

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Órbitas Periódicas e Cones Invariantes
em Sistemas Lineares por Partes Contínuos em \mathbb{R}^3**

Liliane da Cunha Ferreira

Orientador: Denis de Carvalho Braga

Durante o desenvolvimento deste trabalho, a autora recebeu auxílio financeiro da
CAPES

ITAJUBÁ, 5 DE MARÇO DE 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Órbitas Periódicas e Cones Invariantes
em Sistemas Lineares por Partes Contínuos em \mathbb{R}^3**

Liliane da Cunha Ferreira

Orientador: Denis de Carvalho Braga

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

ITAJUBÁ – MG

5 DE MARÇO DE 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Órbitas Periódicas e Cones Invariantes
em Sistemas Lineares por Partes Contínuos em \mathbb{R}^3

Liliane da Cunha Ferreira

Dissertação aprovada por banca examinadora em 05 de março de 2018, conferindo à autora o título de Mestre em Ciências em Matemática

Banca Examinadora:

Prof.^a Dr.^a Luci Any Francisco Roberto, IBILCE – UNESP

Prof. Dr. Fabio Scalco Dias, UNIFEI

Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga (Orientador), UNIFEI

ITAJUBÁ – MG

5 DE MARÇO DE 2018

À minha mãe Nilce e ao meu pai Tarcizio (in memoriam).

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus por ser a minha força nos momentos de fraqueza e por mais esta conquista.

Agradeço a minha mãe Nilce que tanto acreditou em mim e nos meus estudos, pela força que sempre me dá e todos seus sacrifícios.

A minha família por todo apoio e confiança que depositaram em mim.

Ao meu orientador, professor Denis de Carvalho Braga, pela compreensão, paciência e conhecimento transmitido. Aos demais professores, pelos saberes ensinados durante toda minha vida acadêmica.

A todos meus amigos e colegas do curso, obrigada pela companhia nos estudos, pelas brincadeiras e pela amizade.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos professores participantes da Banca Examinadora, pela atenção dada ao trabalho e pelas sugestões e correções.

A todos que direta e indiretamente me ajudaram nessa conquista.

“Um dia quando olhares para trás, verás que os dias mais belos foram aqueles em que lutastes.”

Freud

Resumo

Apresentamos um estudo sobre a existência de cones invariantes em uma família de sistemas lineares por partes contínuos e não observáveis em \mathbb{R}^3 . Inicialmente, encontramos uma subfamília de tais sistemas que apresenta um único cone invariante folheado por órbitas periódicas. Depois disto, perturbamos os membros da subfamília, através de uma perturbação linear, tornando-os observáveis e não homogêneos e, então, estudamos as órbitas periódicas que persistem as quais estão associadas com os zeros de uma função integral.

Palavras-chave: Sistema linear por partes contínuo, Cone invariante, Órbita periódica.

Abstract

We present a study on the existence of invariant cones in a family of continuous and unobservable piecewise linear systems in \mathbb{R}^3 . First, we found a subfamily of such systems that has an unique invariant cone foliated by periodic orbits. After this, we perturb the members of this subfamily by means of a linear perturbation making them observable and non-homogeneous and then we study the periodic orbits that persist which are associated with the zeros of an integral function.

Keywords: Piecewise linear continuous system, Invariant cone, Periodic orbit.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Sumário	vi
Lista de Figuras	vii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Revisão Bibliográfica	2
1.3 Estrutura da Dissertação	3
2 Sistemas Lineares por Partes Contínuos em \mathbb{R}^n e Observabilidade	4
2.1 Conceitos Iniciais	4
2.2 Sistemas Lineares por Partes Contínuos em \mathbb{R}^n	8
2.3 Observabilidade	13
3 Sistemas Lineares por Partes Contínuos e não Observáveis em \mathbb{R}^3	38
3.1 Sistemas Lineares por Partes Contínuos em \mathbb{R}^3	38
3.2 Cones Invariantes em SLPC3 não Observáveis	41
3.3 Órbitas Periódicas para o Sistema Perturbado	58
Conclusões	74
Bibliografia	75

Lista de Figuras

3.1	Semiaplicações de Poincaré \mathcal{P}^- e \mathcal{P}^+ e a aplicação de Poincaré \mathcal{P} associada ao sistema (3.1) quando $b = 0$	41
3.2	Análise de estabilidade da origem restrita ao cone invariante.	51
3.3	Cone invariante de duas zonas, ilustrado pela cor azul, sendo a origem um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.	52
3.4	Com a linha azul ressaltamos uma órbita do cone invariante de duas zonas da Figura 3.3, a qual tende para a origem.	52
3.5	Cone invariante de duas zonas, ilustrado pela cor azul, sendo a origem um ponto de equilíbrio instável.	53
3.6	A linha azul representa uma órbita, se afastando da origem, no cone invariante de duas zonas da Figura 3.5.	54
3.7	Cone invariante de duas zonas, ilustrado pela cor azul, folheado por órbitas periódicas.	56
3.8	Órbitas periódicas, representadas na cor azul, no cone invariante de duas zonas da Figura 3.7.	57
3.9	Interpretação geométrica da mudança de variáveis (x_1, x_2, x_3) para (s, y, z)	60
3.10	Órbita periódica do sistema perturbado (3.17) ilustrada na cor azul. As órbitas representadas em vermelho possuem condições iniciais dadas por $x_0^1 = (1, -0.5, 0.5)$ e $x_0^2 = (7, 0.5, 14)$	73

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo abordamos a introdução desta dissertação. Na Seção 1.1, mostramos uma motivação para este estudo e nas próximas seções comentamos resumidamente das referências utilizadas e da estrutura deste trabalho.

1.1 Motivação

Esta dissertação está centrada no estudo de cones invariantes e órbitas periódicas em sistemas lineares por partes contínuos em \mathbb{R}^3 . Atualmente, tais sistemas possuem grande interesse, devido às suas aplicações como modelos de processos eletroeletrônicos, mecânicos e biológicos. Veja, por exemplo, [3] e outras referências lá citadas.

A existência de um sistema linear por partes contínuo e observável em \mathbb{R}^3 com um cone invariante folheado por órbitas periódicas foi provada em [5]. Mas, não foi possível caracterizar essa propriedade, ou seja, encontrar uma família específica de tais sistemas com um cone invariante folheado por órbitas periódicas. Logo, neste trabalho, consideramos o caso não observável e, explicitamente, obtemos uma subfamília de tais sistemas com um único cone invariante folheado por órbitas periódicas. Quando temos esta situação não genérica, é possível perguntar sobre o número e a posição das órbitas periódicas

que persistem após uma perturbação do sistema. Particularmente, utilizamos uma perturbação do tipo linear (ou afim) que torna os membros da subfamília observáveis e não homogêneos.

Para estudar as órbitas periódicas que persistem, podemos usar diversas técnicas, sendo uma delas a *Teoria da Média* [14]. De modo simples, a ideia principal dessa teoria é relacionar as órbitas periódicas do sistema perturbado com os pontos de equilíbrio de um sistema autônomo. Entretanto, neste trabalho, não empregamos tal técnica, mas escrevemos o sistema numa forma apropriada para usar as ideias do Capítulo 14 de [6], no qual perturbações não autônomas de sistemas lineares foram analisadas.

Tendo em conta o que foi dito anteriormente, o objetivo desta dissertação é encontrar uma subfamília de uma família de sistemas lineares por partes contínuos e não observáveis em \mathbb{R}^3 que possua um único cone invariante folheado por órbitas periódicas no retrato de fase e, em seguida, perturbar os membros da subfamília, através de uma perturbação linear, e analisar as órbitas periódicas que persistem, as quais estão associadas com os zeros de uma função integral.

1.2 Revisão Bibliográfica

O artigo [2] é a principal referência utilizada nesta dissertação. Em [7] e [11], encontram-se as definições e os resultados referentes aos sistemas de controle lineares autônomos citados no Capítulo 2, os quais foram utilizados para melhor compreender o conceito de observabilidade. Em nosso estudo, precisamos de algumas definições e resultados de Álgebra Linear e Teoria da Medida que poderão ser vistos em [8] e [9]. A definição da matriz de Householder e suas propriedades foram retiradas do livro [13]. Já o livro [15] apresenta o Lema do Complemento de Shur, sua demonstração e aplicações.

Os conceitos relacionados com a *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias* foram retirados de [12]. Utilizamos o software Wolfram Mathematica [10] na

realização de cálculos e nas construções de algumas figuras apresentadas nesta dissertação.

No artigo [3] estudamos os conceitos referidos aos sistemas observáveis e a forma canônica generalizada de Liénard abordados na Seção 2.3. As referências [1] e [4], que apresentam um estudo sobre bifurcações sela-nó de cones invariantes em sistemas lineares por partes contínuos e observáveis em \mathbb{R}^3 , e a referência [5], que trata da existência de um cone invariante folheado por órbitas periódicas nestes mesmos sistemas, foram mencionadas a título de informação.

A referência [14] foi citada apenas para exemplificar uma outra maneira de estudar as órbitas periódicas que persistem em um sistema perturbado e utilizamos as ideias do Capítulo 14 do livro [6] para analisar as órbitas periódicas que persistem, após uma perturbação linear do sistema linear por partes contínuo e não observável em \mathbb{R}^3 .

1.3 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está dividida em três capítulos. No Capítulo 1, apresentamos a ideia geral desta dissertação, destacamos resumidamente as referências utilizadas e a estrutura deste trabalho. Já no Capítulo 2, abordamos alguns conceitos essenciais para a leitura deste texto e estabelecemos algumas notações. Também, definimos os sistemas lineares por partes contínuos em \mathbb{R}^n , que serão estudados no Capítulo 3, no caso tridimensional, apresentamos o conceito de observabilidade e encontramos as formas canônicas para os casos em que estes sistemas são observáveis ou não observáveis.

No Capítulo 3, introduzimos a noção de cones invariantes em sistemas lineares por partes contínuos em \mathbb{R}^3 e analisamos a existência de um único cone invariante folheado por órbitas periódicas, no caso em que tais sistemas são não observáveis. Depois, perturbamos esses sistemas com uma perturbação linear, de forma a torná-los observáveis e não homogêneos, e focamos no estudo das órbitas periódicas que permanecem após a perturbação. Para finalizar, apresentamos as principais considerações desta dissertação em Conclusões.

Capítulo 2

Sistemas Lineares por Partes Contínuos em \mathbb{R}^n e Observabilidade

Neste capítulo, iniciamos com uma seção apresentando alguns conceitos fundamentais para a leitura desta dissertação e estabelecemos algumas notações. Na próxima seção, definimos os *Sistemas Lineares por Partes Contínuos em \mathbb{R}^n* . Na Seção 2.3, abordamos o conceito de observabilidade para sistemas de controle lineares autônomos, provamos alguns resultados e encontramos as formas canônicas para os casos em que esses sistemas são observáveis ou não observáveis.

2.1 Conceitos Iniciais

Nesta dissertação, denotaremos por $\mathbb{R}^{n,m}$ o espaço vetorial real das matrizes com n linhas e m colunas. A matriz identidade será denotada por E_n , uma matriz pertencente a $\mathbb{R}^{n,n}$, e a matriz nula será denotada por O , cujo número de linhas e colunas depende do contexto no qual ela está inserida. A inversa de uma matriz A e a transposta de uma matriz A , serão denotadas por A^{-1} e A^* , respectivamente. Adotaremos a notação $\text{Po}(A)$, $\text{Nuc}(A)$ e $\text{Im}(A)$ para representar o posto, o núcleo e a imagem de uma matriz A , respectivamente.

A base canônica do \mathbb{R}^n será representada por $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, sendo $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Além disto, em \mathbb{R}^n , adotaremos o produto interno usual definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

e a norma induzida por este produto interno,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

sendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

O espaço vetorial \mathbb{R}^n poderá ser identificado com o $\mathbb{R}^{n,1}$ e, na maioria dos casos, o leitor deve interpretar o contexto. Assim, observando o produto matricial, se $x, y \in \mathbb{R}^n$ forem identificados com elementos de $\mathbb{R}^{n,1}$, então $x^* \in \mathbb{R}^{1,n}$ e, ainda,

$$\langle x, y \rangle = x^* y \quad \text{e} \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x^* x.$$

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ é chamada simétrica, se $A = A^*$. O conjunto de todas as matrizes simétricas é parcialmente ordenado pela relação

$$A_1 \geq A_2 \text{ se, e somente se, } \langle x, A_1 x \rangle \geq \langle x, A_2 x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Neste sentido, as matrizes simétricas admitem a seguinte classificação.

Definição 2.1.1. *Uma matriz simétrica $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ é denominada:*

- a. Positiva definida, quando $\langle x, Sx \rangle > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- b. Positiva semidefinida, quando $\langle x, Sx \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$;
- c. Negativa definida, quando $-S$ for positiva definida;
- d. Negativa semidefinida, quando $-S$ for positiva semidefinida.

O próximo lema apresenta uma caracterização das matrizes positivas definidas.

Lema 2.1.1. *Uma matriz simétrica $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ é positiva definida se, e somente se, for positiva semidefinida e não singular.*

Demonstração. Veja a Seção *Operadores Autoadjuntos* em [8]. ■

A seguir introduzimos o conceito de matriz de Householder. Um estudo mais detalhado pode ser encontrado em [13].

Definição 2.1.2. *Seja $w \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário. Uma matriz H é chamada de matriz de Householder, se*

$$H = E_n - 2ww^*.$$

Os próximos dois resultados apresentam algumas propriedades das matrizes de Householder e serão empregados na demonstração da **Proposição 2.2.1**.

Proposição 2.1.1. *Se H é uma matriz de Householder, então H é simétrica e ortogonal.*

Demonstração. De fato, se $w \in \mathbb{R}^n$ é um vetor unitário, então

$$H^* = (E_n - 2ww^*)^* = E_n^* - (2ww^*)^* = E_n - 2(w^*)^*w^* = E_n - 2ww^* = H$$

e, como $H^* = H$,

$$\begin{aligned} HH^* &= (E_n - 2ww^*)^2 \\ &= E_n^2 - 4ww^* + 4(ww^*)(ww^*) \\ &= E_n - 4ww^* + 4w(w^*w)w^* \\ &= E_n - 4ww^* + 4w \langle w, w \rangle w^* \\ &= E_n - 4ww^* + 4ww^* \\ &= E_n, \end{aligned}$$

em razão de $\langle w, w \rangle = \|w\|^2 = 1$. Portanto, $H = H^* = H^{-1}$. ■

Teorema 2.1.1. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ vetores unitários distintos. Existe uma matriz de Householder H tal que $Hx = y$.*

Demonstração. Sabemos que, para qualquer vetor unitário $w \in \mathbb{R}^n$,

$$Hx = (E_n - 2ww^*)x = E_n x - 2ww^*x = x - 2w \langle x, w \rangle = x - 2 \langle x, w \rangle w.$$

Por hipótese $x \neq y$ e definindo

$$w = \frac{x - y}{\|x - y\|},$$

resulta que w é vetor unitário e, ainda,

$$\begin{aligned} Hx &= x - 2 \left\langle x, \frac{x - y}{\|x - y\|} \right\rangle \frac{x - y}{\|x - y\|} \\ &= x - 2 \langle x, x - y \rangle \frac{x - y}{\|x - y\|^2} \\ &= x - \frac{2(\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle)(x - y)}{\langle x - y, x - y \rangle} \\ &= x - \frac{2(\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle)(x - y)}{\langle x, x \rangle - 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle} \\ &= x - \frac{2(\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle)(x - y)}{2(\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle)} \\ &= x - (x - y) \\ &= y. \end{aligned}$$

Observe que usamos o fato de que $\|x\| = \|y\| = 1$. ■

Utilizaremos o próximo lema na demonstração do **Corolário 2.3.1**.

Lema 2.1.2 (Complemento de Schur). *Seja $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ uma matriz particionada por blocos da seguinte forma*

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right),$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{r,r}$ e $D \in \mathbb{R}^{p,p}$ de modo que $n = r + p$. Então, se A é não singular,

$$\det(M) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B)$$

e, se D é não singular,

$$\det(M) = \det(D) \det(A - BD^{-1}C).$$

Demonstração. Sugerimos a leitura de [15]. ■

2.2 Sistemas Lineares por Partes Contínuos em \mathbb{R}^n

Nesta seção, definimos os sistemas lineares por partes contínuos em \mathbb{R}^n que serão estudados no próximo capítulo no caso tridimensional.

Definição 2.2.1. *A equação diferencial ordinária autônoma*

$$x' = F(x),$$

com $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e x' denotando a derivada de x em relação ao parâmetro t , chamado aqui de tempo, define um sistema linear por partes contínuo em \mathbb{R}^n com duas zonas, se existem $b_1, b_2, v \in \mathbb{R}^n$, com $v \neq 0$, $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $\delta \in \mathbb{R}$ tais que o campo vetorial F é dado por

$$F(x) = \begin{cases} A_1x + b_1, & \langle x, v \rangle + \delta \leq 0, \\ A_2x + b_2, & \langle x, v \rangle + \delta > 0, \end{cases}$$

e se $\langle x, v \rangle + \delta = 0$,

$$A_1x + b_1 = A_2x + b_2.$$

O hiperplano $\langle x, v \rangle + \delta = 0$ é chamado de região de separação, o qual divide o espaço em duas regiões lineares.

Os sistemas lineares por partes contínuos em \mathbb{R}^n podem ser escritos em uma forma especial conforme a seguinte proposição.

Proposição 2.2.1. *Qualquer sistema linear por partes contínuo em \mathbb{R}^n com duas zonas pode ser escrito como*

$$x' = F(x) = \begin{cases} A^-x + b, & x_1 \leq 0, \\ A^+x + b, & x_1 > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

com $b \in \mathbb{R}^n$ e as matrizes $A^-, A^+ \in \mathbb{R}^{n,n}$ verificando a relação

$$(A^-)_{i,j} = (A^+)_{i,j}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

ou seja, as $n - 1$ últimas colunas das matrizes A^+ e A^- são iguais.

Demonstração. Seja $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $v/\|v\| \neq e_1$. Assim, pelo **Teorema 2.1.1**, existe uma matriz de Householder H tal que

$$H \frac{v}{\|v\|} = e_1,$$

ou, equivalentemente, $Hv = (\|v\|, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Fazendo a mudança de variáveis

$$y = H \left(x + \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right)$$

e usando o fato que $Hx = x - 2\langle x, w \rangle w$, para algum vetor unitário $w \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$y = \left(x + \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right) - 2w \left\langle x + \delta \frac{v}{\|v\|^2}, w \right\rangle$$

e, assim,

$$\begin{aligned} y' &= x' - 2w \langle x', w \rangle \\ &= F(x) - 2w \langle F(x), w \rangle \\ &= HF(x). \end{aligned}$$

Se $\langle x, v \rangle + \delta \leq 0$, então $\langle x, v \rangle \leq -\delta$. Visto que a matriz H é simétrica e ortogonal, pois é matriz de Householder, segue que

$$x = H(y) - \delta \frac{v}{\|v\|^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\delta &\geq \langle x, v \rangle \\ &= \left\langle H(y) - \delta \frac{v}{\|v\|^2}, v \right\rangle \\ &= \langle H(y), v \rangle - \frac{\delta}{\|v\|^2} \langle v, v \rangle \\ &= \langle H(y), v \rangle - \delta, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle H(y), v \rangle \\ &= \langle y, H(v) \rangle \\ &= \langle (y_1, y_2, \dots, y_n), (\|v\|, 0, \dots, 0) \rangle. \end{aligned}$$

Logo, $y_1 \|v\| \leq 0$, o que implica que $y_1 \leq 0$, pois $v \neq 0$, o que resulta em $\|v\| > 0$. Do mesmo modo, se $\langle x, v \rangle + \delta > 0$ obtemos $y_1 > 0$.

Considere, na **Definição 2.2.1**, $A = A_i$ e $b = b_i$, $i = 1, 2$. Assim, dos sistemas $y' = HF(x)$ e $x' = F(x)$, temos que

$$\begin{aligned}
 y' &= HF(x) \\
 &= H(Ax + b) \\
 &= (Ax + b) - 2w \langle Ax + b, w \rangle \\
 &= Ax + b - 2w \langle Ax, w \rangle - 2w \langle b, w \rangle \\
 &= HAx + Hb \\
 &= HA \left(Hy - \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right) + Hb \\
 &= HAHy + H \left(b - A\delta \frac{v}{\|v\|^2} \right).
 \end{aligned}$$

Então, obtemos o sistema

$$y' = \begin{cases} H A_1 H y + H \left(b_1 - A_1 \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right), & y_1 \leq 0, \\ H A_2 H y + H \left(b_2 - A_2 \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right), & y_1 > 0. \end{cases}$$

Como o campo vetorial é contínuo, as matrizes $H A_1 H$ e $H A_2 H$ têm as $n - 1$ últimas colunas iguais e

$$H \left(b_1 - A_1 \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right) = H \left(b_2 - A_2 \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right).$$

Portanto, definindo

$$A^- = H A_1 H, \quad A^+ = H A_2 H, \quad b = H \left(b_{1,2} - A_{1,2} \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right)$$

e chamando y de x concluímos a demonstração. ■

O próximo teorema mostra que todo problema de Cauchy envolvendo a equação diferencial (2.1) tem solução única.

Teorema 2.2.1. *Considere o sistema (2.1). O problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = F(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

com $x_0 \in \mathbb{R}^n$, possui solução única definida em \mathbb{R} .

Demonstração. De acordo com [12], basta mostrar que o campo vetorial F , tal como em (2.1), é uma função Lipschitziana em \mathbb{R}^n . Com efeito, tome $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $K = \max \{\|A^+\|, \|A^-\|\}$. Assim:

1. Se $x_1 > 0$ e $y_1 > 0$, então

$$\|F(x) - F(y)\| = \|A^+x - A^+y\| \leq \|A^+\| \|x - y\| \leq K \|x - y\|;$$

2. Se $x_1 \leq 0$ e $y_1 \leq 0$, então

$$\|F(x) - F(y)\| = \|A^-x - A^-y\| \leq \|A^-\| \|x - y\| \leq K \|x - y\|;$$

3. Se $x_1 < 0$ e $y_1 > 0$, tomamos

$$z = \frac{y_1}{y_1 - x_1}(x - y) + y.$$

Então, $z_1 = 0$ e, pela continuidade do campo vetorial F e como x , y e z são pontos colineares, temos que

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\| &= \|F(x) - F(z) + F(z) - F(y)\| \\ &\leq \|A^-x - A^-z\| + \|A^+z - A^+y\| \\ &\leq \|A^-\| \|x - z\| + \|A^+\| \|z - y\| \\ &\leq \max \{\|A^-\|, \|A^+\|\} (\|x - z\| + \|z - y\|) \\ &= K \|x - y\|. \end{aligned}$$

Os outros casos são análogos. Logo, F é globalmente Lipschitziana em \mathbb{R}^n e, desse modo, o problema de Cauchy (2.2) possui única solução. O sistema (2.1) é uma equação diferencial ordinária linear por partes com coeficientes constantes e, assim, a solução está definida em \mathbb{R} . ■

No caso em que $b = 0 \in \mathbb{R}^n$ em (2.1), obtemos o sistema homogêneo

$$x' = \begin{cases} A^-x, & x_1 \leq 0, \\ A^+x, & x_1 > 0, \end{cases}$$

o qual pode ser escrito na forma

$$x' = A^-x + B\eta(\langle e_1, x \rangle),$$

com $B = (A^+ - A^-)e_1$ e

$$\eta(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ u, & u \geq 0. \end{cases}$$

Realmente, se $x_1 \leq 0$, então $\eta(\langle e_1, x \rangle) = \eta(x_1) = 0$ e obtemos

$$x' = A^-x + B\eta(\langle e_1, x \rangle) = A^-x.$$

Porém, se $x_1 > 0$, então $\eta(\langle e_1, x \rangle) = \langle e_1, x \rangle$ e

$$x' = A^-x + (A^+ - A^-)e_1 \langle e_1, x \rangle = A^-x + (A^+ - A^-)e_1 e_1^* x = A^+x,$$

pois A^+ e A^- têm as $n - 1$ últimas colunas iguais, o que implica que $A^+ - A^- = (A^+ - A^-)e_1 e_1^*$, donde

$$e_1 e_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, podemos escrever o sistema (2.1) na forma

$$x' = A^-x + B\eta(\langle e_1, x \rangle) + b. \quad (2.3)$$

Quando $b = 0$, o sistema (2.3) é um caso particular de sistema de controle linear autônomo. Compreender a dinâmica de tais sistemas envolve entender os conceitos de controlabilidade e observabilidade. Este último conceito será discutido em detalhes na próxima seção.

2.3 Observabilidade

Nesta seção, apresentamos o conceito de observabilidade. Primeiramente, considere as seguintes definições e resultados.

Definição 2.3.1. *Um sistema de controle linear autônomo ou um sistema de controle linear invariante no tempo é um sistema da forma*

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (2.4)$$

sendo x' a derivada de x em relação ao parâmetro $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, chamado aqui de tempo, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada ou vetor de controle, $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ o vetor de saída ou vetor de observação, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p,n}$.

O sistema de controle linear autônomo (2.4) será denotado pela terna (A, B, C) . Os vetores de controle admissíveis são considerados como funções

$$u \in L_1([a, b], \mathbb{R}^m),$$

isto é, as funções pertencentes ao espaço vetorial de todas as classes de equivalência de funções $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lebesgue mensuráveis que diferem apenas em um conjunto de medida nula, tais que

$$\int_b^a \|v(t)\| dt < \infty.$$

Estes conceitos anteriores, bem como o conceito de função absolutamente contínua que aparece na próxima definição, podem ser encontrados em [9].

Definição 2.3.2. Uma solução em $[a, b]$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

com $t_0 \in [a, b]$ e $u \in L_1([a, b], \mathbb{R}^m)$ é uma função absolutamente contínua, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, que satisfaz a equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t Ax(s) + Bu(s) ds$$

ou, equivalentemente, satisfaz a equação diferencial em (2.5) em quase todo ponto e a condição inicial.

Considerando uma equação diferencial ordinária linear da forma

$$x' = Ax, \quad (2.6)$$

a matriz

$$\Phi_A(t, s) = \Psi(t)\Psi^{-1}(s), \quad (t, s) \in [a, b] \times [a, b]$$

é chamada matriz de transição, sendo $\Psi(t) = e^{tA}$, $t \in [a, b]$, a matriz fundamental de (2.6) satisfazendo $\Psi(0) = E_n$. As propriedades dessa matriz fundamental podem ser encontradas em [12].

A seguir enunciamos um teorema que fornece a solução analítica de (2.5).

Teorema 2.3.1. A solução única $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (2.5) é da forma

$$\varphi(t) = e^{tA}e^{-t_0A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds.$$

Demonstração. Sugerimos a leitura de [11]. ■

Considere o sistema de controle linear autônomo (2.4). Sejam $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, uma solução de (2.4) e $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ uma matriz não singular. Definindo a variável $z = Px$,

obtemos

$$\begin{aligned}
 z' &= Px' \\
 &= PAx + PBu \\
 &= PAP^{-1}z + PBu, \\
 y &= Cx \\
 &= CP^{-1}z.
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{cases} z' = \tilde{A}z + \tilde{B}u, \\ y = \tilde{C}z, \end{cases}$$

donde, $\tilde{A} = PAP^{-1}$, $\tilde{B} = PB$ e $\tilde{C} = CP^{-1}$.

Logo, podemos reescrever o sistema de controle linear autônomo (2.4) numa forma especial, conhecida como forma normal de Kalman.

Os sistemas de controle lineares autônomos homogêneos da forma

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ y = Cx, \end{cases}$$

serão denotados simplesmente pelo par (A, C) .

Definição 2.3.3. *Dois sistemas de controle lineares autônomos homogêneos (A, C) e (\tilde{A}, \tilde{C}) são ditos linearmente equivalentes se, e somente se, existir uma matriz não singular $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ tal que $\tilde{A} = PAP^{-1}$ e $\tilde{C} = CP^{-1}$.*

A relação introduzida na **Definição 2.3.3** é uma relação de equivalência. De fato, tal relação é:

a. Reflexiva O par (A, C) é linearmente equivalente ao par (A, C) . Basta tomar $P = E_n$, a identidade do $\mathbb{R}^{n,n}$;

b. Simétrica Se o par (A, C) é linearmente equivalente ao par (\tilde{A}, \tilde{C}) , então existe uma matriz não singular $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ tal que

$$\tilde{A} = PAP^{-1} \quad \text{e} \quad \tilde{C} = CP^{-1}.$$

Portanto,

$$A = P^{-1}\tilde{A}P \quad \text{e} \quad C = \tilde{C}P.$$

Tomando $R = P^{-1}$, temos que existe R não singular tal que

$$A = R\tilde{A}R^{-1} \quad \text{e} \quad C = \tilde{C}R^{-1}$$

e, portanto, o par (\tilde{A}, \tilde{C}) é linearmente equivalente ao par (A, C) ;

c. Transitiva Se o par (A, C) é linearmente equivalente ao par (\bar{A}, \bar{C}) e o par (\bar{A}, \bar{C}) é linearmente equivalente ao par (\tilde{A}, \tilde{C}) , existem matrizes não singulares $P, R \in \mathbb{R}^{n,n}$ tais que

$$\bar{A} = PAP^{-1} \quad \text{e} \quad \bar{C} = CP^{-1},$$

$$\tilde{A} = R\bar{A}R^{-1} \quad \text{e} \quad \tilde{C} = \bar{C}R^{-1}.$$

Assim,

$$\tilde{A} = R\bar{A}R^{-1} = RPAP^{-1}R^{-1},$$

$$\tilde{C} = \bar{C}R^{-1} = CP^{-1}R^{-1}.$$

Logo, existe uma matriz não singular $S = RP$ tal que

$$\tilde{A} = SAS^{-1},$$

$$\tilde{C} = CS^{-1}$$

e, portanto, o par (A, C) é linearmente equivalente ao par (\tilde{A}, \tilde{C}) .

Observe que para determinar o estado inicial x_0 de um sistema de controle linear (A, B, C) basta estudar os sistemas de controle lineares homogêneos, pois, temos que

$$x(t) = e^{tA}e^{-t_0A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{tA}e^{-sA}Bu(s) ds$$

e, portanto,

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{tA}e^{-t_0A}x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{tA}e^{-sA}Bu(s) ds,$$

ou seja,

$$y(t) = Ce^{tA}e^{-t_0A}x_0 + \bar{y}(t),$$

com

$$\bar{y}(t) = \int_{t_0}^t Ce^{tA}e^{-sA}Bu(s) ds.$$

Logo, conhecido o vetor de controle u , é possível que a função \bar{y} seja calculada a *priori*, independente de conhecermos ou não a condição inicial x_0 . Portanto, determinar x_0 a partir do par (y, u) é equivalente a determinar x_0 , por meio da diferença

$$y(t) - \bar{y}(t) = Ce^{tA}e^{-t_0A}x_0,$$

que é o vetor de saída do sistema linear homogêneo

$$x' = Ax.$$

Agora, estamos em condições de definir o conceito de observabilidade para sistemas de controle lineares autônomos.

Definição 2.3.4. Dizemos que o par (A, C) é observável em $[0, T]$, quando para toda função x de classe $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$, a condição

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ Cx = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

para todo $t \in [0, T]$, implicar em $x(0) = x_0 = 0$.

A matriz

$$W_T := \int_0^T e^{sA^*} C^* C e^{sA} ds,$$

chamada Gramiano de observabilidade, desempenha um papel importante no **Teorema 2.3.2**. Note que a matriz W_T é simétrica, pois

$$(e^{sA^*} C^* C e^{sA})^* = e^{sA^*} C^* C e^{sA}, \quad \forall s \in [0, T]$$

e é também positiva semidefinida, já que

$$\begin{aligned} \langle x, W_T x \rangle &= \left\langle x, \left(\int_0^T e^{sA^*} C^* C e^{sA} ds \right) x \right\rangle \\ &= \int_0^T \langle x, e^{sA^*} C^* C e^{sA} x \rangle ds \\ &= \int_0^T \langle C e^{sA} x, C e^{sA} x \rangle ds \\ &= \int_0^T \|C e^{sA} x\|^2 ds \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

O **Lema 2.1.1** será utilizado nas demonstrações dos teoremas seguintes.

Teorema 2.3.2. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a. *O par (A, C) é observável em $[0, T]$;*
- b. *A matriz W_T é positiva definida.*

Demonstração.

(a) \Rightarrow (b). Suponha que W_T não é positiva definida. Sabemos que W_T é simétrica e positiva semidefinida. Então, pelo **Lema 2.1.1**, existe $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\langle x_0, W_T x_0 \rangle = 0$. Agora, definindo a função x por $x(t) = e^{tA} x_0$, $t \in [0, T]$, temos que essa é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

De fato,

$$x'(t) = (e^{tA} x_0)' = A e^{tA} x_0 = Ax(t)$$

e, também, $x(0) = e^{0A}x_0 = x_0$.

Como

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \|Cx(s)\|^2 ds &= \int_0^T \|Ce^{sA}x_0\|^2 ds \\
 &= \int_0^T \langle Ce^{sA}x_0, Ce^{sA}x_0 \rangle ds \\
 &= \int_0^T \langle x_0, e^{sA*}C^*Ce^{sA}x_0 \rangle ds \\
 &= \left\langle x_0, \left(\int_0^T e^{sA*}C^*Ce^{sA} ds \right) x_0 \right\rangle \\
 &= \langle x_0, W_T x_0 \rangle = 0,
 \end{aligned}$$

segue que $Cx(t) = 0$, para todo $t \in [0, T]$, com $x_0 \neq 0$ e, portanto, o par (A, C) não é observável em $[0, T]$.

(b) \Rightarrow (a). Seja x uma função que satisfaz (2.7) para todo $t \in [0, T]$. Assim $x(t) = e^{tA}x_0$, $\forall t \in [0, T]$, $x(0) = x_0$ e

$$\langle x_0, W_T x_0 \rangle = \int_0^T \|Cx(s)\|^2 ds = 0.$$

Como W_T é positiva definida, temos que $x_0 = 0$. Portanto, o par (A, C) é observável. ■

A matriz

$$\mathcal{O} := \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

é chamada matriz de observabilidade.

Teorema 2.3.3. *Se (A, C) e (\tilde{A}, \tilde{C}) são sistemas de controle lineares autônomos homogêneos linearmente equivalentes, então $\text{Po}(\mathcal{O}) = \text{Po}(\tilde{\mathcal{O}})$, sendo*

$$\tilde{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Como o par (A, C) é linearmente equivalente ao par (\tilde{A}, \tilde{C}) , existe uma matriz não singular $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ tal que

$$\tilde{A} = PAP^{-1} \quad \text{e} \quad \tilde{C} = CP^{-1}.$$

Provaremos que

$$\tilde{C}\tilde{A}^k = CA^kP^{-1}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (2.8)$$

Para $k = 1$,

$$\tilde{C}\tilde{A} = CP^{-1}PAP^{-1} = CAP^{-1}.$$

Por indução, suponha que (2.8) vale para $k = j$, ou seja,

$$\tilde{C}\tilde{A}^j = CA^jP^{-1},$$

com $1 < j < n-1$. Logo, para $k = j+1$,

$$\begin{aligned} \tilde{C}\tilde{A}^{j+1} &= C\tilde{A}^j\tilde{A} \\ &= CA^jP^{-1}PAP^{-1} \\ &= CA^{j+1}P^{-1} \end{aligned}$$

e, então, fica provado (2.8). Assim,

$$\tilde{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CP^{-1} \\ CAP^{-1} \\ \vdots \\ CA^{n-1}P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1} = \mathcal{O}P^{-1}$$

e, portanto, $\text{Po}(\tilde{\mathcal{O}}) = \text{Po}(\mathcal{O}P^{-1}) = \text{Po}(\mathcal{O})$. ■

Teorema 2.3.4. *Seja (A, C) um sistema de controle linear autônomo homogêneo. As afirmações a seguir são equivalentes:*

- a. *O par (A, C) é observável em $[0, T]$ para todo $T > 0$;*
- b. *O par (A, C) é observável em $[0, T]$ para algum $T > 0$;*

c. A matriz W_T é não singular para algum $T > 0$;

d. A matriz W_T é não singular para todo $T > 0$;

e. $\text{Po}(\mathcal{O}) = n$;

f. $\bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k) = \{0\}$.

Demonstração.

(a) \Rightarrow (b). Nada a demonstrar.

(b) \Rightarrow (c). Se o par (A, C) é observável em $[0, T]$, para algum $T > 0$, então, pelo **Teorema 2.3.2**, vem que W_T é positiva definida para algum $T > 0$ e do **Lema 2.1.1** temos, portanto, que W_T é não singular para algum $T > 0$.

(c) \Rightarrow (d). Assuma que W_T é não singular para algum $T > 0$, escolhido conforme (c) e seja $\tilde{T} > 0$ arbitrário. Da identidade

$$\langle x_0, W_{\tilde{T}} x_0 \rangle = \int_0^{\tilde{T}} \|Cx(s)\|^2 ds,$$

vem que

$$\langle x_0, W_{\tilde{T}} x_0 \rangle = 0$$

o que implica em

$$a(t) := Ce^{tA}x_0 = 0, \quad \forall t \in [0, \tilde{T}].$$

Resulta, por indução, que

$$a^{(k)}(0) = CA^k e^{tA}x_0|_{t=0} = CA^k x_0 = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

A expressão anterior é válida para $k = 0$ e, supondo válida para $k = j$, ou seja,

$$a^{(j)}(0) = CA^j e^{tA}x_0|_{t=0} = CA^j x_0 = 0,$$

então, para $k = j + 1$,

$$a^{(j+1)}(0) = (a^{(j)})'(0) = (CA^j e^{tA}x_0)'|_{t=0} = CA^j A e^{tA}x_0|_{t=0} = CA^{j+1}x_0 = 0.$$

Logo, $CA^k s^k x_0 = 0$, para $k = 0, 1, \dots$ e $s \in [0, T]$. Dessa igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} \langle x_0, W_T x_0 \rangle &= \int_0^T \|C e^{sA} x_0\|^2 ds \\ &= \int_0^T \left\| C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k s^k \right) x_0 \right\|^2 ds \\ &= \int_0^T \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} CA^k s^k x_0 \right\|^2 ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como W_T é não singular e positiva semidefinida segue, do **Lema 2.1.1**, que W_T é positiva definida. Logo, $x_0 = 0$ e, assim, $\langle x_0, W_{\tilde{T}} x_0 \rangle = 0$ se, e somente se, $x_0 = 0$, o que implica que $W_{\tilde{T}}$ é não singular. Deste modo concluímos que W_T é não singular para todo $T > 0$.

(d) \Rightarrow (e). Suponha que W_T é não singular para todo $T > 0$ e, por contradição, que $\text{Po}(\mathcal{O}) < n$. Então, as colunas da matriz \mathcal{O} , $np \times n$, formam um conjunto linearmente dependente. Segue do *Teorema do Núcleo e da Imagem* (ver [8]), que

$$\dim \text{Nuc}(\mathcal{O}) + \dim \text{Im}(\mathcal{O}) = n$$

e, assim,

$$\dim \text{Nuc}(\mathcal{O}) + \text{Po}(\mathcal{O}) = n.$$

Então, $\dim \text{Nuc}(\mathcal{O}) \geq 1$, ou seja, existe $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\mathcal{O}x_0 = 0$, isto é,

$$CA^k x_0 = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Considere o polinômio característico da matriz A

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda E_n - A) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \lambda^k.$$

Do *Teorema de Cayley–Hamilton* (ver [8]), temos que

$$\begin{aligned} p_A(A) &= A^n + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k A^k \\ &= A^n + \delta_{n-1} A^{n-1} + \dots + \delta_2 A^2 + \delta_1 A + \delta_0 E = 0, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$A^n = -\delta_{n-1}A^{n-1} - \dots - \delta_2A^2 - \delta_1A - \delta_0E_n.$$

Assim,

$$CA^n x_0 = -\delta_{n-1}CA^{n-1}x_0 - \dots - \delta_2CA^2x_0 - \delta_1CAx_0 - \delta_0CE_n x_0 = 0.$$

Para $n + 1$, temos

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= (-\delta_{n-1}A^{n-1} - \dots - \delta_2A^2 - \delta_1A - \delta_0E_n)A \\ &= -\delta_{n-1}A^n - \dots - \delta_2A^3 - \delta_1A^2 - \delta_0A \end{aligned}$$

e, portanto,

$$CA^{n+1}x_0 = -\delta_{n-1}CA^n x_0 - \dots - \delta_2CA^3x_0 - \delta_1CA^2x_0 - \delta_0CAx_0 = 0.$$

Por indução, segue que $CA^k x_0 = 0$, para $k = 0, 1, \dots$ e, ainda,

$$A^n = \delta_{n-1,n}A^{n-1} + \dots + \delta_{2,n}A^2 + \delta_{1,n}A + \delta_{0,n}E_n,$$

sendo $\delta_{k,n} = -\delta_k$, para $k = 0, \dots, n - 1$. Desta forma obtemos

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= -\delta_{n-1}A^n - \dots - \delta_2A^3 - \delta_1A^2 - \delta_0A \\ &= -\delta_{n-1}(-\delta_{n-1}A^{n-1} - \dots - \delta_2A^2 - \delta_1A - \delta_0E_n) - \dots \\ &\quad -\delta_2A^3 - \delta_1A^2 - \delta_0A \\ &= (\delta_{n-1}^2 - \delta_{n-2})A^{n-1} + (\delta_{n-1}\delta_{n-2} - \delta_{n-3})A^{n-2} + \dots \\ &\quad + (\delta_{n-1}\delta_2 - \delta_1)A^2 + (\delta_{n-1}\delta_1 - \delta_0)A + (\delta_{n-1}\delta_0)E_n. \end{aligned}$$

Então,

$$A^{n+1} = \delta_{n-1,n+1}A^{n-1} + \dots + \delta_{2,n+1}A^2 + \delta_{1,n+1}A + \delta_{0,n+1}E_n,$$

com $\delta_{0,n+1} = \delta_{n-1}\delta_0$ e $\delta_{k,n+1} = \delta_{n-1}\delta_k - \delta_{k-1}$, para $k = 1, \dots, n - 1$.

Segue que

$$A^m = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k,m} A^k, \quad m \geq n.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j A^j + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j A^j + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k,j} A^k \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j A^j + \sum_{j=n}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j \delta_{k,j} A^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} t^k A^k + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \delta_{k,j} \right) A^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k!} t^k + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \delta_{k,j} \right) A^k. \end{aligned}$$

Logo,

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(t) A^k, \quad (2.9)$$

com

$$\delta_k(t) = \frac{1}{k!} t^k + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \delta_{k,j}$$

e, daí,

$$C e^{tA} x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(t) C A^k x_0 = 0.$$

Portanto,

$$\langle x_0, W_T x_0 \rangle = \int_0^T \|C e^{tA} x_0\|^2 dt = 0,$$

sendo $x_0 \neq 0$. Mas, como W_T é não singular e positiva semidefinida segue, do **Lema 2.1.1**, que W_T é positiva definida e temos, portanto, uma contradição.

(e) \Leftrightarrow (f). Se $x_0 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k)$ e $x_0 \neq 0$, obtemos que

$$C A^k x_0 = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Assim, $\text{Po}(\mathcal{O}) < n$ e, portanto, $(\mathbf{e}) \Rightarrow (\mathbf{f})$.

Por outro lado, se $\text{Po}(\mathcal{O}) < n$, então $CA^k x_0 = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, com $x_0 \neq 0$. Assim,

$$\bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k) \neq \{0\}$$

e, portanto, $(\mathbf{f}) \Rightarrow (\mathbf{e})$.

$(\mathbf{f}) \Rightarrow (\mathbf{a})$. Suponha que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e que $Ce^{tA}x_0 = 0$, $\forall t \in [0, T]$. Como verificado anteriormente concluimos que $CA^k x_0 = 0$, para $k = 0, 1, \dots$, mas, pela hipótese em (\mathbf{f}) , temos que $x_0 = 0$. Portanto, o par (A, C) é observável em $[0, T]$ para todo $T > 0$. ■

Conforme dito anteriormente, quando $b = 0$ no sistema (2.3), temos um caso particular de sistema de controle linear autônomo da forma

$$\begin{cases} x' = A^-x + Bu, \\ y = e_1^*x, \end{cases} \quad (2.10)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$, $A^- \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^n$, $u = \eta(\langle e_1, x \rangle) = \eta(y)$ o qual é chamado de realimentação estática de saída. Assim, se o sistema (2.10) é observável ou, equivalentemente, o sistema 2.1, a sua matriz de observabilidade

$$\mathcal{O} := \begin{pmatrix} e_1^* \\ e_1^*A^- \\ e_1^*(A^-)^2 \\ \vdots \\ e_1^*(A^-)^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

tem posto completo.

Teorema 2.3.5. *Se o sistema (2.1) é observável, existe uma mudança linear de variáveis que o transforma na forma canônica generalizada de Liénard*

$$y' = \begin{cases} M^-y + c, & y_1 \leq 0, \\ M^+y + c, & y_1 > 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

com

$$M^\pm = \begin{pmatrix} \delta_{n-1}^\pm & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_{n-2}^\pm & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_1^\pm & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \delta_0^\pm & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

sendo $\delta_0^\pm, \delta_1^\pm, \dots, \delta_{n-1}^\pm \in \mathbb{R}$ os coeficientes do polinômio característico de A^\pm e $c = (0, 0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Se o sistema (2.10) é observável, então a sua matriz de observabilidade

$$\mathcal{O} := \begin{pmatrix} e_1^* \\ e_1^* A^- \\ e_1^* (A^-)^2 \\ \vdots \\ e_1^* (A^-)^{n-1} \end{pmatrix},$$

tem posto completo, isto é, $\text{Po}(\mathcal{O}) = n$. Como o posto de uma matriz é preservado após uma mudança linear de variáveis, então

$$\begin{pmatrix} e_1^* (-A^-)^{n-1} \\ e_1^* (-A^-)^{n-2} \\ \vdots \\ e_1^* (-A^-) \\ e_1^* \end{pmatrix}$$

é não singular. Assim, existe um único vetor $z \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{pmatrix} e_1^* (-A^-)^{n-1} \\ e_1^* (-A^-)^{n-2} \\ \vdots \\ e_1^* (-A^-) \\ e_1^* \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Considerando a matriz não singular

$$P := ((-A^-)^{n-1}z | (-A^-)^{n-2}z | \cdots | -A^-z | z),$$

particionada por colunas, temos que

$$\begin{aligned} A^-P &= -(-A^-)P \\ &= (-(-A^-)^nz | -(-A^-)^{n-1}z | \cdots | -(-A^-)z). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Cayley–Hamilton, tomando

$$p_{A^-}(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \delta_{n-1}^- \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} \delta_{n-2}^- \lambda^{n-2} + \cdots + (-1) \delta_1^- \lambda + \delta_0^-,$$

o polinômio característico de A^- , temos que A^- satisfaz $p_{A^-}(A^-) = 0$ e, então,

$$-(-A^-)^nz = (\delta_{n-1}^-(-A^-)^{n-1} + \delta_{n-2}^-(-A^-)^{n-2} + \cdots + \delta_1^-(-A^-) + \delta_0^- E_n)z,$$

Assim, a matriz A^-P pode ser reescrita como

$$((-A^-)^{n-1}\delta_{n-1}^-z + (-A^-)^{n-2}\delta_{n-2}^-z + \cdots + (-A^-)\delta_1^-z + \delta_0^-z | -(-A^-)^{n-1}z | \cdots | -(-A^-)z),$$

a qual é equivalente ao produto

$$((-A^-)^{n-1}z | (-A^-)^{n-2}z | \cdots | -A^-z | z) \begin{pmatrix} \delta_{n-1}^- & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_{n-2}^- & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_1^- & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \delta_0^- & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, segue que $PM^- = A^-P$ e, portanto, $P^{-1}A^-P = M^-$.

Pela equação (2.13), temos que

$$e_1^*(-A^-)^{n-1}z = 1, \quad e_1^*(-A^-)^{n-j}z = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Logo,

$$e_1^*((-A^-)^{n-1}z | (-A^-)^{n-2}z | \cdots | -A^-z | z) = e_1^*,$$

ou seja,

$$e_1^*P = e_1^*. \quad (2.14)$$

Daí, escrevendo o sistema (2.1) como em (2.3), pois estes sistemas são equivalentes e fazendo a mudança de variável $X = P^{-1}x$, obtemos

$$\begin{aligned} X' &= P^{-1}x' \\ &= P^{-1}(A^-x + B\eta(\langle e_1, x \rangle) + b) \\ &= P^{-1}(A^-PX + B\eta(\langle e_1, x \rangle) + b) \\ &= P^{-1}A^-PX + P^{-1}B\eta(\langle e_1, x \rangle) + P^{-1}b \\ &= M^-X + \tilde{B}\eta(\langle e_1, x \rangle) + \tilde{c}, \end{aligned}$$

com $M^- = P^{-1}A^-P$, $\tilde{B} = P^{-1}B$ e $\tilde{c} = P^{-1}b = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Realizando a mudança

$$\begin{aligned} w &= X - E\tilde{c} \\ &= X - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

então

$$w = X - (0, c_1, \dots, c_{n-1}),$$

e

$$M^-E\tilde{c} = (-c_1, \dots, -c_{n-1}, 0).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
w' &= X' \\
&= M^-X + \tilde{B}\eta(\langle e_1, x \rangle) + \tilde{c} \\
&= M^-(w + E\tilde{c}) + \tilde{B}\eta(\langle e_1, PX \rangle) + \tilde{c} \\
&= M^-w + M^-E\tilde{c} + \tilde{B}\eta(\langle e_1, P(w + E\tilde{c}) \rangle) + \tilde{c} \\
&= M^-w + M^-E\tilde{c} + \tilde{B}\eta(\langle e_1, Pw + PE\tilde{c} \rangle) + \tilde{c} \\
&= M^-w + M^-E\tilde{c} + \tilde{B}\eta(\langle e_1, Pw \rangle) + \tilde{B}\eta(\langle e_1, PE\tilde{c} \rangle) + \tilde{c}.
\end{aligned}$$

Usando, a equação (2.14), temos que $\langle e_1, PE\tilde{c} \rangle = e_1^*PE\tilde{c} = e_1^*E\tilde{c} = \langle e_1, E\tilde{c} \rangle = 0$ e $\langle e_1, Pw \rangle = e_1^*Pw = e_1^*w = \langle e_1, w \rangle$.

Assim,

$$\begin{aligned}
w' &= X' \\
&= M^-w + \tilde{B}\eta(\langle e_1, w \rangle) + M^-E\tilde{c} + \tilde{c} \\
&= M^-w + \tilde{B}\eta(\langle e_1, w \rangle) + c,
\end{aligned}$$

com $c = (0, 0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, coincide com (2.12). ■

Teorema 2.3.6. *Se $\text{Po}(\mathcal{O}) = r < n$, com a matriz \mathcal{O} tal como em (2.11), então o par (A^\pm, e_1^*) é linearmente equivalente ao par*

$$\left(\left(\begin{array}{cc} \tilde{A}_{11}^\pm & O \\ \tilde{A}_{21}^\pm & \tilde{A}_{22}^\pm \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} e_{1r}^* & O \end{array} \right) \right),$$

com $\tilde{A}_{11}^\pm \in \mathbb{R}^{r,r}$, $\tilde{A}_{21}^\pm \in \mathbb{R}^{n-r,r}$, $\tilde{A}_{22}^\pm \in \mathbb{R}^{n-r,n-r}$ e $e_{1r} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^r$, o primeiro elemento da base canônica do \mathbb{R}^r . Além disto, o par $(\tilde{A}_{11}^-, e_{1r}^*)$ é observável e $\text{Po}(\mathcal{O}^r) = r$, sendo

$$\mathcal{O}^r = \begin{pmatrix} e_{1r}^* \\ e_{1r}^* \tilde{A}_{11}^- \\ \vdots \\ e_{1r}^* (\tilde{A}_{11}^-)^{r-1} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Como $\text{Po}(\mathcal{O}) = r < n$, existem r linhas da matriz \mathcal{O} (vistas como vetores) formando um conjunto linearmente independente. Sejam $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$, com $V_1 = e_1$, estas linhas. Assim, existem $n - r$ vetores do \mathbb{R}^n , $\{V_{r+1}, \dots, V_n\}$ tais que $\{e_1, \dots, V_r, V_{r+1}, \dots, V_n\}$ é uma base do \mathbb{R}^n .

Defina a matriz não singular, particionada por linhas,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{e_1^*}{V_2^*} \\ \vdots \\ \frac{V_r^*}{V_n^*} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}. \quad (2.15)$$

Observe que, existem escalares $\tilde{a}_{i,j}^-$, $i = 1, \dots, r$, não todos nulos, tais que

$$\begin{aligned} e_1^* A^- &= \tilde{a}_{1,1}^- e_1^* + \dots + \tilde{a}_{1,r}^- V_r^* + 0V_{r+1}^* + \dots + 0V_n^*, \\ V_2^* A^- &= \tilde{a}_{2,1}^- e_1^* + \dots + \tilde{a}_{2,r}^- V_r^* + 0V_{r+1}^* + \dots + 0V_n^*, \\ &\vdots \\ V_r^* A^- &= \tilde{a}_{r,1}^- e_1^* + \dots + \tilde{a}_{r,r}^- V_r^* + 0V_{r+1}^* + \dots + 0V_n^*, \end{aligned}$$

pois $\{e_1, V_2, \dots, V_r\}$ é um conjunto linearmente independente formado por r linhas da matriz de observabilidade \mathcal{O} e, ainda, se $V_i^* = e_1^*(A^-)^{n-1}$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, então $V_i^* A^- = e_1^*(A^-)^n$. Assim, pelo *Teorema de Cayley–Hamilton*,

$$(A^-)^n = -\delta_{n-1}^- (A^-)^{n-1} - \delta_{n-2}^- (A^-)^{n-2} - \dots - \delta_1^- (A^-) - \delta_0^- E_n,$$

e

$$e_1^*(A^-)^n = -\delta_{n-1}^- e_1^*(A^-)^{n-1} - \delta_{n-2}^- e_1^*(A^-)^{n-2} - \dots - \delta_1^- e_1^*(A^-) - e_1^* \delta_0^-,$$

que é uma combinação linear de V_i^* , para $i = 1, \dots, r$.

Como

$$\begin{aligned}
V_{r+1}^* A^- &= \tilde{a}_{r+1,1}^- e_1^* + \cdots + \tilde{a}_{r+1,r}^- V_r^* + \tilde{a}_{r+1,r+1}^- V_{r+1}^* + \cdots + \tilde{a}_{r+1,n}^- V_n^*, \\
V_{r+2}^* A^- &= \tilde{a}_{r+2,1}^- e_1^* + \cdots + \tilde{a}_{r+2,r}^- V_r^* + \tilde{a}_{r+2,r+1}^- V_{r+1}^* + \cdots + \tilde{a}_{r+2,n}^- V_n^*, \\
&\vdots \\
V_n^* A^- &= \tilde{a}_{n,1}^- e_1^* + \cdots + \tilde{a}_{n,r}^- V_r^* + \tilde{a}_{n,r+1}^- V_{r+1}^* + \cdots + \tilde{a}_{n,n}^- V_n^*,
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
PA^- &= \begin{pmatrix} \frac{e_1^* A^-}{V_2^* A^-} \\ \vdots \\ \frac{V_r^* A^-}{V_n^* A^-} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1}^- & \cdots & \tilde{a}_{1,r}^- & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{r,1}^- & \cdots & \tilde{a}_{r,r}^- & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{a}_{r+1,1}^- & \cdots & \tilde{a}_{r+1,r}^- & \tilde{a}_{r+1,r+1}^- & \cdots & \tilde{a}_{r+1,n}^- \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{n,1}^- & \cdots & \tilde{a}_{n,r}^- & \tilde{a}_{n,r+1}^- & \cdots & \tilde{a}_{n,n}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e_1^*}{V_2^*} \\ \vdots \\ \frac{V_r^*}{V_n^*} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^- & O \\ \tilde{A}_{21}^- & \tilde{A}_{22}^- \end{pmatrix} P,
\end{aligned}$$

sendo $\tilde{A}_{11}^- \in \mathbb{R}^{r,r}$, $O \in \mathbb{R}^{r,n-r}$, $\tilde{A}_{21}^- \in \mathbb{R}^{n-r,r}$ e $\tilde{A}_{22}^- \in \mathbb{R}^{n-r,n-r}$. Portanto,

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^- & O \\ \tilde{A}_{21}^- & \tilde{A}_{22}^- \end{pmatrix} = PA^- P^{-1}.$$

Como $e_1^* P = e_1^*$, então $e_1^* = e_1^* P P^{-1} = e_1^* P^{-1}$. Logo,

$$e_1^* P = \begin{pmatrix} e_{1r}^* & O \end{pmatrix} P = e_1^* = \begin{pmatrix} e_{1r}^* & O \end{pmatrix}.$$

Falta mostrar que $(\tilde{A}_{11}^-, e_{1r}^*)$ é observável e que $\text{Po}(\mathcal{O}^r) = r$. Para isto basta observar que

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} e_{1r}^* & O \\ e_{1r}^* \tilde{A}_{11}^- & O \\ e_{1r}^* (\tilde{A}_{11}^-)^2 & O \\ \vdots & \vdots \\ e_{1r}^* (\tilde{A}_{11}^-)^n & O \end{pmatrix} P.$$

Mas, $\text{Po}(\mathcal{O}) = r$ e, pelo *Teorema de Cayley–Hamilton*, para cada $j \geq r$, $(\tilde{A}_{11}^-)^j$ é combinação linear de $(\tilde{A}_{11}^-)^i$, com $i = 0, 1, \dots, r-1$. Assim, temos que $\text{Po}(\mathcal{O}^r) = r$ e, portanto, o par $(\tilde{A}_{11}^-, e_{1r}^*)$ é observável.

Fazendo a mudança de variável $z = Px$ no sistema (2.3), segue que

$$\begin{aligned} z' &= Px' \\ &= P(A^-x + B\eta(\langle e_1, x \rangle) + b) \\ &= PA^-P^{-1}z + PB\eta(\langle e_1, P^{-1}z \rangle) + Pb, \end{aligned}$$

Visto que $\langle e_1, P^{-1}z \rangle = e_1^*P^{-1}z = e_1^*z = \langle e_1, z \rangle$, segue que

$$z' = Px' = PA^-P^{-1}z + PB\eta(\langle e_1, z \rangle) + Pb,$$

com

$$PA^-P^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^- & O \\ \tilde{A}_{21}^- & \tilde{A}_{22}^- \end{pmatrix}, \quad PB = P(A^+ - A^-)e_1 = \tilde{B} \quad \text{e} \quad Pb = \tilde{b}.$$

■

As matrizes

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^- & O \\ \tilde{A}_{21}^- & \tilde{A}_{22}^- \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^+ & O \\ \tilde{A}_{21}^+ & \tilde{A}_{22}^+ \end{pmatrix}$$

serão denotadas, respectivamente, por \tilde{A}^- e \tilde{A}^+ ou, ainda, por \tilde{A}^\pm . Agora, observe que, como as matrizes A^+ e A^- compartilham $n - 1$ colunas, temos que

$$\begin{aligned}\tilde{A}^+ &= PA^+P^{-1} \\ &= PA^-P^{-1} + P(A^+ - A^-)e_1e_1^*P^{-1} \\ &= \tilde{A}^- + P(A^+ - A^-)e_1e_1^*,\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{A}^+ - \tilde{A}^- &= P(A^+ - A^-)e_1e_1^* \\ &= \begin{pmatrix} N_{11} & O \\ N_{21} & O \end{pmatrix},\end{aligned}$$

sendo

$$N_{11} = \begin{pmatrix} n_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n_{2,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{r-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n_{r,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r,r}, \quad N_{21} = \begin{pmatrix} n_{r+1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n_{r+2,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n_{n,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-r,r}.$$

Daí, resulta que as matrizes \tilde{A}_{11}^- e \tilde{A}_{11}^+ diferem apenas na primeira coluna e o mesmo vale para as matrizes \tilde{A}_{21}^- e \tilde{A}_{21}^+ .

Corolário 2.3.1. *Se $\text{Po}(\mathcal{O}) = r$, então:*

- a. *As matrizes \tilde{A}^+ e \tilde{A}^- compartilham $n - r$ autovalores;*
- b. *Existe uma matriz não singular $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ tal que*

$$\tilde{M}^\pm = Q\tilde{A}^\pm Q^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{M}_{11}^\pm & O \\ \tilde{M}_{21}^\pm & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix},$$

com

$$\tilde{M}_{11}^{\pm} = \begin{pmatrix} \delta_{r-1}^{\pm} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_{r-2}^{\pm} & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_1^{\pm} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \delta_0^{\pm} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r,r},$$

sendo $\delta_i^{\pm} \in \mathbb{R}$ os coeficientes do polinômio característico \tilde{A}_{11}^{\pm} , para $i = 0, 1, \dots, r-1$.

Demonstração. (a) O polinômio característico de \tilde{A}^{\pm} é o polinômio

$$p_{\tilde{A}^{\pm}}(\lambda) = \det(\tilde{A}^{\pm} - \lambda E_n).$$

Então, pelo **Lema 2.1.2**, se $\det(\tilde{A}_{11}^{\pm} - \lambda E_r) \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned} p_{\tilde{A}^{\pm}}(\lambda) &= \det \left(\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^{\pm} & O \\ \tilde{A}_{21}^{\pm} & \tilde{A}_{22}^{\pm} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^{\pm} - \lambda E_r & O \\ \tilde{A}_{21}^{\pm} & \tilde{A}_{22}^{\pm} - \lambda E_{n-r} \end{pmatrix} \\ &= \det(\tilde{A}_{11}^{\pm} - \lambda E_r) \det \left((\tilde{A}_{22}^{\pm} - \lambda E_{n-r}) - \tilde{A}_{21}^{\pm} (\tilde{A}_{11}^{\pm} - \lambda E_r)^{-1} O \right) \\ &= \det(\tilde{A}_{11}^{\pm} - \lambda E_r) \det(\tilde{A}_{22}^{\pm} - \lambda E_{n-r}). \end{aligned}$$

Assim, de

$$p_{\tilde{A}^{\pm}}(\lambda) = \det(\tilde{A}_{11}^{\pm} - \lambda E_r) \det(\tilde{A}_{22}^{\pm} - \lambda E_{n-r}) = 0,$$

segue que $\det(\tilde{A}_{22}^{\pm} - \lambda E_{n-r}) = 0$, com $\tilde{A}_{22}^{\pm} \in \mathbb{R}^{n-r, n-r}$. Portanto, as matrizes \tilde{A}^- e \tilde{A}^+ compartilham $n-r$ autovalores.

(b) Pelo **Teorema 2.3.6**, temos que o par $(\tilde{A}_{11}^-, e_{1r}^*)$ é observável. Então, existe uma mudança linear de variáveis que o transforma na forma canônica generalizada de Liénard, ou seja, existe uma matriz não singular

$$Q_r := (\tilde{V}_1 | \tilde{V}_2 | \cdots | \tilde{V}_{r-1} | \tilde{V}_r)$$

tal que

$$Q_r \tilde{A}_{11}^- Q_r^{-1} = \tilde{M}_{11}^-,$$

sendo

$$\tilde{M}_{11}^- = \begin{pmatrix} \delta_{r-1}^- & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_{r-2}^- & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_1^- & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \delta_0^- & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Considere, o sistema

$$\begin{cases} z' = \tilde{A}^- z + \tilde{B} \eta(\langle e_1, z \rangle), \\ y = e_1^* z, \end{cases}$$

com

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_r \\ \tilde{B}_{n-r} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}_r \in \mathbb{R}^{r,1} \text{ e } \tilde{B}_{n-r} \in \mathbb{R}^{n-r,1}.$$

Tome

$$z = \begin{pmatrix} w_r \\ w_{n-r} \end{pmatrix},$$

sendo $w_r = (z_1, z_2, \dots, z_r) \in \mathbb{R}^r$ e $w_{n-r} = (z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n-r}$. Então,

$$\begin{pmatrix} w_r' \\ w_{n-r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^- & O \\ \tilde{A}_{21}^- & \tilde{A}_{22}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_r \\ w_{n-r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_r \\ \tilde{B}_{n-r} \end{pmatrix} \eta(\langle e_1, z \rangle)$$

e

$$e_1^* z = \begin{pmatrix} e_{1r}^* & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_r \\ w_{n-r} \end{pmatrix} = e_{1r}^* w_r = \langle e_{1r}, w_r \rangle.$$

Assim, segue que

$$\begin{cases} w'_r = \tilde{A}_{11}^- w_r + \tilde{B}_r \eta(\langle e_{1r}, w_r \rangle), \\ w'_{n-r} = \tilde{A}_{21}^- w_r + \tilde{A}_{22} w_{n-r} + \tilde{B}_{n-r} \eta(\langle e_{1r}, w_r \rangle), \\ y = e_{1r}^* w_r. \end{cases}$$

Agora, defina uma matriz não singular $R = QP$, sendo

$$Q = \begin{pmatrix} Q_r & O \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix}$$

e P tal como em (2.15). Fazendo a mudança linear de variáveis $w = Rx$, temos que

$$\begin{aligned} w' &= Rx' \\ &= R(A^-x + B\eta(\langle e_1, x \rangle)) \\ &= RA^-R^{-1}w + RB\eta(\langle e_1, x \rangle) \\ &= QPA^-P^{-1}Q^{-1}w + QPB\eta(\langle e_1, x \rangle) \\ &= Q\tilde{A}^-Q^{-1}w + Q\tilde{B}\eta(\langle e_1, x \rangle). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} w' &= \begin{pmatrix} Q_r & O \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^- & O \\ \tilde{A}_{21}^- & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_r^{-1} & O \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} Q_r & O \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_r \\ \tilde{B}_{n-r} \end{pmatrix} \eta(\langle e_1, x \rangle) \\ &= \begin{pmatrix} Q_r \tilde{A}_{11}^- & O \\ \tilde{A}_{21}^- & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_r^{-1} & O \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} Q_r \tilde{B}_r \\ \tilde{B}_{n-r} \end{pmatrix} \eta(\langle e_1, x \rangle) \\ &= \begin{pmatrix} Q_r \tilde{A}_{11}^- Q_r^{-1} & O \\ \tilde{A}_{21}^- Q_r^{-1} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} Q_r \tilde{B}_r \\ \tilde{B}_{n-r} \end{pmatrix} \eta(\langle e_1, x \rangle) \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{M}_{11}^- & O \\ \tilde{M}_{21}^- & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} Q_r \tilde{B}_r \\ \tilde{B}_{n-r} \end{pmatrix} \eta(\langle e_1, x \rangle) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y &= e_1^* x = e_1^* R^{-1} w \\
&= e_1^* P^{-1} Q^{-1} w \\
&= (e_{1r}^* \quad O) \begin{pmatrix} Q_r^{-1} & O \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix} w \\
&= (e_{1r}^* Q_r^{-1} \quad O) w = (e_{1r}^* \quad O) w \\
&= e_1^* w.
\end{aligned}$$

Com isto,

$$\eta(\langle e_1, x \rangle) = \eta(\langle e_1, R^{-1} w \rangle) = \eta(\langle e_1, w \rangle),$$

pois $e_1^* x = e_1^* R^{-1} w$ e $e_1^* R^{-1} w = e_1^* w$.

■

Observe no **Corolário 2.3.1** que as matrizes \tilde{M}^+ e \tilde{M}^- compartilham $n - 1$ colunas, pois \tilde{A}^+ e \tilde{A}^- também compartilham.

Capítulo 3

Sistemas Lineares por Partes Contínuos e não Observáveis em \mathbb{R}^3

Iniciamos este capítulo introduzindo a noção de cones invariantes em sistemas lineares por partes contínuos em \mathbb{R}^3 . A parte restante é tratada da seguinte forma. Na Seção 3.2, realizamos uma mudança de variáveis para o caso em que estes sistemas são não observáveis, analisamos a existência de um único cone invariante folheado por órbitas periódicas e perturbamos esses sistemas através de uma perturbação linear. Na última seção, estudamos as órbitas periódicas do contínuo que permanecem após a perturbação linear.

3.1 Sistemas Lineares por Partes Contínuos em \mathbb{R}^3

Analisamos os *Sistemas Lineares por Partes Contínuos* em \mathbb{R}^3 (**SLPC3**), com duas zonas, dados por (2.1) para $n = 3$. Denotaremos tais sistemas por

$$x' = F(x) = A^\pm x + b, \tag{3.1}$$

sendo $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, x' representando a derivada de x com respeito ao parâmetro t , chamado aqui de tempo, $A^-, A^+ \in \mathbb{R}^{3,3}$, $b \in \mathbb{R}^3$ e F indicando o correspondente campo vetorial.

Estamos interessados no caso em que o campo vetorial F é contínuo e, então, pela **Proposição 2.2.1**, temos que as duas últimas colunas das matrizes A^+ e A^- são iguais, isto é, $A^+ - A^- = (A^+ - A^-)e_1e_1^*$, com $e_1 = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Pelo **Teorema 2.2.1**, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = F(x) = A^\pm x + b, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

com $x_0 \in \mathbb{R}^3$, têm uma única solução definida em \mathbb{R} .

Denominamos o plano de separação do sistema (3.1) por

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}$$

e, assim, todo ponto $x \in \Pi$ será identificado por (x_2, x_3) .

Quando for possível, definimos uma aplicação de Poincaré para o sistema (3.1) da seguinte forma. Para todo ponto $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$, a função $\varphi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi_p(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

representa a solução do sistema (3.1) com condição inicial $\varphi_p(0) = p$. A correspondente órbita será denotada por ζ_p .

Tome $p = (p_1, p_2, p_3) \in \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 0\}$. Temos que se $p_1 = 0$, ou seja, $p \in \Pi$ e $\langle e_1, A^+p + b \rangle > 0$, então a órbita ζ_p cruza o plano Π com $\varphi_1(t) > 0$ e $\varphi_1(-t) < 0$, para $t > 0$ suficientemente pequeno. Prosseguindo por ζ_p , se $\varphi_1(t) = 0$, para algum $t \in (0, \infty)$, então definimos τ_p^+ como menor tempo, tal que $\varphi_1(\tau_p^+) = 0$ e $\varphi_1(t) > 0$ em $(0, \tau_p^+)$. Diante disto, definimos a semiaplicação de Poincaré $\mathcal{P}^+ : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^-$, no ponto $(p_2, p_3) \in \Sigma^+$, por

$$\mathcal{P}^+(p_2, p_3) = (\varphi_2(\tau_p^+), \varphi_3(\tau_p^+)) \in \Pi,$$

cujos domínio é $\Sigma^+ = \{p \in \Pi : \langle e_1, A^+p + b \rangle > 0\}$. Note que semiaplicação de Poincaré \mathcal{P}^+ depende somente do fluxo do sistema linear $x' = A^+x + b$.

Analogamente, definimos a semiaplicação de Poincaré \mathcal{P}^- . Tomando $p = (p_1, p_2, p_3) \in \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0\}$, temos que se $p_1 = 0$, ou seja, $p \in \Pi$ e $\langle e_1, A^-p + b \rangle < 0$, então a órbita ζ_p atravessa o plano Π com $\varphi_1(t) < 0$ e $\varphi_1(-t) > 0$, para $t > 0$ suficientemente pequeno. Continuando por ζ_p , se $\varphi_1(t) = 0$ para algum $t \in (0, \infty)$, então definimos τ_p^- como menor tempo, tal que $\varphi_1(\tau_p^-) = 0$ e $\varphi_1(t) < 0$ em $(0, \tau_p^-)$. Assim, definimos a semiaplicação de Poincaré $\mathcal{P}^- : \Sigma^- \rightarrow \Sigma^+$, no ponto $(p_2, p_3) \in \Sigma^-$, por

$$\mathcal{P}^-(p_2, p_3) = (\varphi_2(\tau_p^-), \varphi_3(\tau_p^-)) \in \Pi,$$

cujo domínio é $\Sigma^- = \{p \in \Pi : \langle e_1, A^-p + b \rangle < 0\}$. Novamente, tal semiaplicação de Poincaré \mathcal{P}^- depende somente do fluxo do sistema linear $x' = A^-x + b$.

As semiaplicações de Poincaré \mathcal{P}^+ e \mathcal{P}^- estão bem definidas, porque o fluxo do sistema (3.1) só é tangente ao plano de separação quando é ortogonal ao vetor e_1 . Portanto, podemos definir a aplicação de Poincaré $\mathcal{P} : \Sigma^- \rightarrow \Sigma^-$ por $\mathcal{P}^+ \circ \mathcal{P}^-$ cujo domínio é $\Sigma^- = \{p \in \Pi : \langle e_1, A^-p + b \rangle < 0\}$.

Tendo em consideração que o campo vetorial F associado com o sistema (3.1), para $b = 0$, é homogêneo, isto é, $F(\xi x) = \xi F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$ e $\xi \geq 0$, pois

$$F(\xi x) = \begin{cases} A^-(\xi x), & x_1 \leq 0 \\ A^+(\xi x), & x_1 > 0 \end{cases} = \begin{cases} \xi(A^-x), & x_1 \leq 0 \\ \xi(A^+x), & x_1 > 0 \end{cases} = \xi F(x),$$

é fácil verificar que as aplicações \mathcal{P}^+ , \mathcal{P}^- e \mathcal{P} são também homogêneas. Demonstraremos para \mathcal{P}^+ dado que as outras provas são análogas.

Para $\xi = 0$ é imediato. Considere, então, $\xi > 0$ e $x \in \Pi$, com $\langle e_1, A^+x \rangle > 0$. Logo, $\xi x \in \Sigma^+$ e, em termos do fluxo do sistema $x' = A^+x$, existe um menor $\tau^+ > 0$ tal que $\mathcal{P}^+(\xi x) \in \Pi$. Assim, $\mathcal{P}^+(\xi x) = e^{\tau^+ A^+}(\xi x) = \xi e^{\tau^+ A^+}(x) = \xi \mathcal{P}^+(x)$.

Assim sendo, \mathcal{P}^+ , \mathcal{P}^- e \mathcal{P} transformam semirretas contidas no plano de separação e partindo da origem em semirretas contidas no plano de separação também partindo da origem. Logo, temos a seguinte definição.

Definição 3.1.1. Dizemos que o sistema (3.1), para $b = 0$, tem um cone invariante de duas zonas, se a aplicação de Poincaré \mathcal{P} possui semirreta invariante.

Veja na Figura 3.1, as representações das semiaplicações e da aplicação de Poincaré associada ao sistema (3.1) quando $b = 0$.

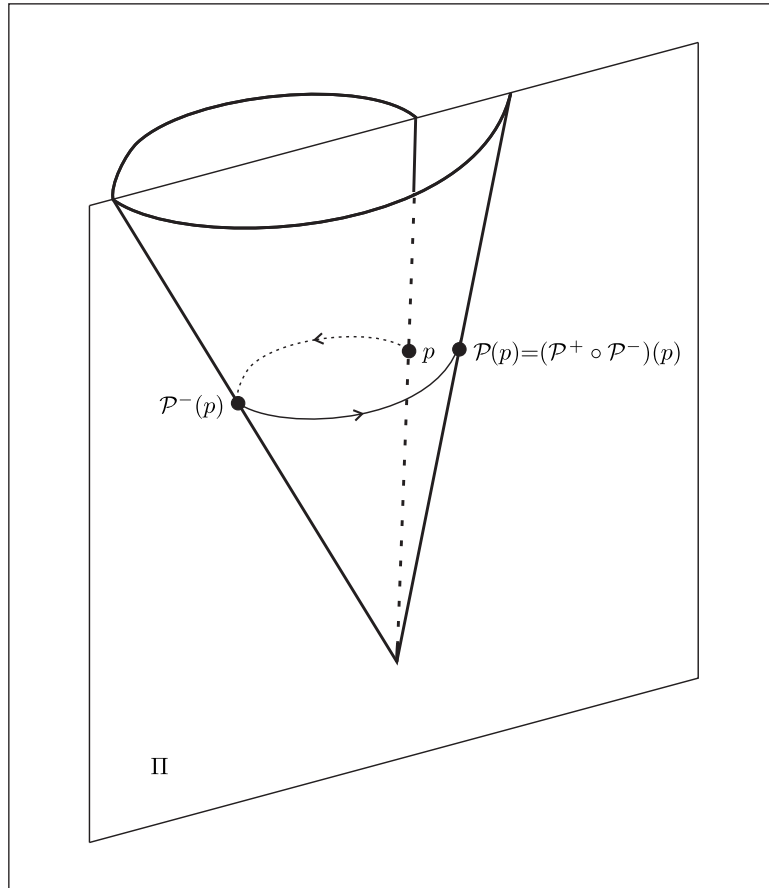


Figura 3.1: Semiaplicações de Poincaré \mathcal{P}^- e \mathcal{P}^+ e a aplicação de Poincaré \mathcal{P} associada ao sistema (3.1) quando $b = 0$.

3.2 Cones Invariantes em SLPC3 não Observáveis

Nesta seção, mostramos a existência de cones invariantes quando os sistemas lineares por partes contínuos em \mathbb{R}^3 são não observáveis. Antes disto, precisamos escrever o sistema (3.1) em uma forma canônica apropriada, conforme o seguinte resultado.

Proposição 3.2.1. *Se a matriz de observabilidade \mathcal{O} do sistema (3.1) é tal que $\text{Po}(\mathcal{O}) = 2$ e $b = 0$, então existe uma mudança linear de variáveis que transforma o sistema (3.1) na forma*

$$\begin{cases} x'_1 = c_{11}^\pm x_1 - x_2, \\ x'_2 = c_{21}^\pm x_1, \\ x'_3 = c_{31}^\pm x_1 + c_{33} x_3. \end{cases} \quad (3.2)$$

Demonstração. Como $b = 0$ e $\text{Po}(\mathcal{O}) = 2$, pelo **Teorema 2.3.6**, o sistema (3.1) pode ser escrito na forma

$$z' = \begin{cases} \tilde{A}^- z, & z_1 \leq 0, \\ \tilde{A}^+ z, & z_1 > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Já que as matrizes \tilde{A}^- e \tilde{A}^+ diferem apenas na primeira coluna, então

$$\tilde{A}^\pm = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}^\pm & \tilde{a}_{12} & 0 \\ \tilde{a}_{21}^\pm & \tilde{a}_{22} & 0 \\ \tilde{a}_{31}^\pm & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^\pm & O \\ \tilde{A}_{21}^\pm & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

Também, pelo **Teorema 2.3.6**, temos que $(\tilde{A}_{11}^-, e_{12}^*)$ é observável e do **Corolário 2.3.1** segue que existe uma matriz não singular Q tal que

$$\tilde{M}^\pm = Q\tilde{A}^\pm Q^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_{11}^\pm & -1 & 0 \\ \tilde{m}_{21}^\pm & 0 & 0 \\ \tilde{m}_{31}^\pm & \tilde{m}_{32} & \tilde{m}_{33} \end{pmatrix}.$$

Logo, o sistema (3.3) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} w'_1 = \tilde{m}_{11}^\pm w_1 - w_2, \\ w'_2 = \tilde{m}_{21}^\pm w_1, \\ w'_3 = \tilde{m}_{31}^\pm w_1 + \tilde{m}_{32} w_2 + \tilde{m}_{33} w_3. \end{cases} \quad (3.4)$$

Considere agora a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x_1 = w_1, \\ x_2 = w_2, \\ x_3 = \tilde{m}_{32}w_1 + w_3. \end{cases}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} x'_1 &= w'_1 = \tilde{m}_{11}^\pm w_1 - w_2 = \tilde{m}_{11}^\pm x_1 - x_2, \\ x'_2 &= w'_2 = \tilde{m}_{21}^\pm w_1 = \tilde{m}_{21}^\pm x_1, \\ x'_3 &= \tilde{m}_{32}w'_1 + w'_3 = \tilde{m}_{32}(\tilde{m}_{11}^\pm x_1 - x_2) + \tilde{m}_{31}^\pm x_1 + \tilde{m}_{32}x_2 + \tilde{m}_{33}w_3 \\ &= (\tilde{m}_{32}\tilde{m}_{11}^\pm + \tilde{m}_{31}^\pm) x_1 + \tilde{m}_{33}w_3 = (\tilde{m}_{32}\tilde{m}_{11}^\pm + \tilde{m}_{31}^\pm) x_1 + \tilde{m}_{33}(x_3 - \tilde{m}_{32}x_1) \\ &= (\tilde{m}_{32}\tilde{m}_{11}^\pm + \tilde{m}_{31}^\pm - \tilde{m}_{33}\tilde{m}_{32}) x_1 + \tilde{m}_{33}x_3. \end{aligned}$$

Assim, o sistema (3.4) é transformado em

$$\begin{cases} x'_1 = \tilde{m}_{11}^\pm x_1 - x_2, \\ x'_2 = \tilde{m}_{21}^\pm x_1, \\ x'_3 = (\tilde{m}_{32}\tilde{m}_{11}^\pm + \tilde{m}_{31}^\pm - \tilde{m}_{33}\tilde{m}_{32}) x_1 + \tilde{m}_{33}x_3. \end{cases}$$

Definindo os parâmetros $c_{11}^\pm = \tilde{m}_{11}^\pm$, $c_{21}^\pm = \tilde{m}_{21}^\pm$, $c_{31}^\pm = \tilde{m}_{32}\tilde{m}_{11}^\pm + \tilde{m}_{31}^\pm - \tilde{m}_{33}\tilde{m}_{32}$ e $c_{33} = \tilde{m}_{33}$, o resultado segue. ■

Na busca por cones invariantes, é necessário assumir a existência de autovalores complexos das matrizes A^\pm dos campos vetoriais definidos em ambas as zonas, pois, caso contrário, não seria possível definir a aplicação de Poincaré no plano de separação Π , já que assumimos aqui que $b = 0$. Neste sentido, estudamos o sistema (3.1) quando os autovalores das matrizes A^\pm são $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$ e λ , com α^\pm , β^\pm e λ números reais e $\beta^\pm > 0$. Assim,

empregando a **Proposição 3.2.1**, podemos escrever o sistema (3.2) na forma $x' = C^\pm x$ e expressar alguns coeficientes das matrizes

$$C^\pm = \begin{pmatrix} c_{11}^\pm & -1 & 0 \\ c_{21}^\pm & 0 & 0 \\ c_{31}^\pm & 0 & c_{33} \end{pmatrix},$$

em termos dos autovalores $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$ e λ . De fato, como o traço é a soma e o determinante é o produto dos autovalores, então $\text{Tr}(C^\pm) = 2\alpha^\pm + \lambda = c_{11}^\pm + c_{33}$ e o $\det(C^\pm) = \lambda((\alpha^\pm)^2 + (\beta^\pm)^2) = c_{33}c_{21}^\pm$. Daí, segue do **Lema 2.1.2** que $\lambda = c_{33}$ e, conseqüentemente, $c_{11}^\pm = 2\alpha^\pm$ e $c_{21}^\pm = (\alpha^\pm)^2 + (\beta^\pm)^2$.

Então, podemos escrever o sistema da **Proposição 3.2.1** na forma

$$\begin{cases} x'_1 = 2\alpha^\pm x_1 - x_2, \\ x'_2 = ((\alpha^\pm)^2 + (\beta^\pm)^2)x_1, \\ x'_3 = c_{31}^\pm x_1 + \lambda x_3. \end{cases} \quad (3.5)$$

Considere agora os seguintes parâmetros

$$\sigma^\pm = \frac{c_{31}^\pm}{(\alpha^\pm - \lambda)^2 + (\beta^\pm)^2}, \quad (3.6)$$

$$\gamma^\pm = \frac{\alpha^\pm - \lambda}{\beta^\pm}, \quad (3.7)$$

$$\omega = e^{-(\gamma^- + \gamma^+)\pi} - 1 \quad (3.8)$$

e

$$\mu = \sigma^- e^{-\gamma^+\pi} (e^{-\gamma^-\pi} + 1) - \sigma^+ (e^{-\gamma^+\pi} + 1), \quad (3.9)$$

que serão úteis no próximo teorema, o qual trata da existência de cones invariantes para o sistema (3.5).

Teorema 3.2.1. *Considere os parâmetros dados em (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9). Então, temos as seguintes propriedades:*

- a. *Se $\gamma^- + \gamma^+ \neq 0$, o sistema (3.5) possui um único cone invariante de duas zonas tal que $v_0^c := \mu/\omega$ fornece a inclinação da semirreta que está localizada no semiplano $\{x \in \Pi : x_2 > 0\}$, interseção do cone invariante com o plano de separação Π . Além disso, o cone invariante é atrator, quando $\gamma^- + \gamma^+ > 0$ e é repulsor, quando $\gamma^- + \gamma^+ < 0$;*
- b. *Se $\gamma^- + \gamma^+ = 0$ e*
1. *$\mu \neq 0$, o sistema (3.5) não possui nenhum cone invariante de duas zonas;*
 2. *$\mu = 0$, existe um contínuo de cones invariantes de duas zonas.*

Demonstração. Primeiro, encontraremos uma expressão explícita para a aplicação de Poincaré associada com o sistema (3.5).

Considere o problema de Cauchy associado à região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 0\}$ do sistema (3.5) com condição inicial no plano de separação Π

$$\begin{cases} x'_1 = 2\alpha^- x_1 - x_2, \\ x'_2 = ((\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2)x_1, \\ x'_3 = c_{31}^- x_1 + \lambda x_3, \\ x(0) = (0, a_0, b_0), \end{cases} \quad (3.10)$$

com $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 > 0$. A solução do problema de Cauchy (3.10) é φ , dada por

$$\varphi(t) = (\varphi_1^-(t), \varphi_2^-(t), \varphi_3^-(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

com

$$\begin{cases} \varphi_1^-(t) = -\frac{a_0}{\beta^-} e^{\alpha^- t} \operatorname{sen}(\beta^- t), \\ \varphi_2^-(t) = a_0 e^{\alpha^- t} \left(\cos(\beta^- t) - \frac{\alpha^-}{\beta^-} \operatorname{sen}(\beta^- t) \right), \\ \varphi_3^-(t) = b_0 e^{\lambda t} + a_0 \sigma^- \left(e^{\alpha^- t} (\cos(\beta^- t) - \gamma^- \operatorname{sen}(\beta^- t)) - e^{\lambda t} \right). \end{cases} \quad (3.11)$$

De fato, como sabemos, os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha^- & -1 & 0 \\ (\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2 & 0 & 0 \\ c_{31}^- & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

são $\alpha^- \pm i\beta^-$, com $\beta^\pm > 0$, e λ . Além disto, de (2.9), resulta que

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k = \delta_0(t)E_3 + \delta_1(t)A + \delta_2(t)A^2.$$

Daí, vem que

$$\begin{cases} e^{(\alpha^- + i\beta^-)t} = \delta_0(t) + (\alpha^- + i\beta^-)\delta_1(t) + (\alpha^- + i\beta^-)^2\delta_2(t), \\ e^{(\alpha^- - i\beta^-)t} = \delta_0(t) + (\alpha^- - i\beta^-)\delta_1(t) + (\alpha^- - i\beta^-)^2\delta_2(t), \\ e^{\lambda t} = \delta_0(t) + \lambda\delta_1(t) + \lambda^2\delta_2(t), \end{cases}$$

com

$$\begin{aligned} \delta_0(t) &= \frac{2\beta^-((\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2)e^{\lambda t} + (-i\alpha^- + \beta^-)\lambda(-\alpha^- - i\beta^- + \lambda)e^{(\alpha^- - i\beta^-)t}}{2\beta^-((\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2 - 2\alpha^- \lambda + \lambda^2)} + \\ &\quad \frac{(i\alpha^- + \beta^-)\lambda(-\alpha^- + i\beta^- + \lambda)e^{(\alpha^- + i\beta^-)t}}{2\beta^-((\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2 - 2\alpha^- \lambda + \lambda^2)}, \\ \delta_1(t) &= \frac{-4i\alpha^- \beta^- e^{\lambda t} + ((\alpha^-)^2 + 2i\alpha^- \beta^- - (\beta^-)^2 - \lambda^2)e^{(\alpha^- - i\beta^-)t}}{2\beta^-(\alpha^- + i\beta^- - \lambda)(i\alpha^- + \beta^- - i\lambda)} + \\ &\quad \frac{(-(\alpha^-)^2 + 2i\alpha^- \beta^- + (\beta^-)^2 + \lambda^2)e^{(\alpha^- + i\beta^-)t}}{2\beta^-(\alpha^- + i\beta^- - \lambda)(i\alpha^- + \beta^- - i\lambda)}, \end{aligned}$$

e

$$\delta_2(t) = -\frac{(i\alpha^- + \beta^- - i\lambda)e^{(\alpha^- + i\beta^-)t} + (-i\alpha^- + \beta^- + i\lambda)e^{(\alpha^- - i\beta^-)t} - 2\beta^- e^{\lambda t}}{2\beta^-((\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2 - 2\alpha^- \lambda + \lambda^2)}.$$

Assim, a exponencial da matriz A é dada por

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\alpha^- t}(\beta^- \cos(\beta^- t) + \alpha^- \operatorname{sen}(\beta^- t))}{\beta^-} & -\frac{e^{\alpha^- t} \operatorname{sen}(\beta^- t)}{\beta^-} & 0 \\ \frac{e^{\alpha^- t}((\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2) \operatorname{sen}(\beta^- t)}{\beta^-} & \frac{e^{\alpha^- t}(\beta^- \cos(\beta^- t) - \alpha^- \operatorname{sen}(\beta^- t))}{\beta^-} & 0 \\ E_{31}(t) & E_{32}(t) & e^{\lambda t} \end{pmatrix},$$

sendo

$$E_{31}(t) = \frac{c_{31}(\beta^- \lambda e^{\lambda t} - \beta^- \lambda e^{\alpha^- t} \cos(\beta^- t) + ((\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2 - \alpha^- \lambda) e^{\alpha^- t} \text{sen}(\beta^- t))}{\beta^- ((\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2 - 2\alpha^- \lambda + \lambda^2)}$$

e

$$E_{32}(t) = \frac{c_{31}(\beta^- e^{\alpha^- t} \cos(\beta^- t) - (\alpha^- - \lambda) e^{\alpha^- t} \text{sen}(\beta^- t) - \beta^- e^{\lambda t})}{\beta^- ((\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2 - 2\alpha^- \lambda + \lambda^2)}.$$

De (3.6) e (3.7), temos que

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\alpha^- t}(\beta^- \cos(\beta^- t) + \alpha^- \text{sen}(\beta^- t))}{\beta^-} & -\frac{e^{\alpha^- t} \text{sen}(\beta^- t)}{\beta^-} & 0 \\ \frac{e^{\alpha^- t}((\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2) \text{sen}(\beta^- t)}{\beta^-} & \frac{e^{\alpha^- t}(\beta^- \cos(\beta^- t) - \alpha^- \text{sen}(\beta^- t))}{\beta^-} & 0 \\ E_{31}(t) & E_{32}(t) & e^{\lambda t} \end{pmatrix},$$

sendo

$$E_{31}(t) = \frac{\sigma^- (\beta^- \lambda e^{\lambda t} - \beta^- \lambda e^{\alpha^- t} \cos(\beta^- t) + ((\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2 - \alpha^- \lambda) e^{\alpha^- t} \text{sen}(\beta^- t))}{\beta^-}$$

e

$$E_{32}(t) = \sigma^- (e^{\alpha^- t} \cos(\beta^- t) - \gamma^- e^{\alpha^- t} \text{sen}(\beta^- t) - e^{\lambda t})$$

e, a partir daí, obtemos a solução única de (3.10) empregando a condição inicial.

Para calcular a aplicação de Poincaré, tome um ponto (y_2, y_3) no plano de separação com $y_2 > 0$. Então, empregando o fluxo do sistema (3.5), restrito à região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 0\}$, o próximo ponto de interseção com o plano de separação será a imagem da semiaplicação de Poincaré \mathcal{P}^- . Resolvendo a equação $\varphi_1^-(t) = 0$, com a função $\varphi_1^- = \varphi_1^-(t)$ dada em (3.11), temos que

$$\varphi_1^-(t) = -\frac{a_0}{\beta^-} e^{\alpha^- t} \text{sen}(\beta^- t) = 0$$

quando $t = \pi/\beta^-$. Assim, o próximo ponto de interseção com o plano de separação ocorre quando $t = \pi/\beta^-$. Portanto, a imagem da semiaplicação de Poincaré \mathcal{P}^- aplicada no ponto (y_2, y_3) , para $t = \pi/\beta^-$, é dada por

$$\mathcal{P}^-(y_2, y_3) = \left(-y_2 e^{\frac{\alpha^- \pi}{\beta^-}}, y_3 e^{\frac{\lambda \pi}{\beta^-}} - \sigma^- y_2 \left(e^{\frac{\lambda \pi}{\beta^-}} + e^{\frac{\alpha^- \pi}{\beta^-}} \right) \right).$$

Fazendo uma análise semelhante para a região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$, podemos definir a semiaplicação de Poincaré \mathcal{P}^+ do sistema (3.5). Logo, para um ponto (z_2, z_3) com $z_2 < 0$, a semiaplicação \mathcal{P}^+ é dada por

$$\mathcal{P}^+(z_2, z_3) = \left(-z_2 e^{\frac{\alpha^+}{\beta^+} \pi}, z_3 e^{\frac{\lambda}{\beta^+} \pi} - \sigma^+ z_2 \left(e^{\frac{\lambda}{\beta^+} \pi} + e^{\frac{\alpha^+}{\beta^+} \pi} \right) \right).$$

Então, para um ponto (a_0, b_0) , com $a_0 > 0$, definimos a aplicação de Poincaré como a composição das semiaplicações de Poincaré \mathcal{P}^+ e \mathcal{P}^- , isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_0, b_0) &= \mathcal{P}^+(\mathcal{P}^-(a_0, b_0)), \\ &= \mathcal{P}^+\left(-a_0 e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-} \pi}, b_0 e^{\frac{\lambda}{\beta^-} \pi} - \sigma^- a_0 \left(e^{\frac{\lambda}{\beta^-} \pi} + e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-} \pi} \right)\right) \\ &= (\mathcal{P}_1(a_0, b_0), \mathcal{P}_2(a_0, b_0)), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(a_0, b_0) &= a_0 e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-} \pi} e^{\frac{\alpha^+}{\beta^+} \pi} = a_0 e^{\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right) \pi}, \\ \mathcal{P}_2(a_0, b_0) &= \left(b_0 e^{\frac{\lambda}{\beta^-} \pi} - \sigma^- a_0 \left(e^{\frac{\lambda}{\beta^-} \pi} + e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-} \pi} \right) \right) e^{\frac{\lambda}{\beta^+} \pi} - \\ &\quad \sigma^+ \left(-a_0 e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-} \pi} \right) \left(e^{\frac{\lambda}{\beta^+} \pi} + e^{\frac{\alpha^+}{\beta^+} \pi} \right), \tag{3.12} \\ &= e^{\frac{\lambda}{\beta^+} \pi} \left(b_0 e^{\frac{\lambda}{\beta^-} \pi} - \sigma^- a_0 \left(e^{\frac{\lambda}{\beta^-} \pi} + e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-} \pi} \right) \right) + \\ &\quad \sigma^+ a_0 e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-} \pi} \left(e^{\frac{\lambda}{\beta^+} \pi} + e^{\frac{\alpha^+}{\beta^+} \pi} \right). \end{aligned}$$

Agora, como temos a expressão explícita da aplicação de Poincaré, podemos analisar a existência de cones invariantes de duas zonas para o sistema (3.5). Para fazer isso, considere uma semirreta contida no plano de separação e passando pela origem com inclinação $v_0 = b_0/a_0$, sendo (a_0, b_0) um ponto que pertence a semirreta, com $a_0 > 0$. Como $a_0 > 0$, podemos tomar $a_0 = 1$ e $v_0 = b_0$. A imagem do ponto $(1, b_0)$ pela aplicação de Poincaré é $\mathcal{P}(1, b_0) = (\mathcal{P}_1(1, b_0), \mathcal{P}_2(1, b_0))$, com \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(1, b_0) &= e^{\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right) \pi}, \\ \mathcal{P}_2(1, b_0) &= e^{\frac{\lambda}{\beta^+} \pi} \left(b_0 e^{\frac{\lambda}{\beta^-} \pi} - \sigma^- \left(e^{\frac{\lambda}{\beta^-} \pi} + e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-} \pi} \right) \right) + \sigma^+ e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-} \pi} \left(e^{\frac{\lambda}{\beta^+} \pi} + e^{\frac{\alpha^+}{\beta^+} \pi} \right). \end{aligned}$$

A condição para a existência de um cone invariante de duas zonas para o sistema (3.5) é agora reduzida à invariância da inclinação da semirreta pela aplicação de Poincaré. Assim, se definirmos uma função h por

$$h(v_0) = \frac{\mathcal{P}_2(1, b_0)}{\mathcal{P}_1(1, b_0)},$$

devemos analisar a existência de soluções da equação $h(v_0) = v_0$, ou seja, os pontos fixos da função h que correspondem aos cones invariantes. Segue da definição da função h e de (3.12) que

$$\begin{aligned} h(v_0) &= \frac{e^{\frac{\lambda}{\beta^+}\pi} \left(v_0 e^{\frac{\lambda}{\beta^-}\pi} - \sigma^- \left(e^{\frac{\lambda}{\beta^-}\pi} + e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-}\pi} \right) \right) + \sigma^+ e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-}\pi} \left(e^{\frac{\lambda}{\beta^+}\pi} + e^{\frac{\alpha^+}{\beta^+}\pi} \right)}{e^{\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right)\pi}} \\ &= \frac{v_0 e^{\frac{\lambda}{\beta^+}\pi} e^{\frac{\lambda}{\beta^-}\pi} - \sigma^- e^{\frac{\lambda}{\beta^+}\pi} \left(e^{\frac{\lambda}{\beta^-}\pi} + e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-}\pi} \right) + \sigma^+ e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-}\pi} \left(e^{\frac{\lambda}{\beta^+}\pi} + e^{\frac{\alpha^+}{\beta^+}\pi} \right)}{e^{\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right)\pi}}, \\ &= \frac{v_0 e^{\left(\frac{\lambda}{\beta^+} + \frac{\lambda}{\beta^-}\right)\pi} - \sigma^- e^{\left(\frac{\lambda}{\beta^+} + \frac{\lambda}{\beta^-}\right)\pi} - \sigma^- e^{\left(\frac{\lambda}{\beta^+} + \frac{\alpha^-}{\beta^-}\right)\pi} + \sigma^+ e^{\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\lambda}{\beta^+}\right)\pi} + \sigma^+ e^{\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right)\pi}}{e^{\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right)\pi}}, \\ &= v_0 e^{\left(\frac{\lambda}{\beta^+} + \frac{\lambda}{\beta^-}\right)\pi} e^{-\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right)\pi} - \sigma^- e^{\left(\frac{\lambda}{\beta^+} + \frac{\lambda}{\beta^-}\right)\pi} e^{-\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right)\pi} - \sigma^- e^{\left(\frac{\lambda}{\beta^+} + \frac{\alpha^-}{\beta^-}\right)\pi} e^{-\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right)\pi} + \\ &\quad \sigma^+ e^{\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\lambda}{\beta^+}\right)\pi} e^{-\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right)\pi} + \sigma^+ e^{\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right)\pi} e^{-\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right)\pi}, \\ &= v_0 e^{-(\gamma^+ + \gamma^-)\pi} - \sigma^- e^{-(\gamma^+ + \gamma^-)\pi} - \sigma^- e^{-\gamma^+\pi} + \sigma^+ e^{-\gamma^+\pi} + \sigma^+. \end{aligned}$$

Note que utilizamos (3.7) nos cálculos anteriores. Então, da equação $h(v_0) = v_0$ e de (3.8) e (3.9), segue que

$$\begin{aligned} v_0 &= v_0 e^{-(\gamma^+ + \gamma^-)\pi} - \sigma^- e^{-(\gamma^+ + \gamma^-)\pi} - \sigma^- e^{-\gamma^+\pi} + \sigma^+ e^{-\gamma^+\pi} + \sigma^+, \\ v_0 \left(1 - e^{-(\gamma^+ + \gamma^-)\pi} \right) &= -\sigma^- e^{-(\gamma^+ + \gamma^-)\pi} - \sigma^- e^{-\gamma^+\pi} + \sigma^+ e^{-\gamma^+\pi} + \sigma^+, \\ v_0 (-\omega) &= -\sigma^- e^{-\gamma^+\pi} \left(e^{-\gamma^-\pi} + 1 \right) + \sigma^+ \left(e^{-\gamma^+\pi} + 1 \right), \\ v_0 (-\omega) &= -\mu \end{aligned}$$

e, portanto, temos que

$$v_0 \omega = \mu. \tag{3.13}$$

Logo, da equação (3.13), obtemos os resultados relativos à existência de um único cone invariante. Além disto, como a derivada de h , calculada no ponto v_0 , é dada por

$$\begin{aligned} h'(v_0) &= \frac{e^{\left(\frac{\lambda}{\beta^+} + \frac{\lambda}{\beta^-}\right)\pi}}{e^{\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right)\pi}}, \\ &= e^{-(\gamma^- + \gamma^+)\pi}, \end{aligned}$$

se $\gamma^- + \gamma^+ < 0$, o cone invariante é repulsor e se $\gamma^- + \gamma^+ > 0$, o cone invariante é atrator.

Agora, se $\gamma^- + \gamma^+ = 0$ em (3.8), temos que $\omega = 0$ e, portanto, se $\mu \neq 0$ segue de (3.13) que o sistema (3.5) não tem nenhum cone invariante de duas zonas e quando $\mu = 0$ temos um contínuo de cones invariantes de duas zonas. ■

A partir do **Teorema 3.2.1**, segue-se a impossibilidade de ter dois cones invariantes hiperbólicos de duas zonas em um sistema não observável. Portanto, não é possível obter uma bifurcação de cones invariantes de duas zonas, do tipo sela-nó, e a dinâmica é mais simples do que no caso observável, no qual essa bifurcação de cones invariantes ocorre, como foi conjecturado em [4] e demonstrado em [1].

A próxima proposição trata da dinâmica do sistema (3.5) restrita ao cone invariante e da estabilidade da origem, conforme item (a) do **Teorema 3.2.1**.

Proposição 3.2.2. *Suponha que o sistema (3.5) possui um único cone invariante de duas zonas, isto é, $\gamma^- + \gamma^+ \neq 0$. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. *Se $\alpha^-/\beta^- + \alpha^+/\beta^+ > 0$, a origem é um ponto de equilíbrio instável para dinâmica do sistema (3.5) restrita ao cone invariante;*
2. *Se $\alpha^-/\beta^- + \alpha^+/\beta^+ < 0$, a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para dinâmica do sistema (3.5) restrita ao cone invariante;*
3. *Se $\alpha^-/\beta^- + \alpha^+/\beta^+ = 0$, o cone invariante é folheado por órbitas periódicas, todas com o mesmo período $T = \pi/\beta^- + \pi/\beta^+$.*

Demonstração. Basta verificar se $\mathcal{P}_1(1, b_0) = e^{\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right)\pi}$ é menor, maior ou igual à um. Para ilustrar, considere a Figura 3.2.

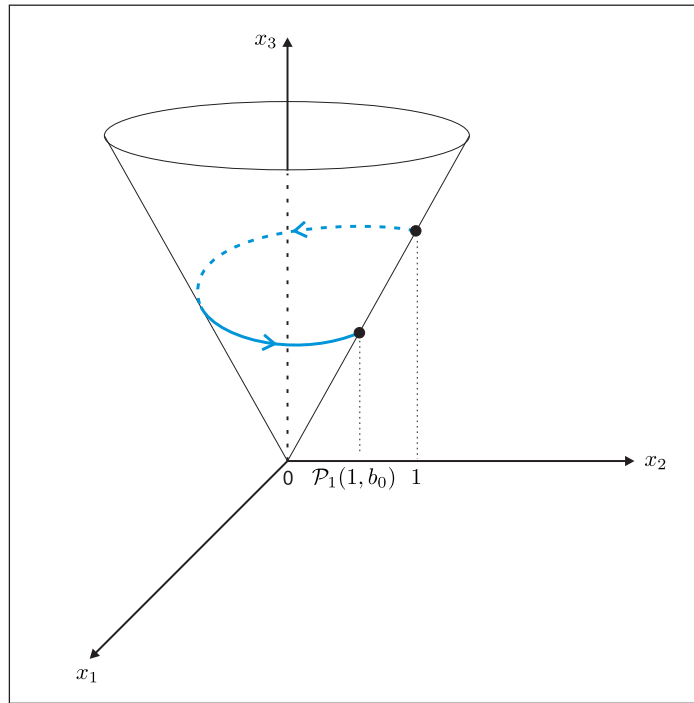


Figura 3.2: Análise de estabilidade da origem restrita ao cone invariante.

■

Considere o sistema (3.5) definido pelas matrizes

$$A^- = \begin{pmatrix} -1.02 & -1 & 0 \\ 0.5101 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.49 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.49 \end{pmatrix},$$

as quais possuem autovalores $\alpha^- \pm i\beta^- = -0.51 \pm i0.5$, $\alpha^+ \pm i\beta^+ = 0.5 \pm i0.5$ e $\lambda = -0.49$. Resulta que $\gamma^- + \gamma^+ = 1.94$, $\alpha^-/\beta^- + \alpha^+/\beta^+ = -0.02$ e $v_0^c = 0.4167$. Logo, pelo item (a) do **Teorema 3.2.1** e a **Proposição 3.2.2**, tal sistema possui um único cone invariante de duas zonas, sendo a origem um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para a dinâmica do sistema (3.5). Nas Figuras 3.3 e 3.4, apresentamos de duas maneiras, para melhorar visualização de uma órbita, este cone invariante.

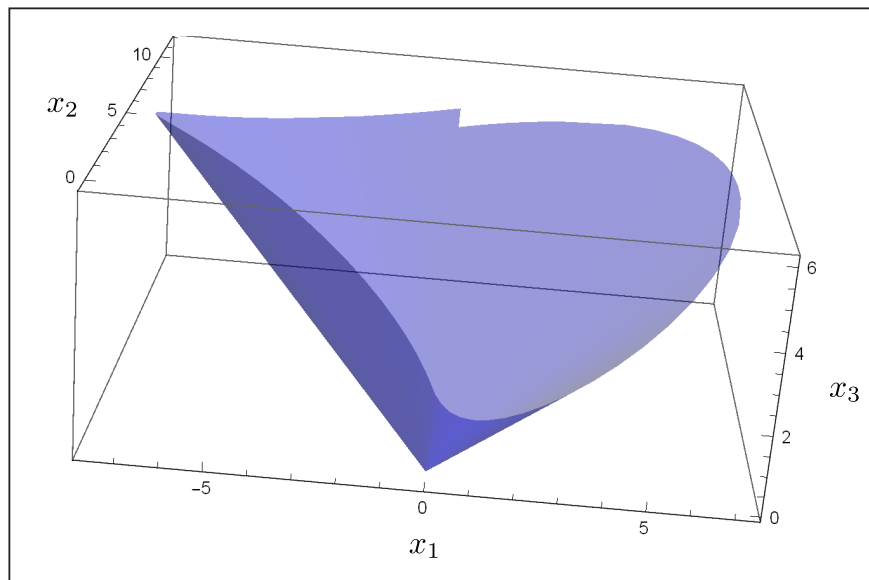


Figura 3.3: Cone invariante de duas zonas, ilustrado pela cor azul, sendo a origem um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

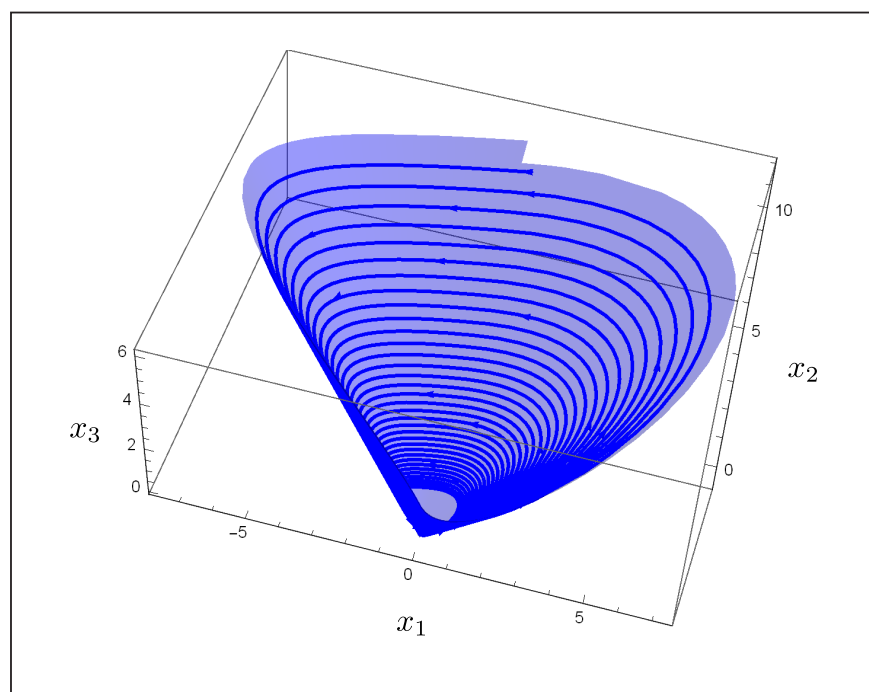


Figura 3.4: Com a linha azul ressaltamos uma órbita do cone invariante de duas zonas da Figura 3.3, a qual tende para a origem.

Considere agora o sistema (3.5) definido pelas matrizes

$$A^- = \begin{pmatrix} -0.96 & -1 & 0 \\ 0.4804 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.49 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.49 \end{pmatrix},$$

cujos os autovalores são $\alpha^- \pm i\beta^- = -0.48 \pm i0.5$, $\alpha^+ \pm i\beta^+ = 0.5 \pm i0.5$ e $\lambda = -0.49$. Tal sistema possui um único cone invariante de duas zonas com a origem sendo um ponto de equilíbrio instável para a dinâmica do sistema (3.5), com $\gamma^- + \gamma^+ = 2$, $\alpha^-/\beta^- + \alpha^+/\beta^+ = 0.04$ e $v_0^c = 0.4158$. Para ilustrar, veja a Figura 3.5.

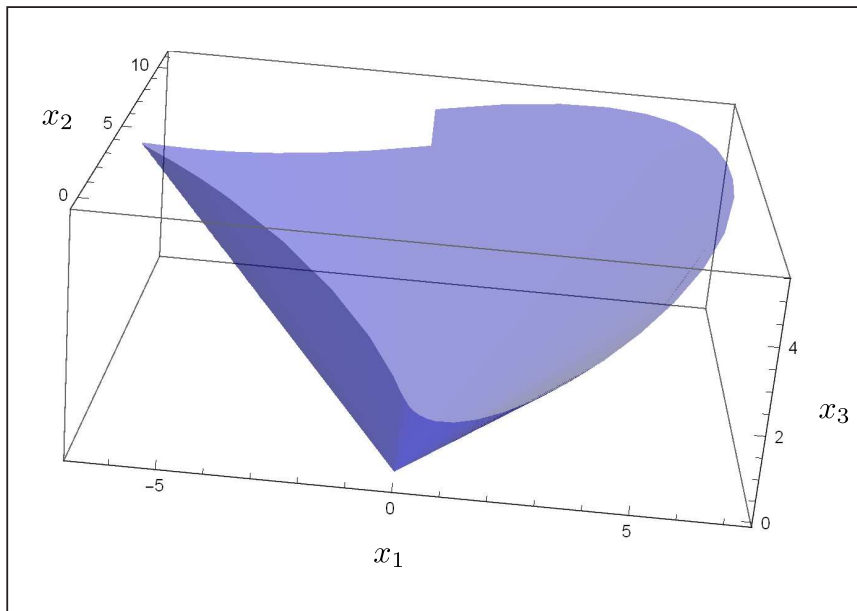


Figura 3.5: Cone invariante de duas zonas, ilustrado pela cor azul, sendo a origem um ponto de equilíbrio instável.

Para melhorar a visualização de uma órbita no cone invariante, considere a Figura 3.6.

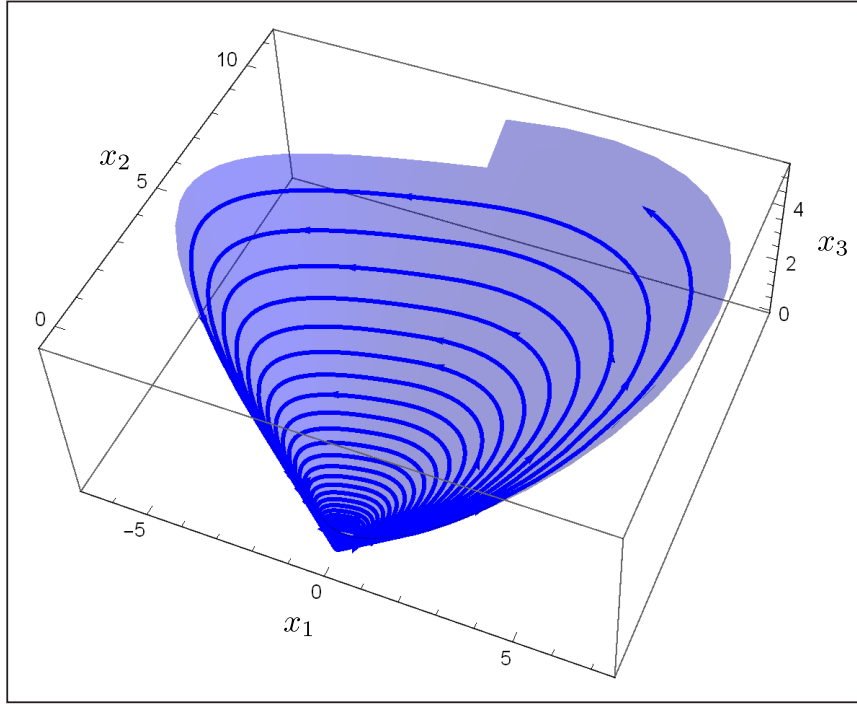


Figura 3.6: A linha azul representa uma órbita, se afastando da origem, no cone invariante de duas zonas da Figura 3.5.

O **Corolário 3.2.1** a seguir apresenta alguns resultados acerca da existência de um único cone invariante de duas zonas folheado por órbitas periódicas para o sistema (3.5).

Corolário 3.2.1. *Se $\alpha^-/\beta^- + \alpha^+/\beta^+ = 0$ e $\lambda \neq 0$, o sistema (3.5) tem um único cone invariante de duas zonas que é folheado por órbitas periódicas, todas com mesmo período $T = \pi/\beta^- + \pi/\beta^+$. Além disto*

$$\tilde{v}_0^c := \frac{\sigma^- \left(e^{\lambda \left(\frac{1}{\beta^-} + \frac{1}{\beta^+} \right) \pi} + e^{\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\lambda}{\beta^+} \right) \pi} \right) - \sigma^+ \left(e^{\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\lambda}{\beta^+} \right) \pi} + 1 \right)}{e^{\lambda \left(\frac{1}{\beta^-} + \frac{1}{\beta^+} \right) \pi} - 1}, \quad (3.14)$$

com σ^\pm dados em (3.6), fornece a inclinação da semirreta que está localizada no semiplano $\{x \in \Pi : x_2 > 0\}$, interseção do cone invariante com o plano de separação Π . O cone invariante é atrator, quando $\lambda < 0$ e repulsor, quando $\lambda > 0$.

Demonstração. Se $\alpha^-/\beta^- + \alpha^+/\beta^+ = 0$, como

$$\gamma^\pm = \frac{\alpha^\pm - \lambda}{\beta^\pm},$$

segue que

$$\begin{aligned} \gamma^- + \gamma^+ &= \frac{\alpha^+ - \lambda}{\beta^+} + \frac{\alpha^- - \lambda}{\beta^-}, \\ &= \frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+} - \lambda \left(\frac{1}{\beta^-} + \frac{1}{\beta^+} \right), \\ &= -\lambda \left(\frac{1}{\beta^-} + \frac{1}{\beta^+} \right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pelo item (a) do **Teorema 3.2.1**, temos que $\gamma^- + \gamma^+$ é diferente de zero se, e somente se, $\lambda \neq 0$. Agora, de (3.13), resulta que

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{\sigma^- e^{-\gamma^+ \pi} (e^{-\gamma^- \pi} + 1) - \sigma^+ (e^{-\gamma^+ \pi} + 1)}{e^{-(\gamma^- + \gamma^+) \pi} - 1}, \\ &= \frac{\sigma^- (e^{-(\gamma^+ + \gamma^-) \pi} + e^{-\gamma^+ \pi}) - \sigma^+ (e^{-\gamma^+ \pi} + 1)}{e^{-(\gamma^- + \gamma^+) \pi} - 1}, \\ &= \frac{\sigma^- \left(e^{\lambda \left(\frac{1}{\beta^-} + \frac{1}{\beta^+} \right) \pi} + e^{\left(\frac{\lambda}{\beta^+} + \frac{\alpha^-}{\beta^-} \right) \pi} \right) - \sigma^+ \left(e^{\left(\frac{\lambda}{\beta^+} + \frac{\alpha^-}{\beta^-} \right) \pi} + 1 \right)}{e^{\lambda \left(\frac{1}{\beta^-} + \frac{1}{\beta^+} \right) \pi} - 1}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\tilde{v}_0^c = \frac{\sigma^- \left(e^{\lambda \left(\frac{1}{\beta^-} + \frac{1}{\beta^+} \right) \pi} + e^{\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\lambda}{\beta^+} \right) \pi} \right) - \sigma^+ \left(e^{\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\lambda}{\beta^+} \right) \pi} + 1 \right)}{e^{\lambda \left(\frac{1}{\beta^-} + \frac{1}{\beta^+} \right) \pi} - 1}.$$

Novamente, pelo item (a) do **Teorema 3.2.1**, temos que o cone invariante é repulsor, se $\gamma^- + \gamma^+ < 0$, e é atrator, se $\gamma^- + \gamma^+ > 0$. Portanto, por (3.15), concluímos que o cone invariante é atrator, quando $\lambda < 0$, e é repulsor, quando $\lambda > 0$.

■

Considere o sistema (3.5) definido pelas matrizes

$$A^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.49 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.49 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Os autovalores de A^- e A^+ são $\alpha^- \pm i\beta^- = -0.5 \pm i0.5$, $\alpha^+ \pm i\beta^+ = 0.5 \pm i0.5$ e $\lambda = -0.49$, respectivamente. Pelo, item (a) do **Teorema 3.2.1**, o sistema (3.5) possui um único cone invariante de duas zonas com $\tilde{v}_0^c = 0.4164$, pois $\gamma^- + \gamma^+ = 1.96$. Como $\alpha^-/\beta^- + \alpha^+/\beta^+ = 0$, o cone invariante é folheado por órbitas periódicas, todas com mesmo período $T = 4\pi$. Nas Figuras 3.7 e 3.8, apresentamos de duas maneiras (para melhor visualização das órbitas) este cone invariante folheado por órbitas periódicas.

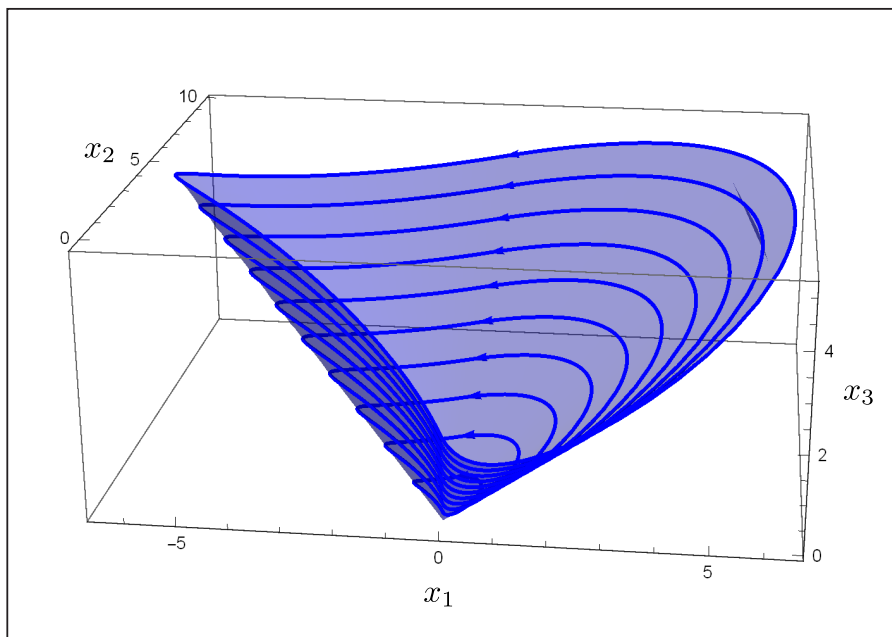


Figura 3.7: Cone invariante de duas zonas, ilustrado pela cor azul, folheado por órbitas periódicas.

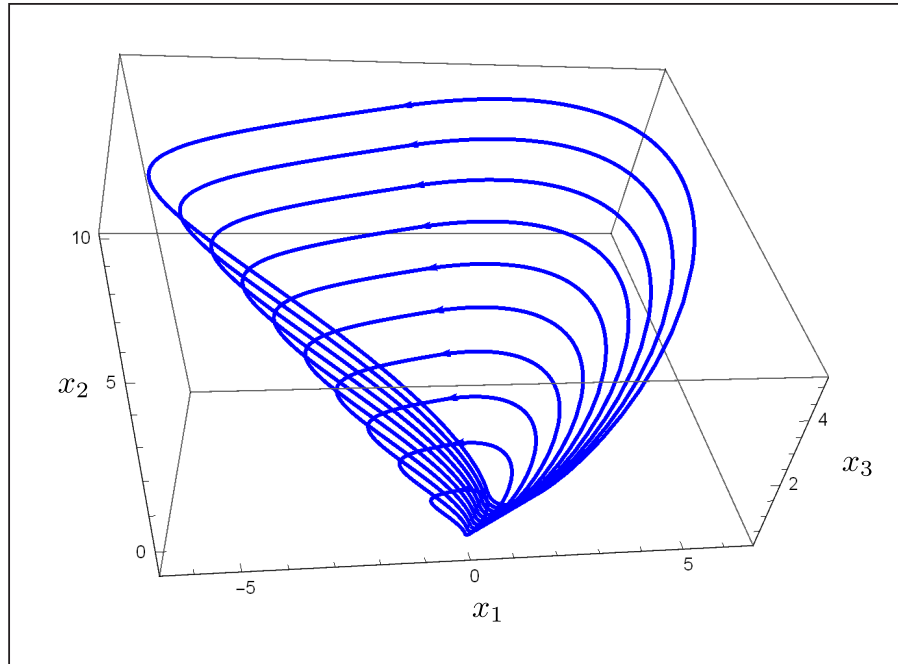


Figura 3.8: Órbitas periódicas, representadas na cor azul, no cone invariante de duas zonas da Figura 3.7.

A partir de agora, o sistema (3.5), sob às hipóteses do **Corolário 3.2.1**, será chamado de sistema não perturbado. O passo seguinte consiste em perturbar esse sistema, mediante uma perturbação linear, com o objetivo de estudar as órbitas periódicas que persistem.

Primeiro, para a persistência das órbitas, precisamos tornar o sistema não homogêneo e, assim, adicionamos um termo independente ϵc_2 na segunda equação do sistema (3.5). Por outro lado, adicionamos um termo ϵx_3 que torna o sistema (3.5) observável. Esse termo é adicionado também na segunda equação. Observe que o sistema perturbado deve ser não homogêneo, pois um sistema linear por partes contínuo em \mathbb{R}^3 , homogêneo e observável, não possui órbitas periódicas isoladas, conforme pode ser visto em [4] e [5].

Especificamente, consideramos uma perturbação linear que torna o sistema não per-

turbado (3.5) em um sistema observável e não homogêneo da forma

$$\begin{cases} x'_1 = 2\alpha^\pm x_1 - x_2, \\ x'_2 = ((\alpha^\pm)^2 + (\beta^\pm)^2)x_1 + \epsilon(x_3 + c_2), \\ x'_3 = c_{31}^\pm x_1 + \lambda x_3, \end{cases} \quad (3.17)$$

sendo $\epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, suficientemente pequeno, $c_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha^-/\beta^- + \alpha^+/\beta^+ = 0$ e $\lambda \neq 0$. É fácil verificar a observabilidade do sistema, basta notar que a matriz de observabilidade

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha^- & -1 & 0 \\ 3(\alpha^-)^2 - (\beta^-)^2 & -2\alpha^- & -\epsilon \end{pmatrix}$$

tem posto completo, pois $\det(\mathcal{O}) = \epsilon \neq 0$.

Para $\lambda \neq 0$, o **Corolário 3.2.1** garante que o cone invariante do sistema não perturbado (3.5) é hiperbólico. Então, para $\epsilon \neq 0$, suficientemente pequeno, há uma variedade invariante no retrato de fase do sistema perturbado (3.17).

Agora, nosso objetivo principal é a análise das órbitas periódicas do sistema (3.17), que provêm das órbitas periódicas do contínuo do sistema não perturbado (3.5).

3.3 Órbitas Periódicas para o Sistema Perturbado

Nesta seção, analisamos as órbitas periódicas do contínuo do sistema não perturbado (3.5) que persistem no sistema perturbado (3.17), com $\alpha^-/\beta^- + \alpha^+/\beta^+ = 0$, $\lambda \neq 0$ e $\epsilon \in \mathbb{R}$, suficientemente pequeno.

Para este estudo, usaremos as ideias do Capítulo 14 de [6]. Para aplicar essas ideias, é necessário transformar o sistema (3.17) na forma

$$\frac{dx}{ds} = Ax + \epsilon f(s, x, \epsilon), \quad (3.18)$$

com $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, $x = (y, z) \in \mathbb{R}^2$ e $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times (-\epsilon_0, \epsilon_0), \mathbb{R}^2)$, uma função periódica de período T na primeira variável s , sendo ϵ_0 um número real positivo suficientemente pequeno.

Para obtermos um sistema na forma (3.18), realizamos algumas mudanças de variáveis no sistema (3.17). Essas mudanças de variáveis são essenciais na análise das órbitas periódicas que permanecem após a perturbação. Lembre que o período das órbitas periódicas do contínuo do sistema não perturbado (3.5) é dado por $T = \pi/\beta^- + \pi/\beta^+$.

Faremos uma mudança de variáveis por partes nas variáveis x_1, x_2 , levando em consideração as propriedades das órbitas periódicas do sistema não perturbado (3.5). Mais precisamente, na região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 0\}$, mudamos as variáveis x_1 e x_2 por s e y , respectivamente, e na região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$ por r e y , respectivamente, sendo y a interseção positiva de cada órbita periódica com o plano $x_1 = 0$. Dado um ponto $p = (p_1, p_2, p_3)$, fora do cone invariante do sistema não perturbado (3.5), a variável s será o tempo que a órbita leva pra chegar da condição inicial $(0, y)$ ao ponto (p_1, p_2) , no plano $x_3 = 0$, e $r = s - T$. Veremos mais adiante que $s \in (0, \pi/\beta^-)$, para $x_1 \leq 0$ e $s \in (\pi/\beta^-, T)$, para $x_1 > 0$.

Por outro lado, mudamos a terceira variável x_3 por z , uma nova variável que mede a distância do ponto $p = (p_1, p_2, p_3)$ em relação ao ponto $\hat{p} = (p_1, p_2, \hat{z})$ pertencente ao cone invariante do sistema não perturbado (3.5). Veja a Figura 3.9 para um melhor entendimento dessa mudança de variáveis.

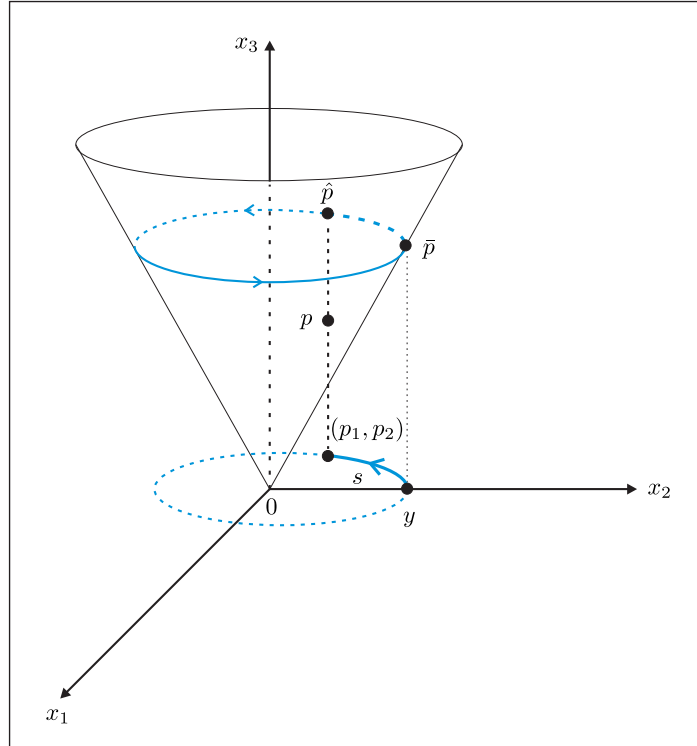


Figura 3.9: Interpretação geométrica da mudança de variáveis (x_1, x_2, x_3) para (s, y, z) .

Seja ϕ , dada por $\phi(t, q) = (\phi_1(t, q), \phi_2(t, q), \phi_3(t, q))$, $t \in \mathbb{R}$, a única solução do sistema não perturbado (3.5) com condição inicial $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = q = (c_0, a_0, b_0)$. Observe que a expressão explícita de ϕ na região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 0\}$, com condição inicial no plano de separação, foi dada em (3.11). Na região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$ pode-se obter uma expressão semelhante.

Agora, na região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 0\}$, considere o ponto $p = (p_1, p_2, p_3)$, dado anteriormente, e os pontos $\hat{p} = (p_1, p_2, \hat{z})$ e $\bar{p} = (0, y, v_0^c y)$, conforme a Figura 3.9. Para o ponto $\bar{p} = (0, y, v_0^c y)$ temos que

$$e^{tA^-} \bar{p} = \begin{pmatrix} \phi_1^-(t, \bar{p}) \\ \phi_2^-(t, \bar{p}) \\ \phi_3^-(t, \bar{p}) \end{pmatrix}.$$

Como $x_1 \leq 0$, pela mudança de variáveis anterior, segue que

$$e^{sA^-} \bar{p} = \begin{pmatrix} \phi_1^-(s, \bar{p}) \\ \phi_2^-(s, \bar{p}) \\ \phi_3^-(s, \bar{p}) \end{pmatrix} = \hat{p},$$

ou seja,

$$x_1 = \phi_1^-(s, \bar{p}),$$

$$x_2 = \phi_2^-(s, \bar{p}),$$

$$\hat{z} = \phi_3^-(s, \bar{p}).$$

Note que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^-(s, \bar{p}) \\ \phi_2^-(s, \bar{p}) \end{pmatrix} = e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},$$

é solução do problema de Cauchy

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \tilde{A}^- \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

com condição inicial $(x_1(0), x_2(0)) = (0, y)$, sendo

$$\tilde{A}^- = \begin{pmatrix} 2\alpha^- & -1 \\ (\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A terceira variável é $z = x_3 - \hat{z}$, na nova mudança de variável. Logo,

$$x_3 = z + \hat{z} = z + \phi_3^-(s, \bar{p}).$$

Analogamente, obtemos um resultado semelhante na região para a região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$

e, assim, obtemos a seguinte mudança de variáveis por partes

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} N^-(s) \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_3^-(s, (0, y, \tilde{v}_0^c y)) \end{pmatrix}, & \text{se } x_1 \leq 0, \\ N^+(s) \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_3^+(s - T, (0, y, \tilde{v}_0^c y)) \end{pmatrix}, & \text{se } x_1 > 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

sendo $r = s - T$, $y > 0$, \tilde{v}_0^c dado em (3.14),

$$N^-(s) = \left(\begin{array}{cc|c} e^{s\tilde{A}^-} & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

$$N^+(s) = \left(\begin{array}{cc|c} e^{(s-T)\tilde{A}^+} & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

e

$$\tilde{A}^\pm = \begin{pmatrix} 2\alpha^\pm & -1 \\ (\alpha^\pm)^2 + (\beta^\pm)^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que as condições $x_1 \leq 0$ e $x_1 > 0$, nas novas variáveis, correspondem a $s \in (0, \pi/\beta^-)$ e $s \in (\pi/\beta^-, T)$, respectivamente, pois,

$$\phi_1^-(s) = -\frac{y}{\beta^-} e^{\alpha^- s} \text{sen}(\beta^- s) < 0,$$

se $\text{sen}(\beta^- s) > 0$, ou seja, quando $s \in (0, \pi/\beta^-)$ e

$$\phi_1^+(r) = -\frac{y}{\beta^+} e^{\alpha^+ r} \text{sen}(\beta^+ r) > 0,$$

se $\text{sen}(\beta^+ r) < 0$, isto é, quando $r \in (-\pi/\beta^+, 0)$. Como $r = s - T$, temos que $s \in (\pi/\beta^-, T)$. Por esta, razão, mais tarde, vamos denotar as funções com o sobrescrito “−” quando $s \in (0, \pi/\beta^-)$ e com sobrescrito “+” quando $s \in (\pi/\beta^-, T)$. Por motivos de abreviatura, usamos “±” para considerar $s \in (0, T)$, e significa “−”, se $s \in (0, \pi/\beta^-)$ e “+”, se

$s \in (\pi/\beta^-, T)$. A partir da expressão explícita de ϕ em (3.11) na região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 0\}$ e a expressão análoga na região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$, temos que a expressão explícita da solução $\phi = \phi(s, (0, y, \tilde{v}_0^c y))$ é tal que

$$\begin{aligned}\phi_1(s, (0, y, \tilde{v}_0^c y)) &= \begin{cases} \phi_1^-(s, y), & \text{se } s \in [0, \pi/\beta^-], \\ \phi_1^+(s, y), & \text{se } s \in (\pi/\beta^-, T), \end{cases} \\ \phi_2(s, (0, y, \tilde{v}_0^c y)) &= \begin{cases} \phi_2^-(s, y), & \text{se } s \in [0, \pi/\beta^-], \\ \phi_2^+(s, y), & \text{se } s \in (\pi/\beta^-, T), \end{cases} \\ \phi_3(s, (0, y, \tilde{v}_0^c y)) &= \begin{cases} \phi_3^-(s, y, \tilde{v}_0^c), & \text{se } s \in [0, \pi/\beta^-], \\ \phi_3^+(s, y, \tilde{v}_0^c), & \text{se } s \in (\pi/\beta^-, T), \end{cases}\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}\phi_1^-(s, y) &= -\frac{y}{\beta^-} e^{\alpha^- s} \text{sen}(\beta^- s), \\ \phi_1^+(s, y) &= -\frac{y}{\beta^+} e^{\alpha^+(s-T)} \text{sen}(\beta^+(s-T)), \\ \phi_2^-(s, y) &= ye^{\alpha^- s} \left(\cos(\beta^- s) - \frac{\alpha^-}{\beta^-} \text{sen}(\beta^- s) \right), \\ \phi_2^+(s, y) &= ye^{\alpha^+(s-T)} \left(\cos(\beta^+(s-T)) - \frac{\alpha^+}{\beta^+} \text{sen}(\beta^+(s-T)) \right), \\ \phi_3^-(s, y, \tilde{v}_0^c) &= y \left((\tilde{v}_0^c - \sigma^-) e^{\lambda s} + \sigma^- e^{\alpha^- s} (\cos(\beta^- s) - \gamma^- \text{sen}(\beta^- s)) \right)\end{aligned}$$

e

$$\phi_3^+(s, y, \tilde{v}_0^c) = y \left((\tilde{v}_0^c - \sigma^+) e^{\lambda(s-T)} + \sigma^+ e^{\alpha^+(s-T)} (\cos(\beta^+(s-T)) - \gamma^+ \text{sen}(\beta^+(s-T))) \right),$$

com δ^\pm e γ^\pm dados em (3.6) e (3.7), respectivamente.

Na seguinte proposição, transformamos o sistema (3.17) efetuando a mudança de variáveis (3.19), que é um homeomorfismo.

Proposição 3.3.1. A mudança de variáveis (3.19) transforma o sistema (3.17) em

$$\begin{cases} s' = 1 - \epsilon M_1(s, y, z, \epsilon), \\ y' = \epsilon M_2(s, y, z, \epsilon), \\ z' = \lambda z + \epsilon M_3(s, y, z, \epsilon), \end{cases} \quad (3.20)$$

sendo

$$M_1(s, y, z, \epsilon) = \begin{cases} -\phi_1^-(s, y) \frac{e^{-2\alpha^- s}}{y^2} (z + \phi_3^-(s, y, \tilde{v}_0^c) + c_2), & \text{se } s \in [0, \pi/\beta^-], \\ -\phi_1^+(s, y) \frac{e^{-2\alpha^+(s-T)}}{y^2} (z + \phi_3^+(s, y, \tilde{v}_0^c) + c_2), & \text{se } s \in (\pi/\beta^-, T), \end{cases}$$

$$M_2(s, y, z, \epsilon) = \begin{cases} -\frac{d\phi_1^-}{ds}(s, y) \frac{e^{-2\alpha^- s}}{y} (z + \phi_3^-(s, y, \tilde{v}_0^c) + c_2), & \text{se } s \in [0, \pi/\beta^-], \\ -\frac{d\phi_1^+}{ds}(s, y) \frac{e^{-2\alpha^+(s-T)}}{y} (z + \phi_3^+(s, y, \tilde{v}_0^c) + c_2), & \text{se } s \in (\pi/\beta^-, T), \end{cases}$$

e

$$M_3(s, y, z, \epsilon) = \begin{cases} \frac{\partial \phi_3^-}{\partial s}(s, y, \tilde{v}_0^c) M_1^-(s, y, z, \epsilon) - \frac{\partial \phi_3^-}{\partial y}(s, y, \tilde{v}_0^c) M_2^-(s, y, z, \epsilon), & \text{se } s \in [0, \pi/\beta^-], \\ \frac{\partial \phi_3^+}{\partial s}(s, y, \tilde{v}_0^c) M_1^+(s, y, z, \epsilon) - \frac{\partial \phi_3^+}{\partial y}(s, y, \tilde{v}_0^c) M_2^+(s, y, z, \epsilon), & \text{se } s \in (\pi/\beta^-, T). \end{cases}$$

Demonstração. Primeiro, consideramos a região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 0\}$. A mudança de variáveis (3.19), nas variáveis x_1, x_2 , é dada por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

sendo $y > 0$. Tomando a derivada na expressão (3.21), em relação à variável independente t , temos

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \frac{ds}{dt} \tilde{A}^- e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}.$$

Pelo sistema (3.17), a igualdade seguinte é válida

$$\tilde{A}^- \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon(x_3 + c_2) \end{pmatrix} = \frac{ds}{dt} \tilde{A}^- e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Assim, considerando a mudança de variáveis (3.21), a expressão (3.22) torna-se

$$\tilde{A}^- e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} - \frac{ds}{dt} \tilde{A}^- e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} - e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon(x_3 + c_2) \end{pmatrix},$$

e, daí,

$$\tilde{A}^- e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \left(1 - \frac{ds}{dt}\right) - \frac{dy}{dt} e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon(x_3 + c_2) \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\tilde{A}^- e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \left(1 - \frac{ds}{dt}\right) - \frac{dy}{y} e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon(x_3 + c_2) \end{pmatrix}.$$

Agora, utilizando as notações

$$v = 1 - \frac{ds}{dt}$$

e

$$w = \frac{dy}{dt},$$

temos que

$$\tilde{A}^- e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} v - \frac{w}{y} e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon(x_3 + c_2) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Note que

$$\begin{pmatrix} \phi_1^-(s, y) \\ \phi_2^-(s, y) \end{pmatrix} = e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \tilde{A}^- \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.24)$$

e, assim,

$$\begin{pmatrix} (\phi_1^-)'(s, y) \\ (\phi_2^-)'(s, y) \end{pmatrix} = \tilde{A}^- \begin{pmatrix} \phi_1^-(s, y) \\ \phi_2^-(s, y) \end{pmatrix} = \tilde{A}^- e^{s\tilde{A}^-} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} (\phi_1^-)'(s, y) \\ (\phi_2^-)'(s, y) \end{pmatrix} v - \frac{w}{y} \begin{pmatrix} \phi_1^-(s, y) \\ \phi_2^-(s, y) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon(x_3 + c_2) \end{pmatrix}.$$

Portanto, o sistema (3.23), pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} (\phi_1^-)'(s, y) & -\phi_1^-(s, y)/y \\ (\phi_2^-)'(s, y) & -\phi_2^-(s, y)/y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon(x_3 + c_2) \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

É fácil ver que a matriz de coeficientes do sistema (3.25),

$$B(s) = \begin{pmatrix} (\phi_1^-)'(s, y) & -\phi_1^-(s, y)/y \\ (\phi_2^-)'(s, y) & -\phi_2^-(s, y)/y \end{pmatrix},$$

é uma matriz fundamental do problema de Cauchy (3.24), porque as colunas são soluções de (3.24), ou seja, formam uma base para o espaço de soluções. Então, pela *Fórmula de Liouville* (que pode ser encontrada em [12]), temos que

$$\begin{aligned} \det(B(s)) &= e^{2\alpha^- s} \det(B(0)), \\ &= e^{2\alpha^- s} \det \left(\begin{pmatrix} -y & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right), \\ &= e^{2\alpha^- s} y \neq 0, \end{aligned}$$

pois, $y > 0$. Assim, usando a *Regra de Cramer*, o sistema (3.25) é facilmente resolvido e

$$v = -\epsilon e^{-2\alpha^- s} \frac{\phi_1^-(s, y)}{y^2} (x_3 + c_2)$$

e

$$w = -\epsilon \frac{d\phi_1^-}{ds}(s, y) \frac{e^{-2\alpha^- s}}{y} (x_3 + c_2).$$

Daí, resulta que

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = 1 + \epsilon e^{-2\alpha^- s} \frac{\phi_1^-(s, y)}{y^2} (x_3 + c_2), \\ \frac{dy}{dt} = -\epsilon \frac{d\phi_1^-}{ds}(s, y) \frac{e^{-2\alpha^- s}}{y} (x_3 + c_2). \end{cases}$$

Além disto, a partir da terceira equação da mudança de variáveis (3.19), isto é,

$$x_3 = z + \phi_3^-(s, y, \tilde{v}_0^c), \quad (3.26)$$

podemos escrever

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = 1 + \epsilon e^{-2\alpha^- s} \frac{\phi_1^-(s, y)}{y^2} (z + \phi_3^-(s, y, \tilde{v}_0^c) + c_2), \\ \frac{dy}{dt} = -\epsilon \frac{d\phi_1^-}{ds}(s, y) \frac{e^{-2\alpha^- s}}{y} (z + \phi_3^-(s, y, \tilde{v}_0^c) + c_2). \end{cases} \quad (3.27)$$

Para finalizar a mudança de variáveis, precisamos calcular dz/dt em termos das novas variáveis s , y e z . Ao derivarmos a expressão (3.26), em relação à variável temporal t , obtemos que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx_3}{dt} - \frac{\partial \phi_3^-}{\partial s}(s, y, \tilde{v}_0^c) \frac{ds}{dt} - \frac{\partial \phi_3^-}{\partial y}(s, y, \tilde{v}_0^c) \frac{dy}{dt}.$$

Usando as equações do sistema (3.27) e a terceira equação do sistema (3.17), temos que

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= c_{31}^- x_1 + \lambda x_3 - \frac{\partial \phi_3^-}{\partial s}(s, y, \tilde{v}_0^c) (1 - \epsilon M_1^-(s, y, z, \epsilon)) - \frac{\partial \phi_3^-}{\partial y}(s, y, \tilde{v}_0^c) (\epsilon M_2^-(s, y, z, \epsilon)), \\ &= c_{31}^- x_1 + \lambda (z + \phi_3^-(s, y, \tilde{v}_0^c)) - \frac{\partial \phi_3^-}{\partial s}(s, y, \tilde{v}_0^c) (1 - \epsilon M_1^-(s, y, z, \epsilon)) - \epsilon \frac{\partial \phi_3^-}{\partial y}(s, y, \tilde{v}_0^c) \\ &\quad M_2^-(s, y, z, \epsilon), \\ &= c_{31}^- x_1 + \lambda z + \lambda \phi_3^-(s, y, \tilde{v}_0^c) - \frac{\partial \phi_3^-}{\partial s}(s, y, \tilde{v}_0^c) + \epsilon \frac{\partial \phi_3^-}{\partial s}(s, y, \tilde{v}_0^c) M_1^-(s, y, z, \epsilon) - \\ &\quad \epsilon \frac{\partial \phi_3^-}{\partial y}(s, y, \tilde{v}_0^c) M_2^-(s, y, z, \epsilon). \end{aligned}$$

Observe que $\phi_3^-(s, y, \tilde{v}_0^c)$ é o terceira componente da solução do problema de Cauchy dado pelo sistema não perturbado (3.5), com condição inicial $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0, y, \tilde{v}_0^c)$, e, assim, resulta que

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z + \epsilon \left(\frac{\partial \phi_3^-}{\partial s}(s, y, \tilde{v}_0^c) M_1^-(s, y, z, \epsilon) - \frac{\partial \phi_3^-}{\partial y}(s, y, \tilde{v}_0^c) M_2^-(s, y, z, \epsilon) \right)$$

e a prova para a região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 0\}$ está concluída. Para a região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$, como $r = s - T$, temos que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt},$$

e, então, podemos fazer uma prova análoga. ■

Agora, o sistema (3.20) é transformado em um sistema planar na forma procurada (3.18), no qual o papel da variável temporal t será capturado pela variável s . Pelo sistema (3.20), vem que

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{ds} = \frac{\epsilon M_2(s, y, z, \epsilon)}{1 - \epsilon M_1(s, y, z, \epsilon)}, \\ \frac{dz}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dz}{ds} = \frac{\lambda z + \epsilon M_3(s, y, z, \epsilon)}{1 - \epsilon M_1(s, y, z, \epsilon)}. \end{cases}$$

Além disto, como

$$\frac{1}{1 - \epsilon M_1(s, y, z, \epsilon)} = 1 + \epsilon M_1(s, y, z, \epsilon) + \mathbf{R}_{M_1}(\epsilon^2),$$

resulta que

$$\begin{cases} \frac{dy}{ds} = \epsilon M_2(s, y, z, \epsilon) + \mathbf{R}_y(\epsilon^2), \\ \frac{dz}{ds} = \lambda z + \epsilon \lambda z M_1(s, y, z, \epsilon) + \epsilon M_3(s, y, z, \epsilon) + \mathbf{R}_z(\epsilon^2). \end{cases} \quad (3.28)$$

O sistema (3.28) é um sistema da forma desejada

$$x' = Ax + \epsilon f(s, x, \epsilon), \quad (3.29)$$

sendo $x = (y, z)$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, suficientemente pequeno,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

e

$$f(s, x, \epsilon) = \begin{pmatrix} f_1(s, x, \epsilon) \\ f_2(s, x, \epsilon) \end{pmatrix} + \mathbf{R}(\epsilon^2),$$

com

$$\begin{cases} f_1(s, x, \epsilon) = M_2(s, y, z, \epsilon), \\ f_2(s, x, \epsilon) = \lambda z M_1(s, y, z, \epsilon) + M_3(s, y, z, \epsilon) \end{cases}$$

e $R(\epsilon^m)$ uma função com expansão em série de Taylor na variável ϵ , em torno de $\epsilon = 0$, iniciando nos termos de ordem $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ no mínimo.

Agora, procuraremos órbitas periódicas do sistema perturbado (3.29). Seja $\psi = \psi(s, x_*, \epsilon)$ a solução única do problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = Ax + \epsilon f(s, x, \epsilon), \\ x(0) = x_*. \end{cases} \quad (3.30)$$

Fazendo a mudança de variável $y = e^{-sA}x$, temos que

$$\begin{aligned} y' &= -Ae^{-sA}x + e^{-sA}x' \\ &= -Ae^{-sA}x + e^{-sA}(Ax + \epsilon f(s, x, \epsilon)), \\ &= -Ay + Ay + \epsilon e^{-sA}f(s, x, \epsilon), \\ &= \epsilon e^{-sA}f(s, x, \epsilon). \end{aligned}$$

Então, o sistema (3.30) pode ser escrito como

$$\begin{cases} y' = \epsilon e^{-sA}f(s, e^{sA}y, \epsilon), \\ y(0) = x_*, \end{cases}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} y(s) - x_* &= \int_0^s y'(\rho) d\rho \\ &= \epsilon \int_0^s e^{-\rho A} f(\rho, \psi(\rho, x_*, \epsilon), \epsilon) d\rho. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Como $e^{sA}y = x$, multiplicando (3.31) por e^{sA} , vem que

$$\begin{aligned} \psi(s, x_*, \epsilon) - e^{sA}x_* &= \epsilon e^{sA} \int_0^s e^{-\rho A} f(\rho, \psi(\rho, x_*, \epsilon), \epsilon) d\rho, \\ &= \epsilon \int_0^s e^{(s-\rho)A} f(\rho, \psi(\rho, x_*, \epsilon), \epsilon) d\rho \end{aligned}$$

e, daí, segue que

$$\psi(s, x_*, \epsilon) = e^{sA} x_* + \epsilon \int_0^s e^{(s-\rho)A} f(\rho, \psi(\rho, x_*, \epsilon), \epsilon) d\rho, \quad \forall s \in [0, T]. \quad (3.32)$$

Resulta diretamente de (3.32), que uma condição necessária e suficiente para ψ ser periódica de período $\tau(\epsilon)$, com $\tau(0) = T$, é

$$(e^{\tau(\epsilon)A} - E_2) x_* + \epsilon \int_0^{\tau(\epsilon)} e^{(\tau(\epsilon)-\rho)A} f(\rho, \psi(\rho, x_*, \epsilon), \epsilon) d\rho = 0,$$

pois, $\psi(\tau(\epsilon), x_*, \epsilon) = \psi(0, x_*, \epsilon) = x_*$ ou, equivalentemente, se denotamos $x_* = (y_*, z_*)$,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda\tau(\epsilon)} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_* \\ z_* \end{pmatrix} + \\ & \epsilon \int_0^{\tau(\epsilon)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\lambda(\tau(\epsilon)-\rho)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2(\rho, x_*, \epsilon) \\ \lambda z M_1(\rho, x_*, \epsilon) + M_3(\rho, x_*, \epsilon) \end{pmatrix} + R(\epsilon^2) d\rho = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

No próximo teorema, ao analisar as soluções do sistema (3.33), provaremos a existência de uma solução periódica do sistema (3.29), para $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno e, conseqüentemente, a existência de uma órbita periódica do sistema (3.17).

Teorema 3.3.1. *Considere o sistema perturbado (3.17), com $\alpha^-/\beta^- + \alpha^+/\beta^+ = 0$ e $\lambda \neq 0$. Sejam*

$$\bar{a} = 2c_2 \frac{\alpha^- \left(1 + e^{-(\alpha^-/\beta^-)\pi}\right) \left((\beta^-)^{-1} + (\beta^+)^{-1}\right)}{(\alpha^-/\beta^-)^2 + 1} \quad (3.34)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{b} = & \frac{(\tilde{v}_0^c - \sigma^-) \left(1 + e^{-\gamma^- \pi}\right) (2\alpha^- - \lambda)}{(\alpha^- - \lambda)^2 + (\beta^-)^2} - \frac{(\tilde{v}_0^c - \sigma^+) \left(1 + e^{\gamma^+ \pi}\right) (2\alpha^+ - \lambda)}{(\alpha^+ - \lambda)^2 + (\beta^+)^2} + \\ & \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sigma^-}{\beta^-} \left(1 - \frac{\gamma^- \alpha^-}{\beta^-}\right) + \frac{\sigma^+}{\beta^+} \left(1 - \frac{\gamma^+ \alpha^+}{\beta^+}\right) \right), \end{aligned} \quad (3.35)$$

com σ^\pm , γ^\pm e \tilde{v}_0^c dados em (3.6), (3.7) e (3.14), respectivamente. Se $\bar{a}\bar{b} < 0$ e $\epsilon \neq 0$ é suficientemente pequeno, então existe uma órbita periódica do sistema (3.17) de período $\tau(\epsilon) = T + R_\tau(\epsilon)$. Quando $\epsilon \rightarrow 0$ esta órbita periódica converge para a órbita do contínuo do sistema não perturbado (3.5) cuja intersecção positiva com o plano de separação Π é dado por $y_*^0 = -\bar{a}/\bar{b}$.

Demonstração. Devemos analisar as soluções do sistema (3.33) para encontrarmos soluções periódicas para o sistema (3.29). Para isto, considere a função

$$I(y_*) = \int_0^T M_2(\rho, y_*, 0, 0) d\rho. \quad (3.36)$$

A função M_2 é uma função definida por partes, então o cálculo da integral (3.36) deve ser dividido em duas partes

$$\begin{aligned} I(y_*) &= I_1(y_*) + I_2(y_*) \\ &= \int_0^{\pi/\beta^-} M_2^-(\rho, y_*, 0, 0) d\rho + \int_{\pi/\beta^-}^T M_2^+(\rho, y_*, 0, 0) d\rho, \end{aligned} \quad (3.37)$$

com

$$\begin{aligned} M_2^-(s, y, 0, 0) &= \left(c_2 e^{-\alpha^- s} + y(v_0 - \sigma^-) e^{(\lambda - \alpha^-)s} \right) \left(\cos(\beta^- s) + \frac{\alpha^-}{\beta^-} \operatorname{sen}(\beta^- s) \right) + \\ & y \sigma^- \left[\cos^2(\beta^- s) - \frac{\alpha^- \gamma^-}{\beta^-} \operatorname{sen}^2(\beta^- s) + \left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} - \gamma^- \right) \operatorname{sen}(\beta^- s) \cos(\beta^- s) \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} M_2^+(r, y, 0, 0) &= \left(c_2 e^{-\alpha^+ r} + y(v_0 - \sigma^+) e^{(\lambda - \alpha^+)r} \right) \left(\cos(\beta^+ r) + \frac{\alpha^+}{\beta^+} \operatorname{sen}(\beta^+ r) \right) + \\ & y \sigma^+ \left[\cos^2(\beta^+ r) - \frac{\alpha^+ \gamma^+}{\beta^+} \operatorname{sen}^2(\beta^+ r) + \left(\frac{\alpha^+}{\beta^+} - \gamma^+ \right) \operatorname{sen}(\beta^+ r) \cos(\beta^+ r) \right], \end{aligned}$$

sendo $r = s - T$.

Calculando (3.37), obtemos

$$\begin{aligned} I_1(y_*) + I_2(y_*) &= 2c_2 \left[\frac{\alpha^- \left(e^{-\alpha^-/\beta^- \pi} + 1 \right)}{(\beta^-)^2 + (\alpha^-)^2} - \frac{\alpha^+ \left(e^{\alpha^+/\beta^+ \pi} + 1 \right)}{(\beta^+)^2 + (\alpha^+)^2} \right] + \\ & y_* \left[\frac{(\tilde{v}_0^c - \sigma^-) \left(1 + e^{-\gamma^- \pi} \right) (2\alpha^- - \lambda)}{(\alpha^- - \lambda)^2 + (\beta^-)^2} - \frac{(\tilde{v}_0^c - \sigma^+) \left(1 + e^{\gamma^+ \pi} \right) (2\alpha^+ - \lambda)}{(\alpha^+ - \lambda)^2 + (\beta^+)^2} \right] + \\ & y_* \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\sigma^-}{\beta^-} \left(1 - \frac{\gamma^- \alpha^-}{\beta^-} \right) + \frac{\sigma^+}{\beta^+} \left(1 - \frac{\gamma^+ \alpha^+}{\beta^+} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Considerando a condição $\alpha^-/\beta^- + \alpha^+/\beta^+ = 0$, vem que

$$I(y_*) = \bar{a} + \bar{b}y_*,$$

sendo \bar{a} e \bar{b} dados em (3.34) e (3.35), respectivamente. A equação $I(y_*) = 0$ possui uma única solução $y_* = y_*^0 = -\bar{a}/\bar{b}$, desde que $\bar{b} \neq 0$. Obviamente, $(y_*, z_*, 0) = (y_*^0, 0, 0)$ é uma solução do sistema

$$\begin{cases} F_1(y_*, z_*, \epsilon) = \int_0^{\tau(\epsilon)} f_1(\rho, x_*, \epsilon) + R_y(\epsilon^2) d\rho = 0, \\ F_2(y_*, z_*, \epsilon) = (e^{\lambda\tau(\epsilon)} - 1)z_* + \epsilon \int_0^{\tau(\epsilon)} f_2(\rho, x_*, \epsilon) + R_z(\epsilon^2) d\rho = 0, \end{cases} \quad (3.38)$$

e, portanto, uma solução do sistema (3.33). Agora, aplicamos o *Teorema da Função Implícita* ao sistema (3.38) com solução $(y_*, z_*, 0) = (y_*^0, 0, 0)$. A matriz jacobiana do sistema é

$$\begin{aligned} J(y_*, z_*, \epsilon) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_*}(y_*, z_*, \epsilon) & \frac{\partial F_1}{\partial z_*}(y_*, z_*, \epsilon) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_*}(y_*, z_*, \epsilon) & \frac{\partial F_2}{\partial z_*}(y_*, z_*, \epsilon) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \bar{b} & 0 \\ 0 & J_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

sendo

$$J_{22} = (e^{\lambda\tau(\epsilon)} - 1) + \epsilon\lambda \int_0^{\tau(\epsilon)} e^{\lambda(\tau(\epsilon)-\rho)} M_1(\rho, x_*, \epsilon) d\rho.$$

O determinante da matriz jacobiana em $(y_*^0, 0, 0)$ é

$$\det(J(y_*, z_*, \epsilon)) = \det \begin{pmatrix} \bar{b} & 0 \\ 0 & (e^{\lambda\tau} - 1) \end{pmatrix}$$

que é diferente de zero se $\bar{b}\lambda \neq 0$. Mas, como $\bar{b} \neq 0$ e, por hipótese, $\lambda \neq 0$, segue que este determinante é não nulo. Logo, existem um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, contendo $\epsilon = 0$, e uma vizinhança V de $(y_*^0, 0)$ tal que $x_*(\epsilon) = (y_*(\epsilon), z_*(\epsilon))$ satisfaz

$$\begin{cases} F_1(y_*(\epsilon), z_*(\epsilon), \epsilon) = 0, \\ F_2(y_*(\epsilon), z_*(\epsilon), \epsilon) = 0, \quad \forall \epsilon \in I. \end{cases}$$

Portanto, $\psi = \psi(s, x_*(\epsilon), \epsilon)$ é uma solução periódica de período $\tau(\epsilon)$ para o sistema (3.29). Finalmente, para garantir a existência de uma órbita periódica para o sistema

(3.17) devemos ter em mente a direção do fluxo no plano de separação Π . Precisamos que $y_*^0 > 0$, isto é, $\bar{a}.\bar{b} < 0$. ■

Para concluir esta seção, veremos agora um exemplo de um sistema perturbado (3.17) com uma órbita periódica persistente.

Considere, o sistema não perturbado (3.5) definido pelas matrizes A^\pm em (3.16). Para tornar esse sistema perturbado como em (3.17), tome $\epsilon = 0.05$ e $c_2 = -0.5$. Fazendo cálculos, obtemos os respectivos valores $\bar{a} = 48,2814$ e $\bar{b} = -23,6191$, e, então, $\bar{a}.\bar{b} < 0$. Pelo **Teorema 3.3.1**, existe uma órbita periódica no retrato de fase deste sistema. Na Figura 3.10, ilustramos esta órbita.

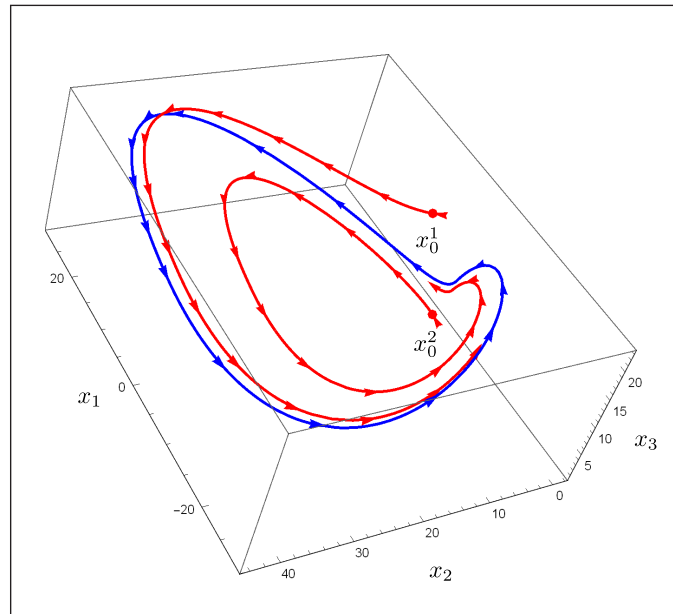


Figura 3.10: Órbita periódica do sistema perturbado (3.17) ilustrada na cor azul. As órbitas representadas em vermelho possuem condições iniciais dadas por $x_0^1 = (1, -0.5, 0.5)$ e $x_0^2 = (7, 0.5, 14)$.

Com a teoria utilizada não foi possível determinar a estabilidade da órbita periódica que persiste. Os resultados numéricos apresentados na Figura 3.10 indicam que a órbita periódica, neste exemplo e para aqueles valores dos parâmetros, é assintoticamente estável.

Conclusões

Nesta dissertação, estudamos os sistemas lineares por partes contínuos em \mathbb{R}^n . Em particular, baseamos nossos estudos em sistemas lineares por partes contínuos em \mathbb{R}^3 (**SLPC3**), com duas zonas. Na Seção 2.2 definimos o que vem a ser tais sistemas. Em seguida, apresentamos os sistemas de controle lineares autônomos, para melhor compreender o conceito de observabilidade. Consideramos o caso não observável, e no **Teorema 3.2.1**, mostramos a existência de cones invariantes em uma família de tais sistemas. Nesta família, encontramos uma subfamília com um único cone invariante hiperbólico folheado por órbitas periódicas.

Para finalizar, perturbamos o sistema (3.5), sob às hipóteses do **Corolário 3.2.1**, para estudar as órbitas periódicas que persistem. A perturbação linear empregada transforma o sistema não perturbado (3.5) em um sistema observável, não homogêneo e com uma variedade invariante no retrato de fase. No **Teorema 3.3.1**, fornecemos condições para a existência de uma órbita periódica do sistema perturbado (3.17) que converge para uma órbita do sistema não perturbado (3.5) quando o parâmetro de perturbação tende à zero. Contudo, não foi possível determinar a estabilidade da órbita periódica que persiste.

Na principal referência [2], utilizada nesta dissertação, encontramos alguns erros na demonstração da **Proposição 3.3.1**, porém estes erros foram corrigidos e não comprometeram o resultado final.

Referências Bibliográficas

- [1] V. Carmona, S. Fernández-García, E. Freire, *Saddle-node bifurcation of invariant cones in 3D piecewise linear systems*, Phys. D, **241** (2012), 623–635.
- [2] V. Carmona, E. Freire, *Periodic Orbits and Invariant Cones in the Three-dimensional Piecewise Linear Systems*, Discrete Cont. Dyn. S., **35** (2015), 59–72.
- [3] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce, F. Torres, *On simplifying and classifying piecewise-linear systems*, IEEE T. Circuits-I., **49** (2002), 609–620.
- [4] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce, F. Torres, *Bifurcation of invariant cones in piecewise linear homogeneous systems*, Internat. J. Bifur. Chaos, **15** (2005), 2469–2484.
- [5] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce, F. Torres, *The continuous matching of two stable linear systems can be unstable*, Discrete and Contin. Dyn. Syst., **16** (2006), 689–703.
- [6] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, New York, McGraw-Hill, 1955.
- [7] A. C. G. Leitão, J. Baumeister, *Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica*, 1ª Edição, IMPA, 2014.
- [8] E. L. Lima, *Álgebra Linear*, 8ª Edição, IMPA, 2012.
- [9] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd Edition, McGraw–Hill, 1987.
- [10] Software WOLFRAM MATHEMATICA: www.wolfram.com/mathematica/.

- [11] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, 2nd Edition, New York, Springer, 1998.
- [12] J. Sotomayor, *Equações Diferenciais Ordinárias*, 1^a Edição, São Paulo, Livraria da Física, 2011.
- [13] V. Sundarapandian, *Numerical linear algebra*, 2nd Edition, Delhi, PHI Learning Private Limited, 2014.
- [14] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Berlin, Springer, 1996.
- [15] F. Zhang, *The Schur Complement and its Applications*, Springer, 2005.