



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Sensor Móvel de Temperatura e Técnica de Problema Inverso não Linear para
Estimação do Aporte de Calor em Processos de Soldagem Autógenos**

Elisan dos Santos Magalhães

Itajubá, Abril de 2018

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Elisan dos Santos Magalhães

**Sensor Móvel de Temperatura e Técnica de Problema Inverso não Linear para
Estimação do Aporte de Calor em Processos de Soldagem Autógenos**

**Tese de doutorado submetida ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como
parte dos requisitos para obtenção do Título
de Doutor em Ciências em Engenharia Mecânica.**

Área de Concentração: Conversão de Energia

**Orientador: Prof. Dr. Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva
Co-Orientadora: Profa. Dra. Ana Lúcia Fernandes de Lima e Silva**

**Abril de 2018
Itajubá**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Elisan dos Santos Magalhães

**Sensor Móvel de Temperatura e Técnica de Problema Inverso não Linear para
Estimação do Aporte de Calor em Processos de Soldagem Autógenos**

Tese aprovada por banca examinadora em 06 de abril de 2018, conferindo ao autor o título de Doutor em Ciências em Engenharia Mecânica.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Hécio Rangel Barreto Orlande – PEM/UFRJ

Prof. Dr. Marcelo José Colaço – PEM/UFRJ

Prof. Dr. Edmilson Otoni Corrêa – IEM/UNIFEI

Prof. Dr. Marcelo José Pirani – IEM/UNIFEI

Prof. Dr. Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva –
IEM/UNIFEI (Orientador)

Profa. Dra. Ana Lúcia Fernandes de Lima e Silva –
IEM/UNIFEI (Co-Orientadora)

Itajubá

2018

Dedicatória

Dedico este trabalho primeiramente ao Senhor Deus, sem o qual não existiria inspiração para desenvolvimento das técnicas presentes neste trabalho. Dedico também a minha família que sempre me apoiou para que eu continuasse nos estudos e seguisse meus objetivos em se tornar um doutor em Engenharia Mecânica.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

Aos meus pais Claudinei e Erenice pelo incentivo e a força dada em todos os momentos da minha vida.

Ao meu irmão Sidnei, minha cunhada Juscilene e minha pequena sobrinha Beatriz por sempre estarem por perto ao meu lado.

A minha irmã Elisandra por querer sempre o melhor para mim.

Aos membros da Igreja Ministério Adonai, que sempre me apoiaram.

Aos meus amigos membros do Laboratório de Transferência de Calor da UNIFEI (LabTC), que me acompanharam durante a confecção deste trabalho.

Ao aluno de doutorado Cristiano Pedro da Silva que me auxiliou em parte das simulações realizadas neste trabalho.

Aos meus orientadores, professor Dr. Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva e sua esposa Dra. Ana Lúcia Fernandes de Lima e Silva, pelos laços de amizades criados e por todo apoio durante a elaboração do trabalho.

Ao Laboratório de Transferência de Calor (LTCM) e Laboratório de Soldagem (LAPROSOLDA) da Universidade Federal de Uberlândia, pela realização de uma parte dos experimentos descritos nesse trabalho.

Ao aluno de doutorado Luiz Eduardo dos Santos Paes e ao Laboratório de Mecânica de Precisão (LMP) da Universidade Federal de Santa Catarina, pela realização dos experimentos de soldagem a laser.

Ao Conselho Nacional do desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro através da concessão de bolsa de iniciação científica durante três anos, e um ano de mestrado, e dois de doutorado.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e ao Conselho de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

A todos os professores e colegas, que ajudaram de forma direta ou indireta na conclusão deste trabalho.

“Pois os olhos do Senhor estão atentos sobre toda a terra para fortalecer aqueles que lhe dedicam totalmente o coração.”

2 Crônicas 16:9

Resumo

Magalhães, E.S. (2018), Sensor Móvel de Temperatura e Técnica de Problema Inverso não Linear para Estimação do Aporte de Calor em Processos de Soldagem Autógenos, Itajubá, 107p. Tese de Doutorado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Apresenta-se neste trabalho uma proposta para estimação transiente do aporte de calor em processos de soldagem autógenos. Essa metodologia é baseada no acoplamento entre uma técnica de problema inverso não linear a técnica do Sensor Móvel de Temperatura. Uma técnica de regularização alternativa que é uma expansão do método Sequencial da Função Especificada (SFSM), foi aplicada junto a técnica de otimização Seção Áurea para a solução do problema não linear. Como modelo direto, resolveu-se a equação da difusão de calor tridimensional não-linear transiente com mudança de fase, modelada em função da entalpia, utilizando o método das diferenças finitas em um software desenvolvido na linguagem C++. A solução dos sistemas lineares de equações algébricas foi realizada através do método SIP (*Strongly Implicit Procedure*) com paralelização em OpenMP por hiperlinhas. O aporte de calor foi estimado para dois processos de soldagem: TIG (*Tungsten Inert Gás*) em aço AISI 304 e Laser em aço SAE 1020. Os dados experimentais em soldagem TIG são obtidos do trabalho de Lima e Silva *et al.* (2003). Nesse estudo, um conjunto de nove condições experimentais foram testadas variando-se o gás de proteção, o ângulo de apontamento e a potência da fonte. O procedimento estatístico de Taguchi foi utilizado para determinação da condição ótima de soldagem. Assim, um novo experimento com as condições ideais de soldagem foi realizado. A eficiência térmica de cada processo foi obtida através da metodologia numérica proposta. Os dados de eficiência foram comparados com os dados de Lima e Silva *et al.* (2003). A análise numérica revelou que a eficiência térmica decresce quando a tocha de soldagem se movimenta. Nos experimentos em soldagem a Laser, uma condição de baixa penetração foi testada. Modelos de distribuição de calor volumétrica foram testados, e a eficiência térmica foi determinada para cada caso. A metodologia proposta mostrou ser viável para a estimação da taxa de transferência de calor e também apresentou uma maior sensibilidade que os métodos usuais para estimação do aporte de calor nos processos de soldagem.

Palavras-chave: Problemas Inversos, Transferência de Calor, Estimação de Fluxo de Calor, Métodos Numéricos e Experimentais, Soldagem TIG, Soldagem a Laser.

Abstract

Magalhães, E.S. (2018), *Temperature Moving Sensor and Non-linear Inverse Problem Technique for the Heat Input Estimation in Autogenous Welding Process*, Itajubá, 107p. Tese de Doutorado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

This work presents a proposal for the unsteady estimation of the heat input in autogenous welding process. The methodology is based on coupling a non-linear inverse problem technique and the Temperature Moving Sensor method. An alternative regularization technique, which is an expansion of the Sequential Function Specification Method (SFSM), was applied with the Golden Section optimization technique for the solution of the non-linear inverse problem. As the direct model, the three-dimensional heat diffusion equation with enthalpy function, to model the phase change problem, was solved using a finite differences scheme in a C++ computational code. The algebraic equation linear system was solved through the Strongly Implicit Procedure (SIP) with hyperlines parallelization in OpenMP. The heat input was estimated for two welding process: Tungsten Inert Gas (TIG) in stainless steel AISI 304 and Laser in steel SAE 1020. The TIG welding experiments are based on data obtained from Lima e Silva *et al.* (2003). In that study, a set of nine experimental conditions were tested varying the shielding gas, pointing angle, and the power supply values. The Taguchi statistical process was used to determine the best approach for the optimal welding condition. Thus, a new experiment with ideal welding conditions was made. The thermal efficiency of each welding condition was obtained through the proposed methodology. The obtained thermal efficiency values were compared with the data obtained from Lima e Silva *et al.* (2003). The numerical analysis shows that thermal efficiency decrease as the welding torch moves. In the Laser welding experiments, a low penetration condition was performed. Volumetric heat distribution models were analyzed, and the thermal efficiency was determined for each case. The proposed methodology proves to be feasible for the welding process heat rate estimation and also presented a higher sensitivity than usual methods for heat rate determination in welding process.

Keywords: Inverse Problems, Heat Transfer, Heat Flux Estimation, Numerical and Experimental methods, TIG Welding, Laser Welding.

Lista de Figuras

Figura 2.1. Modelo direto e inverso.	24
Figura 3.1. Representação de um modelo térmico em um processo de soldagem.	34
Figura 3.2. Distribuição de fluxo de calor cônica.....	37
Figura 3.3. Distribuições de calor no eixo z considerando funções lineares, quadráticas, cúbicas, raiz quadrada e raiz cúbica.	38
Figura 3.4. Volume de controle infinitesimal em coordenadas cartesianas.	39
Figura 3.5. Hiperlinhas em um cubo (DESERNO, 2003).	48
Figura 4.1. Diagrama da TTR.....	51
Figura 4.2. Modelo térmico unidimensional isolado com fluxo prescrito.....	57
Figura 4.3. Aceleração do aquecimento variando-se a condutividade térmica.	58
Figura 4.4. Aceleração do aquecimento variando-se o fluxo de calor.	58
Figura 4.5. Aceleração do aquecimento variando-se a difusividade térmica.	59
Figura 4.6. Aceleração do aquecimento variando-se a posição do sensor.	59
Figura 4.7. Sensor móvel de temperatura.....	60
Figura 5.1. Posicionamento dos termopares na amostra de aço AISI 304.	63
Figura 5.2. Montagem esquemática da bancada experimental (LIMA E SILVA <i>et al.</i> , 2003) 64	
Figura 5.3. a) Montagem experimental, cabeça de soldagem a laser, amostra e termopares, b) posição dos termopares	66
Figura 5.4. Posição dos termopares no aço SAE 1020.....	66
Figura 6.1. Malha não-uniforme aplicada na simulação em soldagem.	68
Figura 6.2. a) Posicionamento do sensor no teste de convergência de malha, b) Teste de convergência de malha para a simulação de soldagem.	69
Figura 6.3. Resposta da temperatura ao fluxo triangular proposto.....	70
Figura 6.4. Fluxo de calor estimado para o vetor de erros aleatórios: a) $\mathbf{Y} = \mathbf{T} \pm 0$; b) $\mathbf{Y} = \mathbf{T} \pm 0,326 \times 10^{-03}$; c) $\mathbf{Y} = \mathbf{T} \pm 0,163 \times 10^{-02}$; e d) $\mathbf{Y} = \mathbf{T} \pm 0,326 \times 10^{-02}$	71
Figura 6.5. Potência estimada para diferentes números de sensores para o caso experimental A08.....	73
Figura 6.6. Taxa de calor estimada com dados aleatórios.	75

Figura 6.7. Diferença entre as temperaturas simuladas e as temperaturas com dados aleatórios adicionados.....	75
Figura 6.8. Temperatura experimental na superfície oposta para o caso de aquecimento A0277	
Figura 6.9. Temperatura experimental na superfície oposta para o caso de aquecimento A03.	77
Figura 6.10. Temperatura do sensor móvel nos testes A02 e A03.	78
Figura 6.11. Coeficiente de sensibilidade para um único sensor de temperatura para o caso OPT (Tab. 5.1).....	79
Figura 6.12. Coeficiente de sensibilidade para o sensor móvel de temperatura para o caso OPT (Tab. 5.1).	80
Figura 6.13. Taxa de aquecimento e eficiência térmica para o teste de soldagem A02.	81
Figura 6.14. Taxa de aquecimento e eficiência térmica para o teste de soldagem A03.	82
Figura 6.15. Comparação entre as temperaturas experimentais Y e numéricas T para o teste A02.	84
Figura 6.16. Comparação entre as temperaturas experimentais Y e numéricas T para o teste A03.	84
Figura 6.17. Campo de temperaturas em K para o caso de soldagem TIG A02 no instante $t = 19s$	85
Figura 6.18. Perfil transversal do cordão de solda com as correspondentes dimensões de largura e penetração.....	86
Figura 6.19. Fração mássica (f_m) para uma distribuição de calor bidimensional gaussiana.	87
Figura 6.20. Perfil do cordão de solda representado pela fração mássica (f_m) para os cinco casos analisados.	88
Figura 6.21. Sobreposição entre o campo de temperaturas do caso A05 e micrografia (Fig. 6.18)	89
Figura 6.22. Comparação entre as temperaturas numéricas e experimentais para os modelos A01 a A05.	90
Figura 6.23. Temperatura do sensor móvel	91
Figura 6.24. Taxa de calor estimada para o caso proposto.....	92
Figura 6.25. Distribuição de calor para o instante $t = 0,8 s$ para o caso A05.	92
Figura A.1. Hiperlinhas em um cubo (DESERNO, 2003).	103

Lista de Tabelas

Tabela 5.1. Condições de soldagem de Lima e Silva <i>et al.</i> (2003)	63
Tabela 6.1. Comparação entre a taxa de aquecimento estimada e a eficiência térmica apresentada por Lima e Silva <i>et al.</i> (2003) e obtida neste trabalho	83
Tabela 6.2. Valores numéricos para largura e penetração para os cinco casos analisados	88
Tabela 6.3. Comparação entre as taxas de calor estimadas para os casos analisados	91

Lista de Algoritmos

Algoritmo 4.1. Algoritmo da Seção Áurea com a Regularização de Viagem no Tempo (TTR)	53
Algoritmo A.1. Decomposição LU incompleta.....	101
Algoritmo A.2 Matriz de ponteiros H_p	104
Algoritmo A.3 Cálculos dos resíduos.....	104
Algoritmo A.4 Substituição para Frente.....	105
Algoritmo A.5 Substituição para trás e atualização	105

Lista de Abreviaturas e Siglas

Letras Latinas

A_q	Área de aquecimento	m^2
a	Coefficiente do sistema linear	$1/m^2$
\mathbf{a}	Matriz coeficientes do <i>Strongly Implicit Procedure</i> (SIP)	
\mathbf{b}	Matriz termo fonte do sistema linear	K/m^2
C_1	Variável auxiliar do método iterativo da fração mássica	
COR	Correção necessária	
c	Raio característico da distribuição de calor	m
c_p	Calor específico a pressão constante	J/kgK
E	Vetor de erros	$^{\circ}C$
F_{obj}	Função objetivo	$^{\circ}C^2$
F_1	Função objetivo 1 do método da Seção Áurea	$^{\circ}C^2$
F_2	Função objetivo 2 do método da Seção Áurea	$^{\circ}C^2$
f_m	Fração mássica	
H	Função entalpia	J/kG
H_a	Altura da amostra	m
h	Coefficiente de convecção	W/m^2K
g	Contador para iteração do método da fração mássica	
i	Contador relativo ao eixo x	
ii	Contador para os passos de tempo da sensibilidade	
j	Contador relativo ao eixo y	
jj	Contador para o tempo	
k	Contador relativo ao eixo z	
\mathbf{L}	Matriz triangular superior ou hiperlinha no SIP	
L_f	Calor latente de fusão	J/kg
L_a	Largura da amostra	m
N	Número de elementos de uma determinada matriz	
P	Potência da fonte	W
Q	Taxa de aquecimento	W
q''	Fluxo de calor	W/m^2

q_{ref}	Valor do fluxo de calor de referência	W/m ²
R	Vetor resultado	
S	Matriz sensibilidade	
r_s	Raio da área circular onde é aplicado o calor	m
res	Matriz de resíduos	
T	Temperatura numérica	°C
T^*	Matriz temperatura anterior	
T_f	Temperatura de fusão	°C
T_∞	Temperatura ambiente	°C
$Termos$	Somatório de coeficientes no passo de tempo $p+1$	K/m ²
t	Tempo físico	s
t_f	Tempo de observação dos dados	s
U	Matriz triangular inferior	
u	Velocidade de soldagem	m/s
u_x	Velocidade de soldagem na direção x	m/s
V	Matriz erro de decomposição	
X_l	Variável do método da Seção Áurea	
X_u	Variável do método da Seção Áurea	
X_1	Variável do método da Seção Áurea	
X_2	Variável do método da Seção Áurea	
x	Eixo cartesiano	
W_a	Profundidade da amostra	m
Y	Vetor temperatura experimental	
y	Eixo cartesiano	
z	Eixo cartesiano	

Letras Gregas

α	Difusividade térmica	m^2/s
α_{SIP}	Parâmetro para determinar coeficientes no SIP	
Δ	Varição de uma determinada variável	
λ	Condutividade térmica do material	W/mK
γ	Parâmetro de regularização de Tikhonov	
ε	Emissividade	
ε^T	Erro de convergência	
ϕ	Temperatura adimensional	
η_T	Eficiência térmica	
ρ	Massa específica	kg/m^3
σ	Constante de Stefan-Boltzmann	$\text{W}/\text{m}^2\text{K}^4$
ς	Fator de sobre-relaxação	
τ	Razão áurea	

Sobrescritos

j	Relativo ao passo de tempo
r	Número de tempos futuros
M	Contador <i>Specification Function Sequential Method</i> (SFSM)
p	Relativo ao passo de tempo
t	Relativo a matriz transposta
"	Relativo ao fluxo de calor

Subscritos

<i>b</i>	Relativo a parte posterior
<i>e</i>	Relativo ao leste
<i>f</i>	Relativo a parte frontal
<i>i</i>	Relativo a direção cartesiana referente ao eixo x
<i>j</i>	Relativo a direção cartesiana referente ao eixo y
<i>K</i>	Relativo a escala Kelvin
<i>k</i>	Relativo a direção cartesiana referente ao eixo z
<i>máx</i>	Relativo ao valor máximo, ou ultimo valor
<i>n</i>	Relativo ao norte
<i>o</i>	Relativo a origem
<i>obj</i>	Relativo a função objetivo
<i>opt</i>	Relativo ao valor ótimo
<i>p</i>	Relativo ao passo de tempo
<i>TTR</i>	Relativo a <i>Time Traveling Regularization</i>
<i>SFSM</i>	Relativo ao Método Sequencial da Função Especificada
<i>s</i>	Relativo ao sul
<i>x</i>	Relativo a coordenada cartesiana x
<i>y</i>	Relativo a coordenada cartesiana y
<i>w</i>	Relativo ao oeste
<i>z</i>	Relativo a coordenada cartesiana z
∞	Relativo ao ambiente
0	Relativo a posição ou temperatura inicial

Siglas

AC	Corrente Alternada
BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
DC	Corrente contínua
GTA	<i>Gas Tungsten Arc</i>
SIP	<i>Strongly Implicit Procedure</i>
SFSM	<i>Sequential Function Specification Method</i>
TIG	<i>Tungsten Inert Gas</i>
TTR	<i>Time Travelling Regularization</i> (Regularização de Viagem no Tempo)

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	19
1.1 Processos de Soldagem.....	19
1.2 Uma Introdução aos Problemas Inversos	20
1.3 Objetivos.....	22
CAPÍTULO 2 - REVISÃO DA LITERATURA.....	24
2.1 Problemas Inversos.....	24
2.2 Problemas Inversos em Condução de Calor (IHCP)	25
2.2.1 Introdução.....	25
2.2.2 Técnicas de solução de Problemas Inversos	25
2.3 Análise Térmica de Processos de Soldagem	29
2.3.1 Uma introdução às simulações em soldagem.....	29
2.3.2 Métodos de comparação de processos de soldagem	30
2.3.3 Problemas Inversos aplicados a processos de soldagem.....	31
CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA TEÓRICA	34
3.1 Modelagem Matemática	34
3.1.1 Modelo térmico tridimensional para um processo de soldagem.....	34
3.1.2 Distribuição do aporte de calor	36
3.2 Modelagem Numérica	39
3.2.1 Solução em diferenças finitas para o problema direto	39
3.2.2 Solução da função não-linear da entalpia.....	43
3.2.3 Método SIP Paralelo.....	45
3.2.4 Decomposição LU do método SIP	46
3.2.5 Paralelização por hiperlinhas	48
CAPÍTULO 4 – TÉCNICAS DE PROBLEMAS INVERSOS.....	49
4.1 O Problema Inverso em Condução de Calor (IHCP)	49
4.2 Regularização de Viagem no Tempo (TTR)	50
4.2.1 Função Objetivo TTR.....	51
4.2.2 Algoritmo TTR.....	52
4.3 Método Sequencial da Função Especificada (SFMS)	54

4.4 Regularização de Tikhonov	55
4.5 Tempo de Resposta.....	56
4.6 Sensor Móvel de Temperatura.....	60
4.7 Coeficiente de Sensibilidade	61
CAPÍTULO 5 – PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL	62
5.1 Processo de Soldagem TIG.....	62
5.2 Processo de Soldagem a Laser.....	65
CAPÍTULO 6 – RESULTADOS E DISCUSSÕES	67
6.1 Testes de Validação da Metodologia.....	67
6.1.1 Teste de convergência de malha.....	67
6.1.2 Erros Aleatórios.....	69
6.1.3 Sensor Móvel de Temperatura	72
6.1.4 Interferência de Ruídos nas Simulações de Soldagem.....	74
6.2 Simulações para o Processo de Soldagem TIG	76
6.2.1 Sensor Móvel de Temperatura	76
6.2.2 Análise de sensibilidade	78
6.2.3 Análise térmica do processo de soldagem TIG.....	80
6.3 Simulações para o Processo de Soldagem a Laser	85
6.3.1 Análise do formato do cordão	86
6.3.2 Análise térmica do processo de soldagem a Laser.....	89
CAPÍTULO 7 – CONCLUSÕES	93
7.1 Conclusões Gerais	93
7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros	94
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	95
ANEXO A – MÉTODO SIP PARALELO	101

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 Processos de Soldagem

A soldagem é o processo de coalescência de materiais como aços ou plásticos para a junção entre eles. O processo de soldagem envolve a aplicação de calor e pressão aos materiais a serem juntados, além do material de adição que pode ser adicionado, para criação de uma poça de soldagem que se resfria para formação de uma junta forte. Os processos de soldagem são classificados em dois tipos: autógenos e exógenos. A soldagem autógena é aquela em que duas extremidades são aquecidas e unidas sem metal de adição. No caso de soldagem exógena, a união é feita através de um material de adição entre as superfícies a se unirem. Os processos de soldagem analisados no presente trabalho são autógenos, ou seja, não envolvem materiais de adição. A seguir são apresentadas suas principais características.

No processo de soldagem Tungstênio Gás Inerte (TIG ou GTA) o arco é formado entre a ponta do eletrodo de tungstênio e a peça em uma atmosfera de Argônio ou Hélio. Na soldagem em corrente contínua (DC), o eletrodo normalmente tem uma polaridade negativa. Sua emissão de elétrons num processo térmico e iônico reduz o risco de superaquecimento que pode ocorrer com um eletrodo de polaridade positiva. O gás ionizado ou uma corrente de plasma pode ser formado e assim reter a temperatura de milhares de graus centígrados no mínimo no centro do núcleo do arco perto do eletrodo. Conseqüentemente, através da gama de correntes que pode ser aplicada, desde uma fração de um Ampère até centenas de Ampères (selecionado de acordo com a espessura do material), uma rápida fusão pode ser obtida. O calor requerido para fusão do processo é determinado experimentalmente relacionando a corrente com a velocidade de soldagem, normalmente entre 0,1-300A (LUCAS, 1990).

Como o eletrodo não é consumido durante o processo de soldagem, o metal de adição quando requerido para preencher uma junta deve ser adicionado separadamente em forma de uma vareta. O gás fornecido ao arco tem duas funções; ionizar o gás e proteger o eletrodo, a poça de fusão e o cordão de soldagem de uma oxidação indesejável. O arco é em forma de um cone. O tamanho do cone é determinado pela corrente, pelo diâmetro do eletrodo, o apontamento e pelo ângulo da tocha. No entanto as características de penetração são

determinadas principalmente pela intensidade da corrente, composição do gás de proteção e a velocidade de soldagem (LUCAS, 1990)

A palavra LASER é um acrônimo para luz amplificada pela estimulação de emissão de radiação (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*). O laser é composto de três elementos básicos: meio, fonte e ressoador. O meio do laser é o material no qual o laser é gerado. Para lasers no estado sólido o meio é tipicamente compreendido de um material hospedeiro dotado com um elemento de laser ativo. A fonte fornece a energia de ativação necessária para o meio do laser, possibilitando a geração a laser. O ressoador controla o laser gerado no meio, e consiste de um espelho refletor traseiro de 100% e um refletor frontal parcial (XIAODONG, 2010).

A soldagem a laser necessita que o laser aumente a temperatura do material a ser soldado. O laser deve ser absorvido pelo material para induzir um aumento de temperatura. Portanto, o laser é focado no material similarmente da maneira que o sol pode ser focado através de uma lente de aumento. A diferença é que a densidade de potência do laser é de várias ordens de magnitude maior (XIAODONG, 2010).

Considerando a demanda recorrente para melhor produção e qualidade, o processo de soldagem a laser tem ganhado uma maior relevância em relação aos processos a arco fotovoltáico. No entanto, o processo de soldagem a laser tem um elevado custo envolvido em equipamentos e consumíveis. O processo também demanda mão de obra qualificada para operação dos sistemas além de possuir padrões de segurança muito elevados. Ayoola, Suder e Williams (2017) sugeriram a minimização dessas desvantagens através da troca das variáveis usualmente adotadas, como potência do laser e velocidade de soldagem, por outras baseadas em energia espacial e temporal, como densidade de potência, tempo de interação e densidade de energia. Portanto, a mesma escolha de parâmetros pode ser usada para muitos problemas e não apenas para problemas específicos. No entanto, ainda é necessário realizar um considerável número de experimentos para atingir a otimização desejada.

1.2 Uma Introdução aos Problemas Inversos

Problemas Inversos podem ser aplicados a diversas áreas do conhecimento humano. Em engenharia mecânica encontram-se aplicações na mecânica dos fluidos, processamento de imagens, vibrações, metalografia, e dentre outras áreas tem-se também as aplicações em

transferência de calor. A solução de Problemas Inversos através de métodos de otimização tem aumentado nos últimos anos. Os métodos de otimização usualmente requerem uma regularização para eliminação de ruídos dos dados de saída. Existem também métodos puramente inversos, desenvolvidos com a finalidade de estimação de uma determinada variável. Esse é o caso do Método Sequencial da Função Especificada (*Sequential Function Specification Method* – SFSM) (BECK; BLACKWELL; CLAIR, 1985). A partir de temperaturas obtidas experimentalmente, esse método matemático possibilita a estimação do fluxo de calor em amostras finas através da análise de dados futuros. No entanto, esse método em especial possui limitações, pois apresenta problemas quando aplicado em modelos não-lineares, por ser baseado no teorema de Duhamel que considera aproximações lineares para as derivadas numéricas.

A introdução de análises em tempos futuros da SFSM permitiu a regularização do fluxo de calor, no domínio temporal. Tendo como motivação essa ideia, nesse trabalho aplicou-se uma modificação da SFSM usando-se tempos futuros a um método de otimização tradicional para estimação do aporte de calor em processos de soldagem autógenos. Assim, visando eliminar a aproximação linear para as derivadas, a técnica da Seção Áurea (VANDERPLAATS, 2005) foi escolhida. No entanto, a introdução de tempos futuros não é uma tarefa simples, pois o modelo direto deve considerar que a variável a ser minimizada deve ser linear durante alguns passos de tempo, e voltar ao seu estado original para a próxima etapa de minimização. Essa análise temporal funciona como uma regularização. Diferentemente do processo de regularização convencional, que precisa de informações prévias para realizar a minimização, a regularização utilizada no trabalho analisa temporalmente o efeito que um determinado parâmetro terá em tempos futuros. Portanto, o método deve avançar no domínio temporal analisado e retornar ao passo de tempo que está sendo otimizado. Essa técnica chama-se Regularização de Viagem no Tempo (*Time Traveling Regularization* – TTR) (MAGALHÃES *et al.*, 2018).

Apresenta-se no capítulo 2 deste trabalho uma revisão bibliográfica com alguns trabalhos da literatura, e exemplos de aplicações do Problema Inverso em Condução de Calor (*Inverse Heat Conduction Problem* – IHCP). Apresenta-se também as principais características dos dois processos de soldagem analisados no trabalho: TIG (*Tungsten Inert Gas*) e laser. Em seguida, são apresentadas algumas das principais técnicas de solução de problemas inversos. Este capítulo também conta com uma revisão sobre a análise térmica em processos de soldagem e exemplos de aplicação de problemas inversos em processo de soldagem.

No capítulo 3 apresenta-se o detalhamento do modelo térmico. Para isso é apresentado o modelo térmico tridimensional que é aplicado ao processo de soldagem. Também é apresentada a solução por diferenças finitas com formulação implícita para o problema direto além de se mostrar também a solução da equação não-linear da entalpia utilizada para modelagem da mudança de fase no processo de soldagem. Também é apresentado o método de soluções algébricas SIP paralelo.

Três metodologias para a solução de problemas inversos aplicados a Transferência de Calor são apresentadas no capítulo 4: TTR, SFSM e Regularização de Tikhonov. Neste capítulo, a definição matemática de um problema inverso em condução de calor é exposta. Apresenta-se também a definição do tempo de resposta de um ponto da amostra, além da técnica do sensor móvel de temperatura, e o coeficiente de sensibilidade utilizado.

No capítulo 5 apresentam-se os procedimentos experimentais utilizados para validação da metodologia proposta. Nesse capítulo são descritos os experimentos realizados para o estudo numérico do processo de soldagem TIG (*Tungsten Inerte Gas*) em aço AISI 304, bem como o procedimento experimental adotado para o processo de soldagem a Laser.

No capítulo 6, são apresentados os testes de validação da metodologia proposta: testes de convergência de malha, análises via erros aleatórios, testes para o sensor móvel de temperatura e análises sobre interferência de ruídos na estimação em processo de soldagem. Além disso, análises térmicas detalhadas dos resultados para as metodologias propostas neste trabalho são apresentadas. São apresentados os resultados obtidos para as simulações em soldagens de aço inox AISI 304, e soldagem a Laser em aço SAE 1020. No capítulo 7 são apresentadas as conclusões gerais sobre o trabalho, e as sugestões para trabalhos futuros.

1.3 Objetivos

Objetivou-se com esse trabalho o desenvolvimento de uma metodologia alternativa para a estimação do aporte de calor em processos de soldagem TIG e laser. O modelo direto é baseado na solução da equação da difusão de calor tridimensional transiente com propriedades térmicas variáveis com a temperatura e modelagem da mudança de fase através do método da entalpia. O modelo inverso é baseado no acoplamento entre o método de otimização da Seção Áurea com a TTR. A estimação do aporte de calor transiente para o processo de soldagem é dada pela metodologia proposta do sensor móvel de temperatura.

Para o processo de soldagem TIG, uma comparação entre um conjunto de condições de soldagem é apresentada. Para isso, o rendimento térmico obtido pelo modelo numérico é usado como fator de comparação entre os experimentos realizados para determinação do procedimento ótimo de soldagem.

Cinco modelos de distribuição tridimensional de taxa de aquecimento na chapa soldada são apresentados e analisados quanto o formato transversal do cordão e a sua influência nas temperaturas do processo de soldagem a laser.

Além disso, uma análise térmica detalhada dos processos de soldagem TIG e Laser é apresentada.

CAPÍTULO 2 - REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Problemas Inversos

Um problema inverso pode ser apresentado como a determinação de causas a partir de efeitos observados. A solução a partir dos problemas inversos é geralmente requerida quando é difícil de medir um determinado parâmetro para ser usado em um modelo direto, como por exemplo o fluxo de calor ou propriedades térmicas (CUI; GAO; ZHANG, 2012; DAL; LE MASSON; CARIN, 2014). Em alguns processos como soldagem ou usinagem, o fluxo de calor é um parâmetro difícil de ser obtido experimentalmente. Portanto, se os dados de temperatura numa superfície que se tem acesso são medidos, o fator de causa ou mais precisamente o fluxo de calor pode ser determinado através da análise inversa.

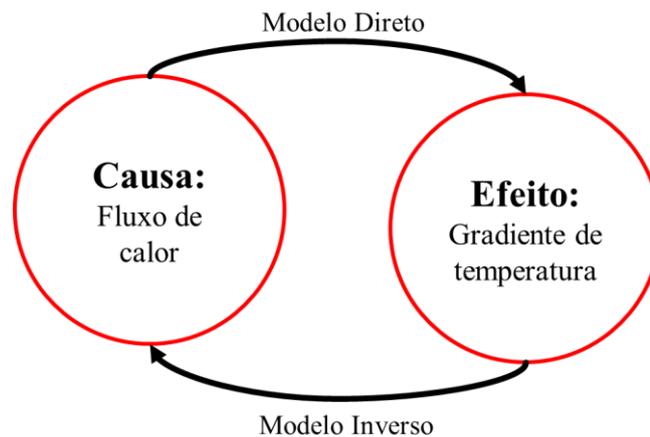


Figura 2.1. Modelo direto e inverso.

No entanto, os efeitos medidos, tais como os dados de temperatura, possuem alguma interferência. Essas interferências no processo de medição induzem a erros experimentais. Esses fatores fazem a observação experimental imprecisa. Como exemplo de aplicações de problemas inversos pode-se citar: processos de detecção de materiais metálicos no solo através de emissão de radiação, tomografia, reconstrução de imagens e estimação de parâmetros térmicos baseados em medição de temperatura (MOURA NETO; DA SILVA NETO, 2013).

A estimação das propriedades usadas em modelos matemáticos de problemas físicos é uma classe especial de problemas inversos chamada de problemas de identificação. Nesses casos pode-se determinar a condutividade térmica, difusividade térmica, emissividade e coeficiente de convecção como sendo dependentes ou não da temperatura e do espaço (MOURA NETO; DA SILVA NETO, 2013).

2.2 Problemas Inversos em Condução de Calor (IHCP)

2.2.1 Introdução

Em um problema inverso de estimação de fluxo de calor (*Inverse Heat Conduction Problem* – IHCP), deseja-se determinar esse parâmetro em uma região de uma amostra a partir de medições de temperatura feitas a partir de pontos acessíveis. Nesses casos, o fluxo de calor, por exemplo, pode ser determinado como condição de contorno.

A solução de um IHCP normalmente é feita a partir de técnicas de otimização. Em processos de otimização, a variável a ser minimizada deve mudar a cada iteração para que a grandeza medida em um determinado ponto da amostra se aproxime do valor obtido pelo modelo numérico, e assim, o processo iterativo convirja. No entanto, esse processo de estimação é afetado quando os dados apresentam ruído experimental ou ainda quando esses apresentam baixa sensibilidade ao parâmetro a ser determinado, ou seja, quando a taxa de variação dos dados experimentais em relação ao parâmetro a ser estimado é pequena.

Existem muitas técnicas que são aplicadas a solução de problemas inversos. Algumas delas são descritas na subseção a seguir.

2.2.2 Técnicas de solução de Problemas Inversos

O estudo de técnicas inversas para solução de problemas inversos vem aumentando nos últimos anos. Alguns autores desenvolveram metodologias exclusivas para solução de problemas de estimação de fluxo de calor, como por exemplo a técnica da Função Especificada desenvolvida por Beck, Blackwell e Clair (1985). Essa técnica numérica tem por finalidade estimar o fluxo de calor em amostras sujeitas a aquecimento prescrito em uma de suas

superfícies. Até hoje a Função Especificada é considerada muito importante no estudo de problemas inversos pois ela assume o fluxo de calor como sendo constante por alguns intervalos de tempo futuros. Portanto, a técnica considera também a influência temporal que um determinado parâmetro possui nos dados de saída. Somasundaram e Tay (2012) usaram o método da Função Especificada para estimação do fluxo de calor em um estudo de resfriamento em um componente eletrônico; Mohammadi *et al.* (2014) aplicaram a Função Especificada para monitorar o resfriamento de superfícies recém solidificadas.

Apesar de ser muito utilizada, essa técnica possui algumas limitações. Devido a técnica ser baseada no teorema de Duhamel, que considera uma aproximação linear para a derivada numérica, ela pode ser usada para problemas não lineares, mas possui suas limitações (BECK; BLACKWELL; CLAIR, 1985). Portanto, ela não é recomendada para ser aplicada por exemplo em problemas com mudança de fase.

Um dos processos de regularização mais conhecidos foi proposto por Tikhonov e Arsenin (1977). É um método muito aplicado em várias áreas da engenharia não se limitando apenas a estimação do fluxo de calor. Por exemplo, Grasmair, Haltmeier e Scherzer (2011) desenvolveram um critério matemático de estabilidade e convergência para uma aplicação do método residual na regularização de Tikhonov; Cheng, Hofmann e Lu (2013) aplicaram a regularização de Tikhonov no domínio de Banach para o estudo de condições de estabilidade em problemas inversos.

No entanto a regularização de Tikhonov possui grandes limitações quando a variável estimada sofre variações súbitas, por exemplo no ligamento e desligamento de um aquecedor. Para esses casos, o método tende a retardar a estimação devido a condição de estabilidade imposta ao método (ROTHS *et al.*, 2001).

Além da técnica de Tikhonov, outros métodos de regularização de problemas inversos continuam sendo desenvolvidos. Por exemplo, Roths *et al.* (2001) propuseram um método de regularização geral para problemas inversos não lineares. Solodky e Volynets (2011) apresentaram um método semi-iterativo com uma estratégia adaptativa de discretização para solução de problemas inversos.

Outra metodologia para o estudo de problemas inversos é a utilização de aproximações Bayesianas. Em contraste com os métodos de otimização e de regularização, a abordagem Bayesiana é um método estatístico. Ele pode ser descrito como uma estrutura para a modelagem do problema completo em termos de probabilidade. Isto é, a imposição de análises estatísticas leva as respostas para os problemas inversos (KAPIO; FOX, 2011).

Enquanto os métodos convencionais tentam obter uma solução única para uma variável, a abordagem Bayesiana visa explorar a distribuição de probabilidade para determinar a incerteza das variáveis, dados os erros de medição e truncamentos inerentes em todos os modelos. Nessas análises, a probabilidade dos eventos acontecerem pode ser também levada em conta e pode ser calculada junta na estrutura do problema (BERGER, 1985).

Alguns autores usam também as funções de Trefftz para minimizar fluxo de calor em problemas em regime permanente. O método de Trefftz foi descrito pela primeira vez em 1926 por Erich Immanuel Trefftz (TREFFTZ, 1926). Esse método é aplicado para resolver equações diferenciais parciais através de uma combinação linear de funções que satisfazem uma dada equação. Usando as funções de Trefftz, a determinação do fluxo de calor pode ser dada através de relaxações e sobre relaxações de parâmetros até que a função objetivo seja minimizada. Esse método pode ser usado para estimação não-linear de problemas estacionários de transferência de calor como o apresentado por Grysa, Maciag e Pawinska (2012).

Existem ainda os métodos de otimização que são aplicados para estimação de outros parâmetros em problemas inversos. Por exemplo, Huang e Wang (1999) aplicaram o método do gradiente conjugado junto com o pacote comercial CFX para estimação do fluxo de calor num domínio 3D irregular. Nesse trabalho, os autores utilizaram experimentos numéricos para a realização desses testes. Várias condições de fluxo de calor foram impostas ao domínio analisado, e então erros aleatórios foram adicionados as curvas de resposta da temperatura. A partir de então, os autores realizarão o procedimento inverso para determinação do fluxo de calor. O modelo proposto pelos autores conseguiu a determinação precisa do fluxo de calor mesmo quando a amplitude dos erros aleatórios foi levemente aumentada.

Outro exemplo é o trabalho de Adili, Kerkeni e Ben Nasralla (2009) usaram o método de estimação de Gauss-Newton para estimação das propriedades termofísicas de um fluido dentro de um trocador de calor. Em seu modelo os autores estimaram a variação da condutividade térmica em função da deposição de incrustações em um trocador de calor. Para isso os autores minimizaram uma função resíduo quadrática entre a temperatura medida e a calculada através da equação da difusão unidimensional transiente. Em suas análises os autores encontraram que a deposição de cerca de 1 mm de incrustações diminui a eficiência térmica do trocador de calor em 10%.

Mulcahy *et al.* (2009) usaram o método da máxima descida para a estimação do calor gerado pelo núcleo de um foguete. Para isso os autores utilizaram como modelo direto a equação da difusão 3D em coordenadas cilíndricas. Uma função objetivo baseada em mínimos

quadrados foi utilizada para minimização do fluxo de calor rejeitado pela carcaça do foguete. Os autores encontraram que a carga de calor média foi de 40% da potência aplicada.

Konda Reddy e Balaji (2012) aplicaram a técnica da Seção Áurea para a estimação do coeficiente de transferência de calor em uma aleta retangular horizontal. Para isso a equação da difusão de calor para uma aleta vertical fina foi minimizada através de uma função objetivo de mínimos quadrados. Experimentos em regime permanente e de convecção natural foram realizados. O método inverso possibilitou a proposição de uma correlação para a estimação do número de Nusselt local.

Shabgard e Akhbari (2016) determinaram o fluxo de calor em um processo de descarga elétrica (EDM) através do método de Levenberg–Marquardt, que é uma combinação entre os métodos de Gauss-Newton e o método da máxima descida. Para isso, os autores contaram com um modelo direto baseado na equação da condução bidimensional. Os autores obtiveram o fluxo de calor de uma fonte pontual em um problema retangular, conseqüentemente determinando a energia transferida para a peça de trabalho no processo EDM.

Similarmente, novas técnicas de solução de problemas inversos continuam sendo desenvolvidas. Por exemplo, Zhang e Mammadov (2012) propuseram um método para solução de problemas inversos em larga-escala baseado nas condições de Karush-Kuhn-Tucker, função de Firsher-Burmeister e no princípio da discrepância. O ponto fundamental desse novo método é a não necessidade da imposição de um parâmetro de regularização. Cui, Gao e Zhang (2012) apresentaram um método para estimar as propriedades térmicas usando soluções inversas de estimação de fluxo de calor. Nessa metodologia, um método de diferenciação complexa da variável num IHCP transiente foi aplicado para determinação do coeficiente de sensibilidade. Como resultado, os autores obtiveram a capacidade de calor volumétrica, difusividade térmica e condutividade térmica para a amostra analisada.

A seguir é apresentada uma revisão sobre procedimentos de análise térmica em processos de soldagem. A primeira parte apresenta um histórico de simulações em soldagem, seguida pelos métodos atuais de comparação de processos de soldagem. Por último apresenta-se uma revisão sobre problemas inversos aplicados a estimação de parâmetros em soldagem.

2.3 Análise Térmica de Processos de Soldagem

2.3.1 Uma introdução às simulações em soldagem

A soldagem é um importante processo de fabricação que é usado na montagem de produtos em muitas indústrias. Durante a realização da soldagem, parâmetros inadequados podem induzir defeitos nas junções, o que pode afetar a integridade estrutural da junta soldada e provocar acidentes durante a utilização do produto soldado. Para otimizar esses parâmetros, o método empírico é usualmente o mais utilizado. No entanto, isso requer inúmeros testes experimentais, com a finalidade de investigar cada variável envolvida.

Com o grande avanço computacional dos últimos 50 anos, as análises numéricas de processos de soldagem passaram a ganhar espaço em relação ao método empírico. Um dos primeiros autores a usarem o método numérico para explicação de fenômenos que ocorrem em soldagem foi Chihoski (CHIHOSKI, 1972a, 1972b, 1979). Em seus estudos, Chihoski propôs uma teoria para explicar porque juntas soldadas falham em certas condições. Sua teoria era baseada em uma junta soldada dividida em duas partes: longitudinal e transversal. Chihoski portanto calculou a expansão e contração térmica de cada uma dessas faixas devido ao campo de temperatura nas bordas da parte inferior da junta. O autor concluiu que existia uma zona de intensa compressão biaxial próxima da poça de soldagem. Acima do campo de compressão poderia haver uma fenda ou um campo de tensões residuais. Atrás do campo de compressão uma rachadura ou um campo de tensões poderia aparecer. A teoria de Chihoski estipulava que variando o procedimento de soldagem, a posição do campo de compressão podia ser controlada. Para validar a metodologia foi desenvolvida uma técnica de medição de deslocamento durante o processo de soldagem. Sua teoria foi usada para entender e resolver muitos problemas relativamente comuns em soldagem. Ele considerou a posição e pressão dos dedos do operador na tocha, a influência de pontos quentes ou frios na amostra e os efeitos de disparidade. Chihoski propôs que esses parâmetros poderiam ser otimizados para obter uma solda livre de falhas.

Muitos autores consideram os artigos de Chihoski como sendo os trabalhos mais importantes em soldagem computacional porque ele combinou sua experiência como soldador a uma visão interna do processo. Essas características o levaram a conceber uma teoria que racionalizasse suas observações e predições de soluções para seus problemas.

A análise do processo de soldagem via métodos numéricos ganhou força no final dos anos 90 devido ao avanço computacional (WIKANDER, 1996; MOLTUBAK, 1999; VOLDEN, 1999; PILIPENKO, 2001). Assim, novas metodologias de comparação de processos de soldagem foram desenvolvidas, especialmente correlacionadas com a área térmica. A seguir, apresenta-se uma revisão sobre os métodos mais comuns utilizados para comparação entre processos de soldagem.

2.3.2 Métodos de comparação de processos de soldagem

Em soldagem, a eficiência térmica é um importante parâmetro para se comparar diferentes condições de trabalho. Para um mesmo processo, existem várias combinações de corrente e tensão e compara-los para determinação da configuração ótima é usualmente difícil. A melhor configuração para um processo de soldagem pode ser determinada através de um controle estatístico. Por exemplo, Koleva (2005) usou a análise estatística para comparar a eficiência térmica de diferentes condições experimentais em processos de soldagem a laser. Alfaro, Carvalho e Cunha (2006) aplicaram uma análise estatística para comparar diferentes níveis de frequência em processos de soldagem; Benyounis e Olabi (2008) usaram técnicas numéricas e estatísticas para determinar a configuração que fornece a melhor qualidade à junta soldada. No entanto, a aproximação estatística requer muitos experimentos, o que pode encarecer sua obtenção. Outra maneira de determinar a melhor configuração do processo de soldagem é através do rendimento térmico do processo. O rendimento térmico é representado pela quantidade de calor efetivamente entregue à junta soldada dividido pela potência aplicada pela fonte de alimentação.

A simulação numérica também é uma maneira eficiente de se analisar processos de soldagem. Nesses casos, um termo de rendimento térmico empírico usualmente é adicionado ao modelo. Devido ao caráter empírico desse termo, muitos autores escolhem omitir o valor usado em suas publicações, como por exemplo Wahab, Painter e Davies (1998). Outros autores usam valores encontrados na literatura como Little e Kamtekar (1998) que usaram 80% de rendimento para um processo híbrido de soldagem a laser. Piekarska e Kubiak (2011) assumiram o valor de rendimento de 75% para o processo de soldagem a laser. Yadaiah e Bag (2012) usaram uma eficiência térmica de 60% para um processo de soldagem TIG, enquanto Sudheesh e Prasad (2015) assumiram o rendimento de 70% para o processo de soldagem a laser.

Como comentado, o valor de rendimento usado para soldagem não é um valor fixo. Muitos autores apenas assumem um valor hipotético que na maioria das vezes não satisfaz a eficiência real do processo. Consequentemente, a simples adoção de valores fixos para a eficiência térmica pode mascarar os dados reais das simulações numéricas em soldagem. De fato, o rendimento térmico de um processo de soldagem varia conforme o tipo de material, corrente, tensão, distância entre o eletrodo e a placa, dentre outros (KOU; WANG, 1986).

O rendimento térmico pode ser obtido diretamente através do uso de calorímetros. Esse processo mede a quantidade de calor fornecida durante todo processo para a chapa soldada. Alguns autores optam por essa metodologia que fornece um valor médio para todo processo. Por exemplo, Naisiri *et al.* (2014) analisaram a influência de vários parâmetros de soldagem e a eficiência do arco em um processo de soldagem TIG (Tungstênio Inerte Gás) usando um calorímetro. Hurtig *et al.* (2015) aplicaram um calorímetro para obter a eficiência do arco e o aporte de calor para um processo de soldagem. No entanto, esse processo só fornece um valor médio para o processo e não pode determinar variações de rendimento que podem ocorrer durante o processo experimental. Além disso, calorímetros são equipamentos caros de serem obtidos e requerem um procedimento experimental muito controlado para se obter os dados. Devido ao alto custo do calorímetro, Problemas Inversos são frequentemente utilizados para a determinação da eficiência térmica nos mais variados processos.

2.3.3 Problemas Inversos aplicados a processos de soldagem

Problemas Inversos são frequentemente usados para determinação da eficiência térmica em processos de soldagem. Além da eficiência térmica, eles podem ser usados também para prever outras características do processo. Por exemplo, Gonçalves, Carvalho e Guimarães (2010) aplicaram técnicas de otimização e o método da entalpia para resolver um problema inverso tridimensional aplicado no processo de soldagem TIG sem metal de adição. Os autores estimaram o fluxo de calor baseado na solução de um modelo tridimensional transiente de transferência de calor com fonte móvel. O campo térmico na região da placa foi determinado a partir da estimação da taxa de deposição de calor entregue a peça. O problema direto foi resolvido pelo método de diferenças finitas com formulação implícita. Para a solução do sistema de equações algébricas os autores utilizaram o método das sobre-relaxações sucessivas (SOR) e a técnica de problema inverso utilizada foi a Seção Áurea. As temperaturas experimentais foram

obtidas a partir de pontos acessíveis de medição na placa e as temperaturas teóricas foram calculadas a partir do modelo térmico tridimensional.

Yang, Chen e Lee (2011) usaram um problema inverso não linear para estimação da geração de calor num processo de soldagem por fricção. Para isso os autores implementaram um algoritmo, baseado no método do gradiente conjugado e no princípio da discrepância. Objetivaram estimar uma variável desconhecida e dependente do tempo da geração de calor na interface de barras cilíndricas, durante o processo de soldagem por fricção. Os dados de temperatura foram obtidos do problema direto e usados para simular as medições de temperatura. No estudo comprovou-se que a metodologia proposta pode ser aplicada para estimação de geração de calor em solda por fricção.

Karkhin *et al.* (2011) apresentaram uma contribuição para solução de problemas inversos em transferência de calor para uma simulação de soldagem. O autor propôs uma solução baseada em um modelo para resolução direta das equações diferenciais de transferência de calor a partir de método computacional. No trabalho observou-se que o estudo da sensibilidade e o comportamento da curva de otimização foram validados para os modelos numéricos utilizados.

Dal, Le Masson e Carin (2012) modelaram um processo de soldagem TIG (*Tungsten Inert Gas*) usando o método do gradiente conjugado com equação adjunta para estimação do formato da zona de fusão considerando um processo de soldagem estático. Além disso utilizaram uma malha móvel para resolver o problema bidimensional e a condição de assimetria do problema. Visando calcular o escoamento do fluido dentro da zona de fusão, os autores fizeram uma simplificação: considerar a zona de fusão calculada por uma equação analítica e modelar o perfil através do problema inverso.

Yang (2014) propôs um método inverso para previsão do fluxo de calor necessário durante um processo de soldagem por fricção FSW para reduzir os defeitos de fabricação causados pela resposta ao calor. Unnikrishnakurup *et al.* (2017) aplicaram a técnica de Levenberg-Marquardt para minimização do fluxo de calor em um processo de soldagem TIG. Os autores consideraram que o fluxo de calor seguiu uma função Gaussiana. Dois parâmetros foram minimizados; o fluxo de calor e o raio da distribuição radial. Como resultado da minimização, os autores encontraram um valor de 0,7 para a eficiência do processo térmico, e a distribuição radial de 1,8 mm.

Após a análise de todos os trabalhos citados anteriormente, observou-se as vantagens, desvantagens e aplicações de cada método. Desta forma, verificou-se que era necessário o desenvolvimento de uma técnica numérica que possibilitasse a estimação transiente da curva

de rendimento térmico de um processo de soldagem. Essa técnica possibilitou a comparação de condições experimentais de soldagem e a determinação do procedimento ótimo. Por fim, a presente revisão contribuiu com dados e informações importantes para ressaltar a relevância do trabalho desenvolvido.

CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA TEÓRICA

A seguir são apresentados os modelos térmicos utilizados durante a realização do trabalho. Na Seção 3.1 apresenta-se o modelo térmico utilizado para análise dos processos de soldagem. Esse modelo não-linear possui mudança de fase modelada através do método da entalpia. Na Seção 3.2 é apresentada a solução numérica através de diferenças finitas para o modelo térmico tridimensional com mudança de fase. Por último é apresentado o método utilizado para solução das equações algébricas lineares provenientes do método das diferenças finitas.

3.1 Modelagem Matemática

3.1.1 Modelo térmico tridimensional para um processo de soldagem

Um modelo térmico que pode representar um processo de soldagem é o fundamentado na equação da difusão de calor tridimensional não-linear com fonte de calor móvel e o método da entalpia para modelagem da zona de fusão. Na Figura 3.1 apresenta-se uma representação esquemática de um processo de soldagem sob uma placa. Quando o processo de aquecimento se inicia, perdas de calor por convecção e radiação também se iniciam.

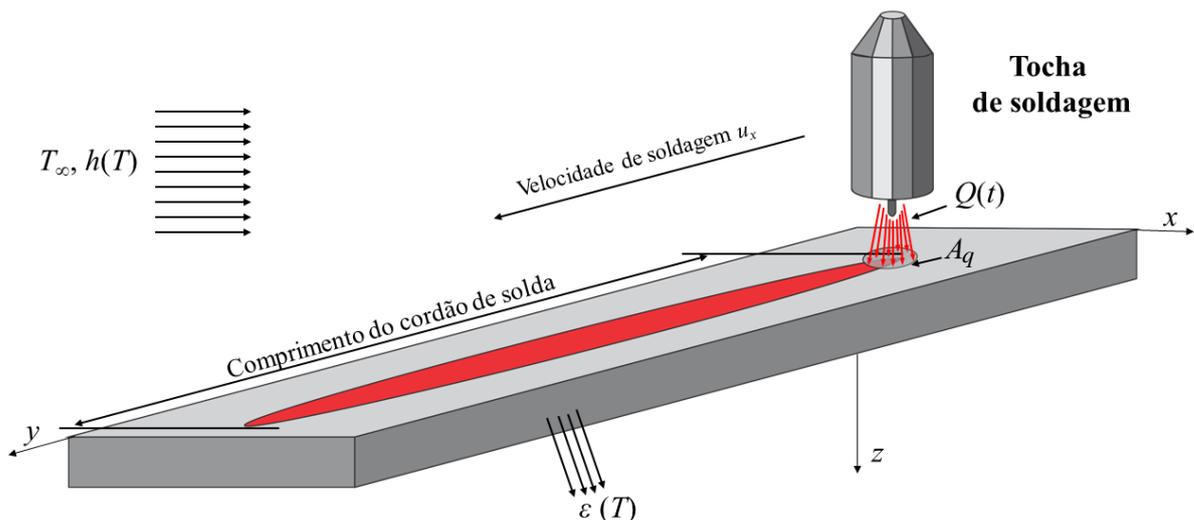


Figura 3.1. Representação de um modelo térmico em um processo de soldagem.

A modelagem térmica de um processo de soldagem é complexa devido a recirculação de fluidos dentro da poça de fusão. Como simplificação do problema, os estudos térmicos desse processo normalmente consideram a mudança de fase como sendo controlada puramente por condução. De acordo com Chiu e Caldwell (1996) um problema de mudança de fase controlado puramente por condução, isto é, os efeitos convectivos devidos a mudança de fase na interface ou variações de densidade na fase líquida podem ser desprezados, pode ser apresentado como sendo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial H(T)}{\partial t} \quad (3.1)$$

sendo $H(T)$ a função entalpia. A função Entalpia é relacionada a temperatura com relação a fração mássica de líquido, $f_m(T)$. Para um caso de mudança de fase sob uma isotérmica (para $T = T_f$, sendo T_f a temperatura de fusão), a função Entalpia é definida como:

$$H = c_p T + f_m L_f \quad (3.2)$$

sendo ρ a massa específica, c_p o calor específico a pressão constante, L_f o calor latente de fusão e $f_m(T)$ definida por:

$$\begin{aligned} f_m(T) &= 1 & T > T_f \\ f_m(T) &= 0 & T < T_f \end{aligned} \quad (3.3)$$

As condições de contorno de convecção, radiação e inicial podem ser definidas como sendo:

sendo h o coeficiente de transferência de calor, ε a emissividade, σ a constante de Stefan-

$$\text{CC1:} \quad -\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(T)(T - T_\infty) + \sigma \varepsilon(T)(T^4 - T_\infty^4) \quad (3.4a)$$

$$\text{CC2:} \quad \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_a} = h(T)(T - T_\infty) + \sigma \varepsilon(T)(T^4 - T_\infty^4) \quad (3.4b)$$

Boltzman, u a velocidade de soldagem, r_s o raio da área A_q (Fig. 3.1), L_a a largura da amostra, H_a a espessura da amostra e W_a a profundidade da amostra e T_∞ a temperatura ambiente.

$$\text{CC3: } -\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h(T)(T - T_\infty) + \sigma \varepsilon(T)(T^4 - T_\infty^4) \quad (3.4c)$$

$$\text{CC4: } \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=H_a} = h(T)(T - T_\infty) + \sigma \varepsilon(T)(T^4 - T_\infty^4) \quad (3.4d)$$

$$\text{CC5: } -\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = h(T)(T - T_\infty) + \sigma \varepsilon(T)(T^4 - T_\infty^4) \quad (3.4e)$$

$$\text{CC6: } \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=W_a} = h(T)(T - T_\infty) + \sigma \varepsilon(T)(T^4 - T_\infty^4) \quad (3.4f)$$

$$\text{CC7: } -\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=W_a}^{(x-u)^2 + y^2 = r_s^2} = q''(x, y, t) \quad (3.4g)$$

$$\text{CI: } T(x, y, z, t = 0) = T_\infty \quad (3.4h)$$

Na condição de contorno CC7 é necessário conhecer a função de distribuição do fluxo de calor. Apresenta-se a seguir os modelos de distribuições de fluxo de calor adotados neste trabalho.

3.1.2 Distribuição do aporte de calor

Nos processos de soldagem a solda é feita através do calor fornecido pela tocha de soldagem. Em simulações em soldagem, esse calor pode ser distribuído de acordo com alguns modelos matemáticos. A distribuição de calor na superfície pode ser obtida em duas maneiras: linear ou Gaussiana. A distribuição de fluxo de calor linear sobre uma área circular por ser escrita como:

$$q''(x, y, t) = \frac{Q(t)}{\pi r_s^2} \left((x - u t)^2 + y^2 \right) \quad (3.5)$$

sendo Q a taxa de aquecimento.

A distribuição bidimensional clássica de fluxo de calor imposto pode ser aproximada pelo modelo Gaussiano apresentado por Goldak e Akhlaghi (2005) expresso por:

$$q''(x, y, t) = \frac{3Q(t)}{\pi \times r_s^2} e^{-3\frac{(x-u)^2}{c^2}} e^{-\frac{3y^2}{c^2}} \quad (3.6)$$

sendo c é o raio característico da distribuição de calor.

A distribuição de calor pode também ser tomada na forma tridimensional representada por uma distribuição cônica de densidade de potência. Essa metodologia foi sugerida por Goldak e Akhlaghi (2005) para o processo de soldagem a laser. Na Fig. 3.2 apresenta-se o esquema de distribuição, onde h_p é a penetração de soldagem:

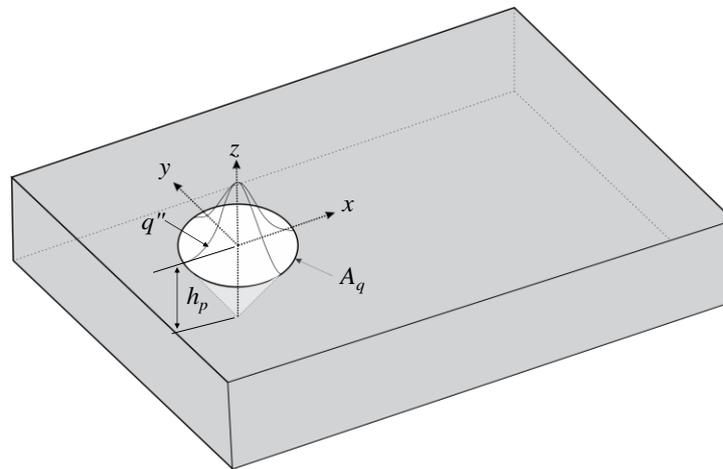


Figura 3.2. Distribuição de fluxo de calor cônica.

No caso da Fig. 3.2, pode-se utilizar distribuições de calor radiais gaussianas na superfície e funções racionais na penetração. No processo de soldagem a laser, uma distribuição linear do fluxo de calor na penetração simula o efeito barreira que o laser é sujeito enquanto ele penetra na amostra. Apesar desse modelo poder prever os valores de largura e penetração do cordão de solda, ele não pode prever seu formato. Pode-se também considerar que o fluxo de calor é distribuído seguindo uma função polinomial. Nesse caso, quatro modelos podem ser considerados. Os dois primeiros consideram a distribuição de calor de acordo com uma função quadrática e cúbica. Os outros dois consideram a distribuição do fluxo de calor como sendo funções raízes quadrática e cúbica. Esses modelos consideram a distribuição do fluxo de calor maior na superfície que quando ela se aproxima da penetração da coordenada h_p . A Figura 3.3 apresenta a diferença entre as distribuições do fluxo na coordenada z para os casos lineares e propostos.

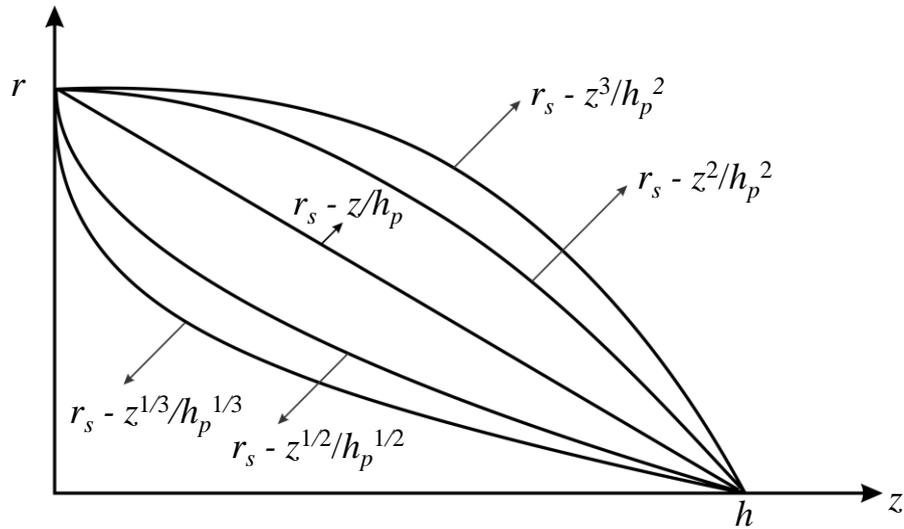


Figura 3.3. Distribuições de calor no eixo z considerando funções lineares, quadráticas, cúbicas, raiz quadrada e raiz cúbica.

As distribuições de calor para o modelo apresentado na Fig. 3.2 podem ser expressadas como:

$$A01: \quad \dot{q}(x, y, z, t) = \frac{4Q(t)}{\pi r_s^2 h_p} e^{-3\frac{(x-ut)^2}{r_s^2}} e^{-3\frac{y^2}{r_s^2}} \left(\frac{1}{h_p} - \frac{z^3}{h_p^3} \right) \quad (3.7a)$$

$$A02: \quad \dot{q}(x, y, z, t) = \frac{3Q(t)}{\pi r_s^2 h_p} e^{-3\frac{(x-ut)^2}{r_s^2}} e^{-3\frac{y^2}{r_s^2}} \left(\frac{1}{h_p} - \frac{z^2}{h_p^2} \right) \quad (3.7b)$$

$$A03: \quad \dot{q}(x, y, z, t) = \frac{2Q(t)}{\pi r_s^2 h_p} e^{-3\frac{(x-ut)^2}{r_s^2}} e^{-3\frac{y^2}{r_s^2}} \left(\frac{1}{h_p} - \frac{z}{h_p} \right) \quad (3.7c)$$

$$A04: \quad \dot{q}(x, y, z, t) = \frac{3Q(t)}{2\pi r_s^2 h_p} e^{-3\frac{(x-ut)^2}{r_s^2}} e^{-3\frac{y^2}{r_s^2}} \left(\frac{1}{h_p} - \frac{z^{1/2}}{h_p^{1/2}} \right) \quad (3.7d)$$

$$A05: \quad \dot{q}(x, y, z, t) = \frac{4Q(t)}{3\pi r_s^2 h_p} e^{-3\frac{(x-ut)^2}{r_s^2}} e^{-3\frac{y^2}{r_s^2}} \left(\frac{1}{h_p} - \frac{z^{1/3}}{h_p^{1/3}} \right) \quad (3.7e)$$

3.2 Modelagem Numérica

A solução numérica das Equação (3.1) pode ser obtida através do método de diferenças finitas com formulação implícita. Segundo Maliska (2004) esse método apresenta baixo custo computacional quando comparado a outros métodos de solução. A solução da Eq. (3.1) é apresentada a seguir.

3.2.1 Solução em diferenças finitas para o problema direto

Apresenta-se na Fig. 3.4 uma representação do volume de controle infinitesimal para o método das diferenças finitas com sete pontos. Nesta figura, o nó central é representado pelo ponto o . A vizinhança é designada pelos pontos representados pelas letras n (norte), s (sul), w (oeste), e (leste), f (frente) e b (posterior). O fluxo de calor entrando e saindo do nó é representado pela letra q .

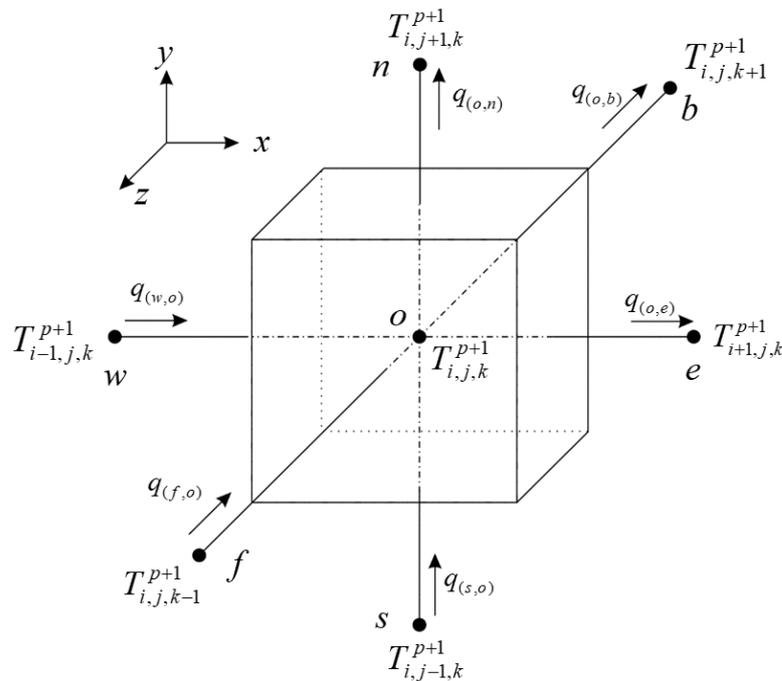


Figura 3.4. Volume de controle infinitesimal em coordenadas cartesianas.

Apesar da malha numérica utilizada ser não uniforme, as equações discretizadas são mostradas para uma malha uniforme, para simplificar sua apresentação. Nesse caso, o volume

de controle infinitesimal apresentado na Fig. 3.4 possui dimensões Δx , Δy e Δz nas direções x , y e z respectivamente.

Considerando a Equação (3.1) com condutividade térmica dependente da temperatura, e substituindo a função Entalpia em sua estrutura têm-se:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \rho \frac{\partial (c_p T + f_m L_f)}{\partial t} \quad (3.8)$$

Sabendo que:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.9)$$

Substituindo a Eq. (3.9) na Eq. (3.8), tem-se:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} \\ = \rho \frac{\partial (c_p T + f_m L_f)}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right) = \rho \frac{\partial (c_p T + f_m L_f)}{\partial t} \quad (3.11)$$

Dividindo-se por λ obtém-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right) = \frac{\rho c_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho L_f}{\lambda} \frac{\partial f_m}{\partial t} \quad (3.12)$$

Fazendo,

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{\rho c_p}, \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{\rho L_f}{\lambda} \quad (3.13)$$

A Equação (3.12) torna-se

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right) = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial f_m}{\partial t} \quad (3.14)$$

Para o primeiro termo de segunda ordem da Eq. (3.14), em um passo de tempo p , têm-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k}^{p+1} \approx \frac{\partial T / \partial x \Big|_{i+1/2,j,k}^{p+1} - \partial T / \partial x \Big|_{i-1/2,j,k}^{p+1}}{\Delta x} \quad (3.15)$$

sendo i , j e k os índices da malha relativos aos eixos Cartesianos x , y e z . Aplicando-se novamente diferenças finitas centrais, para os termos de primeira ordem da Eq. (3.14) têm-se:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j,k}^{p+1} \approx \frac{T_{i+1,j,k}^{p+1} - T_{i,j,k}^{p+1}}{\Delta x} \quad (3.16a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i-1/2,j,k}^{p+1} \approx \frac{T_{i,j,k}^{p+1} - T_{i-1,j,k}^{p+1}}{\Delta x} \quad (3.16b)$$

Substituindo os termos das Eq. (3.16a) e Eq. (3.16b) na Eq. (3.14) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k}^{p+1} &\approx \frac{\frac{T_{i+1,j,k}^{p+1} - T_{i,j,k}^{p+1}}{\Delta x} - \frac{T_{i,j,k}^{p+1} - T_{i-1,j,k}^{p+1}}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &\approx \frac{T_{i+1,j,k}^{p+1} - 2T_{i,j,k}^{p+1} + T_{i-1,j,k}^{p+1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.17a)$$

De maneira análoga:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{i,j,k}^{p+1} \approx \frac{T_{i,j+1,k}^{p+1} - 2T_{i,j,k}^{p+1} + T_{i,j-1,k}^{p+1}}{\Delta y^2} \quad (3.17b)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Big|_{i,j,k}^{p+1} \approx \frac{T_{i,j,k+1}^{p+1} - 2T_{i,j,k}^{p+1} + T_{i,j,k-1}^{p+1}}{\Delta z^2} \quad (3.17c)$$

Aplicando diferenças finitas centrais nos termos transientes:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{i,j,k}^{p+1} \approx \frac{1}{\alpha_1} \frac{T_{i,j,k}^{p+1} - T_{i,j,k}^p}{\Delta t} \quad (3.18)$$

$$\left. \frac{\partial f_m}{\partial t} \right|_{i,j,k}^{p+1} \approx \alpha_2 \frac{f_{m\ i,j,k}^{p+1} - f_{m\ i,j,k}^p}{\Delta t} \quad (3.19)$$

Como simplificação, adotou-se que o quarto termo da Eq. (3.14) é expresso na formulação explícita. Substituindo as Eqs. (3.15-19) na Eq. (3.14), e simplificando, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i+1,j,k}^{p+1} - 2T_{i,j,k}^{p+1} + T_{i-1,j,k}^{p+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1,k}^{p+1} - 2T_{i,j,k}^{p+1} + T_{i,j-1,k}^{p+1}}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j,k+1}^{p+1} - 2T_{i,j,k}^{p+1} + T_{i,j,k-1}^{p+1}}{\Delta z^2} \\ & + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left(\left(\frac{T_{i+1,j,k}^p - T_{i-1,j,k}^p}{2\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{T_{i,j+1,k}^p - T_{i,j-1,k}^p}{2\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{T_{i,j,k+1}^p - T_{i,j,k-1}^p}{2\Delta z} \right)^2 \right) \\ & = \frac{1}{\alpha_1} \frac{T_{i,j,k}^{p+1} - T_{i,j,k}^p}{\Delta t} + \alpha_2 \frac{f_{m\ i,j,k}^{p+1} - f_{m\ i,j,k}^p}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Fazendo:

$$\left(\frac{T_{i+1,j,k}^p - T_{i-1,j,k}^p}{2\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{T_{i,j+1,k}^p - T_{i,j-1,k}^p}{2\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{T_{i,j,k+1}^p - T_{i,j,k-1}^p}{2\Delta z} \right)^2 = X_{cond} \quad (3.21)$$

Substituindo-se Eq. (3.21) na Eq. (3.20) e realizando algumas simplificações:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i+1,j,k}^{p+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i-1,j,k}^{p+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1,k}^{p+1}}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j-1,k}^{p+1}}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j,k+1}^{p+1}}{\Delta z^2} + \frac{T_{i,j,k-1}^{p+1}}{\Delta z^2} \\ & - T_{i,j,k}^{p+1} \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{2}{\Delta z^2} + \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \right) = - \frac{T_{i,j,k}^p}{\alpha_1 \Delta t} + \alpha_2 \frac{f_{m\ i,j,k}^{p+1} - f_{m\ i,j,k}^p}{\Delta t} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial T} X_{cond} \end{aligned} \quad (3.22)$$

A Equação (3.22) pode ser expressa na forma compacta:

$$a_w T_{i-1,j,k}^{p+1} + a_e T_{i+1,j,k}^{p+1} + a_s T_{i,j-1,k}^{p+1} + a_n T_{i,j+1,k}^{p+1} + a_b T_{i,j,k-1}^{p+1} + a_f T_{i,j,k+1}^{p+1} - a_p T_{i,j,k}^{p+1} = \mathbf{b} \quad (3.23)$$

sendo:

$$a_w = a_e = \frac{1}{\Delta x^2}; \quad (3.24a)$$

$$a_n = a_s = \frac{1}{\Delta y^2}; \quad (3.24b)$$

$$a_f = a_b = \frac{1}{\Delta z^2}; \quad (3.24c)$$

$$a_p = a_w + a_e + a_n + a_s + a_b + a_f + \frac{1}{\alpha \Delta t}; \quad (3.24d)$$

$$\mathbf{b}_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta t} \left(-\frac{T_{i,j,k}^p}{\alpha_1} + \alpha_2 (f_{m,i,j,k}^{p+1} - f_{m,i,j,k}^p) \right) - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial T} X_{cond} \quad (3.24e)$$

Para que a Eq. (3.14) possa ser resolvida por diferenças finitas, o valor de $f_{m,i,j,k}^{p+1}$ precisa ser conhecido no instante atual. Portanto, é necessário um processo iterativo para sua definição. Apresenta-se a seguir o processo iterativo utilizado para determinação da fração mássica no tempo atual, $f_{m,i,j,k}^{p+1}$.

3.2.2 Solução da função não-linear da entalpia

O sistema de equações dado pela Eqs. (3.22 e 3.23) é não-linear porque $H(T)$ é uma função não linear da temperatura. Como $H(T)$ depende fração mássica f_m líquida, para se resolver a equação da entalpia é necessário encontrar essa variável. Os valores das frações mássicas em cada ponto do domínio podem ser determinados, como proposto por Voller e Shadabi (1984), a partir da solução iterativa da equação da entalpia. Definindo-se na Eq. 3.20 que:

$$\text{Termos}^{p+1} = a_w T_{i-1,j,k}^{p+1} + a_e T_{i+1,j,k}^{p+1} + a_s T_{i,j-1,k}^{p+1} + a_n T_{i,j+1,k}^{p+1} + a_b T_{i,j,k-1}^{p+1} + a_f T_{i,j,k+1}^{p+1} \quad (3.25)$$

E chamando:

$$C_1 = b_{i,j,k}^p - \frac{\alpha_2}{\Delta t} f_{m,i,j,k}^{p+1} \quad (3.26)$$

Ou seja:

$$C_1 = -\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{T_{i,j,k}^p}{\alpha_1} + \alpha_2 f_{m,i,j,k}^p \right) - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial T} X_{cond} \quad (3.27)$$

A Equação (3.23) se torna:

$$Termos^{p+1} - a_p T_{i,j,k}^{p+1} = C_1 + \frac{\alpha_2 f_{m,i,j,k}^{p+1}}{\Delta t} \quad (3.28)$$

A forma genérica para atualização da fração de líquido é dada por:

$$f_{m,i,j,k}^{g+1} = f_{m,i,j,k}^g + \zeta \times COR \quad (3.29)$$

sendo g o índice da iteração do método de solução da fração mássica, ζ o fator de sobre relaxação e COR é a correção necessária.

A convergência será atingida quando $COR \rightarrow 0$. Assim pode-se fazer a aproximação a seguir para a variável $f_{m,i,j,k}^{p+1}$:

$$f_{m,i,j,k}^{p+1} = f_{m,i,j,k}^{g+1} + COR \quad (3.30)$$

Para garantir-se a coerência da correção feita em relação ao modelo físico, deve assumir que essa temperatura será $T_{i,j,k}^{p+1} = T_{fusão}$, pois assim f se encontrará no intervalo entre 0 e 1. A Equação (3.28) corrigida segundo a Eq. (3.30) para uma iteração g é expressa por:

$$Termos^{p+1} - a_p T_{fusão} = C_1 + \frac{\alpha_2}{\Delta t} (f_{m,i,j,k}^{g+1} + COR) \quad (3.31)$$

Isolando-se o termo de correção na Eq. (3.31) obtém-se:

$$COR = \frac{\Delta t}{\alpha_2} \left(Termos^{p+1} - a_p T_{fusão} - C_1 - \frac{\alpha_2}{\Delta t} f_{m,i,j,k}^{g+1} \right) \quad (3.32)$$

Substituindo a Eq. (3.32) na Eq. (3.29), obtém-se:

$$f_{mi,j,k}^{g+1} = f_{mi,j,k}^g + \zeta \left(\frac{\Delta t}{\alpha_2} \right) \left(\text{Termos}^{p+1} - a_p T_{\text{fusão}} - C_1 - \frac{\alpha_2}{\Delta t} f_{mi,j,k}^{g+1} \right) \quad (3.33)$$

Isolando-se o termo $f_{mi,j,k}^{g+1}$, a função iterativa para determinação da fração de líquido mássica é obtida:

$$f_{mi,j,k}^{g+1} = \frac{f_{mi,j,k}^g + \zeta \left(\frac{\Delta t}{\alpha_2} \right) \left(\text{Termos}^{p+1} - a_p T_{\text{fusão}} - C_1 \right)}{1 + \zeta} \quad (3.34)$$

A seguir é feita uma rápida descrição do método SIP (*Strongly Implicit Procedure*) paralelo, utilizado para solução do sistema de equações discretizadas representado pela Eq. (3.23).

3.2.3 Método SIP Paralelo

O sistema de equações lineares representado pela Eq. (3.23) foi resolvido pelo método de resolução de equações implícitas apresentado por Stone (1968) chamado *Strongly Implicit Procedure* (SIP). Esse método foi desenvolvido para resolver um sistema de equações lineares originadas das discretização de equações diferenciais parciais. O método é vastamente utilizado e de grande importância para Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos. Optou-se por esse procedimento devido a sua alta taxa de convergência em relação aos métodos convencionais. No entanto devido ao tamanho dos sistemas lineares analisados, observou-se a necessidade de se trabalhar com processamento em paralelo. Cada iteração deste trabalho no método SIP sem paralelização levou cerca de 6,5 s em um computador com processador Intel core i7 3,4GHz. Após a paralelização, o mesmo procedimento levou cerca de 1,1s no mesmo computador. Portanto, o custo computacional foi bastante reduzido, representando um ganho de cerca de 83% no tempo de simulação para o mesmo processador.

A seguir, o método SIP é descrito, bem como uma variação de sua forma para implementação em paralelo.

3.2.4 Decomposição LU do método SIP

O sistema de equações algébricas representado pela Eq. (3.23) pode ser escrito na forma matricial como sendo:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{T} = \mathbf{b} \quad (3.35)$$

Para cada ponto de uma malha, existe uma equação para ser resolvida. Considerando um sistema de equações para um problema 2D de tamanho $N \times N$, sua representação é dada na seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} a_p^1 & a_n^1 & 0 & a_e^1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_s^2 & a_p^2 & a_n^2 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & a_s^3 & a_p^3 & a_n^3 & \ddots & a_e^{N-5} & 0 \\ a_w^4 & 0 & a_s^4 & a_p^4 & \ddots & 0 & a_e^{N-4} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_n^{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & a_w^{N-1} & 0 & a_s^{N-1} & a_p^{N-1} & a_n^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_w^N & 0 & a_s^N & a_p^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_p^1 \\ T_p^2 \\ T_p^3 \\ T_p^4 \\ \vdots \\ T_p^{N-1} \\ T_p^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_p^1 \\ b_p^2 \\ b_p^3 \\ b_p^4 \\ \vdots \\ b_p^{N-1} \\ b_p^N \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

A matriz \mathbf{A} pode ser decomposta em duas outras matrizes \mathbf{L} e \mathbf{U} que são matrizes triangulares superiores e inferiores:

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{LU} = \mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{V} \quad (3.37)$$

A multiplicação de \mathbf{L} por \mathbf{U} produz diagonais que não são parte da matriz \mathbf{A} . Essas diagonais estão presentes na matrix \mathbf{V} . A matrix \mathbf{V} pode ser interpretada como sendo um erro de decomposição. Para manter esse desvio pequeno têm-se que:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{V})\mathbf{T} \approx \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{V} \cdot \mathbf{T} \approx 0 \quad (3.38)$$

Os coeficientes dessas diagonais extras são aproximados pelos coeficientes vizinhos. Assumindo que a equação diferencial parcial a ser resolvida possui uma solução suave, pode-se aplicar um parâmetro α_{SIP} para determinar esses coeficientes. Portanto:

$$a_{nw} \approx \alpha_{SIP}(a_w + a_n - a_p) \quad (3.39)$$

Assim é possível de se implantar regras implícitas para o cálculo dos coeficientes da matriz \mathbf{L} e \mathbf{U} . Para um passo N tem-se:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^N = \mathbf{b} - \mathbf{res}^N \quad (3.40)$$

sendo res os resíduos. O desvio de \mathbf{T}^N da solução real \mathbf{T} é chamado de erro de convergência $\boldsymbol{\varepsilon}^N$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^N = \mathbf{T} - \mathbf{T}^N \quad (3.41)$$

Que se torna:

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^N = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^N = \mathbf{b} - \mathbf{b} + \mathbf{res}^N = \mathbf{res}^N \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^N = \mathbf{res}^N \quad (3.42)$$

Como a solução real de T é desconhecida, a seguinte regra iterativa pode ser construída:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{T}^{N+1} - \mathbf{T}^N) = \mathbf{res}^N \mathbf{A} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{T} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \Delta \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{U} \cdot \Delta \mathbf{T} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{res}^N = \mathbf{R}^N \mathbf{U} \quad (3.45)$$

A partir da decomposição final, pode-se calcular o vetor de resíduos \mathbf{res}^N , o vetor \mathbf{R}^N e o vetor $\Delta \mathbf{T}$ a partir do algoritmo mostrado a seguir:

Algoritmo 3.1. Decomposição LU incompleta

1:	Realizar a decomposição LU	: $\mathbf{A} \approx \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$
2:	Calcular os resíduos	: $\mathbf{res}^N = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^N$
3:	Calcular o vetor \mathbf{R} (substituição frontal)	: $\mathbf{R}^N = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{res}^N$
4:	Calcular $\Delta \mathbf{T}$ (substituição traseira)	: $\mathbf{U} \cdot \Delta \mathbf{x} = \mathbf{R}^N$
5:	Voltar a etapa 2 até que o resíduo seja pequeno	

3.2.5 Paralelização por hiperlinhas

Uma hiperlinha é definida como sendo:

$$L = j + k \quad (3.46)$$

Considerando as regras de decomposição LU, para um dado nó (i, j, k) uma hiperlinha L somente precisa dos dados de acesso da hiperlinha $L - 1$. Porque existe apenas uma coordenada mudando a cada instante. Portanto os cálculos desses nós em relação as hiperlinhas são independentes e podem ser calculadas separadamente. No entanto, em razão da dependência dos dados de L em $L - 1$, as hiperlinhas devem ser calculadas de maneira sequencial. Na Figura 3.5 apresenta-se as hiperlinhas em um cubo. As hiperlinhas contendo o nó 6 e 26 mostram a ideia de paralelização. Cada coluna na direção j pode ser calculada independentemente.

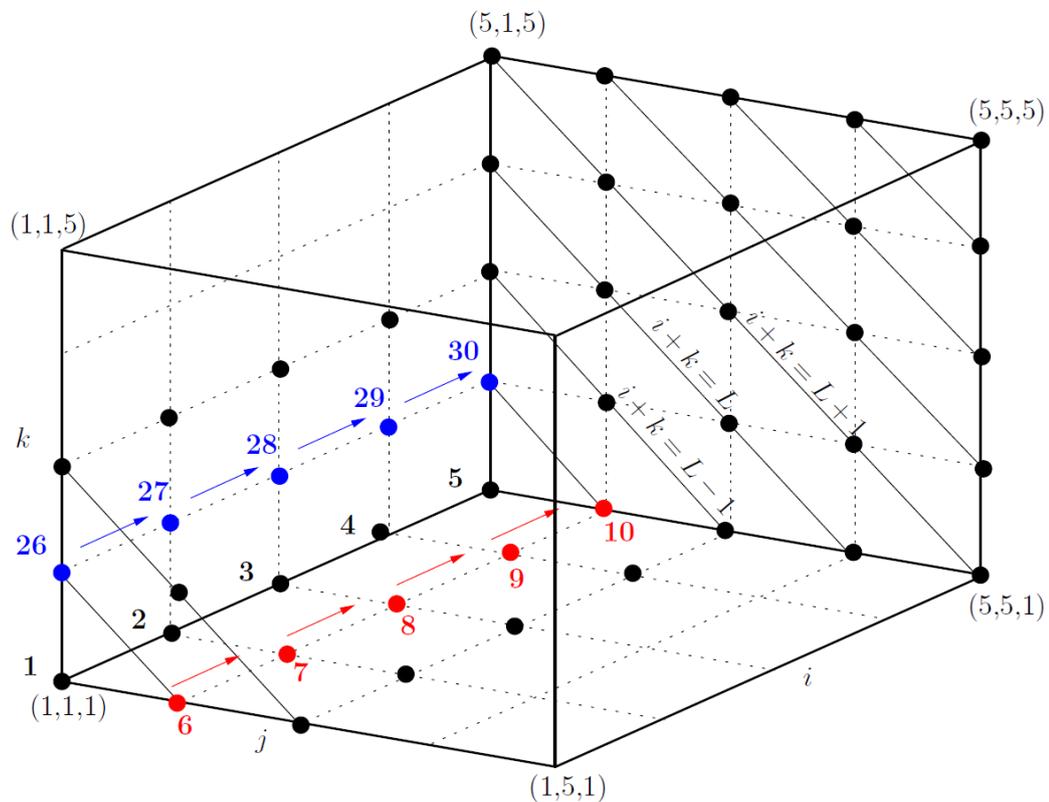


Figura 3.5. Hiperlinhas em um cubo (DESERNO, 2003).

O algoritmo da função SIP-paralelo é apresentado no Anexo A.

CAPÍTULO 4 – TÉCNICAS DE PROBLEMAS INVERSOS

A seguir são apresentadas três metodologias para solução de problemas inversos aplicados em condução de calor. O primeiro item define o problema inverso em condução de calor (IHCP). A seguir apresenta-se a técnica de solução de problemas inversos, Regularização de Viagem no Tempo (*Time Traveling Regularization* – TTR). Na Seção 4.3, apresenta-se o Método Sequencial da Função Especificada (*Sequential Function Specification Method* – SFSM). A regularização de Tikhonov é apresentada na Seção 4.4. Na Seção 4.5, define-se o tempo de resposta de uma amostra. Na Seção 4.6, apresenta-se a metodologia para determinação da curva de eficiência térmica do processo, que é chamada de a técnica do sensor Móvel de Temperatura. Na última parte do capítulo, define-se o coeficiente de sensibilidade usado para comparação entre a precisão do método do sensor móvel de temperatura e do modelo de estimação pontual convencional.

4.1 O Problema Inverso em Condução de Calor (IHCP)

A metodologia desenvolvida pode ser aplicada a um problema inverso para estimação de fluxo de calor. Como apresentado por Beck e Woodbury (2016), um vetor de temperaturas medidas Y com N elementos pode ser representado pelo vetor transposto:

$$Y = [Y_1 \quad Y_2 \quad \dots \quad Y_{N-1} \quad Y_N]^T \quad (4.1)$$

O vetor de temperaturas calculadas T transposto pode ser representado por:

$$T = [T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_{N-1} \quad T_N]^T \quad (4.2)$$

O vetor de temperaturas calculadas T transposto pode ser obtido por diferenças finitas (Seção 3.2.2). Ambos elementos representam pontos coletados no mesmo lugar. O vetor desconhecido de fluxo de calor é representado por:

$$q'' = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_{N-1} \quad q_N]^T \quad (4.3)$$

O vetor desconhecido de fluxo de calor q'' pode ser determinado através dos métodos apresentados a seguir.

4.2 Regularização de Viagem no Tempo (TTR)

A TTR é uma generalização não-linear do Método Sequencial da Função Especificada (SFSM) para aplicação em um método de otimização. No presente trabalho, escolheu-se a técnica de otimização da Seção Áurea (VANDERPLAATS, 2005). Essa técnica de otimização foi escolhida pela simplicidade na sua formulação e também por não precisar de derivadas.

A técnica consiste em analisar uma linha do tempo hipotética para cada chute proposto pelo método de otimização. Em seguida, ela compara a variável medida com a variável calculada, no caso deste trabalho a temperatura, em um tempo futuro. Em outras palavras, o método analisa qual a influência de cada chute, dado pela variável a ser minimizada, terá na variável calculada em um tempo futuro. Na Figura 4.1 apresenta-se um diagrama de flechas da TTR. Nessa figura, o método de otimização requer um chute inicial para a variável a ser minimizada. A partir desse valor, a variável é considerada constante no intervalo de tempo jj até $jj+r$, sendo r o número de passos de tempos futuros. A Função Objetivo é comparada levando em consideração os valores presentes e futuros calculados. Se o valor do chute inicial não é suficiente para minimizar o método, a técnica de otimização definirá o próximo valor e reiniciará o modelo a partir do passo de tempo jj . O processo iterativo permanece até que os critérios de parada sejam satisfeitos.

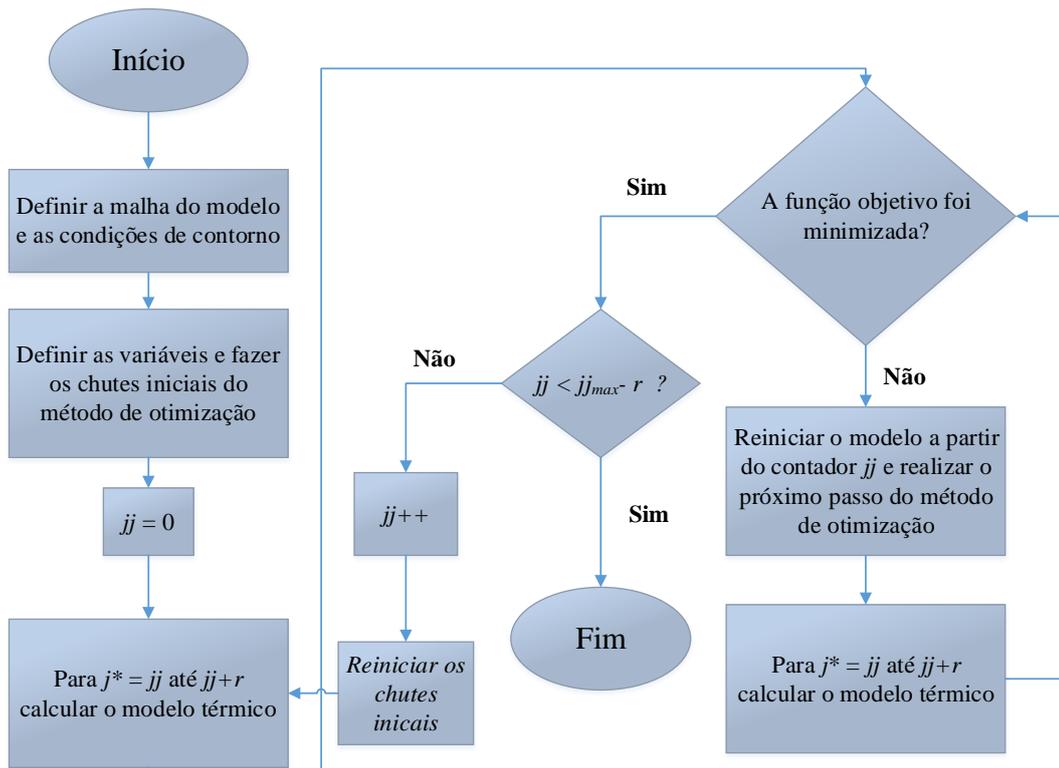


Figura 4.1. Diagrama da TTR.

4.2.1 Função Objetivo TTR

A TTR não interfere na estrutura do método de otimização. No entanto, ela modifica a função objetivo para se ter uma ordem de análise temporal. Portanto, a função objetivo é minimizada em tempos futuros, ao invés de apenas considerar o tempo atual. Por exemplo, na Equação (4.4) apresenta-se uma função objetivo de mínimos quadrados adequada a TTR:

$$F_{obj}^{jj} = \left(Y^{jj+r} - T^{jj+r} \right)^2 \quad (4.4)$$

sendo F_{obj} a função objetivo, jj o contador representando o tempo, r o número de tempos futuros, Y e T as temperaturas experimentais e numéricas, respectivamente no passo de tempo $jj+r$.

Nessa equação, a introdução da análise temporal através de r reduz de forma significativa os ruídos nos parâmetros estimados. Quando r aumenta, o ruído diminui. No entanto, para se atingir o passo de tempo $jj+r$ os valores de temperatura numérica nos tempos $r-1$, $r-2$, ..., e 1 devem ser calculados. Portanto, a função objetivo pode também considerar esses termos como apresentado na Eq. (4.5):

$$F_{obj}^{jj} = \sum_{i_{TTR}=jj}^{jj+r} (Y^{jj+r} - T^{jj+r})^2 \quad (4.5)$$

4.2.2 Algoritmo TTR

No Algoritmo 4.1 é apresentada a implementação da técnica TTR com o método da Seção Áurea para um problema inverso de estimação de fluxo de calor. Nesse algoritmo, o fluxo de calor é estimado através da comparação das temperaturas experimentais e obtidas numericamente através de uma função objetivo de mínimos quadrados. O Algoritmo 4.1 inicia-se com a definição das variáveis de entrada como propriedades térmicas, condições iniciais, temperaturas experimentais, critérios de parada ϵ_{TTR} , e uma variável r que representará o número de tempos futuros. A variável r é usada para manter o fluxo de calor como constante por r passos de tempo. O contador jj representa o número de iterações que o modelo usa para simular o caso. Em geral, a referência j_{max} (Alg. 4.1 linha 6) é definida pelo número de pontos de temperatura experimental coletados menos r . A matriz de temperatura \mathbf{T} para o contador jj é guardada em \mathbf{T}^* para salvar os valores anteriores. Esses valores serão requeridos no processo de otimização. A minimização através da Seção Áurea se inicia na linha 8. Os valores q_{min} e q_{max} são os limites para a estimação do fluxo de calor. X_l , X_u , X_1 , e X_2 são variáveis do método da Seção Áurea que possibilitam a estimação do fluxo de calor. Enquanto, F_1 e F_2 salvam os valores para a função objetivo. A variável da razão Áurea τ tem o valor de $\tau = (3 - \sqrt{5})/2$.

O método de otimização se inicia definindo os valores de chute iniciais para o processo de minimização (linhas 10 e 11). A função objetivo (F_1) é definida como sendo 0. A variável do fluxo de calor é usada para se armazenar os chutes (linhas 11 e 21). A metodologia da TTR é aplicada entre as linhas 13 a 18 e entre as linhas 23 a 28. O fluxo de calor é tomado como um valor constante, o contador j^* substitui o contador jj e começa a simulação considerando como um fluxo de calor constante em um intervalo de tempo compreendido entre o tempo representado pelo contador jj e $jj + r$ (linhas 13 e 23). Nesses laços, a matriz de coeficientes \mathbf{a} e o termo fonte \mathbf{b} são calculados. A temperatura numérica é obtida através da solução do sistema linear representado pelas linhas 16, 26 e 51. As funções objetivo F_1 e F_2 são calculadas através de um somatório (Eq. 4.4) para o contador j . A temperatura é então reiniciada ao valor inicial (linhas 19, 30 e 48). O laço da Seção Áurea se inicia na linha 29. O método da Seção Áurea é então calculado até que a função objetivo F_{obj} seja menor que a tolerância ϵ_{TTR} (linha 22). Após o laço, o valor ótimo para o fluxo de calor q_i é minimizado. No entanto, o modelo térmico está

em um passo de tempo $jj + r$, portanto o modelo direto deve ser acionado mais uma vez para realizar o cálculo da temperatura para o instante de tempo $jj + 1$ (linhas 48-51). Portanto, esse algoritmo apresenta como as temperaturas se comportam quando o fluxo de calor é mantido constante por r passos de tempo.

Algoritmo 4.1. Algoritmo da Seção Áurea com a Regularização de Viagem no Tempo (TTR)

```

1: Início
2: Entrar com as variáveis de entrada
3: Definir a tolerância da função Objetivo  $\varepsilon_{TTR}$ 
4:  $\mathbf{T}$  = definir a condição inicial
5: Definir o número de tempos futuros  $r$ 
6: for  $jj = 1; jj \geq jj_{max}; jj = jj + 1$ 
7:    $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}$ 
8:    $X_l = q_{min}$ 
9:    $X_u = q_{max}$ 
10:   $X_1 = (1 - \tau) X_l + \tau X_u$ 
11:   $q_i = X_1$ 
12:   $F_1 = 0$ 
13:  for  $j^* = jj; j^* \leq jj+r; j^* = j^* + 1$ 
14:     $\mathbf{a}$  = Calcular os coeficientes para o passo de tempo  $j^*$ 
15:     $\mathbf{b}$  = Calcular o termo fonte para o passo de tempo  $j^*$ 
16:     $\mathbf{T} = \mathbf{a}^{-1} \mathbf{b}$  (Resolver o modelo direto)
17:     $F_1 = F_1 + (Y_{j^*} - T_{j^*})^2$ 
18:  end for
19:   $\mathbf{T} = \mathbf{T}^*$ 
20:   $X_2 = \tau X_l + (1 - \tau) X_u$ 
21:   $q_i = X_2$ 
22:   $F_2 = 0$ 
23:  for  $j^* = jj; j^* \leq jj+r; j^* = j^* + 1$ 
24:     $\mathbf{a}$  = Calcular os coeficientes para o passo de tempo  $j^*$ 
25:     $\mathbf{b}$  = Calcular o termo fonte para o passo de tempo  $j^*$ 
26:     $\mathbf{T} = \mathbf{a}^{-1} \mathbf{b}$  (Resolver o modelo direto)
27:     $F_2 = F_2 + (Y_{j^*} - T_{j^*})^2$ 
28:  end for
29:  do
30:     $\mathbf{T} = \mathbf{T}^*$ 
31:    if  $F_1 > F_2$ 
32:       $X_l = X_1$ 
33:       $F_l = F_1$ 
34:       $X_1 = X_2$ 
35:       $F_1 = F_2$ 
36:      Recalcular linhas 20-28
37:       $F_{obj} = F_1$ 
38:    Endif
39:    Else
40:       $X_u = X_2$ 
41:       $F_u = F_2$ 
42:       $X_2 = X_1$ 
43:       $F_2 = F_1$ 
44:      Recalcular linhas 10-18

```

```

45:            $F_{obj} = F_2$ 
46:       endif
47:       while ( $F_{obj} > \epsilon$ )
48:            $\mathbf{T} = \mathbf{T}^*$ 
49:            $\mathbf{a}$  = calcular os coeficientes para o passo de tempo  $jj$ 
50:            $\mathbf{b}$  = calcular o termo fonte para o passo de tempo  $jj$ 
51:            $\mathbf{T} = \mathbf{a}^{-1} \mathbf{b}$  (Resolver o modelo direto para  $q_{opt}$ )
52:       end for
53:   End

```

4.3 Método Sequencial da Função Especificada (SFSM)

O método sequencial da Função Especificada (*Sequential Function Specification Method* – SFSM) também considera o fluxo de calor como constante durante um pequeno intervalo de tempo r (BECK; BLACKWELL; CLAIR, 1985). A diferença fundamental é como as temperaturas numéricas são obtidas. A equação algébrica para o SFSM em um passo de tempo t_M é:

$$q_{SFSM} = \frac{\sum_{i_{SFSM}=1}^r \left(Y^{M+i_{SFSM}-1} - T^{M+i_{SFSM}-1} \Big|_{q_M=q_{M+1}=\dots=q_{M+r-1}=0} \right) \phi_1}{\sum_{i_{SFSM}=1}^r \phi_{i_{SFSM}}^2} \quad (4.6)$$

$$T^{M+i_{SFSM}-1} = \sum_{j=1}^{M+j-1} q_j S_{M+i_{SFSM}-1} \quad (4.7)$$

sendo ϕ a temperatura adimensional por unidade de calor sobre uma superfície, S são os coeficientes da a matriz de sensibilidade, que é quadrada e possui N elementos dados por:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ S_{N-1} & S_{N-2} & S_{N-3} & \dots & S_1 & 0 \\ S_N & S_{N-1} & S_{N-2} & \dots & S_2 & S_1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Os valores numéricos da primeira coluna da matriz de sensibilidade podem ser obtidos através do modelo numérico. Beck e Woodbury (2016) propuseram que a matriz de sensibilidade pode ser obtida fazendo a temperatura inicial igual a zero no modelo direto e fluxo de calor igual a unidade.

4.4 Regularização de Tikhonov

Neste trabalho, a regularização de Tikhonov (TIKHONOV; ARSENIN, 1977) também é aplicada para comparação dos resultados. Assim como a TTR, a regularização de Tikhonov requer um método de otimização para minimizar a Função Objetivo. Neste trabalho, o método da Seção Áurea também é usado para minimização. Considere uma Função Objetivo dada pela Eq. (4.9):

$$F_{obj}^{jj} = (Y^{jj} - T^{jj})^2 \quad (4.9)$$

A função dada pela Eq. (4.9) é sujeita a erros implícitos nas temperaturas experimentais Y . Para evitar uma amplificação do erro na solução da Eq. (4.9) é comum penalizar a distância da solução para um valor de referência, ou norma do vetor de solução (distância em relação a origem). Um valor de referência significa que se conhece uma solução aproximada para o problema. Para este caso a regularização de Tikhonov de primeira ordem essa ideia é implementada através da mudança do termo de regularização, assim a Função Objetivo torna-se:

$$F_{obj}^{jj} = (Y^{jj} - T^{jj})^2 + \gamma(q^{jj} - q^{jj-1})^2 \quad (4.10)$$

O parâmetro de regularização γ pode ser obtido através da curva-L (CALVETTI *et al.*, 2000).

4.5 Tempo de Resposta

Quando uma amostra é sujeita a um fluxo de calor constante, o sensor de temperatura sofre uma variação na temperatura que não é constante durante os primeiros instantes do aquecimento. Esse tempo de estabilização, para que o sensor de temperatura tenha uma resposta constante, neste trabalho é chamado de tempo de resposta da amostra.

O tempo de resposta da amostra, t_s , pode ser usado para determinar-se um valor para o número de tempos futuros r que é usado nas técnicas da SFMS e TTR. Análises das simulações provaram que para valores de $r \times \Delta t \geq t_s$, o aumento de r altera a forma do fluxo de calor estimado. Observa-se também que há uma significativa diminuição do ruído nos dados de saída a partir do valor de $r \times \Delta t \geq t_s$. Portanto, uma análise mais detalhada deste tempo da amostra é necessária.

Neste trabalho define-se o tempo de resposta de uma amostra como o tempo necessário para que um sensor de temperatura posicionado em um determinado ponto na superfície, atinja aceleração de aquecimento nula quando sujeito a um fluxo de calor constante. Define-se aceleração de aquecimento a segunda derivada da função temperatura em relação ao tempo:

$$a_T = \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial t^2} \quad (4.11)$$

A aceleração de aquecimento a_T pode ser definida em diferenças finitas por:

$$a_T = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right|_p \approx \frac{T^{p+1} - 2T^p + T^{p-1}}{\Delta t^2} \quad (4.12)$$

Para um modelo unidimensional, a aceleração do aquecimento pode também ser obtida a partir da solução analítica da equação do calor. Seja um problema térmico unidimensional com condição de fluxo prescrito em $x = 0$ e isolamento em $x = L_a$, como apresentado na Fig. 4.2.

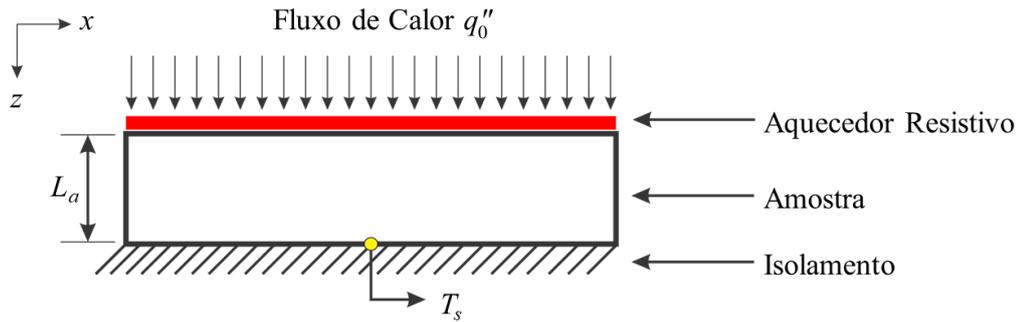


Figura 4.2. Modelo térmico unidimensional isolado com fluxo prescrito

O modelo térmico descrito na Fig. 4.2 para um fluxo de calor constante igual a q_0'' tem solução analítica conhecida dada por:

$$T(x,t) = T_0 + \frac{\alpha}{\lambda L} \left[q''t + \frac{2q''L^2}{\alpha\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left(1 - e^{-\frac{m^2\pi^2 t\alpha}{L^2}}\right) \right] \quad (4.13)$$

Derivando duas vezes a Eq. (4.13) com relação ao tempo, encontra-se a aceleração de aquecimento para o modelo térmico unidimensional da Fig. 4.2 dada por:

$$a_T(x,t) = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} = \frac{2q''\alpha}{\lambda L} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left(-e^{-\frac{m^2\pi^2 t\alpha}{L^2}}\right) \quad (4.14)$$

Visando analisar o tempo de respostas de amostras, variou-se algumas condições experimentais e propriedades térmicas de uma amostra sujeita a um fluxo unidimensional. Para isso, variou-se um parâmetro mantendo os outros constantes. Quatro parâmetros foram analisados: fluxo de calor, condutividade térmica, difusividade térmica, e posicionamento do termopar. Para possibilitar a comparação entre os diferentes valores apresentados em cada análise, normalizou-se os valores apresentados para aceleração de aquecimento.

Apresenta-se na Fig. 4.3, a aceleração do aquecimento em função do tempo para vários valores de condutividade térmica do material. Analisando a Fig. 4.3 pode-se observar que o tempo para a aceleração do aquecimento normalizada atingir o valor nulo não depende do valor da condutividade térmica. Na Figura 4.4 é apresentada a curva normalizada da aceleração do aquecimento quando o fluxo de calor imposto é variado. Observa-se que o aumento do fluxo de calor não afeta o tempo de resposta da amostra.

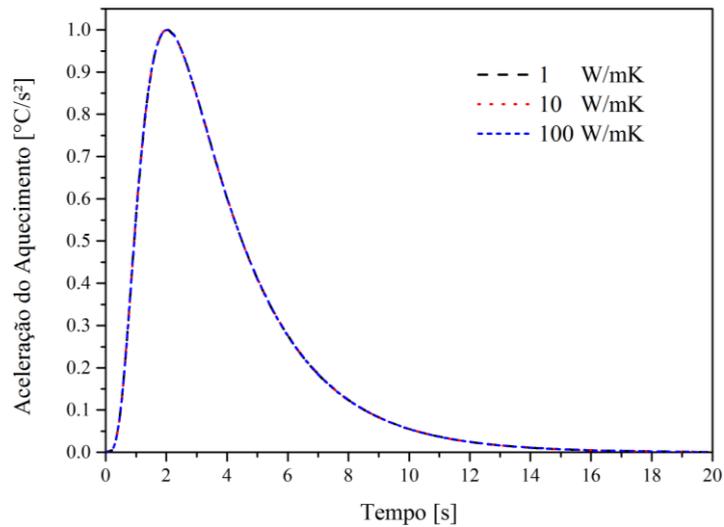


Figura 4.3. Aceleração do aquecimento variando-se a condutividade térmica.

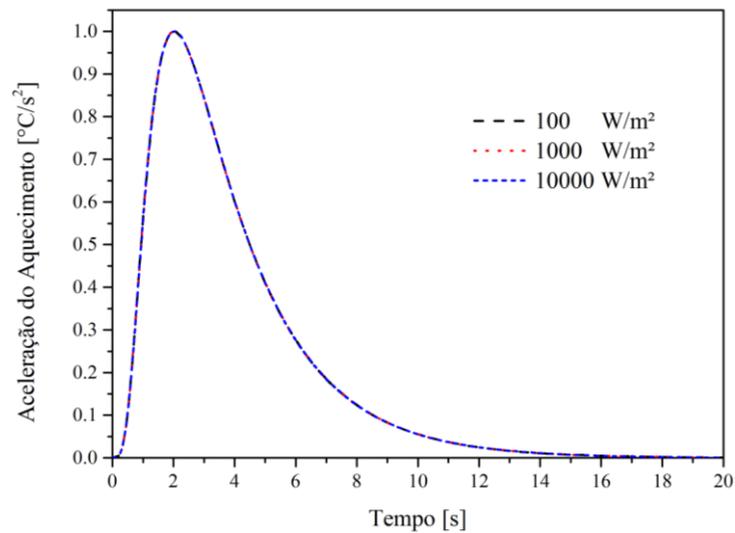


Figura 4.4. Aceleração do aquecimento variando-se o fluxo de calor.

O tempo de resposta do material, no entanto, depende da difusividade térmica e também da posição do sensor. Apresenta-se na Fig. 4.5. a aceleração do aquecimento variando-se a difusividade térmica. Observa-se que quando a difusividade térmica aumenta o tempo de resposta da amostra diminui. Portanto a difusividade térmica é inversamente proporcional ao tempo de resposta da amostra. Na Figura 4.6 são apresentadas as curvas de aquecimento para a variação na posição do sensor de temperatura. Observa-se que a medida que o sensor se aproxima da região da superfície aquecida $x = 0$, o tempo que a aceleração do aquecimento leva para atingir o valor nulo é menor. Portanto, o tempo de resposta da amostra é diretamente proporcional a distância relativa a posição do sensor.

Outra variável importante neste processo é o erro de medição do termopar. Shirliffe (1974) apresentou uma fórmula para o cálculo do tempo de resposta de uma amostra para um fluxo de calor constante que relaciona a posição x , a difusividade térmica α e o erro de medição ε_m como:

$$t_s \approx \frac{4x^2}{9\pi^2 \times \alpha} \ln\left(\frac{32 \times (1 + \varepsilon_m)}{9\pi^2 \varepsilon_m}\right) \quad (4.15)$$

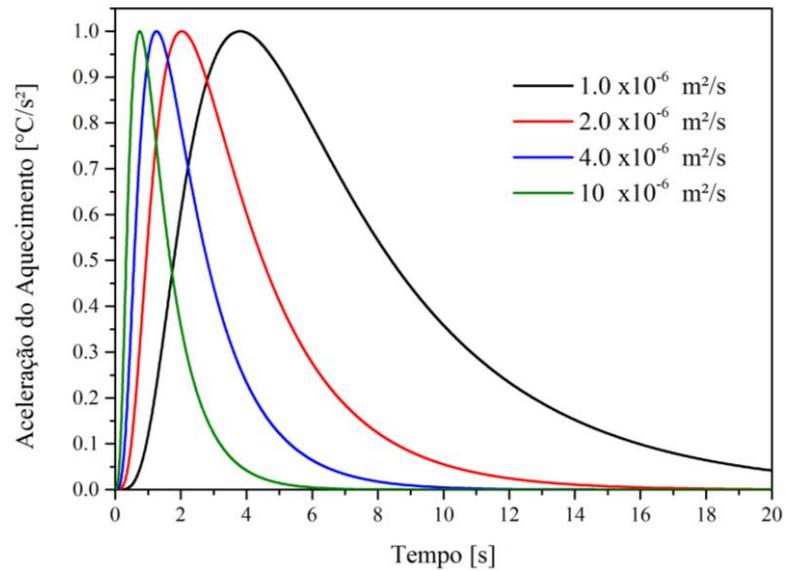


Figura 4.5. Aceleração do aquecimento variando-se a difusividade térmica.

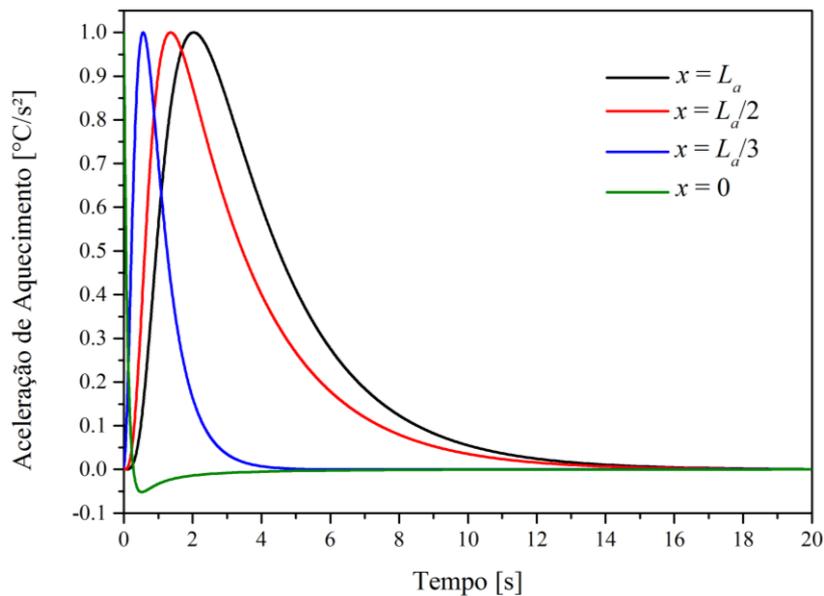


Figura 4.6. Aceleração do aquecimento variando-se a posição do sensor.

4.6 Sensor Móvel de Temperatura

A determinação de uma curva de eficiência de uma tocha de soldagem é algo bem difícil de se obter experimentalmente. Como alternativa, o método do sensor móvel de temperatura é proposto para superar essa limitação. Essa técnica consiste em ter um sensor móvel de temperatura na superfície oposta onde o calor é aplicado. Na Figura 4.7 apresenta-se a metodologia de resolução do problema. Uma tocha de soldagem TIG aplica um fluxo de calor $q''(x, y, t)$ com uma velocidade u_x . O sensor de temperatura move com velocidade u_x em direção a coordenada x . Como o sensor de temperatura move continuamente com a tocha de soldagem TIG, ele permite a estimação do fluxo de calor proveniente da tocha ponto a ponto. Assim, a metodologia viabiliza a determinação da eficiência térmica para o processo de soldagem. A eficiência térmica temporal é definida por:

$$\eta_T(t) = \frac{Q(t)}{P} \quad (4.16)$$

sendo P a potência da fonte e $\eta_T(t)$ a eficiência térmica transiente.

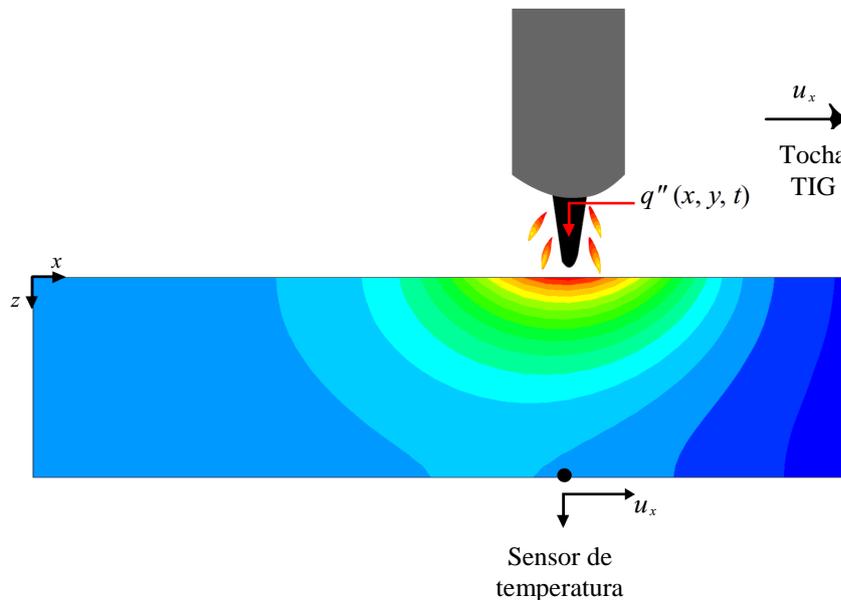


Figura 4.7. Sensor móvel de temperatura

4.7 Coeficiente de Sensibilidade

Para se comparar a eficiência da metodologia proposta em relação a estimação do fluxo de calor com a método clássico, um estudo de sensibilidade foi realizado. O coeficiente de sensibilidade deve apresentar a maior magnitude possível. Quanto maior o coeficiente de sensibilidade, melhor a estimação. O coeficiente de sensibilidade calculado pode ser definido como a primeira derivada parcial da temperatura em relação ao fluxo de calor. Portanto, o coeficiente de sensibilidade pode ser determinado como:

$$S_{ii} = Q_{ii} \frac{\partial Y_{ii}}{\partial Q_{ii}} \quad (4.17)$$

sendo ii o contador para os passos de tempo, S o coeficiente de sensibilidade e Y a temperatura experimental. Nesse trabalho, o coeficiente de sensibilidade foi calculado numericamente, sendo a primeira derivada numérica positiva e pode ser calculado como:

$$S_c^{ii} = Q^{ii} \frac{Y^{ii+1} - Y^{ii}}{Q^{ii+1} - Q^{ii}} \quad (4.18)$$

CAPÍTULO 5 – PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Apresenta-se neste capítulo os materiais e procedimentos realizados nos experimentos que foram usados para validação da metodologia proposta. São realizados experimentos de dois casos, processo de soldagem TIG (Tungstênio Inerte Gás) no aço AISI 304L, e processo de soldagem a Laser no aço SAE 1020.

Os experimentos de soldagem TIG foram realizados no LAPROSOLDA da Universidade Federal de Uberlândia como parte do trabalho de Lima e Silva *et al.* (2003). Esses experimentos testaram diversas condições de soldagem. A metodologia proposta é comparada com os resultados obtidos em Lima e Silva *et al.* (2003). Através da técnica apresentada neste trabalho as melhores condições de soldagem para o processo e soldagem TIG em aço AISI 304L são determinadas.

Os experimentos de soldagem a Laser foram realizados no Laboratório de Mecânica de Precisão – LPM da Universidade Federal de Santa Catarina como parte de uma parceria. Devido ao alto valor agregado aos experimentos, apenas uma condição de soldagem foi analisada. Nesse experimento, utilizaram-se amostras de aço SAE 1020. Um total de 3 experimentos foram realizados para assegurar a repetitividade dos resultados.

5.1 Processo de Soldagem TIG

A distribuição de termopares nesses experimentos permitiu o desenvolvimento de outra técnica proposta neste trabalho que é a técnica do sensor móvel de temperatura. Nesses experimentos, dez termopares tipo K (Chromel-Alumel) foram fixados na superfície oposta a região soldada por descarga capacitiva. Os termopares foram distribuídos na superfície oposta com distâncias equivalente ao longo da coordenada x , como apresentado na Fig. 5.1.

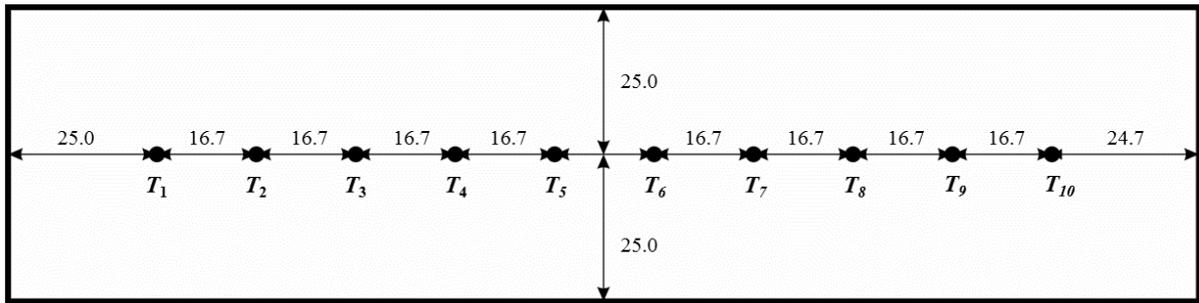


Figura 5.1. Posicionamento dos termopares na amostra de aço AISI 304.

Lima e Silva *et al.* (2003) analisaram nove condições de soldagem e usaram o método de Taguchi para determinar o caso ótimo. Na Tabela 5.1 apresenta-se as condições experimentais testadas por Lima e Silva *et al.* (2003). Nesses experimentos, um total de 146 pontos de temperatura foram coletados em um sistema de aquisição de dados em um intervalo de tempo de 0,38 s com a velocidade de soldagem de 500 mm/min. Os experimentos foram feitos visando testar várias condições de soldagem variando, corrente, tensão, comprimento do arco, ângulo do eletrodo. O caso ótimo (teste OPT) foi determinado através do método de planejamento estatístico de Taguchi.

Tabela 5.1. Condições de soldagem de Lima e Silva *et al.* (2003)

Teste	Ângulo do Eletrodo (°)	Comprimento do arco (mm)	Corrente (A)	Tensão (V)	Gás de Proteção	Potência Gerada (W)
A01	30	2	41	8,2	Ar	336,2
A02	30	3	71	9,8	Ar + 25% He	695,8
A03	30	4	102	10,8	Ar + 25% He	1106,8
A04	60	2	71	9,0	Ar + 25% He	693,0
A05	60	3	101	9,6	Ar	969,6
A06	60	4	40	10,6	Ar + 25% He	424,0
A07	90	2	101	8,5	Ar + 25% He	858,5
A08	90	3	40	10,4	Ar + 25% He	426,4
A09	90	4	70	10,4	Ar	728,0
OPT	30	2	41	9,2	Ar + 25% He	377,2

O aparato experimental necessário para realização dos experimentos em soldagem TIG no aço Inox 304 é apresentado na Fig. 5.2. Enfatiza-se que as chapas de aço foram fixadas a

uma mesa de coordenadas com os fixadores tocando a menor área possível da amostra, visando atenuar o efeito aleta. Quatro parafusos cônicos foram usados para a fixação das amostras. Três deles foram cobertos com uma camada de isolante térmico com o objetivo de minimizar a área de contato entre o parafuso e a placa, ainda reduzir o efeito aleta durante o processo de transferência de calor. O quarto parafuso é responsável pelo aterramento da placa para realização do processo de soldagem. Um sistema automatizado foi acoplado a mesa de coordenadas para movimentação da tocha de soldagem TIG. Esses experimentos foram conduzidos por Lima e Silva *et al.* (2003) no LAPROSOLDA (Universidade Federal de Uberlândia - UFU).

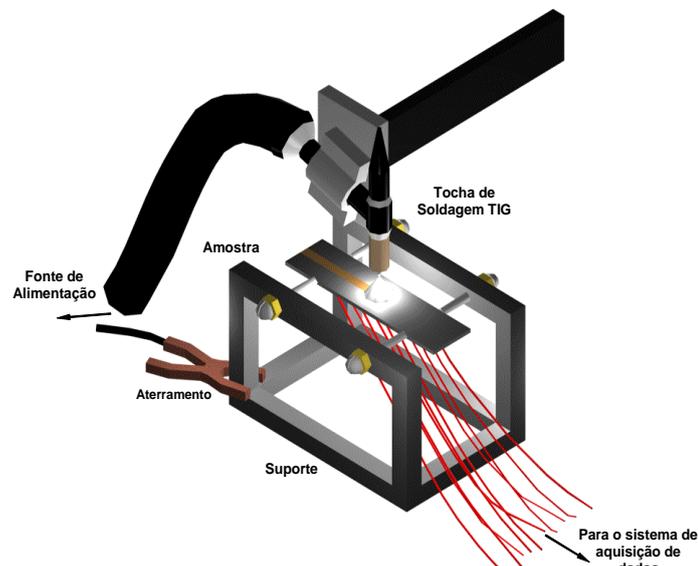


Figura 5.2. Montagem esquemática da bancada experimental (LIMA E SILVA *et al.*, 2003)

Diferentemente de Lima e Silva *et al.* (2003), as simulações de soldagem contaram com curvas não-lineares para as propriedades térmicas. Portanto, diferente também das simulações referentes ao parágrafo anterior, as propriedades térmicas foram consideradas como funções dependentes da temperatura. Essa aproximação foi utilizada devido ao elevado gradiente térmico característico do processo de soldagem. As curvas de condutividade $\lambda(T)$, e difusividade $\alpha(T)$ foram construídas através de regressões polinomiais de dados experimentais apresentado por Touloukian *et al.* (1975). A curva de emissividade foi obtida de Roger, Yen e Ramanathan (1979). Nas Equações (5.1 a 5.3) são apresentadas as regressões polinomiais das curvas de propriedades térmicas.

$$\lambda(T) = -7,52 \times 10^{-11} T^4 + 1,92 \times 10^{-7} T^3 - 1,80 \times 10^{-4} T^2 + 8,43 \times 10^{-2} T + 1,73 \text{ [W/mK]} \quad (5.1)$$

$$\alpha(T) = 1,41 \times 10^{-9} T + 3,10 \times 10^{-6} \text{ [m/s}^2\text{]} \quad (5.2)$$

$$\varepsilon(T) = 8,47 \times 10^{-2} \ln(T) - 39,32 \times 10^{-2} \quad (5.3)$$

Para a simulação do processo de soldagem, tomou-se o valor de 100 W/m²K como coeficiente de transferência de calor por convecção h . Esse valor relativamente alto para a coeficiente de transferência de calor foi obtido por Dal, Le Masson e Carin (2014). Este valor é devido a convecção forçada que é aplicada a placa soldada devido ao gás de proteção.

5.2 Processo de Soldagem a Laser

Os experimentos foram realizados com uma fonte de laser de fibra IPG-YLS 10000, de potência de saída máxima de 10kW, fixada a uma fibra ótica, e um cabeçote de processamento Precitec YW52. O laser foi ajustado na sua distância focal, que resulta em um diâmetro de 880 μm na amostra, com uma distribuição gaussiana. Para assegurar a operação no modo de condução, foram escolhidos os parâmetros de potência de 3kW e velocidade de soldagem de 3 m/min. Esse valor foi escolhido para minimizar o modo keyhole no processo de soldagem, que não é o objeto de estudo deste trabalho. Três experimentos foram realizados para assegurar a repetibilidade das temperaturas medidas e formato de soldagem.

Para a aquisição de temperatura, utilizou-se uma placa de captura National Instruments USB 6218 com 32 entradas de 16bits cada e taxa de transferência de 250 kb/s. A taxa de aquisição foi de 0,1 s (10 Hz). Os termopares tipo K foram utilizados devidos a sua capacidade de atingir temperaturas de até 1370°C. Os termopares foram fixados através de descarga capacitiva. Na Figura 5.3a apresenta-se uma foto do aparato experimental. O cabeçote de soldagem é fixo a uma mesa de medição por coordenadas que controla o movimento da peça. A soldagem a laser é realizada em amostras de aço SAE 1020 de dimensões 9,5 mm \times 31 mm \times 207 mm posicionadas em baixo do cabeçote de soldagem, como mostrado na Fig. 5.3a. Cada cordão de solda teve o comprimento de 45,00 mm. Na Figura 5.3b apresenta-se a localização dos termopares nas amostras de aço SAE 1020.

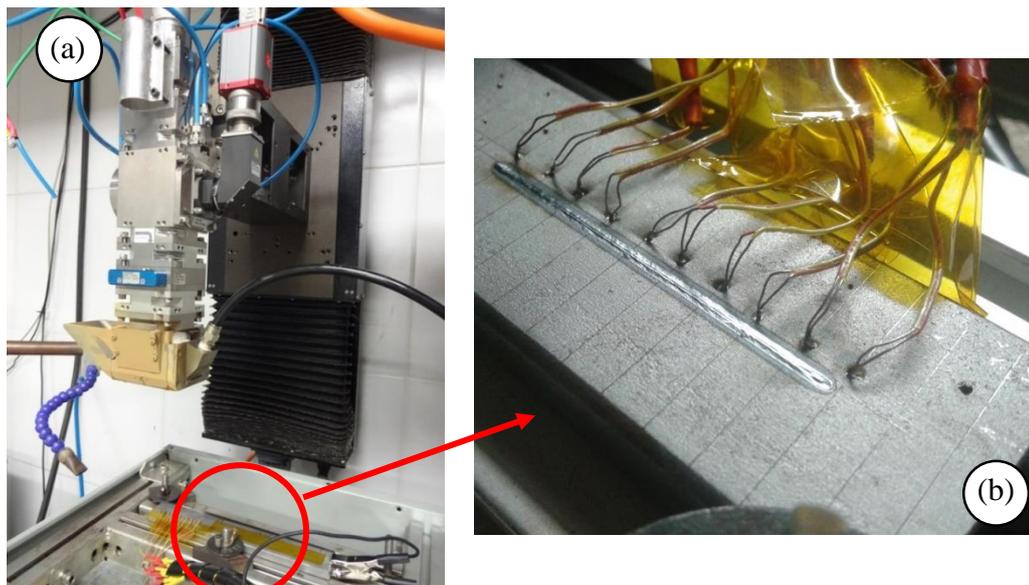


Figura 5.3. a) Montagem experimental, cabeça de soldagem a laser, amostra e termopares, b) posição dos termopares

Na Figura 5.4 mostra-se uma representação esquemática dos termopares igualmente espaçados ($\Delta y = 5,0 \pm 0,5$ mm e $\Delta x = 1,8 \pm 0,2$ mm) apresentados na Fig. 5.3b.

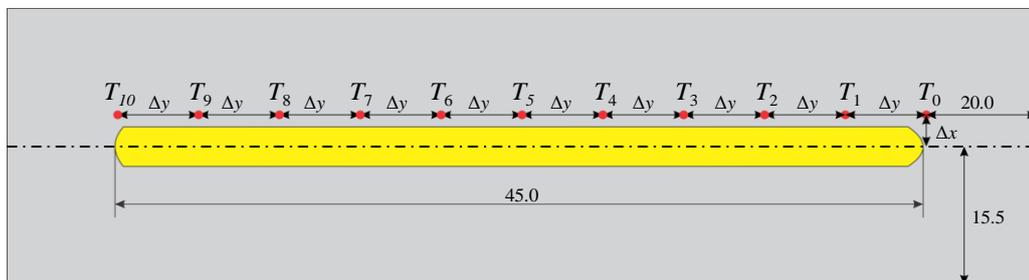


Figura 5.4. Posição dos termopares no aço SAE 1020.

Goldak e Akhlaghi (2005) propuseram que a convecção na zona de fusão pode ser aproximada através do aumento da condutividade térmica quando a temperatura atinge o ponto de fusão. Essa proposta foi adaptada neste trabalho para simulação do processo de soldagem a Laser. A condutividade térmica foi aumentada duas vezes quando o ponto de fusão foi atingido. As curvas de condutividade térmica e difusividade térmica são expressas por:

$$\lambda(T) = \begin{cases} -2,904 \times 10^{-2} T + 55,94 \text{ [W/mK]} & \text{para } T < 1425^\circ\text{C} \\ 111,88 \text{ [W/mK]} & \text{para } T \geq 1425^\circ\text{C} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\alpha(T) = \begin{cases} -1,162 \times 10^{-8} T + 1,308 \times 10^{-5} \text{ [m}^2\text{/s]} & \text{para } T < 700^\circ\text{C} \\ 4,946 \times 10^{-6} \text{ [m}^2\text{/s]} & \text{para } T \geq 700^\circ\text{C} \end{cases} \quad (5.5)$$

CAPÍTULO 6 – RESULTADOS E DISCUSSÕES

Apresenta-se nesse capítulo a análise dos resultados para as metodologias propostas neste trabalho. Na primeira seção é apresentada uma análise de validação através de erros aleatórios e testes sobre a versatilidade da simulação do sensor móvel de temperatura no processo de soldagem. Esses testes visam comprovar que a técnica do sensor móvel de temperatura apresenta resultados satisfatórios. No primeiro subitem dessa seção apresenta-se o teste de convergência da malha numérica utilizada. Em seguida é analisada a influência de ruídos no processo de estimação para três técnicas de resolução de problemas inversos, TTR, SFMS e Regularização de Tikhonov. No terceiro subitem mostra-se a vantagem de se tomar um sensor de temperatura móvel em relação a vários sensores de temperatura fixos. No último subitem mostra-se que a interferência de erros aleatórios na determinação do fluxo de calor no processo de soldagem é muito baixa.

Na segunda seção apresenta-se a curva do Sensor Móvel de temperatura seguida por análises de sensibilidade para o processo de soldagem TIG em a aço Inox AISI 304. Em seguida, apresenta-se uma análise térmica desse processo de temperatura. Apresenta-se também as curvas de rendimento térmico obtidas, bem como uma comparação com os dados obtidos por Lima e Silva *et al.* (2003).

Apresenta-se na terceira seção as simulações realizadas para o processo de soldagem a Laser em amostras de aço SAE 1020. Primeiramente são apresentadas comparações entre as diferentes distribuições de calor analisadas. Em seguida uma análise térmica para essas condições é mostrada.

6.1 Testes de Validação da Metodologia

6.1.1 Teste de convergência de malha

Desenvolveu-se a partir do modelo térmico descrito no Cap. 3 um software na linguagem de programação C++ para as simulações numéricas realizadas neste trabalho. Para isso uma malha cartesiana estruturada não uniforme foi utilizada. Na Figura 6.1 apresenta-se a malha não uniforme aplicadas na simulação em soldagem. Para as simulações de soldagem TIG e Laser adotaram-se 1.936.000 elementos.

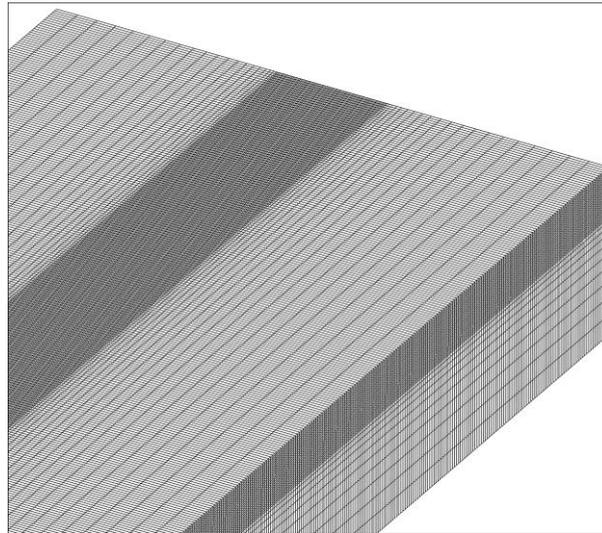


Figura 6.1. Malha não-uniforme aplicada na simulação em soldagem.

O número de elementos para a malha cartesiana foi definido a partir de um teste de convergência de malha. As malhas numéricas utilizadas foram testadas quanto a convergência para todos os casos analisados. Como a malha para simulação do processo de soldagem é mais complexa, nesta seção apresenta-se os testes de malha utilizados para as simulações em soldagem. Nesse caso, foram utilizadas malhas com 484.000, 968.000, 1.452.000 e 1.936.000 volumes.

Para realização do teste de convergência de malha, posicionou-se um sensor numérico de temperatura na face onde o fluxo de calor do processo de soldagem é aplicado. Na Figura 6.2a um esquema do posicionamento do sensor de temperatura é apresentado. Apresenta-se na Fig. 6.2b o teste de convergência de malha realizado para a simulação em processo de soldagem para o sensor apresentado na Fig. 6.2a. Observa-se que quando a malha é refinada de 484.000 volumes para 968.000 há um aumento da temperatura em um sensor posicionado na parte superior da amostra. O mesmo ocorre quando a malha é refinada de 968.000 para 1.452.000 volumes. No entanto, o refinamento de malha a partir de 1.452.000 volumes aumenta muito o tempo computacional. A máxima diferença de temperaturas quando a malha passa de 1.452.000 para 1.936.000 volumes cresceu apenas 4.5%, portanto, para as simulações escolheu-se a malha de 1.936.000 volumes.

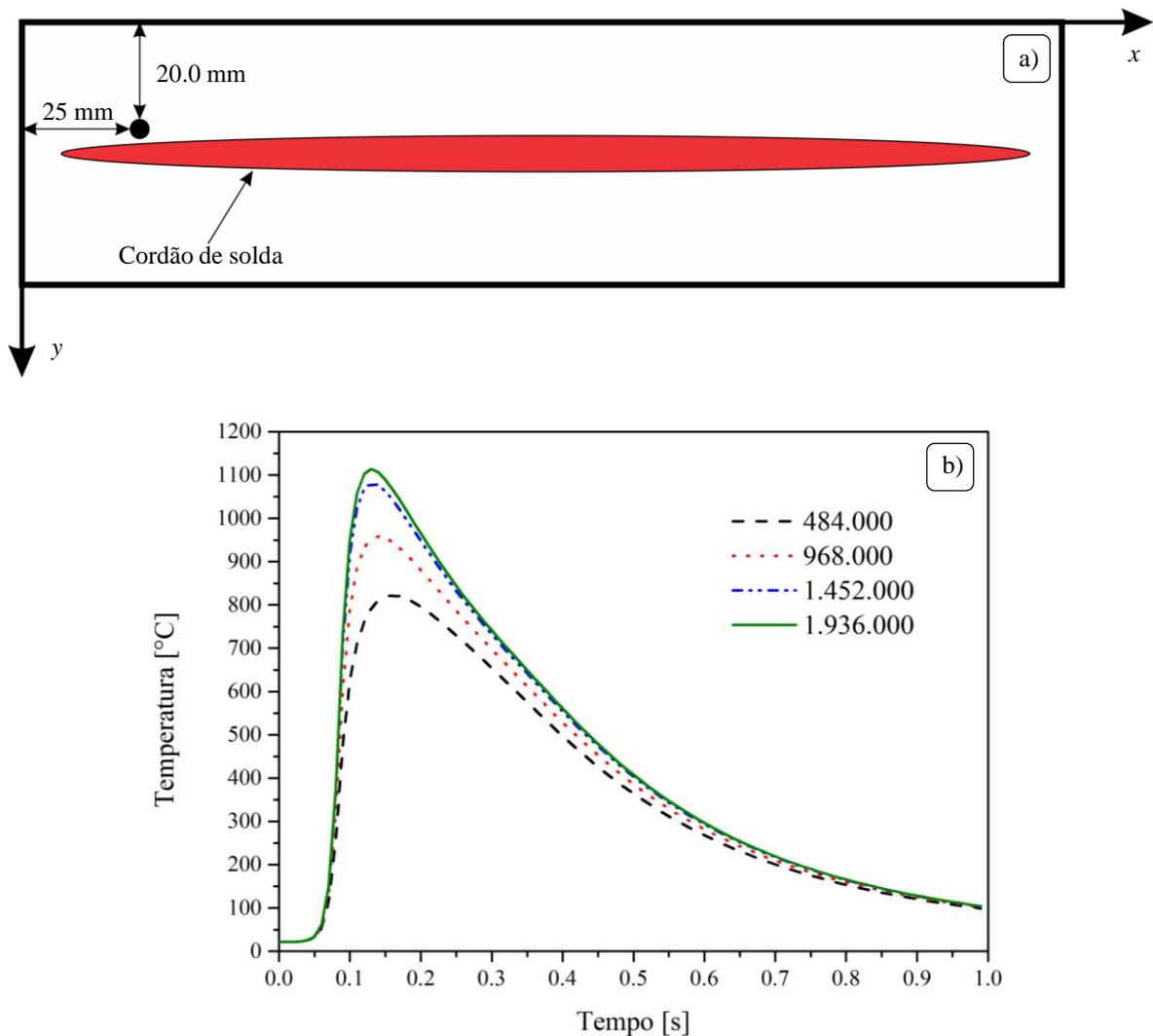


Figura 6.2. a) Posicionamento do sensor no teste de convergência de malha, b) Teste de convergência de malha para a simulação de soldagem.

6.1.2 Erros Aleatórios

Para se comparar as técnicas de solução de problemas inversos, comparou-se as três técnicas descritas neste trabalho: TTR (Regularização de Viagem no Tempo) aplicada a Seção Áurea, SFSM (Método Sequencial da Função Especificada) e a regularização de Tikhonov também aplicada a Seção Áurea. Uma análise usando erros aleatórios na temperatura foi desenvolvida (WOODBURY, 2003). Nessa análise considera-se um experimento hipotético sem interferências no sinal do fluxo de calor com a adição de erros aleatórios para simulação de ruídos. Considerando um experimento unidimensional simulado de uma amostra de alumínio

de dimensões $50 \times 50 \times 6,2 \text{ mm}^3$, com condutividade térmica $\lambda = 137 \text{ W/mK}$ e a difusividade térmica $\alpha = 5,59 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ (LIMA E SILVA; GUIMARÃES; SILVA NETO, 2001), e condição inicial de $T(x, y, z) = 0$, sujeita a um fluxo de calor triangular hipotético definido por:

$$q''(t) = \begin{cases} 0 & 0,000 \leq t < 8,316 \\ 25,253 \cdot t - 200 & 8,316 \leq t < 27,72 \\ -25,253 \cdot t + 1200 & 27,72 \leq t < 47,52 \\ 0 & 47,52 \leq t \leq 60,00 \end{cases} \quad (6.1)$$

A curva de resposta a essa excitação térmica no centro da superfície oposta, é dado pela Fig. 6.3.

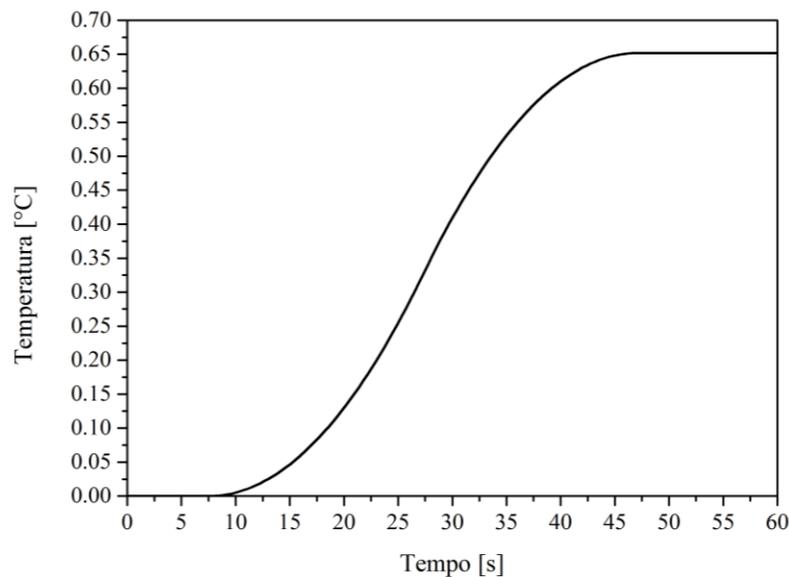


Figura 6.3. Resposta da temperatura ao fluxo triangular proposto.

Para se avaliar a influência de ruídos nos dados de temperatura, erros aleatórios foram adicionados a resposta da temperatura apresentada na Fig. 6.3. Quatro condições foram analisadas onde o fluxo de calor foi estimado através da TTR, SFMS e Regularização de Tikhonov. Na primeira condição, o fluxo de calor foi estimado a partir dos dados de resposta de temperatura sem nenhum erro adicionado. Nas outras três condições, erros foram adicionados a curva de resposta da temperatura. O vetor de erros \mathbf{E} pode ser definido como:

$$\mathbf{E} = [E_1 \quad E_2 \quad \dots \quad E_{N-1} \quad E_N]^T \quad (6.2)$$

Nesse caso, o vetor de temperaturas experimentais \mathbf{Y} é obtido através da seguinte relação:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T} \pm \mathbf{E} \quad (6.3)$$

O vetor erros foi formado através de erros aleatórios da ordem de 1% ($\pm 0,326 \times 10^{-03} \text{ }^\circ\text{C}$), 5% ($\pm 0,163 \times 10^{-02} \text{ }^\circ\text{C}$) e 10% ($\pm 0,326 \times 10^{-02} \text{ }^\circ\text{C}$), da temperatura máxima (0,652 $^\circ\text{C}$). Na Figura 6.4 apresenta-se o fluxo estimado para as quatro condições testadas. A partir da análise da Fig. 6.4, pode-se observar que os três métodos de estimação apresentados mostraram praticamente o mesmo resultado. Não há diferença visual que pode ser apontada entre os resultados dos três modelos. Portanto, pode-se concluir que as três técnicas apresentam resultados similares para o modelo apresentado.

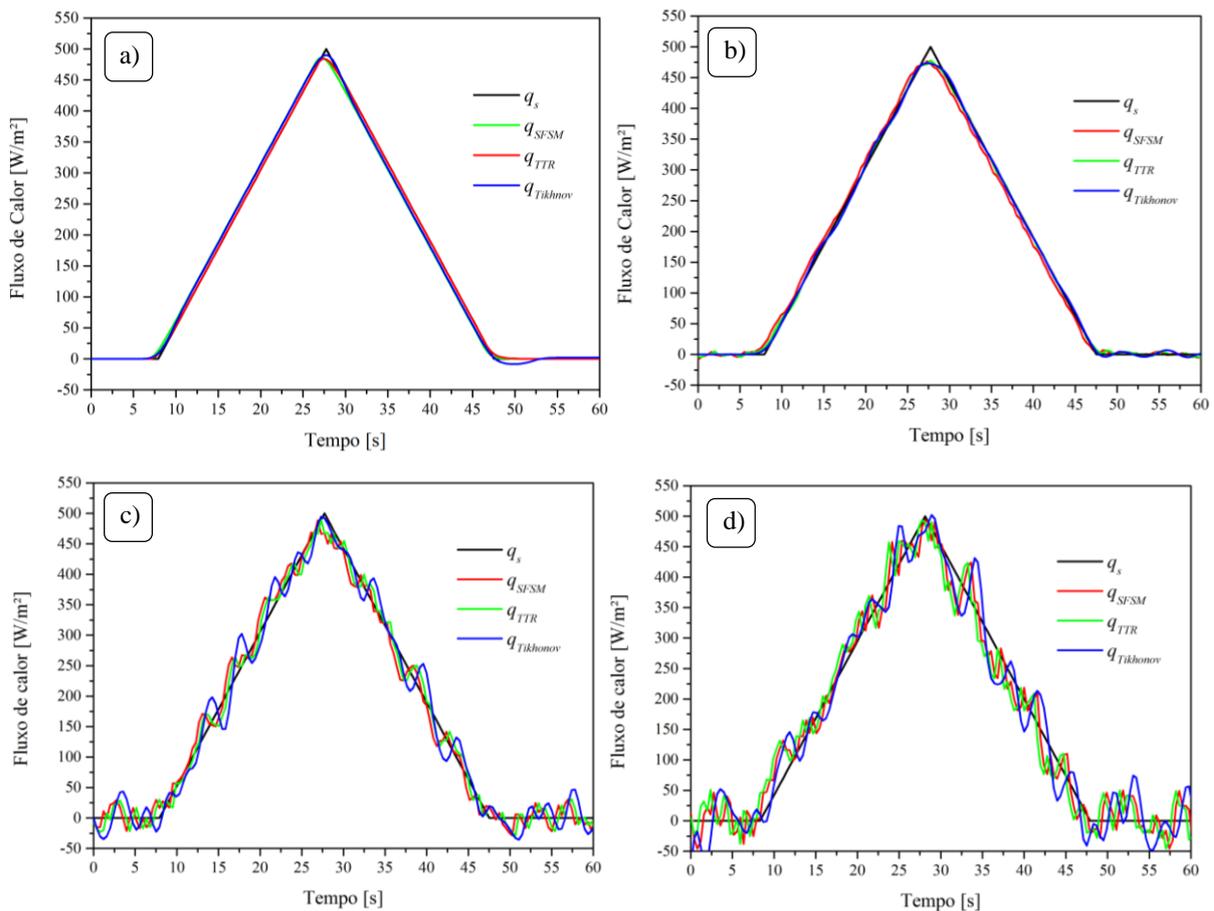


Figura 6.4. Fluxo de calor estimado para o vetor de erros aleatórios: a) $\mathbf{Y} = \mathbf{T} \pm 0$; b) $\mathbf{Y} = \mathbf{T} \pm 0,326 \times 10^{-03}$; c) $\mathbf{Y} = \mathbf{T} \pm 0,163 \times 10^{-02}$; e d) $\mathbf{Y} = \mathbf{T} \pm 0,326 \times 10^{-02}$.

6.1.3 Sensor Móvel de Temperatura

A proposta do sensor móvel de temperatura considera um único sensor numérico de temperatura se movendo na superfície oposta da amostra durante o processo de soldagem. A distribuição dos sensores fixos usadas na aproximação do sensor numérico foi apresentada no Capítulo 5. A estimação através de múltiplos sensores fixos requer outro tipo de função objetivo. Neste estudo, a função clássica de mínimos quadrados para múltiplos sensores foi adotada ao uso da TTR. A função objetivo utilizada pode ser escrita como:

$$F_{obj}^{jj} = \sum_{s=1}^{ns} \sum_{i=jj}^{jj+r} (Y_s^i - T_n^i)^2 \quad (6.4)$$

sendo, ns o número de sensores de temperatura, Y a temperatura medida, e s representa o índice do sensor.

A TTR foi a única técnica utilizada para estimação do fluxo de calor nos processos de soldagem. Isso se deve ao método de otimização escolhido não depender da derivada numérica, tornando assim o procedimento de estimação não-linear. O SFSM é baseado no teorema de Duhamel (BECK; BLACKWELL; CLAIR, 1985), que aproxima as derivadas como retas. Como o processo de soldagem é não-linear, não se justifica a adequação de um modelo puramente linear a estimação do calor em um processo de soldagem.

Na Figura 6.6 apresenta-se o fluxo de calor estimado para o caso A08 da Tab. 5.1 em quatro condições: um, dois, e três sensores estáticos de temperatura respectivamente e outro caso para estudar o sensor móvel de temperatura. O caso A08 apresentou: ângulo de eletrodo de 90°, comprimento do arco de 3mm, corrente de 40A, tensão de 10,4V, gás de proteção Ar + 25%He e uma potência gerada de 426,4W. A distribuição dos sensores segue o modelo apresentado nas Figs. 5.1 e 5.4. A partir da análise da Fig. 6.5, pode-se observar que quando os sensores estáticos são usados, a estimação do fluxo de calor tende a ser maior que a do sensor móvel de temperatura. No entanto, a estimação do fluxo de calor decresce após algum tempo devido à perda de sensibilidade. Isso é associado como a distância em relação a tocha de soldagem TIG.

Quando o fluxo de calor é estimado para casos de aquecimento estático e sensores estáticos, a adição de mais sensores de temperatura aumenta a sensibilidade. No entanto, quando há movimento da fonte de calor, cada sensor possui sensibilidade diferente em relação ao

tempo. Na Figura. 6.5 também é mostrado que existe um atraso entre o começo e final do aquecimento para os casos com 2 e 3 sensores. Nesses casos, a adição de sensores de temperatura retarda a estimação do fluxo de calor.

Como pode-se notar, uma função objetivo como apresentada na Eq. (6.4) entrega o mesmo peso para os sensores que não possuem sensibilidade o que afeta o processo de estimação. Ainda mais, essa configuração esconde a forma real do fluxo de calor. Por exemplo, como apresentado na Tab. 5.1, a potência gerada para o caso A08 foi de aproximadamente 426,4W, a taxa de calor estimada para o caso com 3 sensores atingiu 705,9W. Portanto, o resultado da estimação é incoerente. Isso é a principal razão que muitos autores adotam apenas o valor médio na região que apresenta a maior sensibilidade. Por exemplo, o mesmo caso foi estimado por Lima e Silva *et al.* (2003), e nesse trabalho os autores encontraram uma potência de entrada de 371W e eficiência térmica de 86,9%. Ao passo que com o sensor móvel de temperatura, o valor médio para a potência foi de 260W e a eficiência térmica chegou a apenas 61,0%, o que por sinal apresenta um valor bem mais realístico (GOLDAK; AKHLAGHI, 2005).

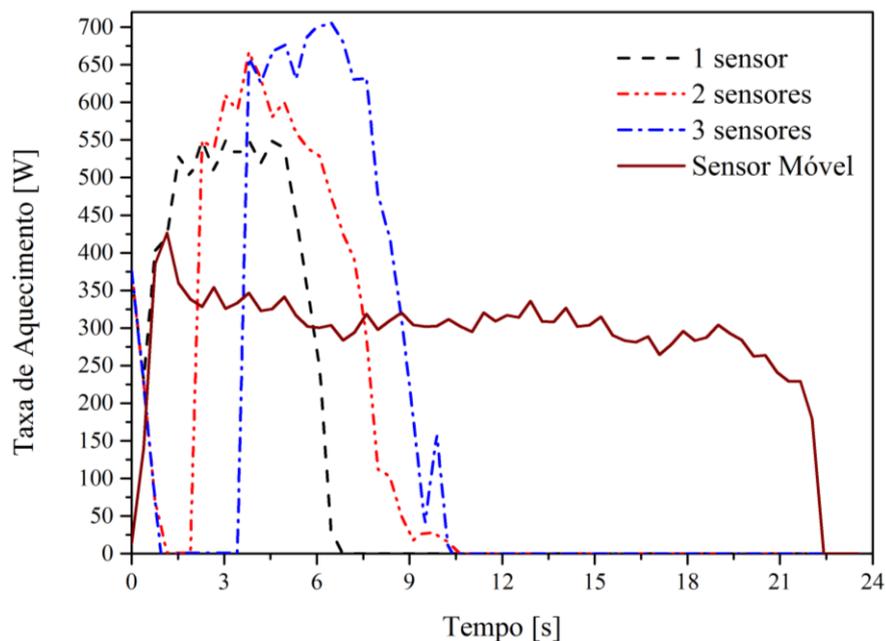


Figura 6.5. Potência estimada para diferentes números de sensores para o caso experimental A08.

6.1.4 Interferência de Ruídos nas Simulações de Soldagem

Devido ao aumento de sensibilidade relacionado ao sensor móvel de temperatura, os ruídos nos experimentos não interferem muito no processo de simulação em soldagem quando o sensor móvel de temperatura é utilizado. Visando provar essa afirmação, uma análise de erros aleatórios é proposta para um sinal simulado de temperaturas numéricas. As temperaturas do sensor podem ser consideradas como constante, a 250 °C. De fato, as observações experimentais mostraram que a curva de temperatura do sensor móvel pode ser considerada como constante, mais detalhes serão apresentados no próximo capítulo. Nessa simulação, a temperatura inicial da placa foi considerada 28,9 °C. Para se ter ruídos no processo de estimação da taxa de aquecimento, erros aleatórios da ordem de $\pm 2,0$ °C foram adicionados as temperaturas experimentais de modo que:

$$Y = 250,0 \pm 2\sigma(t) \quad (6.5)$$

sendo $\sigma(t)$ uma função de erros aleatórios que podem ser qualquer número no intervalo de -1 a 1 .

Considerando que a incerteza de um termopar é $\pm 0,1$ °C, as análises propostas consideraram um valor de ruídos de cerca de 40 vezes o ruído experimental. Apesar do alto nível de ruídos, a estimação do fluxo de calor com erros aleatórios apresentou bons resultados. Na Figura 6.6 apresenta-se a taxa de aquecimento estimada e o comportamento esperado. Pode-se observar que é visualmente possível identificar o comportamento linear durante a faixa de aquecimento.

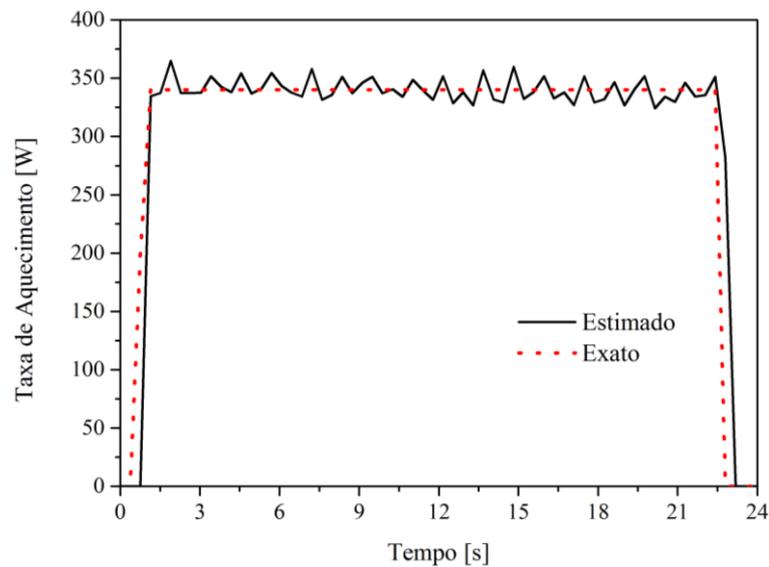


Figura 6.6. Taxa de calor estimada com dados aleatórios.

Os resíduos de temperatura para os dados simulados são apresentados na Fig. 6.7. Nesse caso, os resíduos de temperatura são altos devido aos altos níveis de ruídos presentes nos dados. No entanto, isso representa menos de 5% dos dados de entrada. O que para uma simulação em soldagem, que na poça de fusão atinge temperaturas superiores a 1500°C , pode ser considerado como um bom modelo (GOLDAK; AKHLAGHI, 2005).

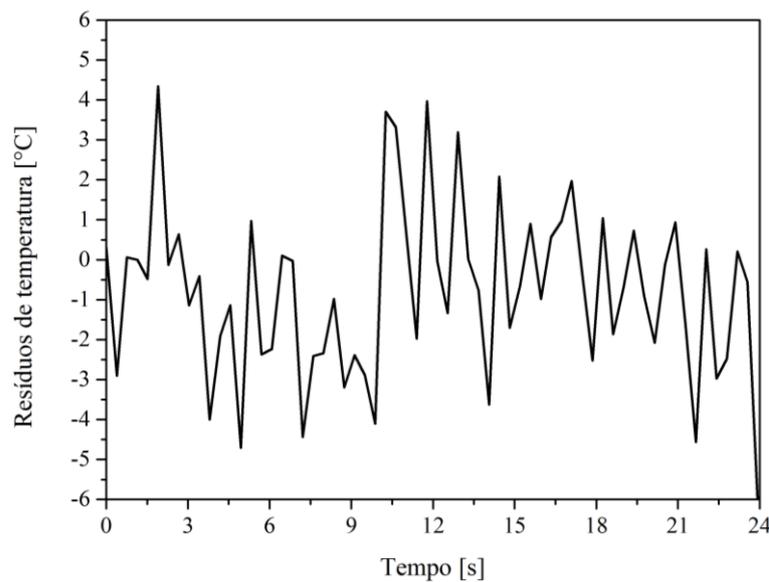


Figura 6.7. Diferença entre as temperaturas simuladas e as temperaturas com dados aleatórios adicionados.

6.2 Simulações para o Processo de Soldagem TIG

As simulações para o processo de soldagem TIG em aço Inox AISI 304 contaram com uma distribuição de calor gaussiana bidimensional (Eq. 3.6). Esse tópico visa apresentar as simulações realizadas para esse processo de soldagem. Primeiramente, a obtenção da curva do sensor móvel de temperatura a partir dos dados coletados pelos termopares é apresentada. Em seguida, apresenta-se as análises de sensibilidade realizadas. Por último é apresentada uma análise detalhada da taxa de rendimento térmico para as várias condições experimentais testadas.

6.2.1 Sensor Móvel de Temperatura

O sensor Móvel de Temperatura é obtido através da aproximação linear das temperaturas de pico dos pontos de temperaturas medidos. Assim, quanto maior o número de sensores maior será a precisão da estimativa. Os experimentos foram realizados com 10 termopares.

Nas Figuras 6.8 e 6.9 são apresentados os dados obtidos para os termopares numerados de 1 a 10 para as condições A02 e A03. Como mostrado na Tab. 5.1, essas condições experimentais contaram com potências geradas pela fonte de 695,8 W e 1106,8 W respectivamente. Essas condições experimentais foram escolhidas para análise detalhada pois possuem intervalos de temperatura durante a soldagem bem distintos.

Pode-se observar que a temperatura média na Fig. 6.8 é de 300 °C. Apesar da temperatura na superfície oposta variar de um ponto para o outro, pode-se observar que a temperatura não excede 315°C para nenhum termopar nesse caso. Portanto, a temperatura na face oposta não cresce constantemente durante o processo de soldagem, não excedendo o valor de pico atingido pelo termopar T_2 .

A análise das outras condições provou possuir o mesmo padrão, apesar da tocha estar em constante movimento, a temperatura não tende a continuar crescendo durante o experimento. O mesmo padrão é apresentado na Figura 6.9. Como esperado, a temperatura medida para o caso A03 deve ser maior que para o caso A02 devido ao aumento da potência da fonte aplicada.

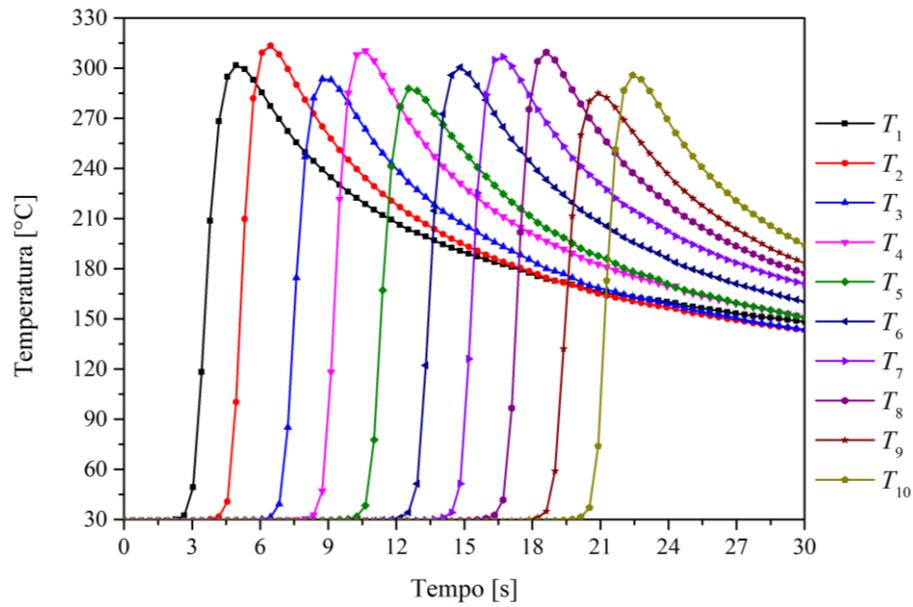


Figura 6.8. Temperatura experimental na superfície oposta para o caso de aquecimento A02

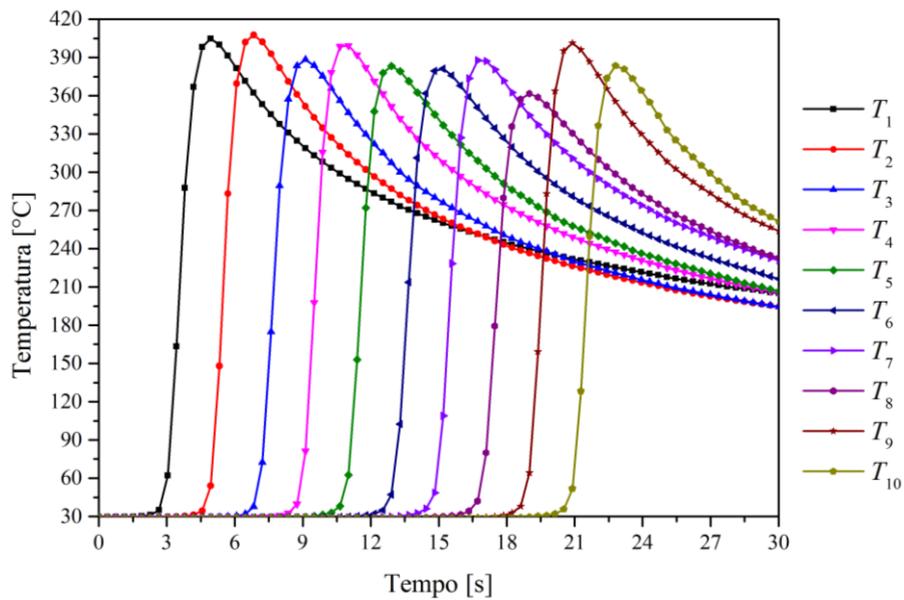


Figura 6.9. Temperatura experimental na superfície oposta para o caso de aquecimento A03.

A curva do sensor móvel aproximada é apresentada na Fig. 6.10 e construída a partir dos dados experimentais apresentados nas Figs. 6.8 e 6.9. Pode-se observar que apesar da temperatura ser mantida em cerca de 300 °C no teste A02 e 390°C no teste A03, a temperatura na região de aquecimento não é bem definida, isto é, não permanece constante.

Todas as dez condições experimentais testadas apresentaram esse mesmo padrão, o que pode ser associado a alguns fatores experimentais como: variação da velocidade de soldagem;

oscilações da tensão e corrente devido a fonte de alimentação; não-uniformidade do material da amostra; e a fixação do termopar. Muitas dessas prováveis causas foram eliminadas durante o experimento: uma mesa de coordenadas automatizada foi usada para manter a velocidade constante; a potência da fonte foi monitorada e não apresentou quedas de corrente ou tensão. Para determinar-se a homogeneidade do material, uma análise microestrutural é necessária; no entanto, esse ponto deve ter um menor impacto na distribuição de temperatura. Portanto, os erros de posicionamento dos termopares devem ser a principal incerteza na medição de temperaturas. A não-uniformidade da curva de temperatura na região de aquecimento implica em oscilações similares na estimação do processo de soldagem.

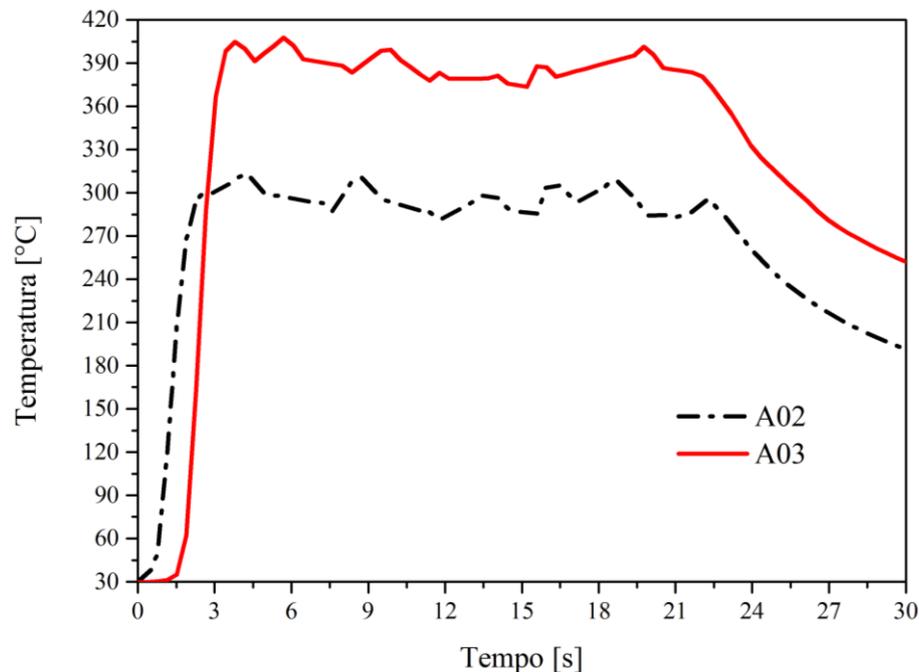


Figura 6.10. Temperatura do sensor móvel nos testes A02 e A03.

6.2.2 Análise de sensibilidade

A estimação temporal da taxa de aquecimento de um processo de soldagem deve ser realizada através do sensor móvel de temperatura. Visando-se comparar o processo de estimação convencional e a técnica proposta do sensor móvel, calculou-se com $\partial T/\partial Q$ a sensibilidade para dois casos: sensor estático e sensor móvel de temperaturas. Nas Figuras 6.11 e 6.12 apresentam-se a sensibilidade encontrada para o caso do sensor estático único e o caso

do sensor móvel para o caso OPT (Tab. 5.1). A partir da análise dessas figuras pode-se perceber que para o caso do sensor estático (Fig. 6.11) o coeficiente de sensibilidade atinge seu ápice a 4,5 s. Para se obter uma boa estimativa, o coeficiente de sensibilidade precisa apresentar a magnitude máxima possível. No entanto, para o caso da Fig. 6.11 uma boa sensibilidade é encontrada apenas no intervalo de 4,0 a 6,0 s. Portanto, esse é o único intervalo possível.

Quando a sensibilidade da técnica do sensor móvel de temperatura é apresentada (Fig. 6.12), pode-se perceber o acréscimo de sensibilidade que essa técnica permite a partir da estimativa do sensor móvel. Na Figura 6.12, o coeficiente de sensibilidade não possui apenas um pico como apresentado na Fig. 6.11. No entanto, ele apresenta sensibilidade desde o começo do experimento a 2,0 s até o momento que a tocha de soldagem TIG é desligada em 18,6 s. Ao invés de ter apenas um pequeno intervalo para estimativa do fluxo de calor, a técnica do sensor móvel de temperatura permite a estimativa do fluxo de calor em função da taxa de aquecimento do processo de soldagem.

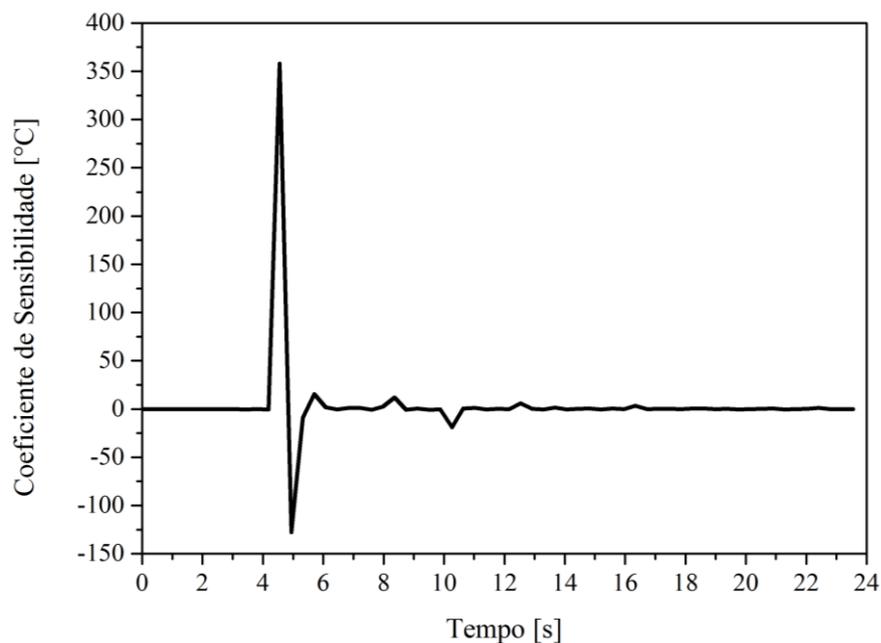


Figura 6.11. Coeficiente de sensibilidade para um único sensor de temperatura para o caso OPT (Tab. 5.1)

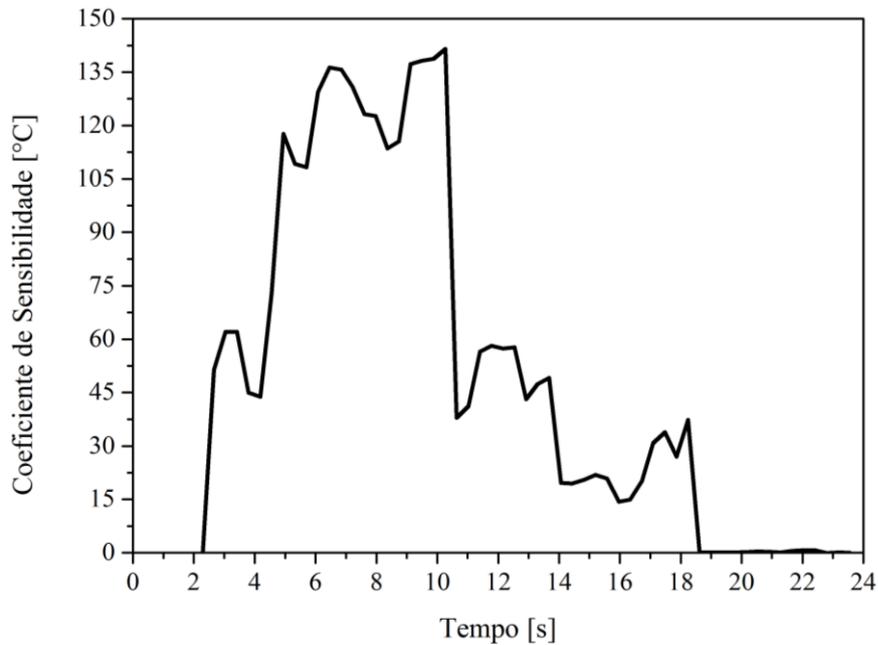


Figura 6.12. Coeficiente de sensibilidade para o sensor móvel de temperatura para o caso OPT (Tab. 5.1).

6.2.3 Análise térmica do processo de soldagem TIG

A taxa de aquecimento do processo de soldagem TIG em relação ao tempo é apresentada para os casos A02 e A03 nas Figs. 6.13 e 6.14. Apesar de existir uma pequena oscilação na estimação dos dados na região de aquecimento, os ruídos são correlacionados a flutuação dos dados da curva do sensor móvel de temperatura. A boa definição dessa curva é relacionada a TTR. Nesse caso, devido à alta sensibilidade e o elevado gradiente térmico, apenas três tempos futuros foram requeridos para atingir uma boa aproximação.

Na Figura 6.13 a taxa de aquecimento decresce a medida que o experimento se desenvolve. A taxa de aquecimento para esse caso começa com cerca de 453W e termina com 350W. O mesmo padrão é apresentado na Fig. 6.14. Porém, a taxa de aquecimento se inicia por volta de 675W e termina com 525W. Para se destacar essa queda de potência na taxa de aquecimento, uma aproximação linear é plotada junto as Figs. 6.13 e 6.14.

A fonte de alimentação usada nesse experimento possui corrente e tensão constantes. Não foram verificadas perdas de potência durante os experimentos. Portanto, esse efeito ocorre termicamente. Todas as outras condições testadas também apresentaram o mesmo comportamento. Como mencionado na revisão bibliográfica, muitos autores usam a eficiência

térmica como sendo um valor constante. No entanto, como apresentado nas Figs. 6.13 e 6.14, a eficiência térmica decresce com o tempo. No teste A02, a eficiência térmica (η_r) começa no início do experimento em cerca de 66% e decresce para cerca de 53% no final. Da mesma maneira, a eficiência térmica começa em cerca de 61% no teste A03 e termina em cerca de 43%. Esse comportamento é esperado quando se observa as temperaturas experimentais. Como apresentado nas Figs. 6.8 e 6.9, as temperaturas da chapa não continuam aumentando. O que se observou foi que as temperaturas flutuaram em volta do valor médio de 300°C no teste A02 e 390°C no teste A03.

Apesar da placa continuar recebendo uma taxa de calor constante da tocha de soldagem, a temperatura não se distancia do valor médio. Portanto, a placa não requer a mesma quantidade de calor para manter a temperatura perto da média e a eficiência térmica decresce. Como a fonte é de potência constante, conclui-se que uma maior quantidade de calor é rejeitada por convecção e radiação para o ambiente. Uma implicação deste estudo é que, a potência de soldagem pode ser reduzida durante o experimento. Isso pode trazer alguns benefícios devido ao esperado aumento de eficiência e qualidade na soldagem. O que se espera é que essa aproximação irá fazer uma poça de fusão mais uniforme na placa, ao passo que reduzirá a potência requerida e diminuirá os custos do processo de soldagem.

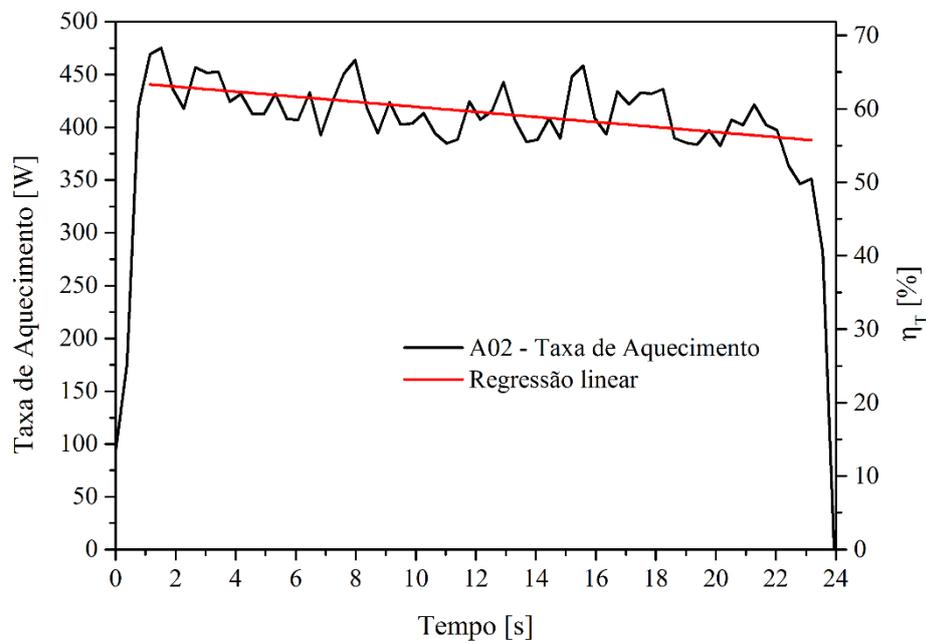


Figura 6.13. Taxa de aquecimento e eficiência térmica para o teste de soldagem A02.

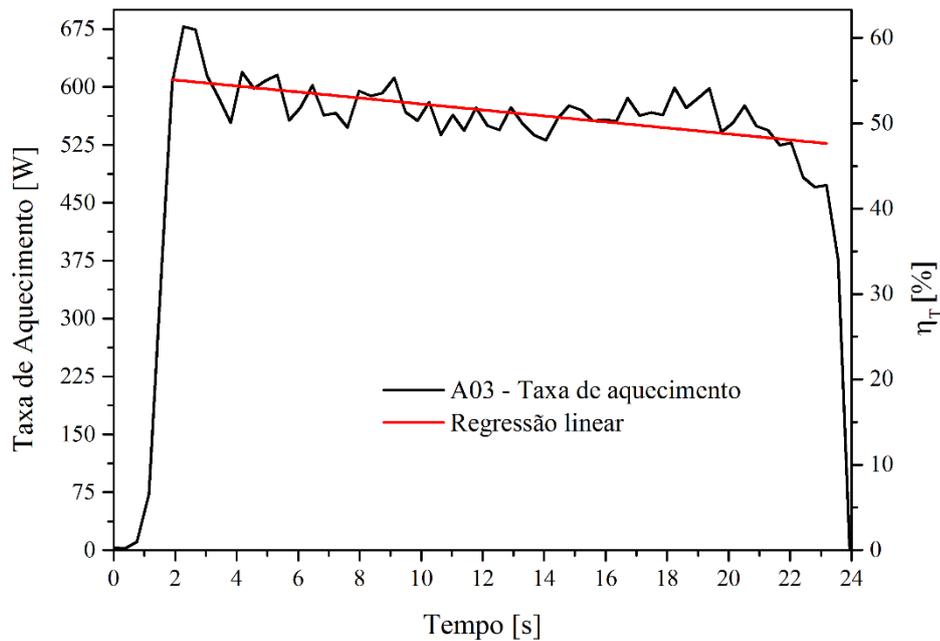


Figura 6.14. Taxa de aquecimento e eficiência térmica para o teste de soldagem A03.

Na Tabela 6.1 é apresentada uma comparação entre a média dos resultados de taxa de aquecimento e eficiência térmica obtida por Lima e Silva *et al.* (2003) e os resultados obtidos neste trabalho. Pode-se perceber que os valores de eficiência térmica encontrados por Lima e Silva *et al.* (2003) não são recomendados como valores de eficiência térmica, visto que Goldak e Akhlaghi (2005) indicam que a eficiência térmica para um processo de soldagem TIG gira em torno de 60%. A partir das análises apresentadas por esses autores, a eficiência térmica do processo de soldagem TIG varia de 59,1% a 86,9%. Enquanto nas análises térmicas apresentadas nesse trabalho, os valores de eficiência térmica variam entre 50,4% e 61,1%. Portanto, a variação da eficiência térmica é menor que a apresentada em Lima e Silva *et al.* (2003). Os valores encontrados são mais apropriados para o processo. Por exemplo, a eficiência térmica para o caso ótimo (OPT) foi de 86,2% em Lima e Silva *et al.* (2003). De outra forma, o valor encontrado neste trabalho de 61,1% pode ser considerado válido (GOLDAK; AKHLAGHI, 2005).

Tabela 6.1. Comparação entre a taxa de aquecimento estimada e a eficiência térmica apresentada por Lima e Silva *et al.* (2003) e obtida neste trabalho

Teste	Potência Gerada (W)	Taxa de Aquecimento Lima e Silva <i>et al.</i> (2003) (W)	Taxa de aquecimento no presente trabalho (W)	η_T (%) Lima e Silva <i>et al.</i> (2003)	η_T (%) Presente trabalho
A01	336,2	280	192	83,4	52,7
A02	695,8	516	417	74,2	59,5
A03	1106,8	766	558	69,5	50,4
A04	693,0	486	403	76,1	58,1
A05	969,6	573	526	59,1	54,2
A06	424,0	291	255	68,6	60,1
A07	858,5	572	500	66,6	58,3
A08	426,4	371	260	86,9	61,0
A09	728,0	496	395	72,0	54,6
OPT	377,2	323	230	86,2	61,1

Comparações entre os valores experimentais para o termopar T_1 (Figs. 6.8 e 6.9) e os valores obtidos neste trabalho são apresentadas nas Figs. 6.15 e 6.16. Uma boa concordância entre as curvas pode ser observada. No entanto, os picos das temperaturas numéricas não se aproximam perfeitamente quando comparados com os dados experimentais. Essa diferença é relacionada aos erros inerentes atribuídos aos valores de propriedades térmicas. Para um cálculo mais preciso, são necessários os valores de condutividade e difusividade térmica para o aço AISI 304 na fase líquida. Infelizmente, a estimação de propriedades térmicas nesta faixa de temperatura é muito difícil de ser realizada, portanto esses valores não são encontrados facilmente na literatura.

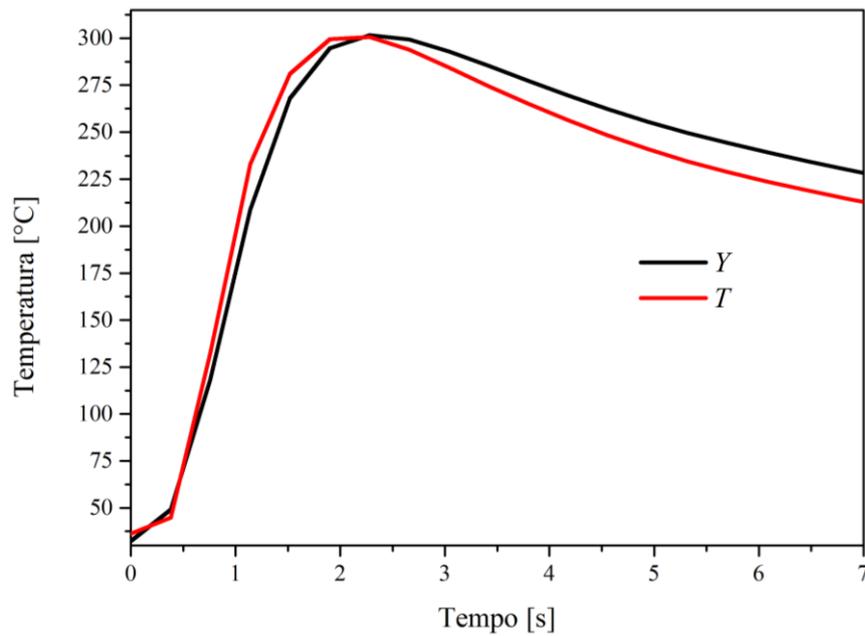


Figura 6.15. Comparação entre as temperaturas experimentais Y e numéricas T para o teste A02.

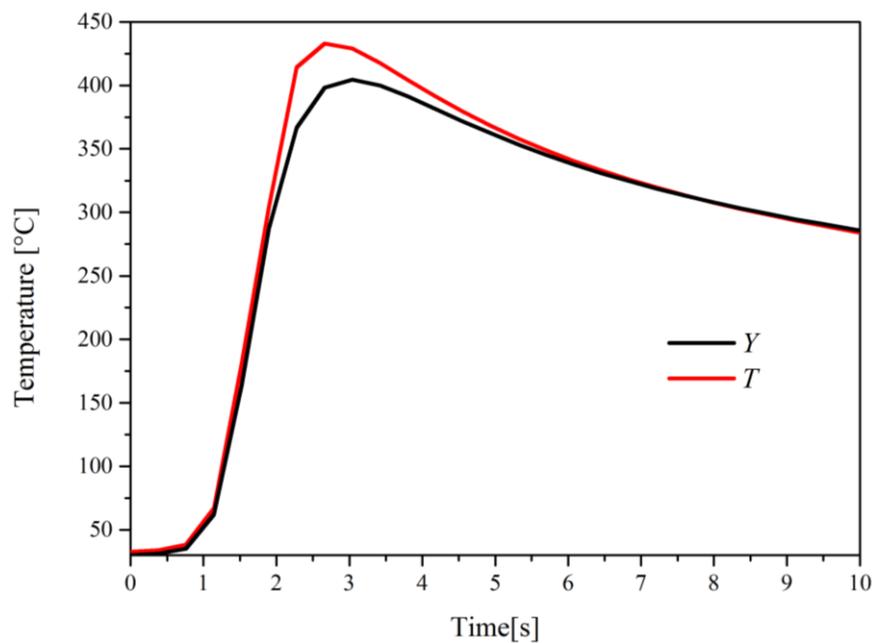


Figura 6.16. Comparação entre as temperaturas experimentais Y e numéricas T para o teste A03.

O campo de temperaturas no instante $t = 19$ s, para a condição experimental A02 é apresentada na Fig. 6.17. Esse campo de temperaturas é bem diferente do caso para o alumínio, apresentado em Magalhães *et al.* (2017). Para o caso do alumínio, isotérmicas circulares são encontradas, enquanto para o do aço inox AISI 304, as isotérmicas apresentam formas ovais.

A distribuição de temperaturas está diretamente ligada a condutividade térmica dos materiais. Quanto maior for a condutividade térmica, mais circular as isotérmicas se tornam. Por outro lado, quando a condutividade térmica decresce, como para o aço inox, a distribuição das isothermas se torna oval.

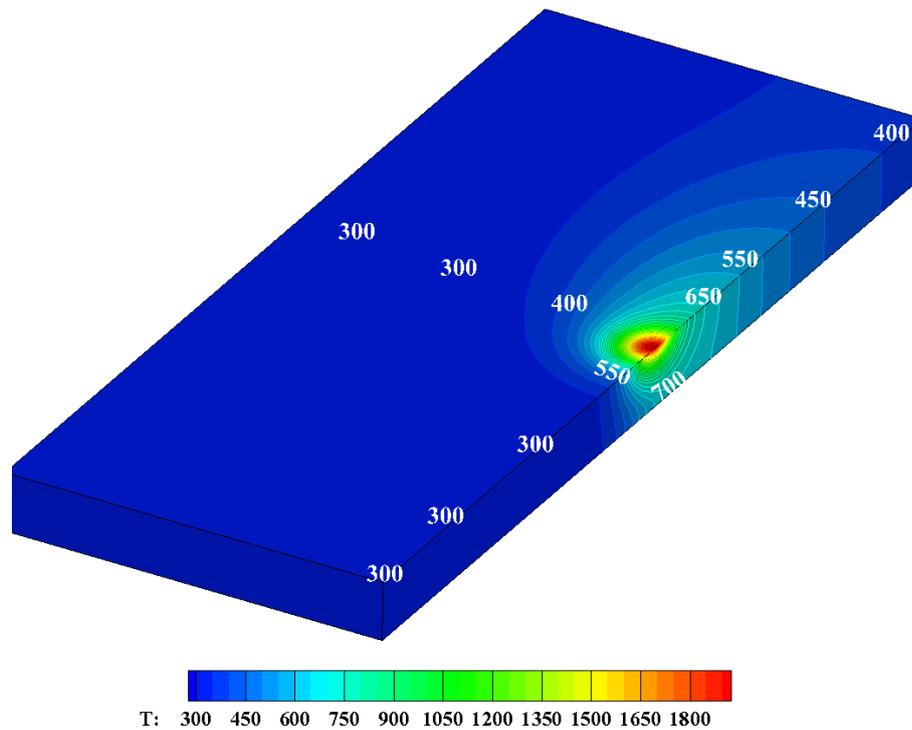


Figura 6.17. Campo de temperaturas em K para o caso de soldagem TIG A02 no instante $t = 19\text{s}$.

6.3 Simulações para o Processo de Soldagem a Laser

As distribuições volumétricas analisadas são estudadas em dois aspectos: predições da forma e temperatura. Uma análise de forma é apresentada, primeiramente, para selecionar a melhor distribuição de calor para a estimação inversa. O modelo ideal deve prever o formato do cordão de solda a laser e a temperatura. Em seguida, apresenta-se uma análise térmica do processo de soldagem a Laser para o caso analisado.

6.3.1 Análise do formato do cordão

Visando a comparação do perfil transversal de soldagem, realizou-se uma análise microestrutural de uma seção do cordão de solda. A Figura 6.18 apresenta o perfil transversal resultante do cordão de solda, com as correspondentes dimensões de largura e penetração. Três regiões podem ser delimitadas: a Zona de Fusão (*Fusion zone* – FZ), onde as temperaturas excedem o ponto de fusão, e portanto, a solidificação dendrítica é predominante; a Zona Termicamente Afetada (*Heat Affected Zone* – HAZ), onde a temperatura de fusão não é atingida, mas mudanças microestruturais significativas ocorrem; e finalmente, o Material de Base (*Base Metal* – BM), onde a microestrutura não é afetada devido a ciclos térmicos.

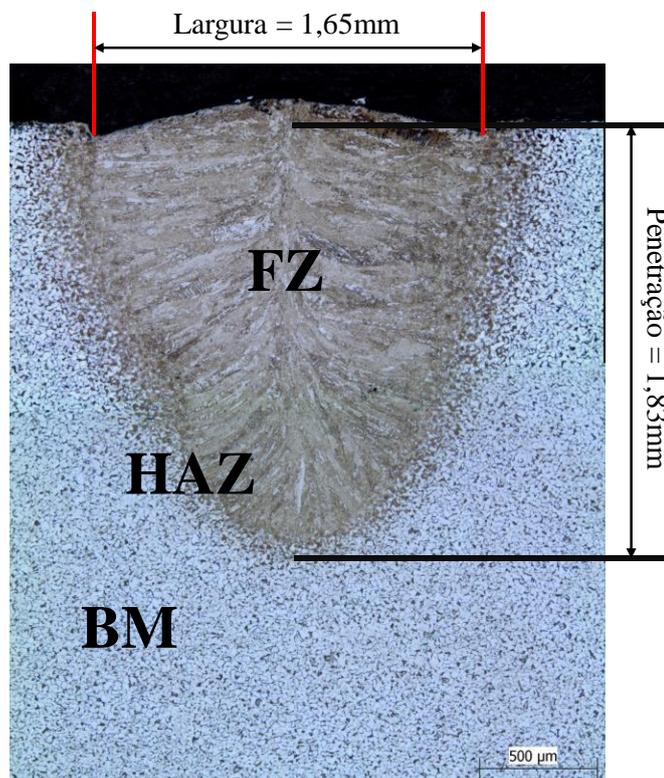


Figura 6.18. Perfil transversal do cordão de solda com as correspondentes dimensões de largura e penetração.

Uma distribuição de calor bidimensional gaussiana foi usada para analisar a largura e penetração do cordão de soldagem. O perfil da seção transversal correspondente é apresentado na Fig. 6.19. Nessa figura, também são apresentadas a largura e a penetração obtidas para a distribuição de fluxo de calor 2D. Pode-se notar que apesar da largura ser similar aos resultados

experimentais, a penetração é significativamente diferente. Essa distribuição da fração mássica era esperada. Na realidade, os modelos de fluxo de calor bidimensionais não podem prever o perfil do cordão de solda, pois ele considera que todo o calor é entregue na superfície. O processo de soldagem a laser ainda tem uma característica particular, o raio laser penetra na amostra, e portanto, requer uma distribuição de calor volumétrica.

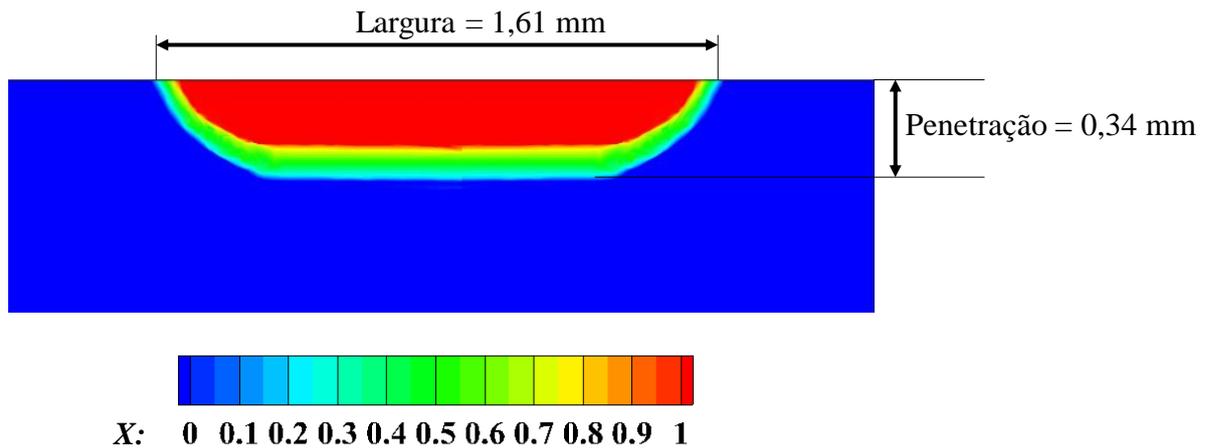


Figura 6.19. Fração mássica (f_m) para uma distribuição de calor bidimensional gaussiana.

Os casos analisados de distribuição de calor volumétrica (3D) apresentam resultados melhores quando comparados ao modelo bidimensional. Na Tabela 6.2 apresenta-se os valores de largura e penetração obtidos para os cinco casos analisados. Pode-se observar que na Tab. 6.1. os valores obtidos numericamente estão em boa concordância com os valores experimentais. No entanto, a diferença principal entre eles é o formato do cordão. Na Figura 6.20 apresenta-se o formato do cordão para os casos analisados. Na Figura 6.20, os casos A01 e A02 apresentam um perfil de soldagem diferente do caso experimental. Devido a sua configuração matemática, o perfil na face do cordão é linear em sua maior parte e muda para circular em sua raiz. O perfil A03 é o caso linear clássico que melhor aproxima o perfil transversal do cordão que os casos A01 e A02. No entanto, a distribuição linear faz um plano na raiz do cordão que não representa a configuração experimental. O caso A04 apresenta um perfil do cordão linear inclinado seguido por uma curva arredondada na raiz de soldagem. O caso A05 apresenta um melhor perfil de soldagem quando comparado ao experimental (Fig. 6.18). Os casos A04 e A05 apresentaram melhores resultados devido a distribuição matemática que simula melhor o processo real. Na realidade, o raio laser não penetra uniformemente nas primeiras camadas como o proposto pelos modelos A01 e A02, e também não possui um

decaimento linear como o modelo clássico A03. Portanto, os perfis A04 e A05 melhor representam o problema físico.

Tabela 6.2. Valores numéricos para largura e penetração para os cinco casos analisados

Caso	Largura [mm]	Penetração [mm]
Experimental	1,65	1,83
A01	1,59	1,89
A02	1,68	1,88
A03	1,63	1,78
A04	1,64	1,81
A05	1,65	1,80

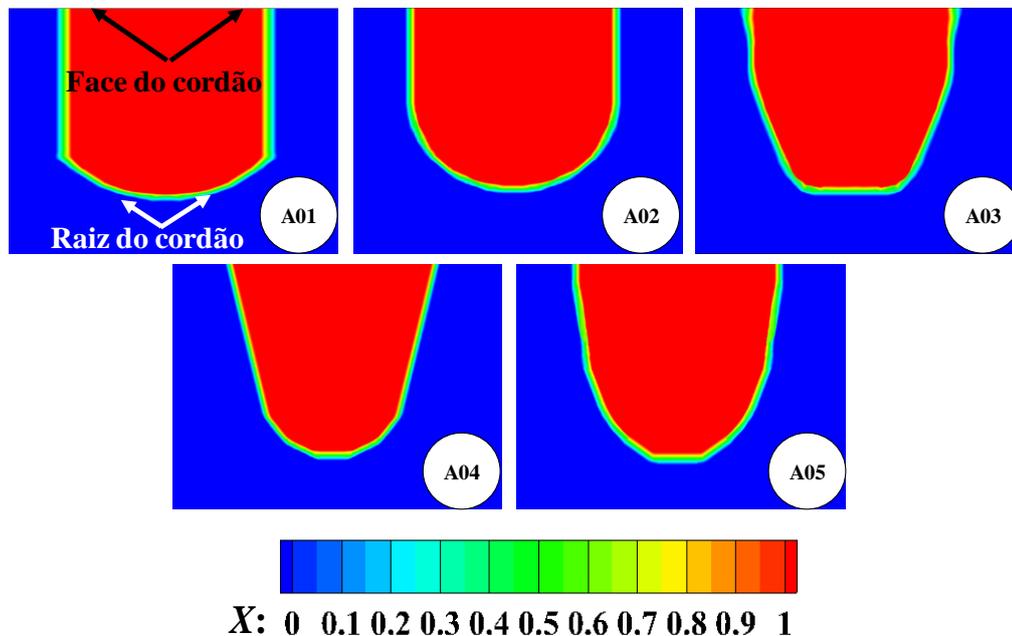


Figura 6.20. Perfil do cordão de solda representado pela fração mássica (f_m) para os cinco casos analisados.

Apresenta-se na Fig. 6.21 uma sobreposição do campo de temperatura obtido para o caso A05 e a micrografia (Fig. 6.18). A partir dessas análises, é possível obter a temperatura que pode ter um efeito térmico nas propriedades do material. Por exemplo, nesse material, a FZ compreende a região de temperatura acima de 1450 °C (temperatura de fusão); a HAZ possui temperatura entre 850 °C e 1450°C; e o BM tem temperaturas abaixo de 850°C.

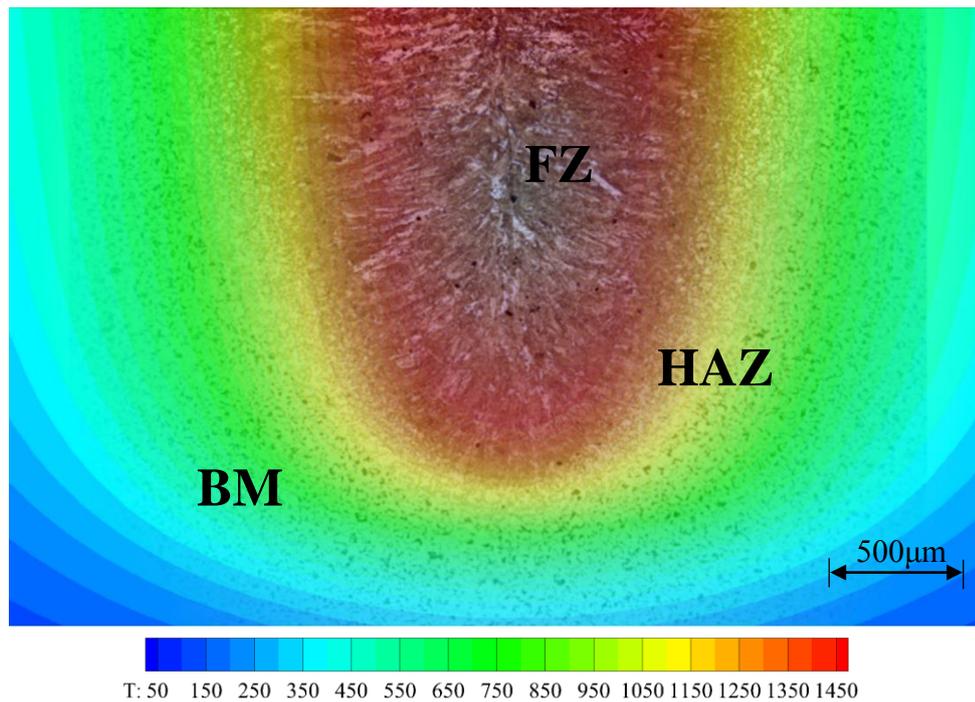


Figura 6.21. Sobreposição entre o campo de temperaturas do caso A05 e micrografia (Fig. 6.18)

6.3.2 Análise térmica do processo de soldagem a Laser

Uma comparação entre os valores de temperatura experimental do termopar T_1 (Fig. 5.4) e as temperaturas numéricas é apresentada na Fig. 6.22. Os cinco casos analisados apresentaram uma boa concordância entre as curvas. No entanto, a temperatura numérica de pico difere para todos os casos. Os casos A04 e A05 apresentam as maiores temperaturas de pico. Isso pode ser explicado pelo método experimental; os termopares foram posicionados na superfície de soldagem perto do cordão de solda, portanto, uma maior taxa de calor próxima da superfície de soldagem fornece maiores temperaturas onde os termopares são posicionados. A área de medição escolhida possui alta sensibilidade, portanto, o erro de medição apenas no posicionamento do termopar é suficiente para apresentar esse tipo de diferença da temperatura de pico. Vale lembrar que, os casos A04 e A05 apresentam uma melhor aproximação do formato do cordão que os casos A01, A02 e A03. Os casos A01, A02 e A03 apresentaram uma boa concordância com relação a curva experimental. No entanto, esses modelos falham e prever o formato da solda, portanto, eles não são adequados para a análise inversa.

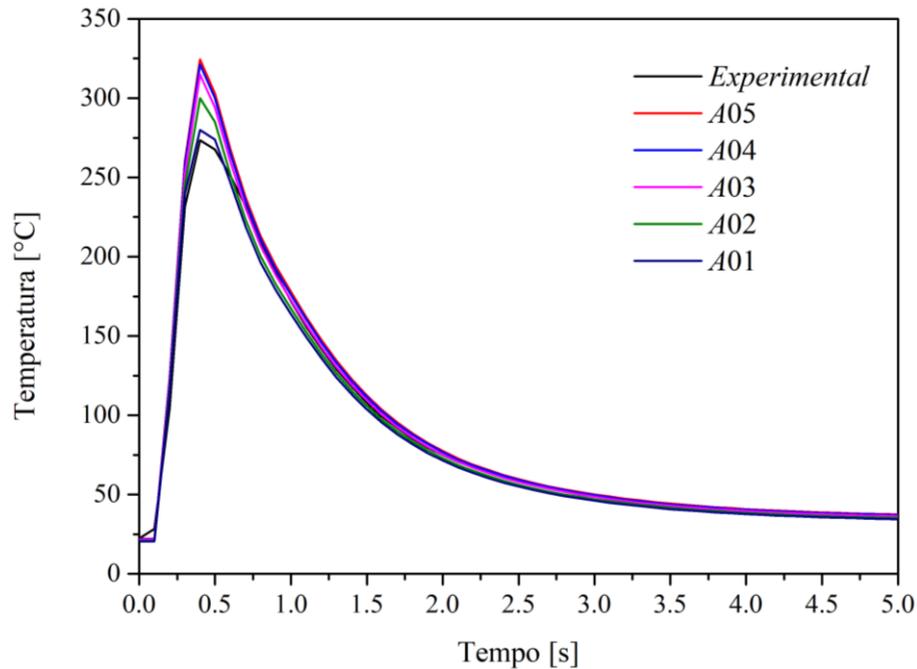


Figura 6.22. Comparação entre as temperaturas numéricas e experimentais para os modelos A01 a A05.

Na Tabela 6.3 apresenta-se a taxa de calor média estimada para os cinco casos analisados. A eficiência térmica (η_T) difere de forma significativa para cada caso analisado. Os casos A01 e A02 apresentam maiores valores de eficiência térmica que para os casos A03, A04 e A05. Nesses casos, funções quadráticas e cúbicas fizeram a distribuição de calor mais uniforme ao longo do eixo z , o que diminuiu a temperatura na superfície, fornecendo uma melhor concordância entre as temperaturas numéricas e experimentais. Portanto, a taxa de calor estimada, e consequentemente a eficiência térmica, aumenta para compensar a menor sensibilidade apresentadas nesses modelos. Apesar do caso linear apresentar um valor coerente de eficiência térmica, eles não apresentam uma boa concordância em relação ao perfil de soldagem. Portanto, ele não deve representar o valor real de eficiência térmica. Os casos A04 e A05 apresentaram uma boa concordância do perfil de soldagem transversal. Como esses modelos possuem maior sensibilidade em relação aos outros, a taxa de calor estimada tende a diminuir. Portanto, os casos A04 e A05 apresentam valores mais confiáveis para a condição de soldagem a laser analisada.

Tabela 6.3. Comparação entre as taxas de calor estimadas para os casos analisados

Caso	Potência gerada (W)	Taxa de aquecimento estimada [W]	η_T [%]
A01	2990	2523	84,4
A02	2990	2395	80,1
A03	2990	2254	75,4
A04	2990	2187	73,1
A05	2990	2156	72,1

Na Figura 6.23 apresenta-se a curva aproximada para a sensor móvel de temperatura construído a partir das temperaturas coletadas pelos termopares (Fig. 5.4). Pode-se notar que a temperatura se estabiliza em volta de 275°C. A taxa de calor estimada para as cinco condições analisadas é apresentada na Fig. 6.24. Como apresentado na Tab. 6.2, a taxa de calor estimada é maior para os casos A01, A02, e A03, e começa a convergir para os casos A04 e A05.

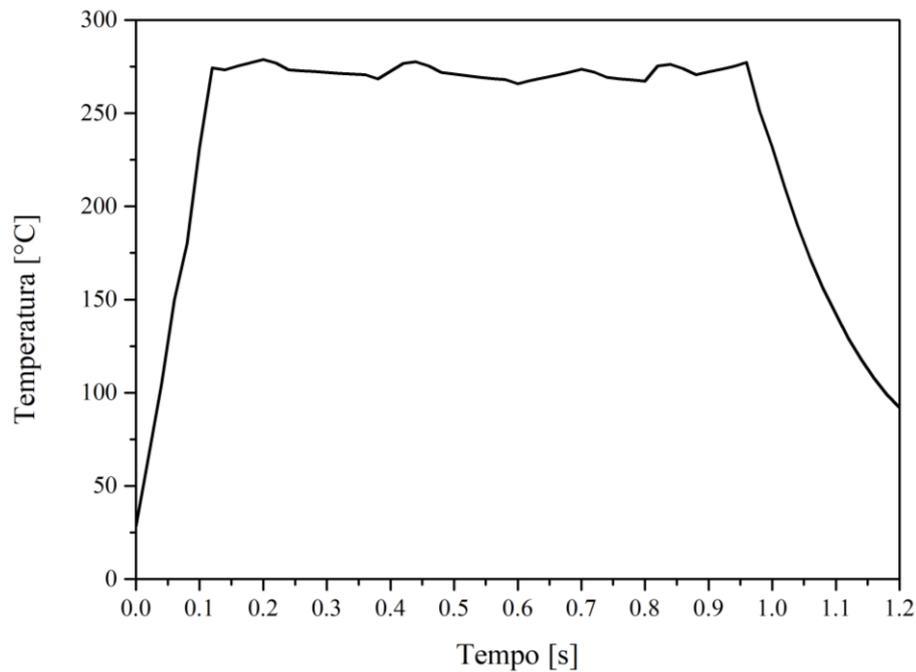


Figura 6.23. Temperatura do sensor móvel

Na Figura 6.25 apresenta-se a distribuição de temperatura na superfície da amostra para o caso A05. Pode-se observar que o calor é concentrado junto ao raio laser. Devido a alta velocidade de soldagem, a difusão de calor é menor que o fluxo de calor. Portanto, esse processo não faz um pré-aquecimento da amostra como ocorre em processos de soldagem tradicionais.

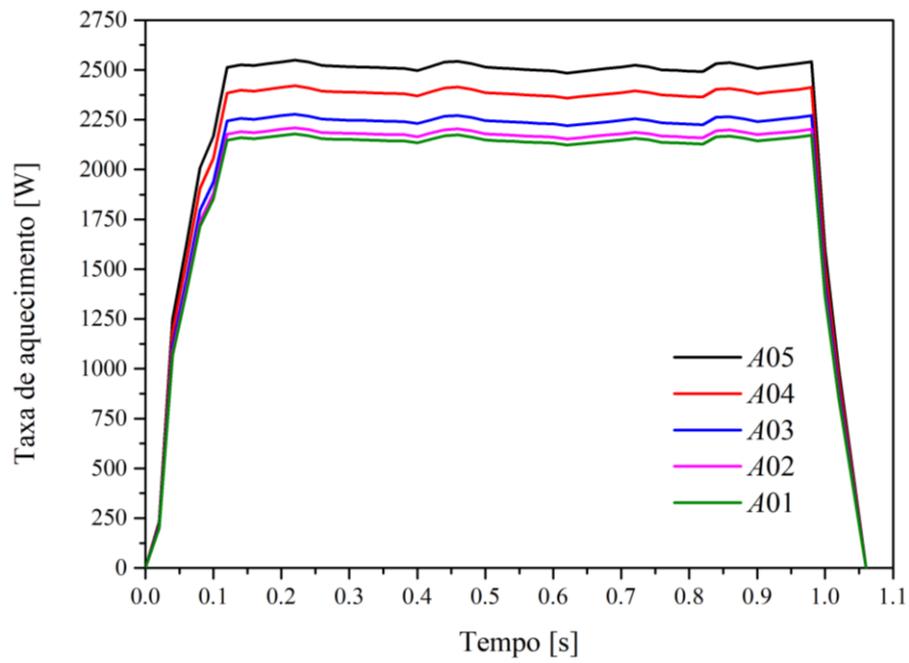


Figura 6.24. Taxa de calor estimada para o caso proposto.

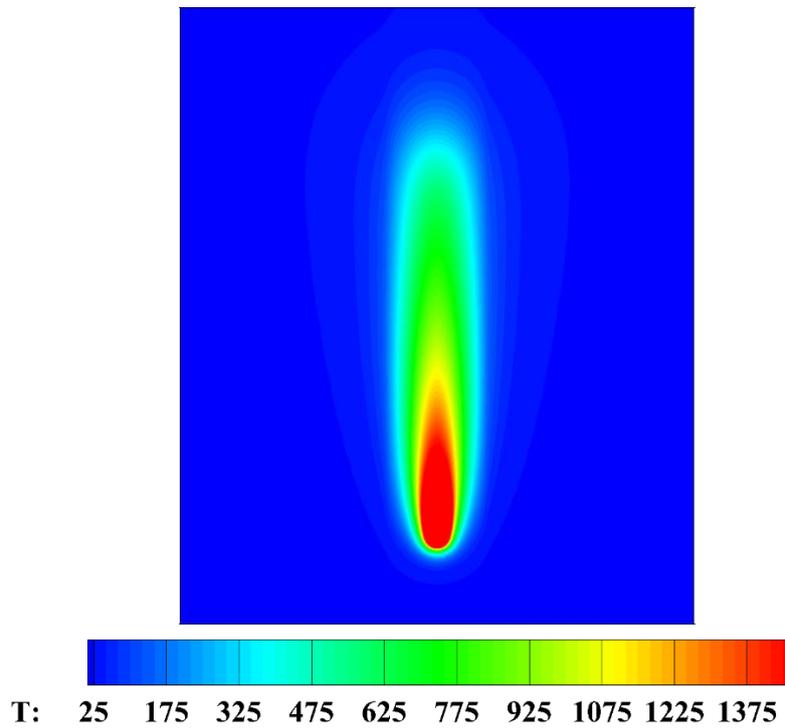


Figura 6.25. Distribuição de calor para o instante $t = 0,8$ s para o caso A05.

CAPÍTULO 7 – CONCLUSÕES

7.1 Conclusões Gerais

Nesse trabalho, a regularização de viagem no tempo (*Time Traveling Regularization – TTR*) foi usada junto com o método da Seção Áurea para estimação do aporte de calor em um processo de soldagem. Uma metodologia para estimação da eficiência transiente de um processo de soldagem foi desenvolvida a partir do método proposto do sensor móvel de temperatura. Os processos de soldagem TIG e Laser foram utilizados para aplicação da metodologia proposta. O modelo apresentado é uma alternativa mais barata que os métodos convencionais experimentais como os calorímetros. Além disso, ele permite a visualização temporal da eficiência térmica, o que pode ser usado para o desenvolvimento de fontes de alimentação que reduzem o aporte de calor durante o processo de soldagem. Esse fator deve reduzir os custos e melhorar a qualidade da soldagem.

Para o processo de soldagem TIG, os valores de eficiência térmica encontrados foram mais coerentes que para o trabalho anterior de Lima e Silva *et al.* (2003). No trabalho de Lima e Silva *et al.* (2003), os autores encontraram valores de eficiência térmica variando de 59,1% a 86,2%, enquanto para esse trabalho de 50,4% a 61,1%. Apesar dos valores de eficiência térmica serem reduzidos nas análises apresentadas, eles representam valores mais realísticos que os valores apresentados no trabalho de Lima e Silva *et al.* (2003).

Para o processo de soldagem a laser, os modelos baseados nas funções quadráticas e cúbicas, casos A01 e A02, não apresentaram uma boa concordância em relação ao perfil experimental de soldagem. Além disso, esses modelos superestimaram a taxa de calor devido a sua perda de sensibilidade. O modelo clássico, A03, apresentou melhor correlação com o perfil da microestrutura real que os casos A01 e A02. No entanto, o caso A03 não se aproximou tão bem do perfil real do cordão que os casos A04 e A05. A taxa de calor estimada para os casos A04 e A05 apresentaram valores mais realísticos que para os casos A01, A02 e A03. A metodologia proposta provou ser uma ferramenta alternativa para predizer o perfil de solda e a eficiência térmica em soldagem a laser de baixa penetração.

7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Sugere-se a aplicação da técnica do sensor móvel para a um processo de soldagem envolvendo deposição de materiais. Pode-se também implementar uma malha com rasgo em “V”, com uma criação de malha dinâmica que é mudada iterativamente para simular a deposição do material. O que permitiria o estudo em processos de soldagem com maior aplicação na indústria.

Outra proposição visa melhorar o modelo térmico do processo de soldagem. A análise da recirculação de fluidos na poça de fusão é um estudo muito interessante e deve interferir muito na estimativa do aporte de calor durante um processo de soldagem. A análise pode-se se focar na pressão que o gás de proteção faz na poça de soldagem; força termocapilar ou efeito Marangoni; efeito magnético realizado pela força de Lorentz; a convecção da poça de fusão; empuxo devido a diferença de densidades e efeito Joule na peça. Portanto além da transferência de calor, na fase líquida pode-se estudar o eletromagnetismo, escoamento do fluido e a condição de contorno de deformação livre. O estudo de um processo de soldagem é um processo complexo, e para se obter dados ainda mais precisos é necessário o prosseguimento desses estudos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADILI, A.; KERKENI, C.; BEN NASRALLA, S. Estimation of thermophysical properties of fouling using inverse problem and its impact on heat transfer efficiency. **Solar Energy**, v. 83, n. 9, p. 1619–1628, 2009.
- ALFARO, S. C. A.; CARVALHO, G. C.; DA CUNHA, F. R. A statistical approach for monitoring stochastic welding processes. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 175, n. 1–3, p. 4–14, 2006.
- AYOOLA, W. A.; SUDER, W. J.; WILLIAMS, S. W. Parameters controlling weld bead profile in conduction laser welding. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 249, n. June, p. 522–530, 2017.
- BECK, J.; BLACKWELL, B.; CLAIR, C. **Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems**. Wiley, 1985.
- BECK, J. V.; WOODBURY, K. A. Inverse heat conduction problem: Sensitivity coefficient insights, filter coefficients, and intrinsic verification. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 97, p. 578–588, 2016.
- BENYOUNIS, K. Y.; OLABI, A. G. Optimization of different welding processes using statistical and numerical approaches - A reference guide. **Advances in Engineering Software**, v. 39, n. 6, p. 483–496, 2008.
- BERGER, J. O. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. **Journal of the American Statistical Association**, 1985. v. 83
- CALVETTI, D.; MORIGI, S.; REICHEL, L.; SGALLARI, F. Tikhonov regularization and the L-curve for large discrete ill-posed problems. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 123, p. 423–446, 2000.
- CAROLLO, L. F. S. **Estimação Simultânea de Propriedades Termofísicas de Materiais Metálicos**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Itajubá, 2010.
- CHENG, J.; HOFMANN, B.; LU, S. The index function and Tikhonov regularization for ill-posed problems. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 265, p. 110–119, 2013.
- CHIHOSKI, R. A. Understanding weld cracking in aluminum sheet. **Welding Journal**, v. 25, p. 24–30, 1972a.

- CHIHOSKI, R. A. The character of stress fields around a weld arc moving on aluminum sheet. **Welding Research Supplement**, p. 9–18, 1972b.
- CHIHOSKI, R. A. Expansion and stress around aluminum weld puddles. **Welding Research Supplement**, p. 263–276, 1979.
- CHIU, C.-K.; CALDWELL, J. Application of Broyden's Method to the Enthalpy Method for Phase Change Problems. **Numerical Heat Transfer, Part A: Applications**, v. 30, n. 6, p. 575–587, 1996.
- CUI, M.; GAO, X.; ZHANG, J. A new approach for the estimation of temperature-dependent thermal properties by solving transient inverse heat conduction problems. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 58, p. 113–119, 2012.
- DAL, M.; LE MASSON, P.; CARIN, M. Estimation of fusion front in 2D axisymmetric welding using inverse method. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 55, p. 60–68, 2012.
- DAL, M.; LE MASSON, P.; CARIN, M. A model comparison to predict heat transfer during spot GTA welding. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 75, p. 54–64, 2014.
- DESERNO, F. **Basic Optimisation Strategies for CFD-Codes**, 2003.
- GOLDAK, J. A.; AKHLAGHI, M. **Computational welding mechanics**. Springer, 2005.
- GONÇALVES, C. V.; CARVALHO, S. R.; GUIMARÃES, G. Application of optimization techniques and the enthalpy method to solve a 3D-inverse problem during a TIG welding process. **Applied Thermal Engineering**, v. 30, n. 16, p. 2396–2402, 2010.
- GRASMAIR, M.; HALTMEIER, M.; SCHERZER, O. The residual method for regularizing ill-posed problems. **Applied Mathematics and Computation**, v. 218, n. 6, p. 2693–2710, 2011.
- GRYSA, K.; MACIAG, A.; PAWINSKA, A. Solving nonlinear direct and inverse problems of stationary heat transfer by using Trefftz functions. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 55, n. 23–24, p. 7336–7340, 2012.
- HUANG, C.-H.; WANG, S.-P. A three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 42, n. 18, p. 3387–3403, 1999.
- HURTIG, K.; CHOQUET, I.; SCOTTI, A.; SVENSSON, L.-E. A critical analysis of weld heat input measurement through a water-cooled stationary anode calorimeter. **JOM 2015 - 18th International Conference on Joining Materials**, v. 1718, n. April, p. 1–19, 2015.

- KAIPIO, J. P.; FOX, C. The Bayesian Framework for Inverse Problems in Heat Transfer. **Heat Transfer Engineering**, v. 32, n. 9, p. 83, 2011.
- KARKHIN, V.; PITTNER, A.; SCHWENK, C.; RETHMEIER, M. Simulation of inverse heat conduction problems in fusion welding with extended analytical heat source models. **Frontiers of Materials Science**, v. 5, n. 2, p. 119–125, 2011.
- KOLEVA, E. Electron beam weld parameters and thermal efficiency improvement. **Vacuum**, v. 77, n. 4, p. 413–421, 2005.
- KONDA REDDY, B.; BALAJI, C. Estimation of temperature dependent heat transfer coefficient in a vertical rectangular fin using liquid crystal thermography. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 55, n. 13–14, p. 3686–3693, 2012.
- KOU, S.; WANG, Y. H. Computer simulation of convection in moving arc weld pools. **Metallurgical Transactions A**, v. 17, n. 12, p. 2271–2277, 1986.
- LIMA E SILVA, S. M. M.; VILARINHO, L.; SCOTTI, A.; ONG, T.; GUIMARAES, G. Heat flux determination in gas-tungsten-arc welding process by using a three-dimensional model in inverse heat conduction problem. **High Temperatures-High Pressures**, v. 35/36, n. 1, p. 117–126, 2003.
- LIMA E SILVA, S. M. M.; GUIMARÃES, G.; SILVA NETO, A. J. Uma Técnica para Determinação da Capacidade de Calor Volumétrica do Alumínio 5052 (in Portuguese). **Proceedings of the Congresso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica**, 2001.
- LITTLE, G. H.; KAMTEKAR, A. G. The effect of thermal properties and weld efficiency on transient temperatures during welding. **Computers & Structures**, v. 68, p. 157–165, 1998.
- LUCAS, W. **TIG and PLASMA welding, process techniques, recommended practices and applications**. Cambridge, England: Abington Publishing, 1990.
- MAGALHAES, E. S.; ANSELMO, B. C. S.; LIMA E SILVA, A. L. F.; LIMA E SILVA, S. M. M. Time Traveling Regularization for Inverse Heat Transfer Problems. **Energies**, v. 11 (507), 15p.
- MAGALHAES, E. S.; LIMA E SILVA, A. L. F.; LIMA E SILVA, S. M. M. A GTA Welding Cooling Rate Analysis on Stainless Steel and Aluminum Using Inverse Problems. **Applied Sciences**, v. 7, n. 2, p. 122, 2017.
- MALISKA, C.R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. LTC editora, 2 ed, 2004.

- MOHAMMADIUN, M.; MOLAVI, H.; BAHRAMI, H. R. T.; MOHAMMADIUN, H. Application of Sequential Function Specification Method in Heat Flux Monitoring of Receding Solid Surfaces. **Heat Transfer Engineering**, v. 35, n. 10, p. 933–941, 2014.
- MOLTUBAK, T. **Strenght mismatch effect on the cleavage fracture toughness of the heat affected zone of steel weld**. Tese de doutorado, Trondheim University, Norway, 1999.
- MOURA NETO, F. D.; DA SILVA NETO, A. J. **An Introduction to Inverse Problems with Applications**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- MULCAHY, J. M.; BROWNE, D. J.; STANTON, K. T.; DIAZ, F. R. C.; CASSADY, L. D.; BERISFORD, D. F.; BENGTON, R. D. Heat flux estimation of a plasma rocket helicon source by solution of the inverse heat conduction problem. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 52, n. 9–10, p. 2343–2357, 2009.
- NASIRI, M. B.; BROWNE, D. J.; STANTON, K. T.; CHANG DIAZ, F. R.; CASSADY, L. D.; BERISFORD, D. F.; BENGTON, R. D. Investigation on the influence of various welding parameters on the arc thermal efficiency of the GTAW process by calorimetric method. **Journal of Mechanical Science and Technology**, v. 28, n. 8, p. 3255–3261, 2014.
- PIEKARSKA, W.; KUBIAK, M. Three-dimensional model for numerical analysis of thermal phenomena in laser-arc hybrid welding process. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 54, n. 23–24, p. 4966–4974, 2011.
- PILIPENKO, A. **A computer simulation of residual stress and distortion of thick plates in multielectrode submerged arc welding**. Tese de doutorado, Norwegian University of Science and Technology, 2001.
- ROGER, C. R.; YEN, S. H.; RAMANATHAN, K. G. Temperature variation of total hemispherical emissivity of stainless steel AISI 304. **Journal of the Optical Society of America**, v. 69, n. 10, p. 1384–1390, 1979.
- ROTHS, T.; MARTH, M.; WEESE, J.; HONERKAMP, J. A generalized regularization method for nonlinear ill-posed problems enhanced for nonlinear regularization terms. **Computer Physics Communications**, v. 139, n. 3, p. 279–296, 2001.
- SCHNEIDER, G. E.; ZEDAN, M. A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field problems. **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, v. 4, n. January 2012, p. 1–19, 1981.

- SHABGARD, M.; AKHBARI, S. An inverse heat conduction method to determine the energy transferred to the workpiece in EDM process. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 83, n. 5–8, p. 1037–1045, 2016.
- SHIRTLIFFE, C. J. Establishing Steady-State Thermal Conditions in Flat Slab Specimens. **Heat Transmission Measurements in Thermal Insulations**, American Society for Testing and Materials, v. ASTM STP 5, p. 13–33, 1974.
- SOLODKY, S. G.; VOLYNETS, E. A. Adaptive scheme of discretization for one semiiterative method in solving ill-posed problems. **Journal of Mathematical Sciences**, v. 175, n. 4, p. 477–489, 2011.
- SOMASUNDARAM, S.; TAY, A. A. O. A study of intermittent spray cooling process through application of a sequential function specification method. **Inverse Problems in Science and Engineering**, v. 20, n. 4, p. 553–569, 2012.
- STONE, H. L. Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Differential Equations Source. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 5, n. 3, p. 530–558, 1968.
- SUDHEESH, R. S.; PRASAD, N. S. Comparative Study of Heat Transfer Parameter Estimation Using Inverse Heat Transfer Models of a Trailing Liquid Nitrogen Jet in Welding. **Heat Transfer Engineering**, v. 36, n. 2, p. 178–185, 2015.
- TIKHONOV, A. N.; ARSENIN, V. Y. **Solutions of Ill-Posed Problems. Mathematics of Computation**, v. 32, p. 1320–1322, 1977.
- TOULOUKIAN, Y. S.; KIRBY, R. K.; TAYLOR, R. E.; DESAI, P. D. **Volume 1 : Thermal conductivity - Metallic elements and alloys**, Thermophysical Properties of Matter-the TPRC Data Series, 1975.
- TREFFTZ, E. I. Ein Gegenstueck zum Ritz'schen Verfahren. **Proceedings 2nd International Congress of Applied Mechanics** (Zurich), 1926.
- UNNIKRISHNAKURUP, S.; ROUQUETTE, S.; SOULIÉ, F.; FRAS, G. Estimation of heat flux parameters during static gas tungsten arc welding spot under argon shielding. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 114, p. 205–212, 2017.
- VANDERPLAATS, G. N. **Numerical optimization techniques for engineering design**. 4th. ed. Vanderplaats Research and Development Inc., 2005.
- VOLDEN, L. **Experiments, mechanism and modeling**. Tese de doutorado, The Technical University, Trondheim, Norway, 1999.

- VOLLER, V. R.; SHADABI, L. Enthalpy methods for tracking a phase change boundary in two dimensions. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 11, n. 3, p. 239–249, 1984.
- WAHAB, M. A.; PAINTER, M. J.; DAVIES, M. H. The prediction of the temperature distribution and weld pool geometry in the gas metal arc welding process. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 77, n. 1–3, p. 233–239, 1998.
- WIKANDER, L. **Efficient thermos-mechanical modeling of welding**. Tese de doutorado, Lulea University, Sweden, 1996.
- WOODBURY, K. A. **Inverse engineering handbook**. The Mechanical engineering handbook series, p. 466 p., 2003.
- XIAODONG, N. **Laser Welding**. 1. ed. Rijeka, Croatia: SCIYO, 2010.
- YADAIHAH, N.; BAG, S. Effect of Heat Source Parameters in Thermal and Mechanical Analysis of Linear GTA Welding Process. **ISIJ International**, v. 52, n. 11, p. 2069–2075, 2012.
- YANG, C. Inverse determination of heat input during the friction stir welding process. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 76, p. 411–418, 2014.
- YANG, Y.-C.; CHEN, W.-L.; LEE, H.-L. A Nonlinear Inverse Problem in Estimating the Heat Generation in Rotary Friction Welding. **Numerical Heat Transfer, Part A: Applications**, v. 59, n. 2, p. 130–149, 27 jan. 2011.
- ZHANG, J.; MAMMADOV, M. A new method for solving linear ill-posed problems. **Applied Mathematics and Computation**, v. 218, n. 20, p. 10180–10187, 2012.

ANEXO A – MÉTODO SIP PARALELO

Soluções aproximadas para equações diferenciais multidimensionais são frequentemente obtidas pela aplicação de métodos de diferenças finitas. Como apresentado na Seção 3.3, uma equação implícita de diferenças finitas é escrita em uma malha em uma região de interesse, e resulta em um conjunto de equações que precisam ser resolvidas para cada passo de tempo da análise. Um método iterativo de alta convergência proposto para solução dessas equações foi apresentado por Stone (1968). Segundo o autor, o método *Strongly Implicit Procedure* (SIP) chega a convergir até três vezes mais rápido que os métodos tradicionais. Esse método foi modificado para apresentar uma convergência ainda mais rápida. Schneider e Zedan (1981) apresentaram o método *Modify Strongly Implicit Procedure* (MSI), que quando usados com apenas um núcleo de processamento, apresentam soluções ainda mais rápidas que o SIP. No entanto, esse método é de difícil paralelização. Enquanto o método SIP pode ser usado em uma arquitetura paralela, e, portanto, atingir velocidades de convergência mais rápidas que o MSI.

O processo iterativo SIP para solução das equações algébricas dadas pelo método das diferenças finitas consiste em 5 etapas: Realizar a decomposição incompleta LU ; Calcular uma matriz de resíduos; Em seguida, inicia-se um processo iterativo com uma substituição para frente; realiza-se uma substituição para trás e atualização da variável dependente; E por último compara-se os resíduos da solução, se os resíduos forem menores que a tolerância especificada, o processo iterativo termina, se não, volta-se ao passo do cálculo dos resíduos. Assim, o processo iterativo continua até que os resíduos fiquem menores que a tolerância especificada. No Algoritmo A.1 apresenta-se a sequência necessária para realização do processo iterativo, em que o sobrescrito IT é o contador para as iterações no processo iterativo.

Algoritmo A.1. Decomposição LU incompleta

- | | | |
|----|---|-----------------------------|
| 1: | Realizar a decomposição LU | : $A \approx LU$ (Eq. A.1) |
| 2: | Calcular os resíduos | : $res^{IT} = b - AT^{IT}$ |
| 3: | Calcular o vetor R (substituição frontal) | : $R^{IT} = L^{-1}res^{IT}$ |
| 4: | Calcular ΔT (substituição traseira) | : $U\Delta x = R^{IT}$ |
| 5: | Voltar a etapa 2 até que o resíduo seja pequeno | |
-

O método SIP paralelo é decomposto em matrizes LU a partir dos dados das matrizes tridimensionais que compõe a matriz A como:

$$\begin{aligned}
L_{i,j,k}^b &= a_{i,j,k}^b \left[1 + \alpha (U_{i,j,k-1}^n + U_{i,j,k-1}^e) \right]^{-1} \\
L_{i,j,k}^s &= a_{i,j,k}^s \left[1 + \alpha (U_{i,j-1,k}^t + U_{i,j-1,k}^n) \right]^{-1} \\
L_{i,j,k}^w &= a_{i,j,k}^w \left[1 + \alpha (U_{i-1,j,k}^t + U_{i-1,j,k}^e) \right]^{-1} \\
\phi_{1i,j,k} &= L_{i,j,k}^b \times U_{i,j,k-1}^n + L_{i,j,k}^s \times U_{i,j-1,k}^n \\
\phi_{2i,j,k} &= L_{i,j,k}^s \times U_{i,j-1,k}^t + L_{i,j,k}^w \times U_{i-1,j,k}^t \\
\phi_{3i,j,k} &= L_{i,j,k}^w \times U_{i-1,j,k}^e + L_{i,j,k}^b \times U_{i,j,k-1}^e \\
L_{i,j,k}^p &= \left[\begin{array}{c} a_{i,j,k}^p + \alpha (\phi_{1i,j,k} + \phi_{2i,j,k} + \phi_{3i,j,k}) \\ - (L_{i,j,k}^w \times U_{i-1,j,k}^n + L_{i,j,k}^s \times U_{i,j-1,k}^e + L_{i,j,k}^b \times U_{i,j,k-1}^t) \end{array} \right]^{-1} \\
U_{i,j,k}^e &= (a_{i,j,k}^e - \alpha \times \phi_{1i,j,k}) \times L_{i,j,k}^p \\
U_{i,j,k}^n &= (a_{i,j,k}^n - \alpha \times \phi_{2i,j,k}) \times L_{i,j,k}^p \\
U_{i,j,k}^t &= (a_{i,j,k}^t - \alpha \times \phi_{3i,j,k}) \times L_{i,j,k}^p
\end{aligned} \tag{A.1}$$

As matrizes L e U são inicialmente definidas como zero e calculadas sequencialmente para todo domínio. Nas simulações o valor de α adotado foi de 0,95. O código computacional descrito pela Eq. A.1 pode ser paralelizado, no entanto, esta parte não consome muito tempo computacional. Os códigos descritos a seguir são paralelizados através da diretiva OpenMP® 4.5 para o C++.

Considere uma hiperlinha que é definida como sendo:

$$l = j + k \tag{A.2}$$

Considerando as regras de decomposição LU , para um dado nó (i, j, k) no método SIP, uma hiperlinha L somente precisa dos dados de acesso da hiperlinha $l - 1$. Porque, quando a substituição de índices é realizada, existe apenas uma coordenada mudando a cada instante. Portanto no cálculo desses nós as hiperlinhas são independentes e podem ser calculadas separadamente. No entanto, em razão da dependência dos dados de l em $l - 1$, as hiperlinhas devem ser calculadas de maneira sequencial. Na Figura A.1 apresenta-se as hiperlinhas em um

cubo. As hiperlinhas contendo o nó 6 e 26 mostra a ideia de paralelização. Cada coluna na direção j pode ser calculada independentemente.

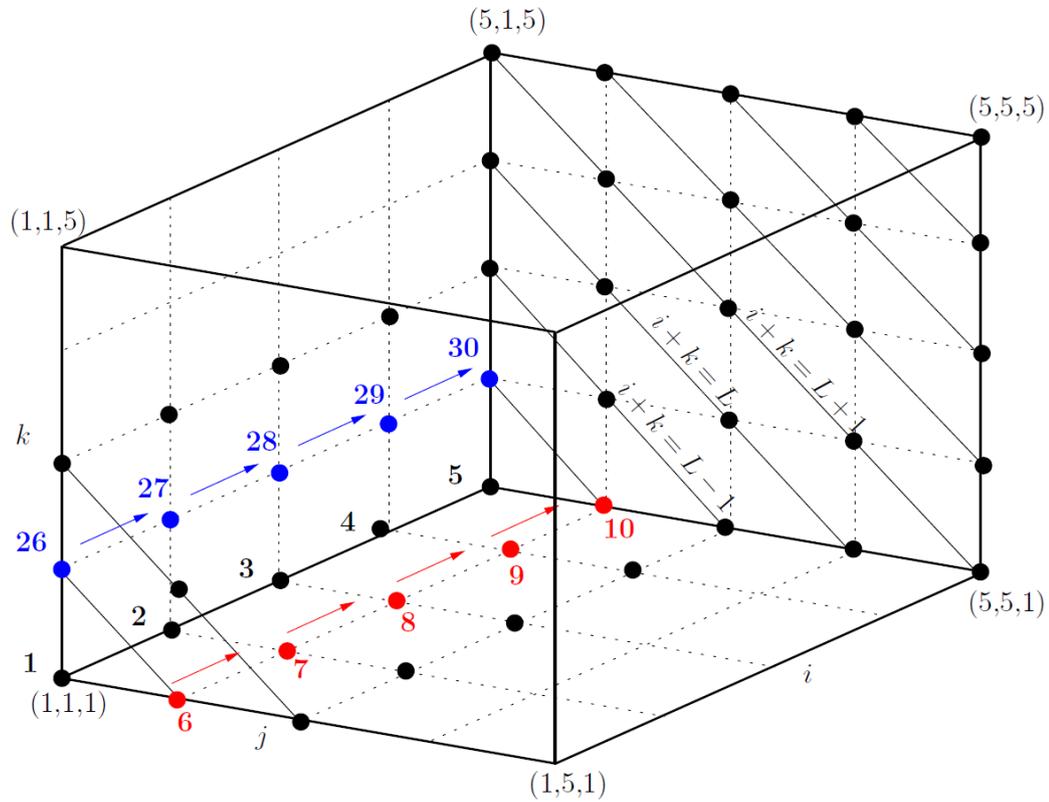


Figura A.1. Hiperlinhas em um cubo (DESERNO, 2003).

Para realização da paralelização, é necessário obter o número total de hiperlinhas e uma matriz de ponteiros Hp que uma coluna indica o primeiro e a segunda coluna o último nó em cada hiperlinha l . O número total de hiperlinhas $l_{máx}$ pode ser obtido através da soma do número de malhas referentes a j e k , ou em outras palavras:

$$l_{máx} = j_{máx} + k_{máx} \quad (A.3)$$

A matriz de ponteiros pode ser escrita da forma apresentada pelo Algoritmo A.2. Nessa matriz, a primeira coluna, $Hp_{i,1}$, armazena o índice da coordenada relativa i , a coluna $Hp_{i,2}$ armazena o ponteiro para o primeiro nó da hiperlinha l , e $Hp_{i,3}$ o ponteiro para o último nó da hiperlinha l .

Algoritmo A.2 Matriz de ponteiros Hp

```

1: for  $i = 1; i < h_p; i++$ 
2:    $Hp_{i,1} = i + 1$ 
3:   for  $k = 1; k < k_{m\acute{a}x}; k++$ 
4:     for  $j = 1; j < j_{m\acute{a}x}; j++$ 
5:       if  $(k + j = Hp_{i,1})$ 
6:          $Hp_{i,3} = j$ 
7:          $k = k_{m\acute{a}x}$ 
8:          $j = j_{m\acute{a}x}$ 
9:       end if
10:    end for
11:  end for
12:  for  $k = 1; k < k_{m\acute{a}x}; k++$ 
13:    for  $j = 1; j < j_{m\acute{a}x}; j++$ 
14:      if  $(k + j = Hp_{i,1})$ 
15:         $Hp_{i,2} = j$ 
16:         $k = 0$ 
17:         $j = j_{m\acute{a}x}$ 
18:      end if
19:    end for
20:  end for
21: end for

```

A.1 Resíduos

As linhas de código presentes no Algoritmo A.3 apresentam o cálculo para os resíduos para uma iteração. A matriz de resíduos não apresenta dependência entre os dados, portanto ela pode ser paralelizada separadamente. A paralelização se apresenta na diretiva mostrada na linha 1.

Algoritmo A.3 Cálculos dos resíduos

```

1: #pragma omp parallel for collapse (3)
2: for  $k = 1; k < k_{M\acute{a}x}; k++$ 
3:   for  $j = 1; j < j_{M\acute{a}x}; j++$ 
4:     for  $i = 1; i < i_{M\acute{a}x}; i++$ 
5:       
$$res_{i,j,k} = b_{i,j,k} - \left( \begin{array}{l} a_{i,j,k}^b \times T_{i,j,k-1} + a_{i,j,k}^s \times T_{i,j-1,k} + a_{i,j,k}^w \times T_{i-1,j,k} + \\ a_{i,j,k}^e \times T_{i+1,j,k} + a_{i,j,k}^n \times T_{i,j+1,k} + a_{i,j,k}^f \times T_{i+1,j,k} + \\ a_{i,j,k}^p \times T_{i,j,k} \end{array} \right)$$

6:        $res_{soma} = res_{soma} + res_{i,j,k}^2$ 
7:     end for
8:   end for
9: end for

```

A.2 Substituição para Frente

Na substituição para frente, as iterações são feitas sobre a hiperlinha. Se existe no mínimo um nó na linha, todos os nós nas linhas da direção i são processados em paralelo (Algoritmo A.4 linha 2, veja também Fig. A.1). A substituição para frente (linha 7) é dada de acordo com o Algoritmo 4.

Algoritmo A.4 Substituição para Frente

```

1: for  $l = 1; l < l_{máx}; l++$ 
2:   #pragma omp parallel for private(k,i,j)
3:   for  $D = Hp_{l,2}; D \leq Hp_{l,3}; D++$ 
4:      $k = Hp_{l,1} - D;$ 
5:      $j = D;$ 
6:     for  $i = 1; i < i_{Máx} - 1; i++$ 
7:        $r_{i,j,k}^{SIP} = L_{i,j,k}^p \times (res_{i,j,k} - L_{i,j,k}^b \times r_{i,j,k-1}^{SIP} - L_{i,j,k}^s \times r_{i,j-1,k}^{SIP} - L_{i,j,k}^w \times r_{i-1,j,k}^{SIP})$ 
8:     end for
9:   end for
10: end for

```

A.3 Substituição para trás

Na substituição para trás e atualização, as iterações também foram feitas sobre a hiperlinha. O Algoritmo A.5 apresenta a substituição para trás (linha 7) e a atualização (linha 8).

Algoritmo A.5 Substituição para trás e atualização

```

1: for  $L = L_{Máx} - 1; L \geq 1; L--$ 
2:   #pragma omp parallel for private(k,i,j)
3:   for  $D = Hp_{L,2}; D \leq Hp_{L,3}; D++$ 
4:      $k = Hp_{L,1} - D;$ 
5:      $j = D;$ 
6:     for  $i = i_{Máx} - 2; i \geq 1; i--$ 
7:        $r_{i,j,k}^{SIP} = r_{i,j,k}^{SIP} - (U_{i,j,k}^e \times r_{i,j,k-1}^{SIP} + U_{i,j,k}^n \times r_{i,j-1,k}^{SIP} + U_{i,j,k}^f \times r_{i-1,j,k}^{SIP})$ 
8:        $T_{i,j,k} = T_{i,j,k} + r_{i,j,k}^{SIP}$ 
9:     end for
10:   end for
11: end for

```
