

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Método da Quadratura Diferencial com
Funções de Base Radial em Problemas de
Dinâmica dos Fluidos e Transferência de
Calor**

Autor: **Luís Guilherme Cunha Santos**

Orientador: **Nelson Manzanares Filho**

Co-orientador: **Genésio José Menon**

Itajubá, Março de 2012

MG - Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Método da Quadratura Diferencial com Funções de Base Radial em Problemas de Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor

Autor: **Luís Guilherme Cunha Santos**

Orientador: **Nelson Manzanares Filho**

Co-orientador: **Genésio José Menon**

Curso: **Mestrado em Engenharia Mecânica**

Área de Concentração: **Conversão de Energia**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Itajubá, Março de 2012

MG - Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Método da Quadratura Diferencial com
Funções de Base Radial em Problemas de
Dinâmica dos Fluidos e Transferência de
Calor**

Autor: **Luís Guilherme Cunha Santos**

Orientador: **Nelson Manzanares Filho**

Co-orientador: **Genésio José Menon**

Composição da Banca Examinadora

Prof. Dr. Edson Luiz Zaparoli - ITA

Prof. Dr. Waldir de Oliveira - IEM/UNIFEI

Prof. Dr. Genésio José Menon - IEM/UNIFEI

Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho - IEM/UNIFEI

Dedicatória

*Aos meus pais, Augusto e Regina,
por serem meu alicerce, e
aos meus irmãos, Túlio e Aline,
com quem divido as experiências dessa vida . . .*

Agradecimentos

Aos meus pais e irmãos pela infatigável confiança despendida a mim. Pelos conselhos, palavras de incentivo e força.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho, que além do profissionalismo, conhecimentos técnicos e filosóficos, teve grande paciência comigo. Mas agradeço-o principalmente pela amizade e confiança.

Ao meu co-orientador, Genésio José Menon, pelos conselhos e pelos cafezinhos de quase todas as tardes.

Aos professores e funcionários do departamento de engenharia mecânica, sempre muito educados e prestativos, por transformarem nosso ambiente de trabalho e estudo mais afável e acolhedor.

Ao professor, Ramiro Ramires, por facultar-me um espaço no Laboratório de Hidrodinâmica Virtual (LHV), e aos amigos que lá encontrei.

À Capes pelo apoio financeiro.

E aos eternos amigos da República Tijolinho com quem pude desfrutar de momentos inesquecíveis.

A vida é demasiado curta para nos permitir interessar-nos por todas as coisas, mas é bom que nos interessemos por tantas forem necessárias para preencher os nossos dias.

Bertrand Russell, filósofo e matemático.

Resumo

O uso de Funções de Base Radial (FBR) para a interpolação de dados dispersos e para solução de equações diferenciais tem emergido como uma ferramenta importante nos últimos anos. A principal razão é sua capacidade de lidar com qualquer tipo de malha ou mesmo discretizações sem malha (meshfree). Abordagens globais têm sido aplicadas com sucesso, mas elas estão limitadas a um número relativamente baixo de nós (algumas centenas), devido à baixa esparsidade e o extremo mal-condicionamento dos sistemas algébricos. Versões locais têm sido desenvolvidas para superar estes inconvenientes. Entre elas, o Método de Quadratura Diferencial Local usando FBR (MQDL-FBR) tem sido proposto há alguns anos e parece ser muito promissor para o tratamento de problemas com discretizações complexas (milhares ou milhões de nós). Para o cálculo dos coeficientes de ponderação obtidos através do MQDL-FBR, condições de determinação acerca da FBR foram desenvolvidas neste trabalho. A FBR Multiquádrica (Mq) foi escolhida devido à sua representação muito precisa em comparação com outros tipos de FBR, e por satisfazer as condições de determinação.

Neste trabalho discute-se, através de experimentos numéricos, os erros numéricos e a convergência do MQDL-FBR na solução de equações diferenciais parciais (EDP). Esses experimentos foram feitos para a equação de Poisson em um domínio quadrado unitário usando-se malhas estruturadas, vários *stencils* diferentes e algumas soluções analíticas. A influência no erro numérico adicionando um termo não-linear de primeiras derivadas na Equação de Poisson também foi analisada. Verifica-se a independência do parâmetro de forma com o refinamento de malha h , conforme demonstrado em pesquisas recentes. Outros resultados são discutidos.

Duas aplicações utilizando o MQDL-FBR foram feitas. Primeiro em um problema de convecção forçada em uma cavidade quadrada, também chamado na literatura como problema da caixa de sapato. Em seguida, um problema de convecção natural em uma cavidade quadrada. Em ambos, pontos fora do domínio foram utilizados para o cálculo e reposição de alguns valores junto a fronteira pelo MQDL-FBR. Resultados são comparados com os da literatura e discutidos.

Palavras-chave: Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial, Funções de Base Radial, Multiquádrica, Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor.

Abstract

Radial Basis Function (RBF) for scattered data interpolation and differential equations solution has emerged as an important tool in recent years. The main reason is their ability to cope with any kind of mesh or meshfree discretizations. Global approaches have been successfully applied but they are limited to a relatively low number of nodes. Local versions have been developed to overcome these drawbacks. The Local Differential Quadrature Method (LDQM) using FBR's has been proposed few years ago and seems to be very promising for problems with complex discretizations. To calculate the weighting coefficients obtained by LDQM-RBF, determination conditions have been developed on the RBF. The Multiquadric RBF (Mq) is chosen in the LDQM context due to its accurate representation in comparison with other types of RBF, and satisfy the conditions of determination.

In this work discusses whether, through the numerical experiments, the numerical errors and convergence of the LDQM-RBF the solution of partial differential equations (PDE). These experiments were made to the Poisson equation on a unit square domain using structured meshes, various different *stencils* and some different analytical functions. The influence on the error number by adding a non-linear term in the first derivatives of the Poisson equation was also analyzed. There is no dependence on the shape parameter with the mesh size h , as shown in recent research. Other results are discussed.

Two application using the LDQM-RBF's were made. First a problem of forced convection in a square cavity, also called in literature as a problem of a driven-cavity flow. Next, a problem of natural convection in a square cavity. On both, points outside the domain were used for the calculation and replacement of some values along the border by MQDL-FBR. Results are compared with the literature and discussed.

Keywords: Radial Basis Function, Local Differential Quadrature Method (LDQM) with RBF's, Multiquadric, Fluid Dynamics and Heat Transfer.

Sumário

Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	v
Lista de Símbolos	vi
Lista de Abreviaturas	ix
1 Introdução	1
1.1 Justificativa	1
1.2 Revisão Bibliográfica	2
1.3 Objetivo e Delineamento do Trabalho	8
2 Método de Quadratura Diferencial com Funções de Base Radial	9
2.1 Funções de Base Radial	9
2.2 Método de Quadratura Diferencial com Funções de Base Radial	10
2.2.1 Coeficientes de Ponderação e Condições de Determinação	12
3 Testes Numéricos com Equações do Tipo Poisson	15
3.1 Equação de Poisson - Discretização com o MQDL-FBR	15
3.1.1 Variação do erro numérico com o tamanho da malha h para diversos parâmetros de forma	19
3.1.2 Variação do erro numérico com o parâmetro de forma c para diversas malhas	21
3.1.3 Variação do erro numérico com o parâmetro de forma c para diversos <i>stencils</i>	23
3.1.4 Variação do erro numérico com o tamanho da malha h para diversos <i>stencils</i>	27
3.2 Teste do MQDL-FBR para equação do tipo Poisson com derivadas de primeira ordem	29
4 Problema de Convecção Forçada em uma Cavidade Quadrada	33
4.1 Formulação do problema físico e discretização	33
4.2 Tratamento dos nós fora do domínio e Resultados Numéricos	37

5	Problema de Convecção Natural em uma Cavityde Quadrada	43
5.1	Fomulação do problema físico e discretização	43
5.2	Tratamento dos nós fora do domínio e Resultados Numéricos	47
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	51
	Referências Bibliográficas	53
A	Obtenção das Condições de Determinação	56
B	Problema de Convecção Forçada em uma Cavityde Quadrada	59
C	Problema de Convecção Natural em uma Cavityde Quadrada	62

Lista de Figuras

1.1	Discretização do domínio feita por Shu <i>et al.</i> (2003)	4
1.2	Geometrias abordadas por Bararnia <i>et al.</i> (2010) em suas pesquisas com MQDL-FBR.	5
1.3	Geometrias abordadas por Qajarjazi <i>et al.</i> (2010) em suas pesquisas com MQDL-FBR	6
1.4	Geometrias abordadas por Soleimani <i>et al.</i> (2010) para aplicação do MQDL-FBR em condução de calor	7
2.1	Suporte local em torno de um nó de referência	11
3.1	Vista em perspectiva das funções soluções: (a) u_1 , (b) u_2 e (c) u_3	17
3.2	Número de nós locais, n_s , e estrutura dos <i>stencils</i> enfatizados nesse capítulo.	19
3.3	Número de nós locais, n_s , e estrutura dos <i>stencils</i> enfatizados nesse capítulo	20
3.4	Erro relativo obtido para alguns valores de c variando a malha para a função u_2 para o <i>stencil</i> 1	21
3.5	Erro relativo obtido para alguns valores de c variando a malha para a função u_1 para o <i>stencil</i> 1	21
3.6	Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para a função u_1	22
3.7	Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para a função u_2	22
3.8	Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para a função u_3	23
3.9	Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para os <i>stencils</i> de primeira camada	24
3.10	Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para alguns <i>stencils</i> de primeira camada e segunda camada	24
3.11	Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para alguns <i>stencils</i> de segunda camada	25
3.12	Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para alguns <i>stencils</i> de segunda camada	25
3.13	Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para alguns <i>stencils</i> de terceira camada	26
3.14	Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para os <i>stencils</i> mais extensos de cada camada e o <i>stencil</i> 1 de primeira camada	27

3.15	Erro relativo variando o tamanho da malha para os <i>stencils</i> 1, 2 e 3	28
3.16	Erro relativo variando o tamanho da malha para outros <i>stencils</i>	28
3.17	Vista em perspectiva da função solução u_p	29
3.18	Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma, c , para alguns <i>stencils</i> para a função analítica u_p	30
3.19	Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma, c , para alguns <i>stencils</i> para a função analítica u_1	30
3.20	Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma, c , para a função u_p	31
3.21	Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma, c para a função u_1	31
3.22	Influência do termo não-linear na solução da equação utilizando o MQDL-FBR.	32
4.1	Cavidade quadrada e condições de contorno para o problema de convecção forçada.	34
4.2	Fluxograma utilizado para obter as soluções do problema de convecção forçada	36
4.3	Número de nós locais e estrutura dos <i>stencils</i> enfatizados neste capítulo	37
4.4	Valores de vorticidade e reposição da função corrente para os nós fora do domínio	38
4.5	Linhas de corrente para o <i>stencil</i> 1	39
4.6	Resultados da literatura para $Re = 100$	40
4.7	Resultados da literatura para $Re = 400$	40
4.8	Resultados obtidos pelo MQDL-FBR para $Re = 1$	40
4.9	Resultados obtidos pelo MQDL-FBR para $Re = 10$	41
4.10	Resultados obtidos pelo MQDL-FBR para $Re = 100$	41
4.11	Resultados obtidos pelo MQDL-FBR para $Re = 400$	41
4.12	Ampliação dos gráficos da Fig. 4.9 nas proximidades das paredes ($Re=100$)	42
4.13	Ampliação dos gráficos da Fig. 4.10 nas proximidades das paredes ($Re=400$)	42
5.1	Cavidade quadrada e condições de contorno para o problema de convecção natural.	45
5.2	Fluxograma utilizado para obter as soluções do problema de convecção natural	46
5.3	Valores de vorticidade, função corrente e temperatura para nós externos à fronteira	47
5.4	Isotermas e linhas de corrente para o <i>stencil</i> 1	48
A.1	Ponto de referência sendo suporte dele mesmo	57

Lista de Tabelas

2.1	Condições de determinação para algumas FBR	14
3.1	Taxa de convergência para alguns <i>stencils</i>	28
5.1	Nusselt médio para $Ra = 10^4$	49
5.2	Nusselt médio para $Ra = 10^5$	49
5.3	Nusselt médio para $Ra = 10^6$	49

Lista de Símbolos

Símbolos Latinos

$[A]$	Matriz das FBR
c	Parâmetro de forma da FBR-Mq
c_v	Calor específico do fluido
D	Diâmetro
f	Função
f_r	Parâmetro de relaxação
g	Gravidade
h	Tamanho da malha
H	Comprimento de referência
n	Número de nós da malha
n_s	Número de pontos do suporte local
N	Número total de pontos do domínio
N_{int}	Número de pontos internos do domínio
N_{tp}	Número total de passos de tempo
N_x	Número de nós na direção x
M_y	Numero de nós na direção y
p	Pressão
P	Pressão adimensional
r	Norma euclidiana entre dois pontos de um domínio
t	Tempo dimensional
T_0	Temperatura de referência
T_h	Temperatura da parede quente
T_c	Temperatura da parede fria
u	Solução analítica e velocidade dimensional na direção x (Apêndices B e C)
U	Velocidade adimensional na direção x
U_0	Velocidade de referência
v	Velocidade dimensional na direção y (Apêndices B e C)
V	Velocidade adimensional na direção y

x	Coordenada espacial
X	Coordenada espacial adimensional na direção x
\mathbf{x}	Vetor do espaço vetorial
y	Coordenada espacial
Y	Coordenada espacial adimensional na direção y
w	Coefficiente de ponderação (pesos)
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
Gr	Número de Grashof
Pr	Número de Prandtl
Ra	Número de Rayleigh
Re	Número de Reynolds
Nu	Número de Nusselt

Símbolos Gregos

α	Coefficiente de difusão térmica
β	Coefficiente de expansão volumétrica do fluido
$\ \varepsilon\ $	Erro numérico relativo
$\delta\tau$	Incremento de tempo
η	Número finito
θ	Temperatura adimensional
κ	Condutividade térmica
λ	Coefficiente da combinação linear
μ	Viscosidade dinâmica do fluido
ρ	Massa específica do fluido
τ	Tempo adimensional
ν	Viscosidade cinemática do fluido
v_s	Velocidade característica
φ	Função de Base Radial
ψ	Função Corrente
Ψ	Polinômio adicional para a interpolação com FBR
ω	Vorticidade
Ω	Subconjunto dos reais

Subscritos/Sobrescritos

d	Dimensão do espaço vetorial
i	Indexação global
it	Representa uma iteração
j, k	Indexação local
m	Grau da derivada

Lista de Abreviaturas

DFD	<i>Diferenças Finitas para Frente</i>
EDPs	<i>Equações Diferenciais Parciais</i>
FBRs	<i>Funções de Base Radial</i>
GA	<i>Gaussiana</i>
MDF	<i>Método de Diferenças Finitas</i>
MEF	<i>Método de Elementos Finitos</i>
MDF	<i>Método de Diferenças Finitas</i>
Mq	<i>Multiquadrica</i>
MqI	<i>Multiquadrica Inversa</i>
MQD	<i>Método de Quadratura Diferencial</i>
MQDL-FBR	<i>Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial</i>
MVF	<i>Método de Volumes Finitos</i>
SEAL	<i>Sistema de Equações Algébricas Lineares</i>
TPS	<i>Thin-Plate Spline</i>

Capítulo 1

Introdução

1.1 Justificativa

Com o advento dos computadores de alto poder de processamento e maior capacidade de armazenar dados, muitos problemas complexos sem solução analítica na física e na engenharia puderam ser aproximados por soluções numéricas. A grande versatilidade e relativa simplicidade dos métodos numéricos possibilitaram um crescimento de aplicações dessas técnicas em diferentes áreas. Em suma, os métodos analíticos bem como os numéricos formam a classe de métodos teóricos que tem por objetivos resolver as equações diferenciais do problema físico.

Uma outra forma para se tratar problemas físicos seria sua simulação em laboratório, já que é uma abordagem mais fiel a problemas reais. Entretanto, tal metodologia normalmente tem alto custo, e muitas vezes não é possível ser realizada devido a dificuldades de implementação. Os métodos analíticos geralmente não representam, em sua maioria, um problema físico real, sendo aplicados em problemas simples e com condições de contorno também simples. A grande vantagem dos métodos numéricos é que apresentam poucas restrições em suas aplicações, podendo ser utilizados com condições de contorno gerais e ser aplicados em diversos tipos de geometrias.

Existem vários tipos de métodos numéricos para resolver equações diferenciais parciais (EDPs), dos quais os mais tradicionais são o Método de Diferenças Finitas (MDF), o Método de Elementos Finitos (MEF) e o Métodos de Volumes Finitos (MVF). Nesses métodos é necessária a geração de malhas, que podem ser estruturadas ou não-estruturadas. Na Engenharia Mecânica, o MDF sempre foi empregado na área de fluidos e geralmente é vinculado a um sistema de coordenadas ortogonais. São usados também para malhas não-estruturadas, porém os cálculos são mais complicados. O MEF inicialmente foi empregado na área estrutural para solução de problemas de elasticidade. Este método necessita de uma malha não-estuturada, que é mais hábil no tratamento de geometrias complexas. O MVF realiza um balanço de conservação da propriedade para cada volume elementar obtendo uma equação correspondente aproximada, e

pode ser utilizado em vários tipos de problemas. Nota-se que nesses métodos a geração de malha é fundamental (Maliska (2010)).

Uma outra vertente para solucionar EDPs é o Método de Quadratura Diferencial (MDQ), que é originária da quadratura integral, e aproxima uma derivada por um somatório de funções com seus respectivos coeficientes de ponderação. Inicialmente, os coeficientes de ponderação foram interpolados por funções polinomiais e mesmo funções trigonométricas, mas o sistema algébrico resultante tinha caráter global e se resumia a um número relativamente baixo de nós. Uma classe de funções interpoladoras denominadas Funções de Base Radial (FBRs) tem se mostrando eficiente na obtenção desses coeficientes. Foi utilizada primeiramente para aproximação de dados dispersos de um domínio, mas seu potencial na resolução de EDPs logo foi notada. Sua integração com a MQD resultou em um método local denominado Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial (MQDL-FBR) que pode ser abordado com um número maior de pontos (ou nós) por ter justamente caráter local. Esses pontos do domínio podem ser distribuídos uniformemente (malha estruturada) ou pontos distribuídos aleatoriamente (conectados em uma malha não-estruturada ou tratados em um contexto sem malha), ou seja, o MQDL-FBR tem certa flexibilidade com o uso ou não de malhas.

Hoje, grande parte do tempo de processamento nos computadores é para a geração de malhas bem adequadas à geometria do problema. O método sem malha permite estabelecer um sistema de equações algébricas para o domínio do problema como um todo, sem a utilização de uma malha pré-definida, e não necessita de nenhuma informação prévia sobre a relação entre os nós. Esse tipo de tratamento diminui o tempo de processamento, pois gera uma nuvem de pontos para o domínio do problema.

Dessa forma, tendo em vista algumas vantagens em potencial desse tipo de abordagem, pretende-se, nesse trabalho, estudar, num contexto de malha estruturada, as peculiaridades do MQDL-FBR, como alguns parâmetros influenciam em seus resultados, e, em seguida, utilizá-lo em aplicações básicas de dinâmica dos fluidos e transferência de calor.

1.2 Revisão Bibliográfica

Recentemente, com os avanços da tecnologia foi possível promover intensas pesquisas em métodos que simulam fenômenos naturais complexos. Entre os esquemas numéricos, o Método de Elementos Finitos (FEM), o Método de Diferenças Finitas (FDM) e o Método de Volumes Finitos (MVF) são os mais utilizados. Estas pesquisas estão presentes na física, engenharia, processos químicos, biomecânica, entre outras. Entretanto, seu sucesso está intrinsecamente ligado à boa qualidade da malha utilizada. Embora os atuais geradores de malhas automáticos diminuam a dificuldade de criação de malhas, muitas vezes são necessárias algumas modificações e até mesmo uma remalhagem do domínio para se obter bons resultados.

Os métodos numéricos citados acima são usados para resolver equações diferenciais parciais ou ordinárias. Hardy (1971) foi o primeiro a utilizar as FBRs, chamadas Multiquádricas (Mq), para interpolar superfícies topográficas. Entretanto, seu potencial para solução de EDPs logo foi notada por Kansa (1990a). Estudos detalhados feitos por Franke (1982), após uma ampla revisão dos métodos de interpolação para dados dispersos, mostraram que RBFs frente a outros métodos testados foi melhor quanto a precisão, estabilidade, eficiência, memória requerida e simplicidade de implementação. E, ainda, entre as RBFs, as Mq produziram os resultados mais precisos. Esse fato motivou Kansa (1990a) a utilizar as Mq em resolução de problemas que envolvem EDPs.

Kansa (1990b) utilizou as FBRs, em especial a Mq, como um meio de interpolação de funções em problemas de escoamento de fluidos. O método de colocação de Kansa (1990b) utilizando Mq é um verdadeiro esquema sem malha de dados dispersos para representar superfícies e corpos em um número arbitrário de dimensões. A Mq é continuamente diferenciável e integrável, capaz de representar funções com grande precisão. Com base nessa afirmativa, Kansa (1990b) aplicou o esquema de Mq para aproximação espacial de equações parabólicas, hiperbólicas e elípticas (de Poisson), e concluiu que a Mq não é apenas excepcionalmente precisa, sendo também mais eficiente que esquemas de diferenças finitas, os quais exigem muito mais operações para alcançar o mesmo grau de precisão. Porém, o método de colocação abordado por Kansa (1990b) é um método global que calcula a solução no espaço gerado por um conjunto de FBRs idênticas, e isso muitas vezes torna o sistema de equações algébricas lineares (SEAL) resultante mal-condicionado.

O MQD foi proposto inicialmente por Bellman *et al.* (1972) e consiste em aproximar a derivada de uma função qualquer por um somatório ponderado de valores da função suaves para um grupo de pontos do domínio. Essas idéias são análogas à quadratura integral ou quadratura gaussiana utilizada para o cálculo numérico de integrais. Para o cálculo dos coeficientes de ponderação do MQD, Shu (2000) utilizava inicialmente funções de interpolação polinomiais ou trigonométricas. Entretanto, o SEAL resultante era de caráter global e sofria com problemas de mal-condicionamento, ficando assim restrito a um número pequeno de pontos.

Para superar o mal-condicionamento do SEAL resultante global, foi proposto por Shu *et al.* (2003) um esquema local que utiliza Método de Quadratura Diferencial (MQD) com FBRs. Shu *et al.* (2003) utilizaram as FBRs como funções interpoladoras no MQD de âmbito local, chamado-o de Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial (MQDL-FBR). Esse método foi utilizado para resolver as equações de Navier-Stokes bidimensional para a convecção natural em uma cavidade quadrada com diferença de temperatura nas paredes verticais. Esse é um dos tipo de problemas clássicos na engenharia, os chamados *benchmarks*, utilizados geralmente para validar um método numérico. As FBRs utilizadas por Shu *et al.* (2003) foram as Mq que geralmente se adequam melhor a uma interpolação de dados dispersos em duas dimensões. A discretização do domínio foi feita a partir de nós distribuídos aleato-

riamente (sem malha); nas proximidades da fronteira uma malha ortonormal foi empregada (Fig. 1.1). O MQDL-FBR é essencialmente sem malha, entretanto pode ser facilmente usado com malhas estruturadas e/ou não-estruturadas. Os resultados obtidos por Shu *et al.* (2003), nesse caso, foram bem próximos aos obtidos por Davis (1983), que utilizou o Método de Diferenças Centrais de segunda ordem.

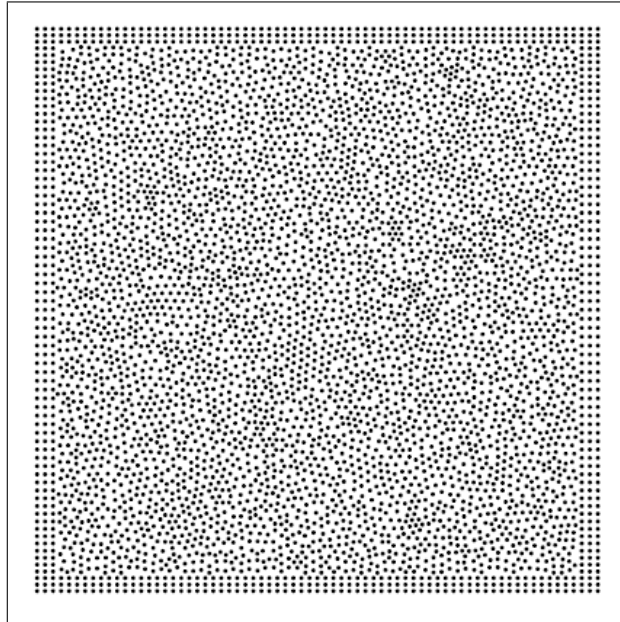


Figura 1.1: Discretização do domínio feita por Shu *et al.* (2003)

Ding *et al.* (2005) estimaram, a partir de experimentos numéricos, o erro para o MQDL-FBR. Os autores observaram que o erro dependia essencialmente de três parâmetros, isto é, a distância entre os nós (h), o parâmetro de forma (c) da Mq e o número de nós de suporte local (n_s). Os estudos partiram da equação de Poisson bidimensional adotando quatro soluções analíticas distintas. Para estudar o efeito da malha, utilizou-se uma malha uniforme equidistante. Para estimar a relação entre o erro numérico e os três fatores, os experimentos numéricos foram realizados fixando-se um parâmetro e variando os restantes. Feito isso, uma estimativa para o erro na discretização da equação de Poisson foi fornecida. Entretanto, Ding *et al.* (2005) restringiu muito o intervalo de variação do parâmetro de forma c . Com esse fato, eles não foram capazes de identificar a existência de valores ótimos de c que são independentes do refinamento da malha h (Bayona *et al.* (2010)).

Shu *et al.* (2005) utilizaram o MQDL-FBR para resolver problemas de escoamentos incompressíveis, permanentes e não-permanentes. A função de base radial escolhida foi a Mq por possuir convergência exponencial. Três casos bidimensionais (*benchmark*) foram testados, sendo o da cavidade quadrada com movimento da tampa superior, escoamento ao redor de um cilindro isolado com número de Reynolds moderado e o escoamento entre dois cilindros escalonados. Para a cavidade quadrada os dados foram comparados com os obtidos por Ghia *et al.*

(1982). Para o escoamento ao redor do cilindro os resultados obtidos estavam em boa concordância com os obtidos na literatura, tornando o método MQDL-FBR indicado para simulação de escoamentos incompressíveis bidimensionais.

Ding *et al.* (2006) aplicaram o MQDL-FBR a um problema de escoamento incompressível tridimensional. O modelo estudado foi o de uma cavidade tridimensional, ou seja, um cubo, onde há translação da tampa superior. Para facilitar a aplicação da condição de contorno de Neumann foi empregada uma malha ortogonal nas proximidades da fronteira. As equações de Navier-Stokes dependentes do tempo foram resolvidas em sua forma primitiva, e um esquema de passo fracionado foi usado para a discretização do tempo. Os resultados se mostraram em concordância com os obtidos na literatura.

O método MQDL-FBR também vem sendo aplicado em outras áreas. Wu *et al.* (2007) utilizaram esse método para analisar vibrações em membranas de formas arbitrárias. Nesse caso, a equação de Helmholtz que governa a vibração da membrana é diretamente discretizada num SEAL e as frequências naturais e os modos de vibração são facilmente calculados.

Outros estudos recentes são os de Bararnia *et al.* (2010), Qajarjazi *et al.* (2010) e Soleimani *et al.* (2010). O trabalho feito por Bararnia *et al.* (2010) utiliza o MQDL-FBR no contexto sem malha para obter a distribuição do potencial elétrico e a temperatura para duas geometrias distintas. As duas geometrias são bidimensionais, quadrados unitários, mas uma possuía um furo em forma de circunferência e a outra possuía um furo quadrado, respectivamente, em seus centros (Fig. 1.2). A questão da fronteira foi abordada utilizando uma malha ortonormal nas suas proximidades assim como Shu *et al.* (2003). Os resultados também foram obtidos utilizando o MEF com geração de uma malha não-estruturada. Na comparação dos resultados demonstrou-se que o MQDL-FBR é atraente com respeito a precisão, capacidade e flexibilidade de programação para problemas eletrotérmicos frente ao custo computacional para a geração de malhas.

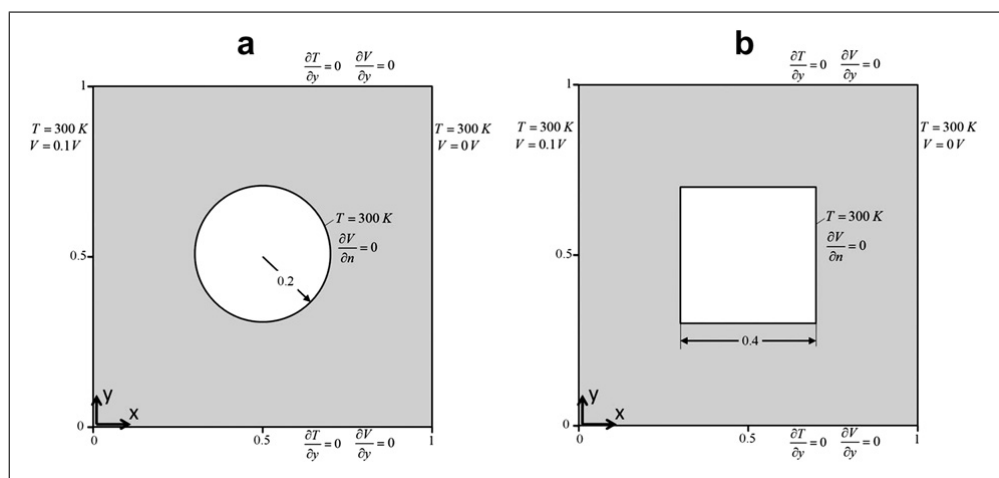


Figura 1.2: Geometrias abordadas por Bararnia *et al.* (2010) em suas pesquisas com MQDL-FBR.

Qajarjazi *et al.* (2010) aplicaram o MQDL-FBR em um problema bidimensional onde as equações de Navier-Stokes para convecção natural eram resolvidas em sua forma primitiva. As linhas isotérmicas e a geração de entropia devido a transferência de calor e atrito com o fluido foram obtidas para um regime laminar. Dois casos foram abordados: um referente a uma cavidade quadrada sujeita a uma diferença de temperatura em suas paredes verticais e paredes horizontais adiabáticas, e outro referente a uma cavidade quadrada onde todas as arestas possuem diferença de temperatura nos centros e parte das arestas são adiabáticas. A Fig. 1.3 ilustra os casos descritos. O método foi abordado utilizando uma malha uniforme equidistante. Para a fronteira, o MDF foi usado. Os resultados obtidos pelos autores estão em conformidade com os encontrados na literatura.

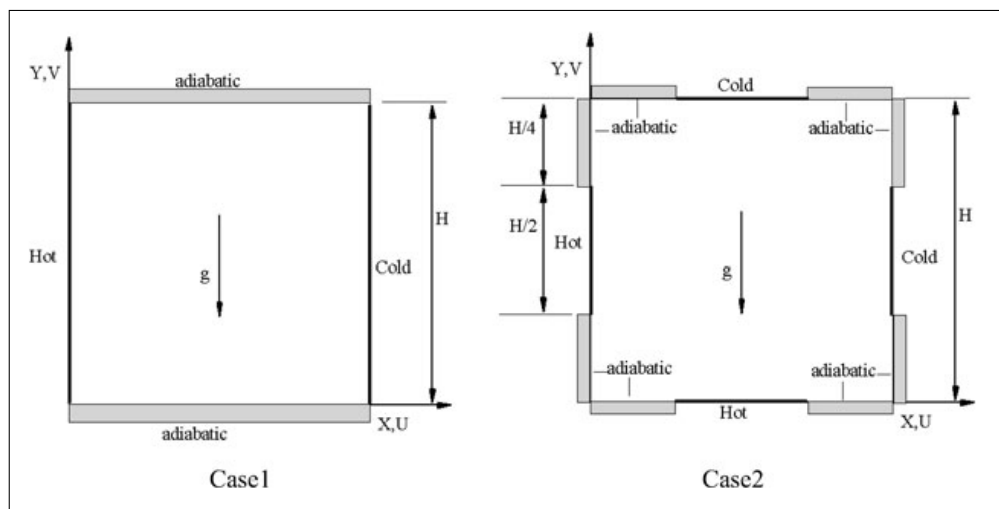


Figura 1.3: Geometrias abordadas por Qajarjazi *et al.* (2010) em suas pesquisas com MQDL-FBR

Para avaliar o MQDL-FBR para geometrias um pouco mais complexas, Soleimani *et al.* (2010) aplicaram o método em problemas de condução de calor transiente em duas dimensões. Quatro geometrias foram abordadas por eles, conforme ilustra a Fig. 1.4. Os autores compararam os resultados obtidos pelo MQDL-FBR com aqueles obtidos pelo MEF com um software comercial (COMSOL). Uma malha uniforme equidistante foi utilizada para discretizar os domínios envolvidos. Os resultados encontrados com o MQDL-FBR concordaram bem com os obtidos pelo MEF, evidenciando, portanto, seu potencial de aplicação para geometrias irregulares.

Uma análise teórica do MQDL-FBR foi feita por Bayona *et al.* (2010). Eles estudaram analiticamente o comportamento da convergência do MQDL-FBR em função do número de nós no suporte local, da distância nodal e do parâmetro de forma. Fórmulas exatas para a primeira e segunda derivada em uma dimensão, e para o Laplaciano em duas dimensão foram usadas para a obtenção do erro através de expansões de Taylor. A partir desta análise, descobriram que existe um valor ótimo do parâmetro de forma que minimiza o erro. Este parâmetro ótimo é independente da distância nodal h . Experimentos numéricos foram feitos para corroborar

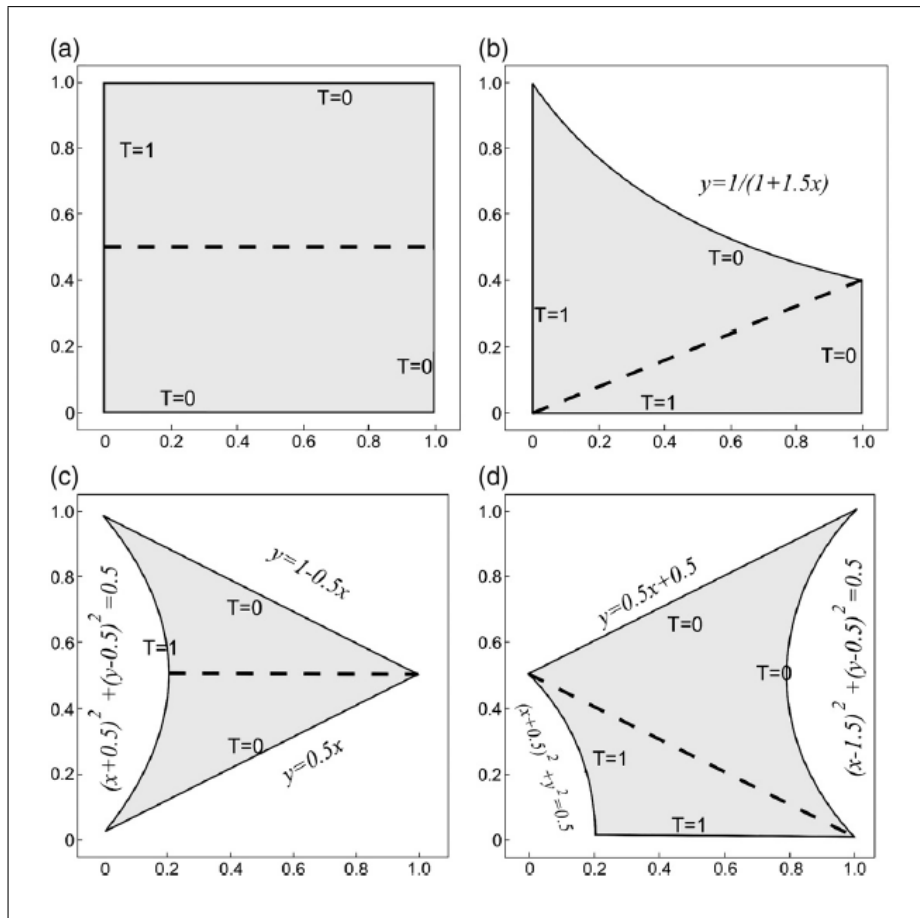


Figura 1.4: Geometrias abordadas por Soleimani *et al.* (2010) para aplicação do MQDL-FBR em condução de calor

os resultados teóricos. Esse fato importante acerca do método não foi notado por Ding *et al.* (2005).

Com o crescente interesse em métodos flexíveis, versáteis e de fácil implementação, o MQDL-FBR vem se mostrando adequado para o tratamento de diversos problemas na física e na engenharia. Esse fato vem motivando os estudos desse método de forma intensa. O MQDL-FBR pode ser implementado em malhas uniformes, não-uniformes, e no contexto sem malha. Também se adapta bem em problemas com geometrias irregulares. Pela estrutura do método, pode-se abordar derivadas de altas ordens e domínios de dimensões arbitrárias. O presente trabalho foi motivado, portanto, devido as qualidades abordadas acima, mas sobretudo algumas lacunas acerca do MQDL-FBR que não ficaram claramente explícitas. Por exemplo, notou-se que o SEAL gerado para o cálculo dos coeficientes de ponderação do MQDL-FBR não deve conter nenhum tipo de singularidade e esse fato restringe a utilização de algumas FBR. A estrutura dos nós do suporte local também não é explicitamente abordada, e sua influência fica mais restrita a quantidade de nós que à sua estrutura. No contexto de malha estruturada pode-se facilmente estudar vários tipos de estrutura local (quantidade e distribuição dos nós) para os

nós de suporte. Com o intuito de utilizar apenas o MQDL-FBR para a solução de equações diferenciais e também para reposição de alguns valores na fronteira, uma abordagem utilizando nós fora do domínio foi proposto no presente trabalho.

1.3 Objetivo e Delineamento do Trabalho

O Capítulo 2 tem como objetivo expor algumas FBRs e sua aplicação em interpolação de dados dispersos. De modo sucinto, o MQDL-FBR foi descrito em sua forma generalizada. O cálculo dos coeficientes de ponderação foi abordado levando-se em conta condições de determinação para as FBRs. Esse fato foi necessário porque deve-se calcular o valor do peso para o ponto de referência do suporte local, ou seja, quando $r \rightarrow 0$. Isso foi feito para algumas FBRs e para um espaço bidimensional (mais detalhes no Apêndice A).

O Capítulo 3 foi proposto para estudar a influência dos parâmetros que influenciam na solução de EDPs pelo MQDL-FBR. De posse da equação de Poisson em um domínio unitário quadrado, pode-se obter a solução numérica pelo MQDL-FBR e compará-la com soluções analíticas adotadas. Com o erro relativo entre a solução numérica e a solução analítica, pode-se assim avaliar a influência do parâmetro de forma c da Mq , do tamanho da malha h e da quantidade de nós do suporte local (n_s), ou *stencil*, bem como a influência da sua estrutura (distribuição do nós). A influência de um termo não-linear adicionado na equação de Poisson também foi verificada. Todos os testes foram feitos em uma malha uniforme equidistante.

Os Capítulos 4 e 5 foram propostos com o objetivo de testar o MQDL-FBR para resolver problemas de dinâmica dos fluidos e transferência de calor. No Capítulo 4, o problema de hidrodinâmica incompressível, de convecção forçada, em uma cavidade quadrada foi proposto. Essa cavidade é submetida, em sua superfície superior, a uma velocidade constante diferente de zero. No Capítulo 5, o método é utilizado para obter a solução de um problema de convecção natural em uma cavidade quadrada. Para esse problema físico, o fluido dentro da cavidade é submetido a diferenças de temperaturas em suas paredes verticais enquanto as paredes horizontais são mantidas adiabáticas. Os resultados para ambos são comparados com resultados já existentes na literatura.

Na Conclusão são realçados os pontos positivos, potenciais dificuldades encontradas com a aplicação do MQDL-FBR, propostas para a evolução do método e trabalhos futuros.

Capítulo 2

Método de Quadratura Diferencial com Funções de Base Radial

Esse capítulo tem como objetivo apresentar a definição matemática de Função de Base Radial, exibir algumas FBRs mais utilizadas e apresentar sua utilização em interpolação de dados dispersos. Em seguida, é apresentada a formulação do Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial em sua forma generalizada. Por último, são explicitadas as equações para o cálculo dos coeficientes de ponderação do MQDL-FBR até segundas derivadas. Para isso, condições de determinação são desenvolvidas para o nó de referência sendo suporte dele mesmo ($r \rightarrow 0$) para que não haja elementos singulares no sistema de equações algébricas lineares (SEAL) resultante.

2.1 Funções de Base Radial

Nas últimas décadas, ocorreu um crescente interesse em pesquisas com Funções de Base Radial. Seu uso em problemas de interpolação de dados dispersos e para solução de EDPs tem emergido como uma ferramenta importante.

De acordo com Ling (2003), a definição de FBR é dada por:

Definição 1 Se $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y})$ sempre que $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$, então φ é chamada de Função de Base Radial (centro zero).

Existem uma infinidade de FBRs. Denotando por r a norma Euclidiana entre um ponto central (centro) \mathbf{x}_k e um ponto \mathbf{x} qualquer do domínio, ou seja $r = r_k(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_2$, Piret (2007) exibe algumas das FBRs mais empregadas:

$$\varphi(r) = r^2 \log(r), \quad \text{Thin-Plate Spline (TPS)} \quad (2.1)$$

$$\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}, \quad \text{Multiquádrica (Mq)} \quad (2.2)$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}, \quad \text{Multiquádrica Inversa (MqI)} \quad (2.3)$$

$$\varphi(r) = e^{-cr^2}, \quad \text{Gaussiana (GA)} \quad (2.4)$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{r^2 + c^2}, \quad \text{Quádrica Inversa (QI)} \quad (2.5)$$

$$\varphi(r) = (r^2 + c^2)^\gamma, \quad \text{Multiquádrica Generalizada (MqG)}, \quad \gamma < 0 \quad (2.6)$$

$$\varphi(r) = r, \quad \text{Linear (LN)} \quad (2.7)$$

$$\varphi(r) = r^3, \quad \text{Cúbica (CU)} \quad (2.8)$$

$$\varphi(r) = r^{2z-1}, \quad \text{Monomial (MN)}, \quad z \text{ inteiro positivo} \quad (2.9)$$

As funções (2.1), (2.7), (2.8) e (2.9) são classificadas como parcialmente suaves, enquanto (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) e (2.6) são infinitamente suaves para $c > 0$.

Na interpolação de dados dispersos, uma função $f(\mathbf{x})$, para um ponto de um domínio $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, pode ser aproximada por uma combinação linear de N FBRs da seguinte forma:

$$f(\mathbf{x}) \cong \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2) + \Psi(\mathbf{x}), \quad (2.10)$$

onde N é o número de nós do domínio, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, d é a dimensão do domínio, os λ_i são coeficientes a serem determinados, φ é a FBR e Ψ é um polinômio adicional facultativo. Esse fato motivou Shu *et al.* (2003) a integrar FBRs ao MQD e desenvolver o MQDL-FBR tornando-o de caráter sem malha, mas podendo ser desenvolvido com uma malha estruturada. Antes de utilizar as FBRs para obter os coeficientes de ponderação, Shu (2000) empregava funções polinomiais ou trigonométricas. Desse modo, o método tinha natureza global e era restrito a um número baixo de pontos do domínio devido à baixa esparcidade e o extremo mal-condicionamento dos SEALS.

2.2 Método de Quadratura Diferencial com Funções de Base Radial

Pelo Método de Quadratura Diferencial Local, uma derivada parcial de qualquer ordem de uma função em \mathbb{R}^n pode ser aproximada por uma soma ponderada de valores funcionais em pontos discretos vizinhos do ponto de referência \mathbf{x} , incluindo ele próprio (pontos de suporte de \mathbf{x}). Por exemplo, a aproximação do método para a m -ésima derivada em relação a x_1 de uma

função $f(\mathbf{x})$ em um ponto \mathbf{x}_i do \mathbb{R}^n , $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, pode ser expressa por:

$$\frac{\partial^m f(\mathbf{x}_i)}{\partial x_1^m} = \sum_{j=1}^{n_s} w_{i,j}^{mx_1} f(\mathbf{x}_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.11)$$

sendo \mathbf{x}_j , $j = 1, \dots, n_s$, os pontos de suporte de \mathbf{x} e $w_{i,j}^{mx_1}$ os respectivos coeficientes de ponderação. No presente trabalho, o índice i indica um nó de referência de uma discretização global de N nós, enquanto j é um índice local para os respectivos nós de suporte. Essa abordagem pode ser naturalmente aplicada para qualquer dimensão do domínio. A Fig. 2.1 ilustra um domínio disperso de pontos com um suporte local (nesse trabalho chama-se *stencil* o suporte local de uma malha estruturada), seus nós de suporte local e o nó de referência, onde é aproximada a EDP.

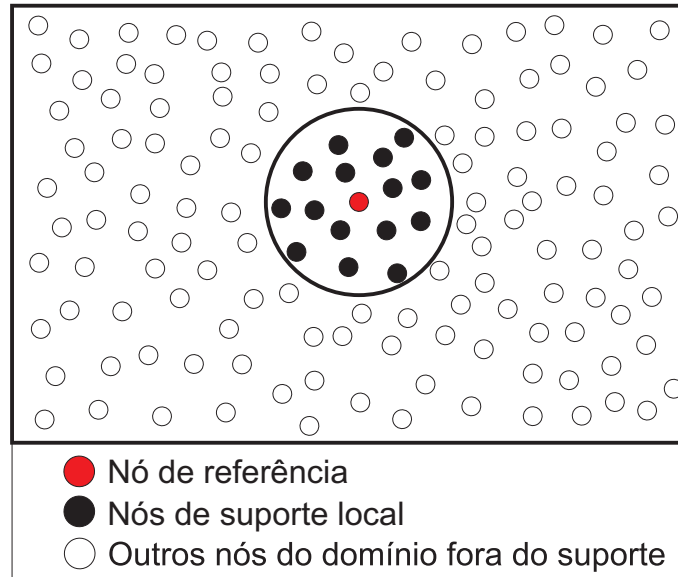


Figura 2.1: Suporte local em torno de um nó de referência

Os coeficientes de ponderação $w_{i,j}$ devem ser determinados para a aproximação da derivada e, para isso, um conjunto de funções de base é requerido. Substituindo o conjunto de funções de base radial com centros nos próprios pontos de suporte ($\varphi_k(r) = \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_2)$, $k = 1, \dots, n_s$) na Eq. (2.11), obtém-se o seguinte sistema linear algébrico para os coeficientes de ponderação Ding *et al.* (2005):

$$\frac{\partial^m \varphi_k(\mathbf{x}_i)}{\partial x_1^m} = \sum_{j=1}^{n_s} w_{i,j}^{mx_1} \varphi_k(\mathbf{x}_j), \quad k = 1, 2, \dots, n_s \quad (2.12)$$

Note-se que $\varphi_k(\mathbf{x}_j)$ representa o valor no ponto de suporte \mathbf{x}_j da FBR com centro no ponto de suporte \mathbf{x}_k .

Em forma matricial, o vetor de coeficientes de ponderação $\{w\}_i$ pode ser obtido por

$$\left\{ \frac{\partial^m \varphi_k(\mathbf{x}_i)}{\partial x_1^m} \right\} = [A] \{w\}_i \quad (2.13)$$

Atente-se ao fato da matriz $[A]$ ser simétrica.

Após a solução do sistema, os valores dos coeficientes de ponderação podem ser usados para aproximar as derivadas. O sistema não terá solução se a matriz $[A]$ for singular. Para a FBR Multiquádrica, Micchelli (1986) mostrou que a matriz $[A]$ pode apresentar casos de singularidade. Por outro lado, Hon e Schaback (2001) provaram que esses casos são extremamente raros e podem ser desconsiderados.

2.2.1 Coeficientes de Ponderação e Condições de Determinação

O cálculo dos coeficientes de ponderação é a chave do MQDL-FBR. Para obter esses coeficientes, um conjunto de funções base é requerido. Funções de Base Radial (φ) são utilizadas para obter os coeficientes de ponderação (como as citadas no item 2.2), entretanto, foi observado que nem todas as FBR podem ser usadas para isso. O SEAL resultante (Eq. 2.13) deve conter, a princípio, todos seus elementos finitos. O ponto de referência sendo suporte dele mesmo ($r \rightarrow 0$) pode gerar um elemento indeterminado nesse sistema dependendo da FBR adotada. Isso restringe o uso das FBR para o cálculo dos pesos. Condições de determinação acerca da φ quando $r \rightarrow 0$ foram desenvolvidas (Apêndice A) para derivadas de até segunda ordem ($m = 2$) e dimensão $\mathbf{x} = (x, y)$. Nenhuma referência da literatura aborda explicitadamente essa restrição.

Dada uma FBR, $\varphi(r)$, três condições de determinação devem ser satisfeitas para que o SEAL tenha valores finitos para derivadas até segunda ordem quando $r \rightarrow 0$. Essas condições são:

Primeira condição de determinação (1^aCDD):

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (2.14)$$

Segunda condição de determinação (2^aCDD):

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.15)$$

Terceira condição de determinação (3^aCDD):

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \eta \quad (\text{finito}) \quad (2.16)$$

A 1ªCDD está relacionada com o cálculo da derivada primeira. A 2ªCDD se relaciona com o cálculo da derivada cruzada, enquanto que, para a segunda derivada a 2ªCDD e a 3ªCDD devem ser satisfeitas.

Por exemplo, a FBR Mq é aqui escolhida para gerar o conjunto de funções de base para obter valores dos coeficientes de ponderação. A equação (2.2) no contexto aqui mostrado pode ser escrita como:

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \sqrt{(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_2)^2 + c^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n_s \quad (2.17)$$

sendo c um parâmetro de forma ($c > 0$).

Assim, aplicando a primeira, segunda e terceira condições de determinação para a Mq obtém-se o seguinte resultado:

1ªCDD

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{(r^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad (2.18)$$

2ªCDD

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} -\frac{r^2}{(r^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (2.19)$$

3ªCDD

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{(r^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{c} \quad (finito) \quad (2.20)$$

Portanto, a Mq satisfaz todas as condições de determinação, e assim, os coeficientes de ponderação podem ser calculados com a solução do sistema algébrico resultante.

A tabela (2.1) mostra as três condições de determinação resolvidas para as FBRs (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4). A FBR *Thin-Plate Spline* (2.1) não satisfaz a segunda e terceira condições de determinação. Esse fato impossibilita sua utilização na obtenção dos coeficientes de ponderação pelo MQDL-FBR para as segundas derivadas e também a derivada cruzada. Para as FBRs Mq (2.2), MqI (2.3) e GA (2.4), todas as condições de determinação são satisfeitas, e portanto, é possível utilizá-las para a obtenção dos coeficientes de ponderação para derivadas até segunda ordem. Dentre as FBRs estudadas e que possibilitam a obtenção do coeficiente de ponderação, a Mq apresentou melhores resultados, fato que corrobora resultados obtidos por Franke (1982). Portanto, ela foi adotada em todos os testes feitos nesse trabalho.

Escolhida uma FBR que satisfaça as condições de determinação, o cálculo dos coeficientes de ponderação utilizando o MQDL-FBR para a derivada de primeira ordem com relação a x

Tabela 2.1: Condições de determinação para algumas FBR

FBR	1 ^o CDD	2 ^o CDD	3 ^o CDD
$r^2 \log(r)$	0	2	$-\infty$
$\sqrt{r^2 + c^2}$	0	0	$\frac{1}{c}$
$\frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$	0	0	$-\frac{1}{c^3}$
e^{-cr^2}	0	0	$-\frac{2}{c^2}$

no ponto de referência \mathbf{x}_i , de acordo com a equação (2.11), será:

$$\frac{\partial \varphi_k(\mathbf{x}_i)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n_s} w_{i,j}^{1x} \varphi_k(\mathbf{x}_j), \quad k = 1, 2, \dots, n_s \quad (2.21)$$

Os coeficientes de ponderação são obtidos resolvendo o SEAL acima, ou seja:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_i)}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_i)}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{n_s}(\mathbf{x}_i)}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \varphi_k(\mathbf{x}_i)}{\partial x}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}_1) & \varphi_1(\mathbf{x}_2) & \cdots & \varphi_1(\mathbf{x}_{n_s}) \\ \varphi_2(\mathbf{x}_1) & \varphi_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & \varphi_2(\mathbf{x}_{n_s}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n_s}(\mathbf{x}_1) & \varphi_{n_s}(\mathbf{x}_2) & \cdots & \varphi_{n_s}(\mathbf{x}_{n_s}) \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{bmatrix} w_{i,1}^{1x} \\ w_{i,2}^{1x} \\ \vdots \\ w_{i,n_s}^{1x} \end{bmatrix}}_{\{w\}_i} = \begin{bmatrix} w_{i,1}^{1x} \\ w_{i,2}^{1x} \\ \vdots \\ w_{i,n_s}^{1x} \end{bmatrix}$$

De forma análoga, o cálculo do coeficiente de ponderação usando o MQDL-FBR para a derivada de segunda ordem com relação a x no ponto de referência \mathbf{x}_i será:

$$\frac{\partial^2 \varphi_k(\mathbf{x}_i)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{n_s} w_{i,j}^{2x} \varphi_k(\mathbf{x}_j), \quad k = 1, 2, \dots, n_s \quad (2.22)$$

Os coeficientes de ponderação são obtidos analogamente para y . O SEAL para encontrar os coeficientes de ponderação, dado em (2.21) e (2.22), foi resolvido pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal parcial. Utilizou-se a implementação da rotina DPSIM em dupla precisão (Sequi (1973)). Quando se utiliza a formulação MQDF-FBR para malha uniforme equidistante, os coeficientes de ponderação são calculados apenas uma vez e armazenados para toda a discretização do domínio.

Capítulo 3

Testes Numéricos com Equações do Tipo Poisson

Este capítulo visa avaliar de forma numérica informações importantes sobre o Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial (MQDL-FBR) para solução de Equações Diferenciais Parciais (EDP). Para isso, o MQDL-FBR foi inicialmente aplicado à equação de Poisson bidimensional em um domínio quadrado unitário utilizando-se uma malha estruturada uniforme equidistante. Vários parâmetros que são importantes na utilização do MQDL-FBR foram testados, dentre eles, o parâmetro de forma, c , da Multiquádrica (Mq), o tamanho da malha, h , e o número de nós de suporte local (n_s), bem como a estrutura do *stencil*. Resultados relevantes acerca da influência desses parâmetros são apresentados e discutidos. Estudos análogos também foram realizados para uma equação do tipo Poisson incluindo termos não-lineares com derivadas de primeira ordem.

3.1 Equação de Poisson - Discretização com o MQDL-FBR

Vários experimentos para testar a convergência do MQDL-FBR foram feitos. Para isso, usou-se a equação de Poisson bidimensional num domínio quadrado unitário, ou seja, $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

A equação de Poisson bidimensional é dada por:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (3.1)$$

As condições de contorno são dadas pela condição de Dirichlet, ou seja, os pontos das fronteiras são tratados como pontos onde a solução é conhecida. Assim, o valor para os nós das

fronteiras serão dados por: $u_{fronteira} = u_{exata}$. De forma análoga, quando se utilizar *stencils* locais que façam uso de nós fora do domínio, os valores para esses pontos também serão tomados como solução exata da equação, ou seja, $u_{pontosfora} = u_{exata}$.

Dada uma solução analítica $u(x, y)$ qualquer é possível obter a função $f(x, y)$ de acordo com a equação de Poisson. Três soluções analíticas foram testadas. Elas foram retiradas de Shu *et al.* (2005), e são dadas por:

$$u_1(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3.2)$$

$$u_2(x, y) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^6 \left(1 - \frac{y}{2}\right)^6 + 1000(1-x)^3 x^3 (1-y)^3 y^3 + y^6 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^6 + x^6 \left(1 - \frac{y}{2}\right)^6 \quad (3.3)$$

$$u_3(x, y) = \sin(\pi x) + \sin(\pi y) \quad (3.4)$$

A Fig. 3.1 mostra as funções soluções utilizadas nos testes numéricos em uma vista em perspectiva.

De posse da solução numérica da equação de Poisson utilizando o MQDL-FBR para os N_{int} nós internos, e sabendo *a priori* a solução analítica, o erro relativo referente a precisão do método foi definido como

$$\|\varepsilon\| = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{int}} (u_{num} - u_{exata})_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{int}} (u_{exata})_i^2}} \quad (3.5)$$

Como já foi dito anteriormente, o MQDL-FBR pode ser implementado para nós dispersos e não necessariamente em uma malha. Entretanto, o presente estudo foi feito utilizando uma malha estruturada uniforme equidistante visando uma melhor compreensão dos parâmetros que influenciam na obtenção da solução numérica.

A equação de Poisson discretizada para um nó interior i toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial y^2} = f(x_i, y_i) \quad (3.6)$$

Pelo MQDL-FBR, sabe-se que:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{n_s} w_{i,j}^{2x} u(x_j, y_j) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial y^2} = \sum_{j=1}^{n_s} w_{i,j}^{2y} u(x_j, y_j) \quad (3.8)$$

Substituindo as equações (3.7) e (3.8) em (3.6) e chamando $f(x_i, y_i)$ de f_i e também

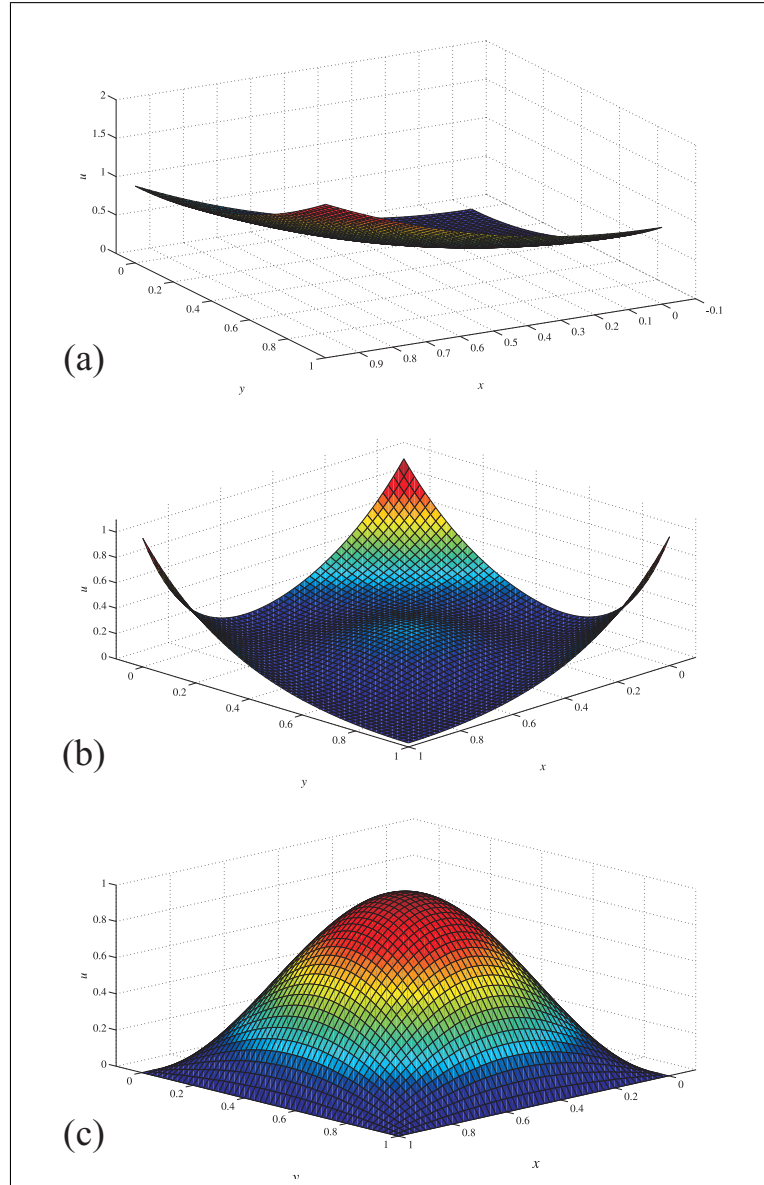


Figura 3.1: Vista em perspectiva das funções soluções: (a) u_1 , (b) u_2 e (c) u_3

$u(x_j, y_j)$ de u_j , chega-se a seguinte equação discretizada pelo MQDL-FBR:

$$\sum_{j=1}^{n_s} (w_{i,j}^{2x} + w_{i,j}^{2y}) u_j = f_i \quad (3.9)$$

onde $w_{i,j}^{2x}$ e $w_{i,j}^{2y}$ são os coeficientes de ponderação para o nó de referência i associados com a segunda derivada com relação a x e a y , respectivamente. O índice i representa uma indexação global enquanto j representa uma indexação local dos nós de suporte incluindo também o nó de referência. Sem perda de generalidade, o índice global i é sempre associado ao índice local $j = 1$.

A solução do SEAL global, obtido pelo MQDL-FBR, é feita através do método de sobre-

relaxação (SOR) e a tolerância utilizada para a convergência nesse método foi de 10^{-8} . Assim, a solução numérica através do SOR será obtida da seguinte forma:

$$u_i^{it+1} = (1 - f_r)u_i^{it} + f_r u_i^{*it} \quad (3.10)$$

sendo f_r um parâmetro de relaxação. E u^* , que é obtido pelo processo iterativo de Gauss-Seidel, é dado por:

$$u_i^{*it+1} = \frac{f_i - \sum_{k=2}^{n_s} (w_{i,k}^{2x} + w_{i,k}^{2y}) u_k^{it}}{w_{i,1}^{2x} + w_{i,1}^{2y}} \quad (3.11)$$

Seguindo a sugestão da literatura (Ferziger (1981)), o parâmetro de relaxação, f_r , para uma malha uniforme é calculado por:

$$f_r = \frac{8 - 4\sqrt{4 - \delta^2}}{\delta^2} \quad (3.12)$$

sendo $\delta = \cos\left(\frac{\pi}{N_x}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{M_y}\right)$. N_x e M_y é número de nós na direção x e y , respectivamente. No presente trabalho $N_x = M_y = n$.

O valor do parâmetro de relaxação adotado em todos os testes foi a média aritmética dos valores de f_r encontrados para cada tamanho de malha utilizado. Os tamanhos das malhas $n \times n$ ($h = 1/(n-1)$) para o cálculo do parâmetro de relaxação médio foram 21×21 , 41×41 , 61×61 , 81×81 , 101×101 e 121×121 . Portanto, f_r utilizado nesse trabalho foi de 1,895898.

Os itens seguintes abordam a influência dos parâmetros mais relevantes na obtenção da solução numérica da equação de Poisson utilizando o MQDL-FBR. Os fatores estudados foram o refinamento da malha (h), número de nós de suporte (n_s), a estrutura (distribuição) do *stencil*, e o parâmetro de forma c da *Mq*. Vários *stencils* foram testados. As Figs. 3.2 e 3.3 ilustram os *stencils* utilizados nesses trabalho. Note-se que nós externos ao domínio só não existirão para os *stencils* de primeira camada. Salienta-se também que não foi possível obter os coeficientes de ponderação para os *stencils* 16 e 18. O método de solução de equações algébricas lineares empregado não se mostrou suficientemente robusto nesses casos.

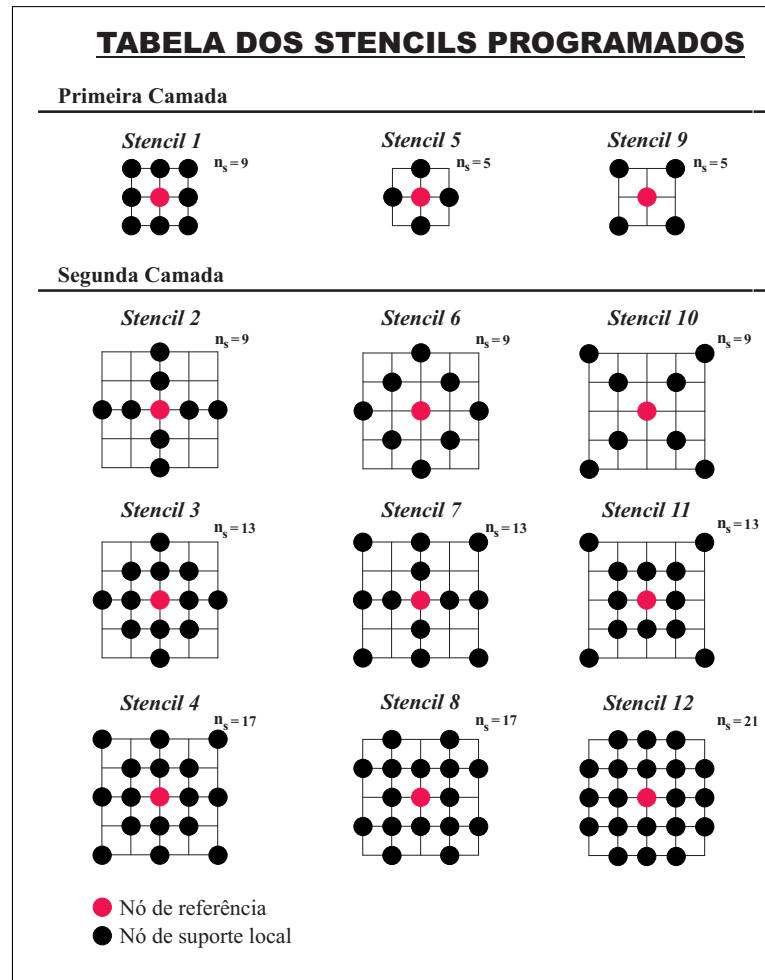


Figura 3.2: Número de nós locais, n_s , e estrutura dos *stencils* enfatizados nesse capítulo.

3.1.1 Variação do erro numérico com o tamanho da malha h para diversos parâmetros de forma

Este item destina-se a observar o comportamento do erro numérico relativo obtido pelo MQDL-FBR quando se varia o tamanho da malha, h , para diversos parâmetros de forma, c . Assim sendo, para cada valor do parâmetro de forma, c , as seguintes malhas ($n \times n$ onde $h = 1/(n - 1)$) foram estudadas: 21×21 , 41×41 , 61×61 , 81×81 , 101×101 e 121×121 . A solução analítica u_2 bem como o *stencil* 1 foram fixados para esse experimento. É importante ressaltar que a equação de Poisson é resolvida somente para os nós internos (N_{int}). Portanto, para esse *stencil* não é necessário a utilização de pontos fora do domínio. A Fig. 3.4 ilustra a situação descrita acima.

Nota-se que há uma diminuição do erro conforme o valor do parâmetro de forma vai aumentando. Entretanto, para valores maiores que 0,5 não ocorrem melhoras significativas. Também pode-se notar que para determinados valores de c e para um refinamento maior da malha o erro não é calculado. Isso deve-se ao critério de parada adotado na programação.

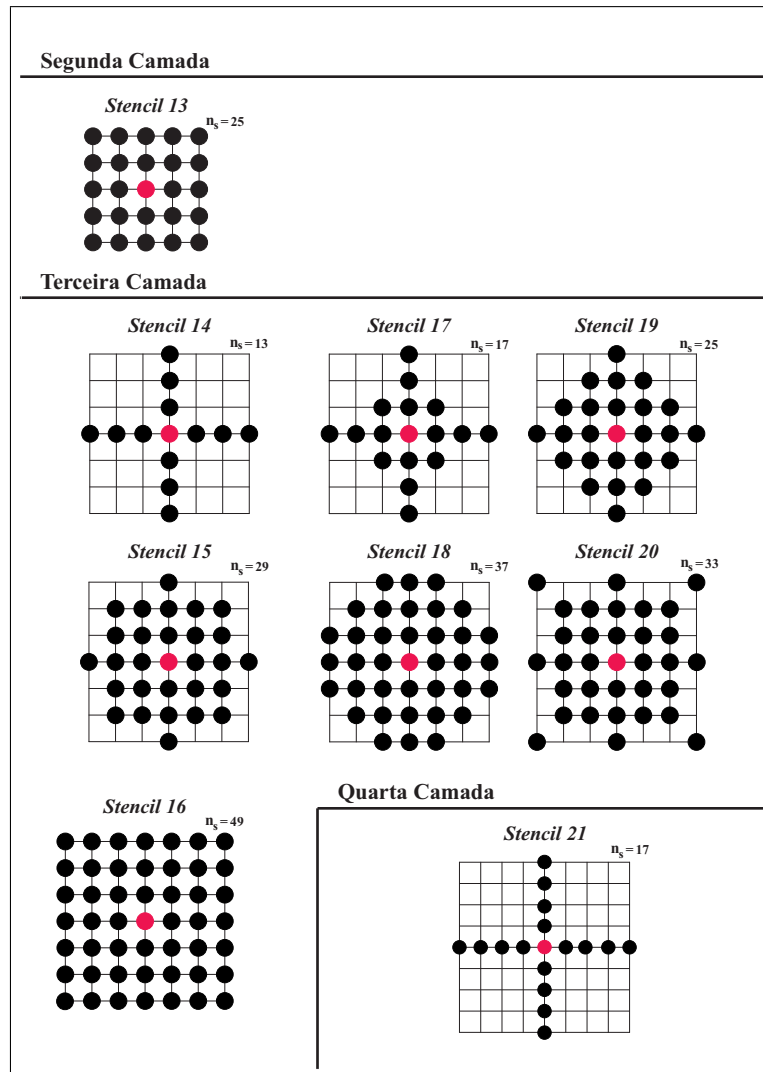


Figura 3.3: Número de nós locais, n_s , e estrutura dos *stencils* enfatizados nesse capítulo

Quando o inverso do número de condição da matriz das funções de base radial [A] era inferior ao limite de precisão dupla da máquina ($2,2 \times 10^{-16}$) que executava os cálculos, o programa era interrompido. Esse critério foi adotado porque existe um mal-condicionamento da matriz [A] quando os valores de c aumentam e a malha é refinada.

De forma análoga ao procedimento anterior, o erro relativo foi obtido para a função u_1 . Pode-se notar na Fig. 3.5 que quase não há diferença em comparação com os resultados obtidos utilizando a função u_2 . Nos 2 casos foi observado um comportamento de linhas retas e paralelas umas as outras. Isso implica que possuem a mesma taxa de convergência, e que ainda essa taxa com relação ao tamanho da malha h é independente da função solução adotada. Ding *et al.* (2005) também observaram esse comportamento e afirmaram que o MQDL-FBR realiza a chamada super convergência, isto é, a estimativa do erro é da ordem de $O(h^l)$, $l > 1$. Para o *stencil* 1 observa-se $l \approx 1,9$, isto é, uma convergência quase quadrática.

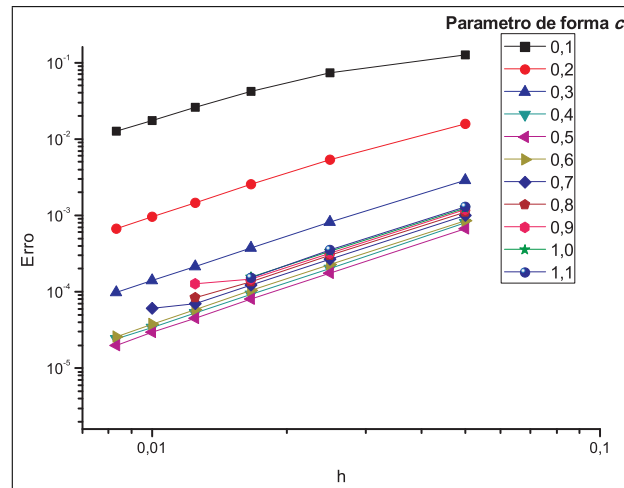


Figura 3.4: Erro relativo obtido para alguns valores de c variando a malha para a função u_2 para o *stencil* 1

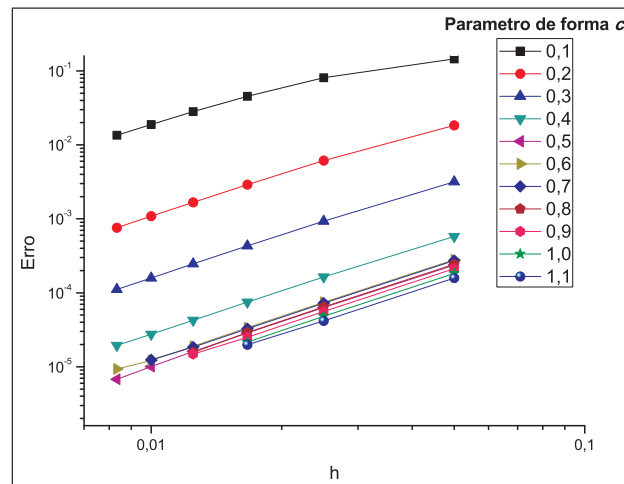


Figura 3.5: Erro relativo obtido para alguns valores de c variando a malha para a função u_1 para o *stencil* 1

3.1.2 Variação do erro numérico com o parâmetro de forma c para diversas malhas

O comportamento do erro numérico relativo obtido pelo MQDL-FBR com a variação do parâmetro de forma, c , é analisado nesta seção. Assim sendo, para os mesmos tamanhos de malha da seção anterior, variou-se o parâmetro de forma num intervalo de $0, 1 \leq c \leq 2, 0$ com incremento de $0, 1$. O *stencil* 1, de nove pontos, foi fixado nesse experimento.

As Figs. 3.6 e 3.7 mostram os resultados obtidos. Pode-se notar que, para cada função, a tendência de variação do erro relativo $\|\varepsilon\|$ independe do tamanho da malha. Para a função solução u_1 (Fig. 3.6) é observada uma mudança na inclinação da curva quando o parâmetro de forma c está em torno de $0,5$. Esse comportamento também é observado para a função solução

u_2 (Fig. 3.7) onde há uma mudança na inclinação da curva em torno de 0,5; entretanto, para essa solução $c \cong 0,5$ é um valor ótimo. Já para a u_1 os valores de c ótimos aparentemente tendem a infinito. Esses resultados estão de acordo com os estudos teóricos de Bayona *et al.* (2010) e corroboram o fato da existência de um c ótimo independente de h . Sabe-se por Fornberg e Driscoll (2002) e Fornberg *et al.* (2004) que quando c tende ao infinito, os valores dos coeficientes de ponderação tendem a ser os mesmos valores clássicos do Método de Diferenças Finitas (MDF). Essa tendência foi de fato verificada durante os teste numéricos realizados. Portanto, a Fig 3.7 mostra claramente que, dependendo da solução, é possível encontrar valores de c que tornam os resultados obtidos pelo MQDL-FBR melhores que pelo MDF.

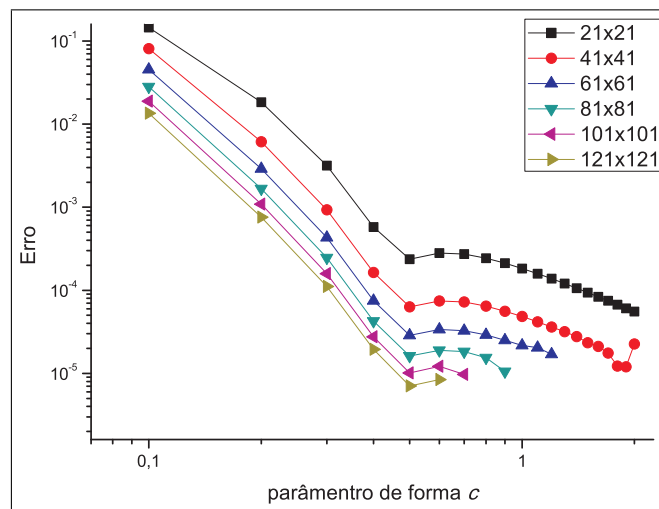


Figura 3.6: Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para a função u_1

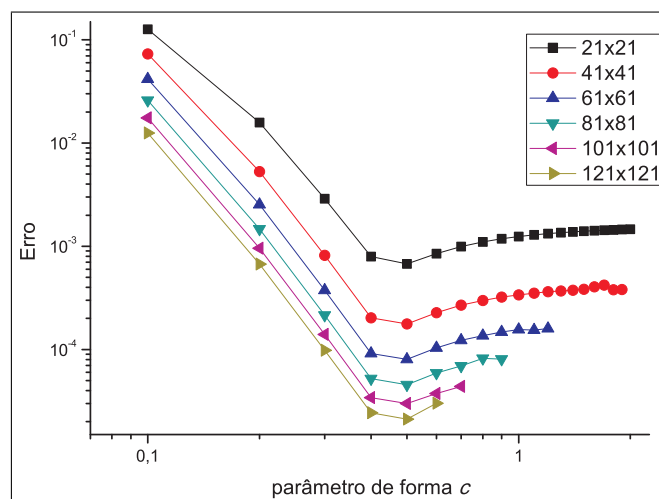


Figura 3.7: Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para a função u_2

Os resultados do erro relativo para a função u_3 (3.8) são curvas suaves onde não se verificam mudanças importantes na inclinação para a faixa de c pesquisada. Esse fato está ligado

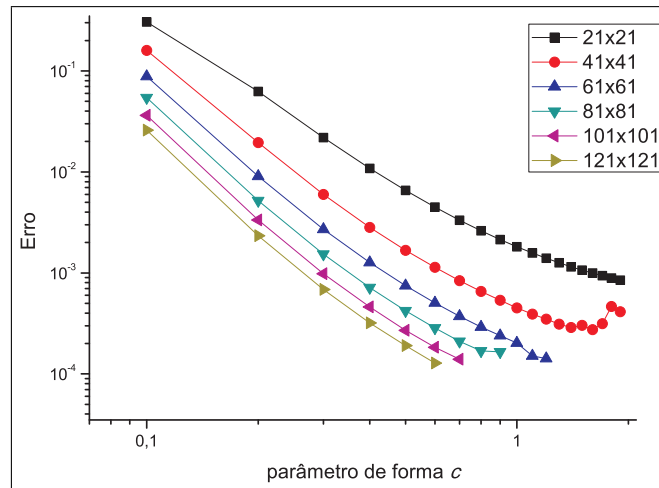


Figura 3.8: Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para a função u_3

a natureza da função adotada. Enquanto u_1 e u_2 são funções polinomiais, u_3 é uma função trigonométrica. Aparentemente, a tendência de variação do erro com c também independe de h ; entretanto, não é possível avaliar se os valores ótimos de c são finitos ou não.

3.1.3 Variação do erro numérico com o parâmetro de forma c para diversos *stencils*

Para verificar a influência dos *stencils* frente à variação do parâmetro de forma, fixou-se a malha de 41×41 pontos e variou-se o parâmetro de forma no intervalo $0,06 \leq c \leq 2,00$ com o incremento de $0,02$ para a função analítica u_2 .

A Fig. 3.9 mostra o erro relativo com a variação do parâmetro de forma c para os *stencils* da primeira camada. O *stencil* 1 possui $n_s = 9$, os *stencils* 5 e 9 $n_s = 5$ nós e todos são estruturalmente diferentes. Como a equação de Poisson é resolvida somente para os pontos internos à fronteira, os *stencils* da primeira camada não usam pontos fora do domínio. Pode-se notar que tanto o número de pontos do *stencil* quanto sua distribuição influenciam no erro numérico e também no valor do c ótimo. Os *stencils* 5 e 9 têm o mesmo número de pontos, mas a distribuição mais densa do *stencil* 5 o favorece em relação ao *stencil* 9. O *stencil* 1, por sua vez, povoa totalmente a primeira camada e atinge os melhores resultados. Note-se que o parâmetro de forma aumenta com a precisão do *stencil* nesse caso.

A Fig. 3.10 compara o *stencil* 1 de primeira camada com os *stencils* 2 e 3 de segunda camada. Para os nós de referência mais próximos das fronteiras, os *stencils* 2 e 3 produzem certos nós fora do domínio, na segunda camada. Observa-se que há uma melhora significativa com o aumento da extensão do *stencil*, isto é, quando se compara o *stencil* 1 com o 2 ou 3. Entretanto, nota-se que quase não há diferença ao se comparar os *stencils* 2 e 3, que possuem 9

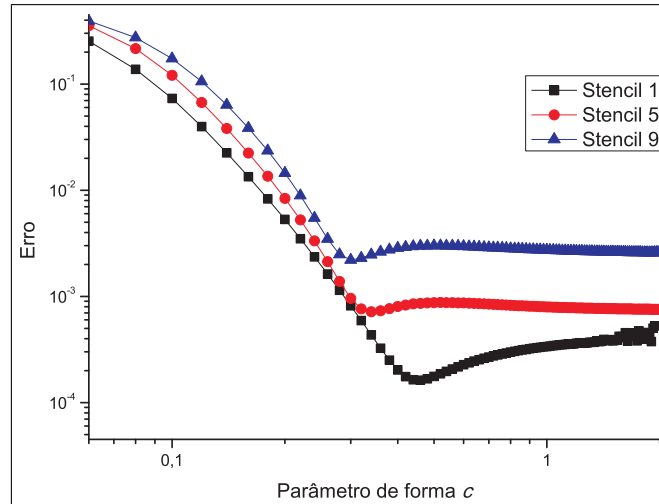


Figura 3.9: Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para os *stencils* de primeira camada

e 13 nós, respectivamente. Esse fato caracteriza uma maior dependência do erro com a extensão do *stencil* do que com a quantidade de nós locais utilizados. Verifica-se também que os valores de c ótimo para os *stencils* 2 e 3 são significativamente maiores que para o *stencil* 1. No caso dos *stencils* 2 e 3, observa-se ainda a ocorrência de instabilidades numéricas para valores de c maiores que 1. Esse comportamento se deve ao mal-condicionamento da matriz usada no cálculo dos coeficientes de ponderação, o que torna irregular a evolução do erro numérico com o aumento de c .

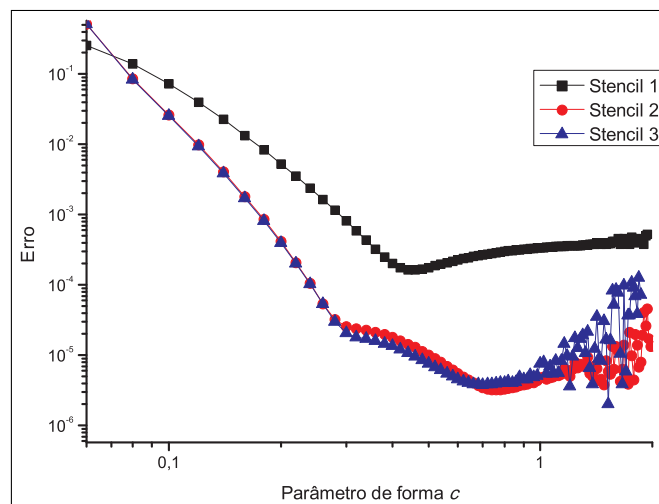


Figura 3.10: Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para alguns *stencils* de primeira camada e segunda camada

Para comparar os *stencils* da segunda camada, as Figs. 3.11 e 3.12 foram traçadas. A primeira figura é composta pelos *stencils* 2 ($n_s = 9$), 3 ($n_s = 13$), 4 ($n_s = 17$), 6 ($n_s = 9$) e 7 ($n_s = 13$). Pode-se notar que o *stencil* 6, apesar de ter o mesmo número de pontos que

o *stencil* 2, apresentou o pior resultado. Isso ocorre porque a estrutura do *stencil* 6 possui lacunas, o que equivale ao uso de uma malha menos refinada que a efetivamente utilizada. Para os demais *stencils* da figura, nota-se desempenhos similares, apesar das variações de estrutura e distribuição dos pontos. Observam-se novamente irregularidades na evolução do erro numérico para valores relativamente altos de c (exceto para o *stencil* 6).

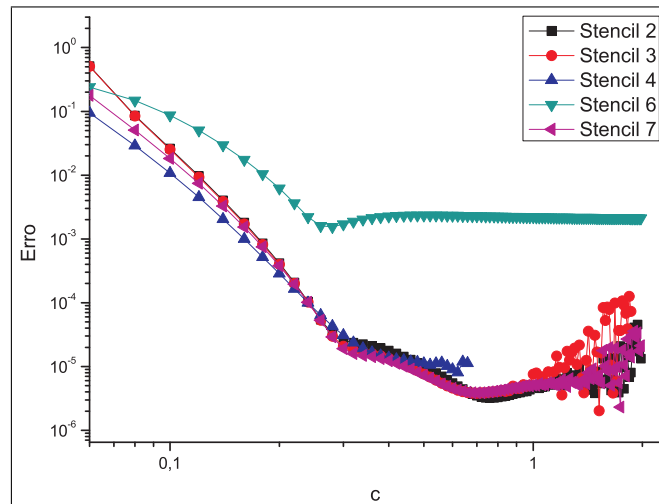


Figura 3.11: Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para alguns *stencils* de segunda camada

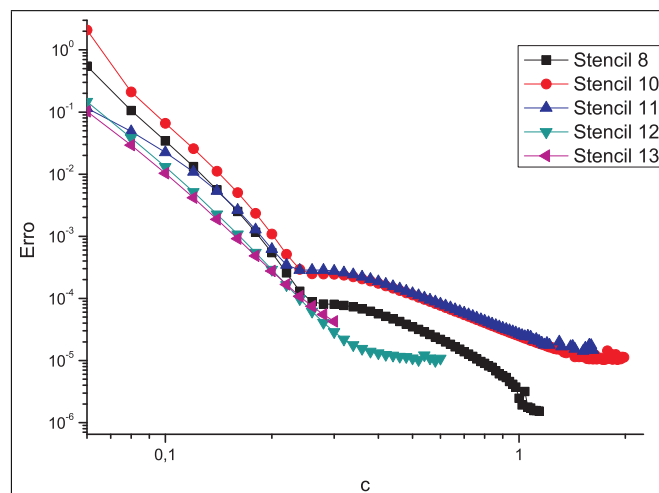


Figura 3.12: Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para alguns *stencils* de segunda camada

Na Fig. 3.12 mostram-se os resultados para os demais *stencils* de segunda camada: *stencil* 8 ($n_s = 17$), 10 ($n_s = 9$), 11 ($n_s = 13$), 12 ($n_s = 21$) e 13 ($n_s = 25$). Para a maioria dos *stencils*, o critério do número de condição da matriz $[A]$ fez com que a solução não fosse obtida para valores de c acima de um certo valor. Constatou-se que isso ocorre quando

se aumenta o número de pontos no suporte local tornando a matriz $[A]$ mal condicionada. O único *stencil* que possibilitou resultados para c próximo de 2,00 foi o *stencil* 10 que tem o menor número de pontos de suporte.

Comparando-se todos os resultados para os *stencils* de segunda camada (Figs. 3.11 e 3.12), pode-se concluir que, em geral, não é vantajoso utilizar *stencils* mais complexos que o *stencil* 2. Além disso, é recomendável se trabalhar com valores de c menores que 1 para se evitar instabilidades.

Na Fig. 3.13 estão apresentados resultados para os *stencils* de terceira camada. Observa-se uma diminuição consistente do erro com relação aos *stencils* das outras camadas estudadas anteriormente, exceto com o *stencil* 19. Nota-se ainda que quase não há diferença em relação ao erro entre os *stencils* 14 ($n_s = 13$), 15 ($n_s = 29$) e 17 ($n_s = 17$). Isso reforça ainda mais o fato da distribuição de nós do *stencil* ser mais relevante que o número de nós. Aumentar de forma arbitrária o número de nós no *stencil* pode piorar sensivelmente os resultados (caso do *stencil* 19), além de aumentar o mal-condicionamento da matriz $[A]$, produzindo instabilidades para valores de c relativamente baixos.

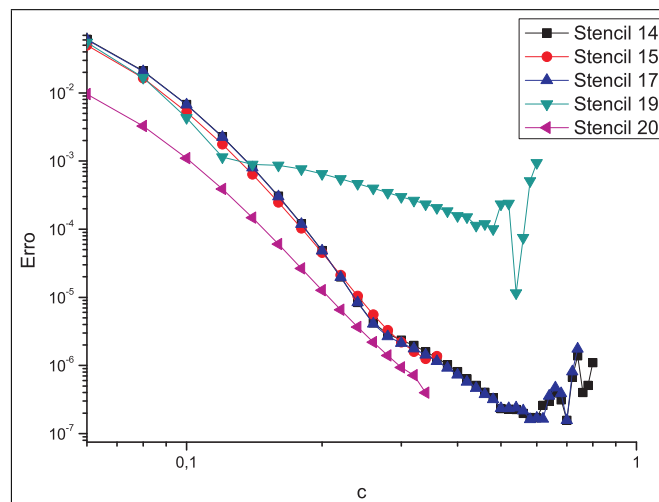


Figura 3.13: Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para alguns *stencils* de terceira camada

Boas relações custo/benefício (número de nós/desempenho numérico) foram verificadas com os *stencils* 2, 14 e 21, para segunda, terceira e quarta camadas respectivamente. Trata-se daqueles *stencils* em forma de cruz que captam melhor as variações nas direções x e y . O *stencil* 1, compacto de 9 nós, também apresentou resultados funcionais satisfatórios, até mais que o *stencil* 5, no caso de primeira camada. A Fig. 3.14 ilustra o desempenho desses *stencils*. Pode-se notar que, conforme se aumenta a extensão do *stencil* de modo consistente melhores resultados se obtém. Entretanto, o aumento consistente da extensão exige um aumento no número de pontos do *stencil*, o que implica na piora do condicionamento da matriz $[A]$ e no

consequente aparecimento de instabilidades para menores valores de c . Eventualmente, torna-se impossível detetar valores ótimos de c (caso dos *stencils* 14 e 21 na Fig. 3.14).

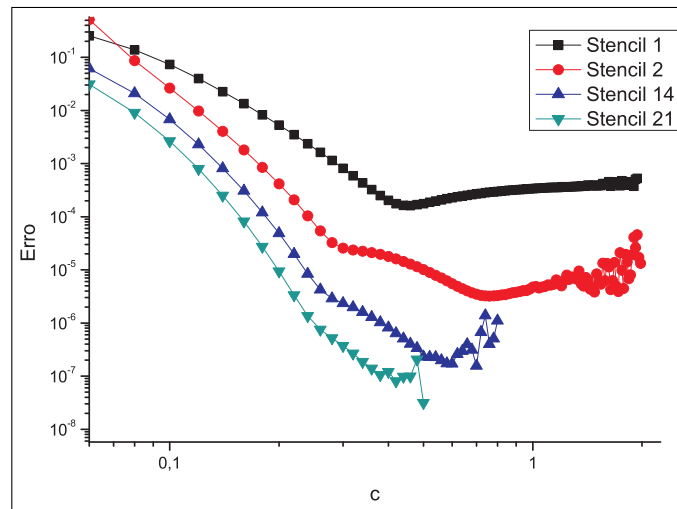


Figura 3.14: Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma c para os *stencils* mais extensos de cada camada e o *stencil* 1 de primeira camada

3.1.4 Variação do erro numérico com o tamanho da malha h para diversos *stencils*

Neste item, resultados são apresentados mostrando o efeito conjunto do refinamento de malha e da estrutura do *stencil*. O valor de c foi fixado em 0,40. A solução analítica adotada foi a u_2 .

A Fig. 3.15 mostra os resultados para os *stencils* 1, 2 e 3 que serão utilizados para a solução dos problemas físicos dos Capítulos 4 e 5. Verifica-se que o *stencil* 2 (de segunda camada) produz resultados significativamente melhores que o *stencil* 1 (de primeira camada), embora ambos tenham o mesmo número de pontos ($n_s = 9$). Isso ocorre porque os *stencils* 2 é mais extenso que o *stencil* 1, captando melhor as variações da solução. Nota-se também a melhora pouco significativa do *stencil* 3 ($n_s = 13$) em relação ao *stencil* 2, ambos de segunda camada. É mais vantajoso aumentar a extensão do *stencil* do que o número de pontos (desde que não ocorram problemas sérios de instabilidade).

Observa-se que o aumento da extensão do *stencil* não só melhora a precisão dos resultados mas também a taxa de convergência com o refinamento da malha. A Fig. 3.16 ilustra esse comportamento para um conjunto de cinco *stencils*. A taxa de convergência ($\|\varepsilon\| \simeq O(h^l)$) foi calculada nos intervalos estáveis de cada *stencil*, obtendo-se os resultados aproximados da Tabela 3.1.

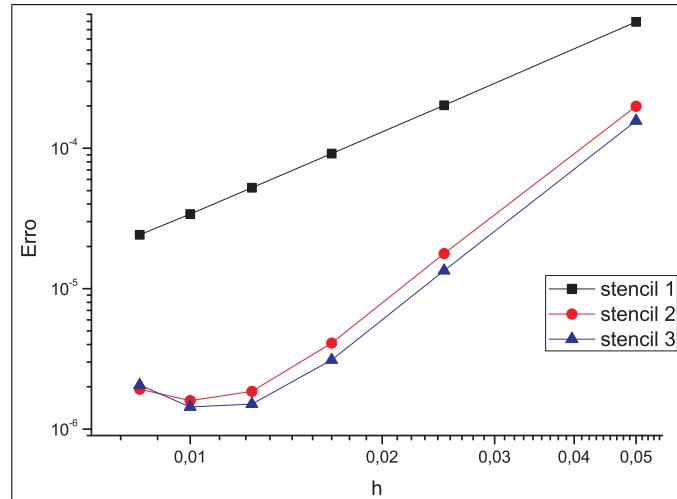


Figura 3.15: Erro relativo variando o tamanho da malha para os *stencils* 1, 2 e 3

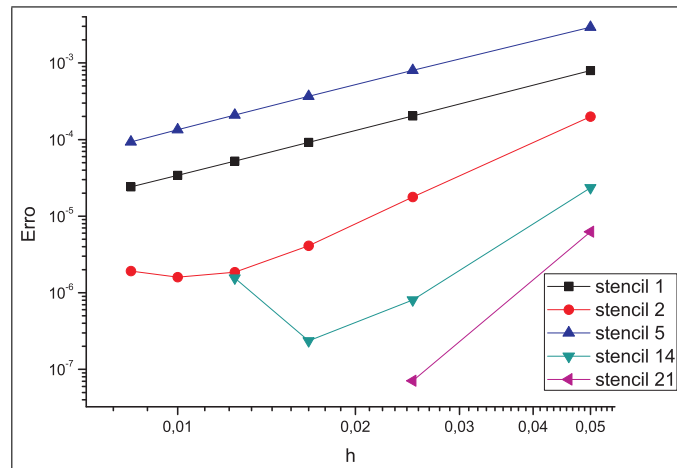


Figura 3.16: Erro relativo variando o tamanho da malha para outros *stencils*

Note-se que o refinamento de malha para um dado *stencil* é limitado pela instabilidade oriunda do mal-condicionamento da matriz $[A]$. A superação dessas limitações depende de estudos além do escopo do presente trabalho.

Tabela 3.1: Taxa de convergência para alguns *stencils*

<i>stencil</i>	1 (1 ^a camada)	5 (1 ^a camada)	2 (2 ^a camada)	14 (3 ^a camada)	21 (4 ^a camada)
<i>l</i>	1,95	1,93	3,37	4,19	6,46

3.2 Teste do MQDL-FBR para equação do tipo Poisson com derivadas de primeira ordem

Para testar o MQDL-FBR na aproximação de derivadas de primeira ordem, foi adicionado a equação de Poisson um termo não-linear para essa finalidade. A equação utilizada está representada abaixo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y) \quad (3.13)$$

Para os testes numéricos foi adotada a solução analítica u_1 e também a função retirada de Shu et al. (2003) (Fig. 3.17) que tem a seguinte forma:

$$u_p(x, y) = \frac{\frac{5}{4} + \cos(5, 4y)}{6 + 6(3x - 1)^2} \quad (3.14)$$

A Eq. 3.10 é resolvida pelo método SOR em que trata-se o termo não-linear com primeiras derivadas de modo explícito. Assim, a iteração de Gauss-Seidel do SOR será:

$$u_i^{*it+1} = \frac{f_i - u_i^{it} \sum_{k=1}^{n_s} (w_{i,k}^{1x} + w_{i,k}^{1y}) u_k^{it} - \sum_{k=2}^{n_s} (w_{i,k}^{2x} + w_{i,k}^{2y}) u_k^{it}}{w_{i,1}^{2x} + w_{i,1}^{2y}} \quad (3.15)$$

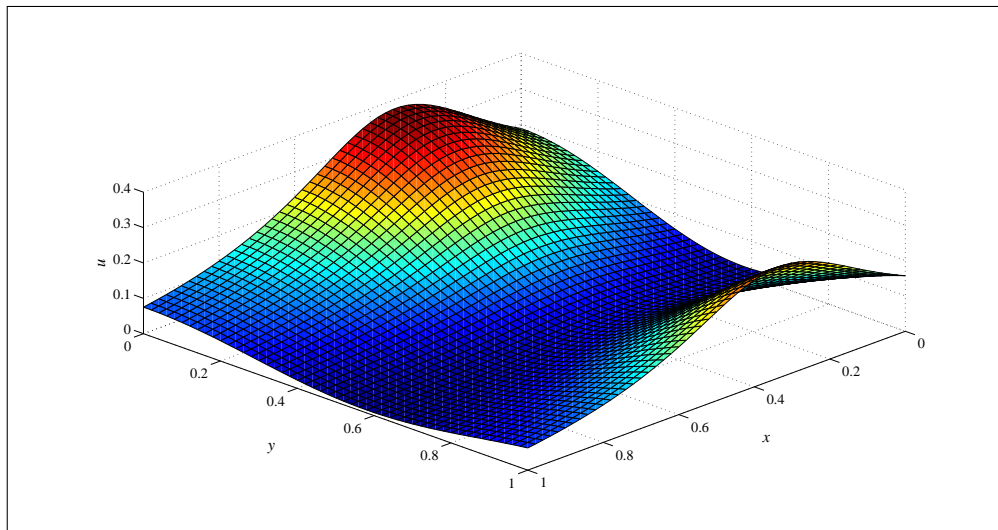


Figura 3.17: Vista em perspectiva da função solução u_p

Os testes numéricos com o MQDL-FBR são análogos aos feitos com a equação de Poisson. Primeiramente, fixou-se a malha de 41×41 e variou-se o parâmetro de forma c no intervalo de $0,06 \leq c \leq 2,00$ com incremento de $0,02$ para alguns *stencils* escolhidos. As duas funções analíticas foram utilizadas para a obtenção dos resultados. As Figs. 3.18 e 3.19 mostram esses

resultados.

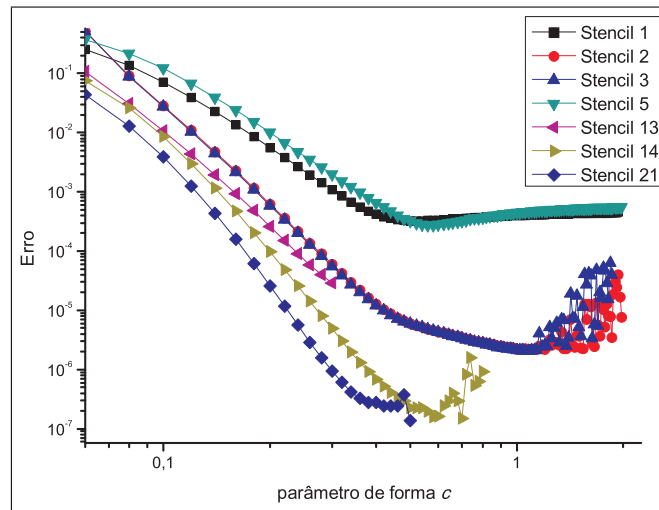


Figura 3.18: Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma, c , para alguns *stencils* para a função analítica u_p .

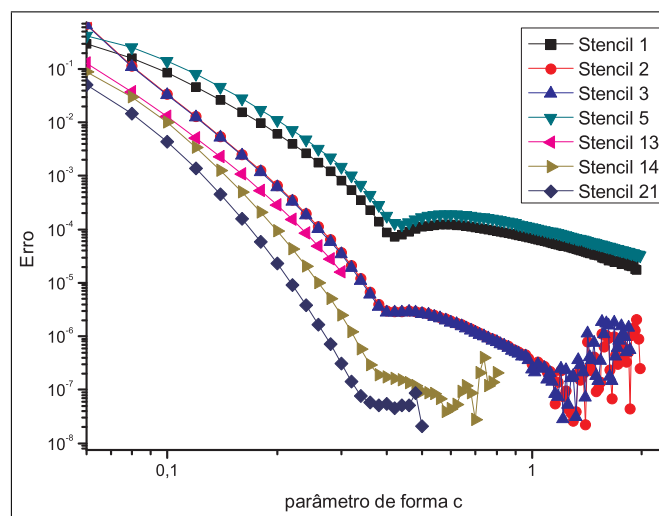


Figura 3.19: Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma, c , para alguns *stencils* para a função analítica u_1 .

Pode-se notar a dependência dos valores ótimos de c em relação à estrutura dos *stencils* (distribuição e número de pontos) bem como a influência da função solução nesses valores. Alguns *stencils*, como o 1 e o 5, para a função u_p , possuem um valor ótimo de c finito. Já para a função u_1 , existe também uma mudança na inclinação da curva, mas o valor de c ótimo tende ao infinito. Para ambas as funções u_1 e u_p , ocorrem instabilidades numéricas acima de um certo valor de c nos casos dos *stencils* 2, 3, 14 e 21. No caso do *stencil* 13, isso não chegou a ocorrer devido ao critério de interrupção do programa. Outro fato interessante é que os *stencils* mais extensos continuam produzindo melhores resultados, mesmo com a influência do termo

não-linear de primeiras derivadas na equação.

Para a verificação da influência do parâmetro de forma, c , no erro numérico em conjunto com o refinamento de malha, fixou-se o *stencil* 1 e variou-se o parâmetro de forma, c , no intervalo de $0,06 \leq c \leq 2,00$ com incremento de $0,02$ para as malhas de 21×21 , 41×41 , 61×61 , 81×81 , 101×101 e 121×121 pontos. Os resultados para as funções soluções u_p e u_1 estão mostradas nas Figs. 3.20 e 3.21, respectivamente.

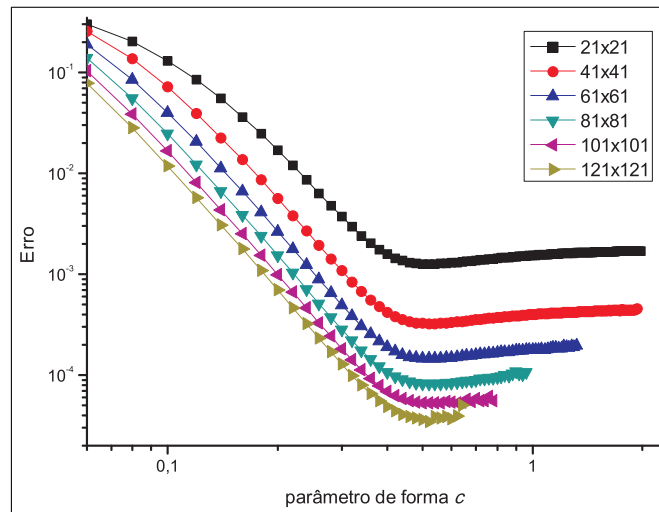


Figura 3.20: Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma, c , para a função u_p

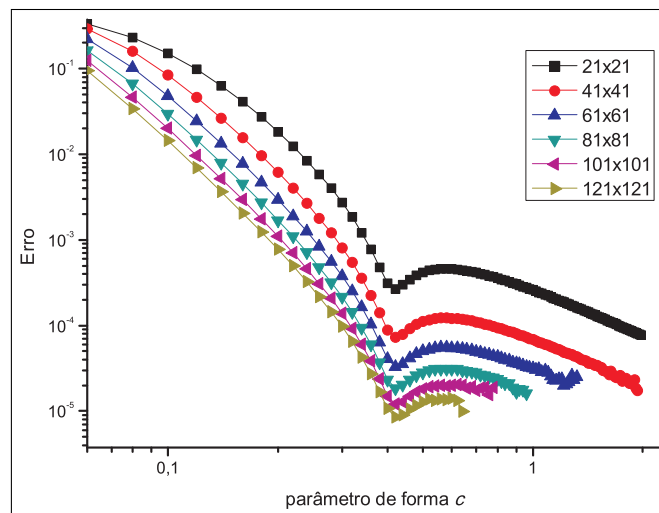


Figura 3.21: Erro relativo obtido variando o parâmetro de forma, c para a função u_1

As figuras mostram que, para cada função-solução, a tendência de variação do erro relativo independe da malha testada. Para a função-solução u_p (Fig. 3.20) uma mudança na inclinação da curva é observada quando o parâmetro de forma c está entre $0,4$ e $0,5$. Nesse intervalo ocorre o valor ótimo de c . Sabe-se que, no limite de c tendendo ao infinito, os coeficientes de ponderação do MQDL-FBR tendem aos valores do MDF (Fornberg e Driscoll (2002);

Fornberg *et al.* (2004)). Portanto, é claramente possível encontrar valores de c que tornam a solução por MQDL-FBR melhores que por MDF mesmo adicionando os termos não-lineares de primeiras derivadas. Comportamento análogo é observado para a função-solução u_1 (Fig. 3.21), onde ocorre uma mudança na inclinação da curva para c em torno de 0,4; todavia, os menores erros ocorrem para c tendendo ao infinito. Assim como para a equação de Poisson, os resultados das Figs. 3.20 e 3.21 estão de acordo com os estudos teóricos de Bayona *et al.* (2010) e corroboram o fato de que os valores ótimos de c independem de h .

A influência do termo não-linear na solução da equação (3.10) usando o MQDL-FBR pode ser vista comparando resultados deste item com resultados correspondentes para a equação de Poisson. Fixando a malha em 41×41 , o *stencil* 1, e variando o parâmetro de forma c para as funções soluções u_1 e u_p tem-se os resultados apresentados na Fig. 3.22. Nota-se que as diferenças não são significativas.

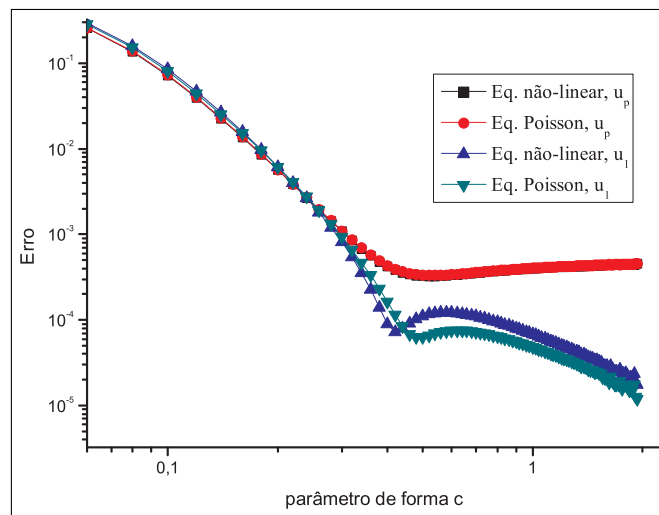


Figura 3.22: Influência do termo não-linear na solução da equação utilizando o MQDL-FBR.

De modo geral, a inclusão do termo não-linear de primeiras derivadas não alterou significativamente o comportamento do erro numérico. Note-se que esse termo simula um efeito convectivo, provavelmente baixo, introduzido em uma equação de difusão com termo fonte (Poisson). Os resultados obtidos estimulam a aplicação do MQDL-FBR em problemas de escoamento de fluidos com efeitos convectivos.

Capítulo 4

Problema de Convecção Forçada em uma Cavidade Quadrada

Este capítulo destina-se a aplicar o MQDL-FBR em um problema físico. Trata-se de um problema de hidrodinâmica incompressível bidimensional, de convecção forçada, em um domínio quadrado. As equações que regem o movimento do fluido em termos da função corrente e da vorticidade são apresentadas e discutidas. As condições iniciais e de contorno são devidamente estabelecidas para esse problema. Em seguida, os resultados são apresentados, discutidos e comparados com alguns resultados da literatura.

4.1 Formulação do problema físico e discretização

O problema de convecção forçada em uma cavidade quadrada com uma superfície em movimento, também conhecido como problema da caixa de sapato, é um *benchmark* já bem utilizado para verificação de resultados. Basicamente, é um problema físico em que a caixa, preenchida por um fluido, é submetida em sua superfície superior a uma velocidade constante diferente de zero. A abordagem aqui exposta visa resolver o problema da cavidade quadrada utilizando o MQDL-FBR com uma malha estruturada uniforme e para os mesmos *stencils* 1, 2 e 3 do Capítulo 3.

As equações que regem o movimento do fluido, bem como as considerações feitas acerca do problema de convecção forçada estão no Apêndice B. Então, as equações de conservação adimensionalizadas que governam o movimento do fluido dentro da cavidade, dadas pela formulação vorticidade, ω , e função corrente, ψ , assumem a seguinte forma:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = \omega \quad (4.2)$$

sendo Re o número de Reynolds. As velocidades U e V são obtidas através da função corrente como:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad (4.3)$$

$$V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (4.4)$$

As condições iniciais ($\tau = 0$) são dadas por

$$\omega = \psi = 0, \quad \text{quando } \tau = 0 \quad (4.5)$$

e as condições de contorno ($\tau > 0$) são dadas por

$$\psi = 0, \quad \text{para } Y = 1, \quad 0 \leq X \leq 1 \quad (4.6)$$

$$\psi = 0, \quad \text{para } Y = 0, \quad 0 \leq X \leq 1 \quad (4.7)$$

$$\psi = 0, \quad \text{para } X = 0, \quad 0 \leq Y < 1 \quad (4.8)$$

$$\psi = 0, \quad \text{para } X = 1, \quad 0 \leq Y < 1 \quad (4.9)$$

A Fig. 4.1 ilustra o problema da cavidade quadrada e as condições de contorno utilizadas para obter a solução das equações pelo MQDL-FBR.

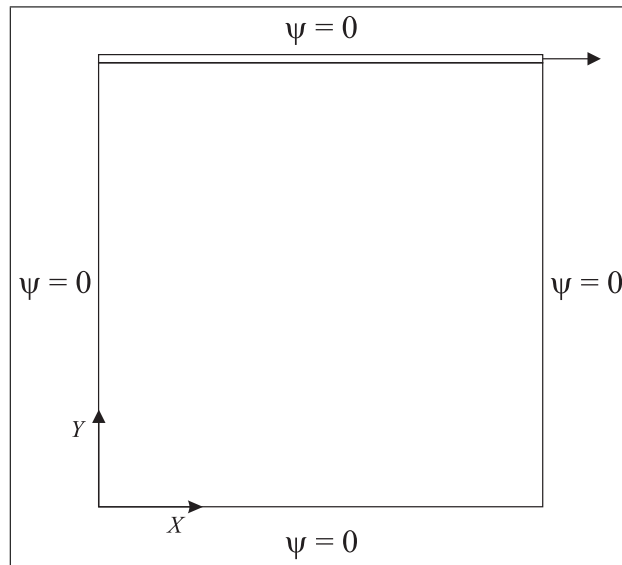


Figura 4.1: Cavidade quadrada e condições de contorno para o problema de convecção forçada.

As Eq. 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 colocadas em um ponto global i , aplicando-se o MQDL-FBR,

assumem as seguintes expressões discretizadas:

$$\frac{d\omega_i}{d\tau} = -U_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1X} \omega_i^k - V_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1Y} \omega_i^k + \frac{1}{Re} \left(\sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2X} \omega_i^k + \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2Y} \omega_i^k \right) \quad (4.10)$$

$$\sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2X} \psi_i^k + \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2Y} \psi_i^k = \omega_i \quad (4.11)$$

$$U_i = \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1Y} \psi_i^k \quad (4.12)$$

$$V_i = - \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1X} \psi_i^k \quad (4.13)$$

onde $w_{i,k}^{1X}$, $w_{i,k}^{1Y}$, $w_{i,k}^{2X}$ e $w_{i,k}^{2Y}$ representam os coeficientes de ponderação de primeiras e segundas derivadas com relação a X e Y respectivamente. Valores de uma função f_i são calculados diretamente para o nó i , enquanto f_i^k são valores da mesma função para cada nó k do suporte local do nó de referência i .

A equação de vorticidade (equação 4.10), dependente do tempo, foi resolvida usando o método explícito de Euler. Assim, para cada instante de tempo, o novo valor de vorticidade é calculado da seguinte forma:

$$\omega_i^{it+1} = \omega_i^{it} + \delta\tau \left\{ -U_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1X} \omega_i^k - V_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1Y} \omega_i^k + \frac{1}{Re} \left(\sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2X} \omega_i^k + \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2Y} \omega_i^k \right) \right\} \quad (4.14)$$

sendo $\delta\tau$ o incremento de tempo. Os valores do incremento de tempo foram ajustados em função da discretização espacial e dos números de Reynolds (Re) estudados. Procurou-se adotar valores relativamente altos para acelerar a convergência, mas suficientemente baixos de modo a evitar instabilidades numéricas.

A equação da função corrente, Equação de Poisson (equação 4.11), foi resolvida usando o método SOR. O valor de vorticidade (ω_i) utilizado foi dado a partir da Eq. 4.14. Portanto, a função corrente foi obtida por:

$$\psi_i^{it+1} = (1 - f_r) \psi_i^{it} + f_r \psi_i^{*it} \quad (4.15)$$

sendo f_r o parâmetro de relaxação. O valor f_r adotado foi o mesmo do Capítulo 3. ψ^* é obtido pelo processo iterativo de Gauss-Seidel por:

$$\psi_i^{*it+1} = \frac{\omega_i - \sum_{k=2}^{n_s} (w_{i,k}^{2X} + w_{i,k}^{2Y}) \psi_k^{it}}{w_{i,1}^{2X} + w_{i,1}^{2Y}} \quad (4.16)$$

A Fig. 4.2 estabelece os passos utilizados no programa, escrito em Fortran, para obtenção das soluções das equações de vorticidade e função corrente. A tolerância adotada para a solução da Eq. 4.2 por SOR foi de 10^{-8} . Logo, o total de passos de tempo (N_{pt}) em cada teste foi tal que o SOR fosse executado em apenas 1 iteração em uma boa quantidade de passos finais de tempo. Nessa situação, considera-se a convergência numérica a um estado de regime permante.

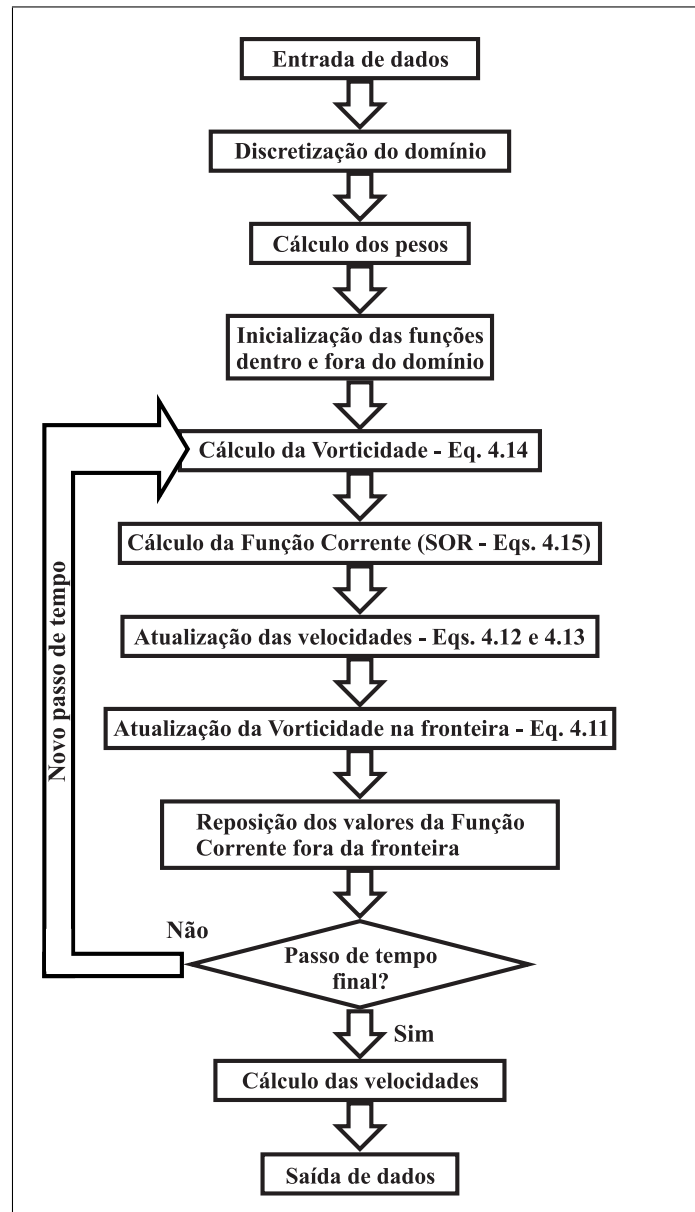


Figura 4.2: Fluxograma utilizado para obter as soluções do problema de convecção forçada

4.2 Tratamento dos nós fora do domínio e Resultados Numéricos

Para os experimentos numéricos, os valores do número de Reynolds (Re) testados foram 1, 10, 100 e 400. Para cada Re , o teste foi executado com um certo incremento de tempo e um número total de passos de tempo ($Re; \delta\tau; N_{pt}$): (1; 0,00001; 8000), (10; 0,0001; 8000), (100; 0,001; 10000), e (400; 0,002; 12000). Para fins de comparação, as situações de número de Reynolds 100 e 400 remetem-se às mesmas analisadas por Ghia *et al.* (1982) e Shu *et al.* (2005). O valor do parâmetro de forma foi fixado em 0,50. De acordo com os resultados apresentados no item 3.1.2, esse valor é bem razoável para se estudar todas as malhas e *stencils* de interesse. Foram testadas as mesmas malhas do Capítulo 3 e os *stencils* 1, 2 e 3 mostrados na Fig. 4.3.

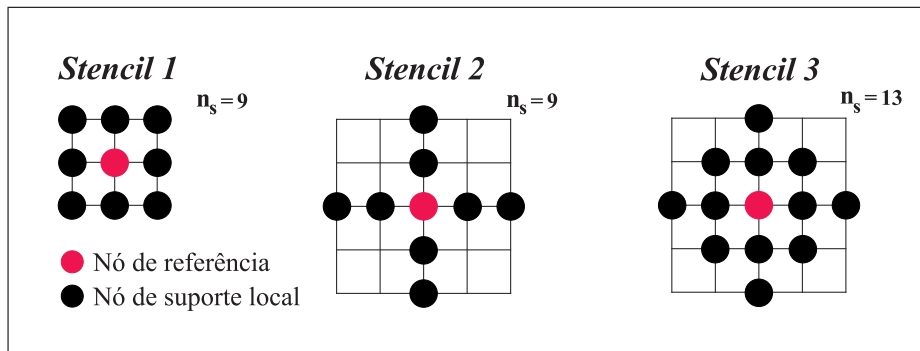


Figura 4.3: Número de nós locais e estrutura dos *stencils* enfatizados neste capítulo

A abordagem das condições adotadas fora do domínio da cavidade é um aspecto importante que deve ser explicado. A Fig. 4.4 ilustra a maneira como foi imposta a vorticidade fora do domínio, bem como a reposição dos valores de função corrente. Para simular a condição de não-escorregamento nas paredes estacionárias (paredes verticais e parede horizontal inferior) os valores de função corrente dos nós externos mais próximos da fronteira (ψ_e) foram iguados aos valores dos nós internos também mais próximos à parede (ψ_i) calculados no passo de tempo anterior. Assim, $\psi_e = \psi_i$. Para os *stencils* 2 e 3, os valores dos nós mais externos (ψ_{me}) foram iguados aos dos nós externos (ψ_e), isto é, $\psi_{me} = \psi_e$. Por outro lado, a reposição dos valores de função corrente para os nós externos à parede superior (ψ_{es}, ψ_{esm}), é feita de acordo com aproximações de diferenças finitas centrais:

$$\psi_{es} = 2hU + \psi_i \quad \text{como} \quad U = 1 \quad \Rightarrow \quad \psi_{es} = 2h + \psi_i \quad (4.17)$$

$$\psi_{esm} = 2hU + \psi \quad \text{como} \quad U = 1, \quad \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{esm} = 2h \quad (4.18)$$

Os valores de vorticidade para todos os nós externos ao domínio foram tomados como zero ($\omega_e = 0$). Já sua reposição na fronteira para o próximo passo de tempo foi feita com

a aproximação de $\nabla^2\psi$ pelo próprio MQDL-FBR (Eq. 4.11). A atualização dos valores de velocidade U e V para os nós internos também foram feitos pelo MQDL-FBR (Eq. 4.12 e 4.13).

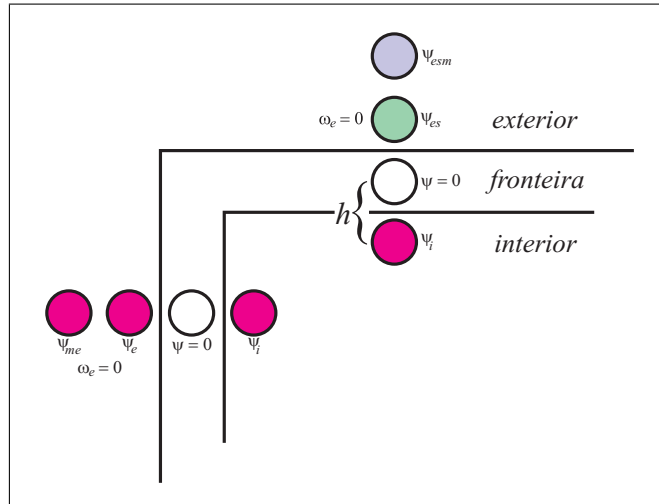


Figura 4.4: Valores de vorticidade e reposição da função corrente para os nós fora do domínio

A Fig. 4.5 ilustra os resultados para as linhas de corrente no regime permanente utilizando o *stencil* 1 para $Re = 1$, $Re = 10$ e $Re = 100$ com malha 61×61 , e $Re = 400$ com malha 101×101 .

As velocidades U e V nas linhas centrais vertical e horizontal da cavidade, respectivamente, foram destacados. Os gráficos dessas velocidades, obtidos por Ghia *et al.* (1982) e Shu *et al.* (2005), para $Re = 100$ e $Re = 400$, estão representados nas Fig. 4.6 e 4.7, respectivamente. Shu *et al.* (2005) utilizaram o MQDL-FBR sem malha para o interior da cavidade e na fronteira uma malha estruturada nas proximidades da fronteira. O número de pontos utilizados por Shu *et al.* (2005) foi de 4671 para $Re=100$ e 9573 para $Re = 400$. Ghia *et al.* (1982) utilizaram malhas de 129×129 para $Re = 100$ e 257×257 para $Re = 400$.

Os resultados obtidos pelo MQDL-FBR neste trabalho, estão mostrados nas Figs. 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11. Pode-se notar que, de $Re = 1$ para $Re = 10$ (Figs. 4.8 e 4.9), as curvas das velocidades não sofrem muita alteração. Para esses baixos números de Reynolds, observa-se que particularmente não há diferenças de resultados entre os *stencils* 1, 2 e 3.

Os resultados para $Re = 100$ e $Re = 400$ utilizando o MQDL-FBR (4.10 e 4.11) concordam bem com os resultados de Ghia *et al.* (1982). Para esses números de Reynolds mais altos, observa-se desvios um pouco mais acentuados entre as curvas quando se comparam os *stencils* adotados.

Não é possível, agora, afirmar que os *stencils* 2 e 3 produzem melhores resultados que o *stencil* 1. No Capítulo 3, as soluções analíticas eram impostas nos pontos fora do domínio, e a

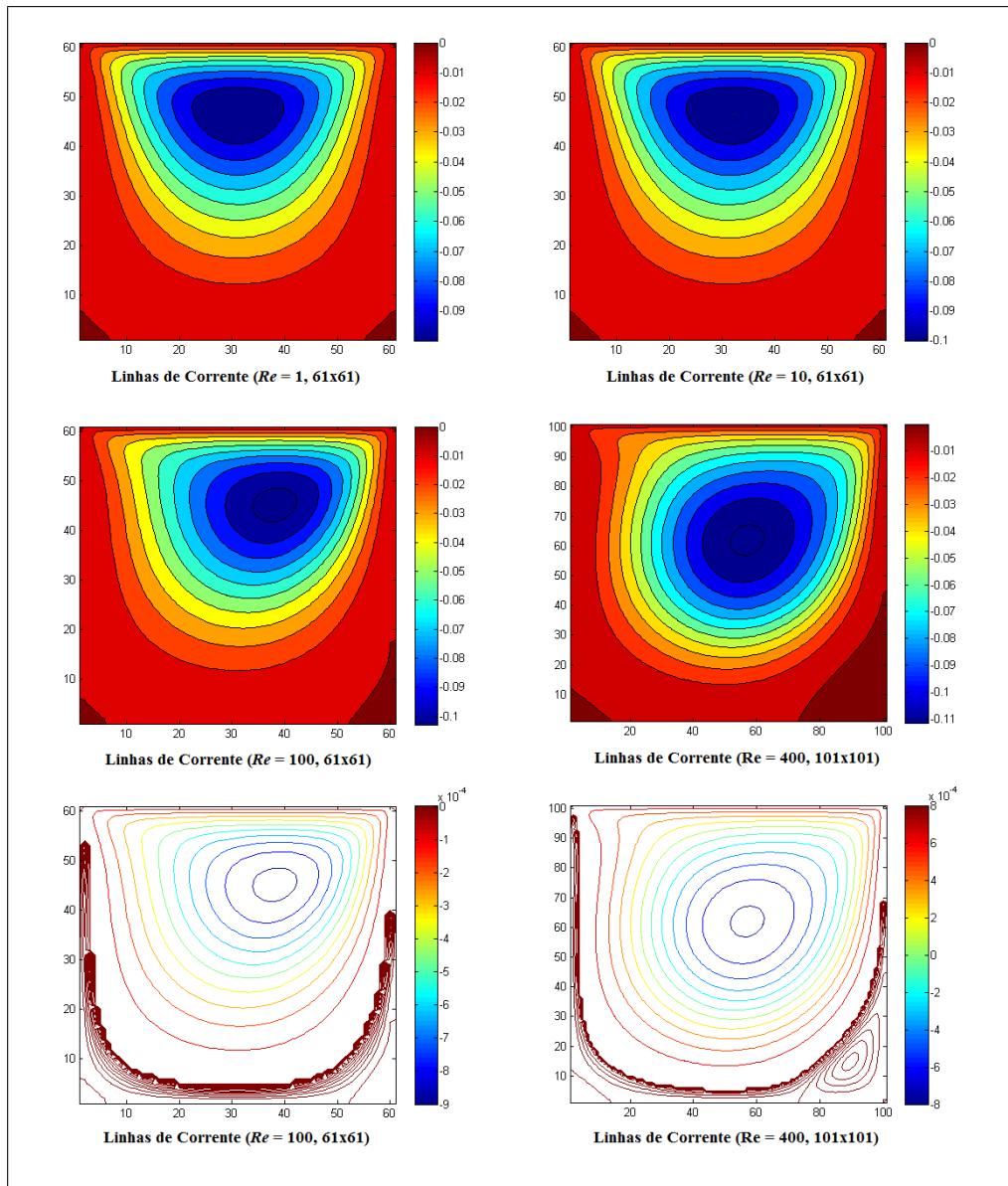


Figura 4.5: Linhas de corrente para o *stencil* 1

maior extensão dos *stencils* 2 e 3 resultava em maior precisão. Agora, no entanto, o tratamento adotado para avaliar as variáveis fora do domínio pode não produzir resultados completamente consistentes com a física do problema. De fato, as Figs. 4.12 e 4.13 para $Re = 100$ e $Re = 400$, respectivamente, mostram que o *stencil* 1 é o que melhor satisfaz as condições de não-eskorregamento nas paredes. Ocorre que o aumento da extensão do *stencil* exige informações muito precisas para um número maior de nós fora do domínio. Tratamentos alternativos para esses nós, que garantam a precisão necessária, constituem um tema a ser estudado.

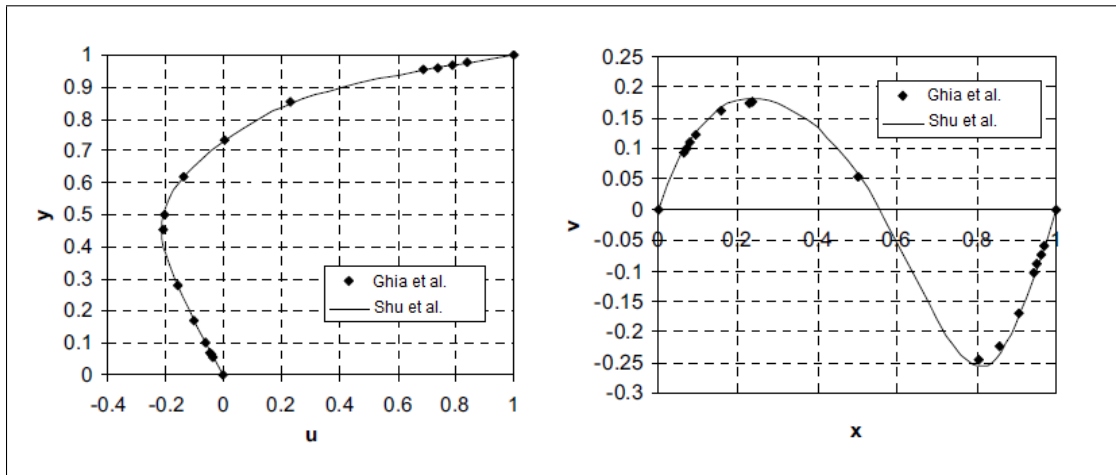


Figura 4.6: Resultados da literatura para $Re = 100$

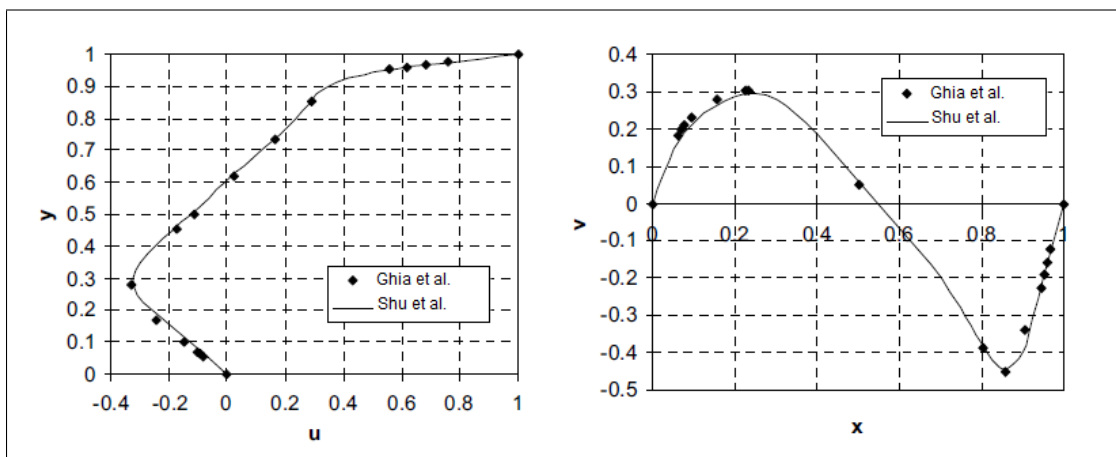


Figura 4.7: Resultados da literatura para $Re = 400$

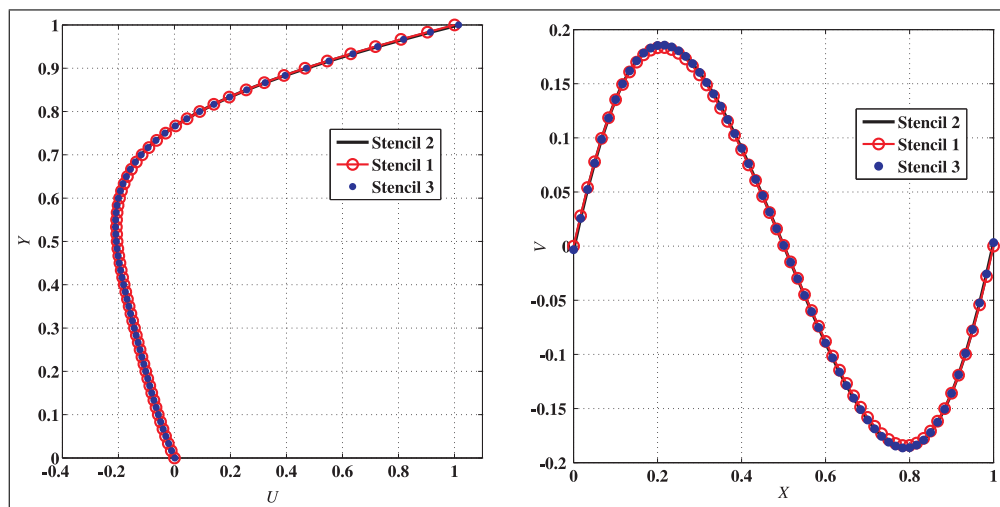


Figura 4.8: Resultados obtidos pelo MQDL-FBR para $Re = 1$

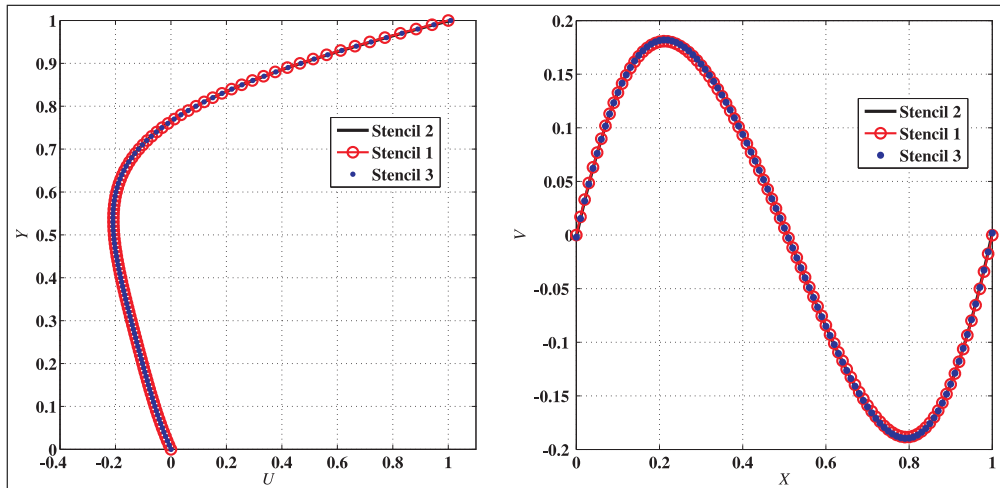


Figura 4.9: Resultados obtidos pelo MQDL-FBR para $Re = 10$

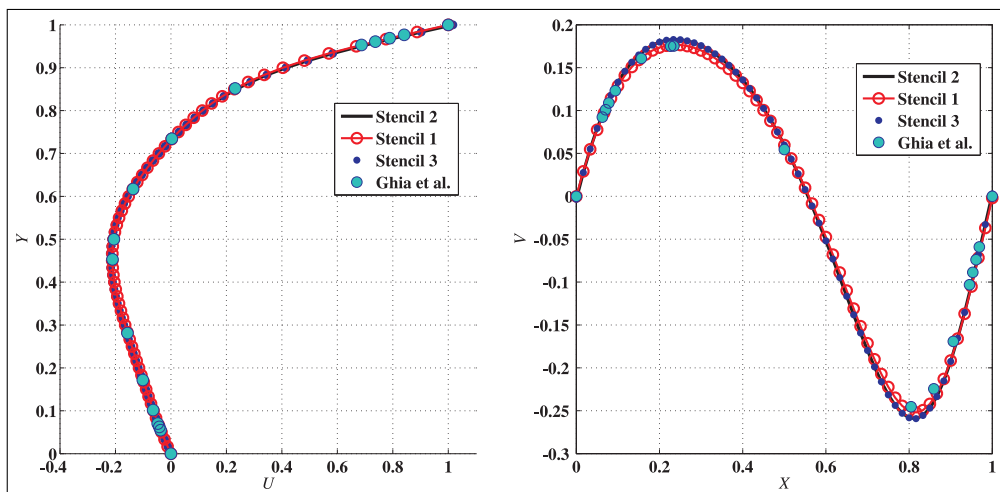


Figura 4.10: Resultados obtidos pelo MQDL-FBR para $Re = 100$

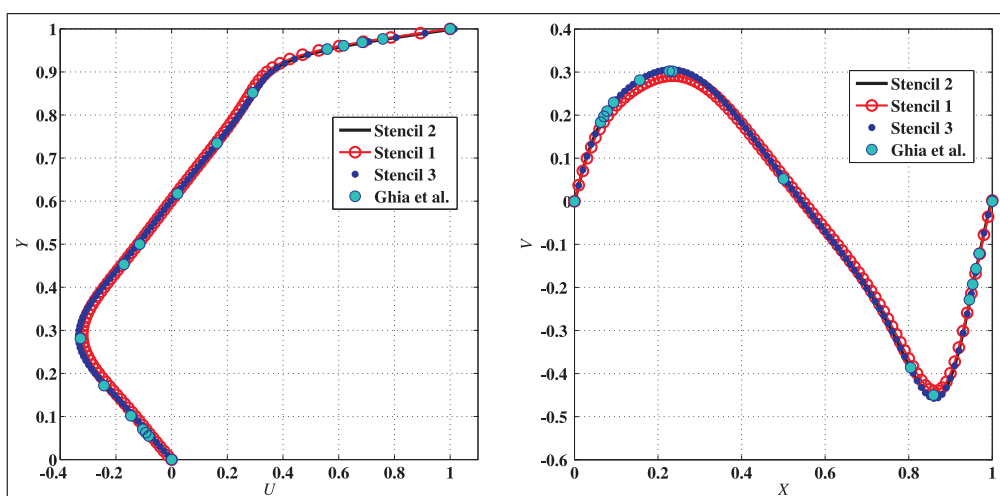


Figura 4.11: Resultados obtidos pelo MQDL-FBR para $Re = 400$

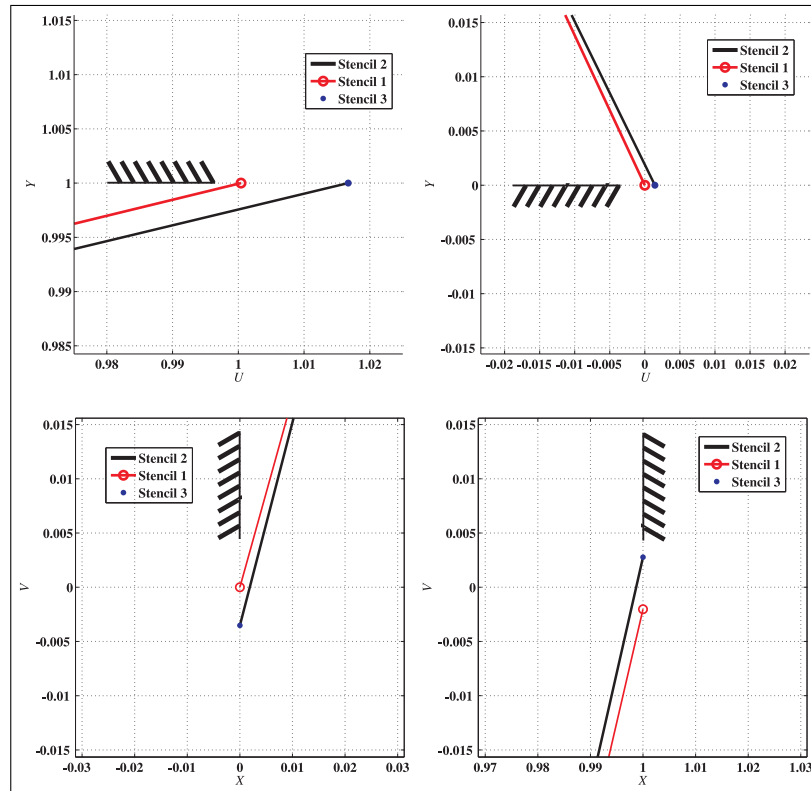


Figura 4.12: Ampliação dos gráficos da Fig. 4.9 nas proximidades das paredes ($Re=100$)

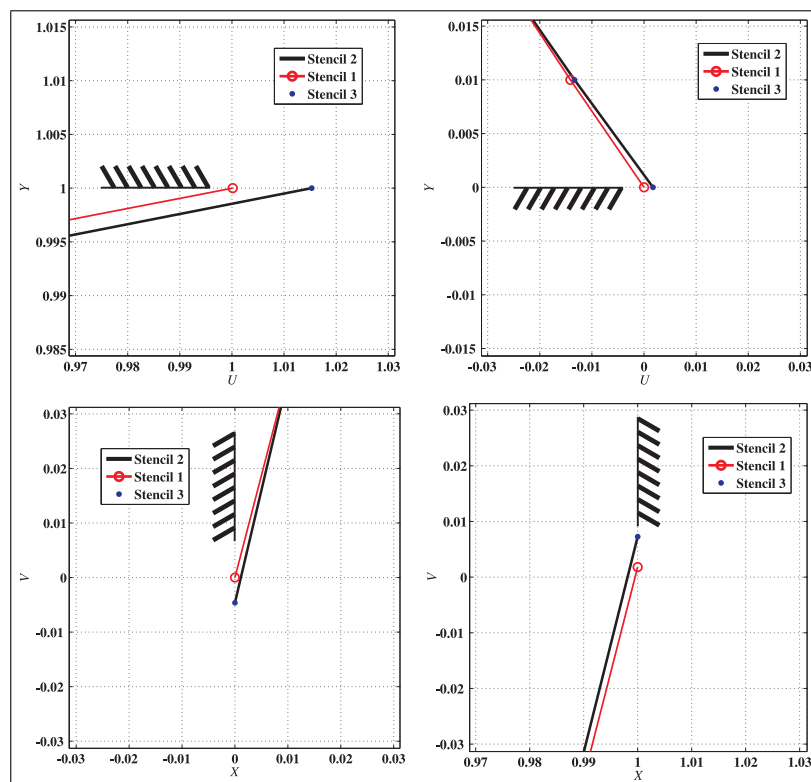


Figura 4.13: Ampliação dos gráficos da Fig. 4.10 nas proximidades das paredes ($Re=400$)

Capítulo 5

Problema de Convecção Natural em uma Cavidade Quadrada

Este capítulo destina-se em aplicar o MQDL-FBR em outro problema físico. O método é utilizado para obter a solução de um problema de convecção natural em uma cavidade quadrada. Esse tipo de problema também é bastante abordado em pesquisas sobre métodos numéricos e é um bom modelo para a verificação de resultados. As equações que regem o movimento do fluido em termos da função corrente, vorticidade e temperatura são apresentadas e discretizadas. As condições iniciais e de contorno são devidamente estabelecidas. Em seguida, resultados numéricos obtidos são apresentados e discutidos com algumas comparações com resultados da literatura.

5.1 Formulação do problema físico e discretização

O problema da cavidade quadrada é um *benchmark* já bem utilizado para validação de resultados. Davis (1983) apresentou soluções numéricas utilizando o método de diferenças centrais. Shu *et al.* (2003) utilizou o MQDL-FBR para a obter a solução das equações com uma discretização do domínio de forma dispersa (sem malha), e obteve resultados compatíveis com os de Davis (1983). A abordagem aqui exposta visa resolver o problema da cavidade quadrada utilizando o MQDL-FBR, porém com uma malha estruturada uniforme e para os mesmos *stencils* testados no capítulo anterior.

As equações que regem o movimento do fluido, bem como as considerações feitas acerca do problema de convecção natural estão no Apêndice C. Então, as equações de conservação adimensionalizadas que governam o movimento do fluido dentro da cavidade, dadas pela for-

mulação vorticidade ω e função corrente ψ , assumem a seguinte forma:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = \omega \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr\sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (5.3)$$

sendo Pr e Gr os números de Prandtl e Grashof, respectivamente. As velocidades U e V podem ser obtidas através da função corrente como:

$$U = -\frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad (5.4)$$

$$V = \frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (5.5)$$

As condições iniciais ($\tau = 0$) são dadas por

$$\omega = \psi = \theta = 0, \quad \text{quando } \tau = 0 \quad (5.6)$$

e as condições de contorno ($\tau > 0$) são dadas por

$$\psi = 0, \quad \theta = 1, \quad \text{para } X = 0, \quad 0 \leq Y \leq 1 \quad (5.7)$$

$$\psi = 0, \quad \theta = -1, \quad \text{para } X = 1, \quad 0 \leq Y \leq 1 \quad (5.8)$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, \quad \text{para } Y = 0 \quad \text{e } Y = 1, \quad 0 < X < 1 \quad (5.9)$$

A Fig. 5.1 ilustra o problema da cavidade quadrada e as condições de contorno utilizadas para obter a solução das equações pelo MQDL-FBR.

As equações (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) e (5.5) colocadas em um ponto global i , aplicando-se o MQDL-FBR, assumem as seguintes expressões discretizadas:

$$\frac{d\omega_i}{d\tau} = -U_i \sum_{k=1}^{n_i} w_{i,k}^{1X} \omega_i^k - V_i \sum_{k=1}^{n_i} w_{i,k}^{1Y} \omega_i^k + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\sum_{k=1}^{n_i} w_{i,k}^{2X} \omega_i^k + \sum_{k=1}^{n_i} w_{i,k}^{2Y} \omega_i^k \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_i} w_{i,k}^{1X} \theta_i^k \quad (5.10)$$

$$\sum_{k=1}^{n_i} w_{i,k}^{2X} \psi_i^k + \sum_{k=1}^{n_i} w_{i,k}^{2Y} \psi_i^k = \omega_i \quad (5.11)$$

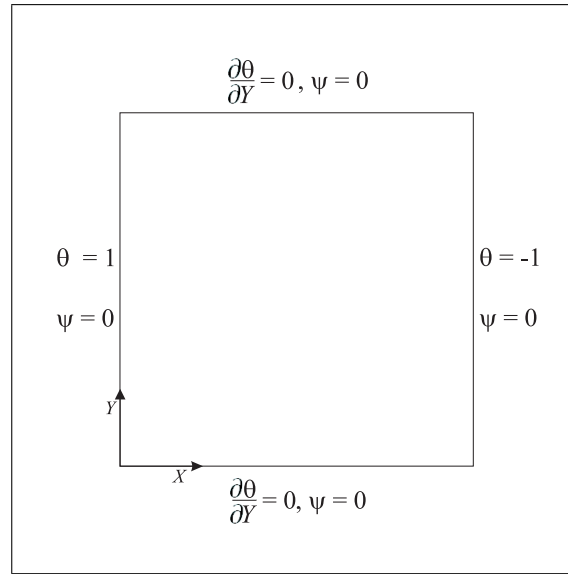


Figura 5.1: Cavidade quadrada e condições de contorno para o problema de convecção natural.

$$\frac{d\theta_i}{d\tau} = -U_i \sum_{k=1}^{n_i} w_{i,k}^{1X} \theta_i^k - V_i \sum_{k=1}^{n_i} w_{i,k}^{1Y} \theta_i^k + \frac{1}{Pr\sqrt{Gr}} \left(\sum_{k=1}^{n_i} w_{i,k}^{2X} \theta_i^k + \sum_{k=1}^{n_i} w_{i,k}^{2Y} \theta_i^k \right) \quad (5.12)$$

$$U_i = - \sum_{k=1}^{n_i} w_{i,k}^{1Y} \psi_i^k \quad (5.13)$$

$$V_i = \sum_{k=1}^{n_i} w_{i,k}^{1X} \psi_i^k \quad (5.14)$$

onde $w_{i,k}^{1X}$, $w_{i,k}^{1Y}$, $w_{i,k}^{2X}$ e $w_{i,k}^{2Y}$ representam os coeficientes de ponderação de primeiras e segundas derivadas com relação a X e Y respectivamente. Valores de uma função f_i são calculados diretamente para o nó i , enquanto f_i^k são valores da mesma função para cada nó k do suporte local do nó de referência i .

As equações de vorticidade e de temperatura, como são dependentes do tempo, foram resolvidas usando o método explícito de Euler. Assim, para cada instante de tempo, o novo valor de vorticidade e temperatura serão calculados como:

$$\begin{aligned} \omega_i^{it+1} = & \omega_i^{it} - \delta\tau \left(U_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1X} \omega_i^k + V_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1Y} \omega_i^k \right) + \\ & + \frac{\delta\tau}{\sqrt{Gr}} \left(\sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2X} \omega_i^k + \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2Y} \omega_i^k \right) + \frac{\delta\tau}{2} \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1X} \theta_i^k \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\theta_i^{it+1} = \theta_i^{it} + \delta\tau \left\{ -U_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1X} \theta_i^k - V_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1Y} \theta_i^k + \frac{1}{Pr\sqrt{Gr}} \left(\sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2X} \theta_i^k + \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2Y} \theta_i^k \right) \right\}$$

(5.16)

sendo $\delta\tau$ o incremento de tempo. O valor do incremento de tempo foi adotado de maneira análoga a do capítulo anterior, considerando agora a influência de Gr em vez de Re .

A equação da função corrente foi calculada usando o método SOR com o mesmo parâmetro de relaxação e a mesma tolerância (10^{-8}) utilizados no Capítulo 4.

A Fig. 5.2 (fluxograma) ilustra a sequência de passos executada pelo programa, escrito em Fortran. A escolha do incremento de tempo e do número total de passos de tempos em cada teste foi feita para que o regime permanente pudesse ser atingido de forma satisfatória, conforme discutido no Capítulo 4.

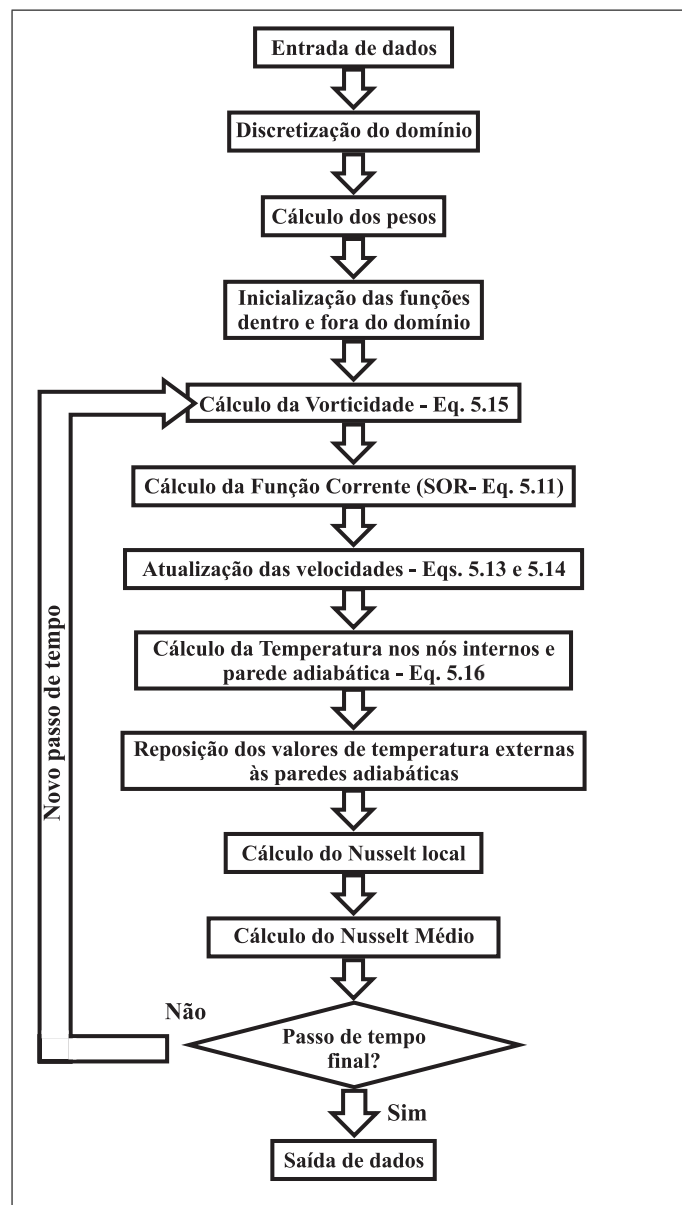


Figura 5.2: Fluxograma utilizado para obter as soluções do problema de convecção natural

5.2 Tratamento dos nós fora do domínio e Resultados Numéricos

Nos experimentos numéricos, o valor do número de Prandtl foi fixado em 0,71. Foram testados três valores para o número de Rayleigh Ra : 10^4 , 10^5 e 10^6 ($Ra = GrPr$). Para cada Ra , o teste foi executado com um certo incremento de tempo e um número total de passos de tempo ($Ra; \delta\tau; N_{tp}$): ($10^4; 0,001; 15000$), ($10^5; 0,001; 20000$) e ($10^6; 0,0005; 40000$). Para fins de comparação, as situações abordadas remetem-se às mesmas analisadas por Davis (1983) e Shu *et al.* (2003). O valor do parâmetro de forma foi fixado em 0,50. De acordo com os resultados apresentados na seção 3.1.2, esse valor é bem razoável para se estudar todas as malhas e *stencils* de interesse. Foram testadas as malhas 21×21 , 41×41 , 61×61 , 81×81 , 101×101 e 121×121 .

Conforme já verificada no Capítulo 4, a abordagem das condições adotadas fora do domínio da cavidade é um aspecto importante que deve ser explanado. Para simular a condição de parede adiabática nas paredes horizontais, o valor da temperatura dos nós externos à fronteira (θ_e) foram igualados aos valores dos nós internos correspondentes (θ_i) calculados no passo de tempo anterior. A Fig. 5.3 ilustra essa situação. As temperaturas dos nós externos próximos à uma parede vertical foram igualadas ao valor da temperatura dessa parede, ou seja, $(\theta_{eI}) = \theta_p$. A vorticidade e a função corrente no exterior ao domínio foram fixados em zero, ou seja, $\omega_e = \psi_e = 0$. Os valores da vorticidade na fronteira e as temperaturas nas paredes adiabáticas foram calculados usando o MQDL-FBR. Esse procedimento simula uma cavidade em um meio exterior sólido e supercondutor.

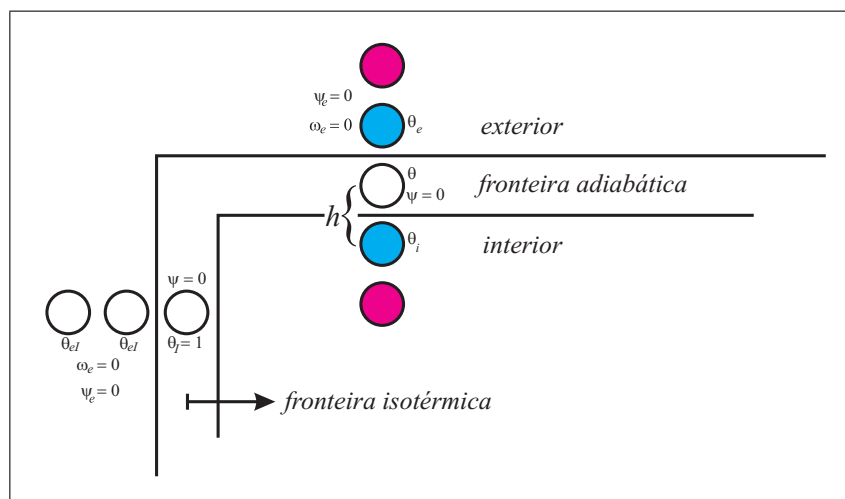


Figura 5.3: Valores de vorticidade, função corrente e temperatura para nós externos à fronteira

Resultados para linhas de corrente e isotérmicas no regime permanente utilizando o *stencil* 1 para $Ra = 10^4$ com malha 61×61 , $Ra = 10^5$ com malha 81×81 e $Ra = 10^6$ com malha

101 × 101 são mostrados na Fig. 5.4. O número de Nusselt médio, calculado pela integração numérica (Regra de Simpson) dos valores de Nusselt local, foi obtido para a superfície isotérmica $\theta_p = 1$ de duas maneiras distintas: utilizando o próprio esquema do MQDF-FBR e também o esquema de diferenças finitas para frente (DFF) de segunda ordem (valores de Nusselt local).

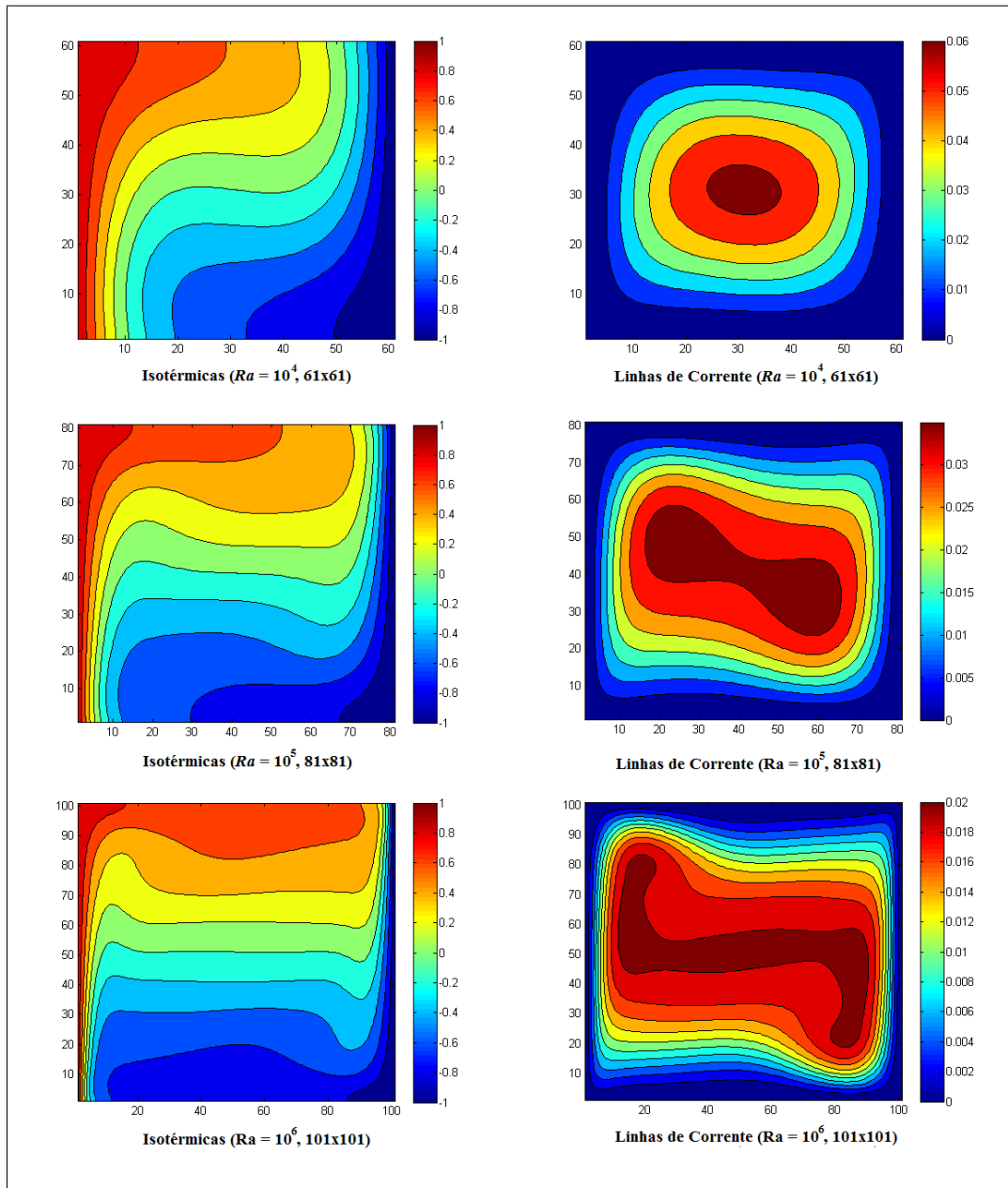


Figura 5.4: Isotermas e linhas de corrente para o *stencil* 1

Davis (1983) encontrou valores do número de Nusselt médio iguais a 2,238, 4,509 e 8,817 para $Ra = 10^4$, $Ra = 10^5$ e $Ra = 10^6$, respectivamente. Shu *et al.* (2003), por sua vez, obtiveram valores 2,240 (2570 nós), 4,573 (5338 nós) e 8,932 (10305 nós), respectivamente. Os valores obtidos nos experimentos estão nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3. Para o *stencil* 1, nota-se que os resultados do número Nusselt médio calculados com o MQDF-FBR e DFF concordam

bem com os encontrados pelas referências nos casos $Ra = 10^4$ e $Ra = 10^5$. Para $Ra = 10^6$, resultados concordantes foram obtidos apenas com a DFF. Com os *stencils* 2 e 3 nenhum esquema de cálculo do número de Nusselt produziu resultados concordantes: o MQDF-FBR tende a subestimar os valores, enquanto a DFF tende a superestimá-los.

Tabela 5.1: Nusselt médio para $Ra = 10^4$

	MQDL-FBR			DFF		
	<i>stencil</i> 1	<i>stencil</i> 2	<i>stencil</i> 3	<i>stencil</i> 1	<i>stencil</i> 2	<i>stencil</i> 3
21×21	2,071	1,874	1,873	1,807	1,861	1,860
41×41	2,189	1,988	1,987	2,147	2,191	2,191
61×61	2,216	2,017	2,017	2,202	2,250	2,250
81×81	2,226	2,030	2,029	2,220	2,271	2,271
101×101	2,231	2,036	2,036	2,228	2,281	2,281
121×121	2,234	2,043	2,042	2,233	2,286	2,286

Tabela 5.2: Nusselt médio para $Ra = 10^5$

	MQDL-FBR			DFF		
	<i>stencil</i> 1	<i>stencil</i> 2	<i>stencil</i> 3	<i>stencil</i> 1	<i>stencil</i> 2	<i>stencil</i> 3
21×21	4,504	4,093	4,089	1,803	2,265	2,268
41×41	4,607	4,179	4,178	4,075	4,167	4,167
61×61	4,608	4,185	4,185	4,429	4,512	4,512
81×81	4,599	4,183	4,183	4,519	4,609	4,609
101×101	4,590	4,178	4,179	4,548	4,644	4,643
121×121	4,582	4,181	4,180	4,558	4,657	4,657

Tabela 5.3: Nusselt médio para $Ra = 10^6$

	MQDL-FBR			DFF		
	<i>stencil</i> 1	<i>stencil</i> 2	<i>stencil</i> 3	<i>stencil</i> 1	<i>stencil</i> 2	<i>stencil</i> 3
21×21	9,056	8,645	8,632	-5,480	-2,466	-2,441
41×41	9,575	8,732	8,729	4,345	5,189	5,191
61×61	9,406	8,555	8,554	7,371	7,650	7,650
81×81	9,302	8,456	8,455	8,333	8,513	8,514
101×101	9,231	8,390	8,393	8,701	8,869	8,869
121×121	9,181	8,361	8,358	8,861	9,031	9,031

Assim como no Capítulo 4, esses resultados parecem contraditórios com aqueles obtidos no Capítulo 3, quando se verificou uma melhoria na precisão dos resultados com os *stencils* 2 e 3. A explicação é semelhante àquela dada no capítulo anterior: nos testes do Capítulo 3, a solução analítica era conhecida e utilizada para estabelecer os valores no exterior, diferentemente do que foi feito agora. O emprego de um modelo de sólido supercondutor para tratar o exterior à cavidade não se apresentou fisicamente satisfatório. O aumento do número de nós externos exigidos pelos *stencils* mais extensos contribuiu para contaminar a solução numérica obtida pelo MQDF-FBR com informações alheias à física do problema interno. O cálculo do

número de Nusselt com o próprio MQDF-FBR introduz ainda mais contaminação, pois valores irreais de temperatura externa são utilizados. O cálculo com a DFF sofre menor contaminação pois utiliza apenas nós internos.

Certamente, esquemas alternativos devem ser estudados para tratar adequadamente os nós externos, ou então evitá-los no contexto do MQDF-FBR (por exemplo, através de suportes/*stencils* com nós de referência deslocados junto a fronteira).

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

O Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial (MQDL-FBR) é um método promissor para solução numérica de equações diferenciais parciais. Trata-se de um método de implementação relativamente simples e versátil, podendo ser implementado em esquemas com malha estruturada ou não-estruturada e esquemas sem malha. O cálculo do coeficiente de ponderação é a chave do MQDL-FBR, entretanto, nesse trabalho foi mostrado que nem todas as FBRs podem ser utilizadas. Condições de determinação foram definidas para mostrar quando uma FBR pode ser usada nesse contexto. Esse fato não foi encontrado em nenhuma referência da literatura. Porém, essas condições foram definidas para problemas que abordam no máximo derivadas segundas e aplicadas em algumas FBRs. Faz-se necessário, para estudos futuros, a generalização das condições de determinação para a m -ésima derivada, e também, a aplicação dessas condições para mais FBRs. Outro fato notado foi a verificação de que quando c tende ao infinito, os pesos tendem a ser os mesmos obtidos pelo MDF. Esse fato foi verificado com a FBR Mq , mas devem testados e comparados utilizando, futuramente, outras FBRs.

O MQDF-FBR foi testado neste trabalho para solução da equação de Poisson em um domínio quadrado unitário, utilizando-se várias funções analíticas, FBRs- Mq e malhas estruturadas uniformes. Para vários *stencils* diferentes, foram estudados empiricamente os efeitos do refinamento de malha h e do parâmetro de forma c da Mq . Os resultados obtidos nos experimentos numéricos corroboram pesquisas publicadas recentemente, indicando a ocorrência de valores ótimos de c que não dependem do refinamento da malha. Esses valores ótimos por sua vez dependem da função utilizada e também da distribuição e número de nós suporte do *stencil*. Outra observação importante é que o aumento da extensão do *stencil* local contribui significativamente para a melhoria dos resultados. Por outro lado, o aumento do número de nós locais tem efeito bem menor. Outros testes foram executados para verificar a influência de um termo não-linear adicionado à equação de Poisson.

Duas aplicações do método foram feitas. No caso da convecção forçada em uma cavidade

quadrada, os resultados obtidos foram próximas aos das referências. Os melhores resultados foram obtidos para o *stencil* 1. Entretanto, para os *stencils* 2 e 3, mais extensos, houve um pequeno desvio nas curvas das velocidades U e V das linhas centrais vertical e horizontal da cavidade, respectivamente. Pode-se notar que o aumento de pontos local referentes a esses *stencils* não contribuíram para melhorar os resultados. Ao analisar a condição de não escorregamento nas paredes ($U = V = 0$), apenas *stencil* 1 satisfaz, com certa precisão, essa condição. Para o problema de convecção natural em uma cavidade quadrada, o aumento da extensão do *stencil* contribuiu para piorar os resultados obtidos. Isso ocorreu, provavelmente, em razão do modelo de sólido supercondutor utilizado não se apresentar fisicamente satisfatório para representar os nós externos ao domínio da solução. Aparentemente, esse modelo acabou por contaminar os resultados numéricos com informações irreais, alheias à física do problema.

Esquemas para superar as dificuldades relacionadas às fronteiras devem ser estudados no âmbito do MQDF-FBR. Uma alternativa seria evitar o uso de nós externos ao domínio. Isso poderia ser feito com *stencils* descentrados de quadratura diferencial, ou mesmo de diferenças finitas, mas apenas para os nós da fronteira e os nós internos mais próximos dela. Outra alternativa seria o desenvolvimento de técnicas fisicamente consistentes para tratar os nós externos ao domínio, de modo a garantir as condições de contorno com o máximo de precisão.

Outras propostas para trabalhos futuros são:

- estudo de procedimentos para calcular os coeficientes de ponderação do MQDL-FBR para valores arbitrariamente grandes do parâmetro de forma c . A partir daí, seria possível determinar sistematicamente valores ótimos de c para qualquer tipo de *stencil* ou suporte não-estruturado.
- estudo do MQDL-FBR no contexto de discretização sem malha.
- Aplicação do MQDL-FBR em problemas de escoamento tridimensional e/ou não-estacionário (sem regime permanente para $t \rightarrow \infty$).

Referências Bibliográficas

- Bararnia et al.(2010)** H. Bararnia, M. Jalaal, E. Ghasemi, S. Soleimani, D. Ganji, e F. Mohammadi. Numerical simulation of joule heating phenomenon using meshless RBF-DQ method. *International Journal of Thermal Sciences*, 49:2117–2127.
- Bayona et al.(2010)** V. Bayona, M. Moscoso, M. Carretero, e M. Kindelan. RBF-FD formulas and convergence properties. *Journal of Computational Physics*, 229:8281–8295.
- Bellman et al.(1972)** E. Bellman, G. Kashef, e J. Casti. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Numerical Physics*, 10:40–52.
- Davis(1983)** G. Davis. Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3:249–263.
- de Souza(2006)** J. J. de Souza. Simulação Numérica da Transferência de Calor por Convecção Forçada, Natural e Mista numa Cavidade Retangular. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, Minas Gerais.
- Ding et al.(2005)** H. Ding, C. Shu, e D. Tang. Error estimates of local multiquadric-based differential quadrature (LMQDQ) method through numerical experiments. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63:1513–1529.
- Ding et al.(2006)** H. Ding, C. Shu, S. Yeo, e D. Xu. Numerical computation of three-dimensional incompressible viscous flows in the primitive variable form by local multiquadric differential quadrature method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:516–533.
- Ferziger(1981)** J. H. Ferziger. *Numerical Methods for Engineering Application*. John Wiley & Sons, Universidade de Michigan, 1 edição.
- Fornberg e Driscoll(2002)** B. Fornberg e T. Driscoll. Interpolation in the limit of increasingly flat radial basis function. *Computer and Mathematics with Applications*, 43:379–391.

- Fornberg et al.(2004)** B. Fornberg, G. Wright, e E. Larsson. Some observations regarding interpolants in the limit of flat radial basis function. *Computer and Mathematics with Applications*, 47:37–55.
- Franke(1982)** R. Franke. Scatered data interpolation: tests of some methods. *Mathematics of Computation*, 38:181–199.
- Ghia et al.(1982)** U. Ghia, K. Ghia, e T. Shin. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multi-grid method. *Journal of Computational Physics*, 48: 387–411.
- Hardy(1971)** L. Hardy. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of Geophys*, 76:1905–1915.
- Hon e Schaback(2001)** Y. Hon e R. Schaback. On unsymmetric collocation by radial basis functions. *Applied Mathematics and Computation*, 119:177–186.
- Kansa(1990a)** J. Kansa. Multiquadrics - a scattered data approximations and scheme with applications to computational fluid dynamics-I. surface approximations and partial derivative estimates. *Computers and Mathematics with Applications*, 19:127–145.
- Kansa(1990b)** J. Kansa. Multiquadrics - a scattered data approximations and scheme with applications to computational fluid dynamics-II. solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 37:147–161.
- Ling(2003)** Leevan Ling. *Radial Basis Function in Scientific Computing*. Tese de Doutorado, Simon Fraser University, Burnaby, Canadá.
- Maliska(2010)** C. R. Maliska. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2 edição.
- Micchelli(1986)** C. Micchelli. Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions. *Constructive Aproximation*, 2:11–22.
- Piret(2007)** C. Piret. *Analitical and Numerical Advances in Radial Bases Function*. Tese de Doutorado, University of Colorado, Denver, E.U.A.
- Qajarjazi et al.(2010)** A. Qajarjazi, S. Soleimani, H. Bararnia, A. Barari, e G. Domairry. Entropy generation due to natural convection in a partially heated cavity by local RBF-DQ method. *Meccanica*, 46:1023–1033.
- Sequi(1973)** W. T. Sequi. *Programs for the Solution of Systems of Linear Algebraic Equations*. NASA Contractor Report, CR-2173.

- Shu(2000)** C. Shu. *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. Springer, Great Britain, 1 edição.
- Shu et al.(2003)** C. Shu, H. Ding, e S. Yeo. Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:941–954.
- Shu et al.(2005)** C. Shu, H. Ding, e S. Yeo. Computation of incompressible navier-stokes equations by local RBF-based differential quadrature method. *Tech Science Press*, 7:195–205.
- Soleimani et al.(2010)** S. Soleimani, M. Jalaal, H. Bararnia, E. Ghasemi, D. Ganji, e F. Mohammadi. Local RBF-DQ method for two-dimensional transient heat conduction problems. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 37:1411–1418.
- Wu et al.(2007)** X. Wu, C. Shu, e M. Wang. Vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using local radial basis function-based differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 307:252–270.

Apêndice A

Obtenção das Condições de Determinação

De acordo com a equação (2.13), os pesos são calculados com a solução do SEAL resultante. Eles são obtidos para todos os pontos do suporte local incluindo o ponto de referência, que é suporte dele mesmo. Porém, para se obter soluções reais, o sistema não deve conter nenhum elemento indeterminado. Todos os elementos desse sistema possuem valores finitos, mas um tem a possibilidade de ser singular. Esse elemento do sistema representa o ponto de referência sendo suporte dele mesmo, e é dado por:

$$\left\{ \frac{\partial^m \varphi_k(\mathbf{x}_i)}{\partial x_1^m} \right\}, \quad \text{quando } \mathbf{x}_i \longrightarrow \mathbf{x}_k \quad (\text{A.1})$$

Generalizando, dada uma FBR qualquer, $\varphi(r) = \varphi_k(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_2)$, o cálculo da derivada primeira ($m = 1$) de φ com relação a x ($\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$), quando \mathbf{x} (ponto qualquer do domínio) tende a \mathbf{x}_i (ponto de referência), isto é, quando $r \longrightarrow 0$ (Fig. A.1) deve ter um valor determinado. Assim, pela regra da cadeia tem-se:

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{d\varphi(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (\text{A.2})$$

sendo $r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$.

Assim,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{(x - x_i)}{r} = \cos(\phi_i) \quad (\text{A.3})$$

E, portanto

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} = \frac{d\varphi(r)}{dr} \cos(\phi_i) \quad (\text{A.4})$$

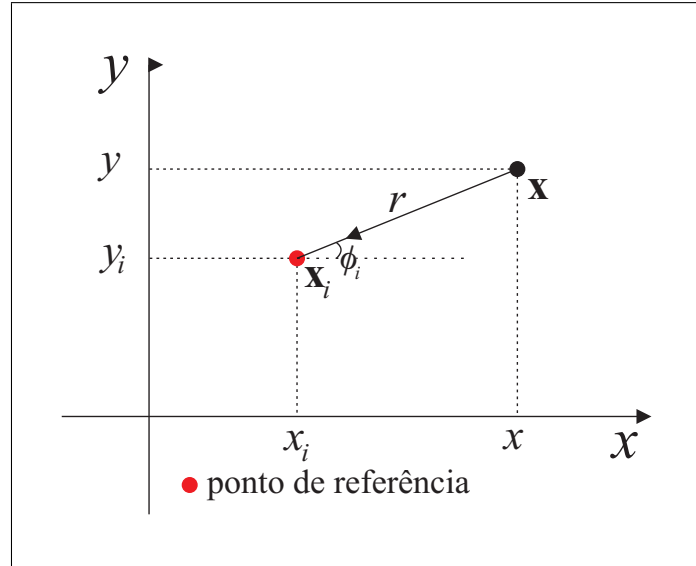


Figura A.1: Ponto de referência sendo suporte dele mesmo

Tomando-se o limite para $r \rightarrow 0$, tem-se:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d\varphi(r)}{dr} \cos(\phi_i) \quad (\text{A.5})$$

Como a FBR é independente do ângulo ϕ , conclui-se que a única forma para que isso aconteça é quando:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d\varphi(r)}{dr} = 0 \quad (\text{A.6})$$

chamada como Primeira Condição de Determinação ($1^{\text{a}}CDD$).

De forma análoga, o cálculo da segunda derivada de φ ($m = 2$) com relação a x quando $r \rightarrow 0$ deve ter seu valor determinado. Assim, pela regra da cadeia tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \\ &= \frac{d^2 \varphi(r)}{dr^2} \left(\frac{x - x_i}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) \left(1 - \frac{(x - x_i)^2}{r^2} \right) \\ &= \frac{d^2 \varphi(r)}{dr^2} \cos^2(\phi_i) + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) \cos^2(\phi_i) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Agrupando os termos tem-se:

$$\frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial x^2} = \left(\frac{d^2 \varphi(r)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) \cos^2(\phi_i) + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \quad (\text{A.8})$$

Pode-se escrever o termo entre parênteses da expressão acima da seguinte forma:

$$\left(\frac{d^2 \varphi(r)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) \quad (\text{A.9})$$

A expressão (A.8) torna-se portanto:

$$\frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial x^2} = r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) \cos^2(\phi_i) + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \quad (\text{A.10})$$

Tomando-se o limite para $r \rightarrow 0$, tem-se:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial x^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) \cos^2(\phi_i) + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \quad (\text{A.11})$$

Como a FBR é independente do ângulo ϕ , a única forma para que isso ocorra será quando:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0 \quad (\text{A.12})$$

E ainda, para que não exista a indeterminação na expressão (A.11), o seguinte fato deve ocorrer:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \eta \quad (\text{finito}) \quad (\text{A.13})$$

As equações (A.12) e (A.13) são portanto chamadas de Segunda Condição de Determinação ($2^{\text{a}}CDD$) e Terceira Condição de Determinação ($3^{\text{a}}CDD$), respectivamente. Nota-se que essas duas condições estão ligadas ao cálculo da segunda derivada.

Todas as Condições de Determinação são analogamente obtidas para as primeiras e segundas derivadas de φ com relação a y . No cálculo da derivada cruzada é obtido apenas a $2^{\text{a}}CDD$. O procedimento é análogo ao da segunda derivada.

Apêndice B

Problema de Convecção Forçada em uma Cavity Quadrada

As seguintes considerações são adotadas para a formulação do modelo físico (de Souza (2006)):

- Regime não permanente;
- Escoamento bidimensional e laminar;
- Escoamento incompressível;
- Propriedades do fluido constantes.

As equações matemáticas que regem o movimento do fluido em uma cavity bidimensional sujeita a uma velocidade constante em sua superfície superior é dada pela Equação de Conservação de Massa e Equações de Navier-Stokes. A Equação da Continuidade ou Equação de Conservação da Massa é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (\text{B.1})$$

sendo ρ a massa específica do fluido. Supondo ρ constante, a equação da continuidade toma a seguinte forma:

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (\text{B.2})$$

Essa equação em duas dimensões, onde $\vec{U} = u\hat{x} + v\hat{y}$, será:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.3})$$

As Equações de Quantidade de Movimento ou Equações de Navier-Stokes em duas dimensões são dadas por:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.5})$$

sendo μ é a viscosidade dinâmica do fluido.

As seguintes variáveis adimensionais são introduzidas a fim de adimensionalizar as equações de conservação (t, x, y, u, v, p , representam o tempo, as coordenadas espaciais, velocidades e pressão dimesionais, respectivamente):

$$\tau = \frac{U_0 t}{H}, \quad X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{u}{U_0}, \quad V = \frac{v}{U_0}, \quad P = \frac{p}{\rho U_0^2} \quad (\text{B.6})$$

sendo H o comprimento de referência (lado da cavidade), U_0 a velocidade de referência tomada como sendo a velocidade da parede superior da cavidade.

Substituindo (B.6) em (B.3), tem-se

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{B.7})$$

Substituindo (B.6) em (B.4) e (B.5) obtém-se

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.9})$$

sendo Re o número de Reynolds e defindo como sendo $Re = \rho v_s H / \mu$. A velocidade característica é dada por $v_s = U_0$, H é o comprimento de referência e μ é a viscosidade dinâmica do fluido.

Derivando a equação (B.8) com relação a Y , a equação (B.9) com relação a X , e subtraindo-as, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + V \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \\ \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Definindo a vorticidade por

$$w = -\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \quad (\text{B.11})$$

Assim, a equação (B.10) será

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + U \frac{\partial w}{\partial X} + V \frac{\partial w}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{B.12})$$

A definição da função corrente adimensional é dada por

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (\text{B.13})$$

Substituindo a equação (B.13) em (B.11) tem-se a formulação da função corrente adimensional, que satisfaz a equação da conservação da massa dada por (B.7). Assim,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = w \quad (\text{B.14})$$

Portanto, as equações adimensionalizadas que governam o movimento do fluido dentro da cavidade, dadas pela formulação vorticidade ω e função corrente ψ , assumem a forma:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = \omega \quad (\text{B.16})$$

Apêndice C

Problema de Convecção Natural em uma Cavity Quadrada

As seguintes considerações são adotadas para a formulação do modelo físico (de Souza (2006)):

- Regime não permanente;
- Escoamento bidimensional e laminar;
- Escoamento incompressível;
- Função dissipação viscosa desprezada;
- Propriedades do fluido constantes, exceto a massa específica no termo de empuxo;
- Sem geração de calor interno.

As equações matemáticas que regem o movimento do fluido em uma cavidade bidimensional sujeita a aquecimento e/ou resfriamento é dada pela Equação de Conservação de Massa, Equações de Navier-Stokes e Equação da Energia. A Equação da Continuidade ou Equação de Conservação da Massa é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (\text{C.1})$$

sendo ρ a massa específica do fluido. Supondo ρ constante, a equação da continuidade toma a seguinte forma:

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (\text{C.2})$$

Essa equação em duas dimensões, onde $\vec{U} = u\hat{x} + v\hat{y}$, será:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.3})$$

As Equações de Quantidade de Movimento ou Equações de Navier-Stokes, em duas dimensões, adicionando o termo de empuxo (hipótese de Boussinesq) na equação em y , são dadas por:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{C.4})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g \beta (T - T_0) \quad (\text{C.5})$$

onde β é o coeficiente de expansão volumétrica do fluido e μ é a viscosidade dinâmica do fluido. $\mu = \rho\nu$ onde ν é a viscosidade cinemática do fluido.

A equação da Energia, portanto, será dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{C.6})$$

onde α é o coeficiente de difusão térmica. $\alpha = k/\rho c_p$ sendo k a condutividade térmica e c_p o calor específico do fluido a pressão constante.

As seguintes variáveis adimensionais são introduzidas a fim de adimensionalizar as equações de conservação (t, x, y, u, v, p, T , representam o tempo, as coordenadas, velocidades, pressão e temperatura dimensionais, respectivamente):

$$\tau = \frac{U_0 t}{H}, \quad X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{u}{U_0}, \quad V = \frac{v}{U_0}, \quad P = \frac{p}{\rho U_0^2}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_h - T_0} \quad (\text{C.7})$$

sendo H o comprimento de referência (lado da cavidade), U_0 a velocidade de referência dada por $U_0 = \sqrt{g\beta\Delta T H}$, com $\Delta T = T_h - T_c$ e T_h e T_c representando as temperaturas da superfície quente e fria, respectivamente. A temperatura de referência T_0 é dada por $T_0 = (T_h + T_c)/2$. g é a aceleração da gravidade.

Substituindo (C.7) em (C.3), tem-se

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{C.8})$$

Substituindo (C.7) em (C.4) e (C.5) obtém-se

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{\theta}{2} \quad (\text{C.10})$$

sendo Gr o número de Grashof e definido como sendo $Gr = g\beta\Delta TH^3/\nu^2$.

De forma análoga, substituindo (C.7) em (C.6) tem-se

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr\sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{C.11})$$

onde $Pr = \nu/\alpha$ é o número de Prandtl.

Derivando a equação (C.9) com relação a Y , a equação (C.10) com relação a X e subtraindo-as, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + V \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial X} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Definindo a vorticidade por

$$w = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \quad (\text{C.13})$$

Assim, a equação (C.12) será

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + U \frac{\partial w}{\partial X} + V \frac{\partial w}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (\text{C.14})$$

A definição da função corrente adimensional é dada por

$$U = -\frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = \frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (\text{C.15})$$

Substituindo (C.15) em (C.13) tem-se a formulação da função corrente adimensional, que satisfaz a equação da conservação da massa dada por (C.8). Assim,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = w \quad (\text{C.16})$$

Portanto, as equações adimensionalizadas que governam o movimento do fluido dentro da cavidade, dadas pela formulação vorticidade, ω , função corrente, ψ , e temperatura, Θ , assumem a forma:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (\text{C.17})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = \omega \quad (\text{C.18})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr \sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{C.19})$$

O número de Nusselt local para uma superfície S é definido como:

$$Nu_L = \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_S \quad (\text{C.20})$$

Para a superfície S , o número de Nusselt Médio é calculado da seguinte maneira:

$$Nu = \frac{1}{S} \int_S \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_S dS \quad (\text{C.21})$$