. (3.1) motivada na seguinte da forma

$$\mathcal{O} = \int_0^\tau \phi(\vec{x}, t) dt = \int_{-\infty}^\infty \theta(t) \theta(\tau - t) \phi(\vec{x}, t) dt \rightarrow \int_{-\infty}^\infty F(t) \phi(\vec{x}, t) dt, \quad (3.2)$$

onde, no limite em que a interação é iniciada e terminada de forma instantânea, temos que $F(t)$ é identificada com $\theta(t) \theta(\tau - t)$.

Neste trabalho estamos interessados no sistema onde uma partícula interage com um campo na presença de uma fronteira, por isso, demandaremos que a função de transição $F(t)$ apresente um parâmetro relacionado ao intervalo transcorrido na mudança da configuração do espaço vazio para a configuração com a presença da fronteira, e que este parâmetro será determinado com base no arranjo experimental. E ainda, iremos impor que $F(t)$ seja normalizada da forma

$$\int_{-\infty}^\infty F(t) dt = \tau. \quad (3.3)$$

Trabalharemos com duas funções de transição diferentes. A primeira será [1]

$$F_\tau^{(n)}(t) = \frac{c_n}{1 + \left(\frac{2t}{\tau}\right)^{2n}}, \quad (3.4)$$

onde n é um inteiro positivo relacionado com o intervalo de transição entre as configurações e c_n é obtido usando Eq. (3.3), sendo

$$c_n = \frac{2n}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right). \quad (3.5)$$

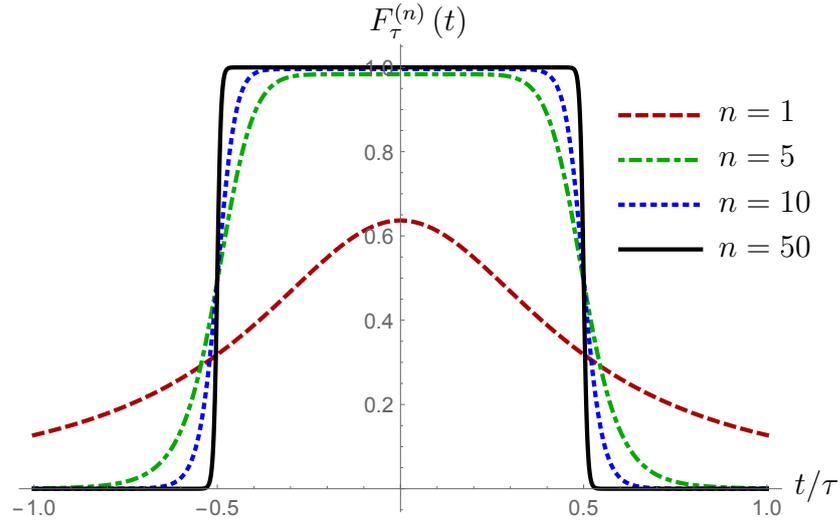


Figura 2 – Comportamento de $F_\tau^{(n)}(t)$ dada pela Eq. (3.4).

O gráfico do comportamento de $F_\tau^{(n)}(t)$, que é caracterizada pelo parâmetro n e o intervalo de tempo τ , está ilustrado na Fig. 2, para diferentes valores de n . Note que, quanto maior for o valor de n , mais o comportamento de $F_\tau^{(n)}(t)$ irá se aproximar do comportamento da função de Heaviside. Enquanto que, para $n = 1$, temos que $F_\tau^{(n)}(t)$ se torna a distribuição Lorentziana.

Podemos ainda definir o intervalo de transição τ_s como sendo a diferença entre os pontos de maior curvatura de $F_\tau^{(n)}(t)$, podendo determiná-los com o uso da terceira derivada de $F_\tau^{(n)}(t)$. Desse modo, fazendo $d^3 F_\tau^{(n)}(t)/dt^3 = 0$ obtemos

$$-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{4n} 16^n (n+1)(2n+1) + \left(\frac{t}{\tau}\right)^{2n} 2^{1+2n} (2n+1)(2n-1) - (n-1)(2n-1) = 0,$$

cujas soluções serão

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{2n} &= \frac{-2^{1+2n} (2n+1)(2n-1)}{-2 \times 16^n (n+1)(2n+1)} \\ &\pm \frac{\sqrt{[2^{1+2n} (2n+1)(2n-1)]^2 - 4 \times 16^n (n+1)(2n+1)(n-1)(2n-1)}}{-2 \times 16^n (n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{2n-1}{2^{2n} (n+1)} \pm \frac{2n-1}{2^{2n} (n+1)} \sqrt{1 - \frac{4 \times 16^n (n+1)(2n+1)(n-1)(2n-1)}{4 \times 4^{2n} (2n+1)^2 (2n-1)^2}} \\ &= \frac{2n-1}{2^{2n} (n+1)} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{(n+1)(n-1)}{(2n+1)(2n-1)}} \right]. \end{aligned}$$

Portanto, as raízes serão

$$t_1 = \frac{\tau}{2} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2n}} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{(n+1)(n-1)}{(2n+1)(2n-1)}} \right]^{\frac{1}{2n}},$$

e

$$t_2 = \frac{\tau}{2} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2n}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(n+1)(n-1)}{(2n+1)(2n-1)}} \right]^{\frac{1}{2n}}.$$

Finalmente [1],

$$\tau_s \equiv t_1 - t_2 = \frac{\tau}{2} \left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^{\frac{1}{2n}} \left\{ \left[1 + \sqrt{1 - \frac{(n+1)(n-1)}{(2n+1)(2n-1)}} \right]^{\frac{1}{2n}} - \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(n+1)(n-1)}{(2n+1)(2n-1)}} \right]^{\frac{1}{2n}} \right\}. \quad (3.6)$$

Note que, da Eq. (3.6), temos que τ_s apresenta uma dependência com τ . Portanto, se mantivermos n fixo e fizermos $\tau \rightarrow \infty$, teremos que a transição entre as configurações onde a partícula está no espaço vazio e onde ela interage com o campo modificado pela presença da fronteira se dá num intervalo infinitamente longo. Nesse sentido, usaremos outra função de transição, nesse caso, tendo τ_s independente de τ , para que possamos estudar a influência do mecanismo de transição sobre as flutuações da velocidade. Essa segunda função de transição será dada por [21]

$$F_{\tau_s, \tau}(t) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{t}{\tau_s} \right) + \arctan \left(\frac{\tau - t}{\tau_s} \right) \right]. \quad (3.7)$$

Na Fig. 3 apresentamos o perfil do comportamento de $F_{\tau_s, \tau}(t)$ para diferentes valores de τ_s/τ . Note que, nesse caso, o tempo de transição é independente do valor de τ .

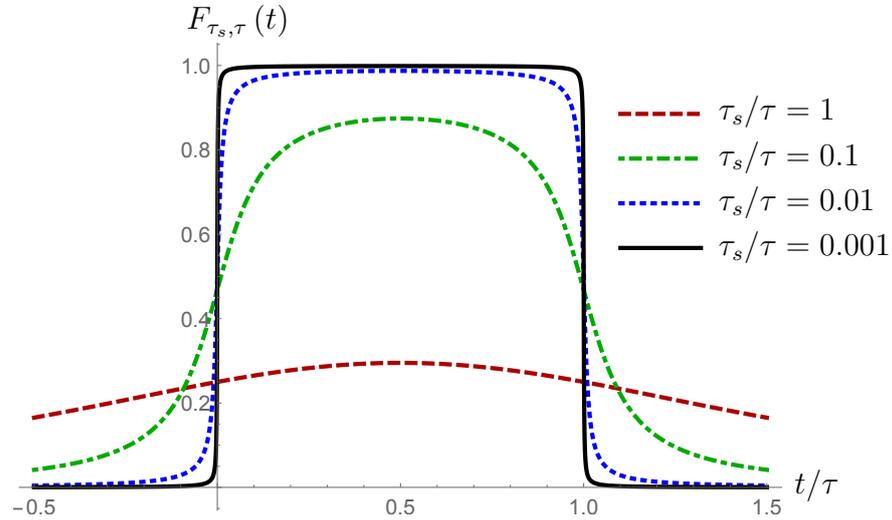


Figura 3 – Comportamento de $F_{\tau_s, \tau}(t)$ dada pela Eq. (3.7).

4 Revisão do caso eletromagnético

Nesse capítulo revisamos os resultados obtidos na Ref. [1], onde foi estudado o sistema constituído de uma partícula de carga q e massa m sujeita às flutuações do campo elétrico $\vec{E}(\vec{x}, t)$ na presença de uma placa perfeitamente refletora. Vamos assumir que o campo esteja preparado em seu estado de vácuo, definido por $\langle \vec{E}(\vec{x}, t) \rangle \doteq \langle 0 | \vec{E} | 0 \rangle = 0$, porém, que as correlações de segunda ordem do campo não sejam nulas, ou seja, $\langle E_i(\vec{x}, t) E_j(\vec{x}', t') \rangle \neq 0$. A quantidade que iremos determinar é a dispersão da velocidade da partícula $\langle (\Delta v_i)^2 \rangle = \langle v_i^2 \rangle - \langle v_i \rangle^2$.

Temos que as correlações do campo elétrico na presença de uma placa perfeitamente refletora em $z = 0$ são dadas por [22, 1]

$$\begin{aligned} \langle E_x(\vec{x}, t) E_x(\vec{x}', t') \rangle &= \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{[(\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2]^3} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (z + z')^2}{[(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z + z')^2]^3} \right\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \langle E_y(\vec{x}, t) E_y(\vec{x}', t') \rangle &= \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{[(\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2]^3} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + (z + z')^2}{[(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z + z')^2]^3} \right\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \langle E_z(\vec{x}, t) E_z(\vec{x}', t') \rangle &= \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2}{[(\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2]^3} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - (z + z')^2}{[(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z + z')^2]^3} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $\Delta a \doteq a - a'$. O primeiro termo de cada uma das correlações corresponde à contribuição do vácuo de Minkowski, e o segundo é devido à presença da placa.

O movimento da partícula, no caso não relativístico, será dado por

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{E}(\vec{x}, t) \Rightarrow \vec{v}(\vec{x}, \tau) = \frac{q}{m} \int_0^\tau \vec{E}(\vec{x}, t) dt. \quad (4.4)$$

Portanto, tendo que $\langle \vec{E}(\vec{x}, t) \rangle = 0$, para i -ésima componente,

$$\langle v_i(\vec{x}, \tau) \rangle = \frac{q}{m} \int_0^\tau \langle E_i(\vec{x}, t) \rangle dt = 0. \quad (4.5)$$

Então, sendo $\langle(\Delta v_i)^2\rangle = \langle v_i^2\rangle - \langle v_i\rangle^2$, teremos [1]

$$\langle(\Delta v_i)^2\rangle = \frac{q^2}{m^2} \int_0^\tau \int_0^\tau \langle E_i(\vec{x},t) E_i(\vec{x},t')\rangle_R dt dt', \quad (4.6)$$

onde o índice R em $\langle E_i(\vec{x},t) E_i(\vec{x},t')\rangle_R$ indica o processo de renormalização, subtraindo a contribuição do vácuo de Minkowski, o que significa retirar os termos que divergem quando tomamos a coincidência de pontos nas Eqs. (4.1), (4.2) e (4.3). Assim, tomando $\vec{x}' \rightarrow \vec{x}$, teremos [7]

$$\langle E_x(\vec{x},t) E_x(\vec{x},t')\rangle_R = \langle E_y(\vec{x},t) E_y(\vec{x},t')\rangle_R = \frac{(\Delta t)^2 + 4z^2}{\pi^2 [4z^2 - (\Delta t)^2]^3}, \quad (4.7)$$

e

$$\langle E_z(\vec{x},t) E_z(\vec{x},t')\rangle_R = \frac{1}{\pi^2 [4z^2 - (\Delta t)^2]^2}. \quad (4.8)$$

Usando as Eqs. (4.7) e (4.8) na Eq. (4.6) obtemos [7, 23, 16]

$$\begin{aligned} \langle(\Delta v_{\parallel})^2\rangle &= \frac{q^2}{\pi^2 m^2} \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{(t-t')^2 + 4z^2}{[4z^2 - (t-t')^2]^3} dt dt' \\ &= \frac{q^2}{\pi^2 m^2} \int_0^\tau 2(\tau-t) \frac{t^2 + 4z^2}{[4z^2 - t^2]^3} dt \\ &= \frac{q^2}{\pi^2 m^2} \left\{ \frac{\tau}{64z^3} \ln \left[\left(\frac{2z+\tau}{2z-\tau} \right)^2 \right] - \frac{\tau^2}{8z^2(\tau^2 - 4z^2)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

e

$$\begin{aligned} \langle(\Delta v_{\perp})^2\rangle &= \frac{q^2}{\pi^2 m^2} \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{1}{[4z^2 - (t-t')^2]^2} dt dt' \\ &= \frac{q^2}{\pi^2 m^2} \int_0^\tau 2(\tau-t) \frac{1}{[4z^2 - t^2]^2} dt \\ &= \frac{q^2}{\pi^2 m^2} \frac{\tau}{32z^3} \ln \left[\left(\frac{2z+\tau}{2z-\tau} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde $\langle(\Delta v_{\parallel})^2\rangle \equiv \langle(\Delta v_x)^2\rangle = \langle(\Delta v_y)^2\rangle$ e $\langle(\Delta v_{\perp})^2\rangle \equiv \langle(\Delta v_z)^2\rangle$.

Note que ambas as Eqs. (4.9) e (4.10) apresentam divergências em $z = 0$ e em $\tau = 2z$. Observe ainda que, para a componente perpendicular, a dispersão da velocidade apresenta um efeito residual, quando tomamos $\tau \gg z$, ou seja, nessa situação

$$\langle(\Delta v_{\perp})^2\rangle \approx \frac{q^2}{4\pi^2 m^2 z^2}.$$

Para tornar o sistema mais realista vamos introduzir a função de transição, considerando que a interação entre a partícula e o campo modificado pela presença da fronteira não ocorre mais de forma súbita, e sim que existe um intervalo de transição entre colocar e retirar a fronteira.

Agora, vamos usar a função de transição

$$F_{\tau}^{(n)}(t) = \frac{c_n}{1 + \left(\frac{2t}{\tau}\right)^{2n}}, \quad (4.11)$$

onde n é um inteiro positivo relacionado com o intervalo de transição entre as configurações onde a partícula está no espaço vazio e onde a partícula interage com o campo modificado pela presença da placa, e c_n é dado por

$$c_n = \frac{2n}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right), \quad (4.12)$$

como apresentados nas Eqs. (3.4) e (3.5).

Vamos introduzir a função de transição na Eq. (4.4) de forma análoga à usada na Eq. (3.2), ou seja, faremos

$$\vec{v}(\vec{x}, \tau) = \frac{q}{m} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau}^{(n)}(t) \vec{E}(\vec{x}, t) dt.$$

Desse modo temos [1]

$$\langle (\Delta v_i)^2 \rangle = \frac{q^2}{m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle E_i(\vec{x}, t) E_i(\vec{x}, t') \rangle_R F_{\tau}^{(n)}(t) F_{\tau}^{(n)}(t') dt dt', \quad (4.13)$$

Usando as Eqs. (4.7) e (4.8) na Eq. (4.13) obtemos

$$\langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle = \frac{q^2 c_n^2}{\pi^2 m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-t')^2 + 4z^2}{[4z^2 - (t-t')^2]^3} \frac{dt}{1 + \left(\frac{2t}{\tau}\right)^{2n}} \frac{dt'}{1 + \left(\frac{2t'}{\tau}\right)^{2n}}, \quad (4.14)$$

e

$$\langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle = \frac{q^2 c_n^2}{\pi^2 m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[4z^2 - (t-t')^2]^2} \frac{dt}{1 + \left(\frac{2t}{\tau}\right)^{2n}} \frac{dt'}{1 + \left(\frac{2t'}{\tau}\right)^{2n}}. \quad (4.15)$$

Temos que [1]

$$\begin{aligned} I_{\tau,ijkl}^{(n)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-t')^i + (2z)^j}{[(2z)^k - (t-t')^2]^l} \frac{dt}{1 + \left(\frac{2t}{\tau}\right)^{2n}} \frac{dt'}{1 + \left(\frac{2t'}{\tau}\right)^{2n}} \\ &= \frac{\pi^2}{n^2} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2+i-2l} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=n}^{2n-1} \psi_{n,p} \psi_{n,q} \frac{(\psi_{n,q} - \psi_{n,p})^i + (2z)^j (2/\tau)^i}{[(2z)^k (2/\tau)^2 - (\psi_{n,p} - \psi_{n,q})^2]^l}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde n , i e l são inteiros positivos, k e j são números reais, com a condição $i < 2l$, e ainda onde $\psi_{n,q} = e^{i\frac{\pi}{2n}(1+2q)}$.

Então, usando a Eq. (4.16) as Eqs. (4.14) e (4.15) se tornam

$$\langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle = - \left(\frac{2qc_n}{mn\tau}\right)^2 \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=n}^{2n-1} \psi_{n,p} \psi_{n,q} \frac{(\psi_{n,p} - \psi_{n,q})^2 + (4z/\tau)^2}{[(\psi_{n,p} - \psi_{n,q})^2 - (4z/\tau)^2]^3}, \quad (4.17)$$

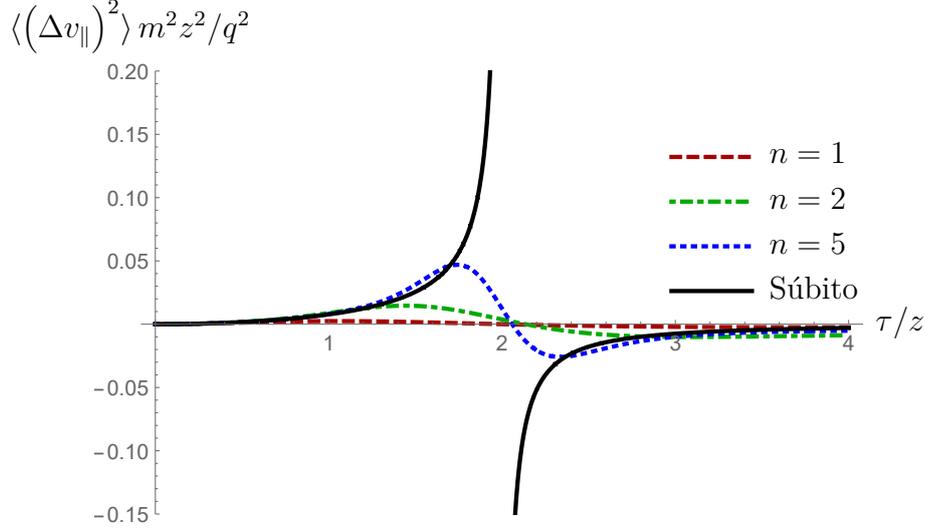


Figura 4 – Comportamento da dispersão da componente paralela da velocidade para diferentes valores de n .

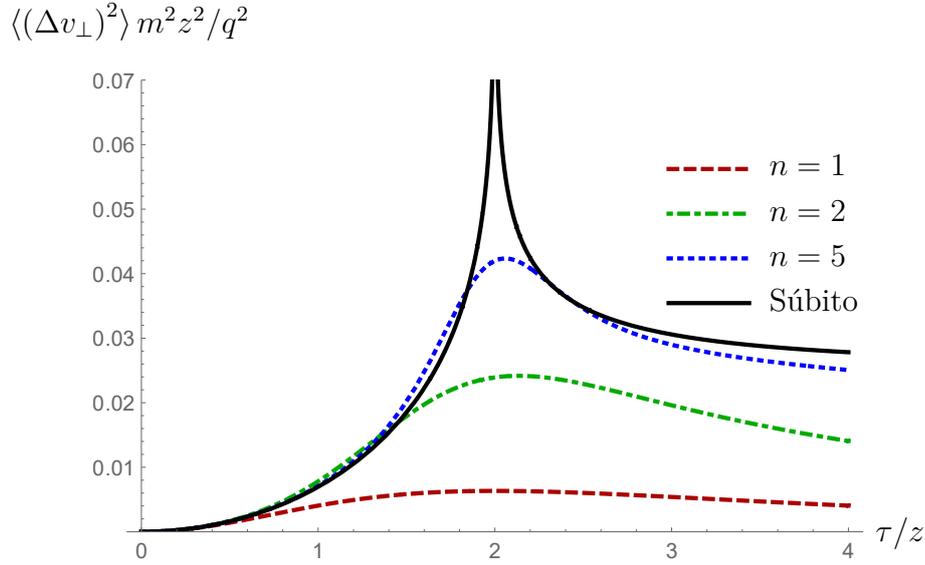


Figura 5 – Comportamento da dispersão da componente perpendicular da velocidade para diferentes valores de n .

e

$$\langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle = \left(\frac{2qc_n}{mn\tau} \right)^2 \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=n}^{2n-1} \psi_{n,p} \psi_{n,q} \frac{1}{\left[(\psi_{n,p} - \psi_{n,q})^2 - (4z/\tau)^2 \right]^2}, \quad (4.18)$$

onde $\psi_{n,s} = e^{i\frac{\pi}{2n}(1+2s)}$.

Os comportamentos das dispersões estão ilustrados nas Figs. 4 e 5. Note que as dispersões são bem comportadas em $\tau = 2z$, fato que não ocorre caso não tivéssemos considerado a função de transição [7, 8]. Outra divergência curada introduzindo o processo de transição foi o comportamento das dispersões para $z = 0$, ambas as dispersões são finitas nessa situação. E, finalmente, temos que, quando $\tau \rightarrow \infty$, $\langle (\Delta v_i)^2 \rangle \propto 1/\tau^2$, portanto, as dispersões se tornam assintoticamente nulas.

5 Quantização do campo escalar em 3+1 dimensões na presença de uma fronteira

No [Capítulo 6](#) estudaremos o movimento de uma partícula escalar carregada próxima a uma fronteira perfeitamente refletora. Mas para tal, precisaremos primeiramente quantizar o campo com o qual a partícula interage. Assim, nesse capítulo estudaremos duas maneiras para realizar tal quantização, a primeira será usando a expansão do campo em modos normais e a segunda será via formalismo das funções de Green.

5.1 Quantização via expansão em modos normais

O campo escalar $\phi(\vec{x}, t)$ de massa M em $N = 3 + 1$ dimensões deve satisfazer a equação de Klein-Gordon [\[19\]](#)

$$\left(\square + M^2\right) \phi(\vec{x}, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + M^2\right) \phi(\vec{x}, t) = 0. \quad (5.1)$$

Mas como estamos interessados num sistema contendo uma fronteira perfeitamente refletora, que estará situada em $z = 0$, iremos impor a condição de Dirichlet $\phi(x, y, z = 0, t) = 0$.

Agora, podemos expandir o campo $\phi(\vec{x}, t)$ em modos normais da forma [\[19\]](#)

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{k} \left[u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) a_{\vec{k}} + u_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) a_{\vec{k}}^\dagger \right], \quad (5.2)$$

onde a é o operador destruição e a^\dagger o operador criação, que satisfazem a relação de comutação $[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{k}')$.

Temos que as funções $u_{\vec{k}}(\vec{x}, t)$ devem ser soluções da Eq. [\(5.1\)](#), ou seja, já fazendo $M \rightarrow 0$,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = 0, \quad (5.3)$$

com $u_{\vec{k}}(x, y, z = 0, t) = 0$. Dessa maneira,

$$u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = A e^{-i\omega t} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \sin(k_z z) = A e^{-i\omega t} \prod_{j=1}^2 e^{ik_j x_j} \sin(k_z z), \quad (5.4)$$

onde A é uma constante e $\omega = |\vec{k}|$, com $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Note que da Eq. [\(5.4\)](#) temos a condição $k_z > 0$, já que dessa maneira já temos uma base completa, de fato, $\sin(-k_z z) = -\sin(k_z z)$.

Ainda, as funções $u_{\vec{k}}(\vec{x}, t)$ são normalizadas no produto de Klein-Gordon definido por [19]

$$(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}) = -i \int \left\{ u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) \left[\frac{\partial}{\partial t} u_{\vec{k}'}^*(\vec{x}, t) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial t} u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) \right] u_{\vec{k}'}^*(\vec{x}, t) \right\} d^3x = \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (5.5)$$

Mas, para $k_z > 0$ e $k_z' > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = -i\omega A e^{-i\omega t} \prod_{j=1}^2 e^{ik_j x_j} \sin(k_z z), \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\vec{k}'}^*(\vec{x}, t) = i\omega' A^* e^{i\omega' t} \prod_{j=1}^2 e^{-ik_j' x_j} \sin(k_z' z), \quad (5.7)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_j - k_j') x_j} dx_j = \delta(k_j - k_j'), \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(k_z x) \sin(k_z' x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(k_z x) \sin(k_z' x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{ik_z x} - e^{-ik_z x}}{2i} \right) \left(\frac{e^{ik_z' x} - e^{-ik_z' x}}{2i} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(k_z + k_z') x} - e^{i(k_z - k_z') x}] dx \\ &= -[\delta(k_z + k_z') - \delta(k_z - k_z')] = \delta(k_z - k_z'), \end{aligned} \quad (5.9)$$

já que $k_z > 0$ e $k_z' > 0 \Rightarrow k_z + k_z' > 0 \Rightarrow \delta(k_z + k_z') = 0$.

Assim, Eq. (5.5) se torna,

$$\begin{aligned} (u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}) &= -i \int_{z>0} \left\{ u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) \left[\frac{\partial}{\partial t} u_{\vec{k}'}^*(\vec{x}, t) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial t} u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) \right] u_{\vec{k}'}^*(\vec{x}, t) \right\} d^3x \\ &= -i \int_{z>0} i(\omega' + \omega) |A|^2 e^{-i(\omega - \omega')t} \prod_{j=1}^2 e^{i(k_j - k_j') x_j} \sin(k_z z) \sin(k_z' z) d^3x \\ &= (\omega' + \omega) |A|^2 e^{-i(\omega - \omega')t} \prod_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_j - k_j') x_j} dx_j \int_0^{\infty} \sin(k_z z) \sin(k_z' z) dz \\ &= (\omega' + \omega) |A|^2 e^{-i(\omega - \omega')t} (2\pi)^2 \prod_{j=1}^2 \delta(k_j - k_j') \frac{\pi}{2} \delta(k_z - k_z') \\ &= \omega |A|^2 2^2 \pi^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \therefore |A|^2 = \frac{1}{\omega 4\pi^3}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

sendo que a integral em z deve variar em z positivo, já que para z negativo $u_{\vec{k}}(\vec{x}, t)$ deve ser nulo, o que corresponde ao fato do campo se anular no interior da parede.

Escolhendo A real, obtemos finalmente que

$$u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi^{3/2} \sqrt{\omega}} e^{ik_x x + ik_y y - i\omega t} \sin(k_z z). \quad (5.11)$$

Sendo o estado de vácuo definido por $a|0\rangle = 0$, o que implica que $\langle a \rangle \doteq \langle 0|a|0\rangle = \langle 0|a^\dagger|0\rangle = 0$, o valor esperado no vácuo do produto $\phi(\vec{x},t)\phi(\vec{x}',t')$ é obtido como segue

$$\begin{aligned}
 \langle \phi(\vec{x},t)\phi(\vec{x}',t') \rangle &= \left\langle \int_{k_z > 0} d^3\vec{k} \left[u_{\vec{k}}(\vec{x},t) a_{\vec{k}} + u_{\vec{k}}^*(\vec{x},t) a_{\vec{k}}^\dagger \right] \right. \\
 &\quad \left. + \int_{k_z' > 0} d^3\vec{k}' \left[u_{\vec{k}'}(\vec{x}',t') a_{\vec{k}'} + u_{\vec{k}'}^*(\vec{x}',t') a_{\vec{k}'}^\dagger \right] \right\rangle \\
 &= \left\langle \int_{k_z > 0} d^3\vec{k} \int_{k_z' > 0} d^3\vec{k}' u_{\vec{k}}(\vec{x},t) u_{\vec{k}'}^*(\vec{x}',t') a_{\vec{k}} a_{\vec{k}'}^\dagger \right\rangle \\
 &= \left\langle \int_{k_z > 0} d^3\vec{k} \int_{k_z' > 0} d^3\vec{k}' u_{\vec{k}}(\vec{x},t) u_{\vec{k}'}^*(\vec{x}',t') \left([a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] + a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}'} \right) \right\rangle \quad (5.12) \\
 &= \left\langle \int_{k_z > 0} d^3\vec{k} \int_{k_z' > 0} d^3\vec{k}' u_{\vec{k}}(\vec{x},t) u_{\vec{k}'}^*(\vec{x}',t') \delta(\vec{k} - \vec{k}') \right\rangle \\
 &= \int_{k_z > 0} d^3\vec{k} |u_{\vec{k}}|^2 e^{-i\omega(t-t')} \prod_{j=1}^2 e^{ik_j(x_j-x'_j)} \sin(k_z z) \sin(k_z z') \\
 &= \int_{k_z > 0} d^3\vec{k} \frac{1}{4\pi^3 \omega} e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} \sin(k_z z) \sin(k_z z').
 \end{aligned}$$

Este resultado é a função de Wightman positiva, como indicada na Eq. (2.30).

Dessa maneira, o propagador de Hadamard, definido na Eq. (2.27), será [19]

$$\begin{aligned}
 G^{(1)}(\vec{x},t;\vec{x}',t') &= \langle \phi(\vec{x},t)\phi(\vec{x}',t') \rangle + \langle \phi(\vec{x}',t')\phi(\vec{x},t) \rangle \\
 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_{k_z > 0} \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \sin(k_z z) \sin(k_z z') \\
 &\quad \times \left\{ e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} + e^{-i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} \right\} \\
 &= \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \left(\frac{e^{ik_z z} - e^{-ik_z z}}{2i} \right) \left(\frac{e^{ik_z z'} - e^{-ik_z z'}}{2i} \right) \\
 &\quad \times \left\{ e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} + e^{-i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} \right\} \\
 &= -\frac{1}{32\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \left[e^{ik_z(z+z')} - e^{ik_z(z-z')} - e^{-ik_z(z-z')} + e^{-ik_z(z+z')} \right] \\
 &\quad \times \left\{ e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} + e^{-i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} \right\} \\
 &= -\frac{1}{16\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \left[e^{ik_z(z+z')} - e^{ik_z(z-z')} \right] \\
 &\quad \times \left\{ e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} + e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') + \omega(t-t')]} \right\} \\
 &= -\frac{1}{8\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \cos[\omega(t-t')] e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') + k_z(z+z')]} \\
 &\quad + \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \cos[\omega(t-t')] e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') + k_z(z-z')]} .
 \end{aligned}$$

Note que o segundo termo é devido ao vácuo de Minkowski enquanto o primeiro é a contribuição para o propagador devido à presença da fronteira. O propagador renormalizado é obtido quando abandonamos a contribuição de Minkowski. Ou mais formalmente, definimos o propagador renormalizado como $G_R^{(1)} = G^{(1)} - G_0^{(1)}$, onde

$$G_0^{(1)}(\vec{x},t;\vec{x}',t') = \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \cos[\omega(t-t')] e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') + k_z(z-z')]} . \quad (5.13)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 G_R^{(1)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= -\frac{1}{8\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \cos[\omega(t-t')] e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') + k_z(z+z')]} \\
 &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{k^2 \sin\theta dk d\theta d\varphi}{k} \cos[k(t-t')] e^{ik\eta \cos\theta} \\
 &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty k \cos[k(t-t')] \frac{2 \sin(k\eta)}{k\eta} dk \\
 &= -\frac{1}{2\pi^2\eta} \int_0^\infty \cos[k(t-t')] \sin(k\eta) dk \\
 &= -\frac{1}{2\pi^2\eta} \int_0^\infty \operatorname{Re} [e^{-ik(t-t')}] \sin(k\eta) dk \\
 &= \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2\pi^2\eta} \int_0^\infty e^{-ik(t-t')} \sin(k\eta) dk \right],
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

onde $\vec{\eta} = (x - x', y - y', z + z')$ e $\eta = |\vec{\eta}|$. Ou ainda, fazendo $t' \rightarrow t' + i\epsilon$, teremos que (veja Eq. (3.893.1) da Ref. [24])

$$\begin{aligned}
 G_R^{(1)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= -\frac{1}{2\pi^2 [\eta^2 - (t-t')^2]} \\
 &= -\frac{1}{2\pi^2 [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 - (t-t')^2]},
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

estando de acordo com o resultado conhecido na literatura [19].

5.2 Quantização via funções de Green

Nessa seção vamos usar o formalismo das funções de Green para encontrar a solução da Eq. (5.1). Para tal, precisamos primeiramente resolver a equação de autovalores

$$(\square + M^2) \psi(\vec{x}, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + M^2 \right) \psi(\vec{x}, t) = \lambda \psi(\vec{x}, t). \tag{5.16}$$

Como estamos interessados na quantização do campo na presença de uma fronteira perfeitamente refletora em $z = 0$ vamos impor a condição de Dirichlet $\psi(x, y, z = 0, t) = 0$. Assim, procuraremos por soluções da Eq. (5.16) do tipo

$$\psi(\vec{x}, t) = c_0 e^{-i\omega t} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \sin(k_z z), \tag{5.17}$$

onde c_0 é uma constante de normalização.

Desse modo, as derivadas de $\psi(\vec{x}, t)$ serão dadas por

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{x}, t) = -\omega^2 \psi(\vec{x}, t), \tag{5.18}$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \psi(\vec{x}, t) = -k_i^2 \psi(\vec{x}, t). \tag{5.19}$$

Usando as Eqs. (5.18) e (5.19) na Eq. (5.16) temos

$$\left(-\omega^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + M^2\right) \psi(\vec{x}, t) = \lambda \psi(\vec{x}, t) \therefore -\omega^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + M^2 = \lambda. \quad (5.20)$$

Agora, vamos requerer que as autofunções na Eq (5.17) sejam ortonormais, ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \psi(\vec{x}, t) \psi^*(\vec{x}', t') \\ &= \delta(t - t') \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z'). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Mas,

$$\psi(\vec{x}, t) \psi^*(\vec{x}', t') = |c_0|^2 e^{-i\omega(t-t')} e^{ik_x(x-x')} e^{ik_y(y-y')} \sin(k_z z) \sin(k_z z'). \quad (5.22)$$

Desse modo, usando a Eq. (5.22) na Eq. (5.21)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \psi(\vec{x}, t) \psi^*(\vec{x}', t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |c_0|^2 e^{-i\omega(t-t')} e^{ik_x(x-x')} e^{ik_y(y-y')} \sin(k_z z) \sin(k_z z') \\ &= |c_0|^2 2\pi \delta(t - t') 2\pi \delta(x - x') 2\pi \delta(y - y') \pi \delta(z - z') \\ &= |c_0|^2 8\pi^4 \delta(t - t') \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z'), \end{aligned}$$

portanto

$$|c_0|^2 = \frac{1}{8\pi^4},$$

e escolhendo c_0 como uma constante real,

$$c_0 = \frac{1}{2^{3/2}\pi^2}. \quad (5.23)$$

Assim, Eq. (5.17) se torna

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2^{3/2}\pi^2} e^{-i\omega t} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \sin(k_z z). \quad (5.24)$$

Agora, para calcular o propagador de Feynman usamos a relação [23]

$$G_F(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = -i \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\lambda\eta} \psi(\vec{x}, t) \psi^*(\vec{x}', t'). \quad (5.25)$$

De fato, sendo que o propagador de Feynman deve satisfazer a equação [19]

$$\left(\square_x + M^2\right) G_F(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t'), \quad (5.26)$$

onde \square_x indica o d'alembertiano com relação ao \vec{x} . Agora, usando as Eqs. (5.16), (5.21) e (5.25)

$$\begin{aligned}
(\square_x + M^2) G_F(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= (\square_x + M^2) \left[-i \int_0^\infty d\eta \int_{-\infty}^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y \int_{-\infty}^\infty dk_z \right. \\
&\quad \left. \times \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{-i\lambda\eta} \psi(\vec{x}, t) \psi^*(\vec{x}', t') \right] \\
&= -i \int_0^\infty d\eta \int_{-\infty}^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y \int_{-\infty}^\infty dk_z \int_{-\infty}^\infty d\omega \\
&\quad \times e^{-i\lambda\eta} (\square_x + M^2) [\psi(\vec{x}, t) \psi^*(\vec{x}', t')] \\
&= -i \int_0^\infty d\eta \int_{-\infty}^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y \int_{-\infty}^\infty dk_z \int_{-\infty}^\infty d\omega \\
&\quad \times e^{-i\lambda\eta} [(\square_x + M^2) \psi(\vec{x}, t)] \psi^*(\vec{x}', t') \\
&= -i \int_0^\infty d\eta \int_{-\infty}^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y \int_{-\infty}^\infty dk_z \int_{-\infty}^\infty d\omega \\
&\quad \times e^{-i\lambda\eta} \lambda \psi(\vec{x}, t) \psi^*(\vec{x}', t') \\
&= -i \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') \int_0^\infty d\eta e^{-i\lambda\eta} \lambda.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty d\eta e^{-i\lambda\eta} \lambda &= \int_0^\infty d\eta \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-i(\lambda - i\epsilon)\eta} (\lambda - i\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_0^\infty d\eta (-i\lambda - \epsilon) e^{(-i\lambda - \epsilon)\eta} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i e^{(-i\lambda - \epsilon)\eta} \Big|_0^\infty = -i.
\end{aligned}$$

Assim, a Eq. (5.27) se torna

$$(\square_x + M^2) G_F(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = -i \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') (-i) = -\delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t'),$$

estando de acordo com a Eq. (5.26).

Agora vamos prosseguir com o cálculo do propagador. Usando as Eqs. (5.20) e (5.24) na Eq. (5.25) temos

$$\begin{aligned}
G_F(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= -i \int_0^\infty d\eta \int_{-\infty}^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y \int_{-\infty}^\infty dk_z \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{-i\lambda\eta} \psi(\vec{x}, t) \psi^*(\vec{x}', t') \\
&= -i \int_0^\infty d\eta \int_{-\infty}^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y \int_{-\infty}^\infty dk_z \int_{-\infty}^\infty d\omega \\
&\quad \times e^{-i(-\omega^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + M^2)\eta} \frac{1}{2^3 \pi^4} e^{-i\omega(t-t')} e^{ik_x(x-x')} e^{ik_y(y-y')} \\
&\quad \times \sin(k_z z) \sin(k_z z') \\
&= -\frac{i}{2^3 \pi^4} \int_0^\infty d\eta e^{-i\eta M^2} \int_{-\infty}^\infty dk_z e^{-ik_z^2 \eta} \sin(k_z z) \sin(k_z z') \\
&\quad \times \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{i\omega^2 \eta - i\omega(t-t')} \int_{-\infty}^\infty dk_x e^{-ik_x^2 \eta + ik_x(x-x')} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^\infty dk_y e^{-ik_y^2 \eta + ik_y(y-y')}.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iax^2 + ibx) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\left(\sqrt{ia}x + \frac{ib}{2\sqrt{ia}} \right)^2 - \frac{ib^2}{4a} \right] dx \\ &= \exp \left(-\frac{ib^2}{4a} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\left(\sqrt{ia}x + \frac{ib}{2\sqrt{ia}} \right)^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Fazendo $\sqrt{ia}x + (ib)/(2\sqrt{ia}) = \sqrt{iap} \therefore dx = dp$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iax^2 + ibx) dx &= \exp \left(-\frac{ib^2}{4a} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[(\sqrt{iap})^2 \right] dp \\ &= \exp \left(-\frac{ib^2}{4a} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ip^2) dp = \exp \left(-\frac{ib^2}{4a} \right) \sqrt{\frac{\pi}{-ia}}, \end{aligned}$$

para $\text{Im}(a) > 0$. Desse modo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega^2\eta - i\omega(t-t')} = \exp \left[-\frac{i(t-t')^2}{4\eta} \right] \sqrt{\frac{\pi}{-i\eta}} = e^{i\pi/4} \exp \left[-\frac{i(t-t')^2}{4\eta} \right] \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}, \quad (5.29)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-ik_x^2\eta + ik_x(x-x')} &= \exp \left[-\frac{i(x-x')^2}{4(-\eta)} \right] \sqrt{\frac{\pi}{-i(-\eta)}} \\ &= e^{-i\pi/4} \exp \left[\frac{i(x-x')^2}{4\eta} \right] \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

analogamente para k_y .

Então, a Eq. (5.28) se torna

$$\begin{aligned} G_F(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= -\frac{i}{2^3\pi^4} \int_0^\infty d\eta e^{-i\eta M^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{-ik_z^2\eta} \sin(k_z z) \sin(k_z z') e^{-i\pi/4} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 - (t-t')^2 \right]}{4\eta} \right\} \left(\frac{\pi}{\eta} \right)^{3/2} \\ &= \frac{e^{-3i\pi/4}}{2^3\pi^{5/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \sin(k_z z) \sin(k_z z') \\ &\quad \times \int_0^\infty d\eta \eta^{-3/2} \exp \left\{ -i(k_z^2 + M^2)\eta \right. \\ &\quad \left. + \frac{i \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 - (t-t')^2 \right]}{4\eta} \right\} \\ &= \frac{e^{-3i\pi/4}}{2^3\pi^{5/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \sin(k_z z) \sin(k_z z') \\ &\quad \times \int_0^\infty d\eta \eta^{-3/2} \exp \left\{ -i(k_z^2 + M^2) \right. \\ &\quad \left. \times \left[\eta + \frac{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2}{4\eta(k_z^2 + M^2)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Para resolver primeiramente a integral em η vamos usar o resultado (veja Eq. (3.471.11) da Ref. [24])

$$\int_0^\infty dx x^{\nu-1} \exp \left[\frac{i\mu}{2} \left(x + \frac{\beta^2}{x} \right) \right] = i\pi\beta^\nu \exp \left(-\frac{i\nu\pi}{2} \right) H_{-\nu}^{(1)}(\beta\mu),$$

para $\text{Im}(\mu) > 0$ e $\text{Im}(\beta^2\mu) > 0$, sendo $H_{-\nu}^{(1)}(z)$ as funções de Bessel do terceiro tipo. Portanto, com $\nu = -1/2$, $\mu = -2(k_z^2 + M^2)$ e

$$\beta^2 = \frac{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2}{4(k_z^2 + M^2)} \therefore \beta = \frac{\sqrt{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2}}{2\sqrt{k_z^2 + M^2}},$$

teremos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d\eta \eta^{-3/2} \exp \left\{ -i(k_z^2 + M^2) \left[\eta + \frac{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2}{4\eta(k_z^2 + M^2)} \right] \right\} \\ &= i\pi \left[\frac{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2}{4(k_z^2 + M^2)} \right]^{-1/4} \exp \left(\frac{i\pi}{4} \right) \\ & \times H_{1/2}^{(1)} \left\{ \frac{\sqrt{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2}}{2\sqrt{k_z^2 + M^2}} \left[-2(k_z^2 + M^2) \right] \right\} \quad (5.32) \\ &= \pi e^{3i\pi/4} \left[\frac{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2}{4(k_z^2 + M^2)} \right]^{-1/4} \\ & \times H_{1/2}^{(1)} \left[-\sqrt{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2} \sqrt{k_z^2 + M^2} \right]. \end{aligned}$$

Assim, a Eq. (5.31) se torna

$$\begin{aligned} G_F(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= \frac{1}{2^3 \pi^{3/2}} \left[\frac{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2}{4} \right]^{-1/4} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \sin(k_z z) \sin(k_z z') (k_z^2 + M^2)^{1/4} \quad (5.33) \\ & \times H_{1/2}^{(1)} \left[-\sqrt{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2} \sqrt{k_z^2 + M^2} \right]. \end{aligned}$$

Usando que (veja Eq. (5.7.5) da Ref. [25])

$$H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{2}{\pi i^{1+\nu}} K_\nu(z),$$

onde $K_\nu(z)$ é a função de Macdonald ou função de Bessel modificada de terceiro tipo.

Desse modo, a Eq. (5.33) fica

$$\begin{aligned}
 G_F(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= \frac{1}{2^3 \pi^{3/2}} \left[\frac{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2}{4} \right]^{-1/4} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \sin(k_z z) \sin(k_z z') (k_z^2 + M^2)^{1/4} \\
 &\quad \times \frac{2}{\pi i^{3/2}} K_{1/2} \left[i \sqrt{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2} \sqrt{k_z^2 + M^2} \right] dk_z \quad (5.34) \\
 &= \frac{1}{2^{3/2} i^{3/2} \pi^{5/2}} \left[(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 \right]^{-1/4} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \sin(k_z z) \sin(k_z z') (k_z^2 + M^2)^{1/4} \\
 &\quad \times K_{1/2} \left[i \sqrt{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2} \sqrt{k_z^2 + M^2} \right] dk_z.
 \end{aligned}$$

E agora, temos a relação trigonométrica

$$\sin(k_z z) \sin(k_z z') = \frac{\cos[k_z(z-z')] - \cos[k_z(z+z')]}{2}.$$

Portanto, também usando que o integrando é uma função par com relação à k_z ,

$$\begin{aligned}
 G_F(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= \frac{1}{2^{3/2} i^{3/2} \pi^{5/2}} \left[(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 \right]^{-1/4} \\
 &\quad \times \left\{ \int_0^{\infty} \cos[k_z(z-z')] (k_z^2 + M^2)^{1/4} \right. \\
 &\quad \times K_{1/2} \left[i \sqrt{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2} \sqrt{(k_z^2 + M^2)} \right] dk_z \quad (5.35) \\
 &\quad - \int_0^{\infty} \cos[k_z(z+z')] (k_z^2 + M^2)^{1/4} \\
 &\quad \left. \times K_{1/2} \left[i \sqrt{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2} \sqrt{(k_z^2 + M^2)} \right] dk_z \right\}.
 \end{aligned}$$

Vamos usar que (veja Eq. (6.726.4) da Ref. [24])

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} (x^2 + b^2)^{\mp\nu/2} K_{\nu}(a\sqrt{x^2 + b^2}) \cos(cx) dx &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} a^{\mp\nu} b^{1/2 \mp \nu} (a^2 + c^2)^{\pm\nu/2 - 1/4} \\
 &\quad \times K_{\pm\nu - 1/2}(b\sqrt{a^2 + c^2}),
 \end{aligned}$$

para $\text{Re}(a) > 0$, $\text{Re}(b) > 0$ e c real. Finalmente, a Eq. (5.35) se torna, tomando o sinal

positivo e sendo $\nu = 1/2$, $a = i\sqrt{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2}$, $b = M$ e $c = z \pm z'$,

$$\begin{aligned}
 G_F(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= \frac{1}{2^{3/2} i^{3/2} \pi^{5/2}} \left[(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 \right]^{-1/4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
 &\quad \times \left[i\sqrt{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2} \right]^{1/2} M \\
 &\quad \times \left\{ \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 - (t-t')^2 + (z-z')^2 \right]^{-1/2} \right. \\
 &\quad \times K_{-1} \left[M\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 - (t-t')^2 + (z-z')^2} \right] \\
 &\quad \left. - \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 - (t-t')^2 + (z+z')^2 \right]^{-1/2} \right. \\
 &\quad \left. \times K_{-1} \left[M\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 - (t-t')^2 + (z+z')^2} \right] \right\} \quad (5.36) \\
 &= -\frac{iM}{2^2 \pi^2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 - (t-t')^2 + (z-z')^2 \right]^{-1/2} \\
 &\quad \times K_{-1} \left[M\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 - (t-t')^2 + (z-z')^2} \right] \\
 &\quad + \frac{iM}{2^2 \pi^2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 - (t-t')^2 + (z+z')^2 \right]^{-1/2} \\
 &\quad \times K_{-1} \left[M\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 - (t-t')^2 + (z+z')^2} \right] \\
 &= G_0(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + G_F^R(\vec{x}, t; \vec{x}', t'),
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 G_0(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= -\frac{iM}{2^2 \pi^2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - (t-t')^2 \right]^{-1/2} \\
 &\quad \times K_{-1} \left[M\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - (t-t')^2} \right], \quad (5.37)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 G_F^R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= -\frac{iM}{2^2 \pi^2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 - (t-t')^2 \right]^{-1/2} \\
 &\quad \times K_{-1} \left[M\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 - (t-t')^2} \right]. \quad (5.38)
 \end{aligned}$$

Temos que o termo $G_0(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$ é devido ao vácuo de Minkowski, na ausência da fronteira, e $G_F^R(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$ é o propagador renormalizado, devido à presença da fronteira.

Agora, temos que (veja Eqs. (5.7.10) e (5.7.12) da Ref. [25])

$$\begin{aligned}
 K_{-\nu}(z) &= K_{\nu}(z) \\
 K_n(z) &\approx \frac{1}{2} (n-1)! \left(\frac{z}{2} \right)^{-n}, \quad z \rightarrow 0, \quad n = 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

portanto,

$$K_{-1}(z) = K_1(z) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^{-1} = \frac{1}{z}, \quad z \rightarrow 0. \quad (5.39)$$

Fazendo $M\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 - (t-t')^2} \ll 1$ em Eq. (5.38)

$$G_F^R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \frac{i}{(2\pi)^2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 - (t-t')^2 \right]^{-1}. \quad (5.40)$$

Finalmente, a relação entre o propagador de Feynman e o de Hadamard é dada por

$$G_F(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = -\bar{G}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') - \frac{i}{2} G^{(1)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t').$$

Temos ainda que, neste caso, o termo $\bar{G}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$ será nulo (veja [Apêndice A](#)), portanto

$$G^{(1)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = -\frac{2}{i} G_F(\vec{x}, t; \vec{x}', t'). \quad (5.41)$$

Finalmente, usando Eq. (5.40) e tomando o propagador renormalizador,

$$\begin{aligned} G_R^{(1)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= -\frac{2}{i} G_F^R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') \\ &= -\frac{1}{2\pi^2 [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 - (t-t')^2]}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Assim, obtemos um resultado de acordo com a Eq. (5.15).

6 Comportamento de uma partícula escalar carregada próxima a uma fronteira perfeitamente refletora em 3+1 dimensões

O movimento de uma partícula teste de massa m e carga g interagindo com um campo escalar $\phi(\vec{x},t)$, no regime não relativístico, é dado por [26, 16]

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -g \nabla \phi(\vec{x},t). \quad (6.1)$$

Se nós restringirmos nosso estudo ao caso onde a posição da partícula não varia apreciavelmente no tempo [8, 10], a velocidade da partícula será

$$v_i = -\frac{g}{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^\tau \phi(\vec{x},t) dt. \quad (6.2)$$

Dessa maneira, o valor médio da i -ésima componente da velocidade da partícula será

$$\langle v_i \rangle \doteq \langle 0 | v_i | 0 \rangle = -\frac{g}{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^\tau \langle \phi(\vec{x},t) \rangle dt. \quad (6.3)$$

Portanto, sendo o estado de vácuo definido por $a | 0 \rangle = 0$, o que implica que $\langle a \rangle \doteq \langle 0 | a | 0 \rangle = \langle 0 | a^\dagger | 0 \rangle = 0$. Assim Eq. (6.3) se torna

$$\langle v_i \rangle = 0. \quad (6.4)$$

Agora, da Eq. (6.2), podemos escrever v_i^2 como

$$\begin{aligned} v_i^2 &= \frac{g^2}{m^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^\tau \phi(\vec{x},t) dt \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^\tau \phi(\vec{x},t') dt' \right) \\ &= \frac{g^2}{m^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^\tau \phi(\vec{x},t) dt \right) \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^\tau \phi(\vec{x}',t') dt' \right]_{\vec{x}'=\vec{x}}. \end{aligned}$$

Agrupando as derivadas e integrais,

$$v_i^2 = \frac{g^2}{m^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i'} \int_0^\tau \int_0^\tau \phi(\vec{x},t) \phi(\vec{x}',t') dt dt' \right]_{\vec{x}'=\vec{x}}.$$

Mas para que v_i^2 seja um observável, portanto Hermitiano, devemos escrevê-lo como

$$v_i^2 = \frac{g^2}{2m^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i'} \int_0^\tau \int_0^\tau [\phi(\vec{x},t) \phi(\vec{x}',t') + \phi(\vec{x}',t') \phi(\vec{x},t)] dt dt' \right\}_{\vec{x}'=\vec{x}}.$$

E o valor esperado no vácuo será

$$\begin{aligned} \langle v_i^2 \rangle &= \frac{g^2}{2m^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\tau \int_0^\tau \langle \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}', t') + \phi(\vec{x}', t') \phi(\vec{x}, t) \rangle dt dt' \right\}_{\vec{x}'=\vec{x}} \\ &= \frac{g^2}{2m^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\tau \int_0^\tau G^{(1)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') dt dt' \right]_{\vec{x}'=\vec{x}}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde $G^{(1)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$ é o propagador de Hadamard [19].

Desconsideremos a contribuição de vácuo em Eq. (6.5), pois esta não causa efeito no movimento da partícula teste [27]. Então, usando também Eq. (6.4),

$$\langle (\Delta v_i)^2 \rangle = \langle v_i^2 \rangle - \langle v_i \rangle^2 = \langle v_i^2 \rangle = \frac{g^2}{2m^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\tau \int_0^\tau G_R^{(1)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') dt dt' \right]_{\vec{x}'=\vec{x}}. \quad (6.6)$$

Usando Eq. (5.42)

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v_i)^2 \rangle &= -\frac{g^2}{4m^2\pi^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \right. \\ &\quad \left. \times \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 - (t-t')^2 \right]^{-1} \right\}_{\vec{x}'=\vec{x}}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Antes de prosseguir vamos demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 6.1. *Seja $f(x, y)$ uma função da forma $f(x, y) = f(|x - y|)$, então*

$$\int_0^\tau \int_0^\tau f(x, y) dx dy = 2 \int_0^\tau (\tau - w) f(w) dw. \quad (6.8)$$

Demonstração. Vamos introduzir as novas coordenadas dadas por

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y).$$

Dessa maneira, as coordenadas x e y são escritas como

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v),$$

e o Jacobiano será

$$\mathcal{J} = \left\| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\| = 1.$$

Então, usando a mudança nos limites de integração ilustrada na Fig. 6, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^\tau f(x, y) dx dy &= \int_0^\tau \int_0^\tau f(|x - y|) dx dy = \int_{-\tau/\sqrt{2}}^{\tau/\sqrt{2}} \int_{|v|}^{\sqrt{2}\tau - |v|} f(\sqrt{2}|v|) dudv \\ &= \int_{-\tau/\sqrt{2}}^{\tau/\sqrt{2}} (\sqrt{2}\tau - 2|v|) f(\sqrt{2}|v|) dv. \end{aligned}$$

Usando o fato de que a função módulo é par,

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^\tau f(x,y) dx dy &= \int_{-\tau/\sqrt{2}}^{\tau/\sqrt{2}} (\sqrt{2}\tau - 2|v|) f(\sqrt{2}|v|) dv \\ &= 2 \int_0^{\tau/\sqrt{2}} (\sqrt{2}\tau - 2v) f(\sqrt{2}v) dv. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Agora, seja $w = x - y = \sqrt{2}v \therefore dw = \sqrt{2}dv$, então, Eq. (6.9) se torna

$$\int_0^\tau \int_0^\tau f(x,y) dx dy = 2 \int_0^\tau (\sqrt{2}t - \sqrt{2}w) f(w) \frac{dw}{\sqrt{2}} = 2 \int_0^\tau (t - w) f(w) dw. \quad (6.10)$$

□

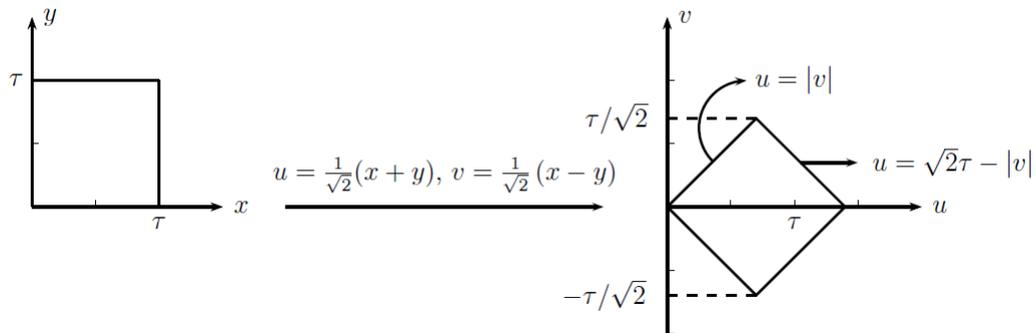


Figura 6 – Mudança nos limites de integração.

Assim, usando o Teorema 6.1, a integral típica da Eq. (6.7) fica reescrita como

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' [a^2 - (t - t')^2]^{-1} = 2 \int_0^\tau \frac{(\tau - t)}{(a^2 - t^2)} dt \\ &= 2 \int_0^\tau a \left(\frac{\tau}{a} - \frac{t}{a} \right) \frac{dt}{a^2 [1 - (t/a)^2]} = 2 \int_0^{\tau/a} \left(\frac{\tau}{a} - \eta \right) \frac{d\eta}{(1 - \eta^2)}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

onde $\eta = t/a$ e $a^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2$.

Agora, com o objetivo de contornar as divergências em $\eta = 1$ na Eq. (6.11), seja

$$I_\delta = \int_0^{1-\delta} \left(\frac{\tau}{a} - \eta \right) \frac{d\eta}{1 - \eta^2} + \int_{1+\delta}^{\tau/a} \left(\frac{\tau}{a} - \eta \right) \frac{d\eta}{1 - \eta^2}. \quad (6.12)$$

Mas

$$\int \frac{d\eta}{1 - \eta^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d\eta}{1 + \eta} + \frac{1}{2} \int \frac{d\eta}{1 - \eta} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right|, \quad (6.13)$$

e

$$\int \frac{\eta d\eta}{1 - \eta^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{(-2\eta) d\eta}{1 - \eta^2} = -\frac{1}{2} \ln |1 - \eta^2|. \quad (6.14)$$

Então, Eq. (6.12) se torna

$$I_\delta = \frac{\tau}{2a} \ln \left| \frac{2-\delta}{\delta} \right| + \frac{1}{2} \ln [1 - (1-\delta)^2] + \frac{\tau}{2a} \ln \left| \frac{\tau/a+1}{\tau/a-1} \right| + \frac{1}{2} \ln [(\tau/a)^2 - 1] \\ - \frac{\tau}{2a} \ln \left| \frac{2+\delta}{\delta} \right| - \frac{1}{2} \ln [(1+\delta)^2 - 1].$$

Fazendo $\delta \ll 1$

$$I_\delta \approx \frac{\tau}{2a} \ln \left(\frac{2}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \ln (2\delta) + \frac{\tau}{2a} \ln \left| \frac{\tau+a}{\tau-a} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tau^2 - a^2}{a^2} \right| \\ - \frac{\tau}{2a} \ln \left(\frac{2}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \ln (2\delta) = \frac{\tau}{2a} \ln \left| \frac{\tau+a}{\tau-a} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tau^2 - a^2}{a^2} \right|. \quad (6.15)$$

Comparando as Eqs. (6.11) e (6.12) temos

$$I_1 = 2 \lim_{\delta \rightarrow 0} I_\delta = \frac{\tau}{a} \ln \left| \frac{\tau+a}{\tau-a} \right| + \ln \left| \frac{\tau^2 - a^2}{a^2} \right|. \quad (6.16)$$

Portanto, pela Eq. (6.7)

$$\langle (\Delta v_i)^2 \rangle = - \left(\frac{g}{\pi m} \right)^2 \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[\frac{\tau}{a} \ln \left| \frac{\tau+a}{\tau-a} \right| + \ln \left| \frac{\tau^2 - a^2}{a^2} \right| \right] \right\}_{\vec{x}'=\vec{x}} \\ = - \left(\frac{g}{\pi m} \right)^2 \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial a}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\tau}{a} \ln \left| \frac{\tau+a}{\tau-a} \right| + \ln \left| \frac{\tau^2 - a^2}{a^2} \right| \right) \right] \right\}_{\vec{x}'=\vec{x}} \\ = - \left(\frac{g}{\pi m} \right)^2 \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial a}{\partial x'_i} \left(-\frac{\tau}{a^2} \ln \left| \frac{\tau+a}{\tau-a} \right| \right) \right] \right\}_{\vec{x}'=\vec{x}} \\ = - \left(\frac{g}{\pi m} \right)^2 \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x'_i} \left(-\frac{\tau}{a^2} \ln \left| \frac{\tau+a}{\tau-a} \right| \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial a}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial a} \left(-\frac{\tau}{a^2} \ln \left| \frac{\tau+a}{\tau-a} \right| \right) \right]_{\vec{x}'=\vec{x}} \\ = - \left(\frac{g}{\pi m} \right)^2 \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x'_i} \left(-\frac{\tau}{a^2} \ln \left| \frac{\tau+a}{\tau-a} \right| \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial a}{\partial x'_i} \left[\frac{2\tau}{a^3} \ln \left| \frac{\tau+a}{\tau-a} \right| - \frac{2\tau^2}{a^2(\tau^2 - a^2)} \right] \right\}_{\vec{x}'=\vec{x}}. \quad (6.17)$$

Mas lembrando, $a = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2]^{1/2}$. Assim, para v_z ,

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial z'} = \frac{z+z'}{a}, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial z'} = \frac{1}{a} - \frac{(z+z')^2}{a^3}.$$

Então, fazendo $\vec{x}' = \vec{x}$ temos $a = 2z$, a Eq. (6.17) se torna

$$\langle (\Delta v_z)^2 \rangle = - \left(\frac{g}{\pi m} \right)^2 \frac{1}{8} \left\{ \frac{\tau}{4z^3} \ln \left[\left(\frac{\tau+2z}{\tau-2z} \right)^2 \right] - \frac{\tau^2}{z^2(\tau^2 - 4z^2)} \right\}. \quad (6.18)$$

Analogamente, para v_x ,

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{\partial a}{\partial x'} = \frac{x-x'}{a}, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial x'} = -\frac{1}{a} + \frac{(x-x')^2}{a^3}.$$

Portanto

$$\langle (\Delta v_x)^2 \rangle = -\left(\frac{g}{\pi m}\right)^2 \frac{\tau}{64z^3} \ln \left[\left(\frac{\tau + 2z}{\tau - 2z} \right)^2 \right]. \quad (6.19)$$

A expressão para v_x é idêntica à expressão para v_y , por isso, agora iremos separar as componentes da velocidade em componentes paralela $v_{\parallel} = v_x = v_y$ e perpendicular $v_{\perp} = v_z$ à fronteira. Podemos então ilustrar as relações entre as dispersões de v_{\perp} e v_{\parallel} com a razão τ/z , apresentadas nas Fig. 7 e 8, respectivamente.

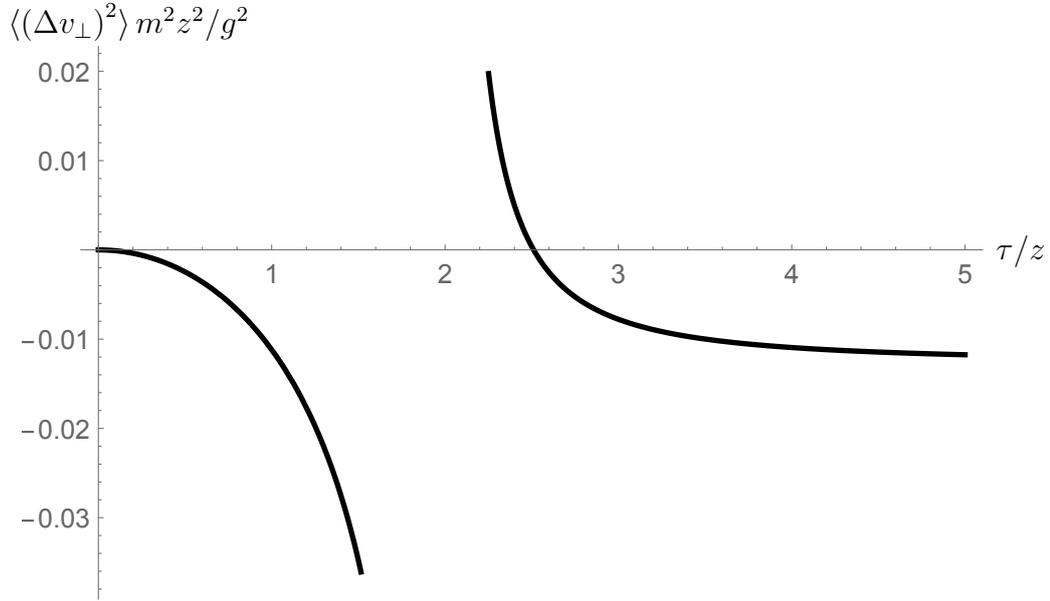


Figura 7 – Comportamento da dispersão da componente v_{\perp} .

Podemos verificar a existência de duas divergências nas Eqs. (6.18) e (6.19). A primeira delas é em $z = 0$, que é devida à fronteira de Dirichlet [6], e a segunda é em $\tau = 2z$. Na próxima seção tentaremos eliminar tais divergências com o auxílio do processo de transição descrito no Capítulo 3.

Outro comportamento que pode ser estudado é o de $(\Delta v_i)^2$ para $\tau \gg z$

$$\langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle \approx -\frac{g^2}{8\pi^2 m^2 z^2} + \frac{g^2}{6\pi^2 m^2 \tau^2}, \quad (6.20)$$

e

$$\langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle \approx -\frac{g^2}{8\pi^2 m^2 z^2} - \frac{g^2}{6\pi^2 m^2 \tau^2}. \quad (6.21)$$

E também podemos notar que para $z \rightarrow \infty$, $(\Delta v_{\perp})^2 = (\Delta v_{\parallel})^2 = 0$, como deveria ser, já que corresponde à situação em que a partícula não interage com o campo modificado pela presença da fronteira.

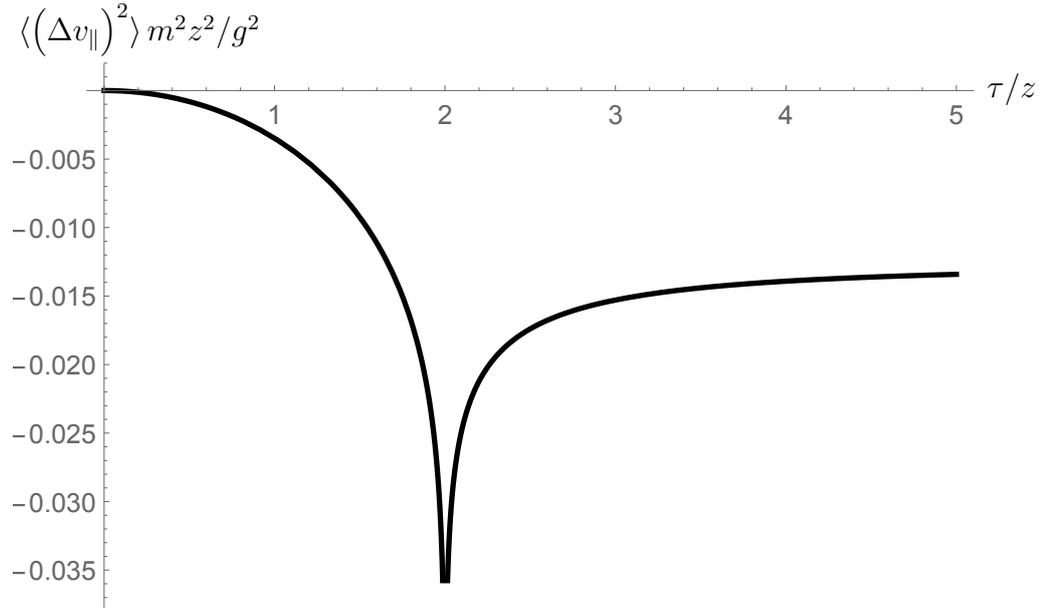


Figura 8 – Comportamento da dispersão da componente $v_{||}$.

6.1 Processo de transição

Nessa seção refaremos os procedimentos anteriores mas introduzindo as funções de transição, como na Eq. (3.2).

Primeiramente, introduzindo a função $F_{\tau}^{(n)}(t)$ em Eq. (6.7) teremos

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v_i)^2 \rangle_n &= -\frac{g^2}{4\pi^2 m^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' F_{\tau}^{(n)}(t) F_{\tau}^{(n)}(t') \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 - (t-t')^2 \right]^{-1} \right\}_{\vec{x}'=\vec{x}}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

onde o subíndice n indica que está sendo utilizada a função $F_{\tau}^{(n)}(t)$. Relembrando que

$$F_{\tau}^{(n)}(t) = \frac{c_n}{1 + \left(\frac{2t}{\tau}\right)^{2n}}, \quad (6.23)$$

com $c_n = (2n/\pi) \sin[\pi/(2n)]$.

Mas

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 - (t-t')^2 \right]^{-1} \right\}_{\vec{x}'=\vec{x}} \\ &= \left\{ \frac{8(z+z')^2}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 - (t-t')^2 \right]^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 - (t-t')^2 \right]^2} \right\}_{\vec{x}'=\vec{x}} \\ &= \frac{32z^2}{\left[4z^2 - (t-t')^2 \right]^3} - \frac{2}{\left[4z^2 - (t-t')^2 \right]^2}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

e

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 - (t-t')^2 \right]^{-1} \right\}_{\vec{x}'=\vec{x}} \\
 &= \left\{ -\frac{8(x-x')^2}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 - (t-t')^2 \right]^3} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 - (t-t')^2 \right]^2} \right\}_{\vec{x}'=\vec{x}} \\
 &= \frac{2}{\left[4z^2 - (t-t')^2 \right]^2}.
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Usando as Eqs. (6.24) e (6.25) na Eq. (6.22), sendo $\langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle_n = \langle (\Delta v_x)^2 \rangle_n = \langle (\Delta v_y)^2 \rangle_n$ e $\langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle_n = \langle (\Delta v_z)^2 \rangle_n$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle_n &= -\frac{g^2 c_n^2}{4\pi^2 m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{32z^2}{\left[4z^2 - (t-t')^2 \right]^3} - \frac{2}{\left[4z^2 - (t-t')^2 \right]^2} \right\} \\
 & \quad \times \frac{dt}{1 + \left(\frac{2t}{\tau} \right)^{2n}} \frac{dt'}{1 + \left(\frac{2t'}{\tau} \right)^{2n}},
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

e

$$\langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle_n = -\frac{g^2 c_n^2}{4\pi^2 m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\left[4z^2 - (t-t')^2 \right]^2} \frac{dt}{1 + \left(\frac{2t}{\tau} \right)^{2n}} \frac{dt'}{1 + \left(\frac{2t'}{\tau} \right)^{2n}}. \tag{6.27}$$

Usando a Eq. (4.16),

$$\begin{aligned}
 \langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle_n &= -\frac{g^2 c_n^2}{4\pi^2 m^2} \left[16z^2 I_{\tau,0023}^{(n)} - I_{\tau,0022}^{(n)} \right] \\
 &= -\frac{g^2 c_n^2}{4\pi^2 m^2} \frac{\pi^2}{n^2} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=n}^{2n-1} \psi_{n,p} \psi_{n,q} \left\{ \frac{16z^2 (\tau/2)^{-4} 2}{\left[(2z)^2 (2/\tau)^2 - (\psi_{n,p} - \psi_{n,q})^2 \right]^3} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(\tau/2)^{-2} 2}{\left[(2z)^2 (2/\tau)^2 - (\psi_{n,p} - \psi_{n,q})^2 \right]^2} \right\} \\
 &= -\frac{2g^2 c_n^2}{m^2 n^2 \tau^2} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=n}^{2n-1} \psi_{n,p} \psi_{n,q} \left\{ \frac{64z^2 / \tau^2}{\left[(4z/\tau)^2 - (\psi_{n,p} - \psi_{n,q})^2 \right]^3} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\left[(4z/\tau)^2 - (\psi_{n,p} - \psi_{n,q})^2 \right]^2} \right\} \\
 &= -\frac{2g^2 c_n^2}{m^2 n^2 \tau^2} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=n}^{2n-1} \psi_{n,p} \psi_{n,q} \frac{4(4z/\tau)^2 - (4z/\tau)^2 + (\psi_{n,p} - \psi_{n,q})^2}{\left[(4z/\tau)^2 - (\psi_{n,p} - \psi_{n,q})^2 \right]^3} \\
 &= -\frac{2g^2 c_n^2}{m^2 n^2 \tau^2} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=n}^{2n-1} \psi_{n,p} \psi_{n,q} \frac{3(4z/\tau)^2 + (\psi_{n,p} - \psi_{n,q})^2}{\left[(4z/\tau)^2 - (\psi_{n,p} - \psi_{n,q})^2 \right]^3}.
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

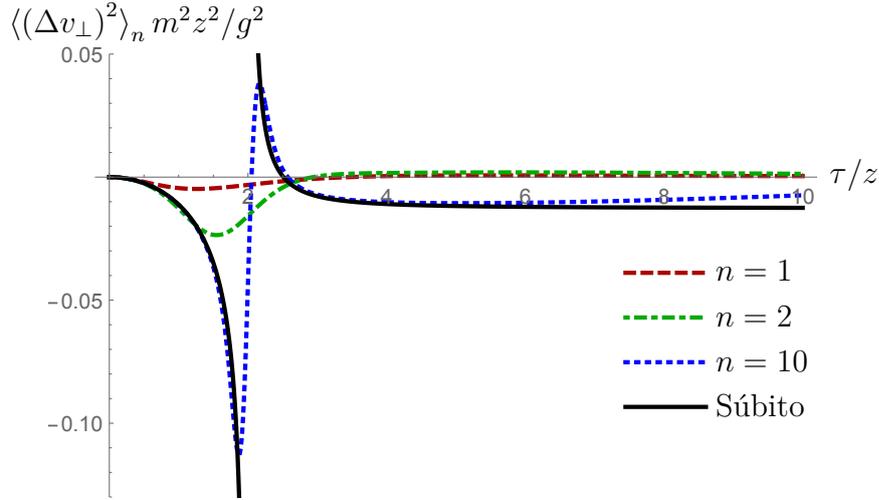


Figura 9 – Dispersão da componente v_{\perp} , dada na Eq. (6.28), para diferentes valores de n .

Para a componente paralela,

$$\begin{aligned}
 \langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle_n &= -\frac{g^2 c_n^2}{4\pi^2 m^2} I_{\tau,0022}^{(n)} \\
 &= -\frac{g^2 c_n^2}{4\pi^2 m^2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \left(\frac{2}{\tau}\right)^2 \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=n}^{2n-1} \frac{2\psi_{n,p}\psi_{n,q}}{\left[(4z/\tau)^2 - (\psi_{n,p} - \psi_{n,q})^2\right]^2} \\
 &= -\frac{2g^2 c_n^2}{m^2 n^2 \tau^2} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=n}^{2n-1} \frac{\psi_{n,p}\psi_{n,q}}{\left[(4z/\tau)^2 - (\psi_{n,p} - \psi_{n,q})^2\right]^2}.
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Nas Figs. 9, 10, 11 e 12 estão apresentados os comportamentos de $\langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle$ e $\langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle$, dadas pelas Eqs. (6.28) e (6.29), respectivamente, onde a curva “Súbito” corresponde ao processo tomando uma medição instantânea, cujas soluções são dadas pelas Eqs. (6.18) e (6.19).

Note que, pelas Eqs. (6.20) e (6.21),

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle = -\frac{g^2}{8\pi^2 m^2 z^2}. \tag{6.30}$$

Comportamento este que não se repete quando introduzimos a função de transição. Segundo as Eqs. (6.28) e (6.29), quando tomamos $\tau \gg z$, temos $\langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle_n \propto 1/\tau^2$ e $\langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle_n \propto 1/\tau^2$, portanto, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle_n = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle_n = 0$. Isso é devido ao fato de, segundo a Eq. (3.6), termos $\tau_s \propto \tau$ para um n fixo, por isso, tomar $\tau \rightarrow \infty$ faz com que, conseqüentemente, tomemos também $\tau_s \rightarrow \infty$, o que corresponde à um processo de transição tão lento quanto queiramos. Portanto, ao fazer uso da função de transição $F_{\tau}^{(n)}$ e também tomando $\tau \rightarrow \infty$, temos que a introdução da fronteira no sistema ocorre de forma tão lenta, que esta não causa influência sobre o movimento da partícula.

Agora vamos introduzir a função $F_{\tau_s, \tau}(t)$ em Eq. (6.6), assim

$$\langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{\tau_s} = \frac{g^2}{2m^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') G_R^{(1)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') dt dt' \right]_{\vec{x}' = \vec{x}}, \tag{6.31}$$

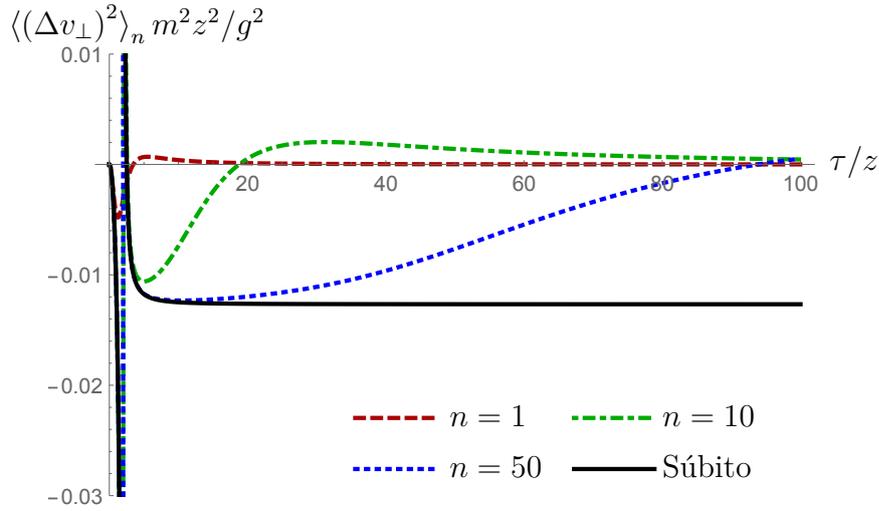


Figura 10 – Dispersão da componente v_{\perp} , dada na Eq. (6.28), para diferentes valores de n .

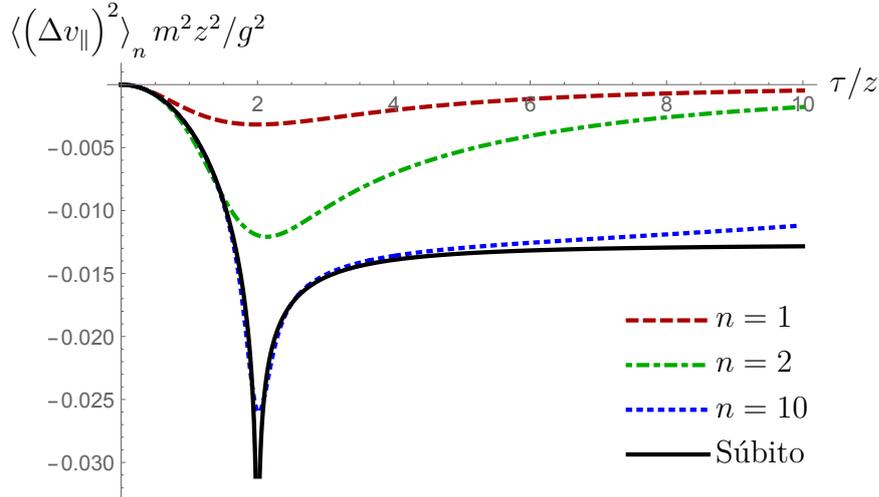


Figura 11 – Dispersão da componente v_{\parallel} , dada na Eq. (6.29), para diferentes valores de n .

onde o subíndice τ_s indica que estamos usando a função de transição $F_{\tau_s, \tau}(t)$.

Usando a representação de $G_R^{(1)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$ dada na Eq. (5.14)

$$\begin{aligned}
 \langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{\tau_s} &= \frac{g^2}{2m^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') \right. \\
 &\quad \times \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2\pi^2 \eta} \int_0^{\infty} e^{-ik(t-t')} \sin(k\eta) dk \right] dt dt' \Bigg\}_{\vec{x}' = \vec{x}} \\
 &= -\frac{g^2}{4\pi^2 m^2} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{\eta} \int_0^{\infty} dk \sin(k\eta) \right. \\
 &\quad \times \left. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') e^{-ik(t-t')} dt dt' \right]_{\vec{x}' = \vec{x}}.
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

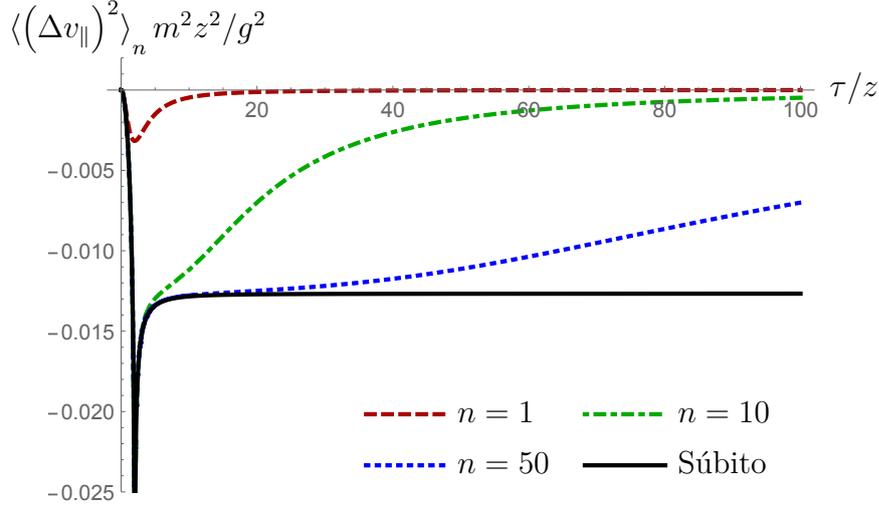


Figura 12 – Dispersão da componente v_{\parallel} , dada na Eq. (6.29), para diferentes valores de n .

Mas temos que (veja Apêndice B)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') e^{-ik(t-t')} dt dt' = \frac{2e^{-2k\tau_s}}{k^2} [1 - \cos(k\tau)] \quad (6.33)$$

Então, da Eq. (6.33),

$$\langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{\tau_s} = -\frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{\eta} \int_0^{\infty} dk \sin(k\eta) \frac{e^{-2k\tau_s}}{k^2} [1 - \cos(k\tau)] \right\}_{\vec{x}' = \vec{x}}. \quad (6.34)$$

Seja

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\infty} \frac{\sin(ak) e^{-bk}}{k^2} dk = \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \frac{(e^{iak} - e^{-iak}) e^{-bk}}{k^2} dk \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(b-ia)}}{k^2} dk - \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(b+ia)}}{k^2} dk. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Fazendo $\lambda = b \pm ia$, para $\text{Re}(\lambda) > 0$,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda k}}{k^2} dk = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-\lambda k}}{k^2} dk = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\lambda\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}}{\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 \lambda} d\alpha = \lambda \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\lambda\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2} d\alpha = \lambda \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma(-1, \lambda\epsilon),$$

onde $\Gamma(\alpha, x)$ é a função Gamma Incompleta [28].

Com o auxílio do software Mathematica obtemos que a expansão de $\Gamma(-1, \lambda\epsilon)$ para $\lambda\epsilon \ll 1$ é

$$\Gamma(-1, \lambda\epsilon) \approx \frac{1}{\lambda\epsilon} - 1 + \gamma + \ln \epsilon + \ln \lambda, \quad (6.36)$$

onde $\gamma \approx 0.577216$ é a constante de Euler-Mascheroni.

Dessa forma, Eq. (6.35) se torna

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ (b - ia) \Gamma[-1, (b - ia) \epsilon] - (b + ia) \Gamma[-1, (b + ia) \epsilon] \} \\
 &= \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\epsilon} + (b - ia) (-1 + \gamma + \ln \epsilon) + (b - ia) \ln (b - ia) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\epsilon} - (b + ia) (-1 + \gamma + \ln \epsilon) - (b + ia) \ln (b + ia) \right] \\
 &= \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[2ia (1 - \gamma - \ln \epsilon) + b \ln \left(\frac{b - ia}{b + ia} \right) - ia \ln (b^2 + a^2) \right] \\
 &= \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[2ia (1 - \gamma - \ln \epsilon) - 2ib \arctan \left(\frac{a}{b} \right) - ia \ln (b^2 + a^2) \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[a (1 - \gamma - \ln \epsilon) - b \arctan \left(\frac{a}{b} \right) - \frac{a}{2} \ln (b^2 + a^2) \right].
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

Finalmente, usando que $2 \sin(k\eta) \cos(k\tau) = \sin[k(\eta + \tau)] + \sin[k(\eta - \tau)]$, Eq. (6.34) se torna

$$\begin{aligned}
 \langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{\tau_s} &= - \frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{\eta} \int_0^\infty dk \sin(k\eta) \frac{e^{-2k\tau_s}}{k^2} [1 - \cos(k\tau)] \right\}_{\vec{x}' = \vec{x}} \\
 &= - \frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{\eta} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^\infty dk \sin(k\eta) \frac{e^{-2k\tau_s}}{k^2} [1 - \cos(k\tau)] \right\}_{\vec{x}' = \vec{x}} \\
 &= - \frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{\eta} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_\epsilon^\infty dk \frac{\sin(k\eta) e^{-2k\tau_s}}{k^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \int_\epsilon^\infty dk \frac{\sin(k\eta) \cos(k\tau) e^{-2k\tau_s}}{k^2} \right] \right\}_{\vec{x}' = \vec{x}} \\
 &= - \frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{\eta} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \eta (1 - \gamma - \ln \epsilon) - 2\tau_s \arctan \left(\frac{\eta}{2\tau_s} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\eta}{2} \ln (\eta^2 + 4\tau_s^2) - \frac{1}{2} \left\{ (\eta + \tau) (1 - \gamma - \ln \epsilon) - 2\tau_s \arctan \left(\frac{\eta + \tau}{2\tau_s} \right) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{(\eta + \tau)}{2} \ln [(\eta + \tau)^2 + 4\tau_s^2] + (\eta - \tau) (1 - \gamma - \ln \epsilon) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - 2\tau_s \arctan \left(\frac{\eta - \tau}{2\tau_s} \right) - \frac{(\eta - \tau)}{2} \ln [(\eta - \tau)^2 + 4\tau_s^2] \right\} \right\} \right\}_{\vec{x}' = \vec{x}} \\
 &= - \frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left\{ \frac{\tau_s}{\eta} \left[-2 \arctan \left(\frac{\eta}{2\tau_s} \right) + \arctan \left(\frac{\eta + \tau}{2\tau_s} \right) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \arctan \left(\frac{\eta - \tau}{2\tau_s} \right) \right] - \frac{1}{2} \ln (\eta^2 + 4\tau_s^2) + \frac{(\eta + \tau)}{4\eta} \ln [(\eta + \tau)^2 + 4\tau_s^2] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(\eta - \tau)}{4\eta} \ln [(\eta - \tau)^2 + 4\tau_s^2] \right\} \right\}_{\vec{x}' = \vec{x}}.
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

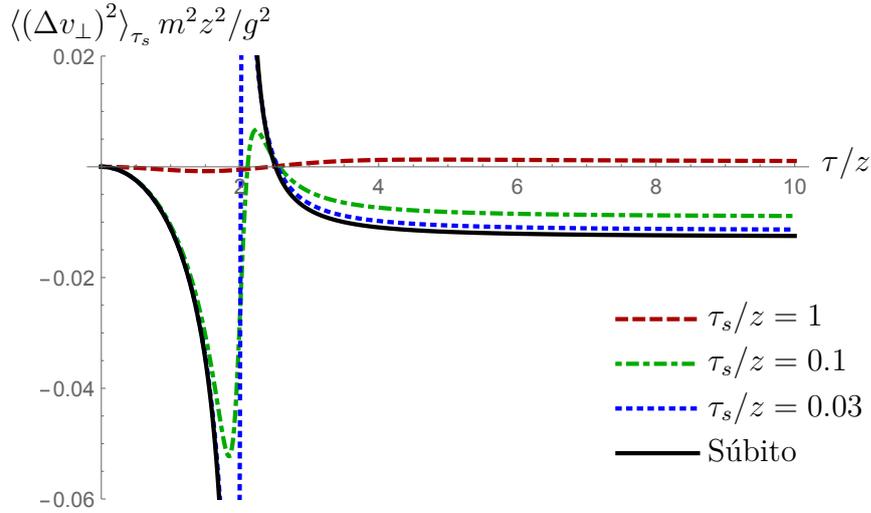


Figura 13 – Dispersão da componente v_{\perp} , dada na Eq. (6.39), para diferentes valores de τ_s .

Efetuando as derivadas e igualando os pontos obtemos as seguintes dispersões,

$$\begin{aligned} \langle(\Delta v_{\perp})^2\rangle_{\tau_s} = & -\frac{g^2}{32\pi^2 m^2 z^3} \left\{ -\frac{4\tau^2 z^3 (\tau^2 - 4z^2 + 12\tau_s)}{(z^2 + \tau_s^2) [(\tau - 2z)^2 + 4\tau_s^2] [(\tau + 2z)^2 + 4\tau_s^2]} \right. \\ & - 8\tau_s \arctan\left(\frac{z}{\tau_s}\right) + 4\tau_s \left[\arctan\left(\frac{2z - \tau}{2\tau_s}\right) + \arctan\left(\frac{2z + \tau}{2\tau_s}\right) \right] \\ & \left. + \tau \ln \left[\frac{4\tau_s^2 + (\tau + 2z)^2}{4\tau_s^2 + (\tau - 2z)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

e

$$\begin{aligned} \langle(\Delta v_{\parallel})^2\rangle_{\tau_s} = & \frac{g^2}{64\pi^2 m^2 z^3} \left\{ 8\tau_s \arctan\left(\frac{z}{\tau_s}\right) - 4\tau_s \left[\arctan\left(\frac{2z - \tau}{2\tau_s}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \arctan\left(\frac{2z + \tau}{2\tau_s}\right) \right] + \tau \ln \left[\frac{4\tau_s^2 + (\tau - 2z)^2}{4\tau_s^2 + (\tau + 2z)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Nas Figs. 13, 14, 15 e 16 estão apresentados os comportamentos de $\langle(\Delta v_{\perp})^2\rangle$ e $\langle(\Delta v_{\parallel})^2\rangle$, dadas pelas Eqs. (6.39) e (6.40), respectivamente, onde a curva “Súbito” corresponde ao processo de introdução súbita da placa, cujas soluções são dadas pelas Eqs. (6.18) e (6.19).

Note que $\lim_{\tau_s \rightarrow 0} \langle(\Delta v_{\perp})^2\rangle_{\tau_s} = \langle(\Delta v_{\perp})^2\rangle$ e $\lim_{\tau_s \rightarrow 0} \langle(\Delta v_{\parallel})^2\rangle_{\tau_s} = \langle(\Delta v_{\parallel})^2\rangle$, como deveria ser, já que corresponde à situação em que a introdução da placa é realizada de forma repentina.

Outra análise que podemos fazer é o comportamento para um tempo de transição tendendo a infinito,

$$\lim_{\tau_s \rightarrow \infty} \langle(\Delta v_{\perp})^2\rangle_{\tau_s} = \lim_{\tau_s \rightarrow \infty} \langle(\Delta v_{\parallel})^2\rangle_{\tau_s} = 0, \quad (6.41)$$

o que indica que, se a interação entre a partícula e o campo modificado pela presença da fronteira for de forma tão lenta quanto queiramos as dispersões da velocidade da partícula

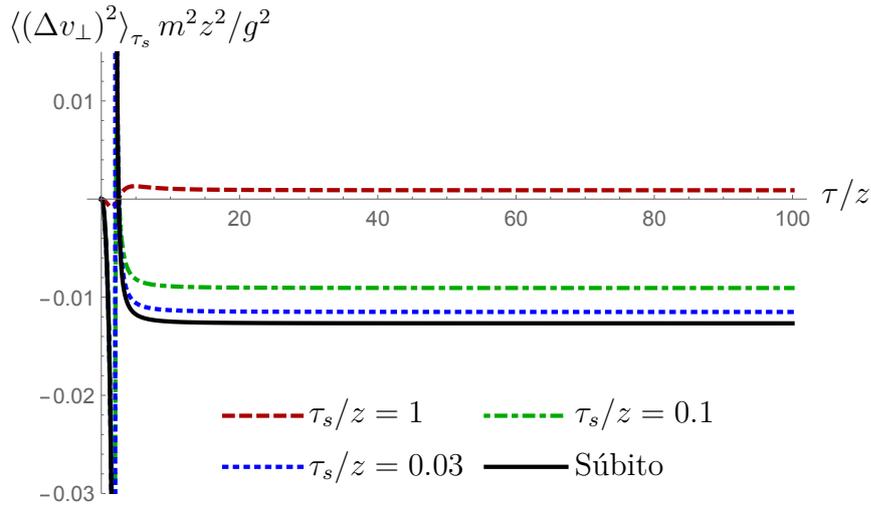


Figura 14 – Dispersão da componente v_{\perp} , dada na Eq. (6.39), para diferentes valores de τ_s .

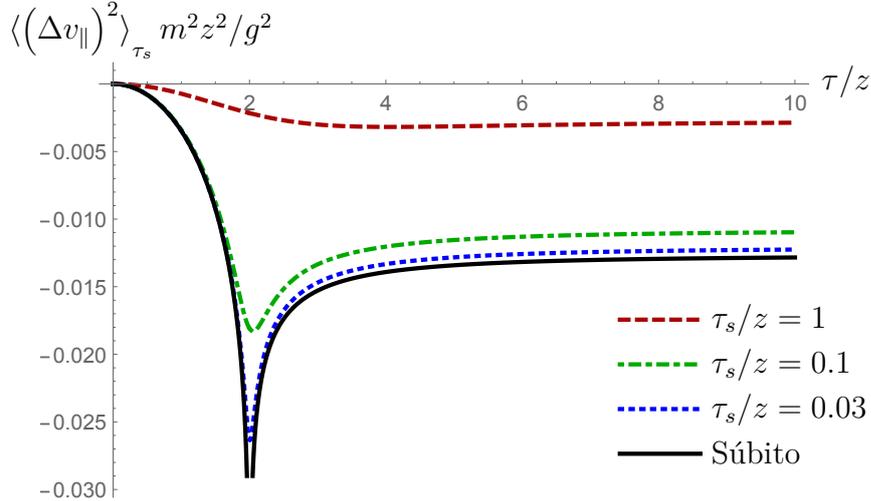


Figura 15 – Dispersão da componente v_{\parallel} , dada na Eq. (6.40), para diferentes valores de τ_s .

serão nulas. Essa conclusão pode ser verificada tomando o limite $\tau_s \rightarrow \infty$ na função de transição $F_{\tau_s, \tau}(t)$, tendo que a função de transição se torna nula para todo t .

E por último,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle_{\tau_s} = -\frac{g^2}{8\pi^2 m^2 z^3} \left[-\frac{z^3}{z^2 + \tau_s^2} - 2\tau_s \arctan\left(\frac{z}{\tau_s}\right) + 2z \right], \quad (6.42)$$

e

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle_{\tau_s} = \frac{g^2}{8\pi^2 m^2 z^3} \left[\tau_s \arctan\left(\frac{z}{\tau_s}\right) - z \right], \quad (6.43)$$

portanto, mesmo que o intervalo de interação dure um tempo muito grande, a velocidade da partícula terá uma dispersão diferente de zero. Note ainda que, se fizermos $\tau_s \rightarrow 0$ nas Eqs. (6.42) e (6.43) retornaremos às Eqs. (6.20) e (6.21), e que para $\tau_s \rightarrow \infty$ nas Eqs. (6.42) e (6.43) teremos que ambas as dispersões se tornam nulas, como já constatado

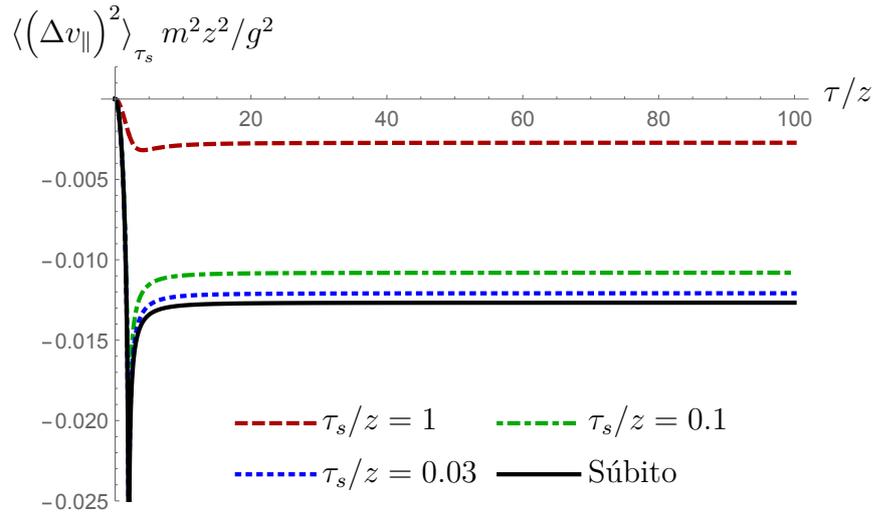


Figura 16 – Dispersão da componente v_{\parallel} , dada na Eq. (6.40), para diferentes valores de τ_s .

anteriormente. Temos ainda que, para a componente paralela, a dispersão fica limitada entre valores obtidos no caso súbito e o valor nulo, obtido para a primeira função de transição. Já para a componente perpendicular esse comportamento não se repete, temos que novamente o caso súbito é o limite inferior, entretanto a dispersão apresenta um valor máximo e depois se torna nula assintoticamente. Tais comportamentos estão ilustrados nas Figs. 17 e 18.

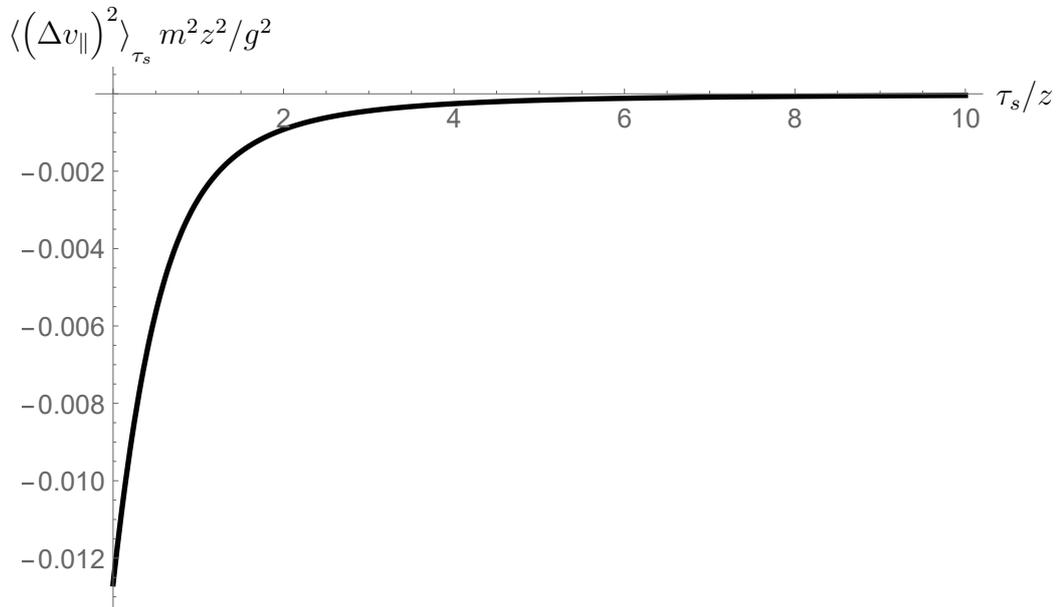


Figura 17 – Comportamento da dispersão $\langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle_{\tau_s}$ para $\tau \rightarrow \infty$.

Note ainda que, quando foi usada a função de transição $F_{\tau}^{(n)}$, obtemos que ao tomar τ tendendo a infinito, teremos ambas as dispersões nulas. Esse comportamento é justificado com o fato de que com o uso dessa função de transição temos $\tau_s \propto \tau$, o que implica que, ao tomar $\tau \rightarrow \infty$, tomamos conseqüentemente $\tau_s \rightarrow \infty$, fato este que não se

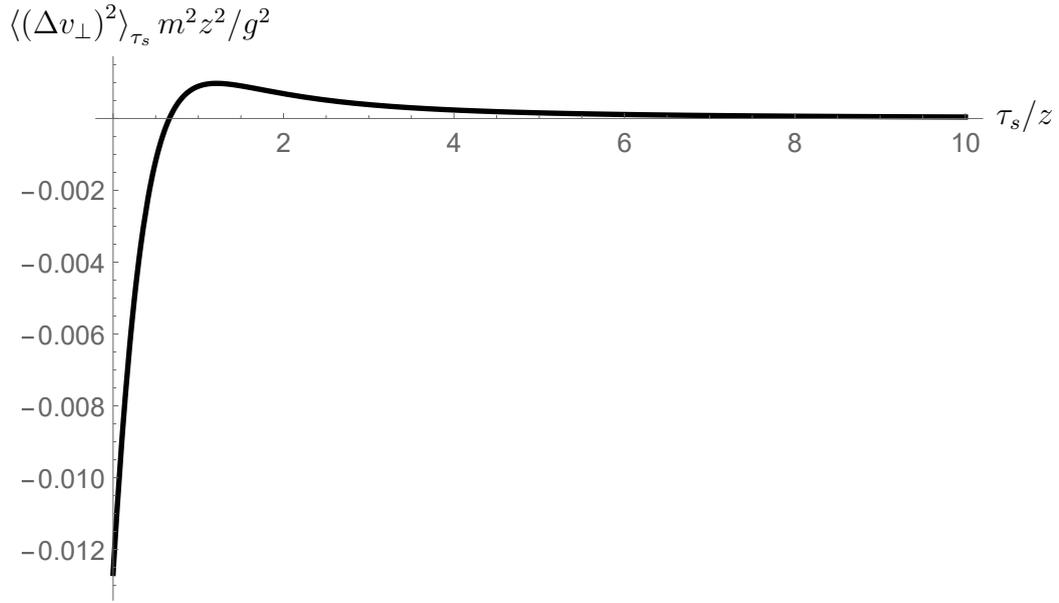


Figura 18 – Comportamento da dispersão $\langle(\Delta v_{\perp})^2\rangle_{\tau_s}$ para $\tau \rightarrow \infty$.

repete na função de transição $F_{\tau_s, \tau}$. Para reproduzir este resultado também com o uso da segunda função de transição podemos fazer $\tau_s = \alpha\tau$, impondo que τ_s seja proporcional à τ , com constante de proporcionalidade α . Desse modo, ao tomar $\tau \gg z$ teremos

$$\langle(\Delta v_{\perp})^2\rangle_{\tau_s} \approx \frac{g^2 (1 + 12\alpha^2)}{24\pi^2 m^2 (\alpha + 4\alpha^3)^2 \tau^2}, \quad (6.44)$$

e

$$\langle(\Delta v_{\parallel})^2\rangle_{\tau_s} \approx -\frac{g^2 (1 + 12\alpha^2)}{24\pi^2 m^2 (\alpha + 4\alpha^3)^2 \tau^2}. \quad (6.45)$$

Portanto, ambas soluções serão assintoticamente nulas, como obtido com a função de transição $F_{\tau}^{(n)}$.

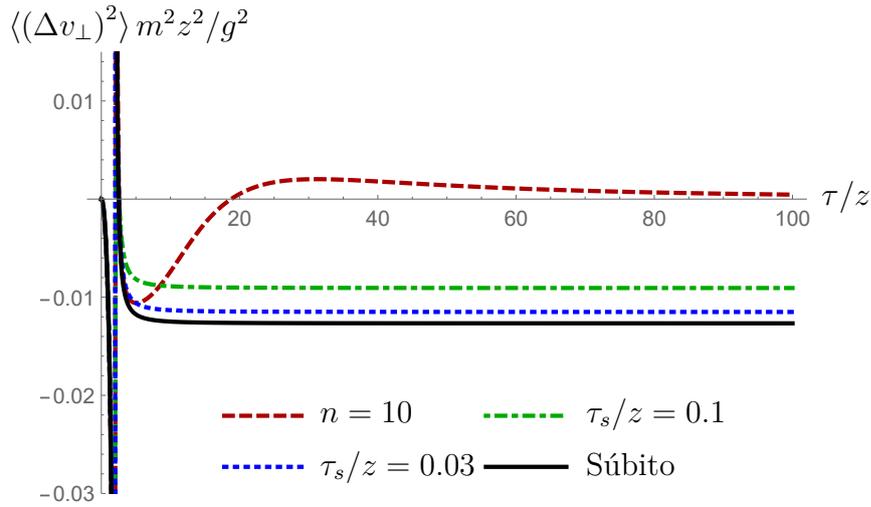
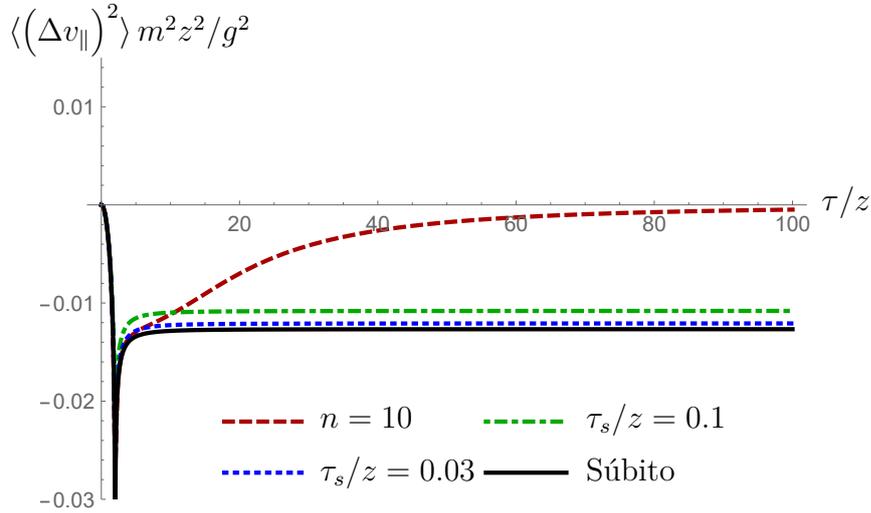
7 Conclusões

Neste trabalho examinamos o comportamento de uma partícula teste sob a influência das flutuações de vácuo de um campo escalar sem massa em 3+1 dimensões na presença de uma fronteira perfeitamente refletora. As dispersões da velocidade da partícula foram calculadas usando dois modelos distintos, um usando o processo de transição súbito e o outro usando processo de transição suave. No caso onde o processo súbito foi considerado as dispersões apresentaram duas divergências. A primeira delas em $z = 0$, relacionada à fronteira de Dirichlet, e a segunda em $\tau = 2z$. Ambas as divergências estão ligadas à idealização na descrição do sistema, onde consideramos que a interação da partícula com o campo modificado pela presença da fronteira é iniciada subitamente.

O uso da transição suave regularizou completamente tais divergências, como pode ser notado nas Eqs. (6.28) e (6.29) para a primeira função de transição $F_\tau^{(n)}$ e nas Eqs. (6.39) e (6.40) para a segunda função de transição $F_{\tau_s, \tau}$. Entretanto, no limite onde o intervalo de interação é muito longo temos que, ao passo que usando a primeira função de transição temos ambas as dispersões se tornando assintoticamente nulas, temos que ao usar a segunda função de transição, ambas as dispersões se tornam uma constante que depende de τ_s , como determinado nas Eqs. (6.42) e (6.43). Essa diferença nos comportamentos das dispersões está ilustrada nas Figs. 19 e 20. Note que, das Eqs. (6.42) e (6.43), teremos que fazendo $\tau_s \rightarrow 0$ iremos obter valores residuais para as dispersões iguais aos valores obtidos quando fizemos o processo de forma súbita, como deveria ser. Por outro lado, fazendo $\tau_s \rightarrow \infty$, obtemos valores residuais nulos em ambas as dispersões, correspondendo ao sistema onde a transição se dá tão lentamente quanto se queira, fato este que está relacionado com a conservação de energia [7]. Além disso, foi analisado o sistema com o uso da segunda função de transição e fazendo τ_s proporcional a τ , e, como obtido na primeira função de transição onde esse comportamento ocorre naturalmente, ao fazer τ tendendo ao infinito, obtemos que ambas as dispersões se tornam assintoticamente nulas, estando de acordo com a hipótese desse fato estar relacionado à conservação da energia.

No sistema em 1+1 dimensões também foram encontradas as divergências em $x = 0$ (posição onde a placa está localizada) e em $\tau = 2x$ [16]. Foi estudado que, neste caso, a introdução de uma flutuação na posição da placa foi suficiente para curar tais divergências [23]. Além disso, considerando que a interação entre a partícula e o campo modificado pela presença da placa não ocorre de forma súbita, isto é, introduzindo uma função de transição, foi mostrado que as divergências também são regularizadas [29].

A regularização ocasionada pela função de transição encontrada nos casos em 1+1


 Figura 19 – Dispersão da componente v_{\perp} .

 Figura 20 – Dispersão da componente v_{\parallel} .

ou 3+1 dimensões também acontece em 2+1 dimensões [29]. Fato interessante que pode ser ressaltado nesse caso é o comportamento nada usual do propagador de Hadamard. Foi mostrado que para o campo escalar em 2+1 dimensões na presença de uma fronteira em $x = 0$, o propagador de Hadamard renormalizado é dado por

$$G_R^{(1)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = -\frac{1}{2\pi} \frac{\theta \left[(x+x')^2 + (y-y')^2 - (t-t')^2 \right]}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 - (t-t')^2}},$$

causando também um comportamento inesperado nas dispersões das velocidades de uma partícula teste próxima à fronteira [29].

Agora, retornando ao caso da partícula interagindo com um campo escalar em 3+1 dimensões quando somente os efeitos quânticos são considerados, temos que o valor médio da energia cinética da partícula, dado por $\langle K \rangle = m \left(\langle v_{\parallel}^2 \rangle + \langle v_{\perp}^2 \rangle / 2 \right)$, pode assumir valores negativos. Entretanto, devemos ressaltar que os resultados encontrados foram

obtidos tomando os propagadores renormalizados, ou seja, descartando o termo devido ao vácuo de Minkowski. Portanto, obter um valor negativo nas dispersões da velocidade indica um efeito de sub-vácuo, i.e., uma supressão da incerteza da velocidade da partícula comparada ao vácuo de Minkowski. Assim, obter uma quantidade negativa para o valor médio da energia não deve ser entendido como resultado problemático. Neste trabalho foi usado um modelo simplificado para o sistema, onde tomamos que a posição da partícula não varia apreciavelmente no tempo. Se tomarmos um modelo mais realista, mesmo com a partícula inicialmente em repouso, temos que há uma interação clássica entre a partícula e a parede refletora, fazendo com que a partícula se mova perpendicularmente com relação à placa. Este movimento traz um novo termo à energia cinética da partícula, um termo estritamente clássico, que deve levar a um valor positivo para a energia cinética total da partícula. Este é um assunto que merece uma investigação mais detalhada.

Por fim, podemos apontar alguns estudos que podem ser realizados posteriormente. Observe que ao introduzir a interação clássica entre a partícula e a placa, teremos uma aceleração ocasionada no movimento da partícula, assim, para tratar um modelo mais realista, deveremos considerar também possíveis efeitos de radiação. Outro cálculo que pode ser feito é determinar o valor das dispersões na posição da partícula, podendo verificar se a exigência feita no modelo, de que a posição da partícula não varia apreciavelmente, é satisfeita. Também é possível alterar as condições de contorno do sistema, aplicando condições de contorno de Neumann, ou até mesmo condições de contorno de Robin. Para tornar o problema mais realista podemos estudar ainda o caso relativístico, alterando as equações de movimento da partícula. E por fim, um estudo interessante nessa área seria considerar o sistema à temperatura finita. Já no caso eletromagnético, uma possibilidade é estudar o sistema onde a placa não é perfeitamente refletora, e sim que é um dielétrico, fazendo com que os modos do campo sejam alterados [30].

APÊNDICE A – Média das funções de Green retardada e avançada

Seja o campo escalar $\phi(\vec{x}, t)$ de massa M em 3+1 dimensões na presença de uma placa perfeitamente refletora em $z = 0$. Nosso objetivo é determinar a média das funções de Green retardada e avançada \bar{G} .

Primeiramente temos que o campo pode ser escrito como

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{k} \left[u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) a_{\vec{k}} + u_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) a_{\vec{k}}^\dagger \right], \quad (\text{A.1})$$

onde, como obtido na Eq. (5.11),

$$u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi^{3/2}\sqrt{\omega}} e^{ik_x x + ik_y y - i\omega t} \sin(k_z z). \quad (\text{A.2})$$

Agora, segundo a Eq. (5.12), o valor esperado no vácuo do produto $\phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}', t')$ é

$$\langle \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}', t') \rangle = \int_{k_z > 0} d^3\vec{k} \frac{1}{4\pi^3\omega} e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} \sin(k_z z) \sin(k_z z'). \quad (\text{A.3})$$

Portanto, o propagador de Pauli-Jordan G , definido na Eq. (2.26), é dado por

$$\begin{aligned} iG(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= \langle \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}', t') \rangle - \langle \phi(\vec{x}', t') \phi(\vec{x}, t) \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi^3} \int_{k_z > 0} \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \sin(k_z z) \sin(k_z z') \\ &\quad \times \left\{ e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} - e^{-i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \left(\frac{e^{ik_z z} - e^{-ik_z z}}{2i} \right) \left(\frac{e^{ik_z z'} - e^{-ik_z z'}}{2i} \right) \\ &\quad \times \left\{ e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} - e^{-i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} \right\} \\ &= -\frac{1}{32\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \left[e^{ik_z(z+z')} - e^{ik_z(z-z')} - e^{-ik_z(z-z')} + e^{-ik_z(z+z')} \right] \\ &\quad \times \left\{ e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} - e^{-i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} \right\} \\ &= -\frac{1}{16\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \left[e^{ik_z(z+z')} - e^{ik_z(z-z')} \right] \\ &\quad \times \left\{ e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') - \omega(t-t')]} - e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') + \omega(t-t')]} \right\} \\ &= \frac{i}{8\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \sin[\omega(t-t')] e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') + k_z(z+z')]} \\ &\quad - \frac{i}{8\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \sin[\omega(t-t')] e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') + k_z(z-z')]} \end{aligned}$$

Note que, assim como no propagador de Hadamard, temos que o propagador de Pauli-Jordan apresenta um termo devido ao vácuo de Minkowski, sendo o segundo, e uma contribuição devido à presença da fronteira, sendo o primeiro termo. Logo, o propagador renormalizado será dado por

$$G_R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \sin[\omega(t-t')] e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') + k_z(z+z')]} \quad (\text{A.4})$$

Assim,

$$\begin{aligned} G_R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \sin[\omega(t-t')] e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y') + k_z(z+z')]} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{k^2 \sin\theta dk d\theta d\varphi}{k} \sin[k(t-t')] e^{ik\eta \cos\theta} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty k \sin[k(t-t')] \frac{2 \sin(k\eta)}{k\eta} dk \\ &= \frac{1}{2\pi^2\eta} \int_0^\infty \sin[k(t-t')] \sin(k\eta) dk \\ &= -\frac{1}{2\pi^2\eta} \int_0^\infty \text{Im} \left[e^{-ik(t-t')} \right] \sin(k\eta) dk \\ &= \text{Im} \left[-\frac{1}{2\pi^2\eta} \int_0^\infty e^{-ik(t-t')} \sin(k\eta) dk \right], \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde $\vec{\eta} = (x - x', y - y', z + z')$ e $\eta = |\vec{\eta}|$. Ou ainda, fazendo $t' \rightarrow t' + i\epsilon$, teremos que (veja Eq. (3.893.1) da Ref. [24])

$$G_R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \text{Im} \left\{ -\frac{1}{2\pi^2 [\eta^2 - (t-t')^2]} \right\} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Logo, as funções de Green retardada e avançada serão dadas, respectivamente, por

$$G_R^{\text{Ret}}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = -\theta(t-t') G_R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = 0, \quad (\text{A.7})$$

e

$$G_R^{\text{A}}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \theta(t'-t) G_R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = 0, \quad (\text{A.8})$$

onde foi tomado o propagador de Pauli-Jornda já renormalizado.

Finalmente, temos que a média das Eqs. (A.7) e (A.8) será dada por

$$\bar{G}_R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \frac{1}{2} [G_R^{\text{Ret}}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + G_R^{\text{A}}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')] = 0. \quad (\text{A.9})$$

Portanto, de fato temos que, no caso de um campo escalar em 3+1 dimensões na presença de uma fronteira perfeitamente refletora, o termo \bar{G} que aparece na relação entre o propagador de Feynman e o propagador de Hadamard é nulo, justificando assim a Eq. (5.41).

APÊNDICE B – Detalhamento do cálculo da Eq. (6.33)

Vejam os que, para $\text{Re}(a) \geq 0$, $\text{Im}(t) \geq 0$ e $\text{Im}(b) < 1$,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \arctan(at+b)e^{it} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^a \frac{t du}{1+(ut+b)^2} + \arctan b \right] e^{it} dt \\
 &= \int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t e^{it}}{1+(ut+b)^2} dt du \\
 &= \int_0^a 2i\pi \frac{1+ib}{2u^2} \exp\left[-\frac{(1+ib)}{u}\right] du \\
 &= i\pi(1+ib) \frac{1}{1+ib} \exp\left[-\frac{(1+ib)}{u}\right] \Big|_0^a \\
 &= i\pi \exp\left[-\frac{(1+ib)}{a}\right],
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

onde foi usado o teorema dos resíduos para resolver a integral em t e tomando o contorno C^+ .

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') e^{-ik(t-t')} dt dt' \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\arctan\left(\frac{t}{\tau_s}\right) + \arctan\left(\frac{\tau-t}{\tau_s}\right) \right] \\
 &\quad \times \left[\arctan\left(\frac{t'}{\tau_s}\right) + \arctan\left(\frac{\tau-t'}{\tau_s}\right) \right] e^{-ikt} e^{ikt'} dt dt' \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\arctan\left(-\frac{u}{k\tau_s}\right) + \arctan\left(\frac{k\tau+u}{k\tau_s}\right) \right] \\
 &\quad \times \left[\arctan\left(\frac{u'}{k\tau_s}\right) + \arctan\left(\frac{k\tau-u'}{k\tau_s}\right) \right] e^{iu} e^{iu'} \left(-\frac{du}{k}\right) \frac{du'}{k} \\
 &= \frac{1}{k^2 \pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\arctan\left(\frac{u+k\tau}{k\tau_s}\right) - \arctan\left(\frac{u}{k\tau_s}\right) \right] \\
 &\quad \times \left[\arctan\left(\frac{u'}{k\tau_s}\right) - \arctan\left(\frac{u'-k\tau}{k\tau_s}\right) \right] e^{iu} e^{iu'} du du' \\
 &= -\frac{\pi^2}{k^2 \pi^2} \left\{ \exp\left[-k\tau_s \left(1 + i\frac{\tau}{\tau_s}\right)\right] - \exp(-k\tau_s) \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \exp(-k\tau_s) - \exp\left[-k\tau_s \left(1 - i\frac{\tau}{\tau_s}\right)\right] \right\} \\
 &= -\frac{e^{-2k\tau_s}}{k^2} [\exp(-ik\tau) - 1] [1 - \exp(ik\tau)] \\
 &= -\frac{e^{-2k\tau_s}}{k^2} (e^{-ik\tau} - 1 - 1 + e^{ik\tau}) = \frac{2e^{-2k\tau_s}}{k^2} [1 - \cos(k\tau)].
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Referências

- 1 DE LORENCI, V. A.; RIBEIRO, C. C. H.; SILVA, M. M. Probing quantum vacuum fluctuations over a charged particle near a reflecting wall. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 94, p. 105017, Nov 2016. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.105017>.
- 2 CASIMIR, H. B. On the attraction between two perfectly conducting plates. In: *Proceedings of the KNAW*. [S.l.: s.n.], 1948. v. 51, n. 7, p. 793–795.
- 3 LAMOREAUX, S. K. The casimir force: background, experiments, and applications. *Reports on progress in Physics*, IOP Publishing, v. 68, n. 1, p. 201, 2004.
- 4 LAMOREAUX, S. K. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to $6\mu\text{m}$ range. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 78, p. 5–8, Jan 1997. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.5>.
- 5 FULLING, S. A. *Aspects of quantum field theory in curved spacetime*. [S.l.]: Cambridge university press, 1989. v. 17.
- 6 FORD, L. H.; SVAITER, N. F. Vacuum energy density near fluctuating boundaries. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 58, p. 065007, Aug 1998. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.065007>.
- 7 YU, H.; FORD, L. H. Vacuum fluctuations and brownian motion of a charged test particle near a reflecting boundary. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 70, p. 065009, Sep 2004. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.065009>.
- 8 FORD, L. H. Stochastic spacetime and brownian motion of test particles. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 44, n. 10, p. 1753–1768, Oct 2005. ISSN 1572-9575. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10773-005-8893-z>.
- 9 YU, H.; CHEN, J. Brownian motion of a charged test particle in vacuum between two conducting plates. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 70, p. 125006, Dec 2004. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.125006>.
- 10 YU, H.; CHEN, J.; WU, P. Brownian motion of a charged test particle near a reflecting boundary at finite temperature. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 2006, n. 02, p. 058, 2006.
- 11 SERIU, M.; WU, C.-H. Switching effect on the quantum brownian motion near a reflecting boundary. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 77, p. 022107, Feb 2008. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.022107>.
- 12 PARKINSON, V.; FORD, L. H. Model for noncancellation of quantum electric field fluctuations. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 84, p. 062102, Dec 2011. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.062102>.

- 13 SERIU, M.; WU, C.-H. Smearing effect due to the spread of a probe particle on the brownian motion near a perfectly reflecting boundary. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 80, p. 052101, Nov 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.80.052101>>.
- 14 BESSA, C. H.; BEZERRA, V. B.; FORD, L. Brownian motion in robertson-walker spacetimes from electromagnetic vacuum fluctuations. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 50, n. 6, p. 062501, 2009.
- 15 BESSA, C. H. G. et al. Quantum brownian motion in an analog friedmann-robertson-walker geometry. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 95, p. 085020, Apr 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.085020>>.
- 16 DE LORENCI, V. A.; MOREIRA JR., E. S.; SILVA, M. M. Quantum brownian motion near a point-like reflecting boundary. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 90, p. 027702, Jul 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.027702>>.
- 17 CAMARGO, G. et al. Vacuum fluctuations of a scalar field near a reflecting boundary and their effects on the motion of a test particle. *arXiv preprint arXiv:1709.10392*, 2017.
- 18 ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. *Quantum field theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 2006.
- 19 BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. *Quantum fields in curved space*. [S.l.]: Cambridge university press, 1984.
- 20 LOUDON, R. *The quantum theory of light*. [S.l.]: OUP Oxford, 2000.
- 21 BESSA, C. H. G. et al. Model for lightcone fluctuations due to stress tensor fluctuations. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 93, p. 064067, Mar 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.064067>>.
- 22 BROWN, L. S.; MACLAY, G. J. Vacuum stress between conducting plates: An image solution. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 184, p. 1272–1279, Aug 1969. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.184.1272>>.
- 23 SILVA, M. M. *Flutuações quânticas do vácuo na presença de uma fronteira e suas implicações sobre o comportamento de uma partícula teste nas suas proximidades*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Itajubá, 2013.
- 24 GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of integrals, series, and products*. [S.l.]: Academic press, 2014.
- 25 LEBEDEV, N. N.; SILVERMAN, R. R. *Special functions and their applications*. Revised. [S.l.]: Dover Publications, 1972.
- 26 ANDERSON, J. L. *Principles of Relativity Physics*. [S.l.]: Elsevier Science Technology Books, 1967. 289, 290 p.
- 27 JOHNSON, P. R.; HU, B. L. Stochastic theory of relativistic particles moving in a quantum field: Scalar abraham-lorentz-dirac-langevin equation, radiation reaction, and vacuum fluctuations. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 65, p. 065015, Feb 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.65.065015>>.

-
- 28 ARFKEN, H. J. W. G. B. *Mathematical Methods for Physicists*. 6th ed. ed. [S.l.]: Elsevier, 2005.
- 29 RODRIGUES, F. de F. *Influência das flutuações quânticas do vácuo de um campo escalar em uma partícula teste próxima a uma fronteira em (1+1) e (2+1) dimensões*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Itajubá, 2018.
- 30 BARTOLO, N.; PASSANTE, R. Electromagnetic-field fluctuations near a dielectric-vacuum boundary and surface divergences in the ideal conductor limit. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 86, p. 012122, Jul 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.012122>>.