Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Física e Matemática Aplicada

O Método KAM Aplicado à Hamiltoniana de Floquet

Maysa Motta Ferraz

Orientadora: Profª. Drª. Mariza Stefanello Simsen

Itajubá, 30 de Março de 2012

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Física e Matemática Aplicada

O Método KAM Aplicado à Hamiltoniana de Floquet

Maysa Motta Ferraz

Orientadora: Profª. Drª. Mariza Stefanello Simsen

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada

Itajubá – MG
30 de Março de 2012

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por ter me dado saúde e sabedoria para concluir este trabalho.

Aos meus pais Sylvestre e Mônica, meus irmãos e sobrinhos por todo o amor, apoio e incentivo que me proporcionaram ao longo da minha vida.

Aos meus amigos e namorado por todo o conhecimento compartilhado e pelos momentos felizes de convivência.

À minha orientadora Prof. Dr. Mariza Stefanello Simsen por toda dedicação, paciência e disposição em todo o processo de desenvolvimento deste projeto.

Aos excelentes professores e funcionários da UNIFEI pelo incentivo e pelos conhecimentos adquiridos.

À bolsa de estudos concedida pelo Programa CAPES DEMANDA SOCIAL que muito me auxiliou para a conclusão desta caminhada.

Sou eternamente grato a todos vocês.

Maysa Motta Ferraz

"A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens."

Descartes

Resumo

O objetivo desta dissertação é entender como a técnica KAM é utilizada para estudar o espectro da Hamiltoniana de Floquet $K = -i\frac{d}{dt} + H_0 + V(\omega t)$, em que H_0 é um operador auto-adjunto com espectro discreto e $t \mapsto V(t)$ é uma função de período 2π com valores no espaço dos operadores auto-adjuntos limitados. Em particular, descrevemos a ideia básica do algoritmo tipo KAM que consiste de um procedimento iterativo que resulta na diagonalização da Hamiltoniana de Floquet K.

Palavras–chave

Método KAM, teoria da perturbação, Hamiltoniana de Floquet, espectro pontual puro, pequenos divisores.

Abstract

The aim of this dissertation is to understand how the KAM technique is used to study the spectrum of the Floquet Hamiltonian $K = -i\frac{d}{dt} + H_0 + V(\omega t)$, where H_0 is self-adjoint operator with discrete spectrum and $t \mapsto V(t)$ is a 2π periodic function taking values in the space of bounded and self-adjoint operators. In particular, we describe the basic idea of the KAM-type algorithm which consists in an iterative procedure resulting in the diagonalization of the Floquet Hamiltonian K.

Keywords

KAM method, perturbation theory, Floquet Hamiltonian, pure point spectrum, small divisors.

Conteúdo

Introdução

A evolução temporal dos estados de um sistema quântico com Hamiltoniana dependente do tempo é determinada pela equação de Schrödinger

$$i\frac{d\psi}{dt}(t) = H(t)\psi(t)$$

em que $H(t)$ é uma família de operadores auto-adjuntos em um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$ e $\psi(t) \in \mathcal{H}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Sob condições adequadas em $H(t)$, como veremos no Capítulo 2, existe uma solução do problema de valor inicial $\psi(s) = \psi$: $\psi(t) = U(t,s)\psi$. Os propagadores, ou operadores de evolução temporal $U(t,s)$ formam uma família fortemente contínua de operadores unitários satisfazendo

$$U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$$

$$U(t,t) = \mathrm{I_d} \quad \text{(operador identidade)},$$

para todo t, r, s.

Para estudar tais Hamiltonianas dependentes do tempo é comum considerar um espaço estendido $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}, dt) \equiv L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H} \equiv \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathcal{H}$ de forma que a variável t passe a ser incorporada como variável espacial, e estudam-se as propriedades espectrais do operador auto-adjunto, formalmente dado por

$$K = -i\frac{d}{dt} + H(t)$$

agindo no espaço de Hilbert estendido $\mathcal{K}$. Tal operador é conhecido como operador quase-energia ou Hamiltoniana de Floquet ("quasienergy"ou "Floquet Hamiltonian"em inglês). Obtém-se assim a equação de Schrödinger estendida

$$i\frac{d\psi}{d\sigma} = K\psi$$

cuja solução é $\psi(\sigma) = e^{-i\sigma K}$ e, como veremos no Capítulo 2, existe uma relação entre $e^{-i\sigma K}$ e os propagadores $U(t,s)$. O operador quase-energia K foi previamente definido para

Hamiltonianas periódicas [35, 59], e então adaptado para Hamiltonianas $H(t) = H_0 + V(t)$ com $V(t) = V(\theta(t))$, em que $\theta(t)$ é uma trajetória de um sistema dinâmico invertível tendo uma medida ergódica invariante [39].

Neste trabalho estudaremos modelos cujas Hamiltonianas são da forma $H(t) = H_0 + V(t)$, em que H_0 é um operador auto-adjunto não-limitado em $\mathcal{H}$ e com espectro discreto, isto é, formado apenas por autovalores isolados de multiplicidade finita e $V(t)$ periódico em t.

Se a Hamiltoniana $H(t)$ é periódica no tempo com período T, ou seja, $H(t+T) = H(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então os propagadores têm as seguintes propriedades

$$U(t+T, s+T) = U(t,s), \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R}$$

$$U(t+nT, s) = U(t,s)[U(s+T,s)]^n, \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Assim, é suficiente conhecer $U(t,s)$ por um período $t \in [s, s+T]$, para qualquer s. Em particular $U_{\mathrm{F}}(s) := U(s+T, s)$ é chamado de operador de Floquet em s ou operador de monodromia. Sabe-se que $U_{\mathrm{F}}(s_1)$ e $U_{\mathrm{F}}(s_2)$ para quaisquer $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ fixados são unitariamente equivalentes e, portanto, geralmente trabalha-se com o operador de Floquet $U_{\mathrm{F}} = U_{\mathrm{F}}(0) = U(T, 0)$.

É conhecido que e^{-iTK} é unitariamente equivalente à $\mathrm{I_d} \otimes U(T,0)$ (Teorema 2.4.3). Assim, muitas vezes é equivalente estudar as propriedades espectrais de K ou U_{F}, e escolhe-se o mais apropriado em cada caso para decidir sobre a estabilidade ou instabilidade espectral de K. Quando o espectro do operador Hamiltoniana de Floquet K for pontual puro, diremos que o sistema é espectralmente estável, sendo espectralmente instável caso contrário. Para Hamiltonianas diferenciáveis, as propriedades espectrais são geralmente obtidas através do estudo do operador Hamiltoniana de Floquet K. No caso em que a Hamiltoniana é singular, entre eles, quando ela corresponde a um sistema kicked, freqüentemente trabalha-se diretamente com o operador de Floquet, por ter-se uma expressão explícita. Em ambas as situações, estamos tipicamente confrontados com o problema em que um operador pontual puro, algumas vezes com espectro denso num intervalo, é perturbado ou pela adição de um operador auto-adjunto no primeiro caso, ou por uma perturbação unitária multiplicativa no segundo caso. Veja entre outros ([5], [14], [19], [26], [28], [31], [34], [40], [41], [47]) para o caso diferenciável e ([8], [10], [11], [13], [20]) para o caso kicked. No caso diferenciável, quando um operador auto-adjunto com espectro pontual puro denso é perturbado pela adição de um operador auto-adjunto, geralmente é empregado um método, conhecido como método KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), para encontrar condições em que K tem espectro pontual puro. Tal método consiste em aplicar a $K = K_0 + V$, sendo $K_0 = -i\partial_t + H_0$ o operador com espectro pontual puro e denso e V a perturbação, uma sequência infinita de transformações unitárias de forma que no s-ésimo passo

$$K_0 + V \simeq K_0 + G_s + V_s, \quad \text{com } V_s = \mathcal{O}(\|V\|_{r-\sigma}^{2^{s-1}}),$$

isto é, $K_0 + V$ é unitariamente equivalente a uma parte diagonal $K_0 + G_s$, na base de autovetores de K_0, mais uma parte não-diagonal V_s que é exponencialmente pequena na variável s, desde que $\|V\|_r$ seja suficientemente pequena.

O ponto principal desta dissertação centra-se em entender a técnica KAM como utilizada em [26] na demonstração de que a Hamiltoniana de Floquet

$$K = -i\partial_t + H_0 + V(\omega t)$$

agindo em $L^2([0,T], \mathcal{H}, dt)$, dependendo do parâmetro $\omega = \frac{2\pi}{T}$ tem espectro pontual puro para frequências ω em um conjunto de medida de Lebesgue grande sob condições adequadas em H_0 e na pertubação $V(\omega t)$ (veja Teorema 3.1.1).

O primeiro trabalho que se utilizou da técnica KAM para mostrar que a Hamiltoniana de Floquet K tem espectro pontual puro foi [5]. Neste trabalho Bellissard considerou H_0 como sendo

$$H_0 = -\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

agindo em $L^2(S^1; dx)$, cujos autovalores são $h_m = \alpha m^2$ e autovetores são $\psi_m = e^{imx}$, os a perturbação V é holomorfa (veja Teorema 1 em [5]).

Então Combescure [14] tratou o caso com H_0 sendo osciladores harmônicos e a perturbação V, periódica em t, tendo decaimento exponencial e polinomial nas entradas da matriz de V na base do operador quase-energia não perturbado $K_0 = -i\frac{d}{dt} + H_0$.

Mais tarde estas ideias foram estendidas a uma classe mais ampla de sistemas em [28].

Neste trabalho os autores consideraram Hamiltonianas de Floquet do tipo $K = -i\partial_t + H_0 + V(\omega t)$, com $H_0 : \text{dom } H_0 \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ auto-adjunto e com espectro discreto simples $h_1 < h_2 < h_3 < \ldots$ obedecendo uma condição do tipo $\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{h_{n+1}-h_n}{n^\alpha} > 0$, para algum $\alpha > 0$, $t \to V(t)$ 2π-periódica e r vezes continuamente diferenciável. O método aplicado usou aplicações sucessivas da interação tipo KAM, iniciada por Bellissard e melhorada por Combescure, e de técnicas chamadas "adiabáticas"originalmente propostas por Howland em [34] e mais tarde estendidas em [40, 48].

Existem trabalhos que aplicam a técnica KAM para Hamiltonianas de Floquet quase-periódicas. Os pioneiros nesta direção são [2, 7].

Nesta dissertação estudaremos o método KAM aplicado a Hamiltoniana de Floquet periódicas conforme o trabalho [26]. Neste trabalho o algoritmo KAM aplicado a Hamiltonianas de Floquet periódicas é ainda melhorado. Esta se deve em grande parte a escolha das normas nos espaços de Banach auxiliares que são construídos durante o algoritmo. Outra generalização é que são permitidos autovalores degenerados (com multiplicidade maior que 1) do operador Hamiltoniano não-pertubado (que estamos denotando por H_0) e a multiplicidade dos autovalores h_m de H_0 pode crescer de forma arbitrariamente rápida com m desde que a pertubação dependente do tempo $V(\omega t)$ seja suficientemente regular conforme explicitado no Teorema 3.1.1.

O trabalho é organizado como segue. No Capítulo 1, introduzimos algumas notações, definições e resultados preliminares. No Capítulo 2, vamos introduzir as hamiltonianas de Floquet $K = -i\partial_t + H(t)$ para sistemas quânticos periódicos no tempo descritos pela família de operadores $H(t)$ e estudaremos as relações de K com os propagadores $U(t, s)$. No Capítulo 3, estudamos como a técnica KAM é utilizada para mostrar que a Hamiltoniana de Floquet $K = -i\partial_t + H_0 + V(\omega t)$ tem espectro pontual puro sob condições adequadas em H_0 e na pertubação $V(\omega t)$. No Apêndice são colocados a parte alguns cálculos necessários à demonstração do Teorema principal (Teorema 3.1.1).

Capítulo 1

Notações e Definições Preliminares

1.1 Considerações Iniciais

Alguns pontos de notação e nomenclatura merecem destaque. Os símbolos $\mathcal{N}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{H}$ serão usados para designar espaços normados, de Banach e de Hilbert, respectivamente, sem menção explícita toda vez que são usados. Os resultados deste capítulo foram estudados nas referências [15, 17, 18, 44, 50, 51, 52, 53].

Uma aplicação $T : \text{dom}\ T \subset \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ representará um operador linear agindo em um Espaço Normado $\mathcal{N}$ com domínio de T (dom T) sendo um subespaço vetorial denso em $\mathcal{B}$. $N(T)$ denotará o núcleo do operador T e $\text{Img}(T)$ a imagem do operador T. A notação $T|_E$ significa a restrição de T a um subespaço $E \subset \text{dom}\ T$. $T \subset S$ significa que $\text{dom}\ T \subset \text{dom}\ S$ e $T\xi = S\xi$, $\forall\ \xi \in \text{dom}\ T$ e diremos que S é uma extensão de T. Diremos que dois operadores $T : \text{dom}\ T \subset \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ e $S : \text{dom}\ S \subset \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ são iguais ($T = S$) se $\text{dom}\ T = \text{dom}\ S$ e $T\xi = S\xi,\ \forall \xi \in \text{dom}\ T = \text{dom}\ S$. Um número $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de $T : \text{dom}\ T \subset \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ se existe $\xi \in \text{dom}\ T$, $\xi \neq 0$, tal que, $T\xi = \lambda\xi$ e diz-se que ξ é um autovetor de T associado ao autovalor λ. Se λ é um autovalor de T o conjunto

$$V_\lambda = \{\xi \in \text{dom}\ T : T\xi = \lambda\xi\}$$

é o auto-espaço associado ao autovalor λ e a dimensão de V_λ é a multiplicidade do autovalor λ. Um operador $T : \text{dom}\ T \subset \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ é dito contínuo ou limitado, se existe $C \in \mathbb{R}$ de forma que

$$\|T\xi\| \leq C\,\|\xi\|\,, \quad \forall \xi \in \text{dom}\ T$$

e tem-se

$$\|T\| = \sup_{\substack{\xi \in \mathrm{dom}\ T \\ \|\xi\| \leq 1}} \|T\xi\| = \sup_{\substack{\xi \in \mathrm{dom}\ T \\ \xi \neq 0}} \frac{\|T\xi\|}{\|\xi\|}.$$

Exemplo 1.1.1 *Sejam* dom T_D, dom T_N *e* dom A *os seguintes subespaços do espaço de Hilbert* $L^2[a,b]$, *em que* $a < b$:

$$\mathrm{dom}\ T_D = \{\psi \in C^2[a,b] : \psi(a) = \psi(b) = 0\},$$

$$\mathrm{dom}\ T_N = \{\Psi \in C^2[a,b] : \psi'(a) = \psi'(b) = 0\},$$

e dom $A = C^2[a,b]$ *e os respectivos operadores lineares* T_D, T_N *e* A *dados por*

$$T_D\psi = T_N\psi = A\psi = -\psi''.$$

Note que 0 *é autovalor de* T_N *mas não é autovalor de* T_D. *Com efeito, ao resolvermos a equação*

$$-\psi'' = 0$$

chegamos que

$$\psi(t) = \alpha t + \beta$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *mas para uma tal* $\psi \in \mathrm{dom}\ T_N$ *devemos ter* $\psi'(a) = \psi'(b) = 0$, *donde* $\alpha = 0$. *Assim, concluímos que qualquer função constante* $\psi = \beta(\beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0)$ *é um autovetor de* T_N *associado ao autovalor* 0. *Já para uma função* $\psi(t) = \alpha t + \beta \in \mathrm{dom}\ T_D$ *deve-se ter* $\psi(a) = \psi(b) = 0$, *ou seja,* $\psi = 0$ *e* 0 *não é autovalor de* T_D. *Ainda qualquer* $z \in \mathbb{C}$ *é autovalor de* A, *pois*

$$A(e^{\sqrt{z}x}) = ze^{\sqrt{z}x}.$$

Definição 1.1.1 *a) O gráfico de um operador linear* $A : \mathrm{dom}\ A \subset \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ *é o subespaço vetorial* $\mathcal{G}(A) = \{(\xi, A\xi) : \xi \in \mathrm{dom}\ A\}$ *de* $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$.

b) Um operador linear $A : \mathrm{dom}\ A \subset \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ *é fechado se seu gráfico é fechado em* $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$. *Em outras palavras, para toda sequência* $(\xi_n) \subset \mathrm{dom}\ A$ *convergente,* $\xi_n \to \xi \in \mathcal{N}_1$ *com* $(A\xi_n) \in \mathcal{N}_2$ *também convergente,* $A\xi_n \to \eta$, *tenha-se* $\xi \in \mathrm{dom}\ A$ *e* $A\xi = \eta$.

Exemplo 1.1.2 *[Fechado e Não-Limitado] Sejam* $C^1[0,\pi] \subset C[0,\pi]$ *(ambos com a topologia da convergência uniforme) o subespaço das funções continuamente diferenciáveis em* $[0,\pi]$ *e* $D : C^1[0,\pi] \to C[0,\pi]$, $(D\psi)(t) = \psi'(t)$. *D não é contínuo, já que* $\psi_n(t) = \frac{\mathrm{sen}(nt)}{n} \to 0$, *enquanto* $(D\psi_n)(t) = \cos(nt)$ *não converge uniformemente para* 0. *Contudo,* *este operador é fechado. Com efeito, se* $\psi_n \to \psi$ *e* $D\psi_n = \psi_n' \to \varphi$*, então como os limites são uniformes, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos*

$$\int_0^t \varphi(s)ds = \int_0^t \lim_{n\to\infty} \psi_n'(s)ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \psi_n'(s)ds = \lim_{n\to\infty} (\psi_n(t) - \psi_n(0)) = \psi(t) - \psi(0),$$

donde, $\psi \in \mathrm{dom}\ D = C^1[0,\pi]$ *e* $(D\psi)(t) = \varphi(t)$*, para todo* t*, e* D *é fechado.*

Exemplo 1.1.3 *[Não-Fechado e Não-Limitado] Sejam* $\mathrm{dom}\ T$ *o conjunto das funções contínuas em* $L^1[0,1]$ *e* $(T\psi)(x) = \psi(0)$*, para todo* x*, como elemento de* $L^1[0,1]$*. Este operador não é contínuo nem fechado, pois* $\psi_n(x) = e^{(-nx)} \to 0$ *em* $L^1[0,1]$*, mas para todo* n *tem-se* $(T\psi_n)(x) = \psi_n(0) = 1$*, para todo* x*.*

Exemplo 1.1.4 *[Não-Fechado e Limitado] Seja* $\mathrm{I_d} : \mathrm{dom}\ \mathrm{I_d} \subset \mathcal{B} \to \mathcal{B}$*, com* $\mathrm{dom}\ \mathrm{I_d}$ *um subespaço próprio denso de* $\mathcal{B}$*, o operador identidade* $\mathrm{I_d}(\xi) = \xi$ *para* $\xi \in \mathrm{dom}\ \mathrm{I_d}$*; tal operador é limitado pois* $\|\mathrm{I_d}\xi\| = \|\xi\|,\ \forall \xi \in \mathrm{dom}\ \mathrm{I_d}$*. Seja* $(\xi_n) \subset \mathrm{dom}\ \mathrm{I_d}$ *com* $\xi_n \to \xi \in \mathcal{B} \setminus \mathrm{dom}\ \mathrm{I_d}$*. Como* $\xi_n \to \xi$ *e* $\mathrm{I_d}(\xi_n) \to \xi$*, mas* $\xi \notin \mathrm{dom}\ \mathrm{I_d}$ *este operador não é fechado.*

Teorema 1.1.1 (Gráfico Fechado) *Se* $T : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ *é um operador linear, então* T *é fechado se, e somente se,* T *é limitado.*

Observação 1.1.1 *Se* T *não é fechado, não necessariamente* $\overline{\mathcal{G}(T)}$ *(o fecho do gráfico de* T*) é gráfico de algum operador linear, pois,* $\overline{\mathcal{G}(T)}$ *pode conter elementos da forma* $(0,\eta)$*,* $\eta \neq 0$*.*

Definição 1.1.2 *Os operadores* $T : \mathrm{dom}\ T \subset \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ *para os quais* $\overline{\mathcal{G}(T)}$ *é o gráfico de uma extensão linear* $\overline{T}$ *de* T*, são chamados de operadores fecháveis e* $\overline{T}$ *é seu fecho.*

Definição 1.1.3 *a) Seja* $T : \mathrm{dom}\ T \subset \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *um operador linear no espaço de Banach* $\mathcal{B} \neq \{0\}$*. O conjunto resolvente de* T*, denotado por* $\rho(T)$*, é o conjunto dos* $\lambda \in \mathbb{C}$*, para os quais o operador resolvente de* T *em* λ

$$R_\lambda(T) := (T - \lambda \mathrm{I_d})^{-1} : \mathcal{B} \to \mathrm{dom}\ T$$

existe e é limitado.

b) O espectro de T *é o conjunto* $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$*.*

Note que todo autovalor de T pertence a seu espectro. Com efeito, se λ é um autovalor de $T : \mathrm{dom}\ T \subset \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, então existe $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathrm{dom}\ T$ com $T\xi = \lambda\xi$, ou seja, $(T - \lambda \mathrm{I_d})\xi = 0$, e $T - \lambda \mathrm{I_d}$ não é injetor, logo não é invertível, e assim $\lambda \notin \rho(T)$, donde $\lambda \in \sigma(T)$.

Teorema 1.1.2 *Se $\sigma(T) \neq \mathbb{C}$, então T é fechado.*

Demonstração: Seja $(\xi_n) \subset \operatorname{dom} T$, com $\xi_n \to \xi$ e $T(\xi_n) \to \eta$, e tome $z_0 \in \rho(T)$. Assim,

$$\begin{aligned} R_{z_0}(T)(\eta - z_0\xi) &= R_{z_0}(T)(\lim_{n\to\infty}(T\xi_n - z_0\xi_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} R_{z_0}(T)(T - z_0\mathrm{I_d})\xi_n \\ &= \lim_{n\to\infty} (T - z_0\mathrm{I_d})^{-1}(T - z_0\mathrm{I_d})\xi_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi, \end{aligned}$$

ou seja, $\xi \in \operatorname{dom} T$, pois a imagem de $R_{z_0}(T)$ é $\operatorname{dom} T$. Agora,

$$\eta - z_0\xi = (T - z_0\mathrm{I_d})R_{z_0}(T)(\eta - z_0\xi) = (T - z_0\mathrm{I_d})\xi = T\xi - z_0\xi$$

e $\eta = T\xi$. ■

Valem as seguintes propriedades sobre o espectro e o operador resolvente de um operador linear limitado.

Teorema 1.1.3 *a) Se T é limitado e $\lambda_0 \in \rho(T)$, então $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}(T)\|}\right\} \subset \rho(T)$ e*

$$R_\lambda(T) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}(T)^{j+1}.$$

Em particular, $\rho(T)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{C}$ e $\sigma(T)$ é fechado em $\mathbb{C}$.

b) Se T é limitado, para quaisquer $\lambda, \mu \in \rho(T)$, vale a primeira identidade do resolvente

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T).$$

c) Se S e T são limitados e $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$, vale a segunda identidade do resolvente

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(T)(S - T)R_\lambda(S).$$

d) Se T é limitado, então $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Exemplo 1.1.5 *a) $\sigma(A) = \mathcal{C}$, sendo A como no Exemplo 1.1.1, visto que todo $z \in \mathbb{C}$ é um autovalor de A. Portanto $\rho(A) = \emptyset$.*

b) Considere agora $\operatorname{dom} D = \{\psi \in (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) : \psi(0) = 0\}$, $D : \operatorname{dom} D \to C[0,1]$, $(D\psi)(x) = \psi'(x)$. *Se $\lambda \in \mathbb{C}$, então o operador $W_\lambda : C[0,1] \to \operatorname{dom} D$, dado por*

$$(W_\lambda\psi)(x) = e^{\lambda x}\int_0^x e^{-\lambda s}\psi(s)ds$$

é limitado, pois se $\psi \in C[0,1]$*, tem-se*

$$\begin{aligned}
\|W_\lambda\psi\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |(W_\lambda\psi)(x)| \\
&= \sup_{x\in[0,1]} \left| e^{\lambda x}\int_0^x e^{-\lambda s}\psi(s)ds \right| \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} |e^{\lambda x}| \int_0^x |e^{-\lambda s}|\,|\psi(s)|\,ds \leq C\,\|\psi\|_\infty\,,
\end{aligned}$$

para alguma constante C*. Além disso, se* $\psi \in C[0,1]$*, então*

$$\begin{aligned}
(D-\lambda\mathrm{I_d})W_\lambda\psi(x) &= (D-\lambda\mathrm{I_d})\Big(e^{\lambda x}\int_0^x e^{-\lambda s}\psi(s)ds\Big) \\
&= D\Big(e^{\lambda x}\int_0^x e^{-\lambda s}\psi(s)ds\Big) - \Big(\lambda e^{\lambda x}\int_0^x e^{-\lambda s}\psi(s)ds\Big) \\
&= \lambda e^{\lambda x}\int_0^x e^{-\lambda s}\psi(s)ds + e^{\lambda x}e^{-\lambda x}\psi(x) - \lambda e^{\lambda x}\int_0^x e^{-\lambda s}\psi(s)ds \\
&= \psi(x) = \mathrm{I_d}\psi(x).
\end{aligned}$$

Assim, $(D-\lambda\mathrm{I_d})W_\lambda = \mathrm{I_d}$ *(identidade em* $C[0,1]$*). Por outro lado, se* $\psi \in \mathrm{dom}\ D$*, temos*

$$\begin{aligned}
W_\lambda(D-\lambda\mathrm{I_d})\psi(x) &= W_\lambda(\psi'(x)-\lambda\psi(x)) \\
&= e^{\lambda x}\int_0^x e^{-\lambda s}(\psi'(s)-\lambda\psi(s))ds \\
&= e^{\lambda x}\int_0^x (e^{-\lambda s}\psi'(s)-\lambda e^{-\lambda s}\psi(s))ds \\
&= e^{\lambda x}\int_0^x \frac{d}{ds}(e^{-\lambda s}\psi(s))ds \\
&= e^{\lambda x}(e^{-\lambda x}\psi(x)-e^{-\lambda 0}\psi(0)) = \psi(x) = \mathrm{I_d}\psi(x),
\end{aligned}$$

e $W_\lambda(D-\lambda\mathrm{I_d}) = \mathrm{I_d}$ *(identidade em* $\mathrm{dom}\ D$*). Portanto* $W_\lambda = (D-\lambda\mathrm{I_d})^{-1}$*. Logo, todo* $\lambda \in \mathbb{C}$ *está no conjunto* $\rho(T)$ *e* $\sigma(D) = \emptyset$*.*

Definição 1.1.4 *a) Um operador linear* $T : \mathrm{dom}\ T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$*, com* $\mathrm{dom}\ T$ *denso em* $\mathcal{H}$*, é hermitiano se para todo* $\xi, \eta \in \mathrm{dom}\ T$*,*

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, T\eta\rangle \tag{1.1}$$

b) Se em a) $\mathrm{dom}\ T$ *não for denso em* $\mathcal{H}$ *e vale (1.1) diremos que* T *é simétrico.*

Exemplo 1.1.6 *Os operadores* T_N *e* T_D *do Exemplo 1.1.1 são hermitianos. Verificaremos que* T_D *é hermitiano,* T_N *se verifica de forma análoga. Lembre que* $\mathrm{dom}\ T_D = \{\psi \in$

$C^2[a,b] : \psi(a) = \psi(b) = 0\} \subset L^2[a,b]$. *Sejam* $\xi, \eta \in \text{dom } T_D$, *então*

$$\begin{aligned}
\langle T_D\xi, \eta\rangle_{L^2[a,b]} &= \int_a^b \overline{T_D\xi(x)}\eta(x)dx = \int_a^b -\overline{\xi''(x)}\eta(x)dx \\
&= -[-\overline{\xi}'(x)\eta(x)|_a^b - \int_a^b \overline{\xi}'(x)\eta'(x)dx] = \int_a^b \overline{\xi}'(x)\eta'(x)dx \\
&= \overline{\xi}(x)\eta'(x)|_a^b - \int_a^b \overline{\xi}(x)\eta''(x)dx = \langle \xi, T_D\eta\rangle_{L^2[a,b]}.
\end{aligned}$$

Vamos agora definir o operador adjunto, T^*, de um operador $T : \text{dom } T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ com dom T denso em $\mathcal{H}$. O domínio dom T^* é definido por

$$\text{dom } T^* = \{\eta \in \mathcal{H} : \text{ existe } \phi \in \mathcal{H} \text{ de modo que } \langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, \phi\rangle, \ \forall \xi \in \text{dom } T\}$$

e

$$T^*\eta = \phi.$$

Observe que um operador linear T é hermitiano se, e somente se, $T \subset T^*$ e que se S e T são dois operadores lineares com $T \subset S$, então $S^* \subset T^*$.

Definição 1.1.5 *Um operador* $T : \text{dom } T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *é auto-adjunto se* $T = T^*$.

Observe que pelo Teorema de Hellinger-Toeplitz (veja [18]) se $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador linear satisfazendo

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, T\eta\rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H},$$

então T é um operador limitado e auto-adjunto. Observe também que todo operador auto-adjunto é hermitiano.

Seguem alguns resultados sobre os operadores auto-adjuntos e hermitianos.

Lema 1.1.1 *O gráfico* $\mathcal{G}(T^*) = (J\mathcal{G}(T))^\perp$ *em* $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$, *sendo* $J(\xi, \eta) = (-\eta, \xi)$ *um operador unitário.*

Demonstração: Como $(\eta, \phi) \in \mathcal{G}(T^*)$ se, e somente se, $\langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, \phi\rangle$, $\forall \xi \in \text{dom } T$ se, e somente se,

$\langle(-T\xi, \xi), (\eta, \phi)\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = 0$, $\forall \xi \in \text{dom } T$ se, e somente se, $\langle J(\xi, T\xi), (\eta, \phi)\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = 0$, $\forall \xi \in \text{dom } T$ se, e somente se, $(\eta, \phi) \in (J\mathcal{G}(T))^\perp$, o resultado segue. ■

Corolário 1.1.1 *Se* $T : \mathrm{dom}\, T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *é um operador linear com* dom T *denso em* $\mathcal{H}$, *então*

a) T^* *é fechado. Em particular, todo operador auto-adjunto é fechado.*

b) T *é fechável se, e somente se,* dom T^* *é denso em* $\mathcal{H}$. *Além disso, se* T *é fechável temos que* $T^{**} = \overline{T}$ *e* $\overline{T}^* = T^*$.

Proposição 1.1.1 *Todo operador hermitiano é fechável e seu fecho,* $\overline{T}$, *também é hermitiano. Além disso se,* $\overline{T}$ *for auto-adjunto ele será a única extensão auto-adjunta de* T.

Demonstração: Se T é hermitiano temos, $T \subset T^*$ e como T^* é fechado segue que T é fechável. Como $T \subset T^*$ segue que $T^{**} \subset T^*$. Portanto $\overline{T} = T^{**} \subset T^* = (\overline{T})^*$ e daí $\overline{T}$ é hermitiano. Agora se $\overline{T}$ é auto-adjunto e A for uma extensão auto-adjunta de T, então $A = A^* \subset T^* = \overline{T}^* = \overline{T}$ e por outro lado $\overline{T} = T^{**} \subset A$ e segue que $\overline{T} = A$. ∎

Definição 1.1.6 *Seja* T *hermitiano.* T *é dito essencialmente auto-adjunto se* $\overline{T}$ *é auto-adjunto.*

Teorema 1.1.4 *Se o espaço de Hilbert separável* $\mathcal{H}$ *possui uma base ortonormal de autovetores de um operador hermitiano* $T : \mathrm{dom}\, T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, *então* T *é essencialmente auto-adjunto e* $\sigma(\overline{T})$ *é o fecho em* $\mathbb{R}$ *do conjunto dos autovalores de* T.

Exemplo 1.1.7 T_D *e* T_N *são hermitianos e essencialmente auto-adjuntos.*

Exemplo 1.1.8 *Seja* $T : \mathrm{dom}\, T_N \cap \mathrm{dom}\, T_D \subset L^2[a,b],\ T\psi = -\psi''$. *Então* T *é hermitiano e não é essencialmente auto-adjunto pois* $\overline{T_N}$ *e* $\overline{T_D}$ *são duas extensões auto-adjuntas de* T *distintas.*

Definição 1.1.7 *Seja* T *um operador auto-adjunto.*

a) O espectro essencial de T *é o conjunto* $\sigma_{ess}(T)$ *dos pontos de acumulação do* $\sigma(T)$ *juntamente com os autovalores de* T *de multiplicidade infinita.*

b) O espectro discreto de T *é o conjunto* $\sigma_d(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{ess}(T)$, *ou seja, o conjunto dos autovalores isolados de* T, *cada um deles com multiplicidade finita.*

Diremos que um operador auto-adjunto T tem espectro discreto se $\sigma_{\mathrm{ess}}(T) = \emptyset$. O espectro pontual de um operador auto-adjunto T, $\sigma_p(T)$, é o fecho do conjunto dos autovalores de T, neste caso o restante do espectro é chamado de espectro contínuo de T,

$\sigma_c(T)$, que pode ser decomposto em espectro absolutamente contínuo, $\sigma_{ac}(T)$, e espectro singular contínuo, $\sigma_{sc}(T)$, de acordo com a decomposição de Lebesgue da parte contínua da medida espectral de T. Diremos que um operador auto-adjunto T tem espectro pontual puro se $\sigma_c(T) = \emptyset$.

Exemplo 1.1.9 *[Hamiltoniana do Oscilador Harmônico] Considere o operador* $T_{0H} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$*, em que* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *é o espaço de Schwarz, dado por*

$$(T_{0H}\psi)(x) = -\psi''(x) + x^2\psi(x). \tag{1.2}$$

É padrão verificar que T_{0H} *é hermitiano. A equação de autovalores para este operador* $T_{0H}\psi = \lambda\psi$ *tem como solução as funções de Hermite (veja [60, 58])*

$$\psi_j(x) = N_j e^{x^2/2} \frac{d^j e^{-x^2}}{dx^j}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

(em que N_j *é uma constante de normalização) sendo os autovalores correspondentes* $\lambda_j = 2(j + 1/2)$*. Como* $\{\psi_j\}$ *é uma base ortonormal de* $L^2(\mathbb{R})$*, segue do Teorema 1.1.4 que* $T_{0H} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ *com a lei dada em (1.2) é essencialmente auto-adjunto e* $\overline{T_{0H}}$ *(única extensão auto-adjunta de* T_{0H}*) é conhecido como o Hamiltoniano do Oscilador Harmônico unidimensional. Além disso,* $\sigma(\overline{T_{0H}}) = \{\lambda_j\}$*. Observe que* $\overline{T_{0H}}$ *tem espectro discreto.*

Exemplo 1.1.10 *[Veja [17]] Considere o operador* $T : C^\infty(S^1) \subset L^2(S^1) \to L^2(S^1)$ *dado por*

$$(T\psi)(x) = -\psi''(x).$$

É padrão verificar que T *é hermitiano. O conjunto* $\{\psi_n(x) = e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}\}$ *é uma base ortonormal de* $L^2(S^1)$ *e como* $T\psi_n = n^2\psi_n$*, segue do Teorema 1.1.4 que* $\overline{T}$ *é auto-adjunto;* $\overline{T}$ *é conhecido como o Hamiltoniano da partícula livre em* S^1 *e ainda* $\sigma(\overline{T}) = \{n^2\}$*. Observe que, exceto o zero, cada autovalor tem multiplicidade 2, logo* $\overline{T}$ *tem espectro discreto.*

Teorema 1.1.5 *Seja* T *hermitiano. Então*

a) T *é essencialmente auto-adjunto se, e somente se, a dimensão do* $N(T^* + i)$ *for igual a dimensão do* $N(T^* - i)$ *e ambas forem iguais a zero.*

b) T *possui extensão auto-adjunta se, e somente se, a dimensão do* $N(T^* + i)$ *for igual a dimensão do* $N(T^* - i)$ *e existe uma correspondência biunívoca entre extensões auto-adjuntas de* T *e operadores unitários entre* $N(T^* + i)$ *e* $N(T^* - i)$*.*

Observe que do Teorema 1.1.5 existem as seguintes possibilidades para um operador $T : \text{dom}\, T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ hermitiano:

i) T não possui extensão auto-adjunta (quando a dimensão do $N(T^* + i)$ for diferente da dimensão do $N(T^* - i)$);

ii) T possui apenas uma extensão auto-adjunta que é $\overline{T}$ (quando a dimensão do $N(T^* + i)$ for igual a dimensão do $N(T^* - i)$ e ambas forem zero);

iii) T possui infinitas extensões auto-adjuntas (quando a dimensão do $N(T^* + i)$ for igual a dimensão do $N(T^* - i)$ e tal dimensão for maior ou igual a 1).

1.2 Operador de Multiplicação

Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de Borel e μ uma medida positiva σ-finita. Para $\varphi : E \to \mathbb{C}$ mensurável e limitada em qualquer subconjunto mensurável e limitado de E, definimos o operador de multiplicação $\mathcal{M}_\varphi : \text{dom}\, \mathcal{M}_\varphi \subset L^2_\mu(E) \to L^2_\mu(E)$ por

$$\mathcal{M}_\varphi \psi = \varphi\psi$$

e

$$\text{dom}\, \mathcal{M}_\varphi = \{\psi \in L^2_\mu(E) : (\varphi\psi) \in L^2_\mu(E)\}.$$

Proposição 1.2.1 dom $\mathcal{M}_\varphi$ *é denso em* $L^2_\mu(E)$ *e* $(\mathcal{M}_\varphi)^* = \mathcal{M}_{\overline{\varphi}}$.

Demonstração: Se $\phi \in (\text{dom}\, \mathcal{M}_\varphi)^\perp$ e $E_n = \varphi^{-1}([0, n])$, então E_n é mensurável, $\mu(E \setminus \cup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$ e $\phi_n := \mathcal{X}_{E_n}\phi \in \text{dom}\, \mathcal{M}_\varphi$. Assim $0 = \langle \phi, \phi_n \rangle = \int_{E_n} \overline{\phi}\phi_n d\mu = \int_E \overline{\phi}\phi d\mu = \int_{E_n} |\phi|^2 d\mu$. Logo $\phi = 0$ $\mu-$q.t.p. em E_n, e portanto $\phi = 0$ $\mu-$q.t.p. em E, donde dom $\mathcal{M}_\varphi$ é denso em $L^2_\mu(E)$. Note que dom $\mathcal{M}_\varphi =$ dom $\mathcal{M}_{\overline{\varphi}}$. Se $f \in \text{dom}\, (\mathcal{M}_\varphi)^*$, então para todo $\psi \in \text{dom}\, \mathcal{M}_\varphi$ vale $\langle f, \mathcal{M}_\varphi\psi \rangle = \langle (\mathcal{M}_\varphi)^* f, \psi \rangle$, ou seja, $\int_E \overline{f}\psi\varphi d\mu = \int_E \overline{(\mathcal{M}_\varphi)^* f}\psi d\mu$, $\forall \psi \in \text{dom}\, \mathcal{M}_\varphi$. Logo $\int_E \overline{\overline{\varphi} f}\psi d\mu - \int_E \overline{\mathcal{M}^*_\varphi f}\psi d\mu = 0$, $\forall \psi \in \text{dom}\, \mathcal{M}_\varphi$. Assim $\int_E (\overline{\overline{\varphi} f} - \overline{\mathcal{M}^*_\varphi f})\psi d\mu = 0$, $\forall \psi \in \text{dom}\, \mathcal{M}_\varphi$. Tomando $\psi = (\overline{\varphi} f - \mathcal{M}^*_\varphi f)\mathcal{X}_{E_n} \in \text{dom}\, \mathcal{M}_\varphi$, obtemos

$$\int_E \left|\overline{\varphi} f - \mathcal{M}^*_\varphi f\right|^2 \mathcal{X}_{E_n} d\mu = 0.$$

Então $\int_{E_n} \left|\overline{\varphi} f - \mathcal{M}^*_\varphi f\right| d\mu = 0$ e $\mathcal{M}^*_\varphi f = \overline{\varphi} f$ μ-q.t.p. em E_n. Logo $\mathcal{M}^*_\varphi f = \overline{\varphi} f$ μ-q.t.p. em E. Portanto $\mathcal{M}^*_\varphi = \mathcal{M}_{\overline{\varphi}}$. ∎

Corolário 1.2.1 $\mathcal{M}_\varphi$ *é auto-adjunto se, e somente se,* φ *é real.*

1.3 Limite Indutivo, Teorema de Lidskii e Solução de Equações Envolvendo Operadores

Seja $\{\mathcal{B}_s\}_{s=0}^{\infty}$ uma sequência de espaços de Banach que estão relacionados via transformações lineares

$$\tau_{us} : \mathcal{B}_s \to \mathcal{B}_u, \quad \text{se } s \leq u, \quad \text{com } \|\tau_{us}\| \leq 1,$$

(e $\tau_{ss} = \mathrm{I_d}$) e tais que

$$\tau_{vu}\tau_{us} = \tau_{vs}, \quad \text{se} \quad s \leq u \leq v.$$

Para simplificar a notação usaremos $\tau_s := \tau_{s+1,s}$. A sequência de espaços de Banach $\mathcal{B}_s$ e as transformações τ_{us}, $\{\mathcal{B}_s, \tau_{us}\}$, é chamada de sistema indutivo ou sequência direta de espaços de Banach. Denotaremos por $\mathcal{B}_\infty$ o limite indutivo ou limite direto de $\{\mathcal{B}_s, \tau_{us}\}$ conforme Seção 1.3.4 de [49] ou Seção 1.23 de [55], descrito a seguir.

Seja $\tilde{\mathcal{B}}_\infty$ a união disjunta dos $\mathcal{B}_s$ para $s = 0, 1, 2, \ldots$ e considere a relação de equivalência $\sim$ definida em $\tilde{\mathcal{B}}_\infty$ por $a_s \sim b_u$ se, e somente se, existe um $v \in \mathbb{N}$ com $s \leq v$, $u \leq v$ e $\tau_{vs}(a_s) = \tau_{vu}(b_u)$. Seja $\tilde{\tilde{\mathcal{B}}}_\infty$ o quociente de $\tilde{\mathcal{B}}_\infty$ com essa relação de equivalência. Finalmente, para $a \in \tilde{\tilde{\mathcal{B}}}_\infty$

$$\|a\| = \limsup_{u \to \infty} \|\tau_{us}(a)\|$$

define uma semi-norma em $\tilde{\tilde{\mathcal{B}}}_\infty$. O limite indutivo ou limite direto $\mathcal{B}_\infty$ é o espaço de Banach obtido dividindo $\tilde{\tilde{\mathcal{B}}}_\infty$ pelo núcleo da semi-norma e completando o espaço normado obtido.

De acordo com a construção acima, para cada $s \in \mathbb{N}$ ficam definidas as transformações lineares $\tau_{\infty s} : \mathcal{B}_s \to \mathcal{B}_\infty$ que associa a cada $a \in \mathcal{B}_s$ sua classe de equivalência em $\mathcal{B}_\infty$ satisfazendo $\|\tau_{\infty s}\| \leq 1$ e $\tau_{\infty u}\tau_{us} = \tau_{\infty s}$ se $s \leq u$. Pela construção , a união $\bigcup_{s \geq s_0} \tau_{\infty s}(\mathcal{B}_s)$ é densa em $\mathcal{B}_\infty$, para qualquer $s_0 \in \mathbb{Z}_+$.

Além disso, se $\{A_s \in B(\mathcal{B}_s)\}$ é uma família de operadores limitados definidos para $s \geq s_0$ e tais que

$$A_u\tau_{us} = \tau_{us}A_s, \quad \text{se } s_0 \leq s \leq u \quad \text{e} \quad \sup_s \|A_s\| < \infty,$$

então o operador $A_\infty \in B(\mathcal{B}_\infty)$ denotará o limite indutivo da família de operadores limitados $\{A_s\}$ caracterizado pela propriedade $A_\infty\tau_{\infty s} = \tau_{\infty s}A_s$, para todo $s \geq s_0$.

Outro resultado bem conhecido que utilizaremos é o Teorema de Lidskii, o qual da uma relação entre os autovalores de operadores auto-adjuntos em espaços vetoriais de dimensão finita e cuja demonstração pode ser encontrada em [44]; mais precisamente:

Teorema 1.3.1 (Teorema de Lidskii) *Sejam A e B operadores auto-adjuntos em um espaço vetorial de dimensão finita N e $C = B - A$. Sejam α_n, β_n e γ_n, $n = 1, \ldots, N$ os autovalores repetidos em ordem crescente de A, B e C, respectivamente. Então*

$$\beta_n - \alpha_n = \sum_{j=1}^{N} \sigma_{nj} \gamma_j$$

com $\sum_{j=1}^{N} \sigma_{nj} = 1$, $\sum_{n=1}^{N} \sigma_{nj} = 1$ e $\sigma_{nj} \geq 0$.

Suponha agora que $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são espaços de Hilbert, $A \in B(\mathcal{H}_2)$, $B \in B(\mathcal{H}_1)$, ambos A e B auto-adjuntos, e $V \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Apresentaremos um resultado que garante existência e unicidade de solução para a equação

$$AW - WB = V \tag{1.3}$$

na incógnita W sob a condição

$$\operatorname{dist}(\sigma(A), \sigma(B)) > 0. \tag{1.4}$$

A demonstração da proposição que segue pode ser encontrada em [6]. Se além de (1.4) tivermos que $\sup \sigma(A) < \inf \sigma(B)$ ou $\sup \sigma(B) < \inf \sigma(A)$ diremos que $\sigma(A)$ e $\sigma(B)$ não são entrelaçados.

Proposição 1.3.1 *Se a condição (1.4) vale, então a solução de (1.3) existe e é única em $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e*

$$\|W\| \leq \frac{\pi}{2} \frac{\|V\|}{dist(\sigma(A), \sigma(B))}.$$

Além disso, se $\sigma(A)$ e $\sigma(B)$ não são entrelaçados, então

$$\|W\| \leq \frac{\|V\|}{dist(\sigma(A), \sigma(B))}.$$

Capítulo 2

A Hamiltoniana de Floquet

Neste capítulo faremos uma breve discussão de como as Hamiltonianas de Floquet $K = -i\partial_t + H(t)$ foram introduzidas por Howland [35] e Yajima [59] para estudar sistemas quânticos periódicos no tempo descritos por um sistema Hamiltoniano $H(t)$ agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Também estudaremos a relação de K com o operador de Floquet U_F e apresentaremos alguns resultados relacionando o tipo espectral de K, equivalente ao de U_F, com as propriedades dinâmicas da solução da equação de Schrödinger associada com $H(t)$, a fim de justificar o interesse no estudo do tipo espectral de K.

2.1 Grupos de Evolução

Se $T : \mathrm{dom}\, T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador linear, estamos interessados na solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\frac{\partial}{\partial t}\xi(t) = T\xi(t) \\ \xi(0) = \xi_0 \in \mathrm{dom}\, T \end{cases} . \tag{2.1}$$

Definição 2.1.1 *Uma aplicação $G : \mathbb{R} \to B(\mathcal{H})$ é um grupo de evolução unitário a um parâmetro (ou simplesmente grupo de evolução) se*
a) $G(t)$ é unitário , $\forall t \in \mathbb{R}$;
b) $G(t+s) = G(t)G(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$.

Note que se G é um grupo de evolução unitário, então para todo $t \in \mathbb{R}$, $G(t) = G(t-0) = G(t)G(0)$, logo $G(t)^{-1}G(t) = G(t)^{-1}G(t)G(0)$, e portanto

$$G(0) = \mathrm{I_d}.$$

Além disso, $G(0) = G(t-t) = G(t)G(-t)$ e segue que, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$G(t)^{-1} = G(-t).$$

Definição 2.1.2 *Se $G(t)$ é um grupo unitário a um parâmetro o operador T definido por*

$$\text{dom } T = \left\{ \xi \in \mathcal{H} : \textit{existe} \lim_{h\to 0} \Big(\frac{G(h) - \mathrm{I_d}}{h}\Big)\xi \right\}$$

$$T\xi = i \lim_{h\to 0} \Big(\frac{G(h) - \mathrm{I_d}}{h}\Big)\xi$$

é chamado de gerador infinitesimal de $G(t)$.

Observe que, $\forall t \in \mathbb{R}$, como $G(t)$ é unitário, tem-se

$$\Big(\frac{G(t+h) - G(t)}{h}\Big)\xi = G(t)\frac{(G(h) - \mathrm{I_d})}{h}\xi = \frac{(G(h) - \mathrm{I_d})}{h}G(t)\xi.$$

Assim, se $\xi \in \text{dom } T$, então $G(t)\xi \in \text{dom } T$. Ou seja, $G(t)\text{dom } T \subset \text{dom } T$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Portanto, $G(t)\text{dom } T = \text{dom } T$ e para $\xi \in \text{dom } T$

$$G(t)T\xi = TG(t)\xi, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

De fato,

$$T(G(t)\xi) = i \lim_{h\to 0} G(t)\frac{(G(h) - \mathrm{I_d})}{h}\xi = iG(t) \lim_{h\to 0} \frac{(G(h) - \mathrm{I_d})}{h}\xi = iG(t)(\frac{1}{i}T\xi) = G(t)T\xi.$$

Nessa situação, se T é gerador infinitesimal de $G(t)$, então $\xi(t) = G(t)\xi$ é solução do problema de valor inicial $i\frac{\partial}{\partial t}\xi(t) = T\xi(t)$, com $\xi(0) = \xi \in \text{dom } T$. De fato,

$$\xi(0) = G(0)\xi = \mathrm{I_d}\xi = \xi$$

$$T\xi(t) = TG(t)\xi = i \lim_{h\to 0} \frac{(G(t+h) - G(t))}{h}\xi = i \lim_{h\to 0} \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} = i\frac{\partial \xi(t)}{\partial t}.$$

Proposição 2.1.1 *O gerador infinitesimal T de um grupo unitário $G(t)$ é simétrico, e a solução $\xi(t) = G(t)\xi$ do problema de valor inicial (2.1) é única.*

Demonstração: Para $\xi, \eta \in \text{dom } T$, temos

$$\begin{aligned} \langle T\xi, \eta \rangle &= \lim_{h\to 0} \langle i\frac{G(h) - \mathrm{I_d}}{h}\xi, \eta\rangle = -i \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \langle (G(h) - \mathrm{I_d})\xi, \eta\rangle \\ &= -i \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \langle \xi, (G(-h) - \mathrm{I_d})\eta\rangle = \lim_{h\to 0} \left\langle \xi, \frac{i(G(-h) - \mathrm{I_d})}{-h}\eta \right\rangle \\ &= \langle \xi, T\eta \rangle, \end{aligned}$$

e assim T é um operador simétrico. Para a unicidade da solução do problema de valor inicial, suponha que $\eta(t)$ seja outra solução para o problema, então, para $\forall t$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\xi(t)-\eta(t)\|^2 &= 2\mathrm{Re}\Big\langle[\xi(t)-\eta(t)],\frac{d}{dt}[\xi(t)-\eta(t)]\Big\rangle\\ &= 2\mathrm{Re}\,\langle[\xi(t)-\eta(t)],-iT[\xi(t)-\eta(t)]\rangle=0,\end{aligned}$$

visto que T é simétrico (portanto, $\langle\phi,T\phi\rangle\in\mathbb{R}$, $\forall\phi\in\mathrm{dom}\,T$). Deste modo $\|\xi(t)-\eta(t)\|$ é constante, e como $\xi(0)-\eta(0)=0$, verifica-se que $\xi(t)=\eta(t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$. ■

Definição 2.1.3 *Seja $G(t)$ um grupo de evolução unitário. Então $G(t)$ é:*
a) contínuo em norma ou uniformemente contínuo se, para todo $t_0\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to t_0}\|G(t)-G(t_0)\|=0.$$

b) fortemente contínuo se, para todo $\xi\in\mathcal{H}$ e $t_0\in\mathbb{R}$, $\lim_{t\to t_0}\|G(t)\xi-G(t_0)\xi\|=0$.
c) fracamente contínuo se, para todo $\xi,\eta\in\mathcal{H}$ e $t_0\in\mathbb{R}$, $\lim_{t\to t_0}\langle G(t)\xi,\eta\rangle=\langle G(t_0)\xi,\eta\rangle$.
d) mensurável se, para todos $\xi,\eta\in\mathcal{H}$, a função $\mathbb{R}\ni t\mapsto\langle G(t)\xi,\eta\rangle\in\mathbb{R}$ é Lebesgue mensurável.

Exemplo 2.1.1 *Seja $\varphi:E\to\mathbb{R}$ uma função mensurável e limitada em cada subconjunto limitado do conjunto aberto $E\subset\mathbb{R}^n$; pelo Corolário 1.2.1, $\mathcal{M}_\varphi$ é auto-adjunto. Considere $U(t)=e^{-it\varphi(x)}:=\mathcal{M}_{e^{-it\varphi}}$, $t\in\mathbb{R}$, agindo em $L^2_\mu(E)$, que é um grupo de evolução unitário.*

Para $\psi\in L^2_\mu(E)$, segue-se pelo teorema da convergência dominada que

$$\lim_{h\to0}\|U(h)\psi-\psi\|^2=\lim_{h\to0}\int_E\left|e^{-ih\varphi(x)}-1\right|^2|\psi(x)|^2\,d\mu(x)=0.$$

Portanto, $U(t)$ é fortemente contínuo.

Agora seja T o gerador infinitesimal de $U(t)$, o qual é simétrico pela Proposição 2.1.1. Se $\psi\in\mathrm{dom}\,\mathcal{M}_\varphi$, então

$$\left\|\frac{i}{h}(U(h)\psi-\psi)-\mathcal{M}_\varphi\psi\right\|^2=\int_E\left|\frac{i}{h}(e^{-ih\varphi(x)}-1)-\varphi(x)\right|^2|\psi(x)|^2\,d\mu(x).$$

Como $|e^{iy}-1|\le|y|$, para $y\in\mathbb{R}$,

$$\left|\frac{i}{h}(e^{-ih\varphi(x)}-1)-\varphi(x)\right|\le\left|\frac{1}{h}(e^{-ih\varphi(x)}-1)\right|+|\varphi(x)|\le2\,|\varphi(x)|\,,$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos que

$$\lim_{h\to0}\left\|\frac{i}{h}(U(h)\psi-\psi)-\mathcal{M}_\varphi\psi\right\|=0,$$

assim, $\psi \in \text{dom } T$ *e* $T\psi = \mathcal{M}_\varphi \psi$*, ou seja,* $\mathcal{M}_\varphi \subset T$*. Como* T *é simétrico e* $\mathcal{M}_\varphi$ *é auto-adjunto, segue que* $\mathcal{M}_\varphi = T$*. Pela Proposição 2.1.1,* $U(t)\psi = e^{-it\varphi}(x)\psi$ *é uma solução de*

$$i\frac{d\psi}{dt}(t) = \mathcal{M}_\varphi \psi(t), \quad \psi(0) = \psi \in \text{dom } \mathcal{M}_\varphi,$$

e é a única.

Os seguintes resultados da teoria de grupos de evolução unitários são bem conhecidos e suas demonstrações podem ser encontradas em [17, 50].

Proposição 2.1.2 *Se* $G(t)$ *é um grupo de evolução unitário em um espaço de Hilbert separável* $\mathcal{H}$*, então b), c) e d) na Definição 2.1.3 são equivalentes.*

Teorema 2.1.1 *Se* $G(t)$ *é um grupo de evolução unitário, então são equivalentes:*
a) $G(t)$ *é contínuo em norma.*
b) Existe $T \in B(\mathcal{H})$ *auto-adjunto de forma que*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{i(G(h) - \mathrm{I_d})}{h} - T \right\| = 0,$$

logo, $T \in B(\mathcal{H})$ *é o gerador infinitesimal de* $G(t)$*.*
c) Existe $T \in B(\mathcal{H})$ *auto-adjunto de forma que*

$$G(t) = e^{-itT} := \sum_{n=0}^{\infty} (-itT)^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, T *em b) e c) é o mesmo operador.*

Frequentemente, dado um operador auto-adjunto $T : \text{dom } T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, tenta-se construir um grupo de evolução unitário para o qual T é o seu gerador infinitesimal. Isso é uma situação comum em mecânica quântica.

Teorema 2.1.2 *Se* $T : \text{dom } T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *é auto-adjunto, então existe um único grupo de evolução unitário fortemente contínuo* $U(t)$ *de modo que* T *é seu gerador infinitesimal. Neste caso, escrevemos* $U(t) = e^{-itT}$*,* $\forall t \in \mathbb{R}$*.*

A recíproca do Teorema 2.1.2 é o bem conhecido Teorema de Stone:

Teorema 2.1.3 (Stone) *Se* $U(t)$ *é grupo unitário fortemente contínuo, então seu gerador infinitesimal* T *é auto-adjunto, ou seja,* $U(t) = e^{-itT}$*.*

Exemplo 2.1.2 *[Translação Espacial] Seja* $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ *e, para* $t \in \mathbb{R}$,

$$(U(t)\psi)(x) := \psi(x-t), \quad \psi \in \mathcal{H}.$$

Então, como demonstrado no Exemplo 5.4.4 de [17], $U(t)$ *é um grupo de evolução unitário fortemente contínuo e seu gerador infinitesimal é o operador momento* P, *definido por* $\text{dom } P = \mathcal{H}_1(\mathbb{R}) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : \exists\, g \in L^2(\mathbb{R}),$ *tal que,* $\int_{\mathbb{R}} \psi \frac{d\varphi}{dx} dx = -\int_{\mathbb{R}} g\varphi dx, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}$ *e* $P\psi = -i\psi'$.

Exemplo 2.1.3 *[Dilatações] Seja* $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. *A dilatação em* $\mathbb{R}$ *é a função* $x \mapsto e^{-s}x,\ s \in \mathbb{R}$, *que induz o operador* $U_d(s) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$,

$$(U_d(s)\psi)(x) = e^{-s/2}\psi(e^{-s}x), \quad \psi \in \mathcal{H}.$$

Então, como demonstrado no Exemplo 5.4.8 de [17], $U_d(s)$ *é um grupo de evolução unitário fortemente contínuo e seu gerador infinitesimal é o fecho do operador essencialmente auto-adjunto* T_d, *dado por* $\text{dom } T_d = C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$(T_d\phi)(x) = -ix\phi'(x)\frac{-i}{2}\phi(x).$$

Observação 2.1.1 *Se* T *é auto-adjunto e* $U(t) = e^{-itT}$, *então se* $\xi \in \text{dom } T$,

$$\langle U(t)\xi, TU(t)\xi\rangle = \langle U(t)\xi, U(t)T\xi\rangle = \langle \xi, T\xi\rangle$$

Isto é interpretado como a lei de conservação de energia em Mecânica Quântica.

Observação 2.1.2 *[Exponencial de operadores] Observe que se* $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_1$ *é um operador linear e limitado, então define-se* $e^T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_1$ *por*

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}T^k = \mathrm{I_d} + T + \frac{1}{2!}T^2 + \frac{1}{3!}T^3 + \dots,$$

o qual também é um operador linear limitado.

2.2 Sistema Dependente do Tempo

Começaremos com a definição de propagador unitário.

Definição 2.2.1 *a) Um propagador fortemente contínuo sobre o espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *é uma família de operadores* $U(t,s)$, $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, *satisfazendo* *i) $U(t,s) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ são invertíveis, para cada t, s;*

ii) $U(t,t) = Id, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$;

iii) $U(t,r)U(r,s) = U(t,s), \quad \forall\, t, r, s$;

iv) Para cada $\xi \in \mathcal{H}$ a aplicação $\mathbb{R}^2 \ni t, s \mapsto U(t,s)\xi$ é contínua.

b) Uma tal família é um propagador unitário se além de a) satisfaz $U(t,s)$ é unitário, para todo t, s.

Note que de iii) segue que $U(t,s)^{-1} = U(s,t)$. Também $U(t,s) = U(t,0)U(0,s) = U(t,0)U(s,0)^{-1}$.

Se para cada $t \in \mathbb{R}$ tivermos associado um operador auto-adjunto $H(t)$ queremos saber quando a equação de Schrödinger com Hamiltoniana dependente do tempo

$$\begin{cases} i\frac{d\xi(t)}{dt} = H(t)\xi(t) \\ \xi(s) = \xi_s \end{cases} \tag{2.2}$$

admite uma solução. Mais precisamente, quando é possível encontrar um propagador unitário $U(t,s)$ de forma que $\xi(t) = U(t,s)\xi_s$ seja solução de (2.2). O seguinte resultado (Teorema X.70 em [52]) contém condições suficientes convenientes na Hamiltoniana $H(t)$ para a existência dos propagadores unitários $U(t,s)$.

Teorema 2.2.1 *Considere a aplicação $H(t)$, que a cada $t \in \mathbb{R}$ associa um operador auto-adjunto $H(t)$, de modo que*

a) O domínio $\mathcal{D}$ de $H(t)$, denso em $\mathcal{H}$, é independente de t.

b) A função

$$t, s \mapsto (t-s)^{-1}[(i + H(t))(i + H(s))^{-1} - \mathrm{I_d}]$$

estende-se a uma função fortemente contínua em $\mathbb{R}^2$.

Então existe um único propagador unitário $U(t,s)$ de forma que $U(t,s)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ e

$$i\frac{d}{dt}U(t,s)\psi = H(t)U(t,s)\psi,$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}$.

O teorema acima se aplica quando $H(t) = H$, para todo t, e neste caso tem-se que $U(t,s) = e^{-i(t-s)H}$.

Observações. 1) Se para cada s existe uma única solução $U(t,s)$ de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t,s) &= -iH(t)U(t,s) \\ U(s,s) &= Id, \end{cases} \tag{2.3}$$

então para cada r tem-se $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$. De fato, se

$$V(t) := U(t,r)U(r,s) - U(t,s),$$

então para $\xi \in \text{dom } H(s)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|V(t)\xi\|^2 &= \langle -iH(t)U(t,r)U(r,s)\xi + iH(t)U(t,s)\xi, V(t)\xi\rangle + \\ &\quad \langle V(t)\xi, -iH(t)U(t,r)U(r,s)\xi + iH(t)U(t,s)\xi\rangle \\ &= \langle -iH(t)V(t)\xi, V(t)\xi\rangle + \langle V(t)\xi, -iH(t)V(t)\xi\rangle = 0\end{aligned}$$

e como $V(r) = U(r,r)U(r,s) - U(r,s) = 0$ tem-se que $V(t) = 0$, $\forall\, t$, e o resultado segue.
2) Se para cada s existe uma única solução de (2.3) e $H(t)$ é auto-adjunto, para cada t, então $U(t,s)$ são unitários. De fato, para $\xi \in \text{dom } H(s)$

$$\begin{aligned}i\frac{d}{dt}\|U(t,s)\xi\|^2 &= i\frac{d}{dt}\langle U(t,s)\xi, U(t,s)\xi\rangle \\ &= \langle -H(t)U(t,s)\xi, U(t,s)\xi\rangle + \langle U(t,s)\xi, H(t)U(t,s)\xi\rangle = 0\end{aligned}$$

como $\|U(s,s)\xi\| = \|\xi\|$ segue que $\|U(t,s)\xi\| = \|\xi\|$, $\forall\, t$. Assim, para cada $\xi \in \text{dom } H(s)$ denso em $\mathcal{H}$ tem-se que $\|U(t,s)\xi\| = \|\xi\|$ e como os $U(t,s)$ são invertíveis o resultado segue.
3) Se para cada s existe uma única solução de (2.3) e $H(t+T) = H(t)$, então $U(t+T, s+T) = U(t,s)$, $\forall\, t, s$. De fato se, $V(t) := U(t+T, s+T) - U(t,s)$, então para $\xi \in \text{dom } H(s)$

$$\frac{d}{dt}\|V(t)\xi\|^2 = 0$$

e como $V(s) = U(s+T, s+T) - U(s,s) = 0$ tem-se que $V(t) = 0$, $\forall\, t$ e o resultado segue.

Resultados mais gerais de existência e unicidade de propagadores unitários para a equação de Schrödinger correspondendo a uma Hamiltoniana $H(t)$ podem ser encontrados, entre outros, em [25, 37, 38, 42, 43, 56]. Uma das condições que é enfraquecida é que o domínio de $H(t)$ não precisa ser constante. O seguinte exemplo mostra que a solução pode existir mesmo que $\text{dom}H(t) \cap \text{dom}H(s) = \{0\}$, para $t \neq s$.

Exemplo 2.2.1 *Sejam $D = -i\frac{d}{dx}$ em $L^2(\mathbb{R})$, com* dom $D = \mathcal{H}_1(\mathbb{R})$ *denso em $L^2(\mathbb{R})$ e $q \in L^\infty(\mathbb{R})$, com $q(x)$ real e sem derivada em qualquer ponto. Considere*

$$H(t) = e^{iq(x)t} D e^{-iq(x)t}$$

com dom $H(t) = \{e^{iq(x)t}\psi(x) : \psi \in \text{dom } D\}$ *denso em $L^2(\mathbb{R})$, então $H(t)$ é auto-adjunto para qualquer t. Agora, se $t \neq s$, então* dom $H(t) \cap$ dom $H(s) = \{0\}$*. De fato, se*

$\phi \in$ dom $H(t) \cap$ dom $H(s)$, então $\phi(x) = e^{iq(x)t}\psi(x) = e^{iq(x)s}\varphi(x)$, para $\psi, \varphi \in$ dom D, logo $\psi(x) = e^{-iq(x)t}e^{iq(x)s}\varphi(x) \in$ dom D, e portanto φ só pode ser nula, pois q não tem derivada em qualquer ponto e o resultado segue. Contudo, para $\psi \in$ dom $H(s)$, s fixado, a equação de Schrödinger

$$\begin{cases} i\frac{d\psi}{dt}(t) &= H(t)\psi(t) \\ \psi(s) &= \psi \end{cases}$$

possui uma solução

$$\psi(t) = \underbrace{e^{iq(x)t}e^{-i(D+q(x))(t-s)}e^{-iq(x)s}}_{U(t,s)}\psi,$$

pois para $\psi \in$ dom $H(s)$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(t,s)\psi &= iq(x)e^{iq(x)t}e^{-i(D+q(x))(t-s)}e^{-iq(x)s}\psi \\ &\quad + e^{iq(x)t}(-i)(D+q(x))e^{-i(D+q(x))(t-s)}e^{-iq(x)s}\psi \\ &= -ie^{iq(x)t}De^{-i(D+q(x))(t-s)}e^{-iq(x)s}\psi \\ &= -ie^{iq(x)t}De^{-iq(x)t}e^{iq(x)t}e^{-i(D+q(x))(t-s)}e^{-iq(x)s}\psi \\ &= -iH(t)U(t,s)\psi \end{aligned}$$

e $U(t,s)$ é propagador unitário.

2.3 Integral Direta ou Soma Direta Contínua

As demonstrações dos resultados enunciados nessa seção podem ser encontradas em [46] e [53].

Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável. Seja uma aplicação

$$\Omega \ni \omega \mapsto \xi_\omega \in \mathcal{H}.$$

Denotaremos $\xi := \{\xi_\omega\}_{\omega\in\Omega} = \{\xi(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$. Dizemos que ξ é mensurável se para todo $\eta \in \mathcal{H}$ a função

$$\Omega \ni \omega \mapsto \langle \eta, \xi_\omega \rangle$$

é mensurável. Disto, segue que para $\xi = \{\xi_\omega\}$ e $\eta = \{\eta_\omega\}$ mensuráveis o produto interno

$$\Omega \ni \omega \mapsto \langle \xi_\omega, \eta_\omega \rangle = \sum_k \langle \xi_\omega, e_k \rangle \langle e_k, \eta_\omega \rangle$$

em que $\{e_k\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$, é mensurável. Defina $\xi + \eta = \{\xi_\omega + \eta_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ e para $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha\xi = \{\alpha\xi_\omega\}_\omega$.

Definição 2.3.1 *O espaço vetorial dos $\xi = \{\xi_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ acima em que*

$$\int_\Omega \|\xi_\omega\|^2 d\mu(\omega) < \infty,$$

com produto interno $\langle \xi, \eta\rangle := \int_\Omega \langle \xi_\omega, \eta_\omega\rangle d\mu(\omega)$ é um espaço de Hilbert chamado de integral direta ou soma direta contínua de $\mathcal{H}$ relativamente a $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, e denotado por $\int_\Omega^\oplus \mathcal{H} d\mu(\omega)$.

Um exemplo simples é $L^2(\mathbb{R}) = \int_\mathbb{R}^\oplus \mathbb{C}\, dt$.

Se $\{e^k\}$ é base ortonormal de $\mathcal{H}$, então cada vetor $\xi = \{\xi_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ corresponde exatamente ao conjunto das seqüências numéricas

$$a_k(\omega) = \langle e^k, \xi_\omega\rangle$$

e $\|\xi\|^2 = \sum_k \int_\Omega |a_k(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \infty$.

Denotaremos $\mathcal{I} := \int_\Omega^\oplus \mathcal{H} d\mu(\omega)$. Se $\phi : \Omega \to \mathbb{C}, \phi \in L^\infty_\mu(\Omega)$, define-se o operador de multiplicação $\mathcal{M}_\phi : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ por

$$(\mathcal{M}_\phi \xi)_\omega = \phi(\omega)\xi_\omega, \quad \omega \in \Omega,$$

e verifica-se que

$$\|\mathcal{M}_\phi\| = \text{supess } |\phi(\omega)| = \|\phi\|_\infty$$

e $\mathcal{C}$, denotará o conjunto desses operadores de multiplicação.

Definição 2.3.2 *Um operador limitado T em $\mathcal{I} = \int_\Omega^\oplus \mathcal{H} d\mu(\omega)$ é dito ser fibrado, se existe uma função $T(\cdot)$ de Ω em $B(\mathcal{H})$ de forma que, para todo $\xi \in \mathcal{I}$,*

$$(T\xi)_\omega = T(\omega)\xi_\omega.$$

Escreveremos $T = \int_\Omega^\oplus T(\omega) d\mu(\omega) = \{T(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$. Diremos que $T(\cdot)$ é mensurável se, para todas $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, a aplicação $\omega \mapsto \langle \varphi, T(\omega)\psi\rangle$ é mensurárel. Tem-se que $\|T\| =$ supess $\|T(\omega)\|$.

Valem os seguintes resultados.

Teorema 2.3.1 *Um operador limitado $T : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ é fibrado se, e somente se, T comuta com todo operador em $\mathcal{C}$.*

Proposição 2.3.1 *Seja T fibrado. Então:*

a) T é invertível se, e somente se, $T(\omega)$ é invertível para ω $\mu-$q.t.p. e supess $\|T(\omega)^{-1}\| < \infty$.

b) T é unitário se, e somente se, $T(\omega)$ é unitário $\mu-$q.t.p..

c) No caso $\Omega = \mathbb{R}$ e $\mu = l$ (medida de Lebesgue), para $\sigma \in \mathbb{R}$ denote por T_σ o operador em $\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathcal{H} dt$ dado por

$$(T_\sigma \xi)_t = \xi_{t-\sigma}.$$

Então T é constante se, e somente se, T comuta com T_σ, $\forall\, \sigma \in \mathbb{R}$.

Definição 2.3.3 *Uma função $T(\cdot)$ de um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ no espaço dos operadores auto-adjuntos em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ (não necessariamente limitados) é dita mensurável se a função $(T(\cdot)+i)^{-1}$ é mensurável. Dada uma tal função, definimos um operador T em $\mathcal{I} = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathcal{H} d\mu$ com*

$$\text{dom } T = \left\{ \xi \in \mathcal{I} : \xi_\omega \in \text{dom } T(\omega)\ \mu - q.t.p.\ e\ \int_\Omega \|T(\omega)\xi_\omega\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu(\omega) < \infty \right\}$$

por

$$(T\xi)_\omega = T(\omega)\xi_\omega.$$

Escreve-se $T = \int_{\Omega}^{\oplus} T(\omega) d\mu(\omega) = \{T(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$.

As propriedades de tais operadores são resumidas por:

Teorema 2.3.2 *Seja $T = \int_{\Omega}^{\oplus} T(\omega) d\mu(\omega)$ em que $T(\cdot)$ é mensurável e $T(\omega)$ é auto-adjunto, para cada ω. Então:*

a) O operador T é auto-adjunto.

b) Um operador auto-adjunto T em $\mathcal{I}$ tem a forma $\int_{\Omega}^{\oplus} T(\omega) d\mu(\omega)$ se, e somente se, $(T+i)^{-1}$ é um operador fibrado.

c) Para qualquer função de Borel limitada F em $\mathbb{R}$

$$F(T) = \int_{\Omega}^{\oplus} F(T(\omega)) d\mu(\omega).$$

d) $\lambda \in \sigma(T)$ se, e somente se, $\forall\, \epsilon > 0$

$$\mu(\{\omega : \sigma(T(\omega)) \cap (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \neq \emptyset\}) > 0.$$

e) λ é um autovalor de T se, e somente se,

$$\mu(\{\omega : \lambda \text{ é um autovalor de } T(\omega)\}) > 0.$$

f) Se cada $T(\omega)$ tem espectro absolutamente contínuo puro, então T também tem espectro absolutamente contínuo puro.

A parte f) do teorema acima diz que uma condição suficiente para $T = \int_{\Omega}^{\oplus} T(\omega)d\mu(\omega)$ ter espectro absolutamente contínuo puro é que cada $T(\omega)$ tenha espectro absolutamente contínuo puro. Mas essa condição não é necessária. Na verdade, T pode ter espectro absolutamente contínuo puro e cada $T(\omega)$ ter espectro discreto. O seguinte exemplo ilustra este fenômeno.

Exemplo 2.3.1 *Sejam $\Omega = [0,1]$ com medida de Lebesgue, $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita e $T = \int_{[0,1]}^{\oplus} T(t)dt$ com cada $T(t)$ auto-adjunto. Suponha que $\{\psi_n(.)\}_{n=1}^{\infty}$ são funções de $[0,1]$ em $\mathcal{H}$ de classe C^1, e $\{\lambda_n(.)\}_{n=1}^{\infty}$ são funções de $[0,1]$ em $\mathbb{C}$ de classe C^1 tais que:*
i) $\frac{d\lambda_n}{dt}(t) > 0, \; \forall \, n, t.$
ii) $T(t)\psi_n(t) = \lambda_n(t)\psi_n(t)$, *para todo* $t \in [0,1]$; $n = 1, 2, \ldots$.
iii) Para cada t, o conjunto $\{\psi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal para $\mathcal{H}$.
Então T tem espectro absolutamente contínuo puro.

Demonstração: Para cada n defina

$$\mathcal{I}_n = \{\xi \in \mathcal{I} : \xi = f\psi_n; f \in L^2([0,1])\}.$$

Então os $\mathcal{I}_n$ são subespaços fechados que são mutuamente ortogonais e $\mathcal{I} = \bigoplus \mathcal{I}_n$, pois cada $\xi \in \mathcal{I}$ tem uma expansão

$$\xi_t = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n(t), \xi_t \rangle \psi_n(t).$$

Além disso, $\mathcal{I}_n \subset \text{dom}\, T$ com $T(\mathcal{I}_n) \subset \mathcal{I}_n$. Considere a aplicação unitária $U_n : \mathcal{I}_n \mapsto L^2([0,1])$, dada por $U_n(f\psi_n) = f$. Então $T_n \equiv U_n T\big|_{\mathcal{I}_n} U_n^{-1}$ é dado por

$$(T_n f)_t = \lambda_n(t) f(t).$$

Basta mostrar que cada T_n tem espectro absolutamente contínuo puro. Defina $W : L^2([0,1]) \to L^2([\lambda_n(0), \lambda_n(1)])$ por

$$(Wf)(t) = \left(\frac{d}{dt}\lambda_n^{-1}(t)\right)^{\frac{1}{2}} f(\lambda_n^{-1}(t)),$$

então

$$(WT_nW^{-1}g)(t) = tg(t).$$

Assim, T_n é unitariamente equivalente à $\mathcal{M}_t$, e o resultado segue. ■

2.4 Formalismo de Howland

Nesta seção descreveremos um método devido a Howland e Yajima ([35, 36, 59]) olhando problemas dependentes do tempo em problemas independentes do tempo. As equações de Hamilton para um sistema com função Hamiltoniana $H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t)$ são

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad -\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Se H depende em t, a energia não é conservada para um tal sistema, mas pode-se montar um sistema correspondente que conserva energia introduzindo t como uma coordenada e a energia E como seu momento conjugado. A nova Hamiltoniana é

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t, E) = E + H(\mathbf{p}; \mathbf{q}; t)$$

portanto, se denotarmos por σ o novo parâmetro "temporal", as equações de Hamilton correspondentes são

$$\frac{dq_i}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad -\frac{dp_i}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{\partial K}{\partial E} = 1, \qquad -\frac{dE}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Note que $t = \sigma + cte$ e, assim, essas duas formulações são equivalentes.

Pode-se reformular o problema em Mecânica Quântica similarmente. Seja $H(t)$ uma família de operadores auto-adjuntos em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e seja $\mathcal{K} := L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}, dt) \equiv \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathcal{H} dt$. Definindo K em $\mathcal{K}$ por

$$(Kf)(t) = -i\frac{d}{dt}f(t) + H(t)f(t),$$

existiria (de acordo com a analogia clássica) uma correspondência entre as soluções de

$$\frac{d}{d\sigma}\varphi(\sigma) = -iK\varphi(\sigma)$$

em $\mathcal{K}$ e as soluções do problema dependente do tempo

$$\frac{d}{dt}\varphi_s(t) = -iH(t)\varphi_s(t), \qquad \varphi_s(s) = \psi,$$

em $\mathcal{H}$. Os detalhes técnicos são:

Proposição 2.4.1 *Dado um propagador fortemente contínuo e limitado $U(t,s)$ sobre $\mathcal{H}$, tem-se que $W_\sigma : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, dado por*

$$(W_\sigma f)_t = U(t, t-\sigma) f(t-\sigma)$$

é um grupo limitado fortemente contínuo. Se K é o gerador infinitesimal de W_σ, então escreve-se $W_\sigma = e^{-iK\sigma}$.

Por exemplo, se $U(t,s) = \mathrm{I_d}$, $\forall\, t,s$, então $(W_\sigma f)_t = \mathrm{I_d} f(t-\sigma) = (T_\sigma f)_t$, e portanto $e^{-iK\sigma} = T_\sigma$ e é conhecido que $K = -i\frac{d}{dt}$.

Teorema 2.4.1 *Um grupo limitado fortemente contínuo $e^{-i\sigma K}$ sobre $\mathcal{K}$ é um grupo de evolução limitado se, para cada σ, $e^{-i\sigma K}T_\sigma^*$ é um operador fibrado e limitado.*

Note que pelo Teorema 2.3.1 esse operador é fibrado se, e somente se,

$$e^{-i\sigma K}T_\sigma^*\mathcal{M}_\phi = \mathcal{M}_\phi e^{-i\sigma K}T_\sigma^*,$$

para toda $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$. Isto é equivalente a

$$\mathcal{M}_{\phi_\sigma} = T_\sigma \mathcal{M}_\phi T_\sigma^* = e^{-i\sigma K}\mathcal{M}_\phi e^{i\sigma K}$$

sendo $\phi_\sigma(t) = \phi(t-\sigma)$.

Dado um propagador $U(t,s)$ fortemente contínuo nota-se pela Proposição 2.4.1 que

$$(e^{-iK\sigma}f)_t = U(t,t-\sigma)f(t-\sigma)$$

o qual é um grupo de evolução limitado, pois,

$$e^{-iK\sigma}T_\sigma^* = \{U(t,t-\sigma)\}_t.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}(e^{-iK\sigma}T_\sigma^*)_t &= U(t,t-\sigma)f(t) = U(t,0)U(0,t-\sigma)f(t)\\ &= U(t,0)T_\sigma U(0,t)f(t+\sigma) = U(t,0)T_\sigma U(t,0)^{-1}T_\sigma^* f(t)\end{aligned}$$

e assim $e^{-i\sigma K} = \mathcal{U}T_\sigma\mathcal{U}^{-1}$, em que $\mathcal{U}$ é o operador fibrado $\mathcal{U} = \{U(t,0)\}_t$. Portanto, tal grupo de evolução é similar a T_σ e o operador que faz a similaridade é fibrado. O próximo teorema afirma que isso permanece verdadeiro em geral.

Teorema 2.4.2 *Um grupo limitado fortemente contínuo $e^{-i\sigma K}$ em $\mathcal{K}$ é um grupo de evolução limitado se, e somente se, existe um operador fibrado $\mathcal{U} = \{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ de forma que*

$$e^{-i\sigma K} = \mathcal{U}T_\sigma\mathcal{U}^{-1}.$$

Além disso, se $e^{-i\sigma K}$ é unitário, então $\mathcal{U}$ pode ser escolhido unitário.

Observação. Se no Teorema 2.4.2 $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_1$ são tais que $\mathcal{U}T_\sigma\mathcal{U}^{-1} = e^{-i\sigma K} = \mathcal{U}_1 T_\sigma \mathcal{U}_1^{-1}$, então $T_\sigma \mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}_1 T_\sigma$, logo pela Proposição 2.3.1 c) $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}_1$ é um operador fibrado constante. Portanto, $U(t) = U_1(t)B$ em que B é invertível. Isso significa que o propagador $U(t,s) = U(t)U(s)^{-1}$ é unicamente determinado e, portanto, existe uma correspondência bijetiva entre propagadores e grupos de evolução.

No caso $H(t+\tau) = H(t)$ sabemos que os propagadores satisfazem $U(t+\tau, s+\tau) = U(t,s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$ e então , $\forall\, n \in \mathcal{Z}$,

$$U(t+n\tau, s) = U(t,s)[U(s+\tau, s)]^n$$

e o operador $U_{\mathrm{F}}(s) := U(s+\tau, s)$ é chamado de operador de Floquet em s ou operador de monodromia. Como $U_{\mathrm{F}}(t) = U(t+\tau, t) = U(t+\tau, s+\tau)U(s+\tau, s)U(s,t) = U(t,s)U_{\mathrm{F}}(s)U(t,s)^{-1}$, segue que $U_{\mathrm{F}}(t)$ e $U_{\mathrm{F}}(s)$ são unitariamente equivalentes e trabalhamos com o operador de Floquet como sendo $U_{\mathrm{F}} := U_{\mathrm{F}}(0) = U(\tau, 0)$.

Suponha que $Kf = \lambda f$, como $(e^{-iK\sigma}g)(t) = U(t, t-\sigma)g(t-\sigma)$, então

$$e^{-i\lambda\sigma} f(t) = U(t, t-\sigma) f(t-\sigma),$$

logo,

$$f(t) = e^{i\lambda\sigma} U(t, t-\sigma) f(t-\sigma), \quad \forall\, \sigma \in \mathbb{R},$$

denotando $t - \sigma = s$

$$f(t) = e^{i\lambda(t-s)} U(t,s) f(s),$$

e como $U(\cdot,\cdot)$ é fortemente contínuo conclui-se o seguinte lema.

Lema 2.4.1 *Se $Kf = \lambda f$ em $\mathcal{K}$, então a aplicação $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) \in \mathcal{H}$ é contínua.*

Lema 2.4.2 *No caso de sistemas com período τ, valem:*
a) Se $Kf = \lambda f$, então $U_{\mathrm{F}}(s)f(s) = e^{-i\lambda\tau} f(s)$, $\forall\, s \in \mathbb{R}$.
b) Se $U_{\mathrm{F}}(s)\xi_s = e^{-i\lambda\tau}\xi_s$, $\xi_s \in \mathcal{H}$, $\forall\, s$, então a função $f_\xi(t) := e^{i\lambda(t-s)}U(t,s)\xi_s \in \mathrm{dom}\, K$ e $Kf_\xi = \lambda f_\xi$.

Denote por $W := \int_{[0,\tau]}^{\oplus} U(t,0)dt$ o operador unitário fibrado em $\mathcal{K} = \int_{[0,\tau]}^{\oplus} \mathcal{H} dt$ e $B := \int_{[0,\tau]}^{\oplus} U_{\mathrm{F}} dt = Id \otimes U_{\mathrm{F}} = \int_{[0,\tau]}^{\oplus} U(\tau, 0)dt$, tem-se o seguinte

Teorema 2.4.3 *$W(Id \otimes U_{\mathrm{F}})W^* = e^{-iK\tau}$, ou seja, $Id \otimes U_{\mathrm{F}}$ e $e^{-iK\tau}$ são unitariamente equivalentes.*

Demonstração: Seja $\{\xi_j\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}$ e considere a base ortonormal $\{u_{n,j}\}$ de $\mathcal{K}$, dada por $(u_{n,j})(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\frac{2\pi int}{\tau}} \xi_j$. Tem-se que

$$\begin{aligned}
(W(Id \otimes U_{\mathrm{F}})W^* u_{n,j})(t) &= U(t,0)((Id \otimes U_{\mathrm{F}})W^* u_{n,j})(t) \\
&= U(t,0)U_{\mathrm{F}}(W^* u_{n,j})(t) \\
&= U(t,0)U(\tau,0)U(t,0)^{-1} u_{n,j}(t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\frac{2\pi int}{\tau}} U(t+\tau,\tau)U(\tau,0)U(0,t)\xi_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\frac{2\pi int}{\tau}} U(t+\tau,t)\xi_j = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\frac{2\pi int}{\tau}} U(t,t-\tau)\xi_j
\end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$(e^{-iK\tau} u_{n,j})(t) = U(t,t-\tau)u_{n,j}(t-\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\frac{2\pi int}{\tau}} U(t,t-\tau)\xi_j,$$

e assim

$$W(Id \otimes U_{\mathrm{F}})W^* u_{n,j} = e^{-iK\tau} u_{n,j}, \quad \forall\, n,j.$$

Portanto, $W(Id \otimes U_{\mathrm{F}})W^* = e^{-iK\tau}$. ■

De acordo com ([27], [35], [59]) se existe o propagador unitário $U(t,s)$ associado com o sitema periódico de período T

$$H(t) = H_0 + V(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

com $H_0 : \mathrm{dom}\ H_0 \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ auto-adjunto e $V(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ limitado e auto-adjunto para todo t, então o operador quase-energia ou Hamiltoniana de Floquet K é dado formalmente por $K = -i\partial_t + H(t) = -i\partial_t + H_0 + V(t) = -i\partial_t \otimes \mathrm{I_d} + \mathrm{I_d} \otimes H(t)$ e ele é entendido como o fecho do operador essencialmente auto-adjunto

$$K^0 : C_T^\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{dom}\ H_0 \subset \mathcal{K} \to \mathcal{K},$$

em que $C_T^\infty(\mathbb{R})$ é o espaço das funções C^∞ e periódicas de período T em $\mathbb{R}$ e $C_T^\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{dom}\ H_0$ é o espaço vetorial gerado pelo conjunto

$$\{\eta(t)\psi : \eta \in C_T^\infty(\mathbb{R}),\ \psi \in \mathrm{dom}\ H_0\}.$$

Para $\eta \otimes \psi \in C_T^\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{dom}\ H_0$, tem-se que

$$K^0(\eta \otimes \psi)(t) = -i\eta'(t)\psi + \eta(t)H(t)\psi.$$

Sistemas Quânticos governados por Hamiltonianas periódicas no tempo tem seu comportamento da dinâmica frequentemente caracterizado pelas propriedades espectrais do correspondente operador de Floquet U_F ([1], [3], [4], [9], [12], [16], [21], [24], [30], [32], [33], [40], [45], [47]). Sendo $\mathrm{I_d} \otimes U_F$ unitariamente equivalente a $e^{-iK\tau}$, é equivalente estudar as propriedades espectrais de K ou U_F.

O interesse principal na análise espectral das Hamiltonianas de Floquet K é o estudo da estabilidade do sistema quântico periódico no tempo associado, visto que é uma consequência do Teorema RAGE (Ruelle-Amrein-Georgescu-Enss), veja [30], que U_F é pontual puro se, e somente se,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t>0} \left\| \sum_{m=n}^{\infty} P_m \psi(t) \right\| = 0, \quad \forall \psi_0 \in \mathcal{H}, \tag{2.4}$$

em que P_m é a projeção espectral sobre o auto-espaço do autovalor h_m de H_0, se $K = -i\partial_t + H(\omega t)$, com $H(\omega t) = H_0 + V(\omega t)$, e H_0 com espectro discreto com autovalores $\{h_m\}$.

A equação (2.4) diz que a probabilidade da trajetória quântica $\psi(t)$, com uma condição inicial arbitrária ψ_0 explorar os auto-estados de H_0 de energia maior do que E_n torna-se cada vez menor para n cada vez maior. Por outro lado, se ψ_0 pertence ao subespaço espectral contínuo de U_F, então (veja [30])

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|P_m \psi(t)\| \, dt = 0,$$

que significa que a probabilidade de retorno média da trajetória estar no m-ésimo subespaço espectral de H_0 se anula. Isso implica que $\sup_{t>0} \langle H_0\psi(t), \psi(t)\rangle = \infty$. Em geral, o fato de ψ_0 pertencer ao subespaço espectral pontual de U_F não implica que

$$\sup_{t>0} \langle H_0\psi(t), \psi(t)\rangle < \infty,$$

ou seja, limitação uniforme da energia (veja [22], [23]). No entanto, em [27] é provado que a aplicabilidade do método KAM fornece um limite uniforme em t no crescimento da energia para Hamiltonianas como em [26] que estudamos no Capítulo 3, mais precisamente,

$$\sup_{t>0} \langle H_0\psi(t), \psi(t)\rangle < \infty$$

e

$$\sup_{t>0} \langle (H_0 + V(\omega t))\psi(t), \psi(t)\rangle < \infty.$$

O estudo do espectro da Hamiltoniana de Floquet $K = -i\partial_t + H_0 + V(\omega t)$ em geral não é uma tarefa fácil pois, em muitas situações interessantes, o espectro da Hamiltoniana de Floquet associada a Hamiltoniana não-perturbada H_0, a saber $K_0 = -i\partial_t + H_0$, é pontual puro e denso em $\mathbb{R}$. Particularmente, isso exclui a aplicação da teoria de pertubação regular devida a Kato [44] e Rellich [54].

Capítulo 3

A Técnica KAM

Neste capítulo estudaremos como a técnica KAM é utilizada para mostrar que a Hamiltoniana de Floquet $-i\partial_t + H_0 + V(\omega t)$, atuando em $L^2([0,T], \mathcal{H}, dt)$, dependendo do parâmetro $\omega = \frac{2\pi}{T}$, possui espectro pontual puro para valores adequados de ω. Assumiremos que o espectro de H_0 em $\mathcal{H}$ é discreto, $\sigma(H_0) = \{h_m\}_{m=1}^{\infty}$, mas possivelmente degenerado, e que $t \to V(t) \in B(\mathcal{H})$ é uma função 2π-periódica com valores no espaço de operadores hermitianos em $\mathcal{H}$.

O capítulo é organizado como segue. Na Seção 3.1 introduziremos a notação e apresentaremos o teorema principal. Na Seção 3.2 daremos a idéia básica do algoritmo tipo KAM, o qual consiste num procedimento interativo que resulta na diagonalização da Hamiltoniana de Floquet. Para este propósito é considerada uma sequência direta de espaços de Banach. Nas Seções 3.3 a 3.7 serão apresentados resultados adicionais necessários para a demonstração do teorema principal, particularmente os detalhes da construção dos espaços de Banach auxiliares e a construção do conjunto de frequências não-ressonantes para as quais a Hamiltoniana de Floquet apresentará espectro pontual puro. A Seção 3.8 é devotada à demonstração do teorema principal.

3.1 O Teorema Principal

O objeto central que queremos estudar neste trabalho é um operador auto-adjunto da forma $\mathbf{K} + \mathbf{V}$ agindo no espaço de Hilbert

$$\mathcal{K} = L^2([0,T], dt) \otimes \mathcal{H} \cong L^2([0,T], \mathcal{H}, dt),$$

em que $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ω é um número positivo (que será chamado de frequência) e $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert separável fixado. O operador $\mathbf{K}$ é auto-adjunto e tem a forma

$$\mathbf{K} = -i\partial_t \otimes \mathrm{I_d} + \mathrm{I_d} \otimes H_0,$$

em que o operador diferencial $-i\partial_t$ age em $L^2([0,T],dt)$ e representa o operador auto-adjunto caracterizado por condições de fronteira periódicas. Isto significa que os auto-valores de $-i\partial_t$ são da forma $k\omega$, $k \in \mathbb{Z}$, e os correspondentes autovetores normalizados são $\mathcal{X}_k(t) = T^{-1/2}e^{ik\omega t}$. H_0 é um operador auto-adjunto em $\mathcal{H}$ e é suposto ter espectro discreto com autovalores $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$. Observe que neste capítulo o operador $\mathbf{K}$ representará a Hamiltoniana de Floquet do sistema não-perturbado correspondente à Hamiltoniana independente do tempo H_0. Finalmente, $\mathbf{V}$ é um operador Hermitiano e limitado em $\mathcal{K}$ determinado por uma função mensurável $t \mapsto V(\omega t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\sup_{t\in\mathbb{R}}$, $V(t)$ é 2π-periódica, e $V(t)^* = V(t)$ para q.t.p., $t \in \mathbb{R}$. Naturalmente, $(\mathbf{V}\psi)(t) = V(\omega t)\psi(t)$ em $\mathcal{K} \cong L^2([0,T],\mathcal{H},dt)$.

Seja

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k\omega P_k,$$

a decomposição espectral de $-i\partial_t$ em $L^2([0,T],dt)$ e

$$H_0 = \sum_{m\in\mathbb{N}} h_m Q_m,$$

a decomposição espectral de H_0 em $\mathcal{H}$. Assim, podemos escrever

$$\mathcal{H} = \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \mathcal{H}_m,$$

em que $\mathcal{H}_m = \mathrm{Img}(Q_m)$ é o auto-espaço de h_m. Supomos que as multiplicidades são finitas,

$$M_m = \dim \mathcal{H}_m < \infty, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Portanto, o espectro de $\mathbf{K}$ é pontual puro e sua decomposição espectral fica

$$\mathbf{K} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} (k\omega + h_m) P_k \otimes Q_m, \tag{3.1}$$

implicando a decomposição de $\mathcal{K}$ na soma direta,

$$\mathcal{K} = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}^{\oplus} \mathrm{Img}(P_k \otimes Q_m).$$

Observe que o espectro de $\mathbf{K}$ é pontual puro e denso em $\mathbb{R}$, para q.t.p. $\omega \in \mathbb{R}$. A densidade do espectro segue da seguinte proposição cuja demonstração pode ser encontrada no Apêndice A de [29]:

Proposição 3.1.1 *Suponha que um conjunto $E \subset \mathbb{R}$ satisfaz $\sup E = +\infty$. Então o conjunto $\omega\mathbb{Z} + E$ é denso em $\mathbb{R}$, para q.t.p. $\omega \in \mathbb{R}$ (no sentido de Lebesgue).*

Seguem algumas notações adicionais. Sejam

$$\begin{aligned} V_{knm} &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{-ik\omega t} Q_n V(\omega t) Q_m dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} Q_n V(t) Q_m dt \in B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Além disso,

$$\Delta_{mn} = h_m - h_n,$$

$$\Delta_0 = \inf_{m \neq n} |\Delta_{mn}|,$$

e se Ω_* é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}$, então $|\Omega_*|$ denota sua medida de Lebesgue.

Agora somos capazes de formular o resultado principal. Observe que embora não indicado explicitamente na notação, o operador $\mathbf{K} + \mathbf{V}$ depende do parâmetro ω. Além disso, $\mathbf{K} + \mathbf{V}$ é auto-adjunto pelo Teorema de Kato-Rellich(veja[17]).

Teorema 3.1.1 *Fixe $J > 0$ e seja $\Omega_0 = [\frac{8}{9}J, \frac{9}{8}J]$. Assuma que $\Delta_0 > 0$, e que existe $\sigma > 0$ tal que*

$$\Delta_\sigma(J) := J^\sigma \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N} \\ \Delta_{mn} > J/2}} \frac{M_m M_n}{(h_m - h_n)^\sigma} < \infty.$$

Então, para cada $r > \sigma + \frac{1}{2}$, existem constantes positivas $\epsilon_* = \epsilon_*(r, \Delta_0, J)$ e $\delta_* = \delta_*(\sigma, r, J)$ com a propriedade: se

$$\epsilon_V := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \|V_{knm}\| \max\{|k|^r, 1\} < \min\left\{\epsilon_*(r, \Delta_0, J), \frac{|\Omega_0|}{\delta_*(\sigma, r, J)}\right\},$$

com V_{knm} como em 3.2 então existe um subconjunto mensurável $\Omega_\infty \subset \Omega_0$ tal que

$$|\Omega_0| - |\Omega_\infty| \leq \delta_* \epsilon_V, \tag{3.3}$$

e o operador $\boldsymbol{K} + \boldsymbol{V}$ tem espectro pontual puro, para todo $\omega \in \Omega_\infty$.

Concluímos esta seção com uma breve descrição de um modelo que ilustra a eficácia do Teorema 3.1.1. Considere $\mathcal{H} = L^2([0,1], dx)$, $H_0 = -\partial_x^2$ com condições de contorno Dirichlet, ou seja, dom $H_0 = \{\psi \in \mathcal{H}^2[0,1] : \psi(0) = \psi(1) = 0\}$ e $V(t) = z(t)x^2$, sendo $z(t)$ uma função de período 2π suficientemente regular. Como mostrado em [57] a análise espectral deste modelo é equivalente à análise do também chamado Acelerador de Fermi.

Os autovalores de H_0 são simples, $h_m = m^2\pi^2$ para $m \in \mathbb{N} = 1, 2, 3, ...$, com autofunções normalizadas iguais a $\psi_m = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(m\pi x)$. Neste caso,

$$V_{knm} = z_k \times \begin{cases} \frac{8(-1)^{m+n}mn}{(m^2-n^2)^2\pi^2} & \text{se} \quad m \neq n, \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2m^2\pi^2} & \text{se} \quad m = n, \end{cases}$$

em que $z_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}z(t)dt$ é o coeficiente de Fourier de $z(t)$. Com efeito, se $m = n$

$$\begin{aligned} Q_nV(t)Q_n(\psi_n) &= Q_nV(t)(\sqrt{2}\mathrm{sen} n\pi x) = Q_n(z(t)x^2\psi_n(x)) \\ &= \langle z(t)x^2\psi_n(x), \psi_n(x)\rangle\psi_n(x) \\ &= \Big(\int_0^1 z(t)x^2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(n\pi x)\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(n\pi x)dx\Big)\psi_n \\ &= \Big(2z(t)\int_0^1 x^2\mathrm{sen}^2(n\pi x)dx\Big)\psi_n. \end{aligned}$$

Como $\int_0^1 x^2\mathrm{sen}^2(n\pi x)dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}$, obtemos que

$$V_{knm} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}z(t)\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\Big)dt = z_k\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\Big).$$

Se $m \neq n$

$$\begin{aligned} Q_nV(t)Q_m(\psi_m) &= Q_nV(t)(\sqrt{2}\mathrm{sen} m\pi x) = Q_n(z(t)x^2\psi_m(x)) \\ &= \langle z(t)x^2\psi_m(x), \psi_n(x)\rangle\psi_m(x) \\ &= \Big(\int_0^1 z(t)x^2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(m\pi x)\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(n\pi x)dx\Big)\psi_m \\ &= \Big(2z(t)\int_0^1 x^2\mathrm{sen}(m\pi x)\mathrm{sen}(n\pi x)dx\Big)\psi_m. \end{aligned}$$

Como $\int_0^1 x^2\mathrm{sen}(m\pi x)\mathrm{sen}(n\pi x)dx = \frac{4(-1)^{m+n}mn}{(m^2-n^2)\pi^2}$, obtemos que

$$V_{knm} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}z(t)\frac{8(-1)^{m+n}mn}{(m^2-n^2)\pi^2}dt = z_k\frac{8(-1)^{m+n}mn}{(m^2-n^2)\pi^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \epsilon_V &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{N}}\|V_{knm}\|\max\{|k|^r, 1\} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(|z_k|\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\Big) + \sum_{\substack{m\neq n \\ m\in\mathbb{N}}}|z_k|\frac{8mn}{(m^2-n^2)\pi^2}\right)\max\{|k|^r, 1\} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|z_k|\Big[\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\Big) + \sum_{m\neq n}\frac{8mn}{(m^2-n^2)\pi^2}\Big]\max\{|k|^r, 1\} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\frac{1}{3} + \frac{2}{n^2\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^2}\Big)\sum_{k\in\mathbb{Z}}|z_k|\max\{|k|^r, 1\} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}|z_k|\max\{|k|^r, 1\}. \end{aligned}$$

Fixe $J > 0$,

$$\Delta_\sigma(J) = J^\sigma \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ \Delta mn > J/2}} \frac{1}{(m^2-n^2)^\sigma(\pi^2)^\sigma} < \infty$$

se, e somente se, $\sigma > 1$. Por outro lado, para termos ϵ_V finito, é suficiente que $z(t) \in \mathcal{C}^s$, sendo $s > r+1 > \sigma + \frac{1}{2} + 1 > \frac{5}{2}$. Então, $z(t) \in \mathcal{C}^3$ é suficiente para que a teoria seja aplicável. Isto pode ser comparado a um resultado anterior de [28] que fornecia a condição $z(t) \in \mathcal{C}^{17}$.

3.2 Procedimento Limite Formal

Considere uma sequência direta de espaços de Banach $\{\mathcal{B}_s, \tau_{us}\}$ com limite indutivo ou limite direto $\mathcal{B}_\infty$, como definido na Seção 1.3.

Seja $D_\infty \in B(\mathcal{B}_\infty)$ o limite indutivo, como definido na Seção 1.3 de uma família de operadores limitados $\{D_s \in B(\mathcal{B}_s)\}_{s\geq 0}$ com a propriedade

$$\|D_s\| \leq 1, \quad \|1 - D_s\| \leq 1, \quad \forall s. \tag{3.4}$$

Seja uma sequência de espaços de dimensão 1, $\mathrm{K}K_s$, $s = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty$, em que K_s é o elemento básico e $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dependendo se os espaços de Banach $\mathcal{B}_s$ são reais ou complexos, respectivamente. Sejam

$$\widetilde{\mathcal{B}}_s = \mathrm{K}K_s \oplus \mathcal{B}_s, \quad s = 0, 1, \ldots, \infty.$$

Então $\{\widetilde{\mathcal{B}}_s\}_{s=0}^\infty$ define uma sequência direta de espaços vetoriais se definimos $\widetilde{\tau}_{us} : \widetilde{\mathcal{B}}_s \to \widetilde{\mathcal{B}}_u$, para $s \leq u$ por $\widetilde{\tau}_{us}|_{\mathcal{B}_s} = \tau_{us}$ e $\widetilde{\tau}_{us}(K_s) = K_u$.

Seja

$$\phi(x) = \frac{1}{x}\Big(e^x - \frac{e^x - 1}{x}\Big) = \sum_{k=0}^\infty \frac{k+1}{(k+2)!} x^k \tag{3.5}$$

se usarmos que $e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} x^k$.

Proposição 3.2.1 *Suponha que além das sequências $\{\mathcal{B}_s\}_{s=0}^\infty$, $\{K_s\}_{s=0}^\infty$ e $\{D_s\}_{s=0}^\infty$, são dadas as sequências $\{V_s\}_{s=0}^\infty$ e $\{\theta_u^s\}_{u=s+1}^\infty$ tais que $V_s \in \mathcal{B}_s$, $\theta_u^s \in B(\mathcal{B}_u)$ e*

$$\theta_v^s \tau_{vu} = \tau_{vu} \theta_u^s \quad \textit{se} \quad s < u \leq v. \tag{3.6}$$

Sejam

$$T_s = e^{\theta_s^{s-1}} e^{\theta_s^{s-2}} \ldots e^{\theta_s^0} \in B(\mathcal{B}_s), \quad \textit{para} \quad s \geq 1. \tag{3.7}$$

Seja $\{W_s\}_{s=0}^{\infty}$ *outra sequência, com* $W_s \in \mathcal{B}_s$*, definida recursivamente:*

$$W_0 = V_0,$$

$$W_{s+1} = \tau_s(W_s) + T_{s+1}(V_{s+1} - \tau_s(V_s)) + \theta_{s+1}^s \phi(\theta_{s+1}^s)\tau_s(1 - D_s)(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1})), \quad (3.8)$$

em que, por convenção, $\mathcal{B}_{-1} = 0$*,* $W_{-1} = 0$*. Estenda as transformações* θ_u^s *à* $\widetilde{\theta}_u^s : \widetilde{\mathcal{B}}_u \to \widetilde{\mathcal{B}}_u$ *por*

$$\widetilde{\theta}_u^s(K_u) = -\theta_u^s D_u(\tau_{us}(W_s)) - (1 - D_u)(\tau_{us}(W_s) - \tau_{u,s-1}(W_{s-1})), \quad (3.9)$$

e consequentemente as transformações T_s *à* $\widetilde{T}_s : \widetilde{\mathcal{B}}_s \to \widetilde{\mathcal{B}}_s$*,*

$$\widetilde{T}_s = e^{\tilde{\theta}_s^{s-1}} e^{\tilde{\theta}_s^{s-2}} \dots e^{\tilde{\theta}_s^{0}},$$

para $s \geq 1$*,* $\widetilde{T}_0 = \mathrm{I_d}$*. Então*

$$\widetilde{T}_s(K_s + V_s) = K_s + D_s(W_s) + (1 - D_s)(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1})), \quad (3.10)$$

para $s = 0, 1, 2, \dots$*.*

Observação 3.2.1 *Como* $\widetilde{\theta}_u^s(K_u) \in \mathcal{B}_u$*, então*

$$\widetilde{T}_s(K_s) - K_s \in \mathcal{B}_s.$$

Além disso, obtemos de (3.9) que para $0 \leq s < u \leq v$*,*

$$\begin{aligned}
\tau_{vu}\widetilde{\theta}_u^s(K_u) &= \tau_{vu}(-\theta_u^s D_u(\tau_{us}(W_s)) - (1 - D_u)(\tau_{us}(W_s) - \tau_{u,s-1}(W_{s-1}))) \\
&= -\tau_{vu}\theta_u^s D_u(\tau_{us}(W_s)) - \tau_{vu}(1 - D_u)(\tau_{us}(W_s) - \tau_{u,s-1}(W_{s-1})) \\
&= -\theta_v^s \tau_{vu} D_u(\tau_{us}(W_s)) - (1 - D_v)\tau_{vu}(\tau_{us}(W_s) - \tau_{u,s-1}(W_{s-1})) \\
&= -\theta_v^s D_v(\tau_{vs}(W_s)) - (1 - D_v)(\tau_{vs}(W_s) - \tau_{v,s-1}(W_{s-1})) \\
&= \widetilde{\theta}_v^s(K_v).
\end{aligned}$$

Assim, as funções $\widetilde{\theta}_u^s$ *satisfazem*

$$\widetilde{\theta}_v^s \widetilde{\tau}_{vu} = \widetilde{\tau}_{vu}\widetilde{\theta}_u^s \quad se \quad s < u \leq v.$$

Demonstração da Proposição 3.2.1: Por indução em s. Para $s = 0$ tem-se $\widetilde{T}_0(K_0 + V_0) = K_0 + V_0$ e o lado direito de (3.10) fica

$$K_0 + D_0(V_0) + (1 - D_0)(V_0) = K_0 + D_0(V_0) + V_0 - D_0(V_0) = K_0 + V_0.$$

Suponha que a afirmação é verdadeira para s, e mostremos que vale para $s+1$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_{s+1}(K_{s+1}+V_{s+1}) &= \widetilde{T}_{s+1}(K_{s+1}+\widetilde{\tau}_s V_s - \widetilde{\tau}_s V_s + V_{s+1}) \\
&= \widetilde{T}_{s+1}(\widetilde{\tau}_s(K_s)+\widetilde{\tau}_s(V_s)-\tau_s(V_s)+V_{s+1}) \\
&= \widetilde{T}_{s+1}\widetilde{\tau}_s(K_s+V_s)+T_{s+1}(V_{s+1}-\tau_s(V_s)) \\
&= (e^{\widetilde{\theta}^s_{s+1}}e^{\widetilde{\theta}^{s-1}_{s+1}}\dots e^{\widetilde{\theta}^0_{s+1}})\widetilde{\tau}_s(K_s+V_s)+T_{s+1}(V_{s+1}-\tau_s(V_s)) \\
&= e^{\widetilde{\theta}^s_{s+1}}\widetilde{\tau}_s\widetilde{T}_s(K_s+V_s)+T_{s+1}(V_{s+1}-\tau_s(V_s)) \\
&= e^{\widetilde{\theta}^s_{s+1}}\widetilde{\tau}_s(K_s+D_s(W_s)+(1-D_s)(W_s-\tau_{s-1}(W_{s-1})) \\
&\quad +T_{s+1}(V_{s+1}-\tau_s(V_s)) \\
&= e^{\widetilde{\theta}^s_{s+1}}(K_{s+1}+D_{s+1}\tau_s(W_s))+e^{\theta^s_{s+1}}\tau_s(1-D_s)(W_s-\tau_{s-1}(W_{s-1})) \\
&\quad +T_{s+1}(V_{s+1}-\tau_s(V_s)).
\end{aligned}$$

Como $e^{\widetilde{\theta}^s_{s+1}} = (\mathrm{I_d}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\widetilde{\theta}^s_{s+1})^k)$ e

$$\begin{aligned}
\widetilde{\theta}^s_{s+1}\widetilde{\tau}_s(K_s+D_s(W_s)) &= \widetilde{\theta}^s_{s+1}(K^s_{s+1}+\tau_s D_s(W_s)) \\
&= \widetilde{\theta}^s_{s+1}(K_{s+1})+\widetilde{\theta}^s_{s+1}\tau_s D_s(W_s) \\
&= -\theta^s_{s+1}D_{s+1}(\tau_s(W_s))-(1-D_{s+1})(\tau_s(W_s)-\tau_{s+1,s-1}(W_{s-1})) \\
&\quad +\theta^s_{s+1}D_{s+1}\tau_s(W_s) \\
&= -(1-D_{s+1})(\tau_s(W_s)-\tau_{s+1,s}\tau_{s,s-1}(W_{s-1})) \\
&= -(1-D_{s+1})(\tau_s(W_s)+(1-D_{s+1})\tau_s\tau_{s-1}(W_{s-1}) \\
&= -\tau_s(1-D_s)(W_s)+\tau_s(1-D_s)\tau_{s-1}(W_{s-1}) \\
&= -\tau_s(1-D_s)(W_s-\tau_{s-1}(W_{s-1})),
\end{aligned}$$

obtemos que

$$
\begin{aligned}
\widetilde{T}_{s+1}(K_{s+1}+V_{s+1}) &= K_{s+1}+D_{s+1}\tau_s(W_s)+\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\widetilde{\theta}^s_{s+1})^{k-1}\Big)\widetilde{\theta}^s_{s+1}(\widetilde{\tau}_s(K_s+D_s(W_s)))\\
&\quad +e^{\theta^s_{s+1}}\tau_s(1-D_s)(W_s-\tau_{s-1}(W_{s-1}))+T_{s+1}(V_{s+1}-\tau_s(V_s))\\
&= K_{s+1}+D_{s+1}\tau_s(W_s)+\frac{e^{\theta^s_{s+1}}-1}{\theta^s_{s+1}}\widetilde{\theta}^s_{s+1}\widetilde{\tau}_s(K_s+D_s(W_s))\\
&\quad +e^{\theta^s_{s+1}}\tau_s(1-D_s)(W_s-\tau_{s-1}(W_{s-1}))+T_{s+1}(V_{s+1}-\tau_s(V_s))\\
&= K_{s+1}-(1-D_{s+1})\tau_s(W_s)+\tau_s(W_s)+T_{s+1}(V_{s+1}-\tau_s(V_s))\\
&\quad +\Big(e^{\theta^s_{s+1}}-\frac{e^{\theta^s_{s+1}}-1}{\theta^s_{s+1}}\Big)\tau_s(1-D_s)(W_s-\tau_{s-1}(W_{s-1}))\\
&= K_{s+1}-(1-D_{s+1})\tau_s(W_s)+W_{s+1}\\
&= K_{s+1}-\tau_s(W_s)+D_{s+1}\tau_s(W_s)+W_{s+1}\\
&\quad +D_{s+1}(W_{s+1})-D_{s+1}(W_{s+1})\\
&= K_{s+1}+D_{s+1}(W_{s+1})+(1-D_{s+1})(W_{s+1}-\tau_s(W_s)).
\end{aligned}
$$

■

Proposição 3.2.2 *Assuma as sequências* $\{V_s\}_{s=0}^{\infty}$, $\{W_s\}_{s=0}^{\infty}$ *e* $\{\theta^s_u\}_{u=s}^{\infty}$ *como na Proposição 3.2.1. Denote*

$$w_s = \|W_s-\tau_{s-1}(W_{s-1})\|$$

(com $w_0=\|W_0\|$*). Assuma que existam uma sequência de números reais positivos* $\{F_s\}_{s=0}^{\infty}$ *tal que*

$$\|\theta^s_u\| \le F_s w_s,\ \forall s,u \text{ e } u>s, \tag{3.11}$$

uma sequência de números reais não negativos $\{v_s\}_{s=0}^{\infty}$ *tal que*

$$\|V_s-\tau_{s-1}(V_{s-1})\| \le v_s,\ \forall s,$$

(para $s=0$ *isso significa* $\|V_0\|\le v_0$*) e uma constante* $A\ge 0$*, tal que,*

$$F_s v_s^2 \le A v_{s+1},\ \forall s, \tag{3.12}$$

e que

$$B=\sum_{s=0}^{\infty} F_s v_s < \infty. \tag{3.13}$$

Denote

$$C=\sup_s F_s v_s. \tag{3.14}$$

Se $d > 0$ obedece

$$e^{dB} + A\phi(dC)d^2 \leq d, \tag{3.15}$$

então

$$w_s \leq dv_s, \quad \forall s. \tag{3.16}$$

Demonstração: Por indução em s. Para $s = 0$, temos $V_0 = W_0$, $\|V_0\| \leq v_0$, $\|W_0\| = w_0$. Daí, $w_0 = \|W_0\| = \|V_0\| = v_0$ e (3.16) é verdadeiro se $d \geq 1$, mas por (3.15) tem-se que $d \geq 1$. Suponha que (3.16) vale para s e mostremos que vale para $s + 1$. De (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} w_{s+1} &= \|W_{s+1} - \tau_s(W_s)\| \\ &= \left\|T_{s+1}(V_{s+1} - \tau_s(V_s)) + \theta^s_{s+1}\phi(\theta^s_{s+1})\tau_s(1 - D_s)(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1}))\right\| \\ &\leq \|T_{s+1}(V_{s+1} - \tau_s(V_s))\| + \left\|\theta^s_{s+1}\phi(\theta^s_{s+1})\tau_s(1 - D_s)(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1}))\right\| \\ &\leq \|T_{s+1}\| \, \|V_{s+1} - \tau_s(V_s)\| + \left\|\theta^s_{s+1}\right\| \left\|\phi(\theta^s_{s+1})\right\| \|\tau_s\| \, \|(1 - D_s)\| \, \|(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1}))\| \,. \end{aligned}$$

De (3.4) e (3.11), segue que

$$\begin{aligned} w_{s+1} &\leq \|T_{s+1}\| \, v_{s+1} + \left\|\theta^s_{s+1}\right\| \phi(\left\|\theta^s_{s+1}\right\|)w_s \\ &\leq \left\|e^{\theta^s_{s+1}} e^{\theta^{s-1}_{s+1}} \ldots e^{\theta^0_{s+1}}\right\| v_{s+1} + F_s w_s \phi(F_s w_s) w_s \\ &\leq \left\|e^{\theta^s_{s+1}}\right\| \left\|e^{\theta^{s-1}_{s+1}}\right\| \ldots \left\|e^{\theta^0_{s+1}}\right\| v_{s+1} + \phi(F_s w_s) F_s w_s^2 \\ &\leq e^{\left\|\theta^s_{s+1}\right\|} e^{\left\|\theta^{s-1}_{s+1}\right\|} \ldots e^{\left\|\theta^0_{s+1}\right\|} v_{s+1} + \phi(F_s w_s) F_s w_s^2 \\ &\leq e^{F_s w_s} e^{F_{s-1} w_{s-1}} \ldots e^{F_0 w_0} v_{s+1} + \phi(F_s w_s) F_s w_s^2 \\ &= \exp\left(\sum_{j=0}^{s} F_j w_j\right) v_{s+1} + \phi(F_s w_s) F_s w_s^2 \\ &\leq \exp\left(d \sum_{j=0}^{s} F_j v_j\right) v_{s+1} + \phi(dF_s v_s) F_s d^2 v_s^2 \\ &\leq e^{dB} v_{s+1} + \phi(dC) d^2 A v_{s+1} \\ &= (e^{dB} + \phi(dC) d^2 A) v_{s+1} \leq dv_{s+1}. \end{aligned}$$

■

Observação 3.2.2 *a) Se $B \leq \frac{1}{3}\ln 2$ e $A\phi(3C) \leq \frac{1}{9}$, então (3.15) vale com $d = 3$, pois $e^{3B} + A\phi(3C)9 \leq e^{3\frac{1}{3}\ln 2} + \frac{1}{9}9 = 2 + 1 = 3$.*

b) Relembre que $\theta^s_\infty \in B(\mathcal{B}_\infty)$ é o único operador limitado em $\mathcal{B}_\infty$ tal que

$$\theta^s_\infty \tau_{\infty u} = \tau_{\infty u} \theta^s_u, \quad \forall u > s.$$

Se (3.11) vale, então

$$\|\theta_\infty^s\| \leq F_s w_s, \tag{3.17}$$

pois se $u > s$ e $X \in \mathcal{B}_u$, segue que

$$\|\theta_\infty^s \tau_{\infty u}(X)\| = \|\tau_{\infty u}\theta_u^s(X)\| \leq \|\tau_{\infty u}\|\,\|\theta_u^s\|\,\|X\| \leq F_s w_s \|X\|,$$

e $\bigcup_{u>s} \tau_{\infty u}(\mathcal{B}_u)$ é denso em $\mathcal{B}_\infty$.

Corolário 3.2.1 *Sob as mesmas hipóteses da Proposição 3.2.2, se existe $d > 0$ tal que (3.15) é satisfeito, e*

$$F_{inf} = \inf_s F_s > 0, \tag{3.18}$$

então os limites

$$V_\infty = \lim_{s\to\infty} \tau_{\infty s}(V_s), \quad W_\infty = \lim_{s\to\infty} \tau_{\infty s}(W_s)$$

existem em $\mathcal{B}_\infty$, o limite

$$T_\infty = \lim_{s\to\infty} e^{\theta_\infty^{s-1}} \dots e^{\theta_\infty^0}$$

existe em $B(\mathcal{B}_\infty)$ e $T_\infty \in B(\mathcal{B}_\infty)$ pode ser estendido para uma aplicação linear $\widetilde{T}_\infty : \widetilde{\mathcal{B}}_\infty \to \widetilde{\mathcal{B}}_\infty$ por

$$\widetilde{T}_\infty(K_\infty) - K_\infty = \lim_{s\to\infty} \tau_{\infty s}(\widetilde{T}_s(K_s) - K_s), \tag{3.19}$$

com o limite existindo em $\mathcal{B}_\infty$. Estes objetos obedecem a igualdade

$$\widetilde{T}_\infty(K_\infty + V_\infty) = K_\infty + D_\infty(W_\infty). \tag{3.20}$$

Demonstração: Se $u \geq s$, então

$$\begin{aligned}
\|\tau_{\infty u}(V_u) - \tau_{\infty s}(V_s)\| &= \left\|\sum_{j=s+1}^{u} \tau_{\infty j}(V_j - \tau_{j-1}(V_{j-1}))\right\| \leq \sum_{j=s+1}^{u} \|\tau_{\infty j}(V_j - \tau_{j-1}(V_{j-1}))\| \\
&\leq \sum_{j=s+1}^{u} \|\tau_{\infty j}\|\,\|(V_j - \tau_{j-1}(V_{j-1})\| \leq \sum_{j=s+1}^{u} \|(V_j - \tau_{j-1}(V_{j-1})\| \\
&\leq \sum_{j=s+1}^{u} v_j.
\end{aligned}$$

Como $\sum_{s=0}^{\infty} v_s \leq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{F_s}{F_{\text{inf}}} v_s = \frac{1}{F_{\text{inf}}} \sum_{s=0}^{\infty} F_s v_s < \infty$, a sequência $\{\tau_{\infty s}(V_s)\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}_\infty$ e, portanto, $V_\infty \in \mathcal{B}_\infty$ existe. Como $\omega_s \leq d v_s$, $\forall s$, obtemos que, para

$u \geq s$,

$$\begin{aligned}
\|\tau_{\infty u}(W_u) - \tau_{\infty s}(W_s)\| &= \left\| \sum_{j=s+1}^{u} \tau_{\infty j}(W_j - \tau_{j-1}(W_{j-1})) \right\| \\
&\leq \sum_{j=s+1}^{u} \|W_j - \tau_{j-1}(W_{j-1})\| \\
&= \sum_{j=s+1}^{u} \omega_j = d \sum_{j=s+1}^{u} v_j,
\end{aligned}$$

e com os mesmos argumentos anteriores segue que $\tau_{\infty s}(W_s)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}_\infty$ e, portanto, $W_\infty \in \mathcal{B}_\infty$ existe.

Sejam $\overline{T}_s = e^{\theta_\infty^{s-1}} \ldots e^{\theta_\infty^0}$ se $s \geq 1$ e $\overline{T}_0 = \mathrm{I_d}$. Se $u \geq s$, então temos

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{T}_u - \overline{T}_s\right\| &= \left\| e^{\theta_\infty^{u-1}} \ldots e^{\theta_\infty^0} - e^{\theta_\infty^{s-1}} \ldots e^{\theta_\infty^0} \right\| \\
&= \left\| e^{\theta_\infty^{u-1}} \ldots e^{\theta_\infty^s} \overline{T}_s - \overline{T}_s \right\| \\
&= \left\| (e^{\theta_\infty^{u-1}} \ldots e^{\theta_\infty^s} - \mathrm{I_d}) \overline{T}_s \right\| \\
&\leq \left\| e^{\theta_\infty^{u-1}} \ldots e^{\theta_\infty^s} - \mathrm{I_d} \right\| \left\| \overline{T}_s \right\| \\
&\leq \Big(\exp\big(\sum_{j=s}^{u-1} \|\theta_\infty^j\| \big) - 1 \Big) \exp\big(\sum_{j=0}^{s-1} \|\theta_\infty^j\| \big) \\
&\leq \exp\big(\sum_{j=0}^{u-1} \|\theta_\infty^j\| \big) - \exp\big(\sum_{j=0}^{s-1} \|\theta_\infty^j\| \big) \\
&\leq \exp\big(d \sum_{j=0}^{u-1} F_j v_j \big) - \exp\big(d \sum_{j=0}^{s-1} F_j v_j \big).
\end{aligned}$$

Por (3.13) segue que $\{\overline{T}_s\}$ é uma sequência de Cauchy em $B(\mathcal{B}_\infty)$ e, portanto, $T_\infty \in \mathcal{B}_\infty$ existe. Para mostrar (3.19) vamos primeiro verificar a desigualdade

$$\left\| e^{\widetilde{\theta}_u^s}(K_u) - K_u \right\| \leq \frac{1 + dB}{F_{\mathrm{inf}}} (e^{F_s w_s} - 1), \tag{3.21}$$

se $u > s$. Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\|\theta_u^s\|} - 1}{\|\theta_u^s\|} &= \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|\theta_u^s\|^j - 1}{\|\theta_u^s\|} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \|\theta_u^s\|^j}{\|\theta_u^s\|} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \|\theta_u^s\|^{j-1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left\| e^{\widetilde{\theta}^s_u}(K_u) - K_u \right\| &= \left\| (e^{\widetilde{\theta}^s_u} - \mathrm{I_d})(K_u) \right\| = \left\| (\mathrm{I_d} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (\widetilde{\theta}^s_u)^j - \mathrm{I_d})(K_u) \right\| \\
&= \left\| \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (\widetilde{\theta}^s_u)^j \Big)(K_u) \right\| = \left\| \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (\widetilde{\theta}^s_u)^{j-1} \Big)(\widetilde{\theta}^s_u(K_u)) \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (\widetilde{\theta}^s_u)^{j-1} \right\| \left\| (\widetilde{\theta}^s_u(K_u)) \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left\| \widetilde{\theta}^s_u \right\|^{j-1} \left\| (\widetilde{\theta}^s_u(K_u)) \right\| \\
&= \frac{e^{\|\theta^s_u\|} - 1}{\|\theta^s_u\|} \left\| \widetilde{\theta}^s_u(K_u) \right\| \\
&= \frac{e^{\|\theta^s_u\|} - 1}{\|\theta^s_u\|} \left\| \theta^s_u D_u(\tau_{us}(W_s)) - (1 - D_u)(\tau_{us}(W_s) - \tau_{u,s-1}(W_{s-1})) \right\| \\
&\leq \frac{e^{\|\theta^s_u\|} - 1}{\|\theta^s_u\|} \big(\|\theta^s_u\| \|W_s\| + \|\tau_{us}(W_s) - \tau_{u,s-1}(W_{s-1})\| \big) \\
&= \frac{e^{\|\theta^s_u\|} - 1}{\|\theta^s_u\|} \big(\|\theta^s_u\| \|W_s\| + \|\tau_{us}(W_s - \tau_{s,s-1}(W_{s-1}))\| \big) \\
&\leq \frac{e^{\|\theta^s_u\|} - 1}{\|\theta^s_u\|} \big(\|\theta^s_u\| \|W_s\| + \|W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1})\| \big) \\
&\leq \frac{e^{F_s\omega_s} - 1}{F_s\omega_s} (F_s\omega_s \|W_s\| + \omega_s) = (e^{F_s\omega_s} - 1)\Big(\|W_s\| + \frac{1}{F_s} \Big)
\end{aligned}$$

e agora $\|W_s\| = \sum_{j=1}^{s}(\|W_j\| - \|W_{j-1}\|) + \|W_0\|$, mas

$$\omega_j = \|W_j - \tau_{j-1}(W_{j-1})\| \geq \|W_j\| - \|\tau_{j-1}(W_{j-1})\| \geq \|W_j\| - \|W_{j-1}\|, \ \forall j,$$

e, portanto,

$$\|W_s\| \leq \sum_{j=1}^{s} \omega_j \leq \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j \leq \sum_{j=0}^{\infty} dv_j \leq \frac{d}{F_{\inf}} \sum_{j=0}^{\infty} F_j v_j = \frac{dB}{F_{\inf}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\| e^{\widetilde{\theta}^s_u}(K_u) - K_u \right\| &\leq (e^{F_s\omega_s} - 1)\Big(\|W_s\| + \frac{1}{F_s} \Big) \\
&\leq (e^{F_s\omega_s} - 1)\Big(\frac{dB}{F_{\inf}} + \frac{1}{F_s} \Big) \\
&\leq (e^{F_s\omega_s} - 1)\Big(\frac{1 + dB}{F_{\inf}} \Big),
\end{aligned}$$

e (3.21) está demonstrada.

Com o uso da identidade elementar

$$a_j \dots a_0 - 1 = a_j \dots a_1(a_0 - 1) + a_j \dots a_2(a_1 - 1) + (a_j - 1),$$

obtemos de (3.21), se $0 \leq s \leq t \leq u$ que

$$\begin{aligned}
\left\| e^{\widetilde{\theta}_u^t} \ldots e^{\widetilde{\theta}_u^s}(K_u) - K_u \right\| &\leq e^{\|\theta_u^t\|+\ldots+\|\theta_u^{s+1}\|} \left\| e^{\widetilde{\theta}_u^s}(K_u) - K_u \right\| \\
&\quad + e^{\|\theta_u^t\|+\ldots+\|\theta_u^{s+2}\|} \left\| e^{\widetilde{\theta}_u^{s+1}}(K_u) - K_u \right\| + \ldots + \left\| e^{\widetilde{\theta}_u^t}(K_u) - K_u \right\| \\
&\leq \frac{1+dB}{F_{\inf}} \Big(e^{F_t\omega_t+\ldots+F_{s+1}\omega_{s+1}}(e^{F_s\omega_s} - 1) \\
&\quad + (e^{F_t\omega_t+\ldots+F_{s+2}\omega_{s+2}}(e^{F_{s+1}\omega_{s+1}} - 1) + \ldots + (e^{F_t\omega_t} - 1) \Big) \\
&= \frac{1+dB}{F_{\inf}} \Big(e^{F_t\omega_t+\ldots+F_s\omega_s} - 1 \Big).
\end{aligned}$$

Para terminar esta demonstração denotemos temporariamente $\tau_s = \tau_{\infty s}(\widetilde{T}_s(K_s) - K_s) \in \mathcal{B}_\infty$. Se $t \geq s$, então

$$\begin{aligned}
\tau_t - \tau_s &= \tau_{\infty t}(e^{\widetilde{\theta}_t^{t-1}} \ldots e^{\widetilde{\theta}_t^0}(K_t) - \tau_{ts} e^{\widetilde{\theta}_s^{s-1}} \ldots e^{\widetilde{\theta}_s^0}(K_s)) \\
&= \tau_{\infty t}(e^{\widetilde{\theta}_t^{t-1}} \ldots e^{\widetilde{\theta}_t^0}(K_t) - e^{\widetilde{\theta}_t^{s-1}} \ldots e^{\widetilde{\theta}_t^0}(K_t)) \\
&= \tau_{\infty t}((e^{\theta_t^{t-1}} \ldots e^{\theta_t^s} - 1)(e^{\widetilde{\theta}_t^{s-1}} \ldots e^{\widetilde{\theta}_t^0}(K_t) - K_t) + e^{\widetilde{\theta}_t^{t-1}} \ldots e^{\widetilde{\theta}_t^s}(K_t) - K_t).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|\tau_t - \tau_s\| &\leq \frac{1+dB}{F_{\inf}}((e^{F_{t-1}\omega_{t-1}+\ldots+F_s\omega_s} - 1)(e^{F_{s-1}\omega_{s-1}+\ldots+F_0\omega_0} - 1) \\
&\quad + (e^{F_{t-1}\omega_{t-1}+\ldots+F_s\omega_s} - 1)) \\
&= \frac{1+dB}{F_{\inf}}(e^{F_{t-1}\omega_{t-1}+\ldots+F_0\omega_0} - e^{F_{s-1}\omega_{s-1}+\ldots+F_0\omega_0}),
\end{aligned}$$

e, assim, $\{\tau_s\}$ é uma sequência de Cauchy, portanto o limite do lado direito de (3.19) existe.

Para demonstrar (3.20), observe que

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_\infty(K_\infty + V_\infty) &= K_\infty + \lim_{s\to\infty} \tau_{\infty s}(\widetilde{T}_s(K_s) - K_s) + \lim_{s\to\infty} \tau_{\infty s}(\widetilde{T}_s(V_s)) \\
&= K_\infty + \lim_{s\to\infty} \tau_{\infty s}(\widetilde{T}_s(K_s + V_s) - K_s) \\
&= K_\infty + \lim_{s\to\infty} \tau_{\infty s}(D_s(W_s) + (1 - D_s)(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1}))) \\
&= K_\infty + \lim_{s\to\infty} (D_\infty(\tau_{\infty s}((W_s)) + (1 - D_\infty)(\tau_{\infty s}(W_s) - \tau_{\infty,s-1}(W_{s-1}))) \\
&= K_\infty + \lim_{s\to\infty} D_\infty(\tau_{\infty s}((W_s)) + \tau_{\infty,s}(W_s) - \tau_{\infty,s-1}(W_{s-1}) \\
&\quad - D_\infty \tau_{\infty s}(W_s) + D_\infty \tau_{\infty,s-1}(W_{s-1}) \\
&= K_\infty + W_\infty - W_\infty + D_\infty W_\infty = K_\infty + D_\infty W_\infty.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

3.3 Convergência no Espaço de Hilbert Estendido $\mathcal{K}$

Seja $\{\mathcal{B}_s, \tau_{us}\}$ uma sequência direta de espaços de Banach reais ou complexos, conforme vimos na Seção 3.2. Nesta seção assumimos que $\mathcal{K}$ é um espaço de Hilbert separável complexo e $\mathbf{K}$ é um operador densamente definido fechado em $\mathcal{K}$. Suponha que para cada $s \in \mathbb{Z}_+$ é dado uma aplicação linear limitada,

$$k_s : \mathcal{B}_s \to B(\mathcal{K}), \quad \text{com} \quad \|k_s\| \leq 1,$$

e tal que

$$\forall s, u, \ 0 \leq s \leq u, \quad k_u \tau_{us} = k_s.$$

Se os espaços de Banach $\mathcal{B}_s$ são reais, então a aplicação k_s é suposta ser linear sobre $\mathbb{R}$ caso contrário, é linear em $\mathbb{C}$. Então existe uma única aplicação linear e limitada $k_\infty : \mathcal{B}_\infty \to B(\mathcal{K})$ que satisfaz, $\forall s \in \mathbb{Z}_+, \ k_\infty \tau_{\infty s} = k_s$. Claramente, $\|k_\infty\| \leq 1$. Estenda a aplicação k_s para $\widetilde{k}_s : \widetilde{\mathcal{B}}_s = \mathtt{K} K_s + \mathcal{B}_s \to \mathbb{C}\mathbf{K} + B(\mathcal{K})$, definindo

$$\widetilde{k}_s(K_s) = \mathbf{K}, \quad \forall s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}.$$

Então $\widetilde{k}_s(K_s + X) = \mathbf{K} + k_s(X)$, com $X \in \mathcal{B}_s$, é um operador fechado em $\mathcal{K}$ com dom $(\mathbf{K} + k_s(X)) = \text{dom } \mathbf{K}$.

Suponha, além disso, que existe $\mathbf{D} \in B(B(\mathcal{K}))$ tal que

$$\forall s \in \mathbb{Z}_+, \quad \mathbf{D} k_s = k_s D_s.$$

Então tem-se que, $\forall s \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall X \in \mathcal{B}_s$,

$$k_\infty D_\infty(\tau_{\infty s} X) = k_\infty \tau_{\infty s} D_s(X) = k_s D_s(X) = \mathbf{D} k_s(X) = \mathbf{D} k_\infty(\tau_{\infty s} X).$$

Uma vez que o conjunto de vetores $\{\tau_{\infty s}(X); s \in \mathbb{Z}_+, X \in \mathcal{B}_s\}$ é denso em $\mathcal{B}_s$, obtemos $k_\infty D_\infty = \mathbf{D} k_\infty$.

Proposição 3.3.1 *Sob as hipóteses do Corolário 3.2.1 e as definidas acima, seja $\{\boldsymbol{A}_s\}_{s=0}^\infty$ uma sequência de operadores limitados em $\mathcal{K}$ tal que*

$$\forall s, u, 0 \leq s < u, \ \forall X \in \mathcal{B}_u \quad k_u(\theta_u^s(X)) = [\boldsymbol{A}_s, k_u(X)], \tag{3.22}$$

$$\forall s \in \mathbb{Z}_+, \quad \boldsymbol{A}_s(\text{dom } \boldsymbol{K}) \subset \text{dom } \boldsymbol{K},$$

e

$$\forall s, u, \ 0 \leq s < u, \quad [\boldsymbol{A}_s, \boldsymbol{K}] = k_u(\widetilde{\theta}_u^s(K_u))|_{\text{dom } \boldsymbol{K}}.$$

Além disso, assuma que

$$\sum_{s=0}^{\infty} \|\boldsymbol{A}_s\| < \infty. \tag{3.23}$$

Sejam

$$\boldsymbol{V} = k_\infty(V_\infty), \quad \boldsymbol{W} = k_\infty(W_\infty).$$

Então o limite

$$\boldsymbol{U} = \lim_{s\to\infty} e^{\boldsymbol{A}_{s-1}} \dots e^{\boldsymbol{A}_0}, \tag{3.24}$$

existe na norma de operadores, $\boldsymbol{U} \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ *tem uma inversa limitada e vale*

$$\boldsymbol{U}(\text{dom } \boldsymbol{K}) = \text{dom } \boldsymbol{K},$$

e

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{V})\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{W}). \tag{3.25}$$

Para demonstrar esse resultado precisamos do seguinte lema, em que usaremos a notação $\text{ad}_A B = [A, B]$. Logo, $e^{\lambda \text{ad}_A} B = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$. De fato,

$$\begin{aligned}
e^{\lambda \text{ad}_A} B &= \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(\lambda \text{ad}_A)^j\Big)(B) \\
&= \Big(\text{I}_\text{d} + \lambda \text{ad}_A + \frac{1}{2!}\lambda^2 \text{ad}_A^2 + \dots + \frac{1}{n!}\lambda^n \text{ad}_A^n + \dots\Big)B \\
&= B + \lambda \text{ad}_A B + \frac{1}{2!}\lambda^2 \text{ad}_A(\text{ad}_A B) + \dots + \frac{1}{n!}\lambda^n \text{ad}_A^n B + \dots \\
&= B + \lambda[A, B] + \frac{1}{2!}\lambda^2 \text{ad}_A[A, B] + \frac{1}{3!}\lambda^3 \text{ad}_A^2[A, B] + \dots \\
&= B + \lambda[A, B] + \frac{1}{2!}\lambda^2[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}\lambda^3 \text{ad}_A[A, [A, B]] + \dots \\
&= B + \lambda[A, B] + \frac{1}{2!}\lambda^2[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}\lambda^3[A, [A, [A, B]]] + \dots .
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} &= \Big(\text{I}_\text{d} + \lambda A + \frac{\lambda^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{\lambda^n}{n!}A^n + \dots\Big)B\Big(\text{I}_\text{d} - \lambda A + \frac{\lambda^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{\lambda^n}{n!}A^n\Big) \\
&= \Big(B + \lambda AB + \frac{\lambda^2}{2!}A^2 B + \dots + \frac{\lambda^n}{n!}A^n B + \dots\Big) \\
&\quad \times\Big(\text{I}_\text{d} + \lambda A + \frac{\lambda^2}{2!}A^2 - \frac{\lambda^3}{3!}A^3 + \dots\Big) \\
&= B + \lambda AB - \lambda BA + \frac{\lambda^2}{2!}A^2 B + \frac{\lambda^2}{2!}BA^2 - \lambda^2 ABA + \dots \\
&= B + \lambda[A, B] + \frac{1}{2!}\lambda^2[A, [A, B]] + \dots
\end{aligned}$$

e o resultado segue.

Lema 3.3.1 *Assuma que* $\mathcal{H}$ *é um espaço de Hilbert,* K *é um operador fechado em* $\mathcal{H}$, $A, B \in B(\mathcal{H})$,

$$A(\text{dom } K) \subset \text{dom } K,$$

e

$$[A, K] = B|_{\text{dom } K}.$$

Então, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ *vale*

$$e^{\lambda A}(\text{dom } K) = \text{dom } K, \tag{3.26}$$

e

$$e^{-\lambda A} K e^{\lambda A} = K + \frac{e^{-\lambda \text{ad}_A} - 1}{\text{ad}_A} B.$$

Demonstração: Escolha um vetor arbitrário $v \in \text{dom } K$ e sejam

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} A^k v, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Então $v_n \in \text{dom } K$, pois $A(\text{dom } K) \subset \text{dom } K$ e $v_n \to e^{\lambda A} v$, quando $n \to \infty$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} K v_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} (K A^k - A^k K) v + \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} A^k K v \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} A^j B A^{k-1-j} v + \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} A^k K v. \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{n \to \infty} K v_n$ existe e chamemos o limite de u. Como K é fechado, $v_n \to e^{\lambda A} v$ e $K v_n \to u$ segue que $e^{\lambda A} v \in \text{dom } K$ e $K(e^{\lambda A} v) = u$. Portanto,

$$e^{\lambda A}(\text{dom } K) \subset \text{dom } K.$$

Mas $(e^{\lambda A})^{-1} = e^{-\lambda A}$ e daí

$$\text{dom } K \subset e^{-\lambda A}(\text{dom } K).$$

Assim, $e^{\lambda A} \text{dom } K = \text{dom } K$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Além disso, o cálculo acima também mostra que

$$K e^{\lambda A} v = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} A^j B A^{k-1-j} v + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} A^k K v, \quad \forall v \in \text{dom } K.$$

Portanto,

$$K e^{\lambda A} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} A^j B A^{k-1-j} + e^{\lambda A} K,$$

e segue que $Ke^{\lambda A} = -e^{\lambda A}\Big(\frac{1-e^{-\lambda \mathrm{ad}_A}}{\mathrm{ad}_A}B\Big) + e^{\lambda A}K$; logo,

$$e^{-\lambda A}Ke^{\lambda A} = K + \frac{e^{-\lambda \mathrm{ad}_A} - 1}{\mathrm{ad}_A}B.$$

$\blacksquare$

Demonstração da Proposição 3.3.1: Sejam $0 \leq s < u$, para todo $X \in \mathcal{B}_u$, temos que

$$k_\infty \theta^s_\infty(\tau_{\infty u}X) = k_\infty \tau_{\infty u}\theta^s_u(X) = k_u\theta^s_u(X) = [\mathbf{A}_s, k_u(X)] = [\mathbf{A}_s, k_\infty(\tau_{\infty u}X)].$$

Como o conjunto de vetores $\{\tau_{\infty u}(X); s < u, X \in \mathcal{B}_u\}$ é denso em $\mathcal{B}_\infty$, temos, $\forall X \in \mathcal{B}_\infty$,

$$k_\infty \theta^s_\infty(X) = [\mathbf{A}_s, k_\infty(X)]$$

e, portanto, $k_\infty\Big(e^{\theta^s_\infty}(X)\Big) = e^{\mathbf{A}_s}k_\infty(X)e^{-\mathbf{A}_s}$. Sejam

$$\mathbf{U}_s = e^{\mathbf{A}_{s-1}} \ldots e^{\mathbf{A}_0}, \quad \text{para} \quad s \geq 1, \; \mathbf{U}_0 = \mathrm{I_d}.$$

A hipótese (3.23) implica que ambas as sequências $\{\mathbf{U}_s\}$ e $\{\mathbf{U}_s^{-1}\}$ são de Cauchy em $B(\mathcal{K})$, pois para $u \geq s$, temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_u - \mathbf{U}_s\| &\leq \Big(\exp(\sum_{j=s}^{u-1}\|\mathbf{A}_s\|) - 1\Big)\exp(\sum_{j=0}^{s-1}\|\mathbf{A}_s\|) \\ &= \exp(\sum_{j=0}^{u-1}\|\mathbf{A}_s\|) - \exp(\sum_{j=0}^{s-1}\|\mathbf{A}_s\|), \end{aligned}$$

ainda $(\mathbf{U}_s)^{-1} = (e^{\mathbf{A}_{s-1}} \ldots e^{\mathbf{A}_0})^{-1} = e^{-\mathbf{A}_0} \ldots e^{-\mathbf{A}_{s-1}}$ e, portanto, o limite (3.24) existe na norma de operadores, com

$$\mathbf{U}^{-1} = \lim_{s\to\infty} \mathbf{U}_s^{-1} \in B(\mathcal{K}).$$

Além disso, $\forall X \in \mathcal{B}_\infty$,

$$\begin{aligned} k_\infty T_\infty(X) &= k_\infty(\lim_{s\to\infty} e^{\theta^{s-1}_\infty} \ldots e^{\theta^0_\infty}X) \\ &= \lim_{s\to\infty}(k_\infty e^{\theta^{s-1}_\infty}(e^{\theta^{s-2}_\infty} \ldots e^{\theta^0_\infty}X)e^{-\mathbf{A}_{s-1}}) \qquad (3.27) \\ &= \lim_{s\to\infty}\Big(e^{A_{s-1}}k_\infty e^{\theta^{s-2}_\infty} \ldots e^{\theta^0_\infty}Xe^{-A_{s-1}}\Big) \\ &= \lim_{s\to\infty}\mathbf{U}_s k_\infty(X)\mathbf{U}_s^{-1}. \end{aligned}$$

Agora vamos calcular $\widetilde{k}_s\widetilde{T}_s(K_s)$. Para $0 \leq s < u$, seja $\mathbf{B}_s = k_u(\widetilde{\theta}^s_u(K_u)) \in B(\mathcal{K})$ e observe que $\mathbf{B}_s$ não depende em $u > s$, pois se $0 \leq s < u \leq v$, então

$$k_u(\widetilde{\theta}^s_u(K_u)) = k_v(\tau_{vu}\widetilde{\theta}^s_u(K_u)) = k_v(\widetilde{\theta}^s_v(K_v)).$$

Podemos aplicar o Lema 3.3.1 aos operadores $\mathbf{K}$, $\mathbf{A}_s$ e $\mathbf{B}_s$ para concluir que $e^{-\mathbf{A}_s}(\mathrm{dom}\ \mathbf{K}) = \mathrm{dom}\ \mathbf{K}$ e

$$e^{\mathbf{A}_s}\mathbf{K}e^{-\mathbf{A}_s} = \mathbf{K} + \frac{e^{\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_s}} - 1}{\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_s}}\mathbf{B}_s. \tag{3.28}$$

Por outro lado, usando (3.22)

$$\widetilde{k}_u(e^{\widetilde{\theta}_u^s}(K_u)) = \widetilde{k}_u\Big(K_u + \frac{e^{\theta_u^s} - 1}{\theta_u^s}\widetilde{\theta}_u^s(K_u)\Big) = \mathbf{K} + \frac{e^{\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_s}} - 1}{\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_s}}\mathbf{B}_s.$$

Assim, $\widetilde{k}_u(e^{\widetilde{\theta}_u^s}(K_u)) = e^{\mathbf{A}_s}\mathbf{K}e^{-\mathbf{A}_s}$. Consequentemente, $\mathbf{U}_s(\mathrm{dom}\ \mathbf{K}) = \mathrm{dom}\ \mathbf{K}$ e

$$\begin{aligned}
\widetilde{k}_s\widetilde{T}_s(K_s) &= \widetilde{k}_s\Big(e^{\widetilde{\theta}_s^{s-1}}\dots e^{\widetilde{\theta}_s^{0}}(K_s)\Big) = \widetilde{k}_s e^{\widetilde{\theta}_s^{s-1}}\Big(e^{\widetilde{\theta}_s^{s-2}}\dots e^{\widetilde{\theta}_s^{0}}(K_s)\Big)\\
&= e^{A_{s-1}}\widetilde{k}_s\Big(e^{\widetilde{\theta}_s^{s-2}}\dots e^{\widetilde{\theta}_s^{0}}(K_s)\Big)e^{-A_{s-1}}\\
&= e^{A_{s-1}}\dots e^{A_0}Ke^{-A_0}\dots e^{-A_{s-1}} = \mathbf{U}_s\mathbf{K}\mathbf{U}_s^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Seja $\mathbf{C}_s = \mathbf{U}_s\mathbf{K}\mathbf{U}_s^{-1} - \mathbf{K}$ de (3.28), obtemos que $\mathbf{C}_s \in B(\mathcal{K})$ e podemos calcular, usando a relação (3.29), o limite

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \lim_{s\to\infty}\mathbf{C}_s = \lim_{s\to\infty} k_s(\widetilde{T}_s(K_s) - K_s)\\
&= k_\infty(\lim_{s\to\infty}\tau_{\infty s}(\widetilde{T}_s(K_s) - K_s)) = k_\infty(\widetilde{T}_\infty(K_\infty) - K_\infty).
\end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{K} + \mathbf{C} = \widetilde{k}_\infty(\widetilde{T}_\infty(K_\infty))$. Usando que $\mathbf{K}$ é fechado, a equação $\mathbf{U}_s\mathbf{K}\mathbf{U}_s^{-1} = \mathbf{K} + \mathbf{C}_s$ e o fato das sequências $\{\mathbf{U}_s^{\pm 1}\}$ e $\{\mathbf{C}_s\}$ convergirem, obtemos que $\mathbf{U}^{\pm 1}(\mathrm{dom}\ \mathbf{K}) \subset \mathrm{dom}\ \mathbf{K}$ e, portanto, $\mathbf{U}^{\pm 1}(\mathrm{dom}\ \mathbf{K}) = \mathrm{dom}\ \mathbf{K}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}\mathbf{K}\mathbf{U}^{-1} &= \lim_{s\to\infty}\mathbf{U}_s\mathbf{K}\mathbf{U}_s^{-1}\\
&= \mathbf{K} + \lim_{s\to\infty}\mathbf{C}_s\\
&= \mathbf{K} + \mathbf{C} = \widetilde{k}_\infty\widetilde{T}_\infty(K_\infty).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

De (3.27) e (3.30), segue que

$$\widetilde{k}_\infty\widetilde{T}_\infty(X) = \mathbf{U}\widetilde{k}_\infty(X)\mathbf{U}^{-1}, \quad \forall X \in \widetilde{\mathcal{B}}_\infty.$$

Mas por (3.20) $\widetilde{T}_\infty(K_\infty + V_\infty) = K_\infty + D_\infty(W_\infty)$. Portanto, aplicando $\widetilde{k}_\infty$, obtemos

$$\widetilde{k}_\infty\widetilde{T}_\infty(K_\infty) + \widetilde{k}_\infty\widetilde{T}_\infty(V_\infty) = \mathbf{K} + k_\infty D_\infty(W_\infty),$$

ou seja, $\mathbf{U}(\mathbf{K} + \mathbf{V})\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{K} + D(W)$. ■

3.4 Escolha da Sequência Direta de Espaços de Banach

Suponha que sejam dados uma sequência decrescente de subconjuntos do intervalo $]0,\infty[$, $\Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \ldots$, uma sequência decrescente de números reais positivos $\{\varphi_s\}_{s=0}^{\infty}$ e uma sequência estritamente crescente de números reais positivos $\{E_s\}_{s=0}^{\infty}, 1 \leq E_1 < E_2 < \ldots$.

Considere os espaços de Banach complexos ${}^0\mathcal{B}_s,\ s \geq 0$, como o subespaço

$$ {}^0\mathcal{B}_s \subset L^\infty\Big(\Omega_s \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)\Big), $$

formado por aqueles elementos $X = \{X_{knm}(\omega)\}$ que satisfazem

$$ X_{knm}(\omega) \in B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n),\ \forall \omega \in \Omega_s,\ \forall (k,n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, $$

e tem norma finita

$$ \|X\|_s = \sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega_s \\ \omega\neq\omega'}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \Big(\|X_{knm}(\omega)\| + \varphi_s \left\|\widetilde{\partial} X_{knm}(\omega,\omega')\right\| \Big) e^{|k|/E_s}, \tag{3.31} $$

onde o símbolo $\widetilde{\partial}$ designa a derivada discreta em ω,

$$ \widetilde{\partial} X(\omega,\omega') = \frac{X(\omega) - X(\omega')}{\omega - \omega'}. $$

No Apêndice, é mostrado que $({}^0\mathcal{B}_s, \|\cdot\|_s)$ é um espaço de Banach e que se $X,\ Y \in \mathcal{B}_s$ e a multiplicação XY é dada por (3.78), então $\|XY\|_s \leq \|X\|_s \|Y\|_s$.

Seja $\mathcal{B}_s \subset {}^0\mathcal{B}_s$ o subespaço fechado formado pelos elementos $X \in {}^0\mathcal{B}_s$ que satisfazem

$$ \forall (k,n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \forall \omega \in \Omega_s,\ X_{knm}(\omega)^* = X_{-k,m,n}(\omega) \in B(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m). \tag{3.32} $$

A sequência de espaços de Banach, $\{\mathcal{B}_s\}_{s=0}^{\infty}$, torna-se uma sequência direta se considerarmos, para $u \geq s$,

$$ \tau_{us} : \mathcal{B}_s \to \mathcal{B}_u, \quad \tau_{us}(X) = X|_{\Omega_u}. $$

Por causa da monotonicidade das sequências $\{\Omega_s\}$, $\{\varphi_s\}$ e $\{E_s\}$ claramente temos $\|\tau_{us}\| \leq 1$. De fato, se $X \in \mathcal{B}_s$, então

$$ \begin{aligned} \|\tau_{us} X\|_u &= \sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega_u \\ \omega\neq\omega'}} \sup_{n} \sum_{k} \sum_{m} \Big(\|X_{knm}(\omega)\| + \varphi_u \left\|\widetilde{\partial} X_{knm}(\omega,\omega')\right\| \Big) e^{|k|/E_u} \\ &\leq \sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega_u \\ \omega\neq\omega'}} \sup_{n} \sum_{k} \sum_{m} \Big(\|X_{knm}(\omega)\| + \varphi_s \left\|\widetilde{\partial} X_{knm}(\omega,\omega')\right\| \Big) e^{|k|/E_s} \\ &\leq \sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega_s \\ \omega\neq\omega'}} \sup_{n} \sum_{k} \sum_{m} \Big(\|X_{knm}(\omega)\| + \varphi_s \left\|\widetilde{\partial} X_{knm}(\omega,\omega')\right\| \Big) e^{|k|/E_s} \\ &= \|X\|_s. \end{aligned} $$

Agora, introduzimos o operador limitado $D_s \in B(\mathcal{B}_s)$ como o operador que extrai a parte diagonal, ou seja,

$$D_s(X)_{knm}(\omega) = \delta_{k0}\delta_{nm}X_{0nn}(\omega). \tag{3.33}$$

Claramente, $\|D_s\| \leq 1$ e $\|1 - D_s\| \leq 1$.

Seja

$$V \in L^\infty\Big(\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)\Big),$$

o elemento com componentes $V_{knm} \in B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)$ dado em (3.2). Como, por hipótese, $V(t)$ é hermitiano, para quase todo t, segue que $(V_{knm})^* = V_{-k,m,n}$. Ainda assumiremos, como no Teorema 3.1.1, que existe $r > 0$ tal que

$$\epsilon_V = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \|V_{knm}\| \max\{|k|^r, 1\} < \infty. \tag{3.34}$$

Vamos definir os elementos $V_s \in \mathcal{B}_s,\ s \geq 0$, por

$$(V_s)_{knm}(\omega) = \begin{cases} V_{knm} & \text{se} \quad |k| < E_s, \\ 0 & \text{se} \quad |k| \geq E_s. \end{cases} \tag{3.35}$$

Verifiquemos que $V_s \in \mathcal{B}_s$: pela definição de V_s, tem-se que para todo $(k, n, m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e $\omega \in \Omega_s$, $(V_s)_{knm}(\omega)^* = (V_s)_{-k,m,n}$ e

$$\begin{aligned} \|V_s\|_s &= \sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega_s\\ \omega\neq\omega'}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \Big(\|(V_s)_{knm}(\omega)\| + \varphi_s \left\|\widetilde{\partial}(V_s)_{knm}(\omega, \omega')\right\| \Big) e^{|k|/E_s} \\ &= \sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega_s\\ \omega\neq\omega'}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{|k|<E_s} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\|V_{knm}\| + \varphi_s \left\| \frac{V_{knm} - V_{knm}}{\omega - \omega'} \right\| \right) e^{|k|/E_s} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{|k|<E_s} \sum_{m\in\mathbb{N}} \|V_{knm}\| \, e^{|k|/E_s} < \infty, \end{aligned}$$

pois $\epsilon_V < \infty$. Para $s \geq 1$, temos a estimativa

$$\begin{aligned} \|V_s - \tau_{s-1}(V_{s-1})\|_s &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{E_{s-1}\leq|k|<E_s} \sum_{m\in\mathbb{N}} \|V_{knm}\| \, e^{|k|/E_s} \\ &\leq e \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \|V_{knm}\| \frac{\max\{|k|^r, 1\}}{(E_{s-1})^r} \\ &= \frac{e\epsilon_V}{(E_{s-1})^r}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Similarmente, para $s = 0$, temos $\|V_0\| \leq e\epsilon_V$ convencionando $E_{-1} = 1$ e $V_{-1} = 0$.

A sequência $\{K_s\}_{s=0}^{\infty}$ tem o mesmo significado que na Seção 3.2, ou seja, cada K_s é um vetor básico distinto em um espaço vetorial unidimensional $\mathbb{R}K_s$. Além disso, uma sequência $\theta_u^s \in B(\mathcal{B}_u)$, $0 \leq s < u$, satisfaz a regra (3.6). Da mesma forma como na Proposição 3.2.1 construímos sequências $T_s \in B(\mathcal{B}_s),\ s \geq 1,$ e $W_s \in \mathcal{B}_s,\ s \geq 0$, usando as relações (3.7) e (3.8), respectivamente.

Proposição 3.4.1 *Suponha que*

$$\|\theta_u^s\| \leq \frac{5}{\varphi_{s+1}} \|W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1})\|_s, \quad \forall s, u,\ 0 \leq s < u, \tag{3.37}$$

e sejam

$$A_* = 5e \sup_{s\geq 0} \frac{(E_s)^r}{\varphi_{s+1}(E_{s-1})^{2r}},\ B_* = 5e \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi_{s+1}(E_{s-1})^r},\ C_* = 5e \sup_{s\geq 0} \frac{1}{\varphi_{s+1}(E_{s-1})^r}. \tag{3.38}$$

Se

$$\epsilon_V B_* \leq \frac{1}{3}\ln 2 \quad e \quad \epsilon_V A_* \phi(3\epsilon_V C_*) \leq \frac{1}{9}, \tag{3.39}$$

então as conclusões do Corolário 3.2.1 valem e, em particular,os limites $V_\infty, W_\infty \in \mathcal{B}_\infty$, $T_\infty \in B(\mathcal{B}_\infty)$ e $\widetilde{T}_\infty \in B(\widetilde{\mathcal{B}}_\infty)$ existem e satisfazem a igualdade

$$\widetilde{T}_\infty(K_\infty + V_\infty) = K_\infty + D_\infty(W_\infty).$$

Demonstração: Sejam

$$F_s = \frac{5}{\varphi_{s+1}} \quad \text{e} \quad v_s = \frac{e\epsilon_V}{(E_{s-1})^r}, \quad s \geq 0. \tag{3.40}$$

Lembre que $\omega_s = \|W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1})\|$. Como por hipótese

$$\|\theta_u^s\| \leq \frac{5}{\varphi_{s+1}} \|W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1})\| = F_s\omega_s, \quad \forall s, u,\ u > s,$$

segue que (3.11) da Proposição 3.2.2 é satisfeita. Também de (3.36)

$$\|V_s - \tau_{s-1}(W_{s-1})\| \leq v_s,\ \forall s.$$

Se $A = \epsilon_V A_*$, obtemos

$$\begin{aligned} F_s v_s^2 &= \frac{5}{\varphi_{s+1}} \frac{e^2\epsilon_V^2}{(E_{s-1})^{2r}} = \frac{5}{\varphi_{s+1}} \frac{e\epsilon_V}{(E_{s-1})^{2r}} e\epsilon_V \\ &= \epsilon_V 5e \frac{(E_s)^r}{\varphi_{s+1}(E_{s-1})^{2r}} \frac{e\epsilon_V}{(E_s)^r} \leq \epsilon_V A_* v_{s+1} = A v_{s+1}, \end{aligned}$$

que é a condição (3.12) da Proposição 3.2.2. Além disso,

$$B = \sum_{s=0}^{\infty} F_s v_s = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{5}{\varphi_{s+1}} \frac{e\epsilon_V}{(E_{s-1})^r} = \epsilon_V B_* < \infty$$

e

$$C = \sup_s F_s v_s = \sup_s \frac{5}{\varphi_{s+1}} \frac{e\epsilon_V}{(E_{s-1})^r} = \epsilon_V C_*.$$

Como pela hipótese (3.39)

$$\epsilon_V B_* = B \leq \frac{1}{3}\ln 2 \quad \text{e} \quad \epsilon_V A_* \phi(3\epsilon_V C_*) = A\phi(3C) \leq \frac{1}{9},$$

segue da Observação 3.2.2 que (3.15) vale com $d = 3$. Além disso,

$$F_{\inf} = \inf_s F_s = \inf_s \frac{5}{\varphi_{s+1}} = \frac{5}{\varphi_1} > 0,$$

e todas as hipóteses do Corolário 3.2.1 bem como as da Proposição 3.2.2 são satisfeitas e o resultado segue. ■

3.5 Relação entre os Espaços de Banach $\mathcal{B}_s$ com o Operador Auto-adjunto em $\mathcal{K}$

Sejam $\mathcal{B}_s$ os espaços de Banach como na seção anterior e

$$\Omega_\infty = \cap_{s=0}^{\infty} \Omega_s.$$

Suponha que $\Omega_\infty \neq \emptyset$ e fixe $\omega \in \Omega_\infty$ (logo $\omega > 0$). Para cada função $[0,T] \ni t \mapsto X(t) \in B(\mathcal{H})$ existe naturalmente um operador $\mathbf{X}$ em $\mathcal{K} = L^2([0,T], \mathcal{H}, dt)$ definido por $(\mathbf{X}\psi)(t) = X(t)\psi(t)$. Como é bem conhecido (veja [29, 53]),

$$\|\mathbf{X}\| \leq \|X\|_{SH},$$

em que $\|.\|_{SH}$ é conhecida como a norma de Schur-Holmgren,

$$\begin{aligned} \|X\|_{SH} &= \max\Big\{ \sup_{(l,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} \|P_l \otimes Q_n X P_k \otimes Q_m\|, \\ &\qquad \sup_{(k,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} \sum_{(l,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} \|P_l \otimes Q_n X P_k \otimes Q_m\| \Big\} \\ &= \max\Big\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \|X_{knm}\|, \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \|X_{knm}\| \Big\}, \end{aligned}$$

em que

$$X_{knm} = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\omega k t} Q_n X(t) Q_m dt.$$

Se $X(t)$ é hermitiano para quase todo $t \in [0,T]$, então vale, $\forall (k,n,m)$, $(X_{knm})^* = X_{-k,m,n}$ e, portanto,

$$\|X\|_{SH} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \|X_{knm}\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \|X_{knm}\| .$$

Note também que, $\forall s \in \mathbb{Z}_+$, $\forall X \in \mathcal{B}_s$, $\quad \|X(\omega)\|_{SH} \le \|X\|_s$. De fato,

$$\begin{aligned} \|X(\omega)\|_{SH} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \|X_{knm}(\omega)\| \\ &\le \sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega_s \\ \omega\neq\omega'}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \Big(\|X_{knm}(\omega)\| + \varphi_s \|\widetilde{\partial} X_{knm}(\omega)\| \Big) e^{|k|/E_s} = \|X\|_s \end{aligned}$$

e, consequentemente, o mesmo é verdadeiro para $s = \infty$.

A cada elemento $X \in {}^0\mathcal{B}_s \subset L^\infty\Big(\Omega_s \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)\Big)$ tal que $\|X(\omega)\|_{SH} < \infty$, podemos associar uma função definida no intervalo $[0,T]$,

$$t \to \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} e^{ik\omega t} X_{knm}(\omega).$$

O operador correspondente em $\mathcal{K}$ é denotado por $k_s(X)$. Para $X \in \mathcal{B}_s$, temos

$$\|k_s(X)\| \le \|X(\omega)\|_{SH} \le \|X\|_s . \tag{3.41}$$

De fato, $k_s(X)$ é um operador fibrado e as fibras são

$$k_s(X)(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} e^{ik\omega t} X_{knm}(\omega) \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}).$$

Logo, $\|k_s(X)\| = \sup_t \|k_s(X)(t)\|$. Agora se $\psi \in \mathcal{H}$, então $\psi = \sum_m c_m \psi_m$ com $\psi_m \in \mathcal{H}_m$ e para $\psi_m \in \mathcal{H}_m$

$$\begin{aligned} \|k_s(X)(t)\psi_m\| &= \Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{ik\omega t} X_{knm}(\omega)\psi_m \Big\| \\ &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \|e^{ik\omega t} X_{knm}(\omega)\psi_m\| \\ &\le \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \|X_{knm}(\omega)\| \Big) \|\psi_m\|, \end{aligned}$$

e, portanto, para todo $t \in [0,T]$,

$$\|k_s(X)(t)\| \le \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \|X_{knm}(\omega)\| = \|X(\omega)\|_{SH}$$

e (3.41) segue.

Além disso se, $X \in \mathcal{B}_s$, então o operador $k_s(X)$ é Hermitiano, devido à propriedade (3.32) de X. Desta forma, introduzimos as aplicações lineares $k_s : \mathcal{B}_s \to B(\mathcal{K})$, para

$s \in \mathbb{Z}_+$ com $\|k_s\| \leq 1$. Outra propriedade que temos considerando a multiplicação de operadores dada no Apêndice (veja a regra (3.78)) é a seguinte: se $X, Y \in {}^0\mathcal{B}_s$ satisfazem $\|X\|_{SH} < \infty$ e $\|Y\|_{SH} < \infty$, então $\|(XY)(\omega)\|_{SH} < \infty$ e

$$k_s(XY) = k_s(X)k_s(Y).$$

Seja $\mathbf{D} \in B(B(\mathcal{K}))$ o operador que toma a parte diagonal de um operador $X \in B(\mathcal{K})$

$$\mathbf{D}(X) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} P_k \otimes Q_m X P_k \otimes Q_m.$$

Temos que $\mathbf{D}k_s = k_s D_s$ e $\|D\| \leq 1$.

Uma consequência de (3.34) é que $V = \{V_{knm}\}$ tem norma de Schur-Holmgren finita, $\|V\|_{SH} < \infty$, pois

$$\begin{aligned} \|V\|_{SH} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \|V_{knm}\| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \|V_{knm}\| \max\{|k|^r, 1\} = \epsilon_V < \infty. \end{aligned}$$

Seja $V_s \in \mathcal{B}_s,\ s \in \mathbb{Z}_+$, definida por (3.35). Então como para $|k| \geq E_s$, $\frac{\max\{|k|^r,1\}}{(E_s)^r} \geq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \|V - V_s\|_{SH} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \|(V - V_s)_{knm}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{|k|\geq E_s} \sum_{m\in\mathbb{N}} \|V_{knm}\| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \|V_{knm}\| \frac{\max\{|k|^r, 1\}}{(E_s)^r} = \frac{1}{(E_s)^r}\epsilon_V = \frac{\epsilon_V}{(E_s)^r}. \end{aligned}$$

Impomos agora uma condição adicional na sequência crescente $\{E_s\}$ de números reais positivos que ocorrem na definição da norma $\|.\|_s$ em $\mathcal{B}_s$ conforme (3.31), a saber, suporemos que

$$\lim_{s\to+\infty} E_s = +\infty. \tag{3.42}$$

Neste caso, $\lim_{s\to\infty} \|V - V_s\|_{SH} = 0$ e, portanto,

$$\mathbf{V} = \lim_{s\to\infty} k_s(V_s) = k_\infty(V_\infty), \tag{3.43}$$

na norma de operadores.

Também assumiremos que existe $A_s \in {}^0\mathcal{B}_{s+1},\ s \in \mathbb{Z}_+$, tal que,

$$(A_s)_{knm}(\omega)^* = -(A_s)_{-k,m,n}(\omega), \tag{3.44}$$

e, usando esses elementos, definimos as transformações ${}^0\theta_u^s \in B({}^0\mathcal{B}_u),\ u > s$, por

$$ {}^0\theta_u^s(X) = [\tau_{u,s+1}(A_s), X]. \tag{3.45}$$

Como para $X \in {}^0\mathcal{B}_u$, temos

$$\begin{aligned}
\left\|{}^0\theta_u^s(X)\right\|_u &= \|\tau_{u,s+1}(A_s)X - X\tau_{u,s+1}(A_s)\|_u \leq \|\tau_{u,s+1}(A_s)X\|_u + \|X\tau_{u,s+1}(A_s)\|_u \\
&\leq \|\tau_{u,s+1}(A_s)\|_u\|X\|_u + \|X\|_u\|\tau_{u,s+1}(A_s)\|_u \\
&\leq \|A_s\|_{s+1}\|X\|_u + \|X\|_u\|A_s\|_{s+1} = 2\,\|A_s\|_{s+1}\,\|X\|_u\,,
\end{aligned}$$

segue que

$$\left\|{}^0\theta_u^s(X)\right\| \leq 2\,\|A_s\|_{s+1}\,.$$

Sendo $\mathcal{B}_u \subset {}^0\mathcal{B}_u$ um subespaço invariante por ${}^0\theta_u^s$, podemos definir $\theta_s^u = {}^0\theta_u^s|_{\mathcal{B}_u} \in B(\mathcal{B}_u)$. Como $iA_s \in \mathcal{B}_{s+1}$, podemos definir

$$\mathbf{A}_s = -ik_{s+1}(iA_s) \in B(\mathcal{K}).$$

Claramente, $\|\mathbf{A}_s\| = \|k_{s+1}(iA_s)\| \leq \|iA_s\|_{s+1} = \|A_s\|_{s+1}$ e usando (3.45), obtemos que, $\forall s, u,\ 0 \leq s < u,\ \forall X \in \mathcal{B}_u$,

$$\begin{aligned}
k_u(\theta_u^s(X)) &= k_u([\tau_{u,s+1}(A_s), X]) = k_u(\tau_{u,s+1}(A_s)X - X\tau_{u,s+1}(A_s)) \\
&= k_u(\tau_{u,s+1}(A_s)X) - k_u(X\tau_{u,s+1}(A_s)) \\
&= k_u((\tau_{u,s+1})(A_s))k_u(X) - k_u(X)k_u(\tau_{u,s+1}(A_s)) \\
&= k_{s+1}(A_s)k_u(X) - k_u(X)k_{s+1}(A_s) \\
&= -ik_{s+1}(iA_s)k_u(X) - k_u(X)(-ik_{s+1}(iA_s)) \\
&= \mathbf{A}_s k_u(X) - k_u(X)\mathbf{A}_s = [\mathbf{A}_s, k_u(X)].
\end{aligned}$$

Lema 3.5.1 *Seja* $\{W_s\}_{s=0}^{\infty}$ *uma sequência de elementos* $W_s \in \mathcal{B}_s$ *e* $\widetilde{\theta}_u^s : \widetilde{\mathcal{B}}_u \to \widetilde{\mathcal{B}}_u$ *as extensões de* $\theta_u^s,\ 0 \leq s < u$, *definidas em (3.9). Assuma que os elementos* $A_s \in {}^0\mathcal{B}_{s+1},\ s \in \mathbb{Z}_+$, *satisfazem*

$$(k\omega - \Delta_{mn})(A_s)_{knm}(\omega) = \Big(\theta_u^s(\tau_{us}D_s(W_s)) + \tau_{us}(1-D_s)(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1}))\Big)_{knm}(\omega), \tag{3.46}$$

$\forall (k,n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ \forall s,u,\ 0 \leq s < u$. *Então,*

$$\forall s \in \mathbb{Z}_+,\ \boldsymbol{A}_s(\text{dom } \boldsymbol{K}) \subset \text{dom } \boldsymbol{K},$$

e

$$\forall s,u,\ 0 \leq s < u, \quad [\boldsymbol{A}_s, \boldsymbol{K}] = k_u(\widetilde{\theta}_u^s(K_u))|_{\text{dom } \boldsymbol{K}}.$$

Demonstração: Denote

$$\mathbf{B}_s = -k_u(\widetilde{\theta}_u^s(K_u)).$$

Por (3.9), temos que

$$-\widetilde{\theta}_u^s(K_u) = \theta_u^s D_u(\tau_{us}(W_s)) + (1 - D_u)(\tau_{us}(W_s) - \tau_{u,s-1}(W_{s-1})),$$

logo, o lado direito de (3.46) são na verdade as entradas da matriz de $-\widetilde{\theta}_u^s(K_u)$ e, assim, podemos reescrever (3.46) como

$$(k\omega - \Delta_{mn})(A_s)_{knm}(\omega) = (-\widetilde{\theta}_u^s(K_u))_{knm}(\omega),$$

aplicando k_u em ambos os lados da igualdade acima chegamos na igualdade $\mathbf{K}P_l \otimes Q_n \mathbf{A}_s P_k \otimes Q_m = P_l \otimes Q_n \mathbf{A}_s P_k \otimes Q_m \mathbf{K} + P_l \otimes Q_n \mathbf{B}_s P_k \otimes Q_m$, $\forall (l, n), (k, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Como $\mathbf{K}$ é fechado, segue que, $\forall (k, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$,

$$\mathbf{K}\mathbf{A}_s P_k \otimes Q_m = \mathbf{A}_s P_k \otimes Q_m \mathbf{K} + \mathbf{B}_s P_k \otimes Q_m. \tag{3.47}$$

Particulamente, $\mathbf{A}_s(\mathrm{Img}(P_k \otimes Q_m)) \subset \mathrm{dom}\ \mathbf{K}$. Mas $\mathrm{Img}(P_k \otimes Q_m)$ são auto-espaços dois a dois ortogonais de $\mathbf{K}$. Consequentemente, se $v \in \mathrm{dom}\ \mathbf{K}$, então a sequência $\{v_N\}_{N=1}^{\infty}$ dada por

$$v_N = \sum_{k, |k| \leq N} \sum_{m, m \leq N} P_k \otimes Q_m v,$$

tem a propriedade: $v_N \to v$ e $\mathbf{K}v_N \to \mathbf{K}v$, quando $N \to \infty$. A igualdade (3.47) implica que

$$\mathbf{K}\mathbf{A}_s v_N = \mathbf{A}_s \mathbf{K} v_N + \mathbf{B}_s v_N,\ \forall N.$$

Fazendo $N \to \infty$ e usando $\mathbf{A}_s(\mathrm{Img}(P_k \otimes Q_m)) \subset \mathrm{dom}\ \mathbf{K}$ e o fato de $\mathbf{K}$ ser fechado concluímos que

$$\mathbf{A}_s v \in \mathrm{dom}\ \mathbf{K} \text{ e } \mathbf{K}\mathbf{A}_s v = \mathbf{A}_s \mathbf{K} v + \mathbf{B}_s v.$$

Portanto,

$$\mathbf{A}_s(\mathrm{dom}\ \mathbf{K}) \subset \mathrm{dom}\ \mathbf{K}$$

e $(-\mathbf{K}\mathbf{A}_s + \mathbf{A}_s\mathbf{K})v = -\mathbf{B}_s v,\ \forall v \in \mathrm{dom}\ \mathbf{K}$; logo, $[\mathbf{A}_s, \mathbf{K}]v = k_u(\widetilde{\theta}_u^s(k_u))v,\ \forall v \in \mathrm{dom}\ \mathbf{K}$, ou seja, $[\mathbf{A}_s, \mathbf{K}] = k_u(\widetilde{\theta}_u^s(k_u))|_{\mathrm{dom}\ \mathbf{K}}$. ■

Proposição 3.5.1 *Assuma que $\omega \in \Omega_\infty$ e as normas $\|.\|_s$ no espaço de Banach $\mathcal{B}_s$ satisfazendo (3.42). Sejam $\theta_u^s \in B(\mathcal{B}_u)$, $0 \leq s < u$, os operadores definidos em (3.45) através dos elementos $A_s \in {}^0\mathcal{B}_{s+1}$ satisfazendo (3.44), e seja $W_s \in \mathcal{B}_s$, $s \in \mathbb{Z}_+$, a sequência* *definida recursivamente de acordo com (3.8). Assuma que os elementos* A_s*,* $s \in \mathbb{Z}_+$*, satisfazem a condição (3.46) e que*

$$\|A_s\| \leq \frac{5}{2\varphi_{s+1}} \|W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1})\|, \ \forall s \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.48}$$

Além disso, assuma que os números A_*, B_* *e* C_**, como definidos em (3.38), satisfazem a condição (3.39). Então existe em* $\mathcal{K}$ *um operador unitário* $\boldsymbol{U}$ *e um operador Hermitiano limitado* $\boldsymbol{W}$ *de tal forma que*

$$\boldsymbol{U}(\mathrm{dom}\ \boldsymbol{K}) = \mathrm{dom}\ \boldsymbol{K}$$

e

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{V})\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{W}).$$

Demonstração: As normas de θ_u^s podem ser estimadas por

$$\|\theta_u^s\| \leq 2\|A_s\| \leq \frac{5}{\varphi_{s+1}} \|W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1})\|.$$

Desta forma, as hipóteses da Proposição 3.4.1 são satisfeitas e, consequentemente, de acordo com Proposição 3.4.1 (e sua demonstração), o mesmo é verdadeiro para a Proposição 3.2.2 e o Corolário 3.2.1 (com F_s e v_s como definidos em (3.40) e as constantes A, B e C como definidas na demonstração da Proposição 3.4.1). Como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_s\| &\leq \|A_s\| \leq \frac{5}{2\varphi_{s+1}} \|W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1})\| \\ &= \frac{1}{2} F_s \|W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1})\| = \frac{1}{2} F_s \omega_s, \end{aligned}$$

e a condição (3.15) está satisfeita com $d = 3$, obtemos

$$\sum_{s=0}^{\infty} \|\mathbf{A}_s\| \leq \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} F_s \omega_s \leq \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} F_s 3 v_s = \frac{3}{2} \sum_{s=0}^{\infty} F_s v_s = \frac{3}{2} B < \infty.$$

Isto verifica a hipótese (3.23) da Proposição 3.3.1 e observe que as demais hipóteses da Proposição 3.3.1 são satisfeitas, visto que as hipóteses do Lema 3.5.1 também são satisfeitas. Então da Proposição 3.3.1 temos que, sendo $\mathbf{V} = k_\infty(V_\infty)$, $\mathbf{W} = k_\infty(W_\infty)$ (que é hermitiano, pois, é limite de operadores hermitianos), o limite $\mathbf{U} = \lim_{s\to\infty} e^{\mathbf{A}_{s-1}} \ldots e^{\mathbf{A}_0}$ existe e é um operador unitário em $\mathcal{B}(\mathcal{K})$, satisfazendo $\mathbf{U}(\mathrm{dom}\ \mathbf{K}) = \mathrm{dom}\ \mathbf{K}$ e

$$\mathbf{U}(\mathbf{K} + \mathbf{V})\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{K} + \mathbf{D}(\mathbf{W}),$$

o que demonstra o teorema. ∎

3.6 Conjunto de Frequências Não-Ressonantes

Seja $J > 0$ fixado e assuma que, $\forall s \in \mathbb{Z}_+$,

$$\Omega_s \subset \Big[\frac{8}{9}J, \frac{9}{8}J\Big].$$

A seguinte definição diz respeito aos índices (k, n, m) correspondendo as entradas não-diagonais, isto é, os índices para os quais $k \neq 0$ ou $m \neq n$. Os índices da diagonal com $k = 0$ e $m = n$, serão sempre tratados separadamente.

Definição 3.6.1 *Diremos que um multi-índice $(k, n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é crítico se $m \neq n$ e*

$$\frac{kJ}{\Delta_{mn}} \in \Big]\frac{1}{2}, 2\Big[. \tag{3.49}$$

Caso contrário, o multi-índice será chamado não-crítico.

Definição 3.6.2 *Seja $\psi(k, n, m)$ uma função positiva definida nos índices não-diagonais e $W \in \mathcal{B}_s$. Uma frequência $\omega \in \Omega_s$ será chamada (W, ψ)-não-ressonante se para todos os índices não-diagonais $(k, n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, vale*

$$dist\Big(\sigma(k\omega - \Delta_{mn} + W_{0nn}(\omega)), \sigma(W_{0mm}(\omega))\Big) \geq \psi(k, n, m). \tag{3.50}$$

Caso contrário, ω será chamado (W, ψ)-ressonante.

Note que, em virtude de (3.32), $W_{0mm}(\omega)$ é um operador auto-adjunto em $\mathcal{H}_m$.

Lema 3.6.1 *Assuma que $\Omega_s \subset \left[\frac{8}{9}J, \frac{9}{8}J\right], W \in \mathcal{B}_s$ e ψ é uma função positiva definida nos índices não-diagonais e satisfazendo*

$$\psi(-k, m, n) = \psi(k, n, m), \quad \forall\ (k, n, m) \text{ não-diagonal.} \tag{3.51}$$

Se

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall \omega, \omega' \in \Omega_s, \quad \omega \neq \omega', \quad \Big\|\widetilde{\partial} W_{0mm}(\omega, \omega')\Big\| \leq \frac{1}{4}, \tag{3.52}$$

e se a condição (3.50) é satisfeita, para todo $\omega \in \Omega_s$ e todos os índices não-críticos (k, n, m), então a medida de Lebesgue do conjunto

$$\Omega_s^{ruim} = \{\omega \in \Omega_s; \omega \text{ é } (W, \psi)\text{-ressonante}\} \subset \Omega_s,$$

pode ser estimada por

$$\left|\Omega_s^{ruim}\right| \leq 8 \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N} \\ \Delta_{mn} > \frac{1}{2}J}} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ \frac{\Delta_{mn}}{2J} < k < \frac{2\Delta_{mn}}{J}}} \frac{M_m M_n}{k} \psi(k, n, m). \tag{3.53}$$

Demonstração: Como $W_{0mm}(\omega) : \mathcal{H}_m \to \mathcal{H}_m$ é auto-adjunto e $M_m = \dim \mathcal{H}_m < \infty$, segue do Teorema Espectral para espaços vetoriais de dimensão finita que o espectro de $W_{0mm}(\omega)$ é formado pelos autovalores (que são reais) de $W_{0mm}(\omega)$. Sejam

$$\lambda_1^m(\omega) \leq \lambda_2^m(\omega) \leq \ldots \leq \lambda_{M_m}^m(\omega),$$

os autovalores de $W_{0mm}(\omega)$ ordenados em forma não-decrescente e repetidos de acordo com sua multiplicidade e considere os conjuntos

$$\Omega_s^{ruim}(k,n,m,i,j) := \{\omega \in \Omega_s : |\omega k - \Delta_{mn} + \lambda_i^n(\omega) - \lambda_j^m(\omega)| < \psi(k,n,m)\}.$$

Então

$$\Omega_s^{ruim} = \bigcup_{(k,n,m)} \bigcup_{\substack{i,j \\ 1 \leq i \leq M_n \\ 1 \leq j \leq M_m}} \Omega_s^{ruim}(k,n,m,i,j).$$

De fato, se $\omega \in \Omega_s^{ruim}$, então ω é (W,ψ)-ressonante; logo, existe um índice não-diagonal (k,n,m) de forma que

$$\text{dist}(\sigma(k\omega - \Delta_{mn} + W_{0nn}(\omega)), \sigma(W_{0mm}(\omega))) < \psi(k,n,m),$$

ou seja,

$$\text{dist}(\{k\omega - \Delta_{mn} + \lambda_i^n(\omega)\}_{i=1}^{M_n}, \{\lambda_j^m(\omega)\}_{j=1}^{M_m}) < \psi(k,n,m),$$

e então existe $1 \leq i \leq M_n$ e $1 \leq j \leq M_m$ tal que

$$\text{dist}(\{k\omega - \Delta_{mn} + \lambda_i^n(\omega)\}_{i=1}^{M_n}, \{\lambda_j^m(\omega)\}_{j=1}^{M_m}) = \left|k\omega - \Delta_{mn} + \lambda_i^n(\omega) - \lambda_j^m(\omega)\right|,$$

ou seja, $\omega \in \Omega_s^{ruim}(k,n,m,i,j)$, o que implica $\Omega_s^{\text{ruim}} \subset \bigcup_{(k,n,m)} \bigcup_{\substack{i,j \\ 1 \leq i \leq M_n \\ 1 \leq j \leq M_m}} \Omega_s^{ruim}(k,n,m,i,j)$. Reciprocamente, se

$$\omega \in \bigcup_{k,n,m} \bigcup_{i,j} \Omega_s^{ruim}(k,n,m,i,j),$$

então $\omega \in \Omega_s^{ruim}(k,n,m,i,j)$, para algum $(k,n,m) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$, $1 \leq i \leq M_n$ e $1 \leq j \leq M_m$; assim,

$$\left|\omega k - \Delta_{mn} + \lambda_i^n(\omega) - \lambda_j^m(\omega)\right| < \psi(k,n,m),$$

e, portanto,

$$\text{dist}(\sigma(k\omega - \Delta_{mn} + W_{0nn}(\omega)), \sigma(W_{0mm}(\omega))) < \psi(k,n,m)$$

donde ω é (W,ψ)-ressonante e $\omega \in \Omega_s^{ruim}$.

Por hipótese, se (k,n,m) é um índice não-crítico, então (3.50) vale, $\forall \omega \in \Omega_s$, ou seja,

$$\text{dist}(\sigma(k\omega - \Delta_{mn} + W_{0nn}(\omega)), \sigma(W_{0mm}(\omega))) \geq \psi(k,n,m)$$

e, portanto, $\Omega_s^{ruim}(k,n,m,i,j)=\emptyset$ (para qualquer i,j). Além disso, observe que devido a (3.51)

$$\Omega_s^{ruim}(k,n,m,i,j)=\Omega_s^{ruim}(-k,m,n,j,i).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\omega\in\Omega_s^{ruim}(k,n,m,i,j) &\Leftrightarrow \left|\omega k-\Delta_{mn}+\lambda_i^n(\omega)-\lambda_j^m(\omega)\right|<\psi(k,n,m)\\
&\Leftrightarrow \left|-(\omega(-k)-\Delta_{nm}+\lambda_j^m(\omega)-\lambda_i^n(\omega))\right|<\psi(-k,m,n)\\
&\Leftrightarrow \left|\omega(-k)-\Delta_{nm}+\lambda_j^m(\omega)-\lambda_i^n(\omega)\right|<\psi(-k,m,n)\\
&\Leftrightarrow \omega\in\Omega_s^{ruim}(-k,m,n,j,i).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Lidskii (Teorema 1.3.1) com $B=W_{0mm}(\omega)$ e $A=W_{0mm}(\omega')$, temos que

$$\lambda_j^m(\omega)-\lambda_j^m(\omega')=\sum_{n=1}^{M_n}\sigma_{jn}\gamma_n,$$

em que γ_n são os autovalores de $C=B-A$ e σ_{nj} como no Teorema de Lidskii. Consequentemente, $\forall j,\ 1\le j\le M_m,\ \forall\omega,\omega'\in\Omega_s,\ \omega\neq\omega'$,

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{\partial}\lambda_j^m(\omega,\omega')\right| &= \left|\frac{\lambda_j^m(\omega)-\lambda_j^m(\omega')}{\omega-\omega'}\right|=\frac{\left|\sum_{n=1}^{M_n}\sigma_{jn}\gamma_n\right|}{|\omega-\omega'|}\\
&\le \left\|\frac{W_{0mm}(\omega)-W_{0mm}(\omega')}{\omega-\omega'}\right\|=\left\|\widetilde{\partial}W_{omm}(\omega,\omega')\right\|\le\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Se $\omega,\omega'\in\Omega_s^{ruim}(k,n,m,i,j),\ \omega\neq\omega'$, então (k,n,m) é necessariamente um índice crítico e

$$\begin{aligned}
\frac{2\psi(k,n,m)}{|\omega-\omega'|} &= \frac{\psi(k,n,m)+\psi(k,n,m)}{|\omega-\omega'|}\\
&> \frac{\left|\omega k-\Delta_{mn}+\lambda_i^n(\omega)-\lambda_j^m(\omega)\right|+\left|\omega' k-\Delta_{mn}+\lambda_i^n(\omega')-\lambda_j^m(\omega')\right|}{|\omega-\omega'|}\\
&\ge \left|\frac{((\omega k)-\Delta_{mn}+\lambda_i^n(\omega)-\lambda_j^m(\omega))-(\omega' k-\Delta_{mn}+\lambda_i^n(\omega')-\lambda_j^m(\omega'))}{\omega-\omega'}\right|\\
&= \left|\frac{(\omega-\omega')k}{\omega-\omega'}-\Big(\frac{-\lambda_i^n(\omega)+\lambda_i^n(\omega)}{\omega-\omega'}+\frac{-\lambda_j^m(\omega')+\lambda_j^m(\omega)}{\omega-\omega'}\Big)\right|\\
&\ge |k|-\left|\frac{\lambda_i^n(\omega')-\lambda_i^n(\omega)}{\omega-\omega'}+\frac{\lambda_j^m(\omega)-\lambda_j^m(\omega')}{\omega-\omega'}\right|\\
&\ge |k|-\left(\left|\frac{\lambda_i^n(\omega')-\lambda_i^n(\omega)}{\omega-\omega'}\right|+\left|\frac{\lambda_j^m(\omega)-\lambda_j^m(\omega')}{\omega-\omega'}\right|\right)\\
&\ge |k|-\Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\Big)=|k|-\frac{1}{2}=\frac{2\,|k|-1}{2}\ge\frac{|k|}{2}.
\end{aligned}$$

Isso implica que

$$\left|\Omega_s^{ruim}(k,n,m,i,j)\right|\le\frac{4\psi(k,n,m)}{|k|}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\left|\Omega_s^{ruim}\right| &= \left|\bigcup_{(k,n,m)} \bigcup_{\substack{i,j \\ 1\le i\le M_n \\ 1\le j\le M_m}} \Omega_s^{ruim}(k,n,m,i,j)\right| \\
&\le \sum_{(k,n,m)(\text{críticos})} \sum_{\substack{i,j \\ 1\le i\le M_n \\ 1\le j\le M_m}} \left|\Omega_s^{ruim}(k,n,m,i,j)\right| \\
&\le 2 \sum_{\substack{(k,n,m) \\ k>0 \\ \frac{\Delta_{mn}}{2J}<k<\frac{2\Delta_{mn}}{J}}} \sum_{\substack{i,j \\ 1\le i\le M_n \\ 1\le j\le M_m}} \frac{4}{k}\psi(k,n,m) \\
&= 8 \sum_{\substack{(k,n,m) \\ k>0 \\ \frac{\Delta_{mn}}{2J}<k<\frac{2\Delta_{mn}}{J}}} \frac{\psi(k,n,m)}{k} \sum_{\substack{i,j \\ 1\le i\le M_n \\ 1\le j\le M_m}} 1 \\
&= 8 \sum_{\substack{(k,n,m) \\ k>0 \\ \frac{\Delta_{mn}}{2J}<k<\frac{2\Delta_{mn}}{J}}} \frac{M_m M_n}{k}\psi(k,n,m) \\
&= 8 \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N} \\ \Delta_{mn}>\frac{1}{2}J}} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ \frac{\Delta_{mn}}{2J}<k<\frac{2\Delta_{mn}}{J}}} \frac{M_m M_n}{k}\psi(k,n,m),
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do lema. ■

3.7 Construção das Sequências $\{\Omega_s\}$ e $\{A_s\}$

Para um multi-índice não diagonal (k,n,m) e $s \in \mathbb{Z}_+$ seja

$$\psi_s(k,n,m) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Delta_0, & \text{se } (k,n,m) \text{ é não-crítico e } k=0, \\ \frac{7}{18}J\Big(|k|-\frac{1}{2}\Big), & \text{se } (k,n,m) \text{ é não-crítico e } k\neq 0, \\ \frac{\pi}{2}\varphi_{s+1}|k|^{\frac{1}{2}}e^{-\rho_s|k|/2}, & \text{se } (k,n,m) \text{ é crítico,} \end{cases} \tag{3.54}$$

em que

$$\rho_s = \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E_{s+1}}.$$

Observe que ψ_s obedece a condição de simetria (3.51). A escolha de $\psi_s(k,n,m)$ para um índice não-crítico é guiada pelo seguinte lema.

Lema 3.7.1 *Se $\omega \in \Omega_s \subset \left[\frac{8}{9}J, \frac{9}{8}J\right]$, $(k,n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é um índice não-crítico e $W \in \mathcal{B}_s$ satisfaz*

$$\|W_{0mm}(\omega)\|, \|W_{0nn}(\omega)\| \le \min\left\{\frac{1}{4}\Delta_0, \frac{7}{72}J\right\}, \tag{3.55}$$

então os espectros $\sigma(k\omega - \Delta_{mn} + W_{0nn}(\omega)), \sigma(W_{0mm}(\omega))$ não são entrelaçados, e vale

$$dist(\sigma(k\omega - \Delta_{mn} + W_{0nn}(\omega)), \sigma(W_{0mm}(\omega))) \geq \psi_s(k,n,m).$$

Demonstração: Distinguimos dois casos.

1° caso: Se $k \neq 0$, então

$$|k\omega - \Delta_{mn}| = \left|k\Big(\omega - \frac{\Delta_{mn}}{k}\Big)\right| = |k|\left|\omega - \frac{\Delta_{mn}}{k}\right| \geq \frac{7}{18}J\,|k|$$

visto que, por hipótese,

$$\frac{\Delta_{mn}}{k} - \omega \in \Big]-\infty, \frac{1}{2}J - \frac{8}{9}J\Big] \cup \Big[2J - \frac{9}{8}J, +\infty\Big[.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\mathrm{dist}\Big(\sigma(k\omega - \Delta_{mn} + W_{0nn}(\omega)), \sigma(W_{0mm}(\omega))\Big) \geq \\ \geq\ & |k\omega - \Delta_{mn}| - \|W_{0mm}(\omega)\| - \|W_{0nn}(\omega)\| \\ \geq\ & \frac{7}{18}J|k| - \frac{7}{72}J - \frac{7}{72}J \\ =\ & \frac{7}{18}J\Big(|k| - \frac{1}{2}\Big) = \psi_s(k,n,m). \end{aligned}$$

2° caso: Se $k = 0$, então a distância pode ser estimada por

$$\Delta_0 - \|W_{0nn}(\omega)\| - \|W_{0mm}(\omega)\| \geq \frac{1}{2}\Delta_0.$$

Isso conclui a demonstração do lema. ■

Agora, especificaremos de que maneira é construída a sequência decrescente dos conjuntos $\{\Omega_s\}_{s=0}^{\infty}$. Sejam $\Omega_0 = \left[\frac{8}{9}J, \frac{9}{8}J\right]$. Se $W_s \in \mathcal{B}_s$ já está definido, introduzimos $\Omega_{s+1} \subset \Omega_s$ como o conjunto de todas as frequências (W_s, ψ_s)-não-ressonantes. Lembre que os espaços de Banach $\mathcal{B}_s$ são determinados pelas escolhas dos φ_s, E_s e Ω_s, como na Seção 3.4.

Como um próximo passo vamos considerar, para $s \in \mathbb{Z}_+$, $\omega \in \Omega_{s+1}$ e um índice não-diagonal (k,n,m), a seguinte equação

$$(k\omega - \Delta_{mn} + (W_s)_{0nn}(\omega))X - X(W_s)_{0mm}(\omega) = Y, \tag{3.56}$$

com incógnita $X \in B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)$ e o lado direito $Y \in B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)$. Como $\omega \in \Omega_{s+1}$, ou seja, ω é (W_s, ψ_s)-não-ressonante, temos que os espectros

$$\sigma(k\omega - \Delta_{mn} + (W_s)_{0nn}(\omega)) \text{ e } \sigma((W_s)_{0mm}(\omega))$$

não se interceptam (Definição 3.6.2). Portanto, uma solução X existe e é única pela Proposição 1.3.1. Dessa maneira, podemos introduzir a seguinte transformação linear

$$(\Gamma_s)_{knm}(\omega) : B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n) \to B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)$$

$$Y \longmapsto X = (\Gamma_s)_{knm}(\omega)Y,$$

tal que $X = (\Gamma_s)_{knm}(\omega)Y$ resolve (3.56). Além disso, de acordo com a Proposição 1.3.1, sabemos que

$$\|X\| \leq \frac{\pi}{2} \frac{\|Y\|}{\operatorname{dist}(\sigma(A), \sigma(B))},$$

sendo $A = k\omega - \Delta_{mn} + (W_s)_{0nn}(\omega)$ e $B = (W_s)_{0mm}(\omega)$, ou seja,

$$\|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)Y\| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{dist}(\sigma(A), \sigma(B))} \|Y\|, \quad \forall Y \in B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n),$$

e então

$$\|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{dist}(\sigma(A), \sigma(B))} \leq \frac{\pi}{2\psi_s(k, n, m)} \tag{3.57}$$

e, se os espectros de A e B não são entrelaçados, teremos

$$\|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\| \leq \frac{1}{\psi_s(k, n, m)}. \tag{3.58}$$

Estendemos a definição de $(\Gamma_s)_{knm}$ aos índices diagonais pondo $(\Gamma_s)_{0nn}(\omega) = 0 \in B(B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n))$. Dessa maneira, define-se uma função

$$\Gamma_s : \Omega_{s+1} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}}^{\oplus} B(B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)), \tag{3.59}$$

que naturalmente define uma aplicação linear, denotada pelo mesmo símbolo, $\Gamma_s : {}^0\mathcal{B}_s \to {}^0\mathcal{B}_{s+1}$, de acordo com a regra

$$\Gamma_s(Y)_{knm}(\omega) := (\Gamma_s)_{knm}(\omega)(Y_{knm}(\omega)).$$

Lema 3.7.2 *Assuma que para todos os índices não-diagonais* (k, n, m) *e* $\omega, \omega' \in \Omega_{s+1},\ \omega \neq \omega'$, *vale*

$$\left\| \widetilde{\partial} (\Gamma_s)^{-1}_{knm}(\omega, \omega') \right\| \leq |k| + \frac{1}{2}. \tag{3.60}$$

Assuma também que quando $\omega \in \Omega_{s+1}$ *e* (k, n, m) *é um índice não-crítico, então os espectros* $\sigma(k\omega - \Delta_{mn} - (W_s)_{0nn}(\omega))$ *e* $\sigma((W_s)_{0mm}(\omega))$ *não estão entrelaçados. Assuma finalmente que*

$$\varphi_{s+1} \leq \min\left\{ \frac{2}{3}\Delta_0, \frac{1}{6}J \right\}. \tag{3.61}$$

Então a seguinte estimativa na norma de $\Gamma_s \in B({}^0\mathcal{B}_s, {}^0\mathcal{B}_{s+1})$ *vale*

$$\|\Gamma_s\| \leq \frac{5}{2\varphi_{s+1}}.$$

Demonstração: Para estimar $\|\Gamma_s\|$ usaremos a relação (3.83) da Proposição 3.8.3. Note que

$$\left\|\widetilde{\partial}(\Gamma_s)_{knm}(\omega,\omega')\right\| = \left\|\frac{(\Gamma_s)_{knm}(\omega)-(\Gamma_s)_{knm}(\omega')}{\omega-\omega'}\right\|,$$

e como

$$\begin{aligned}
& \left\|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\widetilde{\partial}(\Gamma_s)^{-1}_{knm}(\omega,\omega')(\Gamma_s)_{knm}(\omega')\right\| = \\
= & \left\|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\frac{(\Gamma_s)_{knm}(\omega)^{-1}-(\Gamma_s)_{knm}(\omega')^{-1}}{\omega-\omega'}(\Gamma_s)_{knm}(\omega')\right\| \\
= & \left\|-\frac{(-\Gamma_s)_{knm}(\omega')+(\Gamma_s)_{knm}(\omega)}{\omega-\omega'}\right\| = \left\|(\widetilde{\partial}\Gamma_s)_{knm}(\omega,\omega')\right\|,
\end{aligned}$$

obtemos usando (3.60)

$$\begin{aligned}
\left\|(\widetilde{\partial}\Gamma_s)_{knm}(\omega,\omega')\right\| &= \left\|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\widetilde{\partial}(\Gamma_s)^{-1}_{knm}(\omega,\omega')(\Gamma_s)_{knm}(\omega')\right\| \\
&\leq \|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\| \left\|\widetilde{\partial}(\Gamma_s)^{-1}_{knm}(\omega,\omega')\right\| \|(\Gamma_s)_{knm}(\omega')\| \qquad (3.62) \\
&\leq \|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\| \, \|(\Gamma_s)_{knm}(\omega')\| \Big(|k|+\frac{1}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Se (k,n,m) é crítico, então temos, de acordo com (3.57) e (3.54),

$$\|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\| \leq \frac{\pi}{2\varphi_s(k,n,m)} = \frac{\pi}{2\frac{\pi}{2}\varphi_{s+1}\,|k|^{\frac{1}{2}}\,e^{-\rho_s\frac{|k|}{2}}} = \frac{1}{\varphi_{s+1}\,|k|^{\frac{1}{2}}}e^{\rho_s\frac{|k|}{2}},$$

e, consequentemente, utilizando (3.62)

$$\begin{aligned}
& e^{-\rho_s|k|}\Big(\,\|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\| + \varphi_{s+1}\left\|\widetilde{\partial}(\Gamma_s)_{knm}(\omega,\omega')\right\|\Big) \leq \\
\leq\; & e^{-\rho_s|k|}\Big(\frac{1}{\varphi_{s+1}\,|k|^{\frac{1}{2}}}e^{\rho_s}\frac{|k|}{2} + \varphi_{s+1}\|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\| \times \|(\Gamma_s)_{knm}(\omega')\|\,(k+\frac{1}{2})\Big) \\
\leq\; & e^{-\rho_s|k|}\Big(\frac{1}{\varphi_{s+1}\,|k|^{\frac{1}{2}}}e^{\rho_s}\frac{|k|}{2} + \varphi_{s+1}\frac{1}{\varphi_{s+1}\,|k|^{\frac{1}{2}}}e^{\rho_s}\frac{|k|}{2}\frac{1}{\varphi_{s+1}|k|^{\frac{1}{2}}}e^{\rho_s}\frac{|k|}{2}e^{\rho_s}\frac{|k|}{2}(|k|+\frac{1}{2})\Big) \\
=\; & e^{-\rho_s|k|}\Big(\frac{1}{\varphi_{s+1}\,|k|^{\frac{1}{2}}}e^{\rho_s}\frac{|k|}{2} + \frac{(|k|+\frac{1}{2})}{\varphi_{s+1}\,|k|}e^{\rho_s}\,|k|\Big) \\
=\; & \frac{1}{\varphi_{s+1}}\Big(\frac{1}{|k|^{\frac{1}{2}}}e^{-\rho_s}\frac{|k|}{2} + \frac{|k|}{|k|} + \frac{1}{2\,|k|}\Big) \\
\leq\; & \frac{1}{\varphi_{s+1}}\Big(1+\frac{1}{2\,|k|}+1\Big) \leq \frac{1}{\varphi_{s+1}}\Big(1+\frac{1}{2}+1\Big) = \frac{5}{2\varphi_{s+1}}.
\end{aligned}$$

Se (k,n,m) é não-crítico e $k\neq 0$, então temos, de acordo com (3.58) e (3.54),

$$\|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\| \leq \frac{1}{\psi_s(k,n,m)} = \frac{1}{\frac{7}{18}J(|k|-\frac{1}{2})} = \frac{18}{7J(|k|-\frac{1}{2})},$$

e, consequentemente,

$$
\begin{aligned}
& e^{-\rho_s|k|}\Big(\|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\| + \varphi_{s+1} \Big\|\widetilde{\partial}(\Gamma_s)_{knm}(\omega,\omega')\Big\| \Big) \leq \\
\leq \;& e^{-\rho_s|k|}\left(\frac{18}{7J(|k|-\frac{1}{2})} + \varphi_{s+1} \|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\| \, \|(\Gamma_s)_{knm}(\omega')\| \Big(|k| + \frac{1}{2}\Big)\right) \\
\leq \;& e^{-\rho_s|k|}\left(\frac{18}{7J(|k|-\frac{1}{2})} + \varphi_{s+1} \frac{18}{7J(|k|-\frac{1}{2})}\frac{18}{7J(|k|-\frac{1}{2})} \Big(|k| + \frac{1}{2}\Big)\right) \\
= \;& e^{-\rho_s|k|}\frac{18}{7J(|k|-\frac{1}{2})}\left(1 + \varphi_{s+1} \frac{18}{7J(|k|-\frac{1}{2})} \Big(|k| + \frac{1}{2}\Big)\right) \\
\leq \;& \frac{18}{7J(|k|-\frac{1}{2})}\left(1 + \varphi_{s+1} \frac{18\Big(|k| + \frac{1}{2}\Big)}{7J\Big(|k|-\frac{1}{2}\Big)}\right) \\
= \;& \frac{1}{\varphi_{s+1}}\frac{18}{7J(|k|-\frac{1}{2})}\varphi_{s+1}\left(1 + \varphi_{s+1} \frac{18\Big(|k| - \frac{1}{2} + 1\Big)}{7J\Big(|k|-\frac{1}{2}\Big)}\right) \\
\leq \;& \frac{1}{\varphi_{s+1}}\frac{18}{7J(\frac{1}{2})}\frac{J}{6}\left(1 + \frac{J}{6} \Big(\frac{18(|k|-\frac{1}{2})}{7J(|k|-\frac{1}{2})} + \frac{18}{7J(|k|-\frac{1}{2})}\Big)\right) \\
\leq \;& \frac{1}{\varphi_{s+1}}\frac{36}{7}\frac{1}{6}\Big(1 + \frac{1}{6}\frac{18}{7}(1+2)\Big) = \frac{1}{\varphi_{s+1}}\frac{1}{6}\frac{36}{7}\Big(1 + \frac{1}{6}\frac{54}{7}\Big) < \frac{2}{\varphi_{s+1}}.
\end{aligned}
$$

No caso em que (k, n, m) é não-crítico e $k = 0$

$$
\|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\| \leq \frac{1}{\psi(k,n,m)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\Delta_0} = \frac{2}{\Delta_0},
$$

e, consequentemente,

$$
\begin{aligned}
& e^{-\rho_s|k|}\Big(\|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\| + \varphi_{s+1} \Big\|\widetilde{\partial}(\Gamma_s)_{knm}(\omega,\omega')\Big\| \Big) \leq \\
\leq \;& e^{-\rho_s|k|}\Big(\frac{2}{\Delta_0} + \varphi_{s+1} \|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\| \, \|(\Gamma_s)_{knm}(\omega')\| \Big(|k| + \frac{1}{2}\Big)\Big) \\
\leq \;& e^{-\rho_s|k|}\Big(\frac{2}{\Delta_0} + \varphi_{s+1} \frac{2}{\Delta_0}\frac{2}{\Delta_0} \Big(|k| + \frac{1}{2}\Big)\Big) = e^{-\rho_s|k|}\frac{2}{\Delta_0}\Big(1 + \varphi_{s+1} \frac{2}{\Delta_0} \Big(|k| + \frac{1}{2}\Big)\Big) \\
\leq \;& \frac{2}{\Delta_0}\Big(1 + \varphi_{s+1} \frac{2}{\Delta_0} \Big(|k| + \frac{1}{2}\Big)\Big) = \frac{2}{\Delta_0}\Big(1 + \varphi_{s+1}\frac{1}{\Delta_0}\Big) \\
= \;& \frac{1}{\varphi_{s+1}}\frac{2}{\Delta_0}\varphi_{s+1}\Big(1 + \varphi_{s+1}\frac{1}{\Delta_0}\Big) \leq \frac{1}{\varphi_{s+1}}\frac{2}{\Delta_0}\frac{2}{3}\Delta_0\Big(1 + \frac{2}{3}\Delta_0\frac{1}{\Delta_0}\Big) \\
= \;& \frac{1}{\varphi_{s+1}}\frac{4}{3}\Big(1 + \frac{2}{3}\Big) < \frac{5}{2\varphi_{s+1}}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\forall (k, n, m)$ e ω, ω', temos

$$
e^{-\rho_s|k|}\Big(\|(\Gamma_s)_{knm}(\omega)\| + \varphi_{s+1} \Big\|\widetilde{\partial}(\Gamma_s)_{knm}(\omega,\omega')\Big\| \Big) \leq \frac{5}{2\varphi_{s+1}},
$$

e o resultado segue. ∎

Seja $A_s \in {}^0\mathcal{B}_{s+1}$ dado por

$$A_s = \Gamma_s((1 - D_s)(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1}))), \tag{3.63}$$

e $W_s \in \mathcal{B}_s$ satisfazendo (3.32). Aplicando o adjunto em (3.56) e a definição de Γ_s estendida a ${}^0\mathcal{B}_s$, obtemos

$$((\Gamma_s)_{knm}(\omega)Y)^* = -(\Gamma_s)_{-k,m,n}(\omega)(Y^*).$$

Isso implica que A_s obedece a condição (3.44),

$$\begin{aligned}(A_s)_{knm}(\omega)^* &= ((\Gamma_s)_{knm}(\omega)((1 - D_s)(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1}))))^* \\ &= -(\Gamma_s)_{-k,m,n}(\omega)((1 - D_s)(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1}))) = -(A_s)_{-k,m,n}(\omega).\end{aligned}$$

As aplicações θ^s_u, $s < u$, são definidas por (3.45) envolvendo os elementos A_s.

3.8 Demonstração do Teorema Principal

Nesta seção demonstraremos o Teorema 3.1.1. Começamos com a especificação das sequências $\{\varphi_s\}$ e $\{E_s\}$,

$$\varphi_s = as^\alpha q^{-rs}, \quad \text{para} \quad s \geq 1, \quad E_s = q^{s+1}, \quad \text{para} \quad s \geq 0, \tag{3.64}$$

em que $\alpha > 1$ e $q > 1$ são constantes satisfazendo

$$q^r \geq e^\alpha \quad \text{e} \quad q^{-r}\zeta(\alpha) \leq 3\ln 2, \tag{3.65}$$

em que ζ é a função zeta de Riemann ($\zeta(p) = \sum_{k=1}^\infty k^{-p}$, para $p \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}(p) > 1$) e

$$a = 45eq^{2r}\epsilon_V. \tag{3.66}$$

Observe que, $\alpha = 2$ e $q^r = e^2$ satisfazem a condição (3.65). O valor de $\varphi_0 \geq \varphi_1 = aq^{-r}$ pode ser qualquer e convencionamos $E_{-1} = 1$. A condição $r\ln(q) \geq \alpha$ garante que a sequência $\{\varphi_s\}$ é decrescente. De fato, como

$$1 + \frac{1}{s} \leq e, \quad \forall s \geq 1,$$

segue que

$$\Big(1 + \frac{1}{s}\Big)^\alpha \leq e^\alpha \leq q^r,$$

ou seja,

$$\left(\frac{s+1}{s}\right)^{\alpha} \leq q^r$$

donde

$$(s+1)^{\alpha} q^{-r} \leq s^{\alpha}.$$

Logo,

$$a(s+1)^{\alpha} q^{-r} q^{-rs} \leq a s^{\alpha} q^{-rs},$$

ou seja,

$$a(s+1)^{\alpha} q^{-r(s+1)} \leq a s^{\alpha} q^{-rs}$$

e, assim,

$$\varphi_{s+1} \leq \varphi_s.$$

Note também que

$$\zeta_s = \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E_{s+1}} = \frac{1}{q^{s+1}} - \frac{1}{q^{s+2}} = \frac{1}{q^{s+1}}\Big(1 - \frac{1}{q}\Big) = \Big(1 - \frac{1}{q}\Big) q^{-s-1}.$$

Outra razão para a escolha de (3.64) e (3.66) é que as constantes A_*, B_* e C_*, como definidas em (3.38), satisfazem a condição (3.39) da Proposição 3.4.1. De fato, primeiramente, observe que

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi_{s+1}(E_{s-1})^r} < \infty,$$

pois

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{a(s+1)^{\alpha} q^{-r(s+1)} q^{sr}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{a(s+1)^{\alpha} q^{-r}} = \frac{1}{aq^{-r}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s+1)^{\alpha}} = \frac{1}{aq^{-r}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty.$$

Agora, temos

$$\begin{aligned} A_* &= 5e \sup_{s \geq 0} \left\{ \frac{q^r}{aq^{-r}}, \frac{q^{(s+1)r}}{a(s+1)^{\alpha} q^{-r(s+1)} q^{2sr}} \right\} \\ &= 5e \sup_{s \geq 0} \left\{ \frac{q^{2r}}{a}, \frac{q^{2rs+2r}}{a(s+1)^{\alpha} q^{2rs}} \right\} = 5e \sup_{s \geq 0} \left\{ \frac{q^{2r}}{a}, \frac{q^{2r}}{a} \frac{1}{(s+1)^{\alpha}} \right\} = 5e \frac{q^{2r}}{a}, \end{aligned}$$

$$B_* = 5e \frac{1}{aq^{-r}} \zeta(\alpha) = \frac{5eq^r}{a} \zeta(\alpha)$$

e

$$\begin{aligned} C_* &= 5e \sup_{s \geq 0} \left\{ \frac{1}{aq^{-r}}, \frac{1}{a(s+1)^{\alpha} q^{-r}(s+1) q^{sr}} \right\} \\ &= 5e \sup_{s \geq 0} \left\{ \frac{q^r}{a}, \frac{q^r}{a} \frac{1}{(s+1)^{\alpha}} \right\} = 5e \frac{q^r}{a}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\epsilon_V B_* \;=\; \epsilon_V 5e\frac{q^r}{a}\zeta(\alpha) = \epsilon_V 5e\frac{q^r}{45eq^{2r}\epsilon_V}\zeta(\alpha) = \frac{1}{9}q^{-r}\zeta(\alpha) \leq \frac{1}{9}3\ln 2 = \frac{1}{3}\ln 2,$$

e, além disso,

$$\begin{aligned}
\epsilon_V A_*\phi(3\epsilon_V C_*) &= \epsilon_V 5e\frac{q^{2r}}{a}\phi\Big(3\epsilon_V 5e\frac{q^r}{a}\Big)\\
&= \epsilon_V 5e\frac{q^{2r}}{45eq^{2r}\epsilon_V}\phi\Big(3\epsilon_V 5e\frac{q^r}{45eq^{2r}\epsilon_V}\Big) = \frac{1}{9}\phi\Big(\frac{1}{3}q^{-r}\Big)\\
&\leq \frac{1}{9}\phi\Big(\frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{9}3(e^{\frac{1}{3}} - 3(e^{\frac{1}{3}} - 1))\\
&= \frac{1}{3}(3 - 2e^{\frac{1}{3}}) = 1 - \frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Vamos agora resumir a construção das sequências $\{\mathcal{B}_s\}$, $\{W_s\}$ e $\{\theta_u^s\}_{u>s}$ que levam a demonstração do Teorema 3.1.1. Alguns detalhes adicionais podem ser vistos nas seções anteriores. Sejam $\Omega_0 = \left[\frac{8}{9}J, \frac{9}{8}J\right]$ e $W_0 = V_0$. Lembre que os V_s são definidos a partir de V por (3.35). Defina $\Omega_1 \subset \Omega_0$ como o conjunto das frequências (W_0, ψ_0)-não-ressonantes, sendo ψ_0 como introduzido em (3.54). Consequentemente, o espaço de Banach $\mathcal{B}_1$ está definido, visto que sua definição depende de Ω_1, φ_1 e E_1. Então podemos introduzir o elemento Γ_0 (no sentido de (3.59)) cuja definição é baseada na equação (3.56), a qual determina um operador limitado $\Gamma_0 \in B({}^0\mathcal{B}_0, {}^0\mathcal{B}_1)$. O elemento $A_0 \in {}^0\mathcal{B}_1$ é dado pela igualdade (3.63) e que satisfaz a condição (3.44).

Logo, θ_1^0 está definido a partir de A_0 visto anteriormente. Usando (3.8) podemos então definir

$$W_1 = \tau_0(W_0) + \tau_1(V_1 - \tau_0(V_0)) + \theta_1^0\phi(\theta_1^0)\tau_0(1 - D_0)(W_0 - \tau_{-1}(W_{-1})).$$

Em geral, em cada passo numerado por $s \in \mathbb{Z}_+$, assuma que Ω_t e W_t, $0 \leq t \leq s$, e A_t com $0 \leq t \leq s-1$, já estão definidos. As aplicações θ_u^t, com $u > t$, são dadas por $\theta_u^t(X) = [\tau_{u,t+1}(A_t), X]$, desde que $A_t \in {}^0\mathcal{B}_{t+1}$ satisfaça a condição (3.44). Define-se $\Omega_{s+1} \subset \Omega_s$ como o conjunto das frequências (W_s, ψ_s)-não-ressonantes, sendo ψ_s como introduzido em (3.54). Consequentemente, o espaço de Banach $\mathcal{B}_{s+1}$ está definido, visto que sua definição depende de Ω_{s+1}, φ_{s+1} e E_{s+1}. Então podemos introduzir o elemento Γ_s (no sentido de (3.59)) cuja definição é baseada na equação (3.56), a qual determina um operador limitado $\Gamma_s \in B({}^0\mathcal{B}_s, {}^0\mathcal{B}_{s+1})$. O elemento $A_s \in {}^0\mathcal{B}_{s+1}$ é dado pela igualdade (3.63) e que satisfaz a condição (3.44). Conhecendo W_t, $t \leq s$, e θ_{s+1}^t, $t \leq s$, (o que é equivalente a conhecer A_t, $t \leq s$) a partir de (3.8) podemos definir W_{s+1}.

Tomemos $\epsilon_*(r,\Delta_0,J)$ de forma que

$$\frac{3e}{1-q^{-r}}\epsilon_*(r,\Delta_0,J)\leq \min\left\{\frac{1}{4}\Delta_0,\frac{7}{72}J\right\} \tag{3.67}$$

e

$$45eq^r\epsilon_*(r,\Delta_0,J)\leq \min\left\{\frac{2}{3}\Delta_0,\frac{1}{6}J\right\}. \tag{3.68}$$

Mostraremos que se $\epsilon_V<\epsilon_*(r,\Delta_0,J)$ as hipóteses dos resultados auxiliares anteriores serão satisfeitas em cada passo, com $s\in\mathbb{Z}_+$. Isso diz respeito a hipótese (3.55) do Lema 3.7.1

$$\|(W_s)_{0mm}(\omega)\|\leq \min\left\{\frac{1}{4}\Delta_0,\frac{7}{72}J\right\},\ \forall\omega\in\Omega_s,\ \forall m\in\mathbb{N}, \tag{3.69}$$

a hipótese (3.52) do Lema 3.6.1.

$$\left\|\widetilde{\partial}(W_s)_{0mm}(\omega,\omega')\right\|\leq\frac{1}{4},\ \forall\omega,\omega'\in\Omega_s,\ \omega\neq\omega',\ \forall m\in\mathbb{N}, \tag{3.70}$$

as hipóteses (3.60) e (3.61) do Lema 3.7.2

$$\left\|\widetilde{\partial}(\Gamma_s)^{-1}_{knm}(\omega,\omega')\right\|\leq|k|+\frac{1}{2},\ \forall(k,n,m),\ \forall\omega,\omega'\in\Omega_s,\ \omega\neq\omega', \tag{3.71}$$

e

$$\varphi_{s+1}\leq\min\left\{\frac{2}{3}\Delta_0,\frac{1}{6}J\right\} \tag{3.72}$$

e a hipótese (3.48) da Proposição 3.5.1

$$\|A_{s-1}\|\leq\frac{5}{2\varphi_s}\left\|W_{s-1}-\tau_{s-2}(W_{s-2})\right\|. \tag{3.73}$$

Como a sequência $\{\varphi_s\}$ é decrescente, a condição (3.72) reduz-se a mostrar o caso $s=0$. Sendo $\varphi_1=aq^{-r}=45eq^{2r}\epsilon_Vq^{-r}=45eq^r\epsilon_V$, obtemos de (3.68) que

$$\varphi_1 \;=\; 45eq^r\epsilon_V<45eq^r\epsilon_*(r,\Delta_0,J)\leq\min\left\{\frac{2}{3}\Delta_0,\frac{1}{6}J\right\},$$

e (3.72) está demonstrado.

Note também que (3.71) é um consequência de (3.70). De fato, da definição de $(\Gamma_s)_{knm}(\omega)$, baseada na equação (3.56) temos que, para todo $Y\in B(\mathcal{H}_m,\mathcal{H}_n)$,

$$(\Gamma_s)^{-1}_{knm}(\omega)Y=(k\omega-\Delta_{mn}+(W_s)_{0nn}(\omega))Y-Y(W_s)_{0mm}(\omega).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\widetilde{\partial}(\Gamma_s)^{-1}_{knm}(\omega,\omega')Y &= \frac{(\Gamma_s)^{-1}_{knm}(\omega)Y-(\Gamma_s)^{-1}_{knm}(\omega')Y}{\omega-\omega'}\\ &= \frac{1}{\omega-\omega'}\Big[(k\omega-\Delta_{mn}+(W_s)_{0nn}(\omega))Y-Y(W_s)_{0mm}(\omega)\\ &\quad -(k\omega'-\Delta_{mn}+(W_s)_{0nn}(\omega'))Y-Y(W_s)_{0mm}(\omega')\Big]\\ &= kY+\widetilde{\partial}(W_s)_{0nn}(\omega,\omega')Y-Y\widetilde{\partial}(W_s)_{0mm}(\omega,\omega')\\ &= (k+\widetilde{\partial}(W_s)_{0nn}(\omega,\omega'))Y-Y\widetilde{\partial}(W_s)_{0mm}(\omega,\omega'),\end{aligned}$$

e assumindo (3.70), obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{\partial}(\Gamma_s)^{-1}_{knm}(\omega,\omega')Y\right\| &= \left\|(k+\widetilde{\partial}(W_s)_{0nn}(\omega,\omega'))Y - Y\widetilde{\partial}(W_s)_{0mm}(\omega,\omega')\right\| \\
&\le \left\|(k+\widetilde{\partial}(W_s)_{0nn}(\omega,\omega'))Y\right\| + \left\|Y\widetilde{\partial}(W_s)_{0mm}(\omega,\omega')\right\| \\
&\le |k|\,\|Y\| + \frac{1}{4}\|Y\| + \|Y\|\frac{1}{4} = \Big(|k| + \frac{1}{2}\Big)\|Y\|,
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\left\|\widetilde{\partial}(\Gamma_s)^{-1}_{knm}(\omega,\omega')\right\| \le |k| + \frac{1}{2}, \quad \forall (k,n,m)\ \forall \omega,\omega' \in \Omega_s \text{ e } \omega \neq \omega',$$

e (3.71) está demonstrada.

Agora demonstraremos que em cada passo, com $s \in \mathbb{Z}_+$, que as condições (3.69), (3.70) e (3.73) são satisfeitas. Para $s = 0$, a condição (3.73) é vazia e a condição (3.70) é óbvia, pois $\forall \omega, \omega' \in \Omega_0,\ \omega \neq \omega'$ e $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{\partial}(W_0)_{0mm}(\omega,\omega')\right\| &= \left\|\frac{(W_0)_{0mm}(\omega) - (W_0)_{0mm}(\omega')}{\omega - \omega'}\right\| \\
&= \left\|\frac{(V_0)_{0mm} - (V_0)_{0mm}}{\omega - \omega'}\right\| = 0 \le \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

A condição (3.67) também segue, visto que $\forall \omega \in \Omega_0$ e $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|(W_0)_{0mm}(\omega)\| &= \|(V_0)_{0mm}\| \le \epsilon_V < \epsilon_*(r,\Delta_0,J) \\
&\le \frac{1-q^{-r}}{3e}\min\{\frac{1}{4}\Delta_0, \frac{7}{72}J\} < \min\{\frac{1}{4}\Delta_0, \frac{7}{72}J\}.
\end{aligned}$$

Assuma agora que, para cada $t \in \mathbb{Z}_+$, as condições (3.69), (3.70)e (3.73) são satisfeitas, para cada $s \le t$. Mostremos que (3.69), (3.70) e (3.73) valem, para $s = t+1$. Lembre que em (3.40), temos

$$F_s = \frac{5}{\varphi_{s+1}} \quad \text{e} \quad v_s = \frac{e\epsilon_V}{(E_{s-1})^r},$$

e usamos a notação

$$w_s = \|W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1})\|_s,$$

com a convenção $W_{-1} = 0$.

Usando as hipóteses de indução, o Lema 3.7.1 e o Lema 3.7.2, obtemos que

$$\|\Gamma_t\| \le \frac{F_t}{2},$$

e, portanto, de (3.63) e (3.4)

$$\|A_t\| \le \|\Gamma_t\|\,\|W_t - \tau_{t-1}(W_{t-1})\| \le \frac{F_t}{2}\omega_t,$$

e a condição (3.73) está satisfeita para $s = t + 1$.

Pelas hipóteses de indução e o passo acima, segue que $\|A_s\| \leq F_s \omega_s,\ \forall s \leq t$. Como já sabemos as constantes $A_*,\ B_*$ e C_* satisfazem (3.39) e, portanto, as quantidades $A,\ B$ e C, dadas por $A = \epsilon_V A_*,\ \ B = \epsilon_V B_*$ e $C = \epsilon_V C_*$, obedecem $B \leq \frac{1}{3}\ln 2$ e $A\phi(3C) \leq \frac{1}{9}$ (veja a demonstração da Proposição 3.4.1 e a Observação 3.2.2)e, consequentemente, a desigualdade (3.15), com $d = 3$. Pelas escolhas de $A,\ B$ e C, conforme (3.38) e (3.40), as quantidades também obedecem (3.12), (3.13) e (3.14). Isso significa que todas as hipóteses da Proposição 3.2.2 são satisfeitas, para $s \leq t$ (lembre que $\|\theta_u^s\| \leq 2\,\|A_s\|$). Portanto, temos que a conclusão da Proposição 3.2.2, a saber, $\omega_s \leq d v_s$ vale, para todo $s,\ s \leq t+1$. Agora,

$$\|(W_s)_{0mm}(\omega)\| \leq \|W_s\|_s\,,\ \forall s,$$

e por (3.67)

$$\begin{aligned}\|W_{t+1}\|_{t+1} &\leq \sum_{s=0}^{t+1}\omega_s \leq 3\sum_{s=0}^{\infty} v_s \\ &= 3\sum_{s=0}^{\infty} e\epsilon_V q^{-rs} = \frac{3e}{1-q^{-r}}\epsilon_V \leq \frac{3e}{1-q^{-r}}\epsilon_*(r,\Delta_0,J) \\ &\leq \frac{3e}{1-q^{-r}}\frac{(1-q^{-r})}{3e}\min\left\{\frac{1}{4}\Delta_0, \frac{7}{72}J\right\} = \min\left\{\frac{1}{4}\Delta_0, \frac{7}{72}J\right\}.\end{aligned}$$

Logo, (3.69) vale com $s = t + 1$.

Finalmente,

$$\left\|\widetilde{\partial}(W_{t+1})_{0mm}(\omega,\omega')\right\| \leq \sum_{s=0}^{t+1}\left\|\widetilde{\partial}(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1}))_{0mm}(\omega,\omega')\right\|.$$

Pela definição (3.31)

$$\left\|\widetilde{\partial}(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1}))_{0mm}(\omega,\omega')\right\| \leq \frac{1}{\varphi_s}\left\|(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1}))\right\|_s.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{\partial}(W_{t+1})_{0mm}(\omega,\omega')\right\| &\leq \sum_{s=0}^{t+1}\frac{1}{\varphi_s}\left\|(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1}))\right\| \\ &= \sum_{s=0}^{t+1}\frac{1}{\varphi_s}\omega_s \leq \sum_{s=0}^{\infty}\frac{3v_s}{\varphi_{s+1}} = \frac{3}{5}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{5v_s}{\varphi_{s+1}} \\ &= \frac{3}{5}\sum_{s=0}^{\infty}F_s v_s = \frac{3}{5}B \leq \frac{1}{5}\ln 2 < \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Isso verifica (3.70) para $s = t + 1$ e, portanto, verificamos que as condições (3.69), (3.70) e (3.73) valem para $s = t + 1$.

Seja, como anteriormente, $\Omega_\infty = \cap_{s=0}^{\infty}\Omega_s \subset \Omega_0$. Vamos estimar a medida de Lebesgue de Ω_∞.

$$\begin{aligned}
|\Omega_\infty| &= |\Omega_0| - |\Omega_0 - \Omega_\infty| = \Big(\frac{9}{8}J - \frac{8}{9}J\Big) - \sum_{s=0}^{\infty}|\Omega_s - \Omega_{s+1}| \\
&= \Big(\frac{81J - 64J}{72}\Big) - \sum_{s=0}^{\infty}\left|\Omega_s^{\text{ruim}}\right| = \frac{17}{72}J - \sum_{s=0}^{\infty}\left|\Omega_s^{\text{ruim}}\right|.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.6.1 e Lema 3.7.1, lembrando que as hipóteses estão satisfeitas, e usando a expressão de ψ_s dada em (3.54), obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\Omega_s^{\text{ruim}}\right| &\leq 8 \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N} \\ \Delta_{mn} > \frac{1}{2}J}} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ \frac{\Delta_{mn}}{2J} < k < \frac{2\Delta_{mn}}{J}}} \frac{M_m M_n}{k}\psi_s(k,n,m) \\
&= 8 \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N} \\ \Delta_{mn} > \frac{1}{2}J}} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ \frac{\Delta_{mn}}{2J} < k < \frac{2\Delta_{mn}}{J}}} \frac{M_m M_n}{k}\frac{\pi}{2}\varphi_{s+1}\,|k|^{\frac{1}{2}}\, e^{-\rho s\frac{|k|}{2}} \\
&= 4\pi\varphi_{s+1} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N} \\ \Delta_{mn} > \frac{1}{2}J}} M_m M_n \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ \frac{\Delta_{mn}}{2J} < k < \frac{2\Delta_{mn}}{J}}} \frac{|k|^{\frac{1}{2}}}{k} e^{-\rho s\frac{|k|}{2}} \\
&\leq 4\pi\varphi_{s+1} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N} \\ \Delta_{mn} > \frac{1}{2}J}} M_m M_n \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ \max\{1,\frac{\Delta_{mn}}{2J}\} < k < \frac{2\Delta_{mn}}{J}}} k^{-\frac{1}{2}} e^{-\rho s\frac{|k|}{2}} \\
&\leq 4\pi\varphi_{s+1} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N} \\ \Delta_{mn} > \frac{1}{2}J}} M_m M_n 2\frac{\Delta_{mn}}{J}\Big(\frac{\Delta_{mn}}{2J}\Big)^{-\frac{1}{2}} e^{-\rho_s\frac{\Delta_{mn}}{4J}} \\
&= 8\pi\varphi_{s+1}\frac{(2J)^\sigma}{(2J)^\sigma} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N} \\ \Delta_{mn} > \frac{1}{2}J}} \frac{M_m M_n}{(\Delta_{mn})^\sigma}(\Delta_{mn})^\sigma 2\frac{\Delta_{mn}}{2J}\Big(\frac{\Delta_{mn}}{2J}\Big)^{-\frac{1}{2}} e^{-\rho_s\frac{\Delta_{mn}}{4J}} \\
&= 2\times 8\pi\varphi_{s+1}(2J)^\sigma \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N} \\ \Delta_{mn} > \frac{1}{2}J}} \frac{M_m M_n}{(\Delta_{mn})^\sigma}\Big(\frac{\Delta_{mn}}{2J}\Big)^{\sigma}\Big(\frac{\Delta_{mn}}{2J}\Big)\Big(\frac{\Delta_{mn}}{2J}\Big)^{-\frac{1}{2}} e^{-\rho_s\frac{\Delta_{mn}}{4J}} \\
&= 16\pi(2J)^\sigma\varphi_{s+1} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N} \\ \Delta_{mn} > \frac{1}{2}J}} \frac{M_m M_n}{(\Delta_{mn})^\sigma}\Big(\frac{\Delta_{mn}}{2J}\Big)^{\sigma+\frac{1}{2}} e^{-\rho_s\frac{\Delta_{mn}}{4J}} \\
&= 16\pi 2^\sigma\varphi_{s+1}J^\sigma \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N} \\ \Delta_{mn} > \frac{1}{2}J}} \frac{M_m M_n}{(\Delta_{mn})^\sigma}\Big(\frac{\Delta_{mn}}{2J}\Big)^{\sigma+\frac{1}{2}} e^{-\rho_s\frac{\Delta_{mn}}{4J}}.
\end{aligned}$$

Agora, se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, então $\sup_{x>0} x^\alpha e^{-\beta x} = \Big(\frac{\alpha}{e\beta}\Big)^\alpha$. Aplicando este resultado com $\alpha = \sigma + \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{\rho_s}{2}$, obtemos que para $\Delta_{mn} > \frac{1}{2}J,\ m,n \in \mathbb{N}$

$$\Big(\frac{\Delta_{mn}}{2J}\Big)^{\sigma+\frac{1}{2}} e^{-\rho s\frac{\Delta_{mn}}{4J}} \leq \Big(\frac{\sigma+\frac{1}{2}}{e\frac{\rho_s}{2}}\Big)^{\sigma+\frac{1}{2}} = \Big(\frac{2\sigma+1}{e\rho_s}\Big)^{\sigma+\frac{1}{2}}.$$

Portanto,

$$\left|\Omega_s^{\text{ruim}}\right| \leq 16\pi 2^\sigma\varphi_{s+1}\Big(\frac{2\sigma+1}{e\rho_s}\Big)^{\sigma+\frac{1}{2}}\Delta_\sigma(J).$$

Para completar a estimativa precisamos mostrar que a soma $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varphi_{s+1}}{(\rho_s)^{\sigma+\frac{1}{2}}}$ é finita, o que impõe restrições na escolha de $\{\varphi_s\}$ e $\{E_s\}$. Com nossa escolha (3.64) isso é garantido pela condição $r > \sigma + \frac{1}{2}$, pois

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varphi_{s+1}}{(\rho_s)^{\sigma+\frac{1}{2}}} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a(s+1)^{\alpha} q^{-r(s+1)}}{\left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E_{s+1}}\right)^{\sigma+\frac{1}{2}}} \\
&= a \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+1)^{\alpha} q^{-r(s+1)}}{\left[\left(1-\frac{1}{q}\right) q^{-s-1}\right]^{\sigma+\frac{1}{2}}} = \frac{a}{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{\sigma+\frac{1}{2}}} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^{\alpha} q^{-r(s+1)} q^{(\sigma+\frac{1}{2})(s+1)} \\
&= \frac{a}{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{\sigma+\frac{1}{2}}} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^{\alpha} q^{-(r-\sigma-\frac{1}{2})(s+1)} < \infty.
\end{aligned}$$

Usando a notação $\mathrm{Lin}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} (|z| < 1)$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_{-\alpha}(q^{-r+\sigma+\frac{1}{2}}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{(-r+\sigma+\frac{1}{2})k}}{k^{-\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} q^{(-r+\sigma+\frac{1}{2})k} \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^{\alpha} q^{-(r-\sigma-\frac{1}{2})(s+1)}
\end{aligned}$$

e considerando $\delta_1(\sigma, r) = 720\pi e e^{\sigma+\frac{1}{2}} q^{2r} 2^{\sigma} \left(\frac{2\sigma+1}{\left(1-\frac{1}{q}\right)e}\right)^{\sigma+\frac{1}{2}} \mathrm{Li}_{-\alpha}(q^{-r} + \sigma + \frac{1}{2})$, obtemos

$$\begin{aligned}
|\Omega_{\infty}| &= \frac{17}{72} J - \sum_{s=0}^{\infty} \left|\Omega_s^{\text{ruim}}\right| \\
&\geq \frac{17}{72} J - 16\pi 2^{\sigma} (2\sigma+1)^{\sigma+\frac{1}{2}} \Delta_{\sigma}(J) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varphi_{s+1}}{\rho_s^{\sigma+\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{17}{72} J - 16\pi 2^{\sigma} (2\sigma+1)^{\sigma+\frac{1}{2}} \Delta_{\sigma}(J) \frac{a}{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{\sigma+\frac{1}{2}}} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^{\alpha} q^{-(r-\sigma-\frac{1}{2})(s+1)} \\
&= \frac{17}{72} J - \Delta_{\sigma}(J) e^{\sigma+\frac{1}{2}} 16\pi 2^{\sigma} \left(\frac{2\sigma+1}{\left(1-\frac{1}{q}\right)e}\right)^{\sigma+\frac{1}{2}} \mathrm{Li}_{-\alpha}(q^{-r} + \sigma + \frac{1}{2}) a \\
&= \frac{17}{72} J - \Delta_{\sigma}(J) \epsilon_V 16\pi 2^{\sigma} e^{\sigma+\frac{1}{2}} \left(\frac{2\sigma+1}{\left(1-\frac{1}{q}\right)e}\right)^{\sigma+\frac{1}{2}} \mathrm{Li}_{-\alpha}(q^{-r} + \sigma + \frac{1}{2}) 45 e q^{2r} \\
&= \frac{17}{72} J - 720\pi e e^{\sigma+\frac{1}{2}} q^{2r} 2^{\sigma} \left(\frac{2\sigma+1}{\left(1-\frac{1}{q}\right)e}\right)^{\sigma+\frac{1}{2}} \mathrm{Li}_{-\alpha}(q^{-r} + \sigma + \frac{1}{2}) \Delta_{\sigma}(J) \epsilon_V \\
&= \frac{17}{72} J - \delta_1(\sigma, r) \Delta_{\sigma}(J) \epsilon_V.
\end{aligned}$$

Isso demonstra (3.3), considerando $\delta_*(\sigma, r, J) = \delta_1(\sigma, r) \Delta_{\sigma}(J)$.

Para concluir a demonstração considere que $\omega \in \Omega_\infty$. Queremos aplicar a Proposição 3.5.1. Olhando as hipóteses de tal proposição observamos que resta apenas demonstrar a igualdade (3.46). Na verdade, essa igualdade é uma consequência da construção de $A_s \in {}^0\mathcal{B}_{s+1}$. De fato, pela construção de A_s (conforme(3.63))

$$A_s = \Gamma_s((1-D_s)(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1}))),$$

o que significa que para qualquer $\omega \in \Omega_{s+1}$ e todos os índices (k,n,m)

$$\begin{aligned} & (k\omega - \Delta_{mn} + (W_s)_{0nn}(\omega))(A_s)_{knm}(\omega) - (A_s)_{knm}(\omega)(W_s)_{0mm}(\omega) = \\ = \; & ((1-D_s)(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1})))_{knm}(\omega). \end{aligned} \tag{3.74}$$

Por outro lado, pela definição de θ_u^s (conforme(3.45)) e a definição de D_s (conforme(3.33)), e como $\omega \in \Omega_\infty$ vale que, para todo $u,\ u > s$,

$$\begin{aligned} \theta_u^s(\tau_{us}D_s(W_s))_{knm}(\omega) &= \Big([\tau_{u,s+1}(A_s), \tau_{us}D_s(W_s)]\Big)_{knm}(\omega) \\ &= (\tau_{u,s+1}(A_s)\tau_{us}D_s(W_s))_{knm}(\omega) \\ &\quad -(\tau_{us}D_s(W_s)\tau_{u,s+1}(A_s))_{knm}(\omega) \\ &= (A_s)_{knm}(\omega)(W_s)_{0mm}(\omega) - (W_s)_{0nn}(\omega)(A_s)_{knm}(\omega). \end{aligned} \tag{3.75}$$

Daí, de (3.74)

$$\begin{aligned} & (k\omega - \Delta_{mn})(A_s)_{knm}(\omega) + (W_s)_{0nn}(\omega)(A_s)_{knm}(\omega) - (A_s)_{knm}(\omega)(W_s)_{0mm}(\omega) = \\ = \; & ((1-D_s)(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1})))_{knm}(\omega), \end{aligned}$$

e usando (3.75), segue que

$$(k\omega - \Delta_{mn})(A_s)_{knm}(\omega) = (\theta_u^s(\tau_{us}D_s(W_s)) + \tau_{us}(1-D_s)(W_s - \tau_{s-1}(W_{s-1})))_{knm}(\omega),$$

que é a relação (3.46).

Concluímos que de acordo com a Proposição 3.5.1 o operador $\mathbf{K}+\mathbf{V}$ é unitariamente equivalente à $\mathbf{K}+\mathbf{D}(\mathbf{W})$ e, portanto, tem espectro pontual puro. Isso conclui a demonstração do Teorema 3.1.1.

Apêndice

Considere

$$\mathcal{H} = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\oplus} \mathcal{H}_n,$$

a decomposição espectral de um espaço de Hilbert em uma soma direta de subespaços mutuamente ortogonais e $\Omega \subset \mathbb{R}$. Para qualquer par de números reais positivos, φ e E, o subespaço

$$\mathcal{B} \subset L^\infty\Big(\Omega \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)\Big),$$

formado pelos elementos $\mathcal{V}$ que satisfazem

$$\mathcal{V}_{knm}(\omega) \in B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)$$

e tem norma finita

$$\|\mathcal{V}\| = \sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega \\ \omega\neq\omega'}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \Big(\|\mathcal{V}_{knm}(\omega)\| + \varphi \left\| \widetilde{\partial}\mathcal{V}_{knm}(\omega,\omega') \right\| \Big) e^{\frac{|k|}{E}}, \tag{3.76}$$

em que $\widetilde{\partial}$ representa o operador diferença

$$\widetilde{\partial}\mathcal{V}(\omega,\omega') = \frac{\mathcal{V}(\omega) - \mathcal{V}(\omega')}{\omega - \omega'}.$$

Note que o operador de diferença obedece à regra

$$\begin{aligned}
\widetilde{\partial}(\mathcal{U}\mathcal{V})(\omega,\omega') &= \frac{\mathcal{U}(\omega)\mathcal{V}(\omega) - \mathcal{U}(\omega')\mathcal{V}(\omega')}{\omega - \omega'} \\
&= \frac{\mathcal{U}(\omega)\mathcal{V}(\omega') - \mathcal{U}(\omega')\mathcal{V}(\omega') + \mathcal{U}(\omega)\mathcal{V}(\omega) - \mathcal{U}(\omega)\mathcal{V}(\omega')}{\omega - \omega'} \\
&= \Big(\frac{\mathcal{U}(\omega) - \mathcal{U}(\omega')}{\omega - \omega'}\Big)\mathcal{V}(\omega') + \mathcal{U}(\omega)\Big(\frac{\mathcal{V}(\omega) - \mathcal{V}(\omega')}{\omega - \omega'}\Big) \\
&= \widetilde{\partial}\mathcal{U}(\omega,\omega')\mathcal{V}(\omega') + \mathcal{U}(\omega)\widetilde{\partial}\mathcal{V}(\omega,\omega').
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Proposição 3.8.1 *$(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $\{X_l\} \subset \mathcal{B}$ uma sequência de Cauchy. Logo, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $l, p \geq N$ implica

$$\|X_l - X_p\| < \epsilon.$$

Assim, se $l, p \geq N$

$$\sup_{\substack{\omega,\omega' \in \Omega;\\ \omega \neq \omega'}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \Big(\|(X_l - X_p)_{knm}(\omega)\| + \varphi \left\| \widetilde{\partial}(X_l - X_p)_{knm}(\omega, \omega') \right\| \Big) e^{|k|/E} < \epsilon.$$

Daí, para $\omega \in \Omega_s,\ k \in \mathbb{Z}$ e $m, n \in \mathbb{N}$

$$\|(X_l)_{knm}(\omega) - (X_p)_{knm}(\omega)\| < \epsilon, \quad \forall l, p \geq N,$$

e portanto $\{(X_l)_{knm}(\omega)\}$ é uma sequência de Cauchy em $B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)$, que é um espaço de Banach; assim

$$(X_l)_{knm}(\omega) \to X_{knm}(\omega) \in B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n).$$

Isto define $X \in \mathcal{B}$ de forma que $X_l \to X$ na norma $\|\cdot\|$. ∎

Proposição 3.8.2 *Seja $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{B}$ e considere a regra de multiplicação*

$$(\mathcal{U}\mathcal{V})_{knm}(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_{k-l,n,p}(\omega) \mathcal{V}_{lpm}(\omega). \tag{3.78}$$

Então

$$\|\mathcal{U}\mathcal{V}\| \leq \|\mathcal{U}\| \, \|\mathcal{V}\|. \tag{3.79}$$

Demonstração: Para abreviar vamos denotar nesta demonstração $\chi_p(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \|\mathcal{V}_{lpm}(\omega)\| \, e^{\frac{|l|}{E}}$ e $\widetilde{\partial}\chi_p(\omega, \omega') = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \left\| \widetilde{\partial}\mathcal{V}_{lpm}(\omega, \omega') \right\| e^{\frac{|l|}{E}}$.

Temos

$$\begin{aligned}
& \sum_k \sum_m \|(\mathcal{U}\mathcal{V}\mathcal{V})_{knm}(\omega)\| \, e^{\frac{|k|}{E}} \leq \\
\leq \; & \sum_k \sum_m \sum_l \sum_p \|\mathcal{U}_{k-l,n,p}(\omega)\| \, e^{\frac{|k-l|}{E}} \, \|\mathcal{V}_{lpm}(\omega)\| \, e^{\frac{|l|}{E}} \\
= \; & \sum_k \sum_m \sum_l \sum_p \|\mathcal{U}_{knp}(\omega)\| \, e^{\frac{|k|}{E}} \, \|\mathcal{V}_{lpm}(\omega)\| \, e^{\frac{|l|}{E}} \\
= \; & \sum_k \sum_p \|\mathcal{U}_{knp}(\omega)\| \, e^{\frac{|k|}{E}} \chi_p(\omega).
\end{aligned}$$

Similarmente, usando (3.77),

$$\begin{aligned}
&\sum_k \sum_m \left\| \widetilde{\partial}(\mathcal{U}\mathcal{V})_{knm}(\omega) \right\| e^{\frac{|k|}{E}} \leq \\
\leq\ & \sum_k \sum_m \sum_l \sum_p \left(\|\mathcal{U}_{knp}(\omega)\| \, e^{\frac{|k|}{E}} \left\| \widetilde{\partial}\mathcal{V}_{lpm}(\omega,\omega') \right\| e^{\frac{|l|}{E}} + \left\| \widetilde{\partial}\mathcal{U}_{knp}(\omega,\omega') \right\| e^{\frac{|k|}{E}} \, \|\mathcal{V}_{lpm}(\omega')\| \, e^{\frac{|l|}{E}} \right) \\
\leq\ & \sum_k \sum_p \left(\|\mathcal{U}_{knp}(\omega)\| \, \widetilde{\partial}\chi_p(\omega,\omega') + \left\| \widetilde{\partial}\mathcal{U}_{knp}(\omega,\omega') \right\| \chi_p(\omega') \right) e^{\frac{|k|}{E}}.
\end{aligned}$$

A combinação dessas duas desigualdades fornece

$$\begin{aligned}
&\sum_k \sum_m \left(\|(\mathcal{U}\mathcal{V})_{knm}(\omega)\| + \varphi \left\| \widetilde{\partial}(\mathcal{U}\mathcal{V})_{knm}(\omega,\omega') \right\| \right) e^{\frac{|k|}{E}} \leq \\
\leq\ & \sum_k \sum_p (\|(\mathcal{U}_{knp}(\omega)\| \, (\chi_p(\omega) + \varphi\widetilde{\partial}\chi_p(\omega,\omega')) + \varphi \left\| \widetilde{\partial}\mathcal{U}_{knp}(\omega,\omega') \right\| \chi_p(\omega')) e^{\frac{|k|}{E}} \\
\leq\ & \sup_{\omega,\omega'} \sup_p (\chi d_p(\omega) + \varphi\widetilde{\partial}\chi_p(\omega,\omega')) \sum_k \sum_p \left(\|\mathcal{U}_{knp}(\omega)\| + \varphi \left\| \widetilde{\partial}\mathcal{U}_{knp}(\omega,\omega') \right\| \right) e^{\frac{|k|}{E}} \\
=\ & \|\mathcal{V}\| \sum_k \sum_p \left(\|\mathcal{U}_{knp}(\omega)\| + \varphi \left\| \widetilde{\partial}\mathcal{U}_{knp}(\omega,\omega') \right\| \right) e^{\frac{|k|}{E}}.
\end{aligned}$$

Para obter (3.79) é suficiente aplicar $\sup_{\omega,\omega'} \sup_n$ para esta desigualdade. ■

Suponha agora que são dados dois pares de números reais positivos, (φ_1, E_1) e (φ_2, E_2), e que vale

$$\rho = \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \geq 0 \text{ e } \varphi_2 \leq \varphi_1. \tag{3.80}$$

Consequentemente, temos dois espaços de Banach, $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$. Além disso, suponha que é dada uma aplicação

$$\Gamma : \Omega \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} B(B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)), \tag{3.81}$$

tal que para cada par $(\omega, k) \in \Omega \times \mathbb{Z}$ e cada índice duplo $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\Gamma_{knm}(\omega)$ pertence a $B(B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n))$. Γ naturalmente determina uma aplicação linear, denotada pelo mesmo símbolo Γ, de $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$, de acordo com a regra

$$(\Gamma\mathcal{V})_{knm}(\omega) = \Gamma_{knm}(\omega)(\mathcal{V}_{knm}(\omega)). \tag{3.82}$$

Com respeito ao operador diferença, neste caso vale a regra

$$\widetilde{\partial}(\Gamma(\mathcal{V}))(\omega,\omega') = \widetilde{\partial}\Gamma(\omega,\omega')(\mathcal{V}(\omega')) + \Gamma(\omega)(\widetilde{\partial}\mathcal{V}(\omega,\omega')).$$

Proposição 3.8.3 *A norma de $\Gamma : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ pode ser estimada como segue,*

$$\|\Gamma\| \leq \sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega \\ \omega\neq\omega'}} \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} e^{-\rho|k|} \left(\left\| \Gamma_{knm(\omega)} \right\| + \varphi_2 \left\| \widetilde{\partial}\Gamma_{knm}(\omega,\omega') \right\| \right). \tag{3.83}$$

Demonstração: Observe que, se for conveniente, podemos trocar ω e ω' em $\left\|\widetilde{\partial}\mathcal{U}(\omega,\omega')\right\|$. Temos

$$
\begin{aligned}
& \sum_k \sum_m \Big(\|\Gamma_{knm}(\omega)(\mathcal{V}_{knm}(\omega))\| + \varphi_2 \left\|\widetilde{\partial}(\Gamma_{knm}(\mathcal{V}_{knm}))(\omega,\omega')\right\| \Big) e^{-\rho|k|} \leq \\
\leq \;& \sum_k \sum_m \Big(\|\mathcal{V}_{knm}(\omega)\| \Big(\|\Gamma_{knm}(\omega)\| + \varphi_2 \left\|\widetilde{\partial}\Gamma_{knm}(\omega,\omega')\right\| \Big) e^{-\rho|k|} \\
& + \varphi_2 \left\|\widetilde{\partial}\mathcal{V}_{knm}(\omega,\omega')\right\| \|\Gamma_{knm}(\omega')\| \, e^{-\rho|k|} \Big) e^{\frac{|k|}{E_1}} \\
\leq \;& \sup_{\omega,\omega'} \sup_k \sup_{(n,m)} e^{-\rho|k|} \Big(\|\Gamma_{knm}(\omega)\| + \varphi_2 \left\|\widetilde{\partial}\Gamma_{knm}(\omega,\omega')\right\| \Big) \\
& \times \sum_k \sum_m \Big(\|\mathcal{V}_{knm}(\omega)\| + \varphi_1 \left\|\widetilde{\partial}\mathcal{V}_{knm}(\omega,\omega')\right\| \Big) e^{\frac{|k|}{E_1}}.
\end{aligned}
$$

Para terminar a demonstração é suficiente aplicar $\sup_{\omega,\omega'} \sup_n$ a esta desigualdade. ■

Bibliografia

[1] J. Asch, P. Duclos e P. Exner, *Stability of driven systems with growing gaps, quantum rings, and Wannier ladders*, J. Stat. Phys. **92** n.5-6, (1998), p. 1053-1070.

[2] D. Bambusi e S. Graffi, *Time quasi-periodic unbounded perturbations of Schrödinger operators and KAM methods*, Comm. Math. Phys. **219**(2), (2001), p. 1033-1052.

[3] J. M. Barbaroux, J. M. Combes e R. Montcho, *Remarks on the relation between quantum dynamics and fractal spectra*, J. Stat. Phys. **90** n.5-6, (1998), p. 1225-1249.

[4] J. M. Barbaroux e A. Joye, *Expectation values of observables in time-dependent quantum mechanics*, J. Anal. Appl. **213** n.2, (1997), p. 698-722.

[5] J. Bellissard, *Stability and instability in quantum mechanics*, In: Trends and Developments in the Eighties. S. Albeverio, Ph. Blanchard (eds), Singapore: World Scientific, (1985), p. 1-106.

[6] R. Bhatia e P. Rosenthal, *How and why to solve the operator equation* $AX-XB=Y$, Bull. London Math. Soc. **29**, (1997), p. 1–21.

[7] P. M. Bleher, H. R. Jauslin e J. L. Lebowitz, *Floquet spectrum for two-level systems in quasi-periodic time dependent fields*, J. Stat. Phys. **68**, (1992), p. 271.

[8] J. Bourgain, *Estimates on Green's functions, localization and the quantum kicked rotor model*, Ann. Math. **156**, (2002), p. 249-294.

[9] O. Bourget, J. S. Howland e A. Joey, *Spectral analysis of unitary band matrices*, Comm. Math. Phys. **234**, n.2, (2003), p. 191-227.

[10] O. Bourget, *Singular continuous Floquet operator for periodic quantum systems*, J. Math. Anal. Appl. **301**, n.1, (2005), p. 65-83.

[11] O. Bourget, *Singular continuous Floquet operator for systems with increasing gaps*, J. Math. Anal. Appl. **276**, (2002), p. 28-39; Erratum: J. Math. Anal. Appl. **289**, (2004), p. 722-723.

[12] L. Bunimovich, J. L. Lebowitz, A. Pellegrinotti e P. Nielaba, *Diffusive energy growth in classical and quantum driven oscillators*, J. Stat. Phys. **62**, n.3-4, (1991), p. 793-817.

[13] M. Combescure, *Spectral properties of a periodically kicked quantum Hamiltonian*, J. Stat. Phys. **59**, (1990), p. 679-690.

[14] M. Combescure, *The quantum stability problem for time-periodic perturbations of the harmonic oscillator*, Ann. Inst. H. Poincaré **47**, (1987), p. 62-82; Erratum: Ann. Inst. H. Poincaré **47**, (1987), p. 451-454.

[15] J. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlim, 1985.

[16] S. de Bièvre e G. Forni, *Transport properties of kicked and quasiperiodic Hamiltonians*, J. Stat. Phys. **90**, n.5-6, (1998), p. 1201-1223.

[17] C. R. de Oliveira, *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*, Birkhäuser, Basel, 2009.

[18] C. R. de Oliveira, *Introdução à Análise Funcional*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.

[19] C. R. de Oliveira, *Spectral properties of a simple Hamiltonian model*, J. Math. Phys. **34**(9), (1993), p. 3878-3886.

[20] C. R. de Oliveira, *On kicked systems modulated along the Thue-Morse sequence*, J. Phys. **27**(22), (1994), p. 847-851.

[21] C. R. de Oliveira e M. C. de Toledo, *Equivalence of some quantum stability concepts*, Rep. Math. Phys. **41**, n.2, (1998), p. 145-153.

[22] C. R. de Oliveira e M. S. Simsen, *A floquet operator with purely point spectrum and energy enstability*, Ann. Henri Poincaré **8**(22), (2007), p. 1255-1277.

[23] C. R. de Oliveira e M. S. Simsen, *Quantum energy expectation in periodic time-dependent hamiltonians via Green functions*, Math. Problems in Engineering (**2009**), Article ID 902506, 30 pages.

[24] C. R. de Oliveira, *Some remarks concerning stability for nonstationary quantum systems*, J. Stat. Phys. **78**, n.3-4, (1995), p. 1055-1066.

[25] J. R. Dorroh, *A linear evolution equation without a commum dense core for the generators.* J. Differential Equations **31**(1), (1979), p. 109-116.

[26] P. Duclos, O. Lev, P. Stovicek e M. Vittot, *Weakly regular Hamiltonians with pure point spectrum*, Rev. Math. Phys. **14**(6), (2002), p. 531-568.

[27] P. Duclos, E. Soccorsi, P. Stovicek e M. Vittot, *On the stability of periodically time-dependent quantum systems*, Rev. Math. Phys. **20**(6), (2008), p. 725-764.

[28] P. Duclos e P. Stovicek, *Floquet Hamiltonians with pure point spectrum*, Commun. Math. Phys. **177**, (1996), p. 327-347.

[29] P. Duclos, P. Stovicek e M. Vittot, *Perturbation of an eigen-value from a dense point spectrum: a general Floquet Hamiltonian*, Ann. Inst. H. Poincaré **71**, (1999), p. 241-301.

[30] V. Enss e K. Veselić, *Bound states and propagating states for time-dependent Hamiltonians*, Ann. Inst. Henri Poincaré Section A, **39**, (1983), p. 159-191.

[31] S. Graffi e K. Yajima, *Absolute continuity of the floquet spectrum for a nonlinearly forced harmonic oscillator*, Commun. Math. Phys. **215**(2), (2000), p. 245-250.

[32] I. Guarneri, *Singular continuous spectra and discrete wave packet dynamics*, J. Math. Phys. **37**, n.10, (1996), p. 5195-5206.

[33] I. Guarneri, *Spectral properties of quantum diffusion on discrete lattices*, Europhysics Letters **10**, n.2, (1989), p. 95-100.

[34] J. S. Howland, *Floquet operators with singular continuous spectrum, I*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **49**, (1989), p. 309-323; II, **49**, (1989), p. 325-334; III, **69**, (1998), p. 265-273.

[35] J. S. Howland, *Scattering theory for Hamiltonians periodic in time*, Indiana J. Math. **28**, (1979), p. 471-494.

[36] J. S. Howland, *Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians*, Math. Ann. **207**, (1974), p. 315-335.

[37] S. Ishii, *An approach to linear hyperbolic evolution equations by the Yosida approximation method*, Proc. Japan Acad. **54**, Ser. A, (1978), p. 17-20.

[38] S. Ishii, *Linear evolution equations* $du/dt + A(t)u = 0$*: a case where* $A(t)$ *is strongly uniform-measurable*, J. Math. Soc. Japan **34**, (1982), p. 413-424.

[39] H. R. Jauslin e J. L. Lebowitz, *Spectral and stability aspects of quantum chaos*, Chaos 1, (1991), p. 114-121.

[40] A. Joey, *Absence of absolutely continuous spectrum of Floquet operators*, J. Stat. Phys. **75**, (1994), p. 929-952.

[41] A. Joey, *Upper bounds for the energy expectation in time-dependent quantum mechanics*, J. Stat. Phys. **85**, n.5-6, (1996), p. 575-606.

[42] T. Kato, *Linear evolution equations of "hiperbolic"type*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, A Math. **17**, (1970), p. 241-258.

[43] T. Kato, *Linear evolution equations of "hiperbolic"type II.* J. Math. Soc. Japan **25**(4), (1973), p. 648-666.

[44] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlim, 1980.

[45] Y. Last, *Quantum dynamics and decompositions of singular continuous spectra*, J. Func. Anal. **142**, n.2 (1996), p. 406-445.

[46] M. A. Naimark e S. V. Fomin, *Continuous direct sums of Hilbert spaces and some of their applications*, Am. Math. Soc. Translations **5**, (1957) Ser.2, p. 35-66.

[47] G. Nenciu, *Floquet operators without absolutely continuous spectrum*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **59**, (1993), p. 91-97.

[48] G. Nenciu, *Adiabatic theory: Stability of systems with increasing gaps*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **67**(4), (1997), p. 411-424.

[49] W. T. Palmer, *Banach Algebras and the General Theory of ∗-Algebras, Vol. I Algebras and Banach Algebras*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 49, Cambridge University Press, Cambridge and New York, 1994.

[50] M. Reed e B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I. Functional Analysis*, 2nd edition, Academic Press, San Diego, 1981.

[51] M. Reed e B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II. Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, San Diego, 1975.

[52] M. Reed e B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics III. Scattering Theory*, Academic Press, San Diego, 1979.

[53] M. Reed e B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics IV. Analysis of Operators*, Academic Press, San Diego, 1978.

[54] F. Rellich, *Störungstheorieder Spektralzerlegung I*, Math. Ann. Phys. **113**, (1937), p. 600-619.

[55] S. Sakai, *C^*-Algebras and W^*-Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1971.

[56] G. Schmidt, *On scattering by time-dependent perturbations*, Indiana Univ. Math. J. **24**(10), (1975), p. 925-935.

[57] P. Seba, *Quantum chaos in Fermi-accelerator mode*, Phys. Rev. A **41**, (1990), p. 2306-2310.

[58] F. Williams, *Topics in Quantum Mechanics*, PMP **27**, Birkhäuser, Boston, 2003.

[59] K. Yajima, *Scattering theory for Schrödinger equations with potential periodic in time*, J. Math. Soc. Japan **29**, (1977), p. 729-743.

[60] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics*, Appl. Math. Sciences **108**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.