

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Influência das flutuações quânticas do vácuo de um campo escalar em uma partícula teste próxima a uma fronteira em  $(1 + 1)$  e  $(2 + 1)$  dimensões.

**Fernanda de Faria Rodrigues**

Itajubá, 23 de fevereiro de 2018

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**Fernanda de Faria Rodrigues**

Influência das flutuações quânticas do vácuo de um campo escalar em uma partícula teste próxima a uma fronteira em  $(1 + 1)$  e  $(2 + 1)$  dimensões.

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física.

**Teoria de Campos, Cosmologia e Gravitação.**

**Orientador: Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci**

**23 de fevereiro de 2018**

**Itajubá**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Influência das flutuações quânticas do vácuo de um campo escalar em uma partícula teste próxima a uma fronteira em  $(1 + 1)$  e  $(2 + 1)$  dimensões.

**Fernanda de Faria Rodrigues**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 23 de fevereiro de 2018, conferindo ao autor o título de **Mestre em Ciências em Física**.

***Banca Examinadora:***

Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci  
Prof. Dr. Edisom de Souza Moreira Júnior  
Prof. Dr. Marcelo Batista Hott

**Itajubá  
2018**

---

Fernanda de Faria Rodrigues

Influência das flutuações quânticas do vácuo de um campo escalar em uma partícula teste próxima a uma fronteira em  $(1 + 1)$  e  $(2 + 1)$  dimensões/ Fernanda de Faria Rodrigues. – Itajubá, 23 de fevereiro de 2018-

54 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci

Dissertação (Mestrado)

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Programa de pós-graduação em Física , 23 de fevereiro de 2018.

1. Flutuações quânticas do vácuo. 2. Campo escalar. I. Vitorio Alberto De Lorenci. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Instituto de Física e Química. IV. Mestre em Ciências em Física

CDU 07:181:009.3

---

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo seu amor, sua graça e misericórdia, que se renovam em minha vida a cada manhã.

Aos meus pais, Umbelina e João, pela educação que me deram e por me ajudarem a realizar cada um dos meus sonhos, bem como aos meus irmãos, Jeferson e Anderson, pelo carinho e preocupação mesmo quando estamos longe. Quero agradecer também ao meu namorado, Mario Mazzoni, uma das pessoas mais maravilhosas que já conheci, pela compreensão e companherismo em todos os momentos.

Desejo agradecer profundamente ao meu orientador, Vitorio De Lorenci, excelente professor, pesquisador, orientador e amigo, definitivamente o exemplo de pessoa que quero ser. A todos os professores que eu tive, pelo comprometimento, dedicação e inspiração, pois eu não teria chegado até aqui sem seus ensinamentos.

Quero agradecer também a todos os meus amigos, em especial ao Guilherme, ao João e a Janaina, por acreditarem em mim e estarem sempre ao meu lado.

Como não poderia faltar, agradeço à CAPES e à UNIFEI pelo apoio financeiro.

*"Porque a sabedoria serve de defesa, como de defesa serve o dinheiro; mas a excelência do conhecimento é que a sabedoria dá vida ao seu possuidor."  
(Eclesiastes 7:12)*

# Resumo

No presente trabalho investigamos a influência das flutuações quânticas do vácuo de um campo escalar sobre o movimento de uma partícula teste próxima a uma fronteira plana perfeitamente refletora, em um regime não relativístico, em  $(1 + 1)$  e  $(2 + 1)$  dimensões. Neste cenário, efetuamos a quantização do campo escalar na presença da fronteira e estudamos a dispersão quadrática média da velocidade da partícula teste em interação com o campo escalar modificado devido a presença da fronteira. A ação de colocar (ou remover) a fronteira produz uma modificação nas flutuações quânticas do vácuo do campo escalar e, conseqüentemente, induz uma dispersão na velocidade da partícula teste. Tal dispersão é calculada por dois métodos distintos. Primeiro estudamos um caso idealizado, *sudden switching*, em que a fronteira é instantaneamente colocada perto da partícula e após um tempo de medida  $\tau$  ela é instantaneamente removida. Em seguida implementamos um caso mais realista, *smooth switching*, na qual o ato de colocar/remover a placa não é mais instantâneo, mas controlado por certas funções de transição.

**Palavras-chaves:** Campo escalar, flutuações do vácuo.

# Abstract

In the present work we investigate the influence of quantum vacuum fluctuations of a scalar field on the motion of a test particle near a perfectly reflecting flat boundary, in a non-relativistic regime, in  $(1 + 1)$  and  $(2 + 1)$  dimensions. In this scenario, we quantize the scalar field in the presence of a boundary and studied the mean squared velocity dispersion of the test particle in interaction with the modified scalar field due to the presence of the boundary. The action of placing (or removing) the boundary produces a modification in quantum vacuum fluctuations of the scalar field and, consequently, induces a dispersion in the velocity of the test particle. Such dispersion is calculated by two distinct methods. First we study an idealized case, *sudden switching*, in which the boundary is instantaneously placed near the particle and after a measuring time  $\tau$  it is instantaneously removed. Then we implement a more realistic case, *smooth switching*, in which the act of putting or removing the wall is no longer instantaneous, but controlled by certain switching functions.

**Key-words:** Scalar field, vacuum fluctuations.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Dispersão da velocidade da partícula, em função de $\tau$ , utilizando o método <i>sudden switching</i> . . . . .	27
Figura 2 – Dispersão da velocidade da partícula, em função de $\tau$ , utilizando o método <i>sudden switching</i> , no regime em que $\tau$ tende a infinito. . . . .	27
Figura 3 – Comportamento da função <i>switching</i> $F_\tau^{(n)}(t)$ em função de $t$ , para diferentes valores de $n$ . . . . .	28
Figura 4 – Dispersão da velocidade da partícula, em função de $\tau$ , para alguns valores de $n$ , utilizando a função $F_\tau^{(n)}(t)$ . . . . .	30
Figura 5 – Dispersão da velocidade da partícula, em função de $\tau$ , para alguns valores de $n$ , utilizando a função $F_\tau^{(n)}(t)$ , no regime em que $\tau$ tende a infinito. . . . .	30
Figura 6 – Comportamento da função <i>switching</i> $F_{\tau_s, \tau}(t)$ em função de $t$ , para alguns valores de $\tau_s$ . . . . .	31
Figura 7 – Dispersão da velocidade da partícula, em função de $\tau$ , para alguns valores de $\tau_s$ , utilizando a função $F_{\tau_s, \tau}(t)$ . . . . .	34
Figura 8 – Dispersão da velocidade da partícula, em função de $\tau$ , para alguns valores de $\tau_s$ , utilizando a função $F_{\tau_s, \tau}(t)$ , no regime em que $\tau$ tende a infinito. . . . .	34
Figura 9 – Dispersão da componente paralela da velocidade da partícula em relação à placa, em função de $\tau$ , aplicando o método <i>sudden switching</i> . . .	40
Figura 10 – Dispersão da componente perpendicular da velocidade da partícula em relação à placa, em função de $\tau$ , aplicando o método <i>sudden switching</i> . . .	40
Figura 11 – Distribuição das $2n$ raízes do polinômio $\Psi_{n,q}$ . Figura retirada de [1]. . .	42
Figura 12 – Dispersão da componente perpendicular da velocidade da partícula em relação à placa, em função de $\tau$ , para alguns valores de $n$ , utilizando a função $F_\tau^{(n)}(t)$ . . . . .	45
Figura 13 – Dispersão da componente paralela da velocidade da partícula em relação à placa, em função de $\tau$ , para alguns valores de $n$ , utilizando a função $F_\tau^{(n)}(t)$ . . . . .	45
Figura 14 – Dispersão da componente perpendicular da velocidade da partícula em relação à placa, em função de $\tau$ , para alguns valores de $n$ , utilizando a função $F_\tau^{(n)}(t)$ , no regime em que $\tau$ tende a infinito. . . . .	46
Figura 15 – Dispersão da componente paralela da velocidade da partícula em relação à placa, em função de $\tau$ , para alguns valores de $n$ , utilizando a função $F_\tau^{(n)}(t)$ , no regime em que $\tau$ tende a infinito. . . . .	46

Figura 16 – Dispersão da componente perpendicular da velocidade da partícula em relação à placa, em função de $\tau$ , para alguns valores de $\tau_s$ , utilizando a função $F_{\tau_s, \tau}(t)$ . . . . .	49
Figura 17 – Dispersão da componente paralela da velocidade da partícula em relação à placa, em função de $\tau$ , para alguns valores de $\tau_s$ , utilizando a função $F_{\tau_s, \tau}(t)$ . . . . .	49
Figura 18 – Dispersão da componente perpendicular da velocidade da partícula em relação à placa, em função de $\tau$ , para alguns valores de $\tau_s$ , utilizando a função $F_{\tau_s, \tau}(t)$ , no regime em que $\tau$ tende a infinito. . . . .	50
Figura 19 – Dispersão da componente paralela da velocidade da partícula em relação à placa, em função de $\tau$ , para alguns valores de $\tau_s$ , utilizando a função $F_{\tau_s, \tau}(t)$ , no regime em que $\tau$ tende a infinito. . . . .	50

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	13
2	INFLUÊNCIA DAS FLUTUAÇÕES QUÂNTICAS DE UM CAMPO ESCALAR EM UMA PARTÍCULA TESTE PRÓXIMA A UMA FRONTEIRA REFLETORA EM $(1 + 1)$ DIMENSÕES . . . . .	18
2.1	Quantização do campo escalar na presença de uma fronteira perfeitamente refletora . . . . .	18
2.2	Propagador de Hadamard . . . . .	21
2.3	<i>Sudden Switching</i> . . . . .	23
2.4	<i>Smooth Switching</i> . . . . .	27
2.4.1	<i>Switching</i> $F_{\tau}^{(n)}(t)$ . . . . .	28
2.4.2	<i>Switching</i> $F_{\tau_s, \tau}(t)$ . . . . .	30
3	INFLUÊNCIA DAS FLUTUAÇÕES QUÂNTICAS DE UM CAMPO ESCALAR EM UMA PARTÍCULA TESTE PRÓXIMA A UMA FRONTEIRA REFLETORA EM $(2 + 1)$ DIMENSÕES . . . . .	35
3.1	Quantização do campo escalar na presença de uma fronteira perfeitamente refletora . . . . .	35
3.2	Propagador de Hadamard . . . . .	36
3.3	<i>Sudden Switching</i> . . . . .	38
3.4	<i>Smooth Switching</i> . . . . .	41
3.4.1	<i>Switching</i> $F_{\tau}^{(n)}(t)$ . . . . .	41
3.4.2	<i>Switching</i> $F_{\tau_s, \tau}(t)$ . . . . .	44
4	CONCLUSÃO . . . . .	51
	REFERÊNCIAS . . . . .	54

# 1 Introdução

As flutuações quânticas do vácuo previstas pela Teoria Quântica de Campos são responsáveis por vários efeitos em diferentes áreas da física. Estas flutuações podem provocar até mesmo efeitos observáveis, como, por exemplo, o efeito Casimir, comprovado experimentalmente [2], e o deslocamento Lamb [3]. Estudos recentes têm revelado que as flutuações quânticas de vácuo de campos em diversas situações podem induzir movimento browniano em partículas teste, como é possível ver em [4, 5, 6, 7].

Uma forma simples de produzir mudanças nas flutuações do vácuo de um campo é através da introdução de uma ou mais fronteiras refletoras, que são vinculadas às condições de contorno. No caso de uma partícula acoplada a um campo quantizado preparado no estado de vácuo, a presença da fronteira altera as flutuações quânticas do vácuo do campo e, conseqüentemente, produz uma mudança sobre o movimento da partícula.

Usando um modelo idealizado, H. Yu e L. H. Ford [4] estudaram o movimento browniano de uma partícula teste carregada em interação com as flutuações quânticas do vácuo de um campo elétrico modificado pela presença de uma placa perfeitamente refletora. Trabalhando em um regime não relativístico, o comportamento da partícula teste foi analisado por meio do cálculo da dispersão quadrática média da velocidade e da posição dessa. Por motivos de simplificação, efeitos de dissipação foram desprezados e a posição média da partícula foi considerada aproximadamente constante.

Nesse regime, Yu e Ford verificaram que a partícula apresentava dispersões na velocidade e na posição em relação à situação na qual a partícula interagia somente com o vácuo de Minkowski. Verificaram também que o movimento browniano apresentado pela partícula é anisotrópico. No caso das componentes paralela da velocidade e da posição em relação à fronteira, dispersões negativas foram encontradas e justificadas a partir das incertezas na posição e velocidade da partícula, pois, quanticamente falando, a partícula é descrita por um pacote de ondas, sendo assim, existe uma incerteza na posição e no momento dessa. Os resultados salientaram também uma singularidade quando o tempo de interação da partícula com o campo modificado pela presença da placa era equivalente ao tempo que um fóton leva para ir da partícula até a placa e voltar. Essa singularidade foi identificada como, provavelmente, um problema de se ter assumido uma fronteira com posição bem definida. Por fim, a análise desse sistema no limite em que o tempo de interação tende ao infinito mostrou que as componentes paralelas da dispersão quadrática média da velocidade vão a zero neste limite, mas que a componente perpendicular tende a uma constante não nula. Este resultado foi sugerido como uma consequência da conservação da energia, pois, uma quantidade de energia finita foi inserida no sistema ao introduzir a

palca, e devido ao mecanismo *sudden switching* utilizado, que caracteriza ligar/desligar a interação da partícula com o campo modificado de forma instantânea.

Seguindo esta mesma linha de estudos sobre o movimento browniano de partículas teste sob efeito de flutuações quânticas do vácuo, M. Seriu e C. H. Wu [7] investigaram a dispersão na velocidade de uma partícula teste próxima a uma fronteira, sob interação com um campo elétrico preparado no estado de vácuo, tendo em conta um processo de transição suave, *smooth switching*, na medição. Dessa forma, os autores analisaram o sistema estudado em [4] sob uma perspectiva mais realista, ou seja, ao invés de assumir um processo de medição abrupto, *sudden switching*, no qual a interação placa-partícula é ligada de forma instantânea em  $t = 0$  e depois de um tempo de medida  $\tau$  a interação é instantaneamente desligada, os autores construíram uma função *smooth switching* ligando uma função platô, que está relacionada com o tempo de medida  $\tau$ , a uma função que decai do tipo lorentziana, que caracteriza o quão rápido o sistema é ligado/desligado.

Como resultado, Seriu e Wu mostraram que no limite em que  $\tau \rightarrow \infty$  a dispersão quadrática média da velocidade usando a função *smooth switching* possui um comportamento bem diferente de quando o sistema *sudden switching* é considerado. Em particular, em [4] vê-se que a dispersão da componente da velocidade da partícula perpendicular à placa possui um valor finito no limite de  $\tau \rightarrow \infty$ . Contudo, nesse mesmo limite, com a função *smooth switching* utilizada em [7], a dispersão dessa mesma quantidade vai a zero. Sendo assim, os autores reconhecem que as medidas de flutuações quânticas do vácuo são altamente influenciadas pelo mecanismo que qualifica a forma como o sistema é ligado/desligado.

V. A. De Lorenci, C. C. H. Ribeiro e M. M. Silva [1] abordaram a questão anterior, isto é, a influência das flutuações quânticas do vácuo de um campo elétrico em uma partícula teste na presença de uma placa condutora, a partir de um modelo mais realista para a introdução da fronteira. Assim como no trabalho precedente, o sistema físico consistia em uma partícula não relativística, carregada, com massa, de posição aproximadamente constante, e mantida próxima a uma fronteira perfeitamente refletora imersa em um campo elétrico preparado no estado de vácuo. A velocidade da partícula sujeita à força de Lorentz foi calculada pela integração da equação de movimento.

Os autores introduziram um mecanismo *smooth switching-on/off*, descrito, basicamente, por um função de transição capaz de conectar dois regimes diferentes do sistema, a partícula no espaço de Minkowski e a partícula sob interação com o campo elétrico modificado. Novamente, a dispersão quadrática média da velocidade da partícula foi calculada para a caracterização de seu movimento sob influência das flutuações quânticas do vácuo do campo elétrico. Os resultados confirmaram os aspectos randômico e anisotrópico reportados anteriormente. Contudo, a singularidade para o tempo de interação igual ao tempo gasto por um fóton no percurso de ida e volta entre a partícula e a placa,

encontrada naquele trabalho [4], foi regularizada (suprimida). O cálculo exato da componente paralela da velocidade também apresentou um valor negativo em uma determinada região, o que foi justificado como consequência da renormalização em relação ao vácuo de Minskowski. No limite de tempo tendendo a infinito, o modelo levou a valores nulos para as componentes perpendicular e paralela da velocidade e, portanto, não houve efeito remanescente como reportado em [4].

Recentemente, C. H. G. Bessa, V. B. Bezzera, E. R. Bezerra de Mello e H. F. Mota [8] publicaram um estudo sobre o movimento quântico browniano de uma partícula teste em um modelo análogo a geometria de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Nesse contexto, os autores discutiram os efeitos das flutuações quânticas do vácuo de um campo escalar sem massa em uma partícula teste num sistema em  $(3 + 1)$  dimensões. O comportamento da partícula teste em interação com o campo escalar foi examinado por meio do cálculo da dispersão quadrática média da velocidade em duas situações diferentes: o movimento browniano de partículas livres; e o movimento browniano de partículas sujeitas a uma força externa não flutuante. A introdução da força externa na equação de movimento da partícula no segundo sistema tem como intuito cancelar efeitos locais de expansão. Em ambas situações o problema foi analisado na presença de uma ou duas placas perfeitamente refletoras e na ausência de fronteiras.

Como conclusão desse estudo, os autores afirmaram que para o sistema de partículas livres e na ausência de fronteiras não há dispersão na velocidade. Contudo, na presença de uma ou duas placas os resultados mostraram que as dispersões das componentes paralela e perpendicular da velocidade da partícula é diferente de zero, anisotrópica e possui alguns pontos de singularidade. Para o sistema de partículas sujeito a força externa e na ausência de fronteiras, a dispersão nas componentes paralela e perpendicular da velocidade da partícula é diferente de zero e isotrópica. Todavia, na presença das fronteiras, essas quantidades tornam-se não nulas e anisotrópicas, e as singularidades detectadas no primeiro sistema são regularizadas, de tal forma que esse segundo modelo desempenha um papel similar àqueles na qual a função *smoth-switching* é introduzida ao sistema [1, 6]. É importante ressaltar que, diferentemente do que foi reportado nesse trabalho [8], observa-se que o tratamento utilizado no segundo sistema, partículas em movimento browniano sujeitas a uma força externa não flutuante, não regulariza as singularidades na posição da fronteira e para um tempo de medida igual ao tempo gasto por um fóton para ir e voltar da partícula à placa, apontadas em [1, 4, 5, 6] e neste trabalho. Essas singularidades não são regularizadas conforme os autores afirmaram, pois o formalismo utilizado por eles [8] é válido somente no regime em que o tempo de interação placa-partícula tende a infinito, regime no qual essas singularidades não existem.

Seguindo o mesmo raciocínio dos problemas relativos ao campo eletromagnético reportados anteriormente, neste trabalho investigamos a influência das flutuações quânticas

ticas do vácuo de um campo escalar sobre o movimento de uma partícula teste próxima a uma fronteira perfeitamente refletora, no regime não relativístico, em  $(1 + 1)$  e  $(2 + 1)$  dimensões. Nesse cenário, efetuamos a quantização do campo escalar na presença de uma fronteira e em seguida calculamos a expressão para o propagador de Hadamard. A ação de colocar (ou remover) a fronteira produz uma modificação nas flutuações do vácuo do campo escalar e, conseqüentemente, gera uma dispersão na velocidade da partícula teste. A dispersão quadrática média da velocidade é calculada por dois métodos distintos e seu comportamento é analisado. Primeiro estudamos um caso idealizado, que chamaremos de *sudden switching*, em que a fronteira é instantaneamente colocada perto da partícula e após um tempo de medida que denominaremos por  $\tau$  esta é instantaneamente removida. Em seguida implementamos um caso mais realista, denominado *smooth switching*, no qual o ato de colocar ou remover a placa não é mais instantâneo, mas controlado por certas funções de transição.

Assim como foi reportado nos estudos anteriores, a utilização do método *sudden switching* levou ao aparecimento de singularidades em  $x = 0$ , que corresponde à posição da fronteira, e em  $\tau = 2x$ , exceto para a componente paralela da velocidade em  $(2 + 1)$  dimensões, para a qual observou-se apenas a primeira divergência reportada acima. Tal como antes, essas singularidades foram regularizadas ao se introduzir a função *smooth switching*.

O primeiro método empregado neste trabalho, *sudden switching*, para o sistema em  $(1 + 1)$  dimensões foi investigado de forma similar há alguns anos por V. A. De Lorenci, E. S. Moreira Jr., e M. M. Silva [6], que o empregaram no estudo do movimento browniano de uma partícula teste carregada em interação com as flutuações quânticas do vácuo de um campo escalar na presença de uma fronteira em  $(1 + 1)$  dimensões. As dispersões quadráticas médias da velocidade e da posição da partícula teste foram examinadas e efeitos semelhantes ao caso elétrico foram encontrados, como, por exemplo, a existência de singularidade e de regiões sob efeito de subvácuo. O cálculo da dispersão na posição mostrou que no limite em que o tempo de medida  $\tau$  tende a infinito a dispersão na posição também vai a infinito. Isso sugere que o formalismo adotado em [5, 6] e no presente trabalho, ao considerar a posição da partícula não variando apreciavelmente com o tempo, em um modelo em  $(1 + 1)$  dimensões com *sudden switching*, possui um limite de validade. Esse limite de validade,  $|(\Delta x)^2/x^2| \ll 1$ , em linhas gerais, sugere que quanto menor for a razão carga massa ( $g/m$ ) da partícula maior o limite de validade do método. Por exemplo, para  $g/m = 0.1$ , o sistema possui um limite de aplicabilidade dado por  $\tau \approx 10x$ . O problema também foi examinado sob uma perspectiva mais realista, no qual a posição da partícula não era mais fixa em um ponto  $x$ , mas flutuava em torno de  $x$ . Sob efeito dessa última consideração, os resultados mostraram que a singularidade reportada no caso idealizado *sudden switching* foi regularizada.

Sendo assim, estruturamos o trabalho da seguinte forma: o capítulo 2 apresenta todos os cálculos para o caso  $(1 + 1)$  dimensões, de tal forma que na seção 2.1 realizamos a quantização do campo escalar na presença da fronteira. Em seguida, na seção 2.2, determinamos o propagador de Hadamard renormalizado. Nas seções 2.3 e 2.4 efetuamos os cálculos das dispersões da velocidade da partícula com o modelo *sudden switching* e *smooth switching*, respectivamente. O capítulo 3 segue o mesmo procedimento adotado no capítulo anterior, só que usando um modelo em  $(2 + 1)$  dimensões. O último capítulo apresenta as conclusões gerais e as perspectivas do trabalho.

Por fim, adotamos ao longo de todo o trabalho o sistema natural de unidades em que  $c = \hbar = 1$  e assinatura métrica  $(+ - - -)$ .

## 2 Influência das flutuações quânticas de um campo escalar em uma partícula teste próxima a uma fronteira refletora em $(1 + 1)$ dimensões

Neste capítulo, inicialmente, realizamos a quantização de um campo escalar real e com massa em  $(1 + 1)$  dimensões, na presença de uma fronteira. Adotamos a condição de contorno de Dirichlet, de tal forma que o campo escalar é nulo na posição da fronteira. Em seguida, determinamos a expressão para o propagador de Hadamard renormalizado, na qual a contribuição devido ao vácuo de Minkowski foi suprimida. Por fim, estudamos a dispersão quadrática média da velocidade de uma partícula teste sob interação com esse campo escalar modificado em dois mecanismos diferentes.

### 2.1 Quantização do campo escalar na presença de uma fronteira perfeitamente refletora

Considere um campo escalar  $\phi(t, x) = \phi(x^0, x^1)$  de massa  $M$ , no espaço de Minkowski. A ação para esse campo é dada pela seguinte equação [9]:

$$S = \int \int \frac{1}{2} \left[ \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi(t, x) \partial_\beta \phi(t, x) - M^2 \phi^2(t, x) \right] dt dx, \quad (2.1)$$

em que  $\eta^{\alpha\beta}$  é o tensor métrico de Minkowski com  $\alpha$  e  $\beta$  variando de 0 a 1.

Utilizando o princípio da ação mínima,  $\delta S = 0$ , pode-se encontrar a equação de Klein-Gordon que descreve a dinâmica do campo escalar [9],

$$\left( \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta + M^2 \right) \phi(t, x) = 0. \quad (2.2)$$

Em  $(1+1)$  dimensões a equação anterior fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} + M^2 \phi(t, x) = 0. \quad (2.3)$$

Vamos supor uma solução para a equação precedente do tipo,

$$\phi(t, x) = T(t)X(x). \quad (2.4)$$

Substituindo a expressão acima na equação (2.3) tem-se:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} X(x) - \frac{d^2 X(x)}{dx^2} T(t) + M^2 T(t) X(x) = 0 \Rightarrow \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + M^2. \quad (2.6)$$

Para que a igualdade anterior seja válida essa equação deve ser igual a uma constante que denominaremos por  $-k^2$ , com  $k$  variando entre  $-\infty < k < \infty$ . Logo,

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + M^2 = -k^2. \quad (2.7)$$

Então,

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k^2 X(x) = 0, \quad (2.8)$$

e

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + (M^2 + k^2)T(t) = 0. \quad (2.9)$$

Definindo  $\omega = \sqrt{M^2 + k^2}$ , temos que as equações características das expressões (2.8) e (2.9) são, respectivamente,  $r^2 + k^2 = 0$  e  $h^2 + \omega^2 = 0$ , com raízes  $r = \pm ik$  e  $h = \pm i\omega$ , respectivamente.

As equações diferenciais (2.8) e (2.9) descrevem oscilações harmônicas simples. Sendo assim, admitem soluções do tipo:

$$X(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx), \quad (2.10)$$

e

$$T(t) = e^{-i\omega t}. \quad (2.11)$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes.

Suponha que uma fronteira perfeitamente refletora seja colocada em  $x = 0$  e que a condição de contorno de Dirichlet,  $\phi(t, 0) = 0$ , seja satisfeita. Aplicando essa condição de contorno à equação (2.10) tem-se que  $c_1 = 0$  e, portanto,

$$X(x) = c_2 \sin(kx). \quad (2.12)$$

Substituindo as equações (2.11) e (2.12) na equação (2.4) tem-se que

$$\varphi_k(t, x) = c_2 \sin(kx)e^{-i\omega t}, \quad (2.13)$$

corresponde a uma solução da equação (2.4).

A família de funções  $\sin(kx)$  com  $k$  variando de um até infinito, constitui uma base ortogonal completa para a expansão das soluções (2.13) no intervalo de  $x$  variando de zero até infinito. Além disso, os modos normais dados pela equação anterior podem

ser normalizados via produto escalar de Klein-Gordon da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 (\varphi_k(t, x), \varphi_{k'}(t, x)) &= -i \int_0^\infty [\varphi_k(t, x) (\partial_t \varphi_{k'}^*(t, x)) - (\partial_t \varphi_k(t, x)) \varphi_{k'}^*(t, x)] dx = \delta(k - k') \\
 &= -i \int_0^\infty \left[ c_2 \operatorname{sen}(kx) e^{-i\omega t} (i\omega' c_2 \operatorname{sen}(k'x) e^{i\omega' t}) \right. \\
 &\quad \left. - (-i\omega c_2 \operatorname{sen}(kx) e^{-i\omega t}) c_2 \operatorname{sen}(k'x) e^{i\omega' t} \right] dx = \delta(k - k') \\
 &= c_2^2 (\omega + \omega') e^{-it(\omega - \omega')} \int_0^\infty \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(k'x) dx = \delta(k - k')
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

De acordo com [10], nota-se que:

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(k'x) dx = \int_0^\infty \cos(kx) \cos(k'x) dx = \frac{\pi}{2} \delta(k - k'), \tag{2.15}$$

em que  $\delta(k - k')$  é a função delta de Dirac.

Substituindo o resultado anterior na equação (2.14) tem-se:

$$(\phi_k(t, x), \phi_{k'}(t, x)) = c_2^2 (\omega + \omega') e^{-it(\omega - \omega')} \frac{\pi}{2} \delta(k - k') = \delta(k - k'), \tag{2.16}$$

onde conclui-se que  $c_2 = (\omega\pi)^{-1}$ .

Portanto, substituindo o valor de  $c_2$  na equação (2.13) temos que a expressão para os modos normais  $\varphi_k(t, x)$  se reduz a:

$$\varphi_k(t, x) = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{\omega\pi}} \operatorname{sen}(kx). \tag{2.17}$$

Uma forma de quantizar o campo  $\phi(t, x)$  é considerando esse como um operador, e impondo as seguintes relações de comutação [9]:

$$[\phi(t, x), \phi(t, x')] = 0, \tag{2.18}$$

$$[\pi(t, x), \pi(t, x')] = 0, \tag{2.19}$$

$$[\phi(t, x), \pi(t, x')] = i\delta(x - x'). \tag{2.20}$$

em que a variável  $\pi(t, x)$  associada ao campo escalar é definida por

$$\pi(t, x) = \partial_t \phi(t, x). \tag{2.21}$$

Os modos normais  $\varphi_k(t, x)$  e seus respectivos complexo-conjugado formam uma base ortogonal completa. Sendo assim, a expansão em modos normais de vibração do campo  $\phi(t, x)$  pode ser escrita como:

$$\phi(t, x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(kx)}{\sqrt{\pi\omega}} [\hat{a}(k) e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger(k) e^{i\omega t}] dk, \tag{2.22}$$

em que  $\hat{a}(k)$  é conhecido como operador de destruição e seu auto-adjunto  $\hat{a}^\dagger(k)$  como operador de criação.

Note que as relações de comutação (2.18), (2.19) e (2.20) são equivalentes a [9],

$$[\hat{a}(k), \hat{a}(k')] = 0, \quad (2.23)$$

$$[\hat{a}^\dagger(k), \hat{a}^\dagger(k')] = 0, \quad (2.24)$$

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')] = \delta(k - k'). \quad (2.25)$$

Além disso, seja  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  e  $|n\rangle$  um autoestado normalizado do operador  $\hat{n}$  com autovalor  $n$ . Então:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (2.26)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (2.27)$$

$$n = \langle n|\hat{n}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle \geq 0. \quad (2.28)$$

Veja que se aplicarmos o operador  $\hat{a}$  em  $|n\rangle$   $j$  vezes, sucessivamente, teremos uma sequência de autovetores  $|n-1\rangle, |n-2\rangle, \dots, |n-j\rangle$ . Contudo, da equação (2.28) tem-se que  $n \geq 0$ , logo, a sequência deve terminar em  $n = 0$  e isso só é válido se  $n$  é um número inteiro. Sendo assim, temos que os operadores de criação  $\hat{a}$  e destruição  $\hat{a}^\dagger$  aplicados no estado de vácuo (estado caracterizado pela total ausência de partículas físicas)  $|0\rangle$ , resultam em:

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \quad (2.29)$$

$$\hat{a}^\dagger|0\rangle = 1. \quad (2.30)$$

## 2.2 Propagador de Hadamard

É conhecido na literatura [9] que o valor esperado no vácuo de vários operadores pode ser identificado como funções de Green da função de onda. Sendo assim, nesta seção, calculamos o propagador de Hadamard que será utilizado posteriormente para o cálculo de dispersões.

Seja,  $G^{(1)}(t, x; t', x')$ , o propagador de Hadamard definido por [9],

$$G^{(1)}(t, x; t', x') = \langle 0|\{\phi(t, x), \phi(t', x')\}|0\rangle = \langle 0|\phi(t, x)\phi(t', x')|0\rangle + \langle 0|\phi(t', x')\phi(t, x)|0\rangle. \quad (2.31)$$

Substituindo a equação (2.22) na expressão anterior temos:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(t, x; t', x') &= \int_0^\infty \frac{\text{sen}(kx)\text{sen}(k'x')}{\pi\sqrt{\omega\omega'}} \langle 0| [\hat{a}(k)e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger(k)e^{i\omega t}] [\hat{a}(k')e^{-i\omega' t'} + \hat{a}^\dagger(k')e^{i\omega' t'}] |0\rangle dk dk' \\ &+ \int_0^\infty \frac{\text{sen}(kx)\text{sen}(k'x')}{\pi\sqrt{\omega\omega'}} \langle 0| [\hat{a}(k')e^{-i\omega' t'} + \hat{a}^\dagger(k')e^{i\omega' t'}] [\hat{a}(k)e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger(k)e^{i\omega t}] |0\rangle dk dk' \end{aligned} \quad (2.32)$$

Utilizando as relações dadas nas equações (2.29) e (2.30) temos que a expressão anterior se reduz a:

$$G^{(1)}(t, x; t', x') = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\text{sen}(kx)\text{sen}(k'x')}{\pi\sqrt{\omega\omega'}} \langle 0 | [\hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k')e^{-i(\omega t - \omega' t')}] | 0 \rangle dk dk' \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\text{sen}(kx)\text{sen}(k'x')}{\pi\sqrt{\omega\omega'}} \langle 0 | [\hat{a}(k')\hat{a}^\dagger(k)e^{i(\omega t - \omega' t')}] | 0 \rangle dk dk'. \quad (2.33)$$

Note que,

$$\hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k') = [\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')] + \hat{a}^\dagger(k')\hat{a}(k) \\ = \delta(k - k') + \hat{a}^\dagger(k')\hat{a}(k), \quad (2.34)$$

onde usamos a relação de comutação dada na equação (2.25).

Substituindo o resultado anterior na equação (2.33) e utilizando mais uma vez a relação dada na expressão (2.29) temos:

$$G^{(1)}(t, x; t', x') = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\text{sen}(kx)\text{sen}(k'x')}{\pi\sqrt{\omega\omega'}} \delta(k - k') [e^{-i(\omega t - \omega' t')} + e^{i(\omega t - \omega' t')}] dk dk' \\ = \int_0^\infty \frac{\text{sen}(kx)\text{sen}(kx')}{\pi\omega} [e^{-i\omega(t-t')} + e^{i\omega(t-t')}] dk \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega} \text{sen}(kx)\text{sen}(kx') dk + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega} \text{sen}(kx)\text{sen}(kx') dk \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega} \left( \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \left( \frac{e^{ikx'} - e^{-ikx'}}{2i} \right) dk \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega} \left( \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \left( \frac{e^{ikx'} - e^{-ikx'}}{2i} \right) dk, \quad (2.35)$$

ou ainda,

$$G^{(1)}(t, x; t', x') = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega} (e^{ik(x+x')} + e^{-ik(x+x')}) dk \\ + \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega} (e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')}) dk \\ - \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega} (e^{ik(x+x')} + e^{-ik(x+x')}) dk \\ + \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega} (e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')}) dk. \quad (2.36)$$

O segundo e o quarto termo na equação anterior correspondem às contribuições devido ao vácuo de Minkowski e, por isso, serão suprimidos, de tal forma que consideraremos em nosso cálculo somente a contribuição devido a presença da placa. Este processo é usualmente denominado renormalização. Logo, a equação anterior se reduz a:

$$G_R^{(1)}(t, x; t', x') = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega} (e^{ik(x+x')} + e^{-ik(x+x')}) dk \\ - \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega} (e^{ik(x+x')} + e^{-ik(x+x')}) dk. \quad (2.37)$$

É conveniente expressarmos as exponenciais em termos de funções trigonométricas, como segue:

$$\begin{aligned} G_R^{(1)}(t, x; t', x') &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega} \cos[k(x+x')] dk - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega} \cos[k(x+x')] dk \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos[k(x+x')] \cos[\omega(t-t')]}{\omega} dk. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Para  $M(t-t') \ll 1$  pode-se dizer que  $\cos[\omega(t-t')] = \cos[\sqrt{k^2 + M^2}(t-t')] \approx \cos[k(t-t')]$ , logo:

$$\begin{aligned} G_R^{(1)}(t, x; t', x') &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos[k(x+x')] \cos[k(t-t')]}{\omega} dk \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\infty \frac{\cos[k((x+x') + (t-t'))]}{\omega} dk + \int_0^\infty \frac{\cos[k((x+x') - (t-t'))]}{\omega} dk \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Com o uso do programa *Mathematica* o cálculo acima resulta em:

$$G_R^{(1)}(t, x; t', x') = -\frac{1}{2\pi} \{K_0[M|(x+x') + (t-t')|] + K_0[M|(x+x') - (t-t')|]\}, \quad (2.40)$$

em que  $K_0$  é conhecida como função de Bessel modificada da segunda espécie e de ordem zero. Para  $M|(x+x') \pm (t-t')| \ll 1$  o propagador de Hadamard renormalizado se reduz a:

$$\begin{aligned} G_R^{(1)}(t, x; t', x') &= \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{M|(x+x') + (t-t')|}{2} \right) + \ln \left( \frac{M|(x+x') - (t-t')|}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{M^2|(x+x')^2 - (t-t')^2|}{4} \right) = \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{M\sqrt{|(x+x')^2 - (t-t')^2|}}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Este resultado é equivalente ao obtido em [5], como era esperado.

### 2.3 Sudden Switching

Neste tópico, iremos estudar o comportamento da partícula teste por meio do cálculo da dispersão quadrática média da sua velocidade usando um mecanismo *sudden switching*. Esse mecanismo implica em um processo de medida abrupto, ou seja, consideramos que o sistema será iniciado instantaneamente em  $t = 0$  e após um tempo  $\tau$  o sistema será instantaneamente desligado. Para efeitos de simplificação, estamos desconsiderando uma possível alteração da presença da partícula sobre o campo, bem como efeitos de dissipação.

Sendo assim, considere que a ação total para o sistema será caracterizada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_{tot} &= S_{campo} + S_{partícula} + S_{interação} = \int L_{campo} dt + \int L_{partícula} dt + \int L_{interação} dt \\ &= \int \int \frac{1}{2} \left[ \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi(t, x) \partial_\beta \phi(t, x) - M^2 \phi^2(t, x) \right] dt dx + \int \frac{m}{2} \dot{x}^2 dt - \int \int \rho \phi dt dx. \end{aligned} \quad (2.42)$$

A dinâmica da partícula é dada pelo extremo da ação [11],  $\delta S_{partícula+interação} = 0$ , por variação da coordenada que corresponde ao seu grau de liberdade ( $x$ ) e levando em conta a densidade lagrangeana que representa sua energia cinética e sua interação com o campo. Expressa-se ainda a densidade de carga  $\rho(x)$  em termos da carga mesônica  $g$  e de uma função delta de Dirac que a posiciona no espaço. Com isso, a equação de Euler-Lagrange resultante leva a:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{\partial}{\partial x} (L_{part.} + L_{inte.}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (L_{part.} + L_{inte.}) = 0 \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [-g\phi] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[ \frac{m}{2} \dot{x}^2 \right] = 0 \\ &= -g \frac{\partial \phi}{\partial x} - m\ddot{x} = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Nesse cenário, temos que a dinâmica do movimento não relativístico de uma partícula de massa  $m$  e carga mesônica  $g$  em um campo escalar  $\phi(t, x)$ , as vezes chamado de campo mesônico ou campo escalar mesônico, pode ser descrita por meio da seguinte equação:

$$m\ddot{x} = m \frac{dv}{dt} = -g \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x}. \quad (2.44)$$

Se deixarmos a partícula interagir com o campo na presença da fronteira refletora durante um certo tempo  $\tau$ , com início em  $t = 0$ , então a expressão para a velocidade da partícula dá-se por:

$$v = -\frac{g}{m} \int_0^\tau \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} dt, \quad (2.45)$$

onde estamos admitindo que a partícula parte do repouso em  $t = 0$  e que a posição da partícula não varia apreciavelmente com o tempo.

A dispersão quadrática média da velocidade no estado de vácuo é dada pela seguinte equação:

$$\langle 0 | (\Delta v)^2 | 0 \rangle = \langle (\Delta v)^2 \rangle = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2. \quad (2.46)$$

Note que, o valor esperado no vácuo do campo é:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(t, x) | 0 \rangle &= \int_0^\infty \frac{\text{sen}(kx)}{\sqrt{\pi\omega}} \langle 0 | [\hat{a}(k)e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger(k)e^{i\omega t}] | 0 \rangle dk \\ &= \int_0^\infty \frac{\text{sen}(kx)}{\sqrt{\pi\omega}} \left[ (\langle 0 | \hat{a}(k) | 0 \rangle) e^{-i\omega t} + (\langle 0 | \hat{a}^\dagger(k) | 0 \rangle) e^{i\omega t} \right] dk = 0, \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde usamos as relações dadas nas equações (2.29) e (2.30). Sendo assim, o valor esperado no vácuo da velocidade da partícula reduz-se a:

$$\langle v \rangle = -\frac{g}{m} \int_0^\tau \frac{\partial \langle \phi(t, x) \rangle}{\partial x} dt = 0, \quad (2.48)$$

e, portanto,  $\langle (\Delta v)^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$ .

Elevando ao quadrado a equação (2.45) e em seguida tomando o valor esperado no vácuo desse resultado obtemos:

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \frac{g^2}{2m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_0^\tau dt \int_0^\tau (\langle \phi(t, x) \phi(t', x') \rangle + \langle \phi(t', x') \phi(t, x) \rangle) dt' \right]_{x=x'} \\ &= \frac{g^2}{2m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_0^\tau dt \int_0^\tau G_R^{(1)}(t, x; t', x') dt' \right]_{x=x'}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Substituindo na equação anterior a expressão para o propagador de Hadamard renormalizado encontrado na equação (2.42) tem-se:

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \frac{g^2}{2\pi m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_0^\tau dt \int_0^\tau \ln \left( \frac{M \sqrt{|(x+x')^2 - (t-t')^2|}}{2} \right) dt' \right]_{x=x'} \\ &= \frac{g^2}{2\pi m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_0^\tau dt \int_0^\tau \left[ \ln \left( \frac{M}{2} \right) + \ln \left( \sqrt{|(x+x')^2 - (t-t')^2|} \right) \right] dt' \right]_{x=x'}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

A derivada do primeiro termo logarítmo é nula e, portanto, a equação (2.50) se reduz a:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{g^2}{8\pi m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_0^\tau dt \int_0^\tau \ln \left( ((x+x')^2 - (t-t')^2)^2 \right) dt' \right]_{x=x'} \quad (2.51)$$

A integral dupla na equação anterior pode ser reescrita como uma única integral, como mostrado em [5, 6]:

$$\int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' f(|t-t'|) = 2 \int_0^\tau (\tau-t) f(t) dt. \quad (2.52)$$

Utilizando o resultado acima na equação (2.51) tem-se:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{g^2}{4\pi m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_0^\tau (\tau-t) \ln \left( ((x+x')^2 - t^2)^2 \right) dt \right]_{x=x'}. \quad (2.53)$$

A equação (2.53) possui uma singularidade em  $t = (x+x')$ . Sendo assim, para resolver essa equação separamos a integral em dois domínios,

$$\langle v^2 \rangle = \frac{g^2}{4\pi m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{\hat{\Delta}x-\epsilon} (\tau-t) \ln \left( ((\hat{\Delta}x)^2 - t^2)^2 \right) dt + \int_{\hat{\Delta}x+\epsilon}^\tau (\tau-t) \ln \left( ((\hat{\Delta}x)^2 - t^2)^2 \right) dt \right) \right]_{x=x'} \quad (2.54)$$

onde definimos  $\hat{\Delta}x = x + x'$  e supomos  $\epsilon > 0$ . Efetuando as integrações e tomando o limite,  $\epsilon \rightarrow 0$ , chega-se a:

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle = \frac{g^2}{8\pi m^2} & \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} ((\tau - \hat{\Delta}x)^2 \ln(\tau - \hat{\Delta}x)^2 - 6\tau^2 - (\hat{\Delta}x)^2 \ln(\hat{\Delta}x)^4 \right. \\ & \left. + (\tau + \hat{\Delta}x)^2 \ln(\tau + \hat{\Delta}x)^2) \right]_{x=x'}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Após tomar as derivadas obtemos,

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \frac{g^2}{4\pi m^2} \left[ -\ln(\hat{\Delta}x)^4 + \ln(\tau - \hat{\Delta}x)^2 + \ln(\tau + \hat{\Delta}x)^2 \right]_{x=x'} \\ &= \frac{g^2}{4\pi m^2} \left[ -\ln(16x^4) + \ln(\tau - 2x)^2 + \ln(\tau + 2x)^2 \right] \\ &= \frac{g^2}{4\pi m^2} \ln \left( \frac{\tau^2 - 4x^2}{4x^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Este resultado é idêntico ao encontrado em [5] e [6], como esperado.

Analisando a expressão anterior percebe-se que a solução possui duas singularidades. A primeira ocorre em  $x = 0$ , e a segunda quando  $\tau = 2x$ , o qual corresponde a um tempo de medida equivalente ao tempo que um fóton leva para ir da partícula até a fronteira e voltar. Assim como foi sugerido nos outros trabalhos [1, 4, 5, 6], entendemos que essas singularidades aparecem devido a idealização do modelo, no qual consideramos que a posição da fronteira é bem definida e que a introdução (remoção) da fronteira no sistema é instantânea.

Note ainda que  $\langle v^2 \rangle$  diverge para grandes valores de  $\tau$ , isto é:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle v^2 \rangle = \infty. \quad (2.57)$$

As figuras 1 e 2 ilustram esses aspectos da solução: na figura 1, que mostra o comportamento da dispersão da velocidade para  $\tau/x$  variando de 0 até 4, fica clara a divergência em  $\tau = 2x$ ; na figura 2, é mostrado o comportamento para valores grandes de  $\tau$ , evidenciando a divergência nesse limite. A figura 1 também mostra um intervalo no qual a dispersão na velocidade possui valores negativos. Esse efeito ocorre como consequência do processo de renormalização, pois subtraímos da expressão para o propagador de Hadamard a contribuição ao campo devido ao vácuo livre de Minkowski, que é uma quantidade infinita.

O cálculo da dispersão na posição da partícula teste determinado em [6, 5] mostrou que no limite em que  $\tau \rightarrow \infty$  essa quantidade tende a infinito. Isso sugere que em (1 + 1) dimensões o mecanismo *sudden switching* não é muito adequado para se estudar a dispersão na posição e velocidade da partícula no limite de  $\tau$  grande, isso porque definimos como hipótese inicial do problema que a posição da partícula não variava significativamente com o tempo. O cálculo apresentado em [5, 6] também indicou que o limite de validade desse modelo cresce a medida que a razão carga-massa ( $g/m$ ) da partícula decresce.

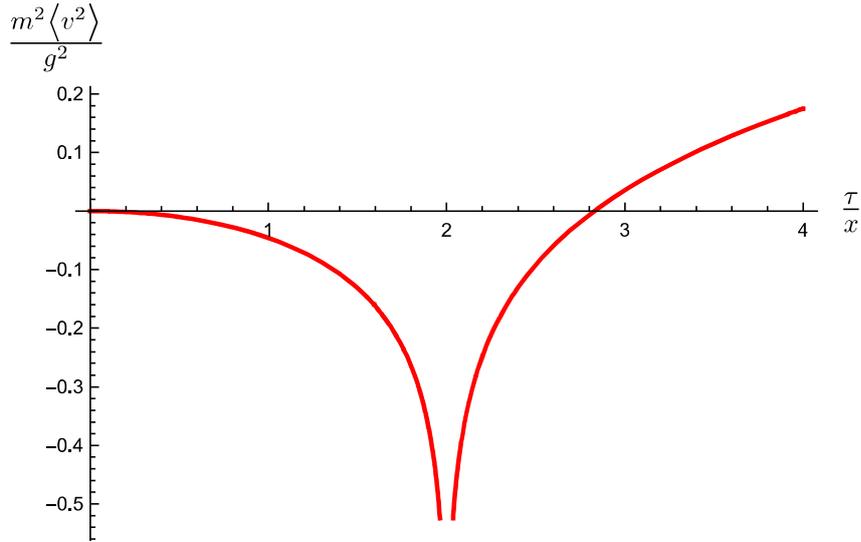


Figura 1 – Dispersão da velocidade da partícula, em função de  $\tau$ , utilizando o método *sudden switching*.

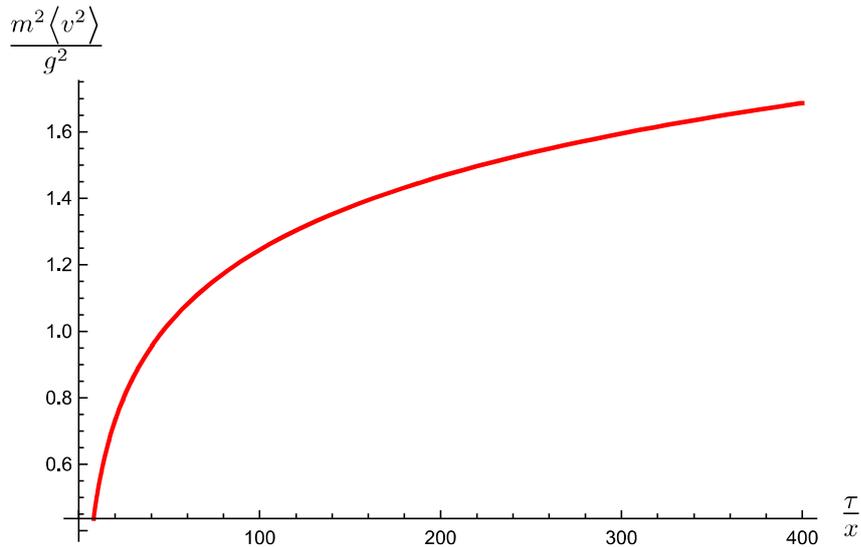


Figura 2 – Dispersão da velocidade da partícula, em função de  $\tau$ , utilizando o método *sudden switching*, no regime em que  $\tau$  tende a infinito.

## 2.4 Smooth Switching

Neste tópico adotaremos um modelo mais realista no qual o ato de colocar/retirar a fronteira não é mais instantâneo, mas agora ocorre num intervalo de tempo finito. Isso será feito por meio de parâmetros incorporados a funções de transição,  $F_\tau(t)$ , responsáveis por fazer uma ligação entre dois regimes do sistema, a partícula no vácuo livre de Minkowski e a partícula no vácuo modificado devido a presença da fronteira.

De um modo geral, a implementação da função *switching*  $F_\tau(t)$  na equação (2.45) leva a seguinte alteração:

$$v = -\frac{g}{m} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\tau \phi(t, x) dt \rightarrow v = -\frac{g}{m} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^\infty \phi(t, x) F_\tau(t) dt, \quad (2.58)$$

de tal forma que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau}(t) dt = \tau. \quad (2.59)$$

### 2.4.1 Switching $F_{\tau}^{(n)}(t)$

Sendo assim, considere a seguinte função *switching*, também analisada em [1]:

$$F_{\tau}^{(n)}(t) = \frac{c_n}{1 + \left(\frac{2t}{\tau}\right)^{2n}}, \quad (2.60)$$

em que  $\tau$  representa o tempo de medida,  $n$  é um inteiro positivo e  $c_n = \left(\frac{2n}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ . O comportamento da função  $F_{\tau}^{(n)}(t)$  é apresentado na figura 3, para diferentes valores de  $n$ . Note que, quanto menor é o valor de  $n$ , mais lentamente ocorre a transição entre os dois regimes do sistema, a partícula no espaço livre de Minkowski e a partícula interagindo com as flutuações do campo escalar no vácuo modificado pela fronteira. O caso idealizado *sudden switching* equivale a esse modelo no limite  $n \rightarrow \infty$ , enquanto que para  $n = 1$  recupera-se a distribuição lorentziana.

A distribuição lorentziana [12] é uma função caracterizada por um único pico e que possui, genericamente, a seguinte forma

$$L(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{(x - x_0)^2 + \alpha^2}, \quad (2.61)$$

em que  $x_0$  é o centro e  $\alpha$  é o parâmetro que especifica a largura.

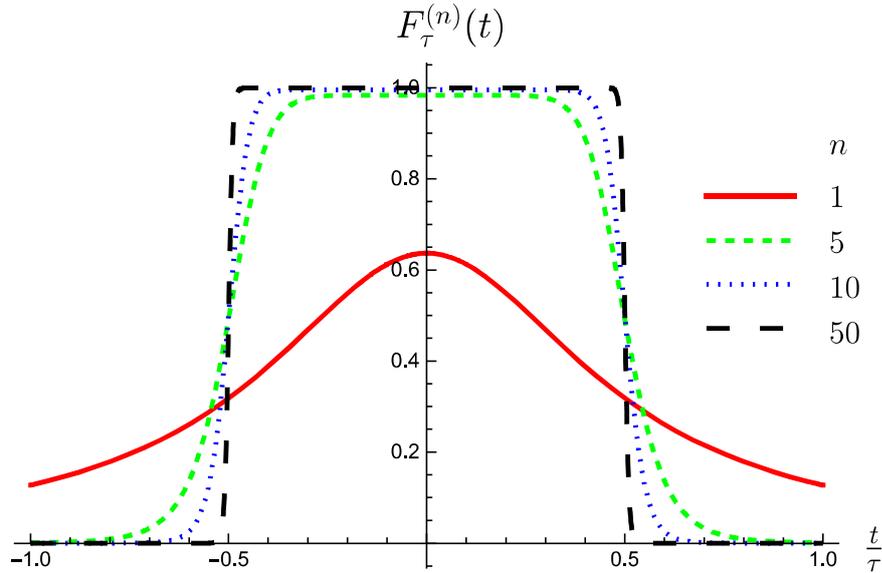


Figura 3 – Comportamento da função *switching*  $F_{\tau}^{(n)}(t)$  em função de  $t$ , para diferentes valores de  $n$ .

Introduzindo a equação (2.60) na equação (2.49) temos que o desvio médio qua-

drático da velocidade utilizando essa função *switching* é:

$$\begin{aligned}
 \langle v^2 \rangle &= \frac{g^2}{2m^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau}^{(n)}(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau}^{(n)}(t') \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} G_R^{(1)}(t, x; t', x') dt' \right]_{x=x'} \\
 &= \frac{g^2}{2\pi m^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau}^{(n)}(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau}^{(n)}(t') \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \ln \left( \frac{M \sqrt{|(x+x')^2 - (t-t')^2|}}{2} \right) dt' \right]_{x=x'} \\
 &= \frac{g^2}{2\pi m^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau}^{(n)}(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau}^{(n)}(t') \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \ln \left( \frac{M}{2} \right) + \frac{1}{4} \ln \left( (x+x')^2 - (t-t')^2 \right)^2 \right] dt' \right]_{x=x'} \\
 &= -\frac{g^2 c_n^2}{2\pi m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left( \frac{2t}{\tau} \right)^{2n}} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^2 + (t-t')^2}{(4x^2 - (t-t')^2)^2} \frac{1}{1 + \left( \frac{2t'}{\tau} \right)^{2n}} dt'.
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Considere a seguinte classe de integrais dada por [1]:

$$\begin{aligned}
 I_{\tau,ijkl}^{(n)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left( \frac{2t}{\tau} \right)^{2n}} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x)^j + (t-t')^i}{((2x)^k - (t-t')^2)^l} \frac{1}{1 + \left( \frac{2t'}{\tau} \right)^{2n}} dt' \\
 &= \frac{\pi^2}{n^2} \left( \frac{\tau}{2} \right)^{2+i-2l} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=n}^{2n-1} \Psi_{n,q} \Psi_{n,p} \frac{(2x)^j \left( \frac{2}{\tau} \right)^i + (\Psi_{n,q} - \Psi_{n,p})^i}{\left( (2x)^k \left( \frac{2}{\tau} \right)^2 - (\Psi_{n,q} - \Psi_{n,p})^2 \right)^l}
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

em que  $n, i$  e  $l$  são positivos inteiros,  $k$  e  $j$  são números reais,  $\Psi_{n,s} = e^{\frac{i\pi}{2n}(1+2s)}$  e a condição  $i < 2l$  é satisfeita. Logo, pode-se reescrever a equação (2.62) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \langle v^2 \rangle &= -\frac{g^2 c_n^2}{2\pi m^2} I_{\tau,2222}^{(n)} = -\frac{g^2 c_n^2 \pi}{2m^2 n^2} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=n}^{2n-1} \Psi_{n,q} \Psi_{n,p} \frac{\left( \frac{4x}{\tau} \right)^2 + (\Psi_{n,q} - \Psi_{n,p})^2}{\left[ \left( \frac{4x}{\tau} \right)^2 - (\Psi_{n,q} - \Psi_{n,p})^2 \right]^2} \\
 &= -\frac{g^2 c_n^2 \pi}{2m^2 n^2} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=n}^{2n-1} e^{\frac{i\pi}{2n}(1+2q)} e^{\frac{i\pi}{2n}(1+2p)} \frac{\left( \frac{4x}{\tau} \right)^2 + \left( e^{\frac{i\pi}{2n}(1+2q)} - e^{\frac{i\pi}{2n}(1+2p)} \right)^2}{\left[ \left( \frac{4x}{\tau} \right)^2 - \left( e^{\frac{i\pi}{2n}(1+2q)} - e^{\frac{i\pi}{2n}(1+2p)} \right)^2 \right]^2}.
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Perceba que as singularidades apontadas na equação (2.56) foram regularizadas naturalmente. Em particular, a regularização em  $\tau = 2x$  é mostrada claramente na figura 4, assim como a dependência desse comportamento com  $n$ . Assim como no caso anterior, existe um intervalo no qual a dispersão na velocidade possui valores negativos, como é possível ver na figura 4.

No regime em que  $\tau$  tende a infinito tem-se:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle v^2 \rangle = -\frac{g^2 c_n^2 \pi}{2m^2 n^2} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=n}^{2n-1} \frac{e^{\frac{i\pi}{2n}(1+2q)} e^{\frac{i\pi}{2n}(1+2p)}}{\left( e^{\frac{i\pi}{2n}(1+2q)} - e^{\frac{i\pi}{2n}(1+2p)} \right)^2}. \tag{2.65}$$

Note que, neste regime ( $\tau \rightarrow \infty$ ) a dispersão quadrática média da velocidade tende a uma constante que depende de  $n$ , como é mostrado na figura 5. Ou seja, existe um efeito

residual no comportamento da partícula. Esse resultado sugere que a escolha da função *switching* influencia no comportamento da dispersão da velocidade da partícula no regime  $\tau \rightarrow \infty$ . Nas figuras 4 e 5 percebe-se que a dispersão na velocidade com a função *switching*  $F_\tau^{(n)}(t)$  se aproxima do resultado *sudden switching* a medida que  $n$  cresce.

Por conseguinte, na próxima seção iremos introduzir uma nova função *smooth switching* com o intuito de monitorar diretamente a rapidez na qual a partícula passa de um regime a outro do sistema.

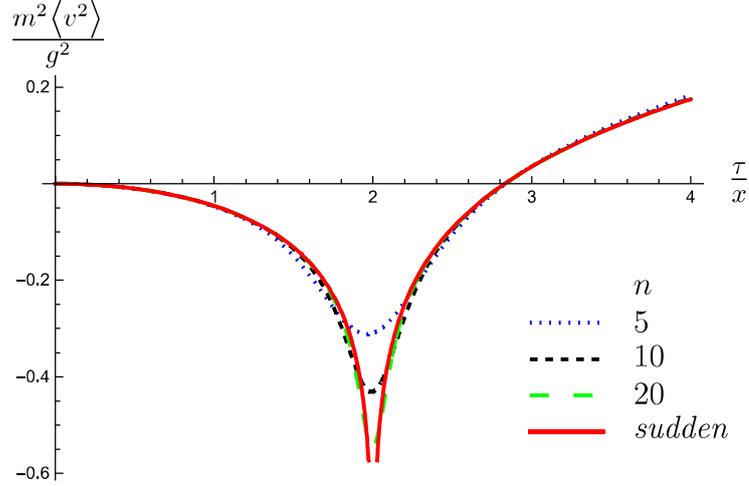


Figura 4 – Dispersão da velocidade da partícula, em função de  $\tau$ , para alguns valores de  $n$ , utilizando a função  $F_\tau^{(n)}(t)$ .

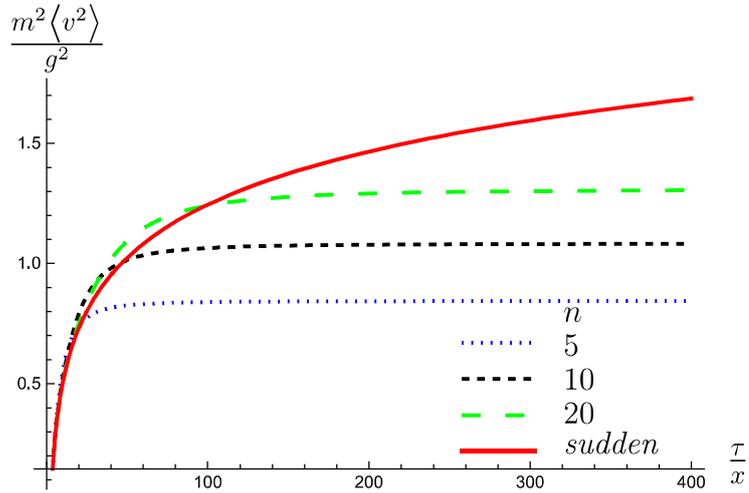


Figura 5 – Dispersão da velocidade da partícula, em função de  $\tau$ , para alguns valores de  $n$ , utilizando a função  $F_\tau^{(n)}(t)$ , no regime em que  $\tau$  tende a infinito.

#### 2.4.2 Switching $F_{\tau_s, \tau}(t)$

Considere agora uma outra função *switching*, também apresentada em [13], e dada por:

$$F_{\tau_s, \tau}(t) = \frac{1}{\pi} \left( \arctan \frac{t}{\tau_s} + \arctan \frac{\tau - t}{\tau_s} \right), \quad (2.66)$$

em que o parâmetro  $\tau$  representa o tempo de medida e  $\tau_s$  mede o quão rápido a partícula passa de um regime a outro do sistema. O comportamento dessa função é apresentado na figura 6, para diferentes valores de  $\tau_s/\tau$ . Veja que a função *switching*  $F_{\tau_s, \tau}(t)$  apresenta um comportamento similar à função  $F_{\tau}^{(n)}(t)$ . Contudo, enquanto que os parâmetros  $\tau$  e  $\tau_s$  estão desconectados na função  $F_{\tau_s, \tau}(t)$ , de tal forma que é possível fazer  $\tau$  tão grande quanto se queira e, ainda assim, manter um valor de  $\tau_s$  finito, na função  $F_{\tau}^{(n)}(t)$  pode-se mostrar que  $\tau$  varia linearmente com  $\tau_s$ . Note também que, o caso *sudden switching* é retomado fazendo  $\tau_s = 0$ .

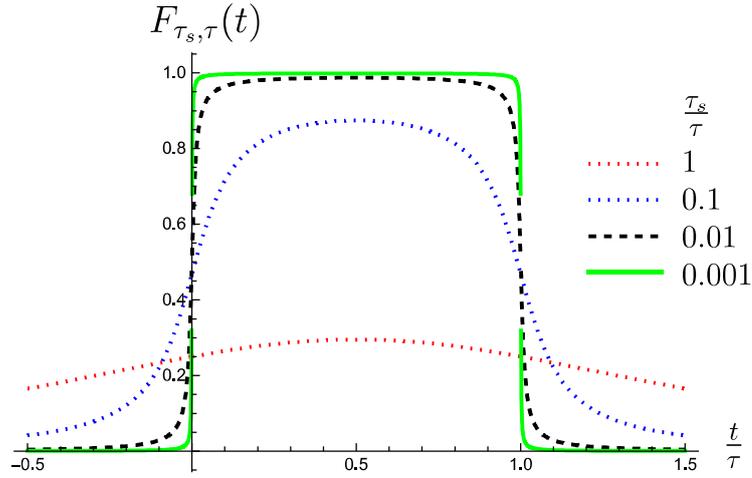


Figura 6 – Comportamento da função *switching*  $F_{\tau_s, \tau}(t)$  em função de  $t$ , para alguns valores de  $\tau_s$ .

Seguindo a mesma metodologia descrita na subseção anterior, a dispersão quadrática média na velocidade utilizando essa função *switching* é:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{g^2}{2m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t') G_R^{(1)}(t, x; t', x') dt' \right]_{x=x'}. \quad (2.67)$$

Substituindo a expressão para o propagador de Hadamard renormalizado dado na equação (2.41) tem-se:

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \frac{g^2}{2m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t') \left( -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos[k(x+x')] \cos[\omega(t-t')]}{\omega} dk \right) dt' \right]_{x=x'} \\ &= -\frac{g^2}{2\pi m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t') dt' \Re \int_0^{\infty} \frac{\cos[k(x+x')] e^{-i\omega(t-t')}}{\omega} dk \right]_{x=x'} \\ &= -\frac{g^2}{2\pi m^2} \Re \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_0^{\infty} \frac{\cos[k(x+x')]}{\omega} dk \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t') e^{i\omega t'} dt' \right]_{x=x'}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Seja,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \arctan \frac{t}{\tau_s} + \arctan \frac{\tau - t}{\tau_s} \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \arctan \left( \frac{t}{\tau_s} \right) e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \arctan \left( \frac{\tau - t}{\tau_s} \right) e^{-i\omega t} dt \right]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Utilizando o método de integração por partes ( $\int u dv = uv - \int v du$ ) para resolver a integral anterior tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \arctan\left(\frac{t}{\tau_s}\right) e^{-i\omega t} dt &= \arctan\left(\frac{t}{\tau_s}\right) \frac{ie^{-i\omega t}}{\omega} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ie^{-i\omega t}}{\omega} \frac{dt}{\tau_s \left(\frac{t^2}{\tau_s^2} + 1\right)} \\ &= \arctan\left(\frac{t}{\tau_s}\right) \frac{ie^{-i\omega t}}{\omega} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\tau_s}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} dt}{(t^2 + \tau_s^2)} \\ &= \arctan\left(\frac{t}{\tau_s}\right) \frac{ie^{-i\omega t}}{\omega} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\pi e^{-\omega\tau_s}}{\omega}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \arctan\left(\frac{\tau - t}{\tau_s}\right) e^{-i\omega t} dt &= \arctan\left(\frac{\tau - t}{\tau_s}\right) \frac{ie^{-i\omega t}}{\omega} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ie^{-i\omega t}}{\omega} \frac{dt}{\tau_s \left(\frac{(\tau - t)^2}{\tau_s^2} + 1\right)} \\ &= \arctan\left(\frac{\tau - t}{\tau_s}\right) \frac{ie^{-i\omega t}}{\omega} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\tau_s}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} dt}{((\tau - t)^2 + \tau_s^2)} \\ &= \arctan\left(\frac{\tau - t}{\tau_s}\right) \frac{ie^{-i\omega t}}{\omega} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\pi e^{-\omega\tau_s} e^{-i\omega\tau}}{\omega}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Substituindo as expressões encontradas nas equações (2.70) e (2.71) na equação (2.69) tem-se:

$$A = \frac{1}{\pi} \left[ \arctan\left(\frac{t}{\tau_s}\right) \frac{ie^{-i\omega t}}{\omega} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\pi e^{-\omega\tau_s}}{\omega} + \arctan\left(\frac{\tau - t}{\tau_s}\right) \frac{ie^{-i\omega t}}{\omega} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\pi e^{-\omega\tau_s} e^{-i\omega\tau}}{\omega} \right]. \quad (2.72)$$

Para  $\tau$  finito o primeiro e o terceiro termos na equação anterior se cancelam e, assim, a expressão anterior se reduz a:

$$A = \frac{ie^{-\omega\tau_s}}{\omega} (e^{-i\omega\tau} - 1). \quad (2.73)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} B &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t') e^{i\omega t'} dt' = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \arctan\frac{t'}{\tau_s} + \arctan\frac{\tau - t'}{\tau_s} \right) e^{i\omega t'} dt' \\ &= \frac{ie^{-\omega\tau_s}}{\omega} (1 - e^{i\omega\tau}). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Substituindo os valores encontrados nas equações (2.73) e (2.74) na equação (2.68) tem-se:

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= -\frac{g^2}{2\pi m^2} \Re \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_0^{\infty} \frac{\cos k(x + x')}{\omega} \frac{ie^{-\omega\tau_s}}{\omega} (e^{-i\omega\tau} - 1) \frac{ie^{-\omega\tau_s}}{\omega} (1 - e^{i\omega\tau}) dk \right]_{x=x'} \\ &= -\frac{g^2}{\pi m^2} \Re \left[ \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\omega\tau_s}}{\omega^3} (1 - \cos \omega\tau) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \cos k(x + x') dk \right]_{x=x'} \\ &= \frac{g^2}{\pi m^2} \Re \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\omega\tau_s}}{\omega^3} [1 - \cos(\omega\tau)] k^2 \cos(2kx) dk. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Para  $M\tau \ll 1$ ,  $\cos(\omega\tau) = \cos(\sqrt{k^2 + M^2} \tau) \approx \cos(k\tau)$ . Logo, a equação anterior se reduz a:

$$\begin{aligned}
 \langle v^2 \rangle &= \frac{g^2}{\pi m^2} \Re \int_0^\infty \frac{e^{-2k\tau_s}}{k} [1 - \cos(k\tau)] \cos(2kx) dk \\
 &= \frac{g^2}{4\pi m^2} \Re \left[ -2 \ln \left( \frac{\tau_s^2 + x^2}{\tau_s^2} \right) + \ln \left( \frac{4\tau_s^2 + (\tau - 2x)^2}{16\tau_s^2} \right) + \ln \left( \frac{4\tau_s^2 + (\tau + 2x)^2}{\tau_s^2} \right) \right] \\
 &= \frac{g^2}{4\pi m^2} \Re \left[ \ln \left( \frac{8\tau_s^2(2\tau_s^2 + \tau^2 + 4x^2) + (\tau^2 - 4x^2)^2}{16(\tau_s^2 + x^2)^2} \right) \right] \\
 &= \frac{g^2}{8\pi m^2} \ln \left( \frac{8\tau_s^2(2\tau_s^2 + \tau^2 + 4x^2) + (\tau^2 - 4x^2)^2}{16(\tau_s^2 + x^2)^2} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

Mais uma vez percebe-se que as singularidades apontadas no caso *sudden switching*,  $x = 0$  e  $\tau = 2x$  foram regularizadas, como é mostrado na figura 7 para três valores distintos de  $\tau_s/x$ . Nessa figura também é possível ver um intervalo com valores negativos para a dispersão na velocidade.

No limite em que  $\tau_s$  tende a zero tem-se:

$$\lim_{\tau_s \rightarrow 0} \langle v^2 \rangle = \frac{g^2}{4\pi m^2} \ln \left( \frac{\tau^2 - 4x^2}{4x^2} \right)^2. \tag{2.77}$$

No limite em que  $\tau_s$  tende a zero o resultado encontrado no caso *sudden switching* é retomado, como mostra a equação anterior. Isso era esperado pois fazer  $\tau_s$  tender a zero equivale a levar a zero o intervalo de tempo necessário para introduzir (ou retirar) a fronteira.

Para  $\tau_s$  finito e  $\tau$  tendendo a infinito obtém-se:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle v^2 \rangle = \infty. \tag{2.78}$$

Esse comportamento é mostrado na figura 8 para diferentes valores de  $\tau_s/x$ .

Como vimos, a implementação das funções de transição  $F_\tau^{(n)}(t)$  e  $F_{\tau_s, \tau}(t)$  no cálculo da dispersão da velocidade regulariza as singularidades em  $x = 0$  e  $\tau = 2x$  que aparecem no caso *sudden switching*, o que sugere que esses efeitos estão relacionados à idealização do modelo. O fato da dispersão na velocidade tender a infinito quando  $\tau \rightarrow \infty$  tanto no caso *sudden switching* quanto no caso *smooth switching* com a função  $F_{\tau_s, \tau}(t)$  indica que a metodologia utilizada neste trabalho não é propícia para se estudar essa quantidade nesse limite.

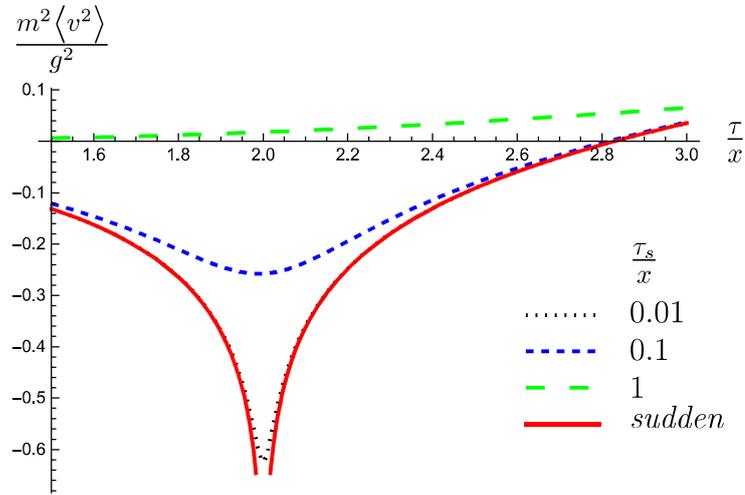


Figura 7 – Dispersão da velocidade da partícula, em função de  $\tau$ , para alguns valores de  $\tau_s$ , utilizando a função  $F_{\tau_s, \tau}(t)$ .

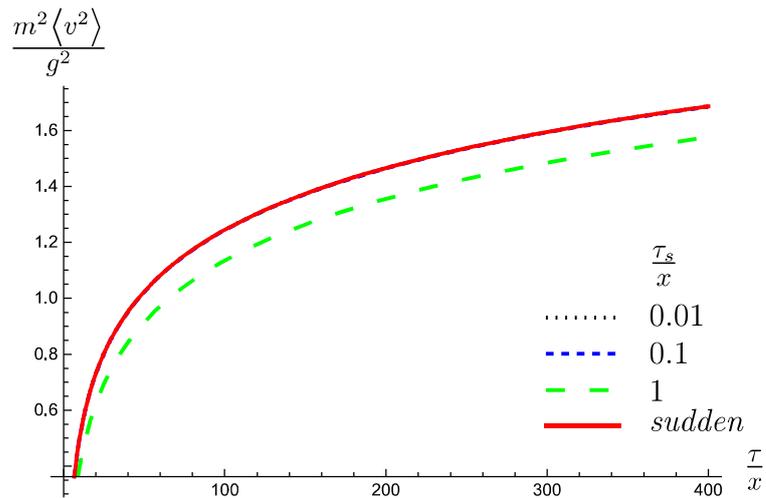


Figura 8 – Dispersão da velocidade da partícula, em função de  $\tau$ , para alguns valores de  $\tau_s$ , utilizando a função  $F_{\tau_s, \tau}(t)$ , no regime em que  $\tau$  tende a infinito.

### 3 Influência das flutuações quânticas de um campo escalar em uma partícula teste próxima a uma fronteira refletora em $(2 + 1)$ dimensões

#### 3.1 Quantização do campo escalar na presença de uma fronteira perfeitamente refletora

Similarmente ao caso  $(1 + 1)$  dimensões, considere um campo escalar  $\phi(t, x, y) = \phi(x^0, x^1, x^2) = \phi(t, \mathbf{x})$  de massa nula, no espaço de Minkowski em  $(2 + 1)$  dimensões. A ação para esse campo é semelhante àquela dada na equação (2.1) mas agora com  $\alpha$  e  $\beta$  variando de 0 a 2 [9],

$$S = \int \int \int \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi(t, x, y) \partial_\beta \phi(t, x, y) dt dx dy. \quad (3.1)$$

Utilizando o princípio da ação mínima,  $\delta S = 0$ , obtemos a equação de Klein-Gordon para o campo, caracterizada por:

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \phi(t, x, y) = 0. \quad (3.2)$$

Vamos propor uma solução para a equação precedente do tipo,

$$\phi(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y). \quad (3.3)$$

Se introduzirmos uma fronteira perfeitamente refletora em  $x = 0$  e impormos a condição de contorno de Dirichlet ( $\phi(t, 0, y) = 0$ ) ao sistema, então, um conjunto de soluções da equação (3.2) pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t, x, y) = c_2 e^{i(k_y y - \omega t)} \text{sen}(k_x x), \quad (3.4)$$

em que  $c_2, k_x, k_y$  e  $\omega$  são constantes reais definidas nos seguintes intervalos;  $c_2, k_x > 0$ ,  $-\infty < k_y < \infty$  e  $\omega = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} > 0$ .

Note que, a família de funções  $\text{sen}(k_x x)$  com  $k_x$  variando de um até infinito constitui uma base ortogonal completa para a expansão das soluções (3.4) no intervalo de  $x$  variando de zero até infinito [10]. Além disso, a constante de normalização  $c_2$  pode ser determinada

por meio do cálculo do produto escalar de Klein-Gordon, dado por:

$$\begin{aligned}
 (\varphi_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}), \varphi_{\mathbf{k}'}(t, \mathbf{x})) &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [\varphi_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) (\partial_t \varphi_{\mathbf{k}'}^*(t, \mathbf{x})) \\
 &\quad - (\partial_t \varphi_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})) \varphi_{\mathbf{k}'}^*(t, \mathbf{x})] dx dy = \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \\
 &= -i \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [c_2 \text{sen}(kx) e^{i(k_y y - \omega t)} (i\omega' c_2 \text{sen}(k'x) e^{-i(k'_y y - \omega' t)}) \\
 &\quad - (-i\omega c_2 \text{sen}(kx) e^{i(k_y y - \omega t)}) c_2 \text{sen}(k'x) e^{-i(k'_y y - \omega' t)}] dx dy = \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \\
 &= c_2^2 (\omega + \omega') e^{-it(\omega - \omega')} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(k_y - k'_y)} dy \\
 &\quad \times \int_0^{\infty} \text{sen}(kx) \text{sen}(k'x) dx = \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Usando o resultado da equação (2.15) obtemos:

$$(\varphi_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}), \varphi_{\mathbf{k}'}(t, \mathbf{x})) = c_2^2 (\omega + \omega') e^{-it(\omega - \omega')} 2\pi \delta(k_y - k'_y) \frac{\pi}{2} \delta(k_x - k'_x) = \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y), \tag{3.6}$$

onde conclui-se que  $c_2 = \pi \sqrt{2\omega}$ .

Substituindo o valor de  $c_2$  na equação (3.4) e expandindo  $\phi(t, x, y)$  em função dos modos normais de vibração  $\varphi_{\mathbf{k}}(t, x, y)$  chega-se a:

$$\phi(t, x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(k_x x)}{\pi \sqrt{2\omega}} [\hat{a}(\mathbf{k}) e^{i(k_y y - \omega t)} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(k_y y - \omega t)}] dk_x dk_y, \tag{3.7}$$

em que  $\hat{a}(\mathbf{k})$  é o operador de destruição e  $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$  é seu complexo conjugado.

Note que, a equação (3.7) para o campo obedece as relações de comutação dadas nas equações (2.18 - 2.20), bem como os operadores  $\hat{a}(\mathbf{k})$  e  $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$  obedecem as relações apresentadas nas equações (2.13 - 2.30).

## 3.2 Propagador de Hadamard

Utilizando o resultado anterior na expressão para o propagador de Hadamard, equação (2.31), pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}
 G^{(1)}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(k_x x) \text{sen}(k'_x x')}{4\pi^2 \sqrt{\omega \omega'}} \langle 0 | [\hat{a}(\mathbf{k}) e^{i(k_y y - \omega t)} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(k_y y - \omega t)}] \\
 &\quad \times [\hat{a}(\mathbf{k}') e^{i(k'_y y' - \omega' t')} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i(k'_y y' - \omega' t')}] | 0 \rangle d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(k_x x) \text{sen}(k'_x x')}{4\pi^2 \sqrt{\omega \omega'}} \langle 0 | [\hat{a}(\mathbf{k}') e^{i(k'_y y' - \omega' t')} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i(k'_y y' - \omega' t')}] \\
 &\quad \times [\hat{a}(\mathbf{k}) e^{i(k_y y - \omega t)} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(k_y y - \omega t)}] | 0 \rangle d\mathbf{k} d\mathbf{k}'
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Utilizando as relações para os operadores de criação e destruição dadas nas equações (2.29), (2.30) e (2.34) a equação anterior se reduz a:

$$G^{(1)}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{i(k_y(y-y')-\omega(t-t'))} + e^{-i(k_y(y-y')-\omega(t-t'))} \right] \frac{\text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_x x')}{\omega} dk_x dk_y. \quad (3.9)$$

Escrevendo as funções  $\text{sen}(k_x x)$  e  $\text{sen}(k_x x')$  em termos das respectivas funções exponenciais obtemos:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k_y \Delta y - \omega \Delta t)} + e^{-i(k_y \Delta y - \omega \Delta t)}}{\omega} \frac{(e^{ik_x x} - e^{-ik_x x})}{2i} \frac{(e^{ik_x x'} - e^{-ik_x x'})}{2i} dk_x dk_y \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k_y \Delta y - \omega \Delta t)} + e^{-i(k_y \Delta y - \omega \Delta t)}}{\omega} \left( e^{ik_x(x+x')} - e^{ik_x(x-x')} \right. \\ &\quad \left. + e^{-ik_x(x+x')} - e^{-ik_x(x-x')} \right) dk_x dk_y, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde definimos  $\Delta x = x - x'$ ,  $\Delta y = y - y'$  e  $\Delta t = t - t'$ . De forma conveniente, podemos expressar este resultado em duas parcelas:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') &= -\frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k_y \Delta y - \omega \Delta t)} + e^{-i(k_y \Delta y - \omega \Delta t)}}{\omega} (e^{ik_x(x+x')} + e^{-ik_x(x+x')}) dk_x dk_y \\ &\quad + \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k_y \Delta y - \omega \Delta t)} + e^{-i(k_y \Delta y - \omega \Delta t)}}{\omega} (e^{ik_x(x-x')} + e^{-ik_x(x-x')}) dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (3.11)$$

O segundo termo nessa equação corresponde a contribuição devido ao vácuo de Minkowski e, por isso, será suprimido, em acordo com o procedimento de renormalização do propagador. Logo, o propagador de Hamadard renormalizado é:

$$\begin{aligned} G_R^{(1)}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') &= -\frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k_y \Delta y - \omega \Delta t)} + e^{-i(k_y \Delta y - \omega \Delta t)}}{\omega} (e^{ik_x(x+x')} + e^{-ik_x(x+x')}) dk_x dk_y \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k_y \Delta y + k_x \hat{\Delta} x - \omega \Delta t)} + e^{-i(k_y \Delta y + k_x \hat{\Delta} x - \omega \Delta t)}}{\omega} dk_x dk_y \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k_y \Delta y - k_x \hat{\Delta} x - \omega \Delta t)} + e^{-i(k_y \Delta y - k_x \hat{\Delta} x - \omega \Delta t)}}{\omega} dk_x dk_y \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

em que  $\hat{\Delta} x = x + x'$ .

Além disso, seja  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{x} + k_y \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{j} = -\hat{\Delta} x \mathbf{x} + \Delta y \mathbf{y}$  e  $\mathbf{v} = \hat{\Delta} x \mathbf{x} + \Delta y \mathbf{y}$ , onde  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são os vetores unitários da base cartesiana. Assim:

$$\begin{aligned} G_R^{(1)}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') &= -\frac{1}{16\pi^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega \Delta t)} + e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega \Delta t)}}{\omega} dk_x dk_y \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} - \omega \Delta t)} + e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} - \omega \Delta t)}}{\omega} dk_x dk_y \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Reescrevendo a equação anterior em coordenadas polares, chega-se a:

$$G_R^{(1)}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = -\frac{1}{16\pi^2} \left[ \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{i(\rho\Delta t - \rho|\mathbf{v}|\cos\alpha)} d\alpha d\rho + \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-i(\rho\Delta t - \rho|\mathbf{v}|\cos\alpha)} d\alpha d\rho \right. \\ \left. + \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-i(\rho\Delta t - \rho|\mathbf{j}|\cos\varphi)} d\varphi d\rho + \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{i(\rho\Delta t - \rho|\mathbf{j}|\cos\varphi)} d\varphi d\rho \right]. \quad (3.14)$$

As integrações nas variáveis  $\varphi$  e  $\alpha$  na equação anterior correspondem a  $2\pi$  vezes a função de Bessel  $J_0$  de primeira ordem. Notando também que  $|\mathbf{j}| = |\mathbf{v}|$ , segue-se que:

$$G_R^{(1)}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \left[ \int_0^\infty e^{-i\rho\Delta t} J_0(\rho|\mathbf{v}|) d\rho + \int_0^\infty e^{i\rho\Delta t} J_0(\rho|\mathbf{v}|) d\rho \right] \\ = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty (e^{-i\rho\Delta t} + e^{i\rho\Delta t}) J_0(\rho|\mathbf{v}|) d\rho = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \cos(\rho\Delta t) J_0(\rho|\mathbf{v}|) d\rho. \quad (3.15)$$

A integral anterior possui soluções diferentes de acordo com o regime em que ela se encontra, conforme mostra a equação (6.671 – 2) dada em [14]. De tal forma que:

$$\int_0^\infty \cos(\rho\Delta t) J_0(\rho|\mathbf{v}|) d\rho = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(\hat{\Delta}x)^2 + (\Delta y)^2 - (\Delta t)^2}}, & \Delta t < \sqrt{(\hat{\Delta}x)^2 + (\Delta y)^2} \\ \infty \text{ ou } 0, & \Delta t = \sqrt{(\hat{\Delta}x)^2 + (\Delta y)^2} \\ 0, & \Delta t > \sqrt{(\hat{\Delta}x)^2 + (\Delta y)^2}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Portanto, concluímos que o propagador de Hadamard renormalizado é dado por:

$$G_R^{(1)}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(\hat{\Delta}x)^2 + (\Delta y)^2 - (\Delta t)^2}}, & \Delta t < \sqrt{(\hat{\Delta}x)^2 + (\Delta y)^2} \\ \infty \text{ ou } 0, & \Delta t = \sqrt{(\hat{\Delta}x)^2 + (\Delta y)^2} \\ 0, & \Delta t > \sqrt{(\hat{\Delta}x)^2 + (\Delta y)^2}. \end{cases} \quad (3.17)$$

### 3.3 Sudden Switching

Assim como foi feito no caso  $(1 + 1)$  dimensões, a dinâmica do movimento não relativístico de uma partícula de massa  $m$  e carga mesônica  $g$  interagindo com um campo escalar  $\phi(t, x, y)$  pode ser descrito por meio da seguinte equação:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g\nabla\phi(t, x, y). \quad (3.18)$$

Se ligarmos o sistema instantaneamente em  $t = 0$  e após um tempo de medida  $\tau$  o desligarmos imediatamente, então a expressão para as componentes da velocidade da partícula da-se por:

$$v_i = -\frac{g}{m} \int_0^\tau \frac{\partial\phi(t, x, y)}{\partial x_i} dt. \quad (3.19)$$

onde estamos admitindo que a partícula parte do repouso em  $t = 0$  e que a posição da partícula não varia apreciavelmente com o tempo.

De acordo com a equação (2.47) temos que  $\langle v_i \rangle = 0$  e, portanto,  $\langle (\Delta v)^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$ . Sendo assim, substituindo na equação (2.49) a expressão para o propagador de Hadamard renormalizado encontrado na equação (3.17) obtemos:

$$\langle v_i^2 \rangle = -\frac{g^2}{4\pi m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\tau dt \int_0^\tau \Re \left( \frac{1}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 - (t-t')^2}} \right) dt' \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'}. \quad (3.20)$$

A integral dupla na equação anterior pode ser reescrita como uma única integral como mostrado na equação (2.52). Sendo assim, a expressão anterior reduz-se a:

$$\begin{aligned} \langle v_i^2 \rangle &= -\frac{g^2}{2\pi m^2} \Re \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\tau \frac{(\tau-t)}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 - t^2}} dt \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} \\ &= -\frac{g^2}{2\pi m^2} \Re \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left( \sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 - \tau^2} - \sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tau \arctan \frac{\tau}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 - \tau^2}} \right) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \langle v_y^2 \rangle &= -\frac{g^2}{2\pi m^2} \Re \left[ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y'} \left( \sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 - \tau^2} - \sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tau \arctan \frac{\tau}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 - \tau^2}} \right) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

e

$$\begin{aligned} \langle v_x^2 \rangle &= -\frac{g^2}{2\pi m^2} \Re \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \left( \sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 - \tau^2} - \sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tau \arctan \frac{\tau}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 - \tau^2}} \right) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Efetuando as derivadas e tomando o limite de coincidência dos pontos, chega-se a:

$$\langle v_y^2 \rangle = -\frac{g^2}{4x\pi m^2} \Re \left( 1 - \frac{\sqrt{4x^2 - \tau^2}}{2x} \right), \quad (3.24)$$

e

$$\langle v_x^2 \rangle = -\frac{g^2}{8x^2\pi m^2} \Re \left( \frac{\tau^2}{\sqrt{4x^2 - \tau^2}} \right). \quad (3.25)$$

Perceba que, assim como no caso (1 + 1) *sudden switching*, a componente perpendicular da velocidade possui uma divergência em  $\tau = 2x$ , evidenciada na figura 10.

Todavia, diferentemente do caso  $(1 + 1)$  e  $(3 + 1)$  dimensões [15], não existe dispersão dessa mesma quantidade para  $\tau > 2x$ . Note também que, ambas as componentes da dispersão da velocidade possuem valor negativo para  $\tau < 2x$  e que, especificamente, a componente paralela dessa mesma quantidade apresenta um valor negativo, finito e constante para  $\tau > 2x$ , como nota-se na figura 9. A dispersão da componente paralela da velocidade apresentou uma divergência em  $x = 0$ , mas não em  $\tau = 2x$ , diferentemente do caso  $(3 + 1)$  dimensões [15]. Contudo, uma discontinuidade na derivada em  $\tau = 2x$  foi observada.

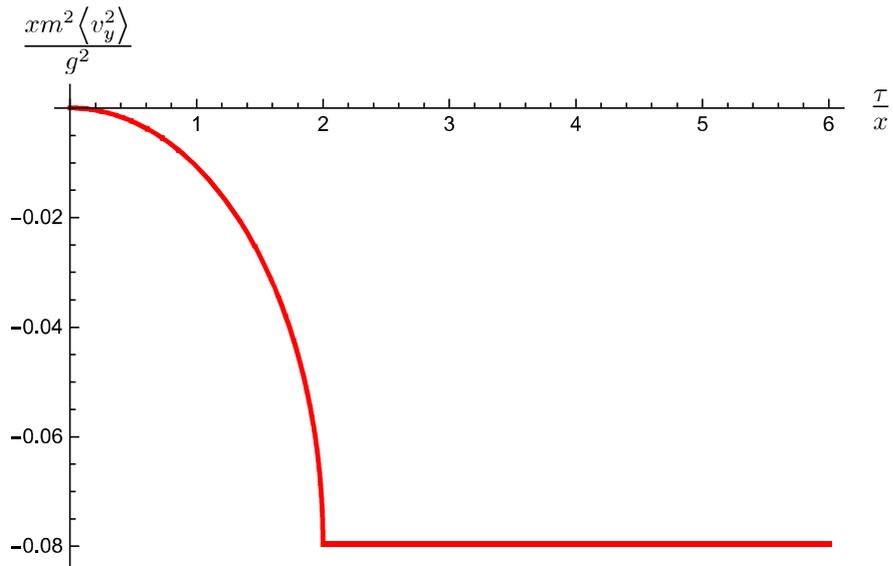


Figura 9 – Dispersão da componente paralela da velocidade da partícula em relação à placa, em função de  $\tau$ , aplicando o método *sudden switching*.

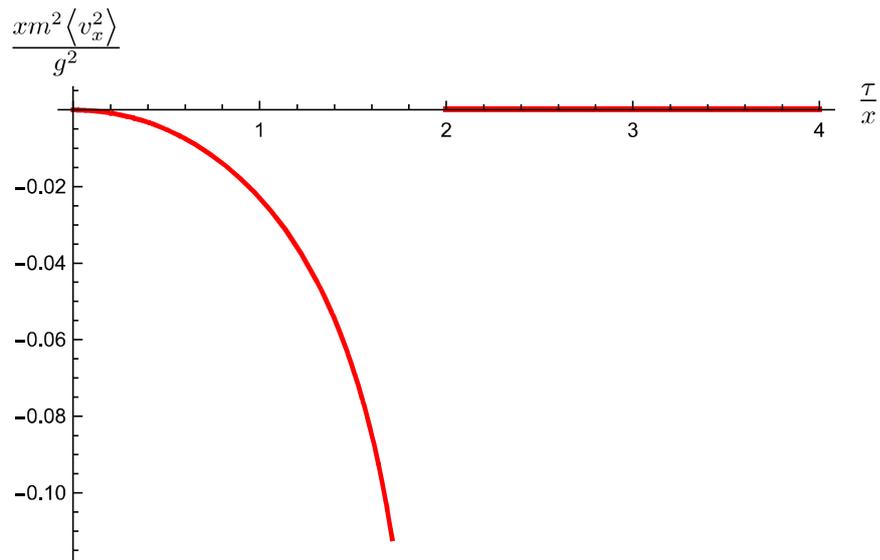


Figura 10 – Dispersão da componente perpendicular da velocidade da partícula em relação à placa, em função de  $\tau$ , aplicando o método *sudden switching*.

## 3.4 Smooth Switching

### 3.4.1 Switching $F_\tau^{(n)}(t)$

Assim como foi feito no caso  $(1 + 1)$  dimensões, introduzimos agora a função *switching*  $F_\tau^{(n)}(t)$ , dada na equação (2.60) e que tem como papel conectar de maneira suave os dois regimes do sistema, a partícula no vácuo livre de Minkowski e a partícula na presença da placa. Logo, a dispersão quadrática média da velocidade da partícula teste usando esta função de transição é:

$$\langle v_i^2 \rangle = \frac{g^2 c_n^2}{2m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1 + (\frac{2t}{\tau})^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{1 + (\frac{2t'}{\tau})^{2n}} G_R^{(1)}(t, x, y; t', x', y') \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'}. \quad (3.26)$$

Substituindo a equação (3.15) para o propagador de Hadamard renormalizado, tem-se que:

$$\begin{aligned} \langle v_i^2 \rangle &= \frac{g^2 c_n^2}{2m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1 + (\frac{2t}{\tau})^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{1 + (\frac{2t'}{\tau})^{2n}} \left( -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \cos(\rho\Delta t) J_0(\rho|\mathbf{v}|) d\rho \right) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} \\ &= -\frac{g^2 c_n^2}{4\pi m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1 + (\frac{2t}{\tau})^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{1 + (\frac{2t'}{\tau})^{2n}} \int_0^\infty \cos(\rho\Delta t) J_0(\rho|\mathbf{v}|) d\rho \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} \\ &= -\frac{g^2 c_n^2}{4\pi m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\infty J_0(\rho|\mathbf{v}|) d\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1 + (\frac{2t}{\tau})^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{1 + (\frac{2t'}{\tau})^{2n}} \cos(\rho\Delta t) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Seja  $u = 2t/\tau$  e  $u' = 2t'/\tau$ . Em termos dessas novas variáveis, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \langle v_i^2 \rangle &= -\frac{g^2 c_n^2}{4\pi m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\infty J_0(\rho|\mathbf{v}|) d\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\tau du}{2}}{1 + (u)^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\tau du'}{2}}{1 + (u')^{2n}} \cos\left(\frac{\rho\tau}{2}(u - u')\right) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} \\ &= -\frac{\tau^2 g^2 c_n^2}{16\pi m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\infty J_0(\rho|\mathbf{v}|) d\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1 + (u)^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du'}{1 + (u')^{2n}} \cos\left(\frac{\rho\tau}{2}(u - u')\right) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

O polinômio  $1 + (u')^{2n}$  pode ser fatorado como  $1 + (u')^{2n} = \prod_{q=0}^{2n-1} (u' - \Psi_{n,q})$ , em que  $\Psi_{n,q} = e^{\frac{i\pi(1+2q)}{2n}}$ . As  $2n$  raízes desse polinômio estão distribuídas no interior de um círculo de raio unitário, com  $n$  raízes na metade superior do círculo e as outras  $n$  raízes na metade inferior, conforme apresentado em [1] e ilustrado na figura 11.

Logo, a fim de usarmos o teorema do resíduo substitui-se a função cosseno pela parte real de uma exponencial complexa, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \langle v_i^2 \rangle &= -\frac{\tau^2 g^2 c_n^2}{16\pi m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\infty J_0(\rho|\mathbf{v}|) d\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1 + (u)^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du'}{1 + (u')^{2n}} \Re \left[ e^{\frac{-i\rho\tau}{2}(u-u')} \right] \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} \\ &= -\frac{\tau^2 g^2 c_n^2}{16\pi m^2} \Re \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\infty J_0(\rho|\mathbf{v}|) d\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1 + (u)^{2n}} e^{\frac{-i\rho\tau u}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du'}{1 + (u')^{2n}} e^{\frac{i\rho\tau u'}{2}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

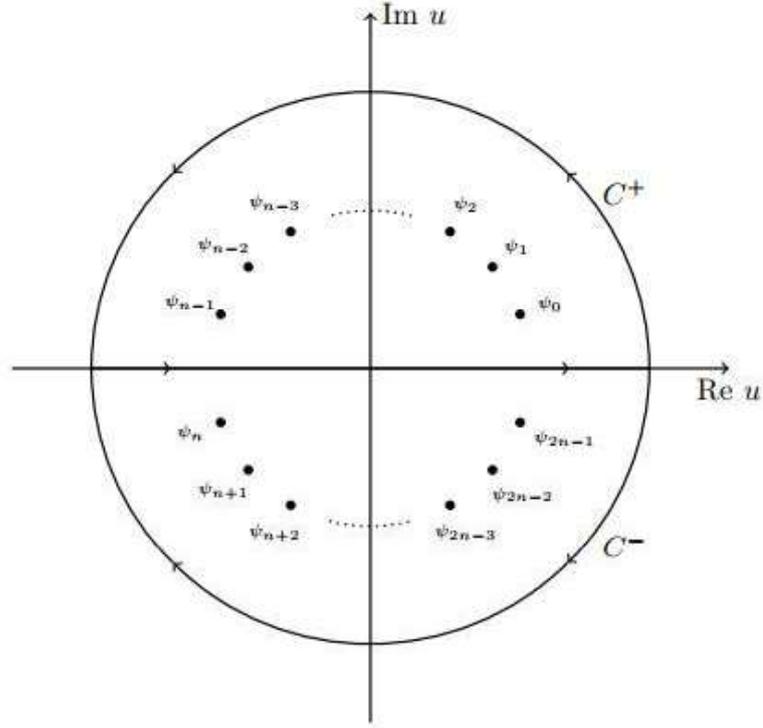


Figura 11 – Distribuição das  $2n$  raízes do polinômio  $\Psi_{n,q}$ . Figura retirada de [1].

Assim, usando o teorema do resíduo obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du'}{\prod_{q=0}^{2n-1} (u' - \Psi_{n,q})} e^{\frac{i\rho\tau u'}{2}} &= \int_{C^+} \frac{du'}{\prod_{q=0}^{2n-1} (u' - \Psi_{n,q})} e^{\frac{i\rho\tau u'}{2}} \\ &= 2i\pi \sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{\prod_{q \neq p} (\Psi_{n,q} - \Psi_{n,p})} e^{\frac{i\rho\tau \Psi_{n,q}}{2}}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

na qual  $C^+$  é a curva fechada na parte superior do plano complexo, como mostrado na figura 11. Substituindo o resultado anterior na equação (3.29), chega-se a:

$$\begin{aligned} \langle v_i^2 \rangle &= -\frac{i\tau^2 g^2 c_n^2}{8m^2} \Re \left\{ \sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{\prod_{q \neq p} (\Psi_{n,q} - \Psi_{n,p})} \times \right. \\ &\quad \left. \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\infty J_0(\rho|\mathbf{v}|) e^{\frac{i\rho\tau \Psi_{n,q}}{2}} d\rho \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{1 + (u)^{2n}} e^{\frac{-i\rho\tau u}{2}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1 + (u)^{2n}} e^{\frac{-i\rho\tau u}{2}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\prod_{r=0}^{2n-1} (u - \Psi_{n,r})} e^{\frac{-i\rho\tau u}{2}} \\ &= \int_{C^-} \frac{du}{\prod_{r=0}^{2n-1} (u - \Psi_{n,r})} e^{\frac{-i\rho\tau u}{2}} \\ &= -2i\pi \sum_{r=n}^{2n-1} \frac{1}{\prod_{r \neq s} (\Psi_{n,r} - \Psi_{n,s})} e^{\frac{-i\rho\tau \Psi_{n,r}}{2}}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Substituindo o resultado anterior na equação (3.31):

$$\langle v_i^2 \rangle = -\frac{\pi\tau^2 g^2 c_n^2}{4m^2} \Re \left\{ \sum_{r=n}^{2n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{\prod_{r \neq s} (\Psi_{n,r} - \Psi_{n,s})} \frac{1}{\prod_{q \neq p} (\Psi_{n,q} - \Psi_{n,p})} \times \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\infty J_0(\rho|\mathbf{v}|) e^{\frac{-i\rho\tau}{2}(\Psi_{n,r} - \Psi_{n,q})} d\rho \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} \right\}. \quad (3.33)$$

Note que:

$$\frac{1}{\prod_{a \neq b} (\Psi_{n,a} - \Psi_{n,b})} = -\frac{\Psi_{n,a}}{2n}. \quad (3.34)$$

Logo,

$$\langle v_i^2 \rangle = -\frac{\pi\tau^2 g^2 c_n^2}{16n^2 m^2} \Re \left\{ \sum_{r=n}^{2n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \Psi_{n,r} \Psi_{n,q} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\infty J_0(\rho|\mathbf{v}|) e^{\frac{-i\rho\tau}{2}(\Psi_{n,r} - \Psi_{n,q})} d\rho \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} \right\} \quad (3.35)$$

De acordo com a equação (6.611-1) dada em [14] temos que:

$$\int_0^\infty J_\nu(\beta x) e^{-\alpha x} dx = \frac{\beta^{-\nu} (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha)^\nu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad (3.36)$$

para  $\Re(\nu) > -1$  e  $\Re(\alpha \pm i\beta) > 0$ . Logo,

$$\int_0^\infty J_0(\rho|\mathbf{v}|) e^{\frac{-i\rho\tau}{2}(\Psi_{n,r} - \Psi_{n,q})} d\rho = \frac{1}{\sqrt{(\frac{i\tau}{2}(\Psi_{n,r} - \Psi_{n,q}))^2 + |\mathbf{v}|^2}}, \quad (3.37)$$

para  $\Re(\frac{i\tau}{2}(\Psi_{n,r} - \Psi_{n,q})) > 0$ .

Note que:

$$\begin{aligned} \frac{i\tau}{2}(\Psi_{n,r} - \Psi_{n,q}) &= \frac{i\tau}{2} \left( e^{\frac{i\pi}{2n}(1+2r)} - e^{\frac{i\pi}{2n}(1+2q)} \right) \\ &= \frac{i\tau}{2} \left( \cos \frac{\pi}{2n}(1+2r) + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n}(1+2r) - \cos \frac{\pi}{2n}(1+2q) - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n}(1+2q) \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Logo, para a equação (3.37) ser válida, é necessário que:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2n}(1+2q) - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n}(1+2r) > 0, \quad (3.39)$$

que é sempre verdade uma vez que  $0 \leq q \leq n-1$  e  $n \leq r \leq 2n-1$ .

Substituindo o resultado (3.37) na equação (3.35), obtem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \langle v_i^2 \rangle &= -\frac{\pi\tau^2 g^2 c_n^2}{16n^2 m^2} \Re \left\{ \sum_{r=n}^{2n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \Psi_{n,r} \Psi_{n,q} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{\sqrt{(\frac{i\tau}{2}(\Psi_{n,r} - \Psi_{n,q}))^2 + |\mathbf{v}|^2}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} \right\} \\ &= -\frac{\pi\tau^2 g^2 c_n^2}{16n^2 m^2} \Re \left\{ \sum_{r=n}^{2n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \Psi_{n,r} \Psi_{n,q} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 - (\frac{\tau}{2}(\Psi_{n,r} - \Psi_{n,q}))^2}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} \right\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Efetuando as derivadas e tomando o limite de coincidência dos pontos, chega-se às expressões finais:

$$\langle v_x^2 \rangle = -\frac{\pi g^2 c_n^2}{2\tau n^2 m^2} \Re \left\{ \sum_{r=n}^{2n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \Psi_{n,r} \Psi_{n,q} \left[ \frac{2\left(\frac{4x}{\tau}\right)^2 + (\Psi_{n,r} - \Psi_{n,q})^2}{\left(\left(\frac{4x}{\tau}\right)^2 - (\Psi_{n,r} - \Psi_{n,q})^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \right\}, \quad (3.41)$$

e

$$\langle v_y^2 \rangle = -\frac{\pi g^2 c_n^2}{2\tau n^2 m^2} \Re \left\{ \sum_{r=n}^{2n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \Psi_{n,r} \Psi_{n,q} \left[ \frac{1}{\left(\left(\frac{4x}{\tau}\right)^2 - (\Psi_{n,r} - \Psi_{n,q})^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \right\}. \quad (3.42)$$

Analisando os resultados anteriores, percebe-se que as divergências mostradas no caso *sudden switching* em  $(2 + 1)$  dimensões são mais uma vez regularizadas, como fica nítido nas figuras 12 e 13 para diferentes valores de  $n$ . Note também que há dispersão no regime  $\tau > 2x$  para a componente perpendicular da velocidade, o que não acontecia no caso anterior. Nas figuras 13 e 15, que mostram o comportamento da dispersão da componente da velocidade paralela à placa, é possível ver que essa quantidade possui valores negativos, similarmente ao caso *sudden switching* para essa mesma quantidade.

Tomando o limite de  $\tau$  tendendo a infinito tem-se:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle v_y^2 \rangle = 0 \quad (3.43)$$

e

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle v_x^2 \rangle = 0. \quad (3.44)$$

Os resultados anteriores mostram que não há efeito residual nas dispersões das velocidades paralela e perpendicular para  $\tau \rightarrow \infty$ , diferentemente do caso *sudden switching*, quando esse efeito residual aparecia na componente paralela da velocidade da partícula. Este comportamento é mostrado nas figuras 14 e 15 para diferentes valores de  $n$ .

Dessa forma, iremos introduzir no próximo tópico uma nova função *switching*, com o intuito de controlar diretamente o quão rápido a partícula passa de um regime a outro do sistema e, assim, estudar a influência da escolha da *switching* sobre o comportamento da partícula no regime em que  $\tau \rightarrow \infty$ . Esse controle será feito por meio do parâmetro  $\tau_s$ , incorporado à nova função de transição.

### 3.4.2 *Switching* $F_{\tau_s, \tau}^{\dagger}(t)$

Assim como foi feito na subseção 2.4.1, temos que a dispersão quadrática média da velocidade com a função *switching*  $F_{\tau_s, \tau}(t)$ , apresentada na equação (2.66), e com a expressão para o propagador de Hadamard renormalizado dado na equação (3.15) é dada

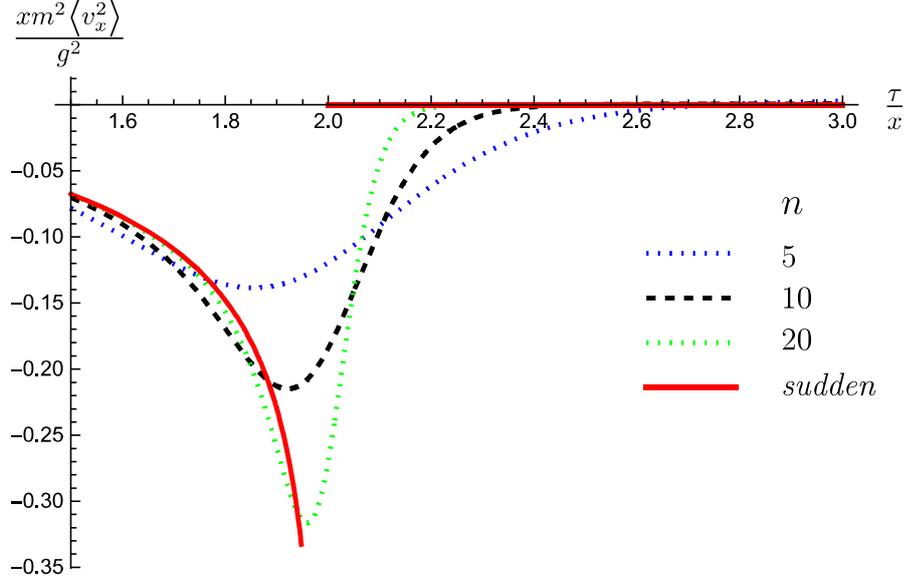


Figura 12 – Dispersão da componente perpendicular da velocidade da partícula em relação à placa, em função de  $\tau$ , para alguns valores de  $n$ , utilizando a função  $F_\tau^{(n)}(t)$ .

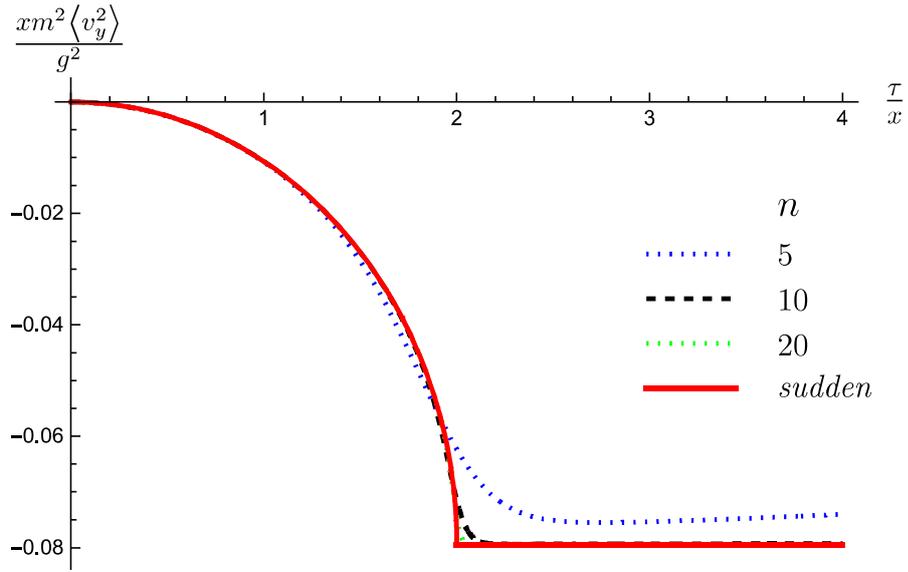


Figura 13 – Dispersão da componente paralela da velocidade da partícula em relação à placa, em função de  $\tau$ , para alguns valores de  $n$ , utilizando a função  $F_\tau^{(n)}(t)$ .

por:

$$\begin{aligned}
 \langle v_i^2 \rangle &= \frac{g^2}{2m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t') \left( -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos(\rho \Delta t) J_0(\rho |\mathbf{v}|) d\rho \right) dt' \right]_{x=x'} \\
 &= -\frac{g^2}{4\pi m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^{\infty} J_0(\rho |\mathbf{v}|) d\rho \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t') \Re(e^{-i\rho \Delta t}) dt' \right]_{x=x'} \\
 &= -\frac{g^2}{4\pi m^2} \Re \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^{\infty} J_0(\rho |\mathbf{v}|) d\rho \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) e^{-i\rho t} dt \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t') e^{i\rho t'} dt' \right]_{x=x'} .
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

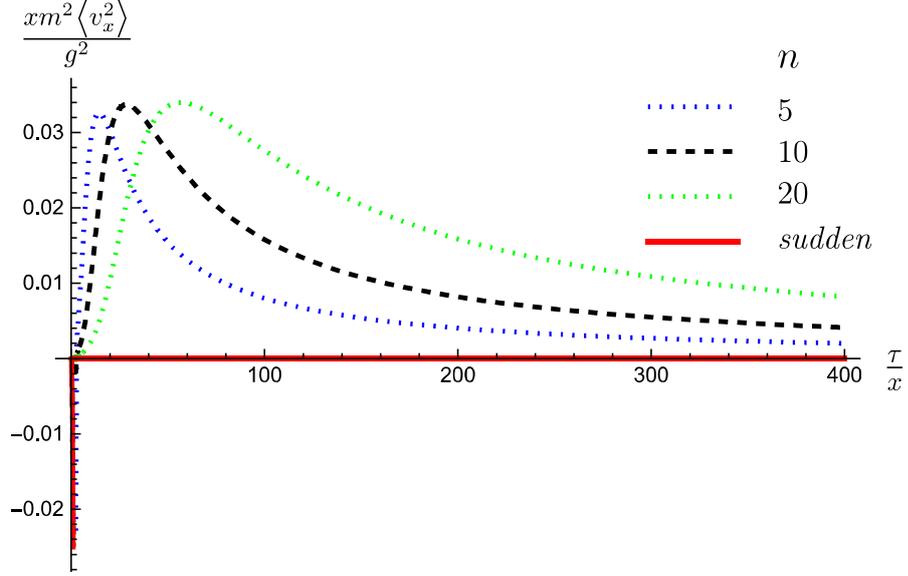


Figura 14 – Dispersão da componente perpendicular da velocidade da partícula em relação à placa, em função de  $\tau$ , para alguns valores de  $n$ , utilizando a função  $F_\tau^{(n)}(t)$ , no regime em que  $\tau$  tende a infinito.

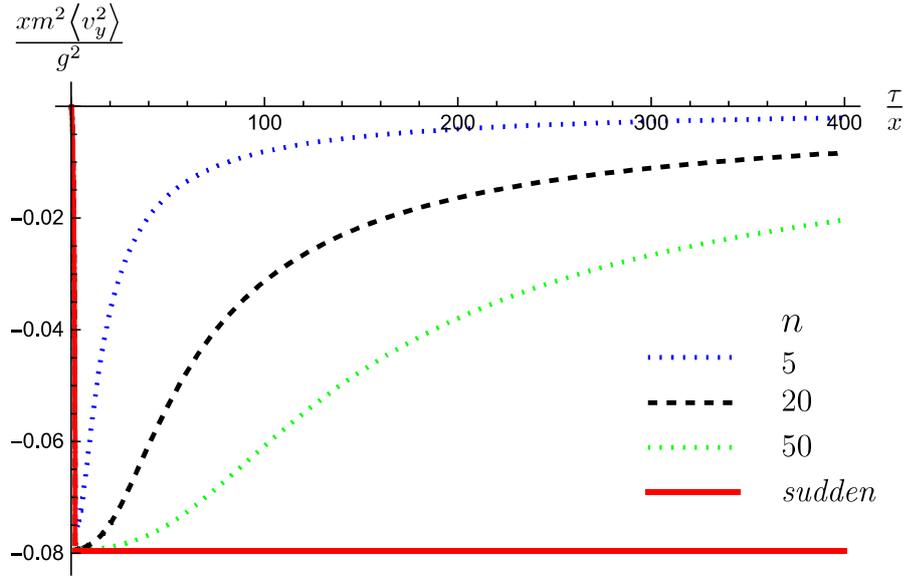


Figura 15 – Dispersão da componente paralela da velocidade da partícula em relação à placa, em função de  $\tau$ , para alguns valores de  $n$ , utilizando a função  $F_\tau^{(n)}(t)$ , no regime em que  $\tau$  tende a infinito.

Substituindo os valores encontrados nas equações (2.69) e (2.74) na expressão anterior chega-se a:

$$\begin{aligned} \langle v_i^2 \rangle &= -\frac{g^2}{4\pi m^2} \Re \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\infty J_0(\rho|\mathbf{v}|) \frac{ie^{-\rho\tau_s}}{\rho} (e^{-i\rho\tau} - 1) \frac{ie^{-\rho\tau_s}}{\rho} (1 - e^{i\rho\tau}) d\rho \right]_{x=x'} \quad (3.46) \\ &= \frac{g^2}{4\pi m^2} \Re \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_0^\infty J_0(\rho|\mathbf{v}|) \frac{e^{-2\rho\tau_s}}{\rho^2} (e^{-i\rho\tau} + e^{i\rho\tau} - 2) d\rho \right]_{x=x'}. \end{aligned}$$

Efetuada as derivadas, tomando o limite de coincidência dos pontos e especializando

para a componente  $x$ :

$$\begin{aligned} \langle v_x^2 \rangle &= -\frac{g^2}{8\pi m^2} \Re \int_0^\infty (J_0(2\rho x) - J_2(2\rho x)) e^{-2\rho\tau_s} (e^{-i\rho\tau} + e^{i\rho\tau} - 2) d\rho \\ &= -\frac{g^2}{8\pi m^2} \Re \left[ \int_0^\infty J_0(2\rho x) e^{-\rho(2\tau_s - i\tau)} d\rho + \int_0^\infty J_0(2\rho x) e^{-\rho(2\tau_s + i\tau)} d\rho - 2 \int_0^\infty J_0(2\rho x) e^{-2\rho\tau_s} d\rho \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty J_2(2\rho x) e^{-\rho(2\tau_s - i\tau)} d\rho - \int_0^\infty J_2(2\rho x) e^{-\rho(2\tau_s + i\tau)} d\rho + 2 \int_0^\infty J_2(2\rho x) e^{-2\rho\tau_s} d\rho \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Utilizando o resultado dado na equação (3.47), é possível reescrever a equação anterior como:

$$\begin{aligned} \langle v_x^2 \rangle &= -\frac{g^2}{8\pi m^2} \Re \left[ \frac{1}{\sqrt{4x^2 + (2\tau_s - i\tau)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4x^2 + (2\tau_s + i\tau)^2}} - \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 4\tau_s^2}} \right. \\ &\quad - \frac{(\sqrt{4x^2 + (2\tau_s - i\tau)^2} - (2\tau_s - i\tau))^2}{4x^2 \sqrt{4x^2 + (2\tau_s - i\tau)^2}} - \frac{(\sqrt{4x^2 + (2\tau_s + i\tau)^2} - (2\tau_s + i\tau))^2}{4x^2 \sqrt{4x^2 + (2\tau_s + i\tau)^2}} \\ &\quad \left. + \frac{2(\sqrt{4x^2 + 4\tau_s^2} - 2\tau_s)^2}{4x^2 \sqrt{4x^2 + 4\tau_s^2}} \right], \end{aligned} \quad (3.48)$$

ou ainda,

$$\langle v_x^2 \rangle = -\frac{g^2}{16\pi x^2 m^2} \Re \left[ \frac{4\tau_s^2}{\sqrt{x^2 + \tau_s^2}} - \frac{(2\tau_s - i\tau)^2}{\sqrt{4x^2 + (2\tau_s - i\tau)^2}} - \frac{(2\tau_s + i\tau)^2}{\sqrt{4x^2 + (2\tau_s + i\tau)^2}} \right]. \quad (3.49)$$

Similarmente para a componente  $y$ :

$$\begin{aligned} \langle v_y^2 \rangle &= \frac{g^2}{8x\pi m^2} \Re \int_0^\infty \frac{J_1(2\rho x)}{\rho} e^{-2\rho\tau_s} (e^{-i\rho\tau} + e^{i\rho\tau} - 2) d\rho \\ &= \frac{g^2}{8x\pi m^2} \Re \left[ \int_0^\infty \frac{J_1(2\rho x)}{\rho} e^{-\rho(2\tau_s - i\tau)} d\rho + \int_0^\infty \frac{J_1(2\rho x)}{\rho} e^{-\rho(2\tau_s + i\tau)} d\rho - 2 \int_0^\infty \frac{J_1(2\rho x)}{\rho} e^{-2\rho\tau_s} d\rho \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

De acordo com a equação (6.623-3) dada em [14] tem-se que:

$$\int_0^\infty J_\nu(x\beta) e^{-\alpha x} \frac{dx}{x} = \frac{(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha)^\nu}{\nu \beta^\nu}, \quad (3.51)$$

para  $\Re(\nu) > 0$  e  $\Re(\alpha) > |\Im(\beta)|$ . Utilizando o resultado anterior na equação (3.50), obtemos finalmente que:

$$\langle v_y^2 \rangle = -\frac{g^2}{16\pi x^2 m^2} \Re \left[ 4\sqrt{\tau_s^2 + x^2} - \sqrt{(2\tau_s - i\tau)^2 + 4x^2} - \sqrt{(2\tau_s + i\tau)^2 + 4x^2} \right]. \quad (3.52)$$

Percebe-se que, como no caso anterior, as singularidades apontadas no caso *sudden switching* são naturalmente regularizadas, como mostrado na figura 16. Nota-se também

que, a componente paralela da dispersão da velocidade da partícula à placa possui valores negativos durante todo o processo de medida, como nota-se nas figuras 17 e 19.

No limite em que  $\tau_s$  tende a zero, o caso *sudden switching* é retomado como segue:

$$\lim_{\tau_s \rightarrow 0} \langle v_y^2 \rangle = -\frac{g^2}{4x\pi m^2} \Re \left( 1 - \frac{\sqrt{4x^2 - \tau^2}}{2x} \right), \quad (3.53)$$

e

$$\lim_{\tau_s \rightarrow 0} \langle v_x^2 \rangle = -\frac{g^2}{8x^2\pi m^2} \Re \left( \frac{\tau^2}{\sqrt{4x^2 - \tau^2}} \right). \quad (3.54)$$

No limite em que  $\tau$  tende a infinito, obtemos:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle v_y^2 \rangle = -\frac{g^2 \sqrt{\tau_s^2 + x^2}}{4x^2\pi m^2}, \quad (3.55)$$

e

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle v_x^2 \rangle = -\frac{g^2}{4\pi x^2 m^2} \frac{\tau_s^2}{\sqrt{x^2 + \tau_s^2}}. \quad (3.56)$$

Esses comportamentos são estudados nas figuras 18 e 19, nas quais percebe-se que existe um efeito residual na dispersão do valor médio da velocidade para  $\tau$  grande, para diferentes valores de  $\tau_s/x$ . Perceba que se fizermos  $\tau_s \rightarrow 0$  nas equações (3.55) e (3.56) retomamos o caso *sudden switching* no limite em que  $\tau \rightarrow \infty$ .

Em resumo, vimos neste capítulo que as dispersões das componentes paralela e perpendicular da velocidade apresentam um comportamento geral anisotrópico, sendo predominantemente negativo para  $\tau < 3x$ . Além disso, os cálculos das dispersões com a *smooth switching*  $F_{\tau_s, \tau}(t)$  apresentam um efeito residual para  $\tau \rightarrow \infty$ , o que sugere que a consideração de um processo de transição com intervalo de tempo  $\tau_s$  finito influencia diretamente o comportamento dessa quantidade nesse limite. Por fim, os resultados das dispersões com a função  $F_{\tau}^{(n)}(t)$  apresentaram valores nulos no limite  $\tau \rightarrow \infty$ .

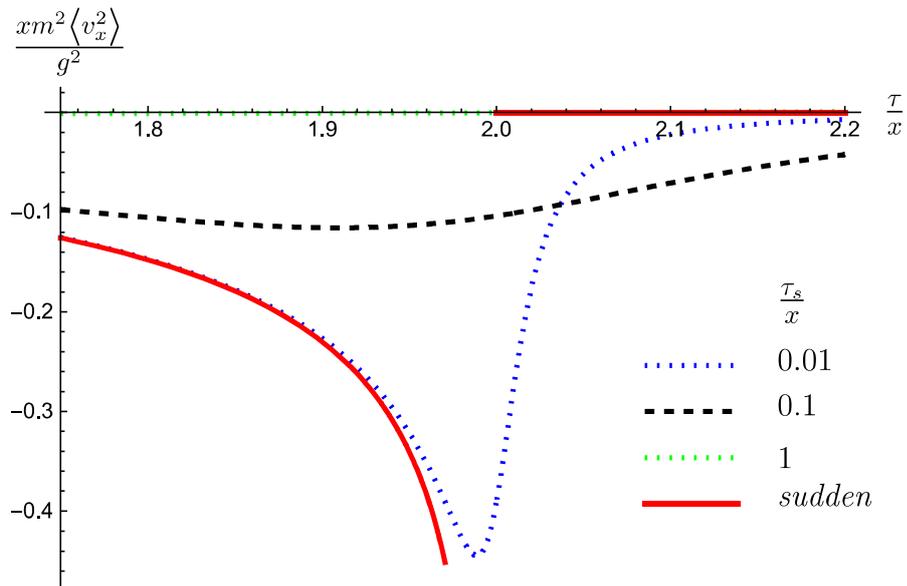


Figura 16 – Dispersão da componente perpendicular da velocidade da partícula em relação à placa, em função de  $\tau$ , para alguns valores de  $\tau_s$ , utilizando a função  $F_{\tau_s, \tau}(t)$ .

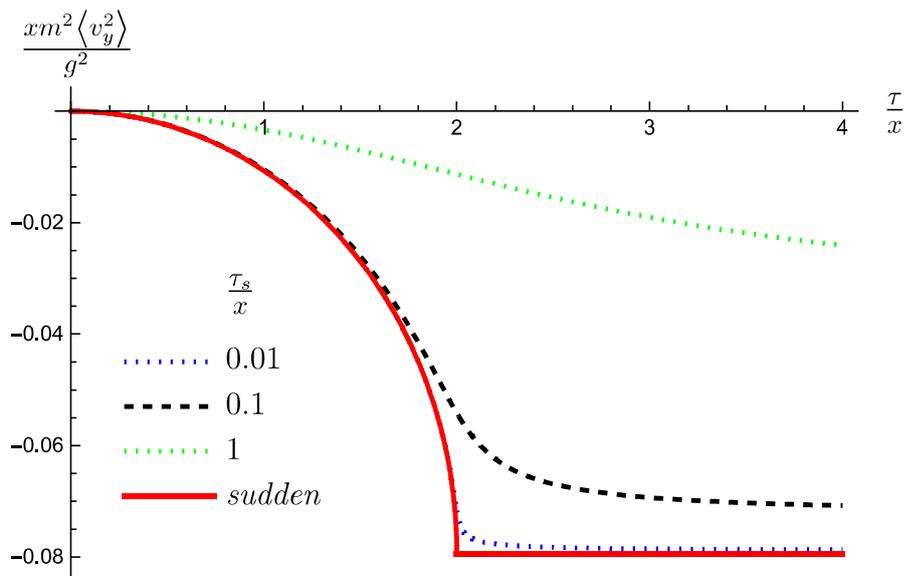


Figura 17 – Dispersão da componente paralela da velocidade da partícula em relação à placa, em função de  $\tau$ , para alguns valores de  $\tau_s$ , utilizando a função  $F_{\tau_s, \tau}(t)$ .

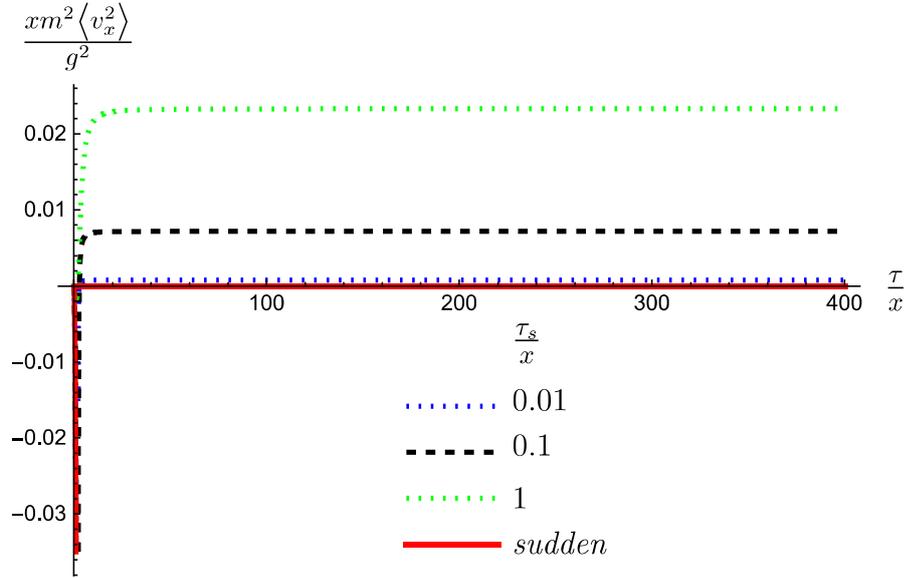


Figura 18 – Dispersão da componente perpendicular da velocidade da partícula em relação à placa, em função de  $\tau$ , para alguns valores de  $\tau_s$ , utilizando a função  $F_{\tau_s, \tau}(t)$ , no regime em que  $\tau$  tende a infinito.

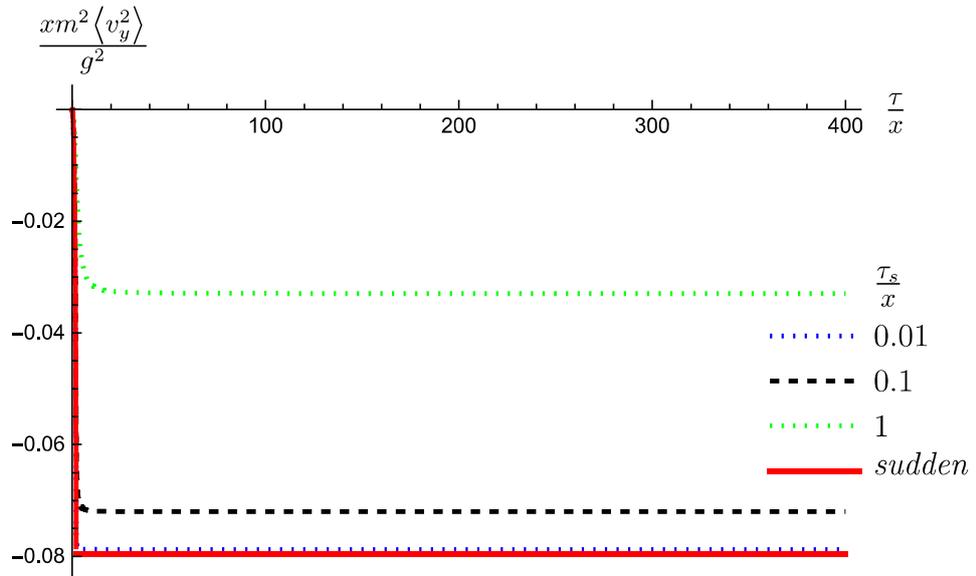


Figura 19 – Dispersão da componente paralela da velocidade da partícula em relação à placa, em função de  $\tau$ , para alguns valores de  $\tau_s$ , utilizando a função  $F_{\tau_s, \tau}(t)$ , no regime em que  $\tau$  tende a infinito.

## 4 Conclusão

Neste trabalho, investigamos os efeitos das flutuações quânticas do vácuo de um campo escalar sobre uma partícula teste próxima a uma fronteira. O sistema sob análise foi estudado em  $(1 + 1)$  e  $(2 + 1)$  dimensões e em um regime não relativístico. De fato, flutuações quânticas do vácuo no espaço livre de Minkowski não produzem efeitos observáveis em partículas, contudo, a introdução de uma ou mais fronteiras modifica o estado de vácuo do sistema e, conseqüentemente, induz uma dispersão no movimento da partícula.

Sendo assim, inicialmente, introduzimos uma fronteira perfeitamente refletora na posição  $x = 0$  em um campo escalar preparado no estado de vácuo e a condição de contorno de Dirichlet,  $\phi(t, 0) = 0$ , foi imposta. Uma renormalização com respeito ao vácuo de Minkowski foi implementada, ou seja, nós subtraímos o termo de contribuição devido ao vácuo de Minkowski da expressão do propagador de Hadamard encontrada. Em seguida, analisamos a dispersão quadrática média da velocidade em dois modelos diferentes.

No primeiro caso, tanto em  $(1 + 1)$  quanto  $(2 + 1)$  dimensões, adotamos um modelo simplificado, *sudden switching*, no qual o ato de colocar (retirar) a fronteira é instantâneo. Nesse caso, os resultados apresentaram alguns pontos de singularidade no comportamento da partícula, explicitamente, na posição da fronteira,  $x = 0$ , e para um tempo de medida  $\tau = 2x$ , exceto para a componente paralela da velocidade em  $(2 + 1)$  dimensões. Assim como nos casos reportados na literatura, acreditamos que essas singularidades aparecem devido à idealização do modelo adotado, no qual consideramos que a fronteira possui uma posição bem definida e que a partícula passa de um regime a outro do sistema, isso é, do vácuo livre de Minkowski ao vácuo modificado pela presença da fronteira e vice-versa, de instantânea.

Por conseguinte, introduzimos duas funções de transição,  $F_\tau^{(n)}(t)$  e  $F_{\tau, \tau_s}(t)$ , que ligam dois estágios do sistema, a partícula no vácuo livre de Minkowski e a partícula na presença da fronteira. Os resultados encontrados nesses dois casos, tanto no sistema em  $(1 + 1)$  dimensões quanto no sistema em  $(2 + 1)$  dimensões, mostraram que as divergências reportadas no caso *sudden switching* são naturalmente regularizadas, o que sugere que a escolha da função *switching* interfere de forma efetiva no comportamento da dispersão da velocidade da partícula.

Em  $(1 + 1)$  dimensões o cálculo da dispersão da velocidade com o modelo *sudden switching* mostrou que essa quantidade vai a infinito no limite de  $\tau \rightarrow \infty$ . Esse comportamento, bem como o reportado em [5, 6] para o cálculo da dispersão na posição, indica

que esse modelo idealizado não é muito adequado para se estudar esse problema nesse limite. Todavia, fora desse limite, esse modelo simples revela características interessantes do cálculo de dispersão da velocidade da partícula teste, pois os resultados apresentaram um comportamento similar ao caso  $(2+1)$  e  $(3+1)$  dessa mesma quantidade no regime de  $\tau$  pequeno. Nesse mesmo cenário, o cálculo da dispersão com a função *switching*  $F_\tau^{(n)}(t)$  apresentou um efeito residual para essa quantidade no limite de  $\tau \rightarrow \infty$ . Esse resultado sugere que a escolha da função *switching* influencia no comportamento da dispersão da velocidade da partícula naquele limite e, dessa forma, motivou o estudo do mesmo sistema com uma nova função *switching*,  $F_{\tau_s, \tau}(t)$ , na qual, por meio do parâmetro  $\tau_s$  controla-se diretamente o quão rápido o processo de medida é ligado/desligado. Por conseguinte, o cálculo da dispersão com a função  $F_{\tau_s, \tau}(t)$  mostrou que essa quantidade vai a infinito no limite de  $\tau \rightarrow \infty$ . Portanto, vê-se que enquanto o mecanismo com a função  $F_{\tau_s, \tau}(t)$  retoma o resultado do caso *sudden switching*, para todo valor de  $\tau_s$ , no limite de  $\tau \rightarrow \infty$ , o mecanismo com a função  $F_\tau^{(n)}(t)$  apresenta valores finitos nesse mesmo limite. Por fim, fazer o parâmetro  $\tau_s \rightarrow 0$  no caso  $F_{\tau_s, \tau}(t)$  equivale a introduzir/retirar a fronteira do sistema instantaneamente e, portanto, os resultados recuperaram o caso *sudden switching*.

Em  $(2+1)$  dimensões, o resultado para a componente da velocidade da partícula perpendicular à placa, no caso *sudden switching*, apresentou um comportamento completamente diferente dos modelos  $(1+1)$  e  $(3+1)$  dimensões [15] para  $\tau > 2x$ , visto que em  $(1+1)$  dimensões a dispersão dessa quantidade aumenta à medida que o tempo de interação cresce e, assim, vai a infinito para  $\tau \rightarrow \infty$ . Todavia, em  $(2+1)$  a dispersão da componente da velocidade perpendicular à placa é nula para todo  $\tau > 2x$ . Agora, em  $(3+1)$  dimensões [15], essa quantidade apresenta um valor finito e negativo para  $\tau \rightarrow \infty$ . A dispersão da componente paralela da velocidade da partícula em  $(2+1)$  dimensões exibiu um valor negativo e constante para todo  $\tau > 2x$ .

Para o caso *switching*  $F_\tau^{(n)}(t)$ , as dispersões de ambas as componentes da velocidade da partícula vão a zero no limite de  $\tau \rightarrow \infty$  em  $(2+1)$  dimensões. Todavia, enquanto a dispersão da componente perpendicular da velocidade possui valores positivos ou negativos dependendo do intervalo de medida, a dispersão da componente paralela conserva valores negativos até atingir seu valor nulo assintótico. Nesse mesmo cenário, com o caso *switching*  $F_{\tau_s, \tau}(t)$ , a dispersão das componentes paralela e perpendicular da velocidade da partícula à placa possuem um efeito residual no limite de  $\tau \rightarrow \infty$ .

De posse desses resultados, sugerimos que a escolha da função *switching* tem um papel de extrema relevância no cálculo da dispersão da velocidade de uma partícula teste em interação com as flutuações quânticas do vácuo de um campo escalar.

O presente trabalho levanta algumas questões que podem ser abordadas em estudos futuros. Por exemplo, outras condições de contorno podem ser impostas ao sistema, como as de Neuman ou Robin. Pode-se também abrir mão da restrição sobre a posição da

partícula, isto é, permitir que a posição varie livremente com o tempo. Por fim, efeitos de dissipação e temperatura finita podem também ser considerados.

# Referências

- 1 LORENCI, V. A. D.; RIBEIRO, C. C. H.; SILVA, M. M. Probing quantum vacuum fluctuations over a charged particle near a reflecting wall. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 94, p. 105017, Nov 2016.
- 2 LAMOREAUX, S. K. The Casimir force: background, experiments, and applications. *Reports on Progress in Physics*, v. 68, n. 1, p. 201, 2005.
- 3 LAMB, W. E.; RETHERFORD, R. C. Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 72, p. 241–243, Aug 1947.
- 4 YU, H.; FORD, L. H. Vacuum fluctuations and Brownian motion of a charged test particle near a reflecting boundary. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 70, p. 065009, Sep 2004.
- 5 SILVA, M. M. *Flutuações quânticas do vácuo na presença de uma fronteira e suas implicações sobre o comportamento de uma partícula teste nas suas proximidades*. [S.l.]: Dissertação de Mestrado, 2013.
- 6 LORENCI, V. A. D.; MOREIRA, E. S.; SILVA, M. M. Quantum Brownian motion near a point-like reflecting boundary. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 90, p. 027702, Jul 2014.
- 7 SERIU, M.; WU, C.-H. Switching effect on the quantum Brownian motion near a reflecting boundary. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 77, p. 022107, Feb 2008.
- 8 BESSA, C. H. G. et al. Quantum Brownian motion in an analog Friedmann-Robertson-Walker geometry. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 95, p. 085020, Apr 2017.
- 9 BIRREL, N. D.; DAVIES, P. C. W. *Quantum Fields in Curved Space*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1982.
- 10 BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1973.
- 11 ANDERSON, J. L. *Principles of Relativity Physics*. [S.l.]: Academic Press, 1967.
- 12 WEISSTEIN, E. W. *Lorentzian Function*. [S.l.]: <http://mathworld.wolfram.com/LorentzianFunction.html>, 2018.
- 13 LORENCI, V. A. D.; FORD, L. H. Classical enhancement of quantum vacuum fluctuations. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 95, p. 016004, Jan 2017.
- 14 GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products*. [S.l.]: Academic Press, 2007.
- 15 CAMARGO G. H.; DE LORENCI, V. A. et al. Vacuum fluctuations of a scalar field near a reflecting boundary and their influence on the motion of an interacting particle. arXiv:1709.10392, Sep 2017.