

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
EM FÍSICA

POTENCIAIS DELTA PARA O CAMPO
NÃO-RELATIVÍSTICO

Marco Antonio Silva Pinheiro

Itajubá, Fevereiro de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
EM FÍSICA

Marco Antonio Silva Pinheiro

POTENCIAIS DELTA PARA O CAMPO
NÃO-RELATIVÍSTICO

Dissertação submetida ao Programa Pós-Graduação
em Física como requisito principal para obtenção do
título de Mestre em Ciências em Física.

Área de Concentração: Teoria de Campos, Gravitação e
Cosmologia

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel

Fevereiro de 2018

Itajubá

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
EM FÍSICA

Marco Antonio Silva Pinheiro

POTENCIAIS DELTA PARA O CAMPO
NÃO-RELATIVÍSTICO

Dissertação aprovada por banca examinadora em 28 de fevereiro de 2018, conferindo ao autor o título de *Mestre em Ciências em Física*.

Banca Examinadora:

Prof Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel (Orientador)

Prof Dr. Anderson Antunes Nogueira

Prof Dr. Luiz Henrique de Campos Borges

Itajubá

2018

Agradecimentos

Após a conclusão desse trabalho, que particularmente me agradou demais, não posso deixar de agradecer as pessoas que contribuíram ativamente do processo. Portanto quero agradecer primeiramente a minha família por todo suporte emocional que me deram. Minha mãe Maria de Lourdes, por ser uma das pessoas mais resilientes que conheço e sempre me tirar um sorriso do rosto depois de semanas ou meses sem vê-la. Ao meu pai, Sérgio, deixo meu eterno agradecimento por sempre incitar o pensamento científico em mim; lembro-me da infância quando às vezes me via imerso em uma grande conversa sobre o cosmo, sobre o átomo e sobre até mesmo a existência humana. À minha irmã, Júlia, e meu sobrinho, Francisco, deixo registrado meu obrigado por estarem presentes, pela emoção em ver as grandes vitórias vencidas por vocês e não posso deixar de evidenciar minha satisfação em ver o menino Chico tendo na minha figura uma espécie de modelo em alguns aspectos, meu esforço para nunca decepcioná-los.

Quero agradecer profundamente ao prof. Fabrício pelo esforço em me guiar desde as trevas do saber em teoria de campos até o resultado do presente trabalho. Fico imensamente feliz em poder ver a conclusão dessa dissertação e posso comparar o quanto aprendi e quanto evoluí com sua orientação.

Por fim, deixo meus sinceros agradecimentos aos profs. Anderson e Luiz Henrique pela participação na banca na data da minha defesa. Ao prof. Gabriel Flores por grandes diálogos e por incomensuráveis lições em teoria de campos. Deixo meu grande abraço à mestre Janaína Madruga pela amizade que construímos tão rapidamente e aproveito para agradecer meus colegas de curso e todos que me deram suporte nessa jornada: Thaís Gabrielle, Felipe Solferini, Marcos Morbidelli, Luísa Boutin, Laura Helena Reis, Léllis, Miguel e, por fim, meu gato Bóris. Todos vocês têm um lugar reservado no meu coração, em minha memória e foram individualmente motivo da minha garra, alegria e emoção. Essa dissertação também é de todos vocês.

Resumo

Neste trabalho analisamos a interação entre objetos clássicos e respectivas funções de Green simulados por potenciais delta de Dirac acoplados ao campo não-relativístico em número de dimensões arbitrárias. Para tanto, utilizou-se da Lagrangeana do campo não-relativístico de modo a obter as funções de Green para uma e duas placas. É sabido que a presença de uma placa espacialmente localizada sob condições de Dirichlet podem ser simuladas a partir de um termo aditivo na Lagrangeana proporcional à delta de Dirac. Sendo assim estudamos em detalhes a obtenção das funções de Green e com elas foi possível obter a energia de interação entre uma placa e uma carga pontual, recuperando assim resultados conhecidos na literatura e também obter as energias de interação e auto-interação das placas e, quando possível, estabelecer os níveis de energia e auto-funções das mesmas estando estes de acordo com o que é já conhecido na literatura. No contexto abordado, a obtenção das energias de interação entre esses objetos se faz importante, uma vez que não é conhecido um mecanismo mais fundamental que fornece tais resultados em mecânica quântica.

Palavras-chave: energia de Casimir, potenciais delta, campo de Schrödinger, função de Green.

Abstract

In this work, we analyze the interaction of classical objects, and their Green functions, simulated by a coupling between the of non-relativistic field and delta-like potentials in arbitrary number of dimensions. Therefore, we use non-relativistic field Lagrangean in order to obtain Green functions for one and two plates. It is well known that a plate spacially localized under Dirichlet conditions can be computed as an additive term delta-like in that Lagrangean. In doing so, we study in depth the calculus wich emerge the Green functions and, with them, we obtained the energy due to interactions between the two plates and self-interaction of each plate and, whenever possible, compute energy levels and eigenstates in accordance with is already known on literature. In that framework, these energies are important because it is not known to the consistent method that these quantities emerge in quantum mechanics.

Keywords: Casimir energy, delta-like potentials, Schrödinger field, Green function.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	ii
Abstract	iii
1 Introdução	1
2 Efeito Casimir para o campo não-relativístico	4
2.1 Efeito Casimir para o campo não-relativístico	5
2.2 Efeito Casimir com primeiras correções relativísticas	7
3 Campo de Schrödinger com um único potencial delta	9
3.1 Funções de Green com potenciais delta	10
3.2 Níveis de energia e auto-funções de uma placa	15
4 Campo de Schrödinger com dois potenciais delta	16
4.1 Níveis de energia para duas placas	18
5 Campo de Schrödinger com uma carga pontual e um plano	21
5.1 Campo de Schrödinger na presença de fontes externas	21
5.2 Interação plano-carga	23
6 Energia de Casimir	27
6.1 Auto-energia de uma placa	29
6.2 Energia na presença de duas placas e a energia de Casimir	30
6.2.1 Limite de placas Dirichlet	32
6.2.2 Uma placa Dirichlet	33

6.2.3 Potenciais iguais	34
7 Conclusões e Perspectivas	35
Bibliografia	37

Capítulo 1

Introdução

A criação da Mecânica Quântica, em sua formulação não relativística, nos proporcionou a compreensão da estrutura dos átomos e o comportamento da matéria. No caso do átomo de hidrogênio, a simples resolução da equação de Schrödinger para o potencial de Coulomb, que pode ser obtida exatamente, nos fornece os níveis atômicos e raias espectrais de transição do sistema.

O grande sucesso dos resultados obtidos com abordagens estritamente não-relativísticas da Mecânica Quântica logo se mostraram limitados. Podemos citar, como exemplo, as estruturas fina e hyper-fina das raias espectrais dos átomos. Em muitos desses casos, pequenas correções oriundas da relatividade restrita podem explicar diversos desses fenômenos.

É natural, então, pensarmos numa teoria quântica que seja relativística de princípio, ou seja, invariante de Lorentz, e não simplesmente numa teoria que carrega correções da relatividade. Esse tipo de teoria sempre acaba por apresentar algum tipo de problema. Como exemplo, vamos tomar a mais simples teoria quântica relativística, dada pela equação de Klein-Gordon. Essa teoria nos fornece energias negativas para partículas livres, assim como problemas na conservação de correntes, como é o caso do paradoxo de Klein.

A solução para muitos desses problemas foi dada pela chamada “segunda quantização”, ou teoria de campos, onde as quantidades físicas são obtidas não por meio de funções, mas sim por operadores quânticos de campos. Problemas como autovalores negativos de energia de partículas livres foram resolvidos com ao conceito de anti-partículas.

As teorias quânticas de campos não serviram apenas para resolver os problemas inerentes das teorias quânticas relativísticas, de primeira quantização. Por meio das teorias quânticas de campos conseguimos compreender uma variedade muito maior de fenômenos, como a previsão de existência de anti-partículas, a criação de pares de partículas, a compreensão do que vem a ser uma partícula como

uma quanta de energia de campo (algo essencial para a compreensão do que vem a ser um fóton) e o efeito Casimir.

A mais bem testada teoria de campos é a chamada Eletrodinâmica Quântica (QED), na qual um campo fermiônico (campo de Dirac) interage minimamente com o campo eletromagnético [1]. Dois importantes efeitos da QED, compreendidos com a segunda quantização, são a criação de pares elétron-pósitron na presença de campos externos e o efeito Casimir.

O Efeito Casimir foi proposto em 1948 [2] e, em sua versão mais simples, e mais popular, trata-se da interação entre duas placas perfeitamente condutoras e neutras, colocadas paralelamente entre si. Essa interação é compreendida como sendo decorrente da alteração dos modos do campo eletromagnético, em seu estado de vácuo, devido a presença das placas condutoras, que impõem condições de contorno no campo eletromagnético. Essa alteração nos modos do campo faz surgir uma força de interação de natureza atrativa entre as placas. Atualmente na literatura entende-se como efeito Casimir as alterações das energias de vácuo de campos quânticos quando estes são submetidos às condições de contorno [3].

A imposição de condições de contorno é comumente utilizada para simular a presença de fronteiras materiais que interagem com campos. Uma abordagem mais realística para esse tipo de problema consiste e não impor condições de contorno nos campos, mas tomar modelos onde os campos interagem com potenciais externos espacialmente localizados. Esse tipo de proposta tem por objetivo simular de forma mais fiel o papel da presença de fronteiras materiais em teorias de campos [3–7]

A segunda quantização é um procedimento necessário para a consistência de teorias relativísticas de campos. Para teorias não-relativísticas, a primeira quantização já fornece teorias consistentes. No entanto, podemos considerar teorias quânticas não-relativísticas em segunda quantização, ou seja, teorias de campos não-relativísticas. Tais teorias são conhecidas por teorias de muitos corpos (many body theory) e encontram inúmeras aplicações no estudo de sistemas de matéria condensada.

Uma pergunta imediata sobre as teorias de campos não-relativísticas consiste no que seria o efeito Casimir em sua versão não-relativística, ou seja, o efeito Casimir para o campo de Schrödinger. Pode-se mostrar que para o campo de Schrödinger, a energia de Casimir é nula (estamos nos referindo à energia obtida com o campo de Schrödinger obedecendo a condição de Dirichlet entre dois planos paralelos entre si). Podemos mostrar também que as correções relativísticas em todas as ordens para a energia de Casimir do campo de Schrödinger são nulas [8].

Já que não existe efeito Casimir para o campo de Schrödinger com condições de Dirichlet, será que o mesmo ocorreria ao considerarmos esse campo não submetido a condições de contorno, mas sim

em acoplamento com potenciais externos localizados espacialmente?

Nesse trabalho consideramos o campo de Schrödinger em $d + 1$ dimensões e em interação com potenciais externos do tipo delta de Dirac, concentrados em um e em dois hiper-planos (no caso de dois hiper-planos, estes são tomados como paralelos entre si).

No capítulo 2 fazemos um estudo sobre a energia de Casimir do campo de Schrödinger sob condições de Dirichlet em planos paralelos. No capítulo 3 calculamos a função de Green do campo de Schrödinger na presença de um potencial tipo delta de Dirac concentrado ao longo de um hiper-plano. Mostramos que, no limite onde a constante de acoplamento entre o potencial e o campo tende a infinito, a função de Green correspondente se reduz àquela obtida quando impomos a condição de Dirichlet no campo sob o plano onde o potencial se concentra. Dessa forma, podemos dizer que o modelo em questão é um tipo de condição de Dirichlet atenuada para o campo. A partir dos resultados obtidos encontramos os conhecidos auto-valores e auto-funções de energia da equação de Schrödinger para um potencial delta de Dirac.

No capítulo 4 fazemos um estudo parecido, mas tomamos dois potenciais delta de Dirac concentrados em hiper-planos paralelos entre si. As constantes de acoplamento entre os potenciais e o campo não são necessariamente iguais e no limite onde elas tendem a infinito, recuperamos o caso onde o campo satisfaz a condição de Dirichlet nos hiper-planos. Encontramos os auto-valores de energia do campo. Iniciamos um estudo, ainda em andamento, de suas auto-funções.

No capítulo 5 calculamos a energia de interação entre uma fonte pontual para o campo de Schrödinger e um potencial delta, em interação com esse campo, concentrado em um hiper-plano. Mostramos que essa interação é a mesma que a obtida para o campo de Klein-Gordon em interação com um potencial delta com a mesma natureza.

Iniciamos um estudo sobre a energia de Casimir para o campo de Schrödinger em interação com potenciais delta concentrados em hiper-planos paralelos no capítulo 6. Obtivemos a energia de Casimir em forma de quadratura para o caso $1 + 1$ -dimensional, e como uma integral dupla para o caso de mais dimensões. Até o presente momento, não conseguimos concluir esse estudo de forma mais ampla, mas os resultados preliminares que obtivemos indicam que a energia de Casimir, mesmo para condições de Dirichlet generalizadas, é nula. O Capítulo 7 é dedicado as nossas conclusões e perspectivas futuras que temos dos resultados obtidos nesse trabalho.

Capítulo 2

Efeito Casimir para o campo não-relativístico

É conhecido na literatura que em 1948 Casimir [2] estudou flutuações na energia de ponto zero produzida pelo campo eletromagnético quântico na presença de duas placas perfeitamente condutoras dispostas paralelamente entre si, de modo que a distância entre as mesmas é muito pequena comparada com as dimensões das placas. Se l denota o comprimento da aresta da placa e d a distância entre as duas placas paralelas, então $l \gg d$.

Descartando-se a energia do campo obtida na ausência das placas, o resultado que Casimir encontrou para a energia de ponto zero do campo na presença das placas, interpretada como a alteração de sua energia de vácuo devido a presença das placas ε , é dada por [2]

$$\frac{\varepsilon}{l^2} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3}, \quad (2.1)$$

onde l , como dito, é a dimensão linear da placas vistas como quadradas nessa análise, e d a separação entre as placas paralelas. Essa dependência na distância de separação entre as placas é responsável por produzir uma força por unidade de área (pressão) calculada pelo gradiente da expressão (2.1) com sinal negativo, dada por,

$$\frac{\mathcal{F}}{l^2} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4}. \quad (2.2)$$

O sinal negativo em 2.2 indica uma força de natureza atrativa entre as placas, a qual foi medida experimentalmente pela primeira vez por Sparnaay [9]. Posteriormente outros pesquisadores também encontraram os resultados previstos por essa teoria, como pode ser visto nas referências [10–12].

Na física contemporânea o Efeito Casimir vem sendo fortemente explorado em inúmeras vertentes de pesquisa [13] e sua interpretação no arcabouço da mecânica quântica nos remete a um conceito

bastante fundamental do vácuo quântico.

Existe, entretanto, muita discussão sobre o Efeito Casimir, muitas delas questionando se o efeito é, por si só, um fenômeno quântico no sentido genuíno. Uma análise superficial do ponto de vista do eletromagnetismo, por outro lado, deve ser capaz de mostrar que não se pode deixar de lado a manifestação relativística do fenômeno, uma vez que o fóton não possui massa. Uma análise mais moderna explica o Efeito Casimir como um desbalanceamento entre a flutuação de pares de partículas-antipartículas virtuais pela imposição de condições dada pela presença das placas. Sendo assim, não existem tais antipartículas no caso não-relativístico, o que deve produzir uma energia de Casimir nula nesse contexto. Como mostrado por M.V. Cougo-Pinto, C. Farina, J.F.M. Mendes e A.C. Tort [8], de fato, tal energia se anula. Esse resultado, contudo, gera um segundo questionamento que emerge da situação onde atinge-se o limite não-relativístico através de uma série de potências na relação de dispersão de energia em potências de $\frac{p^2}{m^2 c^2}$. O que seria impor o regime não-relativístico perturbativamente alterando a relação de dispersão não-relativística

$$\omega(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (2.3)$$

pela relação relativística

$$\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (2.4)$$

A primeira vista, deve-se esperar que a energia de Casimir seja algo muito próximo de zero em cada ordem de aproximação, entretanto, como mostrado por Cougo-Pinto *et al* no mesmo trabalho [8] e que também será exposto a seguir, a energia é zero termo a termo, sendo assim, para uma teoria de campo escalar massivo o Efeito Casimir, que é um efeito quântico, é também um efeito relativístico por si só.

2.1 Efeito Casimir para o campo não-relativístico

Nessa seção estudamos a energia de Casimir para o campo de Schrödinger em $3 + 1$ dimensões no caso onde o campo é submetido a condições de contorno de Dirichlet ao longo de planos paralelos, separados por uma distância d .

Partindo da relação de dispersão não-relativística

$$\omega(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (2.5)$$

a imposição das condições de Dirichlet na presença das placas resulta numa quantização dos modos perpendiculares do momento linear. É bem sabido que somando em todos esses modos permitidos,

deve-se encontrar a energia de Casimir da configuração. O vetor momento linear para essa configuração pode ser escrito da forma,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\parallel} + \frac{n\pi\hbar}{d}\hat{\mathbf{z}}, \quad (2.6)$$

sendo $\hat{\mathbf{z}}$ a direção normal às placas. O parâmetro n pode assumir qualquer valor natural e não há restrições em \mathbf{p}_{\parallel} . Portanto,

$$\frac{\varepsilon}{l^2} = \int \frac{d^2\mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi\hbar)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}_{\parallel}^2 + (n\pi\hbar/d)^2}{2m}. \quad (2.7)$$

Uma regularização da expressão acima fornece naturalmente

$$\frac{\varepsilon}{l^2} = \frac{\Lambda^{2s}}{2(2\pi\hbar)^2} \int d^2\mathbf{p}_{\parallel} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\mathbf{p}_{\parallel}^2 + (n\pi\hbar/d)^2]^{1-s}}{2m}, \quad (2.8)$$

onde Λ é um parâmetro regularizador para manter as dimensões físicas consistentes, processo conhecido como regularização dimensional em teoria de campos.

Usando coordenadas polares na integral (2.8), integrando em na coordenada angular, fazendo algumas manipulações simples e usando a substituição de variável

$$u = \frac{p_{\parallel}d}{n\pi\hbar}, \quad (2.9)$$

a expressão 2.8 pode ser escrita como uma das representações integrais da função Beta [14]

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{l^2} &= \left(\frac{\Lambda d}{\hbar\pi}\right)^{2s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hbar^2\pi^3}{8md^4} \frac{1}{n^{2s-4}} \int_0^{\infty} du u(u^2 + 1)^{1-s} \\ &= \left(\frac{\Lambda d}{\hbar\pi}\right)^{2s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hbar^2\pi^3}{8md^4} \frac{1}{n^{2s-4}} B(1, s-2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Utilizando da definição da função Beta em termos de um quociente de funções Gama bem conhecidas, a equação acima pode ser simplificada de maneira bastante conveniente utilizando a definição da função Zeta de Riemman [14] e tomando o limite apropriado $s \rightarrow 0$,

$$\frac{\varepsilon}{l^2} = \left(\frac{\Lambda d}{\hbar\pi}\right)^{2s} \frac{\hbar^2\pi^3}{16md^4(s-2)} \zeta(2s-4) \Bigg|_{s \rightarrow 0}. \quad (2.11)$$

Sendo assim, após a aplicação do limite, a energia de Casimir, em termos da função Zeta é escrita como

$$\frac{\varepsilon}{l^2} = -\frac{\hbar^2\pi^3}{32md^4} \zeta(-4). \quad (2.12)$$

É bem sabido que a extensão analítica da função Zeta para argumentos pares negativos é identicamente nula, donde conclui-se facilmente que

$$\varepsilon_{NR}(d) = -\frac{\hbar^2\pi^3 l^2}{32md^4} \zeta(-4) = 0. \quad (2.13)$$

Nessa expressão foi utilizada a notação ε_{NR} a qual designa a energia de Casimir devido ao campo não-relativístico.

2.2 Efeito Casimir com primeiras correções relativísticas

Nessa seção, vamos usar unidades na qual $\hbar = 1$.

Analogamente à análise feita no caso não-relativístico, a relação de dispersão relativística é dada por

$$\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (2.14)$$

sendo assim, esperamos que a energia de Casimir, para um caso onde o regime relativístico é atingido via uma expansão em série de potências de $p^2/m^2 c^2$, até uma dada ordem N , deve ser muito pequena. Cada um dos termos deveria, individualmente, contribuir para correções na relação de dispersão clássica em (2.5) e, quanto maior a ordem N da expansão, mais contribuições deveriam ser obtidas até que a energia de Casimir usual em (2.1) seja finalmente alcançada. Cada termo, portanto, em uma análise superficial, deveria contribuir com quantidades muito pequenas a medida que o regime relativístico é atingido. Como será mostrado a seguir, essa análise está incorreta. Cada termo é identicamente nula na expansão proposta.

Expandindo a equação (2.14) em série de potência e subtraindo da energia relativística seu termo de repouso, obtém-se a energia do sistema

$$E - mc^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right), \quad (2.15)$$

onde $\alpha = p^2/m^2 c^2$.

Considere $T_j(d, s)$ como a j -ésima contribuição relativística para a energia de Casimir $\varepsilon(d, s)$. Pode-se mostrar através da soma dos modos permitidos dos momentos e uma regularização dimensional apropriada, que

$$T_j(d, s) = \frac{\Lambda^{2js}}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2 \mathbf{p}_{\parallel}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{2} b_j \frac{[\mathbf{p}_{\parallel}^2 + (n\pi\hbar/d)^2]^{j(1-s)}}{m^2}, \quad (2.16)$$

onde b_j é um fator binomial da j -ésima contribuição. Assim, a energia de Casimir pode ser calculada por

$$\frac{\varepsilon}{l^2}(d, s) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(d, s). \quad (2.17)$$

Após algumas simples manipulações muito semelhantes ao caso anterior obtém-se uma expressão

da forma

$$\frac{\varepsilon}{l^2}(d, s) \propto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2js-2j-2}} \Big|_{s \rightarrow 0} = \zeta(-2j-2) \equiv 0. \quad (2.18)$$

Note que na equação acima o resultado clássico da sessão anterior é dado pelo termo $j = 1$. Outro fato importante é que todos os termos são nulos. Em outras palavras, pode-se dizer que o efeito Casimir é um fenômeno puramente quântico e relativístico. Isso refuta a análise ingênua feita inicialmente de que existiria contribuição, mesmo que pequena, num caso onde o regime relativístico é alcançado em aproximação em série. Com efeito, somente numa teoria que comporte tanto relatividade quanto a mecânica quântica deve existir efeito Casimir. Note também que os cálculos que trouxeram tal resultado foram oriundos de uma teoria de campo escalar massivo, que é intrinsecamente quântico e também relativístico, como já discutido.

Já sabemos, então, que não há efeito Casimir para o campo não-relativístico quando esse é submetido à condição de contorno de Dirichlet. E se considerarmos o campo de Schrödinger não submetido a condições de contorno, mas sim em interação com potenciais externos localizados ao longo de planos paralelos? Talvez tal configuração originasse algum tipo de alteração da energia do vácuo do campo resultando em uma interação entre esses planos.

Nos capítulos subsequentes vamos, dentre outras coisas, estudar esse assunto.

Capítulo 3

Campo de Schrödinger com um único potencial delta

Nesse capítulo fazemos um estudo sobre a função de onda de Schrödinger, em um espaço $d + 1$ dimensional, acoplado a um potencial do tipo delta de Dirac estacionário e concentrado em um hiper-plano.

Para estabelecer notação e tornar o texto mais acessível para iniciantes, vamos rever alguns aspectos básicos do campo de Schrödinger clássico. Primeiramente consideramos que o estado físico de um sistema de uma partícula deve ser determinado por uma função de onda complexa $\psi(\mathbf{x}, t)$, que satisfaz a chamada equação de Schrödinger [15–17]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{x}, t)\psi, \quad (3.1)$$

onde $V(\mathbf{x}, t)$ é um potencial externo acoplado à função de onda.

Sendo $\psi(\mathbf{x}, t)$ a função de onda, sabe-se que o módulo ao quadrado de ψ , $|\psi(\mathbf{x}, t)|^2$ representa a probabilidade de se encontrar uma partícula em uma determinada posição \mathbf{x} em um determinado tempo t .

Na terminologia conhecida em teoria quântica de campos, o processo de estabelecer essa função ψ em (3.1) é chamado de *primeira quantização*. Nesse contexto, a função de onda é definida como um campo clássico e é nessa abordagem que esse capítulo será elaborado.

A dinâmica da função de onda pode ser estabelecida por um formalismo analítico, com a introdução

de uma densidade Lagrangeana¹ do campo não-relativístico,

$$\mathcal{L}(\psi, \nabla\psi, \dot{\psi}) = i\hbar\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi - V(\mathbf{x}, t)\psi^*\psi. \quad (3.2)$$

Substituindo (3.2) nas equações de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} &= 0, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

obtemos a equação (3.1), no segundo caso, e o complexo conjugado de (3.1), no primeiro caso.

No formalismo da teoria clássica de campos, ψ e ψ^* são tomados como campos independentes.

Define-se também, o campo canonicamente conjugado a ψ , denotado por $\pi(\mathbf{x}, t)$, como

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\hbar\psi^*(\mathbf{x}, t). \quad (3.4)$$

É fácil ver, a partir de (3.2), que o campo conjugado a ψ^* é nulo, o que resulta apenas em dois novos campos independentes: ψ e π , que, por uma transformação de Legendre, fornecem de maneira direta a densidade Hamiltoniana \mathcal{H} do sistema

$$\mathcal{H} = \pi \frac{\partial\psi}{\partial t} - \mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + V(\mathbf{x}, t)\psi^*\psi. \quad (3.5)$$

A densidade Hamiltoniana se relaciona com a Hamiltoniana propriamente dita através de uma integral nas coordenadas de posição \mathbf{x} . Assume-se em teoria de campos que os campos se anulam no infinito, sendo assim, através de uma integração por partes encontra-se facilmente.

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(x) = \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}, t) \right) \psi(\mathbf{x}, t). \quad (3.6)$$

3.1 Funções de Green do campo de Schrödinger na presença de potenciais delta de Dirac espacialmente localizadas

Vamos agora considerar o campo não relativístico na presença de N potenciais do tipo delta de Dirac, todos concentrados ao longo de hiper-planos paralelos entre si, e perpendiculares ao eixo

¹Desse ponto em diante toda referência à densidade Lagrangeana será chamada, por abuso de linguagem, de Lagrangeana apenas.

espacial x^d , e localizados nas posições $x^d = a_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. Nesse caso podemos escrever o potencial na forma [18].

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \mu_i \delta(x^d - a_i), \quad (3.7)$$

sendo os parâmetros μ_i constantes de acoplamento entre as funções delta e o campo.

A densidade Lagrangeana do campo não-relativístico na presença do potencial (3.7) é dada por

$$\mathcal{L} = \psi^*(\mathbf{x}, t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \sum_{i=1}^N \mu_i \delta(x^d - a_i) \right) \psi(\mathbf{x}, t). \quad (3.8)$$

De agora em diante, vamos utilizar o sistema de unidades naturais, no qual $\hbar = 1$ e $c = 1$.

A função de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t')$ correspondente ao sistema deve obedecer a equação

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 - \sum_{i=1}^N \mu_i \delta(x^d - a_i) \right) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t') = \delta(t - t') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.9)$$

Similarmente, a função de Green livre, isto é, sem a presença de potenciais, $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t')$, deve obedecer a equação

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 \right) G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t') = \delta(t - t') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.10)$$

Vamos iniciar pelo estudo da função de Green livre. Dada a simetria de translação espacial e temporal da equação (3.10), vamos propor uma solução tipo integral de Fourier para a função de Green livre na forma

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \tilde{G}_0(\mathbf{p}, \omega) e^{-i\omega(t-t')} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}, \quad (3.11)$$

onde a função $\tilde{G}_0(\mathbf{p}, \omega)$ deve ser determinada.

Substituindo a integral (3.11) na equação (3.10) e usando o fato de que a transformada de Fourier da distribuição delta de Dirac é igual à unidade, obtém-se a expressão final para a transformada de Fourier da função de Green livre do campo não-relativístico

$$\tilde{G}_0(\omega, \mathbf{p}) = \frac{1}{\omega - \mathbf{p}^2/2m}. \quad (3.12)$$

A função acima apresenta um pólo para $\omega = \pm \mathbf{p}^2/2m$, o que torna a própria função de Green mal definida. Para garantir a consistência da teoria [19] devemos deslocar o pólo de integração como segue

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\omega + i\epsilon) - \mathbf{p}^2/2m} e^{-i\omega(t-t')} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \quad (3.13)$$

onde fica subentendido o limite $\epsilon \rightarrow 0$ a ser tomado no final das contas.

Vamos tratar de um problema sem invariância translacional na coordenada x^d . Sendo assim, será necessário escrevermos a função de Green livre como uma integral de Fourier excluindo essa variável, ou seja, uma integral somente para as coordenadas paralelas às placas. Vamos então definir as coordenadas paralelas como $\mathbf{x}_{\parallel} = (x^1, x^2, \dots, x^{d-1})$ e escrever a função de Green livre na forma

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \mathcal{G}_0(\mathbf{p}_{\parallel}, \omega; x^d, y^d) e^{-i\omega(t-t')} e^{i\mathbf{p}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel})}, \quad (3.14)$$

onde \mathcal{G}_0 denota a função de Green reduzida, que pode ser obtida ao compararmos as equações (3.14) e (3.13)

$$\mathcal{G}_0(\mathbf{p}_{\parallel}, \omega; x^d, y^d) = \int \frac{dp^d}{2\pi} \tilde{G}_0(\mathbf{p}, \omega) e^{ip^d(x^d - y^d)}, \quad (3.15)$$

pois substituindo (3.15) em (3.14) retorna a transformada de Fourier usual da função de Green G_0 dada por (3.11).

Substituindo (3.12) em (3.15) obtemos

$$\mathcal{G}_0(\mathbf{p}_{\parallel}, \omega; x^d, y^d) = \int \frac{dp^d}{2\pi} \frac{2m}{2m\omega + 2mi\epsilon - \mathbf{p}_{\parallel}^2 - (p^d)^2} e^{ip^d(x^d - y^d)}. \quad (3.16)$$

O integrando da expressão acima apresenta pólos quando

$$p^d = \pm \sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2 + 2im\epsilon}, \quad (3.17)$$

e a integral pode ser calculada com o teorema dos resíduos. No caso em que $x^d > y^d$, devemos escolher um caminho de integração fechado composto pelo eixo real e um semi-círculo (de raio infinito) no semi plano de parte imaginária positiva. Quando $y^d > x^d$, o semi-círculo deve estar na região de parte imaginária negativa.

Em todos esses casos, temos o seguinte resultado para a integral

$$\mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, y^d) = -im \frac{e^{i\sqrt{2m(\omega+i\epsilon) - \mathbf{p}_{\parallel}^2}|x^d - y^d|}}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}}, \quad (3.18)$$

onde fica implícito o limite $\epsilon = 0$.

Considere, por outro lado, a função de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t')$ na presença de um potencial estacionário $V(\mathbf{x})$. Vamos mostrar que sua função de Green pode ser escrita na forma

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t') = G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t') + \int dt'' dz G(\mathbf{x}, \mathbf{z}; t, t'') V(\mathbf{z}) G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}; t'', t'). \quad (3.19)$$

Aplicando o operador de Schrödinger, na presença do potencial $V(\mathbf{x})$ em ambos os lados da equação (3.19) obtemos

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 - V(\mathbf{x}) \right) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t') = \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 \right) G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t') - V(\mathbf{x}) G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t')$$

$$+ \int dt'' dz \left[\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 - V(\mathbf{x}) \right) G(\mathbf{x}, \mathbf{z}; t, t'') \right] V(\mathbf{z}) G_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}; t, t''). \quad (3.20)$$

Usando a equação (3.10) e integrando em $d\mathbf{z}$ e dt'' , temos

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 - V(\mathbf{x}) \right) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - t') - V(\mathbf{x}) G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t') + V(\mathbf{x}) G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - t'). \quad (3.21)$$

que é exatamente o que esperamos da função de Green. Isso demonstra a validade de (3.20).

No nosso caso, o potencial depende apenas da coordenada x^d ou seja, $V(\mathbf{x}) = V(x^d)$. Não havendo, portanto, invariância translacional ao longo de x^d .

Substituindo em (3.20) a equação (3.14) e uma integral de Fourier análoga para $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t')$, na forma

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \mathcal{G}(\mathbf{p}_{\parallel}, \omega; x^d, y^d) e^{-i\omega(t-t')} e^{i\mathbf{p}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel})}, \quad (3.22)$$

sendo $\mathcal{G}(\mathbf{p}_{\parallel}, \omega; x^d, y^d)$ uma função a ser determinada, obtemos

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) e^{i\mathbf{p}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel})} e^{-i\omega(t-t')} = \\ & = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) e^{i\mathbf{p}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel})} e^{-i\omega(t-t')} \\ & + \int dt'' \int dz \left[\int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, z^d) e^{i\mathbf{p}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{z}_{\parallel})} e^{-i\omega(t-t'')} V(z^d) \right. \\ & \left. \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}'_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \mathcal{G}_0(\omega', \mathbf{p}'_{\parallel}; z^d, y^d) e^{i\mathbf{p}'_{\parallel} \cdot (\mathbf{z}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel})} e^{-i\omega'(t''-t')} \right]. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Agora integramos as duas ultimas linhas da equação acima em $d^{d-1} \mathbf{z}_{\parallel}$, usamos o fato de que $\int d^{d-1} \mathbf{z}_{\parallel} e^{i(\mathbf{p}'_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{z}_{\parallel}} = (2\pi)^{d-1} \delta(\mathbf{p}'_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel})$, integramos em $d\mathbf{p}'_{\parallel}$, integramos em dt'' , usamos o fato de que $\int dt'' e^{i(\omega - \omega') t''} = 2\pi \delta(\omega - \omega')$ e integramos em $d\omega'$, o que resulta em

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) e^{i\mathbf{p}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel})} e^{-i\omega(t-t')} = \\ & = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) e^{i\mathbf{p}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel})} e^{-i\omega(t-t')} \\ & + \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \int dz^d \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, z^d) V(z^d) \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; z^d, y^d) e^{i\mathbf{p}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel})} e^{-i\omega(t-t')}. \quad (3.24) \end{aligned}$$

Nos dois lados da equação acima temos uma integral de Fourier com as mesmas exponenciais. Dessa forma, podemos igualar os integrandos e escrever

$$\mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) = \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) + \int dz^d \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, z^d) V(z^d) \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; z^d, y^d). \quad (3.25)$$

Para o potencial em questão, temos que

$$\mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) = \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) + \int dz^d \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, z^d) \sum_i \mu_i \delta(z^d - a_i) \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; z^d, y^d). \quad (3.26)$$

No presente capítulo, estamos interessados apenas no caso onde $i = 1$, simulando, portanto, a presença de uma única placa espacialmente localizada. Sendo assim, $V(z^d) = \mu \delta(z^d - a)$. Nesse caso podemos efetuar a integral em (3.26),

$$\mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) = \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) + \mu \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, a) \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; a, y^d). \quad (3.27)$$

Vamos avaliar a equação acima em $y^d = a$,

$$\mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, a) = \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, a) + \mu \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, a) \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; a, a). \quad (3.28)$$

Resolvendo para $\mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, a)$

$$\mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, a) = \frac{\mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, a)}{1 - \mu \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; a, a)}. \quad (3.29)$$

Substituindo em (3.29) em (3.27), tem-se finalmente que

$$\mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) = \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) + \frac{\mu}{1 - \mu \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; a, a)} \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, a) \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; a, y^d). \quad (3.30)$$

Usamos agora o resultado (3.18),

$$\mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) = -im \frac{e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}|x^d - y^d|}}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}},$$

em (3.30) para escrever

$$\mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) = -im \frac{e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}|x^d - y^d|}}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}} - \frac{\mu m^2}{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} \frac{e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a| + |y^d - a|)}}{1 + \frac{i\mu m}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}}}. \quad (3.31)$$

Esse resultado, portanto, representa a função de Green reduzida para uma única placa na presença de um potencial delta espacialmente localizado. Com ele é possível encontrar os níveis de energia para esse potencial delta, resultado já bem conhecido na literatura, calculado com a resolução da equação de Schrödinger.

Quando $\mu = 0$, ficamos apenas com o primeiro termo do lado direito da equação (3.31), que corresponde á função de Green sem o potencial, como era de se esperar.

No caso em que $\mu \rightarrow -\infty$, a equação (3.31) se reduz a

$$\lim_{\mu \rightarrow -\infty} \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) = -im \frac{e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}|x^d - y^d|}}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}} + i \frac{m}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}} e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a| + |y^d - a|)}. \quad (3.32)$$

Quando $x^d = a$ ou $y^d = a$, a equação acima é nula. Ou seja, no limite onde $\mu \rightarrow -\infty$, a função de Green reduzida satisfaz a condição de Dirichlet sob o plano onde o potencial se concentra. Dessa forma a própria função de Green e o campo satisfazem essa condição de contorno para esse limite. Com efeito, podemos interpretar o modelo como um certo tipo de condição de Dirichlet generalizada e o plano potencial como um tipo de espelho semi-transparente para o campo, sendo a constante de acoplamento μ uma medida da intensidade da transparência desse espelho.

3.2 Níveis de energia e auto-funções para uma placa espacialmente localizada

É um fato bem conhecido de que os pólos da função de Green nos fornecem os auto-valores de energia do sistema. Isso pode ser constatado com a fórmula espectral [20]. Para identificar os pólos relevantes, vamos tomar a função de Green reduzida na forma

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \Delta\mathcal{G}, \quad (3.33)$$

onde \mathcal{G}_0 representa o caso onde não existe potencial e é dado pelo primeiro termo do lado direito da equação (3.31). Por outro lado, $\Delta\mathcal{G}$ representa a contribuição para a função de Green reduzida introduzida pela presença da placa propriamente dita. São os pólos dessa contribuição que estão associados aos auto-valores de energia da função de onde de Schrödinger na presença do potencial delta.

Da expressão (3.31) temos que seu pólo deve satisfazer

$$\Delta\mathcal{G}_{\text{pólos}} \implies \sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} + i\mu m = 0. \quad (3.34)$$

Resolvendo a equação para ω , obtemos facilmente a expressão que denota os níveis de energia de uma única placa

$$\omega = -\frac{\mu^2 m}{2} + \mathbf{p}_{\parallel}^2. \quad (3.35)$$

Restringindo ao caso 1 + 1 dimensional, onde $\mathbf{p}_{\parallel} = 0$, vemos que o resultado está em pleno acordo com aquele já conhecido na literatura [21].

Com a fórmula espectral [20], também podemos obter a autofunção de energia

$$\phi(x) = \sqrt{m|\mu|} e^{-m|\mu||x-a|}. \quad (3.36)$$

Com a imposição $\mathbf{p}_{\parallel} = 0$, o resultado encontrado fica em pleno acordo com o caso 1 + 1 dimensional conhecido na literatura [21].

Capítulo 4

Campo de Schrödinger com dois potenciais delta

Nesse capítulo consideramos o campo de Schrödinger na presença de dois potenciais delta de Dirac concentrados ao longo de planos paralelos entre si.

A obtenção da função de Green desse problema segue de forma análoga à construção da função de Green para um único potencial delta, exposta no capítulo anterior. Seja então a equação (3.26), com $i = 2$. Podemos fazer a integração em dz^d , o que resulta em

$$\mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, y^d) = \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, y^d) + \sum_{i=1}^2 \mu_i \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, a_i) \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, a_i, y^d), \quad (4.1)$$

onde a_i é a localização espacial da placa i e μ_i seu respectivo parâmetro de opacidade.

Avaliamos a equação acima para $y^d = a_j$

$$\mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, a_j) = \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, a_j) + \sum_{i=1}^2 \mu_i \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, a_i) \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, a_i, a_j). \quad (4.2)$$

Definimos agora as matrizes

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_j &= \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, a_j), & \mathcal{G}_{j(0)} &= \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, a_j), \\ \mathcal{G}_{ij(0)} &= \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; a_i, a_j), & M_{ij} &= \delta_{ij} - \mu_i \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; a_i, a_j). \end{aligned} \quad (4.3)$$

de modo a reescrever a equação (4.2) na forma

$$\mathcal{G}_j = \mathcal{G}_{j(0)} + \sum_{i=1}^2 \mu_i \mathcal{G}_i \mathcal{G}_{ij(0)} \Rightarrow \mathcal{G}_j - \sum_{i=1}^2 \mu_i \mathcal{G}_i \mathcal{G}_{ij(0)} = \mathcal{G}_{j(0)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=1}^2 \delta_{ij} \mathcal{G}_i - \sum_{i=1}^2 \mu_i \mathcal{G}_i \mathcal{G}_{ij(0)} = \mathcal{G}_{j(0)} &\Rightarrow \sum_{i=1}^2 \mathcal{G}_i (\delta_{ij} - \mu_i \mathcal{G}_{ij(0)}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^2 \mathcal{G}_i M_{ij} = \mathcal{G}_{j(0)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Multiplicando ambos os lados de (4.4) pela inversa da matriz M , obtemos

$$\mathcal{G}_k = \sum_{j=1}^2 \mathcal{G}_{j(0)} M_{jk}^{-1}. \quad (4.5)$$

Com as definições (4.3) e ajustando os índices, temos que

$$\mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, a_i) = \sum_{j=1}^2 \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, a_j) M_{ji}^{-1}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, a). \quad (4.6)$$

Substituimos agora (4.6) em (4.1) e podemos escrever

$$\mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) = \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, y^d) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mu_i \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, a_j) M_{ji}^{-1}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, a) \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, a_i, y^d). \quad (4.7)$$

A matriz $M = \delta_{ij} - \mu_i \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; a_i, a_j)$, que deve ser invertida na equação acima, tem a seguinte estrutura

$$M = \mathbb{I}_{2 \times 2} + A \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1 e^{is} \\ \mu_2 e^{is} & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

onde $\mathbb{I}_{2 \times 2}$ é a matriz identidade 2×2 , A é um fator numérico, assim como s , definidos como

$$A = \frac{im}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}}, \quad s = \sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} a, \quad a = |a_i - a_j|. \quad (4.9)$$

A matriz M possui inversa, cuja representação é dada pela expressão

$$M^{-1} = \frac{1}{(1 + A\mu_1)(1 + A\mu_2) - A^2 \mu_1 \mu_2 e^{2is}} \begin{pmatrix} 1 + A\mu_2 & A\mu_1 e^{is} \\ -A\mu_2 e^{is} & 1 + A\mu_1 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Substituindo (4.10) na equação (4.7) e realizando algumas manipulações simples, obtemos finalmente a função de Green reduzida para o campo de Schrödinger com duas deltas

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x^d, y^d) = \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, y^d) - \frac{m^2}{2m\omega} \frac{1}{(1 + A\mu_1)(1 + A\mu_2) - A^2 \mu_1 \mu_2 e^{2is}} \times \\ \left[\mu_1 (1 + A\mu_2) e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a_1| + |y^d - a_1|)} + \mu_2 (1 + A\mu_1) e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a_2| + |y^d - a_2|)} \right. \\ \left. - A\mu_1 \mu_2 e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a_1| + |y^d - a_2| + a)} - A\mu_1 \mu_2 e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a_2| + |y^d - a_1| + a)} \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Como é possível notar, a expressão acima carrega algumas similaridades com o caso de uma única placa. Existe uma contribuição livre, que deve ser interpretada como a parcela do vácuo livre, seguido de um próximo termo bem mais complicado que traz informações sobre a existência das placas.

Como visto no capítulo anterior, ao demandar que $\mu \rightarrow -\infty$, a função de Green deve se anular exatamente sobre as placas (condições de Dirichlet). Sendo assim

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, y^d) = \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, y^d) + \frac{im}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}} \frac{1}{1 - e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}a}} \left[e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a_1| + |y^d - a_1|)} + e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a_2| + |y^d - a_2|)} - e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a_1| + |y^d - a_2| + a)} - e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a_2| + |y^d - a_1| + a)} \right]. \quad (4.12)$$

Para qualquer uma das quatro situações: $x^d = a_1$, $x^d = a_2$, $y^d = a_1$ ou $y^d = a_2$, temos que

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, a_1) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, a_2) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, a_1, y^d) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, a_2, y^d) = 0, \quad (4.13)$$

como esperado.

4.1 Níveis de energia para duas placas

Com a função de Green obtida na seção anterior, podemos encontrar os auto-valores de energia do problema. Para isso, devemos estudar os pólos da função de Green. Vamos nos restringir para o caso onde os potenciais são iguais, ou seja, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

Com uma análise simples da equação (4.11), podemos mostrar que os pólos do propagador são dados pela equação

$$\left(\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} + i\mu m \right)^2 + \mu^2 m^2 e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}a} = 0. \quad (4.14)$$

As soluções de (4.14), para $d \neq 1$, são dadas por

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{\mathbf{p}_{\parallel}^2}{2m} \\ \omega_1 &= -\frac{[LW(ma\mu e^{ma\mu}) - ma\mu]^2}{2ma^2} + \frac{\mathbf{p}_{\parallel}^2}{2m} \\ \omega_2 &= -\frac{[LW(-ma\mu e^{ma\mu}) - ma\mu]^2}{2ma^2} + \frac{\mathbf{p}_{\parallel}^2}{2m}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde $LW(x)$ designa a função W de Lambert, definida como a função transcendental que resolve y na equação ($y = LW(x)$) [22]

$$ye^y = x. \quad (4.16)$$

Quando $d = 1$, as soluções são

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 0 \\ \omega_+ &= -\frac{[LW(ma\mu e^{ma\mu}) - ma\mu]^2}{2ma^2} \\ \omega_- &= -\frac{[LW(-ma\mu e^{ma\mu}) - ma\mu]^2}{2ma^2}.\end{aligned}\quad (4.17)$$

Vamos fazer uma rápida análise dos autovalores de energia para o caso 1 + 1 dimensional, ou seja, $d = 1$. Nesse caso, $\omega_0 = 0$, exibindo um comportamento trivial. O autovalor ω_+ é estritamente real, negativo para $\mu < 0$ e nulo para $\mu > 0$.

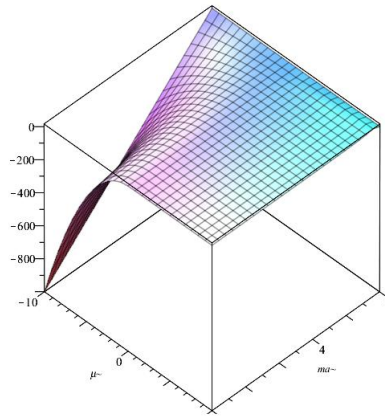


Figura 4.1 – Parte real de ω_-/a em função de μ e do produto ma

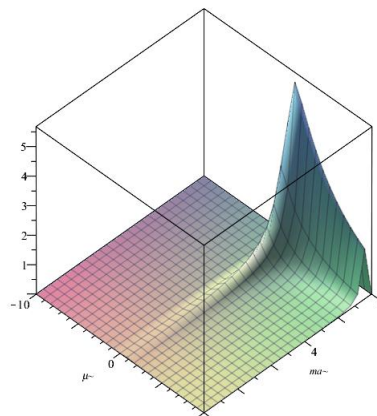


Figura 4.2 – Parte imaginária de ω_-/a em função de μ e do produto ma , apresenta valores positivos indicando problemas na teoria

O autovalor ω_- exibe um comportamento peculiar. No gráfico da figura (4.1) temos o comportamento da parte real de ω_- multiplicada por a . Percebemos que para valores positivos de μ , a parte

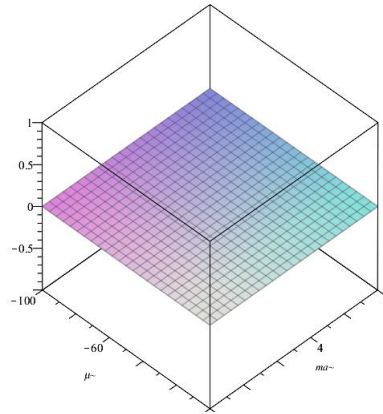


Figura 4.3 – Parte imaginária de ω_-/a em função de μ e do produto ma . Os valores são estritamente nulos para $\mu < 0$.

real de ω_- é nula. Os gráficos (4.2) e (4.3) mostram que a parte imaginária de ω_- é nula para $\mu < 0$ e apresenta valores positivos para $\mu > 0$. Esse é mais um indício de que a teoria só faz sentido para valores de μ estritamente negativos.

Por esses resultados é possível concluir que a imposição de μ negativo deve ser feita e assim as energias possuem valores negativos, indicando estados ligados na teoria.

Capítulo 5

Campo de Schrödinger com uma carga pontual e um plano

Com o intuito de compreender um pouco melhor o papel do potencial considerado no capítulo (3), vamos considerar o campo de Schrödinger na presença do potencial e de uma fonte externa pontual. Antes de abordar esse caso, vamos considerar alguns aspectos do campo de Schrödinger.

5.1 Campo de Schrödinger na presença de fontes externas

Entendemos por fontes externas de campo, funções que se acoplam linearmente com este. No caso do campo não relativístico, a presença de fontes externas é descrita com a introdução de termos adicionais à Lagrangeana (3.2), como segue

$$\mathcal{L}(\psi, \nabla\psi, \dot{\psi}) = i\hbar\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi - V(\mathbf{x}, t)\psi^*\psi - J\psi^* - J^*\psi. \quad (5.1)$$

A equação dinâmica correspondente é dada por

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \nabla^2\psi + V(\mathbf{x}, t)\psi + J, \quad (5.2)$$

e a densidade de hamiltoniana,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + V(\mathbf{x}, t)\psi^*\psi + J(x)\psi^* + J^*(x)\psi. \quad (5.3)$$

Note que a solução particular da equação (5.2) é obtida por meio da função de Green

$$\psi(x) = \int d^3\mathbf{y} dt' G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, t') J(\mathbf{y}, t'). \quad (5.4)$$

Tomando o complexo conjugado de (5.4) temos

$$\psi^*(x) = \int d^3\mathbf{z} dt'' G^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t, t') J^*(\mathbf{z}, t'). \quad (5.5)$$

A energia do sistema é dada por

$$E = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H} = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + V(\mathbf{x}, t) \psi^* \psi + J(x) \psi^* + J^*(x) \psi \right] \quad (5.6)$$

Substituindo (5.4) e (5.5) em (5.6)

$$\begin{aligned} E = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2m} \left(\int d^3\mathbf{y} dt' \nabla_{\mathbf{x}} G^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, t') J^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, t') \right) \cdot \left(\int d^3\mathbf{z} dt'' \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}, t'') J^*(\mathbf{z}, t'') \right) \right. \\ \left. + V(\mathbf{x}, t) \int d^3\mathbf{z} dt'' G^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t, t'') J^*(\mathbf{z}, t'') \int d^3\mathbf{y} dt' G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, t') J(\mathbf{y}, t') \right. \\ \left. + J(\mathbf{x}, t) \int d^3\mathbf{z} dt'' G^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t, t'') J^*(\mathbf{z}, t'') + J^*(\mathbf{x}, t) \int d^3\mathbf{y} dt' G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, t') J^*(\mathbf{y}, t') \right]. \quad (5.7) \end{aligned}$$

Fazendo uma integração por partes na equação acima e reagrupando termos, podemos escrever

$$\begin{aligned} E = \int d^3\mathbf{x} \left[\int d^3\mathbf{y} dt' \int d^3\mathbf{z} dt'' G^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, t') J^*(\mathbf{y}, t') J(\mathbf{z}, t'') \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V(\mathbf{x}, t) \right) G(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}, t'') \right. \\ \left. + J(\mathbf{x}, t) \int d^3\mathbf{z} dt'' G^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t, t'') J^*(\mathbf{z}, t'') + J^*(\mathbf{x}, t) \int d^3\mathbf{y} dt' G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, t') J^*(\mathbf{y}, t') \right] \quad (5.8) \end{aligned}$$

Pela própria definição da função de Green, temos que

$$\left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V(\mathbf{x}, t) \right) G(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}, t'') = -\delta(t - t'') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + i \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}, t''), \quad (5.9)$$

o que nos permite reescrever a equação (5.8), após algumas manipulações simples, na forma

$$\begin{aligned} E = \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{y} dt' \int d^3\mathbf{z} dt'' G^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, t') J^*(\mathbf{y}, t') J(\mathbf{z}, t'') i \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}, t'') \\ + \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{z} dt'' J^*(\mathbf{x}, t) G(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}, t'') J(\mathbf{z}, t'') \quad (5.10) \end{aligned}$$

Para o caso onde o potencial não depende do tempo, isto é, $V(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x})$, a função de Green deve exibir invariância por translação temporal, ou seja, $G(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, t') = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t')$. Dessa forma, temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}, t'') = \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t - t'') = \frac{\partial}{\partial t''} G(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t - t''). \quad (5.11)$$

Levamos agora a equação (5.11) em (5.10),

$$E = \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{y} dt' \int d^3\mathbf{z} dt'' G^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t') J^*(\mathbf{y}, t') J(\mathbf{z}, t'') (-1) i \frac{\partial}{\partial t''} G(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t - t'')$$

$$+ \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{z} dt'' J^*(\mathbf{x}, t) G(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t - t'') J(\mathbf{z}, t'') . \quad (5.12)$$

Fazemos agora uma integração por partes,

$$E = \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{y} dt' \int d^3\mathbf{z} dt'' G^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t') J^*(\mathbf{y}, t') \left(-i \frac{\partial}{\partial t''} J(\mathbf{z}, t'') \right) G(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t - t'') \\ + \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{z} dt'' J^*(\mathbf{x}, t) G(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t - t'') J(\mathbf{z}, t'') . \quad (5.13)$$

Para fontes externas estacionárias, ou seja, $J(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{x})$, a derivada na equação acima é nula e a energia pode ser escrita como

$$E = \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{z} dt'' J^*(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}, t'') J(\mathbf{z}) . \quad (5.14)$$

5.2 Interação plano-carga

Nessa seção vamos nos restringir a um espaço 3 + 1 dimensional.

No problema abordado no capítulo (3) a função de Green foi escrita na forma

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, t') = G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, t') + \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, t') , \quad (5.15)$$

sendo $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, t')$ a função de Green livre (3.12) e $\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, t')$ uma correção introduzida pela presença da placa, obtida com a equação (3.31), dada por

$$\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t') = - \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\mu m^2}{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} \frac{e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a| + |y^d - a|)}}{1 + \frac{i\mu m}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}}} e^{-i\omega(t-t')} e^{i\mathbf{p}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel})} \quad (5.16)$$

Ao substituirmos (5.15) em (5.14), vamos obter um termo oriundo da função de Green livre $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, t')$ para a energia do sistema. Essa contribuição não contém informação alguma a respeito da posição da placa e não contribui para a interação entre a placa e a fonte externa. De fato, essa contribuição fornece a auto-energia da fonte e será descartada de agora em diante. Com isso, a energia de interação fica

$$E_{int} = \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{z} dt'' J^*(\mathbf{x}) \Delta G(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}, t'') J(\mathbf{z}) . \quad (5.17)$$

Vamos tomar a seguinte fonte pontual, localizada na posição \mathbf{b} ,

$$J(\mathbf{x}) = \lambda \delta(\mathbf{x} - \mathbf{b}) , \quad (5.18)$$

onde λ é uma constante complexa.

Substituindo (5.18) em (5.17), temos que

$$E_{\text{int}} = - \int dt' \int d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{y} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} |\lambda|^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{b}) \frac{\mu m^2}{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} \times \\ \times \frac{e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a| + |y^d - a|)}}{1 + \frac{i\mu m}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}}} e^{-i\omega(t-t')} e^{i\mathbf{p}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel})} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{b}). \quad (5.19)$$

Realizando a integração na ordem \mathbf{y}_{\parallel} , \mathbf{x}_{\parallel} , ω , y^0 e então em x^3 e y^3 , usando o fato de que $\int dt' e^{i\omega t'} = (2\pi)\delta(\omega)$ e recuperando o parâmetro regularizador ϵ , obtém-se

$$E_{\text{int}} = \frac{|\lambda|^2}{(2\pi)^2} \int d^2 \mathbf{p}_{\parallel} \frac{\mu m^2}{\mathbf{p}_{\parallel}^2 - i\epsilon} \frac{e^{-2\sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2 - i\epsilon}|b^3 - a|}}{1 + \frac{\mu m}{\sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2 - i\epsilon}}}, \quad (5.20)$$

onde $b^3 - a$ é a distância entre a carga pontual e o plano e p_{\parallel} é o módulo do vetor \mathbf{p}_{\parallel} . Essa expressão pode ser integrada em coordenadas polares, observando que não há dependência explícita do ângulo polar,

$$E_{\text{int}} = \frac{|\lambda|^2 \mu m^2}{(2\pi)} \int_0^{\infty} dr \frac{r}{r^2 - i\epsilon} \frac{e^{-2\sqrt{r^2 - i\epsilon}|b^3 - a|}}{1 + \frac{\mu m}{\sqrt{r^2 - i\epsilon}}} \quad (5.21)$$

Temos que efetuar a integral acima com cautela. O caso $\mu \rightarrow \pm\infty$ não exhibe pólos e pode ser encontrado facilmente,

$$\lim_{\mu \rightarrow \pm\infty} E_{\text{int}} = \frac{|\lambda|^2 m}{(2\pi)|b^3 - a|}. \quad (5.22)$$

exibindo um comportamento de interação de longa distância Coulombiano repulsivo, entre a fonte e sua imagem refletida no plano onde o potencial se concentra.

O caso de μ finito deve ser também considerado com cuidado. Apesar de sabermos que valores finitos e positivos de μ fornecem autovalores de energia inconsistentes (com parte imaginária positiva). No entanto, nesse capítulo, vamos calcular a energia (5.21) também para μ positivo.

Se $\mu > 0$ a integral (5.21) não exhibe pólos e pode ser facilmente calculada com o uso da definição da função exponencial integral

$$Ei(a, z) = \int_1^{\infty} ds \frac{e^{-sz}}{s^a}, \quad (5.23)$$

o que fornece

$$E_{\text{int}} = \frac{|\lambda|^2 \mu m^2}{(2\pi)} Ei(1, 2m\mu|b^3 - a|) e^{2m\mu|b^3 - a|} \Big|_{\mu > 0}, \quad (5.24)$$

que exhibe a mesma dependência com a distância entre o plano e a carga que a obtida com o campo de Klein-Gordon na presença do mesmo tipo de potencial [5].

Para tratar o caso de $\mu < 0$, vamos reescrever a integral (5.21) como segue

$$\begin{aligned} E_{\text{int}} &= \frac{|\lambda|^2 \mu m^2}{(2\pi)} \int_0^\infty dr \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon}} \frac{e^{-2\sqrt{r^2 - i\epsilon}|b^3 - a|}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon} + \mu m} \\ &= \frac{|\lambda|^2 \mu m^2}{2(2\pi)} \int_{-\infty}^\infty dr \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon}} \frac{e^{-2\sqrt{r^2 - i\epsilon}|b^3 - a|}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon} + \mu m}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

A integral acima apresenta pólos para

$$r = (i\epsilon)^{1/2}, \quad r = (i\epsilon + \mu^2 m^2)^{1/2}, \quad r = -(i\epsilon)^{1/2}, \quad r = -(i\epsilon + \mu^2 m^2)^{1/2}, \quad (5.26)$$

e seu integrando é nulo ao longo dos semi-círculos de raio infinito no plano complexo r para $Im(r) > 0$ e $Im(r) < 0$. Podemos então usar o teorema dos resíduos para computar a integral (5.25). Podemos tomar um caminho fechado composto pelo eixo r real e um semi-círculo de raio infinito no semi-plano superior ou inferior.

Os resíduos dos integrandos de (5.25) são dados por

$$\begin{aligned} Res_{r=(i\epsilon+\mu^2 m^2)^{1/2}} \left[\frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon}} \frac{e^{-2\sqrt{r^2 - i\epsilon}|b^3 - a|}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon} + \mu m} \right] &= \frac{1}{2\pi i} \exp(2m\mu|b^3 - a|) \\ Res_{r=-(i\epsilon+\mu^2 m^2)^{1/2}} \left[\frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon}} \frac{e^{-2\sqrt{r^2 - i\epsilon}|b^3 - a|}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon} + \mu m} \right] &= -\frac{1}{2\pi i} \exp(2m\mu|b^3 - a|) \\ Res_{r=(i\epsilon)^{1/2}} \left[\frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon}} \frac{e^{-2\sqrt{r^2 - i\epsilon}|b^3 - a|}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon} + \mu m} \right] &= \\ = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho=0} \left[\frac{-1 + i}{\sqrt{1 + i}} \frac{\epsilon^{1/4} 2^{3/4}}{\sqrt{\rho}(-\mu m)} - \frac{(1 + i)\epsilon^{1/2} 2^{-1/2} (1 + 2\mu m|b^3 - a|)}{\mu^2 m^2} + \mathcal{O}(\rho^{1/2}) \right] \\ Res_{r=-(i\epsilon)^{1/2}} \left[\frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon}} \frac{e^{-2\sqrt{r^2 - i\epsilon}|b^3 - a|}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon} + \mu m} \right] &= \\ = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho=0} \left[\frac{-1 + i}{\sqrt{1 + i}} \frac{\epsilon^{1/4} 2^{3/4}}{\sqrt{\rho}(-\mu m)} - \frac{(1 + i)\epsilon^{1/2} 2^{-1/2} (1 + 2\mu m|b^3 - a|)}{\mu^2 m^2} + \mathcal{O}(\rho^{1/2}) \right] \end{aligned} \quad (5.27)$$

Os primeiros termos do terceiro e do quarto resíduo acima divergem com $\lim_{\rho=0} \rho^{-1/2}$. Esses termos divergentes não dependem da distância entre a placa e a carga, $|b^3 - a|$, e não contribuem para a interação entre estes. Sendo assim, podemos desconsiderar esses termos de agora em diante. Com isso, os termos dependentes $|b^3 - a|$ dos pólos acima podem ser escritos como

$$Res_{r=\pm(i\epsilon+\mu^2 m^2)^{1/2}} \left[\frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon}} \frac{e^{-2\sqrt{r^2 - i\epsilon}|b^3 - a|}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon} + \mu m} \right] = \pm \frac{1}{2\pi i} \exp(2m\mu|b^3 - a|)$$

$$Res_{r=\pm(i\epsilon)^{1/2}} \left[\frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon}} \frac{e^{-2\sqrt{r^2 - i\epsilon}|b^3 - a|}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon} + \mu m} \right] \rightarrow -\frac{1}{2\pi i} \frac{(1+i)\epsilon^{1/2} 2^{-1/2} (1 + 2\mu m |b^3 - a|)}{\mu^2 m^2} \quad (5.28)$$

Lembrando que, ao final dos cálculos, devemos tomar o limite $\epsilon = 0$, temos que

$$\begin{aligned} Res_{r=\pm(i\epsilon + \mu^2 m^2)^{1/2}} \left[\frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon}} \frac{e^{-2\sqrt{r^2 - i\epsilon}|b^3 - a|}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon} + \mu m} \right] &= \pm \frac{1}{2\pi i} \exp(2m\mu |b^3 - a|) \\ Res_{r=\pm(i\epsilon)^{1/2}} \left[\frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon}} \frac{e^{-2\sqrt{r^2 - i\epsilon}|b^3 - a|}}{\sqrt{r^2 - i\epsilon} + \mu m} \right] &= 0 . \end{aligned} \quad (5.29)$$

Usando então o teorema dos resíduos, para efetuar a integral (5.25), com um contorno de integração no semi-plano superior ou inferior, temos que

$$E_{\text{int}} = \frac{|\lambda|^2 \mu m^2}{(2\pi)} e^{2\mu m |b^3 - a|} \Big|_{\mu < 0} . \quad (5.30)$$

O resultado acima apresenta algumas curiosidades. Ele cai exponencialmente com a distância (lembre-se de que $\mu < 0$), mas seu decaimento é mais lento em comparação com o potencial de Yukawa. Nos limites em que $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$, a energia se anula. A interação produzida é de origem atrativa.

Capítulo 6

Energia de Casimir para o campo de Schrödinger com potenciais delta

Nesse capítulo vamos iniciar um estudo sobre a energia do campo de Schrödinger, no estado de vácuo, na presença de dois potenciais tipo delta de Dirac.

Como é sabido da teoria de campos, a energia de um dado sistema pode ser obtida pela integração no espaço tridimensional da densidade Hamiltoniana [23]

$$E = \int d^d \mathbf{r} \mathcal{H}. \quad (6.1)$$

Onde \mathcal{H} é a densidade de Hamiltoniana do sistema.

No caso do campo de Schrödinger, temos que

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + V \psi^* \psi. \quad (6.2)$$

E a energia (6.1) se torna

$$E = \int d^d \mathbf{r} \frac{1}{2m} \nabla \psi^*(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t). \quad (6.3)$$

Com uma integração por partes, a energia acima pode ser escrita na forma

$$E = \int d^d \mathbf{r} \left[\left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}, t) \right) \psi^*(\mathbf{r}, t) \right] \psi(\mathbf{r}, t). \quad (6.4)$$

A equação acima é divergente e se faz necessário utilizar algum procedimento de regularização. Usamos, então, a separação de pontos, como segue

$$E = \int d^d \mathbf{r} \lim_{\substack{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} \\ t \rightarrow t'}} \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}, t) \right) \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}', t'). \quad (6.5)$$

Com um formalismo de integral de caminho, para campos em estado de vácuo, descritos por Lagrangeanas quadráticas, podemos fazer a identificação

$$\psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}', t') \rightarrow iG(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \quad (6.6)$$

onde $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$ é a função de Green do sistema, e a energia (6.5) se torna

$$E = \int d^d\mathbf{r} \lim_{\substack{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} \\ t \rightarrow t'}} \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}, t) \right) iG(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \quad (6.7)$$

Usando o fato de que

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} - V(\mathbf{r}, t) \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\delta(t, t'), \quad (6.8)$$

podemos reescrever a equação (6.12) na forma

$$E = \int d^d\mathbf{r} \lim_{\substack{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} \\ t \rightarrow t'}} i \left(i\frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') - \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\delta(t, t') \right). \quad (6.9)$$

Escrevendo a função de Green como a soma da Função de Green livre, $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$ acrescida de um termo de correção decorrente da presença do potencial, ou seja

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') + \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t'). \quad (6.10)$$

temos que a energia do sistema é dada pela integral

$$E = \int d^d\mathbf{r} \lim_{\substack{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} \\ t \rightarrow t'}} i^2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') + \int d^3\mathbf{r} \lim_{\substack{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} \\ t \rightarrow t'}} i \left(i\frac{\partial}{\partial t} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') - \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\delta(t, t') \right) \quad (6.11)$$

A contribuição para a energia da função de Green livre G_0 e do termo que envolve as funções delta de Dirac nada mais são do que a energia livre do sistema, ou seja, a energia do sistema na ausência de potencial. Esses termos não contribuem para a interação entre os potenciais delta e, de agora em diante, serão descartados.

Para o caso em que estamos interessados, temos que

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \Delta \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, x'^d) e^{-i\omega(t-t')} e^{i\mathbf{p}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel})} \quad (6.12)$$

onde $\Delta \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, x'^d)$ é dado pelo segundo termo do lado direito da equação (4.11), no caso de dois potenciais delta. Sendo assim, substituindo (6.12) em (6.11), temos a energia do sistema

$$E = \int d^{d-1}\mathbf{r}_{\parallel} \int dx^d \lim_{\substack{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} \\ t \rightarrow t'}} i^2 \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \Delta \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, x'^d) e^{-i\omega(t-t')} e^{i\mathbf{p}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel})}$$

$$= \int d^2 \mathbf{r}_{\parallel} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \int dx^d i\omega \Delta \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, x^d + \delta) \quad (6.13)$$

onde fizemos $x'^d = x^d + \delta$, $\mathbf{r}'_{\parallel} = \mathbf{r}_{\parallel}$, tomamos a derivada temporal e o limite $t \rightarrow t'$.

O integrando acima não depende mais das coordenadas perpendiculares \mathbf{r}_{\parallel} . Identificando a área na qual um potencial delta se concentra, $\mathcal{A} = \int d^{d-1} \mathbf{r}_{\parallel}$ encontramos finalmente

$$E = \mathcal{A} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \int dx^d i\omega \Delta \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}, x^d, x^d + \delta). \quad (6.14)$$

6.1 Auto-energia de uma placa

Partindo da equação (6.14), a energia de auto-interação de uma placa é calculada como

$$E_i = \mathcal{A} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx^d i\omega \left(-\frac{\mu_i m^2}{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} \right) \frac{e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a_i| + |x^d + \delta - a_i|)}}{1 + \frac{i\mu_i m}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}}} \quad (6.15)$$

Aplicando limite e realizando uma mudança de variáveis $x^d - a_i = u$ resulta em

$$E_i = \mathcal{A} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \int du \frac{-i\mu_i \omega m^2}{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} \frac{e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}|u|}}{1 + \frac{i\mu_i m}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}}} \quad (6.16)$$

A integral em u pode ser efetuada com o teorema dos resíduos. A escolha de um caminho de integração no plano complexo adequado depende do sinal de $2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2$. Para $2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2 > 0$, usamos que $\omega \rightarrow \omega + i\varepsilon$, como segue

$$\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} = \left[(2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2) \left(1 + \frac{2m\omega i\varepsilon}{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} \right) \right]^{1/2} \quad (6.17)$$

Após uma expansão em séries de potências retendo apenas o termo linear em ε a expressão acima pode ser reescrita como

$$\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} = \sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} + i\delta, \quad (6.18)$$

onde δ é um parâmetro tão pequeno quanto necessário, que será avaliado no limite $\delta \rightarrow 0$. Com isso

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}|u|} &\rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{(2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} + i\delta)|u|} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-2\epsilon - (-2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2})|u|} = \frac{i}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}} \end{aligned} \quad (6.19)$$

A análise é idêntica quando $2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2 < 0$, basta fatorar uma unidade imaginária do argumento da raiz e prosseguir de maneira similar e facilmente recupera o mesmo resultado acima, dado em (6.19). Com isso, a expressão (6.16) se torna

$$E_i = \mathcal{A} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\mu_i \omega m^2}{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} \frac{1}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} + i\mu_i m}. \quad (6.20)$$

A integral em \mathbf{p}_{\parallel} pode ser resolvida utilizando coordenadas esféricas generalizadas, se p_{\parallel} representa o módulo do vetor \mathbf{p}_{\parallel} , então a auto-energia da placa i pode ser expressa em termos de uma integral em ω e outra em p_{\parallel} com a condição que $d \neq 1$,

$$E_i = \mathcal{A} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dp_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} p_{\parallel}^{d-2} \frac{\mu_i \omega m^2}{2m\omega - p_{\parallel}^2} \frac{1}{\sqrt{2m\omega - p_{\parallel}^2} + i\mu_i m}. \quad d \neq 1 \quad (6.21)$$

Para $d = 1$ a energia de auto-interação da placa i é substancialmente mais simples, uma vez que não existe \mathbf{p}_{\parallel} , e a hiper-área \mathcal{A} é nula, uma vez que os potenciais se concentram em pontos. Sendo assim

$$E_i = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\mu_i m}{2} \frac{1}{\sqrt{2m\omega} + i\mu_i m}. \quad d = 1. \quad (6.22)$$

6.2 Energia na presença de duas placas e a energia de Casimir

A energia do sistema quando temos duas placas presentes é determinada de forma análoga ao caso quando temos somente uma única placa

$$E_{12} = \mathcal{A} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{-im^2\omega}{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} \times \frac{1}{(1 + A\mu_1)(1 + A\mu_2) - A^2\mu_1\mu_2 e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}a}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dx^d \left[\mu_1(1 + A\mu_2) e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}|x^d - a_1|} + \mu_2(1 + A\mu_1) e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}|x^d - a_2|} - \right. \\ \left. - A\mu_1\mu_2 e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a_1| + |x^d - a_2| + a)} - A\mu_2\mu_1 e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a_2| + |x^d - a_1| + a)} \right] \quad (6.23)$$

válida para $d \neq 1$, onde o fator A correspondente a

$$A = \frac{im}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}}. \quad (6.24)$$

Com a transformação de variável $u = x^d - a_1$, podemos escrever que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx^d e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^d - a_1| + |x^d - a_2| + a)}, = \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^a + \int_a^{\infty} \right) du e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|u| + |u - a| + a)}. \quad (6.25)$$

Usamos agora o fato de que

$$\int_{-\infty}^0 du e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|u|+|u-a|+a)} = e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}a} \int_0^{\infty} du e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}u}, \quad (6.26)$$

$$\int_a^{\infty} du e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|u|+|u-a|+a)} = e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}a} \int_0^{\infty} du e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}u} \quad (6.27)$$

$$\int_0^a du e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|u|+|u-a|+a)} = \int_0^a du e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}a} = ae^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}a}. \quad (6.28)$$

e substituimos os resultados (6.26), (6.27), e (6.28) em (6.25),

$$\int_{-\infty}^{\infty} du e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}(|u|+|u-a|+a)} = \left(\frac{i}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}} + a \right) e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}a}. \quad (6.29)$$

Paralelamente a este resultado, outra integral se faz de interesse. Para o cálculo dos demais termos da equação (6.23), considere a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx^d e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}|x^d - a_i|} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}|u|}. \quad (6.30)$$

Procedendo de forma similar ao que fizemos na seção anterior, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx^d e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}|x^d - a_i|} = \frac{i}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}}. \quad (6.31)$$

Inserindo os resultados (6.29) e (6.31) em (6.23) resulta em

$$\begin{aligned} E_{12} = \mathcal{A} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{-im^2\omega}{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2} \times \frac{1}{(1 + A\mu_1)(1 + A\mu_2) - A^2\mu_1\mu_2 e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}a}} \times \\ \times \left[\frac{i\mu_1(1 + A\mu_2) + i\mu_2(1 + A\mu_1)}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}} - 2A\mu_1\mu_2 e^{2i\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}a} \left(\frac{i}{\sqrt{2m\omega - \mathbf{p}_{\parallel}^2}} + a \right) \right]. \quad (6.32) \end{aligned}$$

Analogamente ao que fizemos na seção anterior, utiliza-se o sistema de coordenadas esféricas generalizadas, que fornece de maneira direta

$$\begin{aligned} E_{12} = \mathcal{A} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dp_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1} p_{\parallel}^{d-2}} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{(d-1)}{2}\right)} \frac{-im^2\omega}{2m\omega - p_{\parallel}^2} \times \frac{1}{(1 + A\mu_1)(1 + A\mu_2) - A^2\mu_1\mu_2 e^{2i\sqrt{2m\omega - p_{\parallel}^2}a}} \times \\ \times \left[\frac{i\mu_1(1 + A\mu_2) + i\mu_2(1 + A\mu_1)}{\sqrt{2m\omega - p_{\parallel}^2}} - 2A\mu_1\mu_2 e^{2i\sqrt{2m\omega - p_{\parallel}^2}a} \left(\frac{i}{\sqrt{2m\omega - p_{\parallel}^2}} + a \right) \right], \quad (6.33) \end{aligned}$$

válido para $d \neq 1$. Para o caso onde $d = 1$, a expressão acima se simplifica consideravelmente pois novamente não há p_{\parallel} , e $\mathcal{A} = 0$, assim

$$E_{12} = -i \frac{m}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{(1 + A\mu_1)(1 + A\mu_2) - A^2\mu_1\mu_2 e^{2i\sqrt{2m\omega}a}} \times \left[\frac{i}{\sqrt{2m\omega}} \times (\mu_1(1 + A\mu_2) + \mu_2(1 + A\mu_1)) - 2A\mu_1\mu_2 \left(\frac{i}{\sqrt{2m\omega}} + a \right) e^{2i\sqrt{2m\omega}a} \right] \quad (6.34)$$

para $d = 1$. Note que nessa expressão o fator A difere do anterior, sendo avaliado como

$$A = \frac{im}{\sqrt{2m\omega}}. \quad (6.35)$$

O cálculo da energia de Casimir se dá de maneira muito simples, com os resultados então obtidos. Essa energia é dada pela subtração da energia de interação E_{12} , derivada na expressão (6.33), das auto-energia de cada uma das placas obtidas na seção anterior, dada pela equação (6.21). Particularizando o sistema para 1 + 1 dimensões, a mesma análise deve ser feita, entretanto, deve-se subtrair do resultado (6.34) das as auto-energias obtidas em (6.22). Deste modo

$$E_{CAS} = \mathcal{A} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dp_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1} p_{\parallel}^{d-2}} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} i \left[\frac{i\mu_1 m^2 \omega}{2m\omega - p_{\parallel}^2} \frac{1}{\sqrt{2m\omega - p_{\parallel}^2} + i\mu_1 m} + \frac{i\mu_2 m^2 \omega}{2m\omega - p_{\parallel}^2} \times \frac{1}{\sqrt{2m\omega - p_{\parallel}^2} + i\mu_2 m} + \frac{1}{(1 + A\mu_1)(1 + A\mu_2) - A^2\mu_1\mu_2 e^{2i\sqrt{2m\omega - p_{\parallel}^2}a}} \times \left[\frac{i\mu_1(1 + A\mu_2) + i\mu_2(1 + A\mu_1)}{\sqrt{2m\omega - p_{\parallel}^2}} - 2A\mu_1\mu_2 e^{2i\sqrt{2m\omega - p_{\parallel}^2}a} \left(\frac{i}{\sqrt{2m\omega - p_{\parallel}^2}} + a \right) \right] \right], \quad (6.36)$$

Válido para $d \neq 1$. E também

$$E_{CAS_{1+1}} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \left[-\frac{m\mu_1}{2} \frac{1}{\sqrt{2m\omega} + i\mu_1 m} - \frac{m\mu_2}{2} \frac{1}{\sqrt{2m\omega} + i\mu_2 m} - \frac{i}{2} \frac{m}{(1 + A\mu_1)(1 + A\mu_2) - A^2\mu_1\mu_2 e^{2i\sqrt{2m\omega}a}} \times \left[\frac{i}{\sqrt{2m\omega}} \times (\mu_1(1 + A\mu_2) + \mu_2(1 + A\mu_1)) - 2A\mu_1\mu_2 \left(\frac{i}{\sqrt{2m\omega}} + a \right) e^{2i\sqrt{2m\omega}a} \right] \right], \quad (6.37)$$

para $d = 1$ e em unidades onde $\hbar = 1$.

Infelizmente, não conseguimos avançar mais com os cálculos, nem mesmo com análises numéricas. Sendo assim, vamos estudar alguns casos particulares, todos eles restritos a 1 + 1 dimensões.

6.2.1 Limite de placas Dirichlet

Já sabemos que no limite $\mu_i \rightarrow \pm\infty$, o campo deve satisfazer a condição de Dirichlet no potencial concentrado no plano $x^d = a_i$. Tomando então esse limite na equação (6.37), e descartando os termos

independentes de a , obtemos

$$E_{CAS_{\mu \rightarrow \infty}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\omega}{2\pi} a \sqrt{2m(\omega + i\epsilon)} \frac{e^{2i\sqrt{2m(\omega+i\epsilon)}a}}{1 - e^{2i\sqrt{2m(\omega+i\epsilon)}a}}. \quad (6.38)$$

onde recuperamos o parâmetro regularizador ϵ .

O integrando acima exibe pólos em $\omega = (\pi N)^2/(2m) - i\epsilon$, com $N = \pm 1, \pm 2, \dots$ ¹. Vamos resolver essa integral com o teorema dos resíduos. Escolhemos um contorno de integração composto pelo eixo real e um semi-círculo de raio infinito no semi-plano complexo superior. O integrando se anula ao longo desse semi-círculo e a integral pode ser encontrada com o resíduo dos pólos internos ao contorno. No entanto, os polos encontram-se no semi-plano complexo inferior, e a integral é zero nesse caso. Temos então o resultado

$$E_{CAS_{\mu \rightarrow \pm\infty}} = 0. \quad (6.39)$$

como já esperávamos para o caso de planos com condições de Dirichlet.

6.2.2 Uma placa Dirichlet

Outro caso de interesse, e mais delicado, é o qual apenas um dos coeficientes μ tende a mais ou menos infinito e o outro permanece finito. Utilizando-se de mesmo procedimento analítico, desconsiderando termos que não contribuem com a interação entre as placas (independentes de a), obtém-se de (6.37)

$$E_{CAS_{\mu_2 \rightarrow \infty}} = \frac{i}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{2m(\omega + i\epsilon)} \frac{1 + 2\mu m a e^{2i\sqrt{2m(\omega+i\epsilon)}a}}{\sqrt{2m(\omega + i\epsilon)} + im\mu(1 - e^{2i\sqrt{2m(\omega+i\epsilon)}a})}. \quad (6.40)$$

O integrando acima não apresenta pólos. Apesar de $\omega - i\epsilon$ ser um zero do denominador, nesse caso o numerador também é nulo.

Vamos considerar, separadamente, cada termo na integral (6.40). Para o primeiro deles, o tratamento é totalmente análogo ao que fizemos na resolução de (6.38), onde utilizamos um caminho de integração composto pelo semi-círculo de raio infinito no semi-plano complexo superior. Usando o fato de que o integrando anula-se ao longo do semi-círculo, e de que não há pólos, temos que

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{2m(\omega + i\epsilon)} \frac{e^{2i\sqrt{2m(\omega+i\epsilon)}a}}{\sqrt{2m(\omega + i\epsilon)} + im\mu(1 - e^{2i\sqrt{2m(\omega+i\epsilon)}a})} = 0 \quad (6.41)$$

¹O caso $N = 0$ é um zero do denominador, mas não um pólo do integrando, pois o denominador também se anula para $N = 0$.

O segundo termo é dado por

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{2m(\omega + i\epsilon)} \frac{1}{\sqrt{2m(\omega + i\epsilon)} + im\mu(1 - e^{2i\sqrt{2m(\omega+i\epsilon)}a})}. \quad (6.42)$$

Para resolver a integral acima, também utilizamos o teorema dos resíduos, mas desta vez, devemos escolher um caminho de integração composto pelo eixo real e uma semi-círculo de raio infinito no semi-plano complexo inferior. Ao longo desse semi-círculo, o integrando anula-se. Com isso temos novamente

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{2m(\omega + i\epsilon)} \frac{1}{\sqrt{2m(\omega + i\epsilon)} + im\mu(1 - e^{2i\sqrt{2m(\omega+i\epsilon)}a})}. \quad (6.43)$$

Portanto, a energia de Casimir nesse caso também é nula

$$E_{CAS_{\mu_2 \rightarrow \infty}} = 0. \quad (6.44)$$

6.2.3 Potenciais iguais

Nesse caso, tomamos $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ na equação (6.37)

$$E_{CAS_{\mu_1=\mu_2=\mu}} = \frac{i}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{2m(\omega + i\epsilon)} \frac{(\sqrt{2m(\omega + i\epsilon)} + i\mu m + i\mu m^2 a) e^{2i\sqrt{2m(\omega+i\epsilon)}a}}{(\sqrt{2m(\omega + i\epsilon)} + i\mu m)^2 + \mu^2 m^2 e^{2i\sqrt{2m(\omega+i\epsilon)}a}} \quad (6.45)$$

Novamente, o integrando na equação acima não possui pólos, fazendo com que a integral seja nula.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

Nesse trabalho fizemos um estudo sobre o campo de Schrödinger na presença de potenciais espacialmente localizados. Tomamos um espaço $d + 1$ dimensional e potenciais tipo delta de Dirac concentrados ao longo de hiperplanos paralelos entre si. Fizemos um estudo da função de Green do modelo nos casos com um e com dois potenciais presentes. Por meio das funções de Green obtidas, encontramos os auto-valores de energia correspondentes nos casos de $1 + 1$ dimensões, no contexto da primeira quantização (função de onda).

Mostramos que, no limite no qual as constantes de acoplamento entre os potenciais e o campo divergem, as funções de Green correspondentes satisfazem a condição de Dirichlet nos planos onde os potenciais se concentram. Sendo assim, os próprios campos devem satisfazer as mesmas condições em tais planos. Dessa forma, interpretamos o modelo como um certo tipo de condição de Dirichlet generalizada para o campo não relativístico.

Nossos resultados indicam que o modelo deve ser consistente somente nos casos onde as constantes de acoplamento entre os potenciais e o campo assumem valores negativos finitos ou divergem negativa ou positivamente. Característica oposta ao campo escalar, onde, em um modelo análogo, as constantes de acoplamento devem ser positivas. No caso do campo não-relativístico, os auto-valores de energia apresentam parte imaginária positiva quando as constantes assumem valores positivos finitos.

Consideramos um modelo bastante interessante com a função de Green na presença de um único potencial delta. Tomamos o campo de Schrödinger na presença de tal potencial e também na presença de uma fonte pontual do tipo delta de Dirac, concentrada em um ponto do espaço. Nos restringimos, nesse problema, ao caso de $3 + 1$ dimensões. Apesar da teoria clássica indicar inconsistência para constantes de acoplamento finitas e positivas, nesse problema, nós consideramos também essa possibilidade. Obtivemos a interação entre o potencial e a fonte de campo, intermediada

pelo campo não-relativístico. Mostramos que, quando a constante de acoplamento entre o potencial e o campo diverge, a interação se reduz a energia Coulombiana entre a fonte e sua imagem refletida no plano. Quando a constante de acoplamento é negativa e finita, obtemos uma energia de interação com decaimento exponencial mais lento do que a interação de Yukawa. O caso onde a constante de acoplamento é positiva e finita requer mais investigação, mas nossos resultados mostram que a interação tem exatamente a mesma estrutura do que a obtida com o campo escalar, estudado em um modelo análogo.

Por fim, iniciamos um estudo sobre a energia de Casimir para o campo não-relativístico. Usamos a função de Green na presença de dois potenciais calculada previamente para encontrar a energia de vácuo do campo na presença de dois potenciais. Sabemos que a energia de Casimir do campo não-relativístico, quando submetido a condições de contorno, é nula. No entanto, no modelo proposto, não impomos condições desse tipo. Apenas acoplamos o campo com potenciais externos.

Devido a complexidade dos cálculos, tivemos que nos restringir ao caso $1 + 1$ dimensional. Mesmo assim, não conseguimos avançar com os cálculos de forma geral. Dessa forma, tomamos apenas algumas situações específicas.

Como já era de se esperar, mostramos que no limite onde as constantes de acoplamento entre os dois potenciais e o campo diverge, a energia se anula. Isso era esperado pois nesse limite, o campo passa a satisfazer a condição de contorno de Dirichlet nos planos.

Consideramos o caso onde uma das constantes de acoplamento diverge e a outra permanece finita, ou seja, temos um ponto onde o campo satisfaz a condição de Dirichlet e outro onde o potencial se concentra. A energia de Casimir obtida também foi nula para essa configuração.

A última situação estudada foi o caso onde as constantes de acoplamento são finitas e iguais uma a outra. Novamente obtivemos uma energia nula.

Os resultados sugerem que a energia de Casimir deve se anular, de um modo geral, para outras configurações. No entanto, esse assunto requer mais investigação.

Com esses resultados, surgem uma série de indagações. Como mostrado no início desse trabalho, a energia de Casimir não pode ser obtida por meio de correções relativísticas da relação de dispersão não-relativística, quando o campo é submetido a condições de contorno. Será que o mesmo é válido quando o campo está em interação com potenciais delta? Outra pergunta que surge naturalmente é se outros tipos de potenciais, como o que generaliza a condição de Neumann, não poderiam fornecer uma energia de Casimir não nula para o campo não relativístico. Podemos pensar também no que aconteceria se fizéssemos um estudo parecido para o campo não-relativístico de natureza fermiônica,

já que nesse trabalho tratamos apenas do campo de natureza bosônica.

Pretendemos redigir um artigo de cunho científico expondo os resultados obtidos sobre a interação entre o potencial delta e uma carga pontual, para o campo não-relativístico. Esperamos também verificar como seria tal interação, mas com um potencial que simula a condição de Neumann.

Bibliografia

- [1] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory*, 1ed Singapore: World Scientific (2008)
- [2] H. B. G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
- [3] M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, Phys. Rep. **353**, 1 (2001)
- [4] R.M. Cavalcanti, [arXiv:hep-th/0201150].
- [5] G.T. Camilo, F.A. Barone and F.E. Barone, Phys. Rev. D . **87**, 025011 (2013).
- [6] F.A. Barone and F.E. Barone, Phys. Rev. D, **89**, 065020 (2014).
- [7] F.A. Barone and F.E. Barone, Eur. Phys. J. C **74**, 3113 (2014)
- [8] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina, J. F. M. Mendes, A. C. Tort Brazilian Journal of Physics **31**, 1 (2001).
- [9] M. J. Sparnaay, Physica **XXXIV**, 751 (1958).
- [10] S. K.Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. **78**, 5 (1997).
- [11] U. Mohideen, A. Roy, Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1998).
- [12] A. Roy, U. Mohideen, Phys. Rev. Lett. **82**, 4380 (1999).
- [13] M. Bordag *The Casimir Effect 50 Years Later* (Singapore: World Scientific, 1998).
- [14] I. S. Gradshtejn, I. M. Ryzhik; *Tables of Integrals, Series and Products* (New York: Academic Press, 1965).
- [15] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Lalöe; *Quantum Mechanics* vol. 1,2 1ed (Weinheim: Wiley, 1991).

- [16] J.J. Sakurai, J. Napolitano; *Modern Quantum Mechanics* 2ed (São Francisco: Addison-Wesley, 1994).
- [17] L.E. Ballentine *Quantum Mechanics: A Modern Development* 1ed (Singapore: World Scientific, 1998).
- [18] K.A. Milton, *The Casimir effect, physical interpretation of zero-point energy* (Singapore: World Scientific, 2001).
- [19] M. Kaku, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*, Oxford University Press, New York, (1993).
- [20] A. Nogueira *Integrais de caminho na mecânica quântica* (trabalho de conclusão de curso, 2009).
- [21] D.J. Griffiths; *Introduction to quantum mechanics* 1ed (New Jersey: Prentice Hall, 1995)
- [22] J.H. Lambert, *Observationes variae in mathesin puram*, Acta Helveticae physico-mathematico-anatomico-botanico-medica, Band III, 128-168, 1758.
- [23] W. Greiner, J. Reinhardt; *Field Quantization* (Berlim: Springer, 1996).