

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Estudo Qualitativo de Dinâmica de Populações

Iracema Ariel de Moraes Bonomini

Itajubá, fevereiro de 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Iracema Ariel de Moraes Bonomini

Estudo Qualitativo de Dinâmica de Populações

Dissertação submetida ao Programa de Pós- Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Fevereiro, 2012

Itajubá - MG

All models are wrong, but some are useful.

George Box

Resumo

Inicialmente, um modelo predador-presa planar é estudado. Já o seguinte é um sistema no espaço tridimensional que descreve a competição entre duas espécies de predadores por uma única espécie presa, onde ocorrem as bifurcações de Hopf e a *zip*. Usando uma resposta funcional Holling tipo III generalizada, ou incluindo mais predadores - modelo predador presa $(n + 1)$ -dimensional -, a bifurcação *zip* persiste nos novos modelos.

Palavras-chave: Dinâmica de populações, sistema predador-presa, bifurcações de Hopf e *zip*

Abstract

First, a two dimensional predator-prey model is studied. The next model is a three dimensional space system, that describes the competition of two predators species for a single species of prey, where occurs a Hopf and a *zip* bifurcations. Using a generalized Holling III type functional response or including more predators - $(n + 1)$ -dimensional system -, the *zip* bifurcation persists in new models.

Keywords: Population dynamics, predator-prey system, Hopf and *zip* bifurcations

Conteúdo

Resumo	ii
Abstract	iii
Índice	iv
Lista de Figuras	v
Introdução	1
1 Um modelo predador-presa	3
1.1 Os Pontos de Equilíbrio de (1.2)	6
1.2 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio de (1.2)	6
2 Competição de dois predadores por uma presa	16
2.1 Pontos de Equilíbrio de (2.2)	18
2.2 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio de (2.2)	20
2.2.1 Caso: $\lambda_1 \neq \lambda_2$	22
2.2.2 Caso 2: $\lambda_1 = \lambda_2$ e $a_1 = a_2$	27
2.2.3 Caso 3: $\lambda_1 = \lambda_2$ e $a_1 \neq a_2$	39

3	Extensões do modelo (2.1)	45
3.1	Modelo de competição de predadores com funções Holling tipo III generalizadas	45
3.1.1	Caso 1: $a_1 = a_2$	47
3.1.2	Caso 2: $a_1 \neq a_2$	50
3.2	Modelo de competição entre n predadores	53
3.2.1	Caso 1: $a_1 = \dots = a_n = a$	54
3.2.2	Caso 2: $a_1 \neq a_2 \neq \dots \neq a_n$	58
	Discussões finais	61
	Bibliografia	63
	Anexo I	65
	Anexo II	73

Lista de Figuras

1.1	Retrato de fase para $\lambda < K < a + 2\lambda$	14
1.2	Retrato de fase para $a + 2\lambda < K < a + 2\lambda + \epsilon$	15
2.1	Pontos de equilíbrio para $\lambda_1 \neq \lambda_2$	19
2.2	Pontos de equilíbrio para $\lambda_1 = \lambda_2$	20
2.3	Pontos de equilíbrio para $\lambda_1 = \lambda_2$ e $a_1 + 2\lambda_1 < K < a_1 + 2\lambda_1 + \epsilon$ (ou, <i>equivalentemente</i> , $a_2 + 2\lambda_2 < K < a_2 + 2\lambda_2 + \epsilon$).	26
2.4	A superfície de nível $H^{-1}(c)$	29
2.5	Projeção da superfície de nível $H^{-1}(c)$ no plano $\{S = S_0\}$	30
2.6	$H^{-1}(c)$ no plano $\{S = S_0\}$, para $c \in \{c_1, c_2, c_3\}$	31
2.7	Intersecção de $H^{-1}(c)$ e L	32
2.8	Projeção no plano $\{S = S_0\}$ de $H^{-1}(c)$ e L	33
2.9	Cilindros de órbitas periódicas atratoras para $\lambda_1 = \lambda_2$ e $a_1 = a_2$	38
2.10	Pontos de equilíbrio para $\lambda_1 = \lambda_2$ e $a_1 \neq a_2$	42
3.1	Retrato de fase: órbita periódica atratora em $x_2 = 0$. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 0.9$, $d_1 = 1$, $m_1 = 2$, $a_2 = 0.8$, $d_2 = 1.95$, $m_2 = 3$, $K = 2.75$. Intervalo de integração: $[-50,100]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.85, 0)$, $(1, 0, 0.3)$, $(0.99, 0.1, 0.9)$	66

- 3.2 Retrato de fase: órbita periódica atratora em $x_1 = 0$. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 0.8$, $d_1 = 1.95$, $m_1 = 3$, $a_2 = 0.9$, $d_2 = 1$, $m_2 = 2$, $K = 3.25$. Intervalo de integração: $[-10,50]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.9, 0.02)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0)$ 67
- 3.3 Retrato de fase: órbitas periódicas atratoras em $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 0.5$, $d_1 = 1$, $m_1 = 1.5$, $a_2 = 1$, $d_2 = 1$, $m_2 = 3$, $K = 2.7$. Intervalo de integração: $[-20,80]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.9, 0.02)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0)$ 67
- 3.4 Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 2$, $a_2 = 1$, $d_2 = 1$, $m_2 = 2$, $K = 3.25$. Intervalo de integração: $[-10,100]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.9, 0.3)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0)$, $(0.99, 0.3, 1)$, $(0.99, 1.3, 1.2)$ 68
- 3.5 Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 2$, $a_2 = 1$, $d_2 = 1$, $m_2 = 2$, $K = 1.5$. Intervalo de integração: $[-10,100]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.9, 0.3)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0)$, $(0.99, 0.3, 1)$, $(0.99, 1.3, 1.2)$ 68
- 3.6 Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 2$, $a_2 = 1$, $d_2 = 1$, $m_2 = 2$, $K = 4$. Intervalo de integração: $[-10,100]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.9, 0.3)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0)$, $(0.99, 0.3, 1)$, $(0.99, 1.3, 1.2)$ 69
- 3.7 Retrato de fase: “formação” do *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 0.99$, $m_1 = 2$, $a_2 = 0.95$, $d_2 = 1.05$, $m_2 = 2$, $K = 2.5$. Intervalo de integração: $[20,300]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.9, 0.3)$, $(0.99, 0.02, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0.05)$ 69

- 3.8 Retrato de fase: “formação” do *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 0.99$, $m_1 = 2$, $a_2 = 0.95$, $d_2 = 1.05$, $m_2 = 2$, $K = 6$. Intervalo de integração: $[-100, 500]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.9, 0.3)$, $(0.99, 0.02, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0.05)$ 70
- 3.9 Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 2$, $a_2 = 0.5$, $d_2 = 2$, $m_2 = 3$, $K = 2$. Intervalo de integração: $[0, 500]$. Condições iniciais: $(1.1, 2/11, 5/11)$, $(0.99, 1/11, 3/11)$, $(0.99, 1/11, 13/44)$ 70
- 3.10 Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 2$, $a_2 = 0.5$, $d_2 = 2$, $m_2 = 3$, $K = 3.5$. Intervalo de integração: $[0, 500]$. Condições iniciais: $(1.1, 2/11, 5/11)$, $(0.99, 1/11, 3/11)$, $(0.99, 1/11, 13/44)$ 71
- 3.11 Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 2$, $a_2 = 0.5$, $d_2 = 2$, $m_2 = 3$, $K = 3$. Intervalo de integração: $[0, 500]$. Condições iniciais: $(1.1, 2/11, 5/11)$, $(0.99, 1/11, 3/11)$, $(0.99, 1/11, 13/44)$ 71
- 3.12 Retrato de fase: órbitas em Ω . Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 3$, $a_2 = 0.999$, $d_2 = 1$, $m_2 = 2$, $K = 2.9$. Intervalo de integração: $[0, 100]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.0, 0.5)$, $(0.99, 0.02, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0.05)$ 72
- 3.13 Retrato de fase. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 3$, $a_2 = 0.991$, $d_2 = 1$, $m_2 = 2$, $K = 2.9$. Intervalo de integração: $[0, 100]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.0, 0.5)$, $(0.99, 0.02, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0.05)$. 72

- 3.14 Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são:
 $\gamma = 1, a_1 = 0.5, d_1 = 1, m_1 = 3, a_2 = 0.5, d_2 = 1, m_2 = 3, K = 1.6, n = 5$.
 Intervalo de integração: $[0,20]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08), (0.99, 0, 0.2), (0.99, 0.4, 0), (0.99, 0.25, 0.35), (0.99, 0.45, 0.3)$ 73
- 3.15 Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são:
 $\gamma = 1, a_1 = 0.5, d_1 = 1, m_1 = 3, a_2 = 0.5, d_2 = 1, m_2 = 3, K = 2.15, n = 5$. Intervalo de integração: $[0,30]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08), (0.99, 0, 0.2), (0.99, 0.4, 0), (0.99, 0.25, 0.35), (0.99, 0.45, 0.3)$ 74
- 3.16 Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são:
 $\gamma = 1, a_1 = 0.5, d_1 = 1, m_1 = 3, a_2 = 0.5, d_2 = 1, m_2 = 3, K = 6, n = 5$. Intervalo de integração: $[-5,8]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08), (0.99, 0, 0.2), (0.99, 0.4, 0), (0.99, 0.25, 0.35), (0.99, 0.45, 0.3)$ 75
- 3.17 Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são:
 $\gamma = 1, a_1 = 0.5, d_1 = 1, m_1 = 3, a_2 = 0.5, d_2 = 1, m_2 = 3, K = 6, n = 5$. Intervalo de integração: $[0,100]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08), (0.99, 0, 0.2), (0.99, 0.4, 0), (0.99, 0.25, 0.35), (0.99, 0.45, 0.3)$ 75
- 3.18 Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são:
 $\gamma = 1, a_1 = 0.5, d_1 = 1, m_1 = 3, a_2 = 0.5, d_2 = 5, m_2 = 6, K = 1.7, n = 5$. Intervalo de integração: $[0,50]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08), (0.99, 0, 0.2), (0.99, 0.4, 0), (0.99, 0.25, 0.35), (0.99, 0.45, 0.3)$ 76
- 3.19 Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são:
 $\gamma = 1, a_1 = 0.5, d_1 = 1, m_1 = 3, a_2 = 0.5, d_2 = 5, m_2 = 6, K = 2.15, n = 5$. Intervalo de integração: $[-50,30]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08), (0.99, 0, 0.2), (0.99, 0.4, 0), (0.99, 0.25, 0.35), (0.99, 0.45, 0.3)$ 76

- 3.20 Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são:
 $\gamma = 1, a_1 = 0.5, d_1 = 1, m_1 = 3, a_2 = 0.5, d_2 = 5, m_2 = 6, K = 5, n = 5.$
 Intervalo de integração: $[-10,10]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08), (0.99,$
 $0, 0.2), (0.99, 0.4, 0), (0.99, 0.25, 0.35), (0.99, 0.45, 0.3).$ 77
- 3.21 Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são:
 $\gamma = 1, a_1 = 0.5, d_1 = 1, m_1 = 3, a_2 = 0.5, d_2 = 5, m_2 = 6, K = 5, n = 5.$
 Intervalo de integração: $[-10,60]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08), (0.99,$
 $0, 0.2), (0.99, 0.4, 0), (0.99, 0.25, 0.35), (0.99, 0.45, 0.3).$ 77

Introdução

A dinâmica de populações, onde por população se entende um grupo de indivíduos de mesma espécie que ocupa uma determinada área, tem início com Malthus (1798), *An Essay on the Principles of Population*. Em 1838, Verhulst propõe um modelo de crescimento populacional limitado pela capacidade do meio. Os modelos foram aperfeiçoados, estudados e outros tantos foram criados, [18].

Aqui, o foco é o estudo qualitativo das equações diferenciais de sistemas do tipo predador-presa. Esse sistema foi consolidado por Lotka e Volterra na década de 20 no século XX

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = -cy(t) + dx(t)y(t), \end{cases} \quad (1)$$

onde, $x(t)$ representa a densidade populacional de presas, $y(t)$ a densidade populacional de predadores, a, b, c, d são parâmetros estritamente positivos. Um bom estudo dele encontra-se em [4].

No primeiro capítulo, apresenta-se um modelo predador-presa com resposta funcional Holling tipo II. Verifica-se a coexistência das espécies, não somente pontual, mas até mesmo com uma órbita periódica.

No segundo capítulo, acrescenta-se um outro predador ao sistema inicial, o do Capítulo

1, havendo, portanto, uma competição entre os predadores pela presa. Quais resultados ainda são mantidos no novo sistema?

Ao se extinguir um predador, os resultados do Capítulo 1 são resgatados. No entanto, quando as três espécies envolvidas sobrevivem há a possibilidade do sistema apresentar um *continuum* de equilíbrios, ou seja, um segmento de reta constituído por pontos de equilíbrio restrito ao primeiro octante. Nos parâmetros considerados, ocorrem dois tipos de bifurcações, a de Hopf e a *zip*, [1], [2].

Por último, duas generalizações do modelo do Capítulo 2 são exibidas. Em uma delas utiliza-se uma resposta funcional Holling tipo III generalizada, e na outra inclui-se mais predadores para competir pela única presa, de modo que o sistema passa a ser $(n + 1)$ -dimensional, com $n \geq 2$. A bifurcação *zip* também ocorre nesses novos modelos.

Capítulo 1

Um modelo predador-presa

Neste capítulo, será abordado um modelo predador-presa planar utilizando uma resposta funcional Holling tipo II. Em seu clássico trabalho de 1959 (*The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the European pean sawfly*), Holling apresenta a noção de resposta funcional que é a taxa de ingestão de comida pelo consumidor. O interesse aqui é quando a comida é uma presa e o consumidor um predador e, portanto, nas considerações feitas, serão eles os descritos.

A resposta funcional Holling tipo I é a mais simples delas por considerar um crescimento linear na taxa da ingestão de presas, sendo utilizada, em (1), no modelo predador-presa de Lotka-Volterra. Já a tipo II é caracterizada por uma desaceleração na taxa de ingestão, modelada por

$$f(S) = \frac{bS}{1 + bhS},$$

onde f denota a taxa de ingestão de presas, S a densidade populacional de presas, b a taxa de ataque (a taxa na qual o predador encontra a presa por unidade de densidade populacional de presas) e h o tempo para o predador manipular/processar a presa. E por último, a tipo III representa a relação do número de presas consumidas e a densidade populacional de presas é maior que a função linearmente crescente do consumo de presas

pelos predadores. Essa resposta acelerada pode ser causada pelo tempo de “aprendizagem” do predador para caçar a presa, pela seleção de presas - o predador dispõe de espécies distintas de presas para se alimentar -, ou pela combinação desses dois fenômenos. Para alta densidade populacional de presas, o comportamento é semelhante a de tipo II. A generalização dessa última função será abordada no Capítulo 3.

Considere o modelo a ser estudado dado por

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = \gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \frac{mx(t)S(t)}{a + S(t)}, \\ \dot{x}(t) = \frac{mx(t)S(t)}{a + S(t)} - dx(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

onde

- $S(t)$ é a densidade populacional de presas num dado instante t ;
- $x(t)$ é a densidade populacional de predadores num dado instante t .

É válido observar que (1.1) é uma família de sistemas planares constituída de equações diferenciais ordinárias não-lineares autônomas, dependendo de cinco parâmetros.

Atentando-se ao fato de que o sistema (1.1) é um modelo biológico, algumas restrições são feitas, $S(t) \geq 0$, $x(t) \geq 0$, e os parâmetros presentes em (1.1) possuem os seguintes significados, tais como em [1]:

- $\gamma > 0$ é a taxa de crescimento intrínseca da presa;
- $K > 0$ é a capacidade ambiental com respeito à presa;
- $m > 0$ é a taxa máxima de nascimento do predador;
- $d > 0$ é a taxa de mortalidade do predador;
- $a > 0$ é a constante de meia saturação para o predador.

Ao introduzir dois novos parâmetros

- $\lambda = \frac{ad}{m-d}$, com o seguinte significado: $x(t)$ é crescente se e somente se $S(t) > \lambda$;
- $\beta = m - d$;

em [6] e [7], mostram que o predador pode sobreviver apenas se $0 < \lambda < K$, o que implica $m > d$, ou seja a natalidade deve superar a mortalidade, e então (1.1) assume a seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = \gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \frac{mx(t)S(t)}{a + S(t)}, \\ \dot{x}(t) = \beta x(t) \frac{S(t) - \lambda}{a + S(t)}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Nas próximas seções, quer-se estudar a dinâmica de (1.2) de maneira qualitativa. Ressalta-se que λ e β sempre são positivos, e para os estudos seguintes $K > \lambda$. A variável t estará subentendida, assim se escreverá S ou x ao invés de $S(t)$ e $x(t)$. O sistema (1.1) ora será tratado simplesmente como sistema, ora como campo de vetores $F : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ com

$$F(S, x) = \left(\gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{mxS}{a + S}, \frac{mxS}{a + S} - dx \right), \quad (1.3)$$

ou

$$F(S, x) = \left(\gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{mxS}{a + S}, \beta x \frac{S - \lambda}{a + S} \right) \quad (1.4)$$

e

$$\bar{\Omega} = \{(S, x) \in \mathbb{R}^2 : S \geq 0, x \geq 0\}.$$

Desse modo $\Omega = \{(S, x) \in \mathbb{R}^2 : S > 0, x > 0\}$.

1.1 Os Pontos de Equilíbrio de (1.2)

O lema a seguir é de obtenção imediata.

Lema 1.1.1. *O sistema (1.2) apresenta três pontos de equilíbrio:*

- $P_0 = (0, 0)$;
- $P_1 = (K, 0)$;
- $P_2 = \left(\lambda, \gamma \left(\frac{a + \lambda}{m} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) \right)$.

1.2 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio de (1.2)

Antes de discutir as estabilidades dos pontos de equilíbrio do Lema 1.1.1, é importante salientar que as soluções de (1.2) são limitadas, ou seja, uma vez adentrada uma região do primeiro quadrante, jamais sairão dela.

Lema 1.2.1. *As retas $S = 0$ e $x = 0$ são invariantes.*

Demonstração. Será mostrado que o campo $F(S, x)$, definido em (1.3), restrito a cada uma dessas retas não possui componente normal a elas, matematicamente:

- $S = 0$

$$\left(0, -x \frac{\beta \lambda}{a} \right) \cdot (1, 0) = 0.$$

- $x = 0$

$$\left(\gamma S \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \frac{m x S}{a + S}, 0 \right) \cdot (0, 1) = 0.$$

Portanto, soluções com condições iniciais em $S = 0$ ou em $x = 0$ ficam restritas às retas. \square

Lema 1.2.2. *Toda solução de (1.2) com $(S_0, x_0) \in \Omega$ tende a um conjunto limitado em Ω .*

Demonstração. Considere a equação da reta $S + x = c$, onde c é uma constante positiva. O vetor normal a essa reta é $n = (1, 1)$. Considere o campo de vetores definido em (1.3)

$$F(S, x) = \left(\gamma S \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \frac{mxS}{a+S}, \frac{mxS}{a+S} - dx \right).$$

Assim,

$$F(S, x) \cdot n = \gamma S \left(1 - \frac{S}{K} \right) - dx \leq \gamma K - \gamma S - dx \leq \gamma K - \delta_0(S + x) = \gamma K - \delta_0 c,$$

se $c > \frac{\gamma K}{\delta_0}$, onde $\delta_0 = \min\{\gamma, d\}$,

$$F(S(t), x(t)) \cdot n < 0,$$

ou seja, para $t \rightarrow \infty$, as soluções de (1.1) ficam confinadas à $\Phi = \{(S, x) \in \Omega : S + x < c, c > \gamma K / \delta_0\}$. \square

Definindo

$$\Theta = \{(a, m, K, \beta, \gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^6 : a > 0, m > 0, K > \lambda, \beta > 0, \gamma > 0, \lambda > 0\}, \quad (1.5)$$

pode-se dizer que, dado $(a_0, m_0, K_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0) \in \Theta$, a dinâmica dos pontos de equilíbrio P_0 e P_1 do Lema 1.1.1 é sempre a mesma. No entanto, para P_2 é necessária uma análise mais refinada, pois a sua dinâmica, considerando o parâmetro K como o de bifurcação, depende da escolha de $(a_0, m_0, K_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0) \in \Theta$, logo sua estabilidade é discutida em outro resultado. Uma boa apresentação sobre bifurcação de Hopf encontra-se no clássico [8], em português [14], [16] que discute tal bifurcação num modelo biológico, e as notas [11].

Lema 1.2.3. *As soluções de equilíbrio P_0 e P_1 são hiperbólicas e do tipo sela.*

Demonstração. Seja a matriz Jacobiana de (1.2) para um ponto qualquer $(S, x) \in \bar{\Omega}$

$$J(S, x) = \begin{bmatrix} \gamma \left(1 - 2\frac{S}{K}\right) - \frac{mx}{a+S} + \frac{mxS}{(a+S)^2} & -\frac{mS}{a+S} \\ \frac{\beta x}{a+S} - \frac{\beta x(S-\lambda)}{(a+S)^2} & \beta \frac{S-\lambda}{a+S} \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Desse modo, o polinômio característico associado a P_0 é

$$p(\mu) = (\gamma - \mu) \left(-\beta \frac{\lambda}{a} - \mu \right).$$

Já para P_1 , o polinômio característico é dado por

$$p(\mu) = (-\gamma - \mu) \left(\beta \frac{K - \lambda}{a + K} - \mu \right).$$

Recordando que todos os parâmetros são positivos e $K > \lambda$, então as raízes do polinômio característico associado a P_0 são

$$\mu = \gamma \quad e \quad \mu = -\frac{\beta\lambda}{a},$$

e as do polinômio de P_1 ,

$$\mu = -\gamma \quad e \quad \mu = \beta \frac{K - \lambda}{a + K},$$

ou seja, selas, portanto em uma vizinhança de P_0 e em uma de P_1 , (1.2) é topologicamente conjugado a sua parte linear. A variedade estável de P_0 está sob $S = 0$ e a instável sob $x = 0$. Para P_1 a variedade estável está sob $x = 0$.

□

Para a demonstração do próximo lema será necessário o critério de Dulac, enunciado a seguir, [12].

Teorema 1.2.1. (Critério de Dulac) *Seja $f : E \rightarrow E$, de classe C^1 , E aberto, conexo e simplesmente conexo em \mathbb{R}^2 . Se existir uma função $B : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que, ou $\text{div}(Bf) < 0$ em E , ou $\text{div}(Bf) > 0$ em E , então $\dot{x} = f(x)$ não possui órbita fechada em E . Se A é uma região anular em E tal que ou $\text{div}(Bf) < 0$ em E , ou $\text{div}(Bf) > 0$ em E , então existe no máximo um ciclo limite de $\dot{x} = f(x)$ em A .*

Lema 1.2.4. *O ponto de equilíbrio P_2 possui as seguintes estabilidades:*

- se $\lambda < K < a + 2\lambda$, P_2 é atrator global em Ω ;
- se $K = a + 2\lambda$, P_2 é um foco atrator fraco e ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica, i.e, existe $\epsilon > 0$ tal que $a + 2\lambda < K < a + 2\lambda + \epsilon$, o sistema (1.2) apresenta uma órbita periódica atratora;
- se $K > a + 2\lambda$, P_2 é repulsor.

Demonstração. Aplicando P_2 em (1.6), obtém-se o seguinte polinômio característico

$$p(\mu) = \mu^2 + \mu \left[\frac{\gamma\lambda}{K} - \frac{\gamma\lambda}{a + \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) \right] + \frac{\beta\gamma\lambda}{a + \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right). \quad (1.7)$$

Para que as raízes de (1.7) possuam partes reais positivas é necessário que $K > a + 2\lambda$, pois

$$\frac{\gamma\lambda}{K} - \frac{\gamma\lambda}{a + \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) < 0$$

e assim P_2 é instável. No entanto, se $\lambda < K < a + 2\lambda$, então

$$\frac{\gamma\lambda}{K} - \frac{\gamma\lambda}{a + \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) > 0,$$

logo P_2 é estável. De fato, pode-se mostrar que para $\lambda < K < a + 2\lambda$, P_2 é globalmente assintoticamente estável, ou seja, sua bacia de atração é Ω . Para isso se utilizará o Critério

de Dulac. Seja a seguinte função

$$B(S, x) = \frac{a + S}{S} x^{\alpha-1},$$

onde α é um parâmetro a ser determinado. Quer-se calcular a $\text{div}(B(S, x)F(S, x))$, onde $F(S, x)$ é o campo de vetores (1.4). Assim

$$\text{div}(B(S, x)F(S, x)) = \frac{x^{\alpha-1}}{S} \left[-2\gamma \frac{S^2}{K} + S \left(\gamma - \frac{\gamma a}{K} + \alpha\beta \right) - \alpha\beta\lambda \right]. \quad (1.8)$$

Se se fizer

$$\alpha = \gamma \frac{K - a}{\beta K},$$

(1.8) fica

$$\text{div}(BF) = \frac{x^{\alpha-1}}{S} \left[-2\gamma \frac{S^2}{K} + 2S\gamma \left(1 - \frac{a}{K} \right) - \gamma\lambda \left(1 - \frac{a}{K} \right) \right].$$

Não é difícil ver que

$$-2\gamma \frac{S^2}{K} + 2S\gamma \left(1 - \frac{a}{K} \right) - \gamma\lambda \left(1 - \frac{a}{K} \right)$$

não possui raízes reais com $\lambda < K < a + 2\lambda$. Assim $\text{div}(BF) < 0$ em Ω e portanto não há órbitas periódicas em Ω , como as soluções de (1.2) tendem a um conjunto limitado em Ω , P_0 e P_1 são instáveis, tem-se por Poincaré-Bendixson, que P_2 é atrator global em Ω . Para $K = a + 2\lambda$, P_2 é um ponto de equilíbrio não hiperbólico, pois (1.7) possui raízes imaginárias puras, isto é, $\text{Re}(\mu) = 0$,

$$\mu = \pm i \left(\frac{\beta\gamma\lambda}{a + 2\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ao se calcular $d\text{Re}(\mu)/dK$, obtém-se para $K = a + 2\lambda$

$$\frac{d\text{Re}(\mu)}{dK} = \frac{\gamma\lambda}{(a + 2\lambda)} \left(1 + \frac{\lambda}{(a + \lambda)} \right) > 0$$

assim, a condição de transversalidade é satisfeita. Agora, para se mostrar que a bifurcação é supercrítica, isto é, o primeiro coeficiente de Liapunov é negativo, seja a função

$$V(y, z) = y^2 + Az^2 + p_3(y, z) + p_4(y, z),$$

onde

- $p_3(y, z) = \alpha_0 y^3 + \alpha_1 y^2 z + \alpha_2 y z^2 + \alpha_3 z^3$
- $p_4(y, z) = \theta_0 y^4 + \theta_1 y^3 z + \theta_2 y^2 z^2 + \theta_3 y z^3 + \theta_4 z^4$

Quer-se calcular

$$\dot{V}(y, z) = \frac{d}{dt} V(y(t), z(t)).$$

Seja a expansão em série de potências do campo (1.2) em torno do ponto P_2 , com $K = a + 2\lambda$ e transladada para a origem, ou seja,

$$y = S - \lambda \quad e \quad z = x - \frac{\gamma(a + \lambda)}{m} \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right),$$

assim

$$\begin{cases} \dot{y} = a_0 z + a_1 y^2 + a_2 y z + a_3 y^3 + a_4 y^2 z + O(4), \\ \dot{z} = b_0 y + b_1 y^2 + b_2 y z + b_3 y^3 + b_4 y^2 z + O(4), \end{cases} \quad (1.9)$$

onde,

- $a_0 = -\frac{m\lambda}{a + \lambda},$
- $a_1 = -\frac{\gamma\lambda}{(a + \lambda)(a + 2\lambda)},$
- $a_2 = -\frac{ma}{(a + \lambda)^2},$

- $a_3 = -\frac{\gamma a}{(a + \lambda)^2(a + 2\lambda)},$
- $a_4 = \frac{ma}{(a + \lambda)^3},$
- $b_0 = \frac{\beta\gamma(a + \lambda)}{m(a + 2\lambda)},$
- $b_1 = -\frac{\beta\gamma}{m(a + 2\lambda)},$
- $b_2 = \frac{\beta}{a + \lambda},$
- $b_3 = \frac{\beta\gamma}{m(a + \lambda)(a + 2\lambda)},$
- $b_4 = -\frac{\beta}{(a + \lambda)^2}.$

Deste modo, $\dot{V}(y, z) = \text{grad}V(y, z) \cdot F(y, z)$, sendo $F(y, z)$ dado por (1.9), fica

$$\begin{aligned}
 \text{grad}V(y, z) \cdot F(y, z) &= (2a_0yz + 2Ab_0yz) + \\
 &+ \left[a_0z \frac{\partial}{\partial y} p_3(y, z) + b_0y \frac{\partial}{\partial z} p_3(y, z) + 2y(a_1y^2 + a_2yz) + 2Az(b_1y^2b_2yz) \right] + \\
 &+ \left[a_0z \frac{\partial}{\partial y} p_4(y, z) + b_0y \frac{\partial}{\partial z} p_4(y, z) + (a_1y^2 + a_2yz) \frac{\partial}{\partial y} p_3(y, z) + \right. \\
 &+ \left. (b_1y^2 + b_2yz) \frac{\partial}{\partial z} p_3(y, z) + 2y(a_3y^3 + a_4y^2z) + 2Az(b_3y^3 + b_4y^2z) \right] + \\
 &+ O(5).
 \end{aligned}$$

Como se quer que $\text{grad}V(y, z) \cdot F(y, z) = G(y^2 + z^2)^2$, então, têm-se os seguintes sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a_0 + 2Ab_0 = 0 \Rightarrow A = -\frac{a_0}{b_0}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
2a_1 + b_0\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{2a_1}{b_0}, \\
a_0\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0, \\
3a_0\alpha_0 + 2a_2 + 2Ab_1 + 2b_0\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -\frac{2a_2 + 2Ab_1}{3a_0}, \\
2a_0\alpha_1 + 2Ab_2 + 3b_0\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{4a_0a_1}{3b_0^2} - \frac{2Ab_2}{3b_0}, \\
3a_1\alpha_0 + b_1\alpha_1 + b_0\theta_1 + 2a_3 = G, \\
2a_1\alpha_1 + 3a_2\alpha_0 + b_2\alpha_1 + 4a_0\theta_0 + 2b_0\theta_2 + 2a_4 = 0, \\
a_1\alpha_2 + 2a_2\alpha_1 + 3b_1\alpha_3 + 3a_0\theta_1 + 3b_0\theta_3 + 2Bb_4 = 2G, \\
3b_2\alpha_3 + 2a_0\theta_2 + 4b_0\theta_4 = 0, \\
a_0\theta_3 = G.
\end{array} \right. \quad (1.10)$$

Para que (1.10) possua solução

$$G = \frac{\frac{2a_1a_2}{b_0} + \frac{2a_0b_1b_2}{b_0^2} + \frac{4a_0a_1b_1}{b_0^2} - \frac{2a_0b_4}{b_0} - \frac{6a_0a_3}{b_0}}{2 - \frac{3b_0}{a_0} - \frac{3a_0}{b_0}}.$$

Substituindo os valores dos coeficientes, obtém-se

$$G = -\frac{\frac{4m^2\lambda}{\beta(a+\lambda)^3}}{2 + \frac{3m^2\lambda(a+2\lambda)}{\beta\gamma(a+\lambda)^2} + \frac{3\beta\gamma(a+\lambda)^2}{m^2\lambda(a+2\lambda)}}.$$

Como $(a_0, m_0, K_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0) \in \Theta$, então $G < 0$, portanto o ponto de equilíbrio P_2 é um foco atrator fraco. \square

Em suma, existe uma região de Θ , $a + 2\lambda < K < a + 2\lambda + \epsilon$ ($\epsilon > 0$), tal que existe um ciclo limite atrator no sistema (1.2). Biologicamente, a existência da órbita periódica significa a coexistência cíclica entre as espécies, e, por ser atratora, diz que para uma região do plano de fase, as espécies tendem a essa coexistência cíclica, sem a extinção delas, veja as Figuras 1.1 e 1.2.

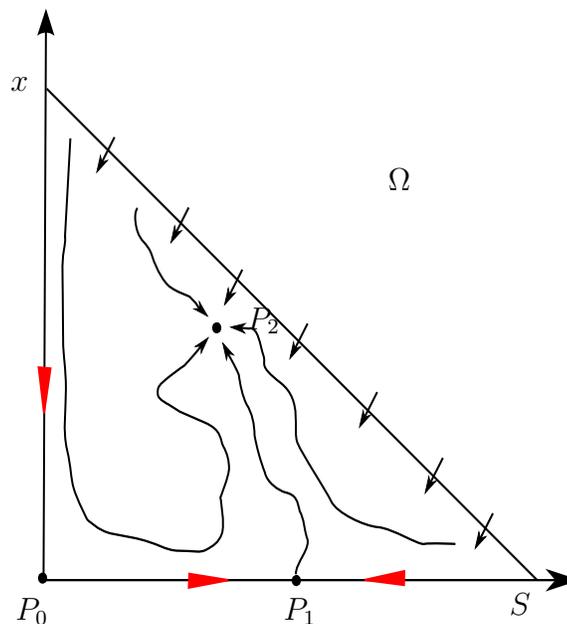


Figura 1.1: Retrato de fase para $\lambda < K < a + 2\lambda$.

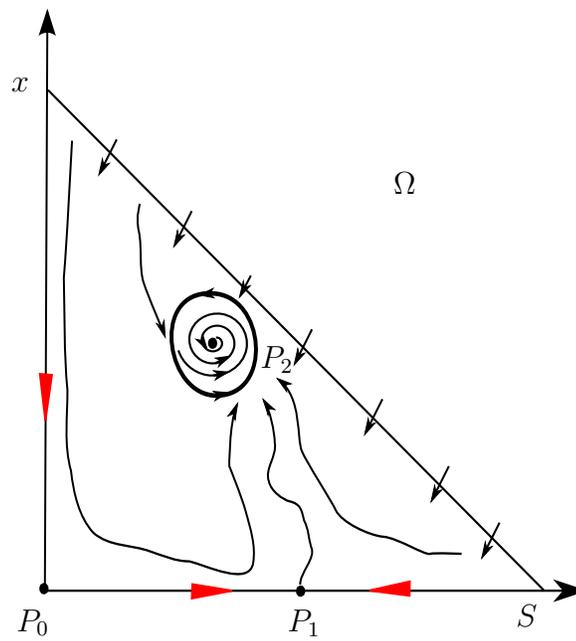


Figura 1.2: Retrato de fase para $a + 2\lambda < K < a + 2\lambda + \epsilon$.

Capítulo 2

Competição de dois predadores por uma presa

Neste capítulo será tratado um modelo de competição de predadores, ou seja, haverá dois predadores competindo por uma única presa. Matematicamente, o que se está fazendo é retomar o sistema estudado no Capítulo 1 e acrescentar a ele uma nova equação de predador e, conseqüentemente, um termo de encontro do segundo predador com a presa será colocado na equação da presa, obtendo assim um sistema tridimensional. É, portanto, natural perguntar quais resultados obtidos para o sistema (1.2) mantêm-se agora no novo sistema. Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S}(t) = \gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \frac{m_1 x_1(t) S(t)}{a_1 + S(t)} - \frac{m_2 x_2(t) S(t)}{a_2 + S(t)}, \\ \dot{x}_1(t) = \frac{m_1 x_1(t) S(t)}{a_1 + S(t)} - d_1 x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = \frac{m_2 x_2(t) S(t)}{a_2 + S(t)} - d_2 x_2(t). \end{array} \right. \quad (2.1)$$

onde

- $S(t)$ é a densidade populacional de presas num dado instante t ;
- $x_i(t)$ é a densidade populacional do i -ésimo predador num dado instante t ;
 $i = 1, 2$.

Observa-se que (2.1) é uma família de sistemas de equações diferenciais ordinárias não-lineares autônomas, dependendo de oito parâmetros. Por se tratar de um sistema biológico, $S(t) \geq 0$, $x_i(t) \geq 0$, $i = 1, 2$.

Os parâmetros presentes em (2.1) possuem os mesmos significados que em (1.1), lembrando-os:

- $\gamma > 0$ é a taxa de crescimento intrínseca da presa;
- $K > 0$ é a capacidade ambiental com respeito à presa;
- $m_i > 0$ é a taxa máxima de nascimento do i -ésimo predador;
- $d_i > 0$ é a taxa de mortalidade do i -ésimo predador;
- $a_i > 0$ é a constante de meia saturação para o i -ésimo predador;
 $i = 1, 2$.

Introduzindo novos parâmetros

$$\lambda_i = \frac{a_i d_i}{m_i - d_i}, i = 1, 2,$$

com o seguinte significado: x_i é crescente se e somente se $S > \lambda_i$, e conforme [6] e [7], o i -ésimo predador sobrevive apenas se $0 < \lambda_i < K$; $\beta_i = m_i - d_i$, $i = 1, 2$, $\beta_i > 0$; o sistema (2.1) assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = \gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \frac{m_1 x_1(t) S(t)}{a_1 + S(t)} - \frac{m_2 x_2(t) S(t)}{a_2 + S(t)}, \\ \dot{x}_1(t) = \beta_1 x_1(t) \frac{S(t) - \lambda_1}{a_1 + S(t)}, \\ \dot{x}_2(t) = \beta_2 x_2(t) \frac{S(t) - \lambda_2}{a_2 + S(t)}. \end{cases} \quad (2.2)$$

A seguir, estudar-se-ão os equilíbrios de (2.2). Ratifica-se que λ_i e β_i sempre são positivos, e para os estudos seguintes $K > \lambda_i$, $i = 1, 2$. A variável t estará subentendida, assim se escreverá S ou x_i ao invés de $S(t)$ e $x_i(t)$. O sistema (2.1) será denotado pelo campo vetorial $F : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ com

$$F(S, x_1, x_2) = \left(\gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S}, \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - d_1 x_1, \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} - d_2 x_2 \right) \quad (2.3)$$

e

$$\bar{\Omega} = \{(S, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : S \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Desse modo $\Omega = \{(S, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : S > 0, x_1 > 0, x_2 > 0\}$.

2.1 Pontos de Equilíbrio de (2.2)

Segue de aplicação direta, o seguinte lema.

Lema 2.1.1. *O sistema (2.2) apresenta os seguintes equilíbrios:*

1. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

(i) $P_0 = (0, 0, 0)$;

(ii) $P_1 = (K, 0, 0)$;

$$(iii) P_2 = \left(\lambda_1, \gamma \left(\frac{a_1 + \lambda_1}{m_1} \right) \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} \right), 0 \right);$$

$$(iv) P_3 = \left(\lambda_2, 0, \gamma \left(\frac{a_2 + \lambda_2}{m_2} \right) \left(1 - \frac{\lambda_2}{K} \right) \right).$$

2. Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$:

$$(i) P_0 = (0, 0, 0);$$

$$(ii) P_1 = (K, 0, 0);$$

$$(iii) L = \left\{ (S, x_1, x_2) \in \bar{\Omega} : S = \lambda, \frac{m_1 x_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2 x_2}{a_2 + \lambda} = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) \right\}.$$

Os equilíbrios são ilustrados nas Figuras 2.1 e 2.2.

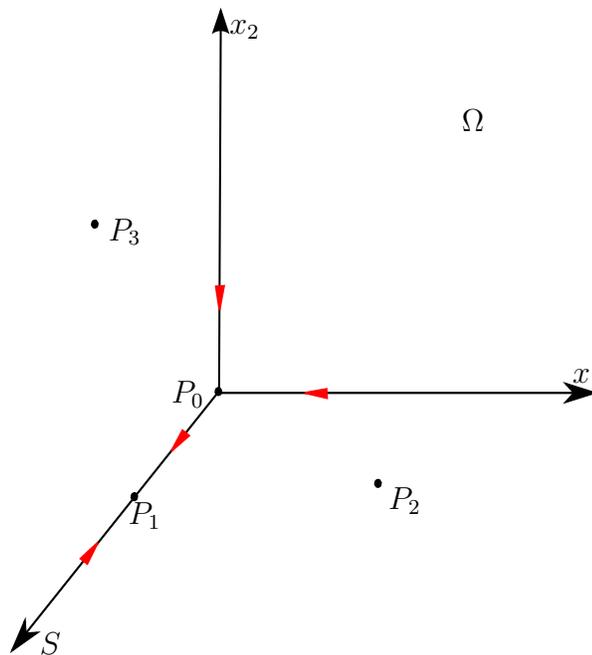


Figura 2.1: Pontos de equilíbrio para $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

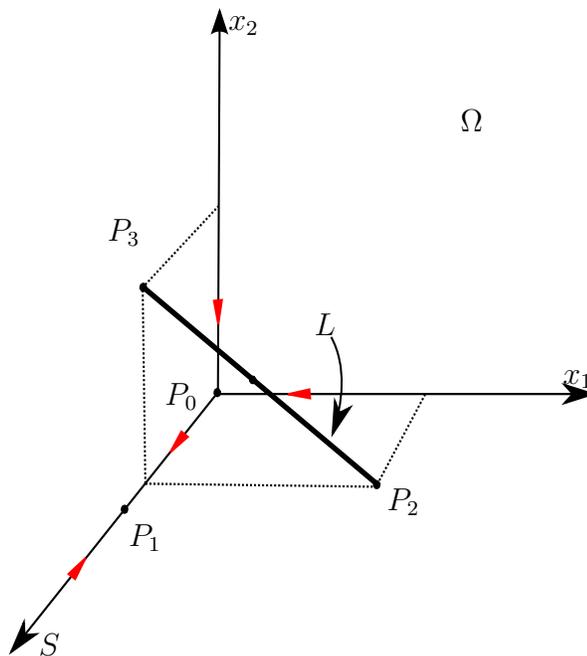


Figura 2.2: Pontos de equilíbrio para $\lambda_1 = \lambda_2$.

2.2 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio de (2.2)

Teorema 2.2.1. *Os planos $S = 0$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ são invariantes pelo fluxo do campo (2.3).*

Demonstração. De fato, será mostrado que $F(S, x_1, x_2) \cdot n = 0$ quando o campo $F(S, x_1, x_2)$, definido em (2.3), está restrito a esses planos. Assim

- $S = 0$:

$$\left(0, -\beta_1 x_1 \frac{\lambda_1}{a_1}, -\beta_2 x_2 \frac{\lambda_2}{a_2}\right) \cdot (1, 0, 0) = 0;$$

- $x_1 = 0$:

$$\left(\gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - m_2 \frac{S x_2}{a_2 + S}, 0, -\beta_2 x_2 \frac{\lambda_2}{a_2}\right) \cdot (0, 1, 0) = 0;$$

- $x_2 = 0$:

$$\left(\gamma S \left(1 - \frac{S}{K} \right) - m_1 \frac{Sx_1}{a_1 + S}, -\beta_1 x_1 \frac{\lambda_1}{a_1}, 0 \right) \cdot (0, 0, 1) = 0.$$

□

Teorema 2.2.2. *Toda solução de (2.2) com $(S_0, x_{10}, x_{20}) \in \Omega$ tende a um conjunto limitado em Ω .*

Demonstração. Seja o plano $S + x_1 + x_2 = c$, $c > 0$ e o vetor normal $n = (1, 1, 1)$. Assim

$$\begin{aligned} F(S, x_1, x_2) \cdot n &= \gamma S \left(1 - \frac{S}{K} \right) - d_1 - d_2 \leq \gamma K - \gamma S - d_1 x_1 - d_2 x_2 \leq \\ &\leq \gamma K - \delta_0 (S + x_1 + x_2) = \gamma K - \delta_0 c. \end{aligned}$$

Se $c > \frac{\gamma K}{\delta_0}$, onde $\delta_0 = \min\{\gamma, d_1, d_2\}$,

$$F(S, x_1, x_2) \cdot n < 0,$$

ou seja, para $t \rightarrow \infty$, as soluções de (2.2) ficam confinadas à $\Phi = \{(S, x_1, x_2) \in \Omega : S + x_1 + x_2 < c, c > \gamma K / \delta_0\}$. □

Os pontos P_0 e P_1 não têm suas estabilidades modificadas quando K , o parâmetro de bifurcação considerado neste estudo, varia em $]max\{\lambda_1, \lambda_2\}, +\infty[$. Logo, suas estabilidades são apresentadas no seguinte lema.

Lema 2.2.1. *Os pontos P_0 e P_1 são hiperbólicos, sendo, selas¹ 2-1 e 1-2, respectivamente.*

Demonstração. Seja a matriz Jacobiana de (2.2) para um ponto qualquer $(S, x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$

¹A notação utilizada é de *sela n-p*, ou seja, primeiro o número de autovalores com parte real negativa, e em segundo, os com parte real positiva.

$$J(S, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \gamma \left(1 - 2\frac{S}{K}\right) - \frac{a_1 m_1 x_1}{(a_1 + S)^2} - \frac{a_2 m_2 x_2}{(a_2 + S)^2} & -\frac{m_1 S}{a_1 + S} & -\frac{m_2 S}{a_2 + S} \\ \frac{\beta_1 x_1 (a_1 + \lambda_1)}{(a_1 + S)^2} & \beta_1 \frac{S - \lambda_1}{a_1 + S} & 0 \\ \frac{\beta_2 x_2 (a_2 + \lambda_2)}{(a_2 + S)^2} & 0 & \beta_2 \frac{S - \lambda_2}{a_2 + S} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Assim, os polinômios característicos para cada um dos pontos de equilíbrio em questão são:

1. P_0 :

$$p(\mu) = (\gamma - \mu) \left(-\frac{\beta_1 \lambda_1}{a_1} - \mu \right) \left(-\frac{\beta_2 \lambda_2}{a_2} - \mu \right);$$

2. P_1 :

$$p(\mu) = (-\gamma - \mu) \left(\beta_1 \frac{K - \lambda_1}{K + a_1} - \mu \right) \left(\beta_2 \frac{K - \lambda_2}{K + a_2} - \mu \right).$$

Portanto, P_0 é uma sela 2-1 e P_1 uma sela 1-2. Em uma vizinhança de P_0 e em uma de P_1 , (2.2) é localmente topologicamente conjugado a sua parte linear. A variedade estável de P_0 é gerada por $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ e a instável por $(1, 0, 0)$. Para P_1 a variedade estável está sob o eixo S . Nota-se que como adotou-se $K > \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, pois deseja-se que os dois predadores sobrevivam, ao se variar K , as estabilidades de P_0 e P_1 não são alteradas. \square

Nas próximas subseções, estudar-se-ão os pontos P_2 e P_3 , e o segmento de equilíbrio L .

2.2.1 Caso: $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Ao se variar os parâmetros λ_1 e λ_2 , as estabilidades de P_2 e P_3 são modificadas, ocorrendo bifurcações de Hopf, resgatando o resultado encontrado no Capítulo 1, caso predador-presa

(bidimensional). O resultado mais interessante é referente a coexistência de duas órbitas periódicas atratoras nos planos $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.

O próximo lema segue de aplicação direta do seguinte teorema, devido a Pontriagin, [13].

Teorema 2.2.3. *Seja o polinômio $p(\mu) = \mu^3 + a\mu^2 + b\mu + c$, esse é estável, isto é, todas as suas raízes têm partes reais negativas, se e somente se, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ e $ab > c$.*

Lema 2.2.2. *As seguintes afirmações são verificadas:*

- Se $\lambda_1 < \lambda_2$ e $\lambda_1 < K < a_1 + 2\lambda_1$, então o polinômio característico associado a matriz Jacobiana de P_2 é estável.
- Se $\lambda_2 < \lambda_1$ e $\lambda_2 < K < a_2 + 2\lambda_2$, então o polinômio característico associado a matriz Jacobiana de P_3 é estável.

Demonstração. Aplicando P_2 e P_3 na matriz Jacobiana (2.4), obtêm-se os seguintes polinômios e verificam-se as desigualdades solicitadas:

- P_2 :

$$\begin{aligned} p(\mu) &= \mu^3 + \mu^2 \left\{ \gamma\lambda_1 \left[\frac{1}{K} - \frac{1}{a_1 + \lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} \right) \right] + \beta_2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a_2 + \lambda_1} \right\} \\ &+ \mu \left\{ \left[-\frac{\gamma\lambda_1}{K} + \frac{\gamma\lambda_1}{a_1 + \lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} \right) \right] \beta_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_2 + \lambda_1} + \frac{\gamma\lambda_1\beta_1}{a_1 + \lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} \right) \right\} + \\ &\frac{\gamma\lambda_1\beta_1\beta_2}{(a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)} \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} \right) (\lambda_2 - \lambda_1). \end{aligned}$$

Como todos os parâmetros são positivos, se $\lambda_1 < \lambda_2$ e $\lambda_1 < K < a_1 + 2\lambda_1$, então

$$\left\{ \gamma\lambda_1 \left[\frac{1}{K} - \frac{1}{a_1 + \lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} \right) \right] + \beta_2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a_2 + \lambda_1} \right\} > 0;$$

$$\left\{ \left[-\frac{\gamma\lambda_1}{K} + \frac{\gamma\lambda_1}{a_1 + \lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} \right) \right] \beta_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_2 + \lambda_1} + \frac{\gamma\lambda_1\beta_1}{a_1 + \lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} \right) \right\} > 0;$$

$$\frac{\gamma\lambda_1\beta_1\beta_2}{(a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)} \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} \right) (\lambda_2 - \lambda_1) > 0;$$

e essas mesmas condições asseguram que

$$\begin{aligned} & \left\{ \gamma\lambda_1 \left[\frac{1}{K} - \frac{1}{a_1 + \lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} \right) \right] + \beta_2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a_2 + \lambda_1} \right\} \\ & \cdot \left\{ \left[-\frac{\gamma\lambda_1}{K} + \frac{\gamma\lambda_1}{a_1 + \lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} \right) \right] \beta_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_2 + \lambda_1} + \frac{\gamma\lambda_1\beta_1}{a_1 + \lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} \right) \right\} > \\ & > \frac{\gamma\lambda_1\beta_1\beta_2}{(a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)} \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} \right) (\lambda_2 - \lambda_1). \end{aligned}$$

• P_3 :

$$\begin{aligned} p(\mu) &= \mu^3 + \mu^2 \left\{ \gamma\lambda_2 \left[\frac{1}{K} - \frac{1}{a_2 + \lambda_2} \left(1 - \frac{\lambda_2}{K} \right) \right] + \beta_1 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_1 + \lambda_2} \right\} \\ &+ \mu \left\{ \gamma\lambda_2 \left[-\frac{1}{K} + \frac{1}{a_2 + \lambda_2} \left(1 - \frac{\lambda_2}{K} \right) \right] \left(\beta_1 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a_1 + \lambda_2} \right) + \frac{\gamma\lambda_2\beta_2}{a_2 + \lambda_2} \left(1 - \frac{\lambda_2}{K} \right) \right\} + \\ & \frac{\gamma\lambda_2\beta_1\beta_2}{(a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)} \left(1 - \frac{\lambda_2}{K} \right) (\lambda_1 - \lambda_2). \end{aligned}$$

De maneira análoga a P_2 , se $\lambda_2 < \lambda_1$ e $\lambda_2 < K < a_2 + 2\lambda_2$, há as seguintes desigualdades:

$$\left\{ \gamma\lambda_2 \left[\frac{1}{K} - \frac{1}{a_2 + \lambda_2} \left(1 - \frac{\lambda_2}{K} \right) \right] + \beta_1 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_1 + \lambda_2} \right\} > 0;$$

$$\left\{ \gamma \lambda_2 \left[-\frac{1}{K} + \frac{1}{a_2 + \lambda_2} \left(1 - \frac{\lambda_2}{K} \right) \right] \left(\beta_1 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a_1 + \lambda_2} \right) + \frac{\gamma \lambda_2 \beta_2}{a_2 + \lambda_2} \left(1 - \frac{\lambda_2}{K} \right) \right\} > 0;$$

$$\frac{\gamma \lambda_2 \beta_1 \beta_2}{(a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)} \left(1 - \frac{\lambda_2}{K} \right) (\lambda_1 - \lambda_2) > 0$$

e

$$\left\{ \gamma \lambda_2 \left[\frac{1}{K} - \frac{1}{a_2 + \lambda_2} \left(1 - \frac{\lambda_2}{K} \right) \right] + \beta_1 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_1 + \lambda_2} \right\}.$$

$$\cdot \left\{ \gamma \lambda_2 \left[-\frac{1}{K} + \frac{1}{a_2 + \lambda_2} \left(1 - \frac{\lambda_2}{K} \right) \right] \left(\beta_1 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a_1 + \lambda_2} \right) + \frac{\gamma \lambda_2 \beta_2}{a_2 + \lambda_2} \left(1 - \frac{\lambda_2}{K} \right) \right\} >$$

$$\frac{\gamma \lambda_2 \beta_1 \beta_2}{(a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)} \left(1 - \frac{\lambda_2}{K} \right) (\lambda_1 - \lambda_2).$$

□

Lema 2.2.3. *Se $K = a_1 + 2\lambda_1$, ocorre uma bifurcação de Hopf em P_2 , i.e, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $a_1 + 2\lambda_1 < K < a_1 + 2\lambda_1 + \epsilon_1$, o sistema (2.2) apresenta uma órbita periódica atratora em $x_2 = 0$.*

Lema 2.2.4. *Se $K = a_2 + 2\lambda_2$, ocorre uma bifurcação de Hopf em P_3 , i.e, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $a_2 + 2\lambda_2 < K < a_2 + 2\lambda_2 + \epsilon_2$, o sistema (2.2) apresenta uma órbita periódica atratora em $x_1 = 0$.*

As demonstrações dos Lemas 2.2.3 e 2.2.4 são análogas à do Lema 1.2.4, pois as órbitas periódicas estão restritas aos planos $x_2 = 0$ e $x_1 = 0$, respectivamente.

A coexistência das órbitas é possível, se ocorrer a igualdade $K = a_1 + 2\lambda_1 + \epsilon = a_2 + 2\lambda_2 + \epsilon$, $\epsilon > 0$ é tal que $\epsilon < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, ilustrado na Figura 2.2.1. Outro aspecto a ser ressaltado, é que os pontos não podem ser simultaneamente estáveis, devido ao Lema 2.2.2. Portanto, é natural o seguinte enunciado.

Teorema 2.2.4. *Se $K = a_1 + 2\lambda_1 = a_2 + 2\lambda_2$, ocorre uma bifurcação de Hopf em P_2 e em P_3 , i.e, existe $\epsilon > 0$ tal que $a_1 + 2\lambda_1 < K < a_1 + 2\lambda_1 + \epsilon$ (ou, equivalentemente, $a_2 + 2\lambda_2 < K < a_2 + 2\lambda_2 + \epsilon$), o sistema (2.2) apresenta duas órbitas periódicas atratoras, uma em $x_2 = 0$ e a outra em $x_1 = 0$, respectivamente.*

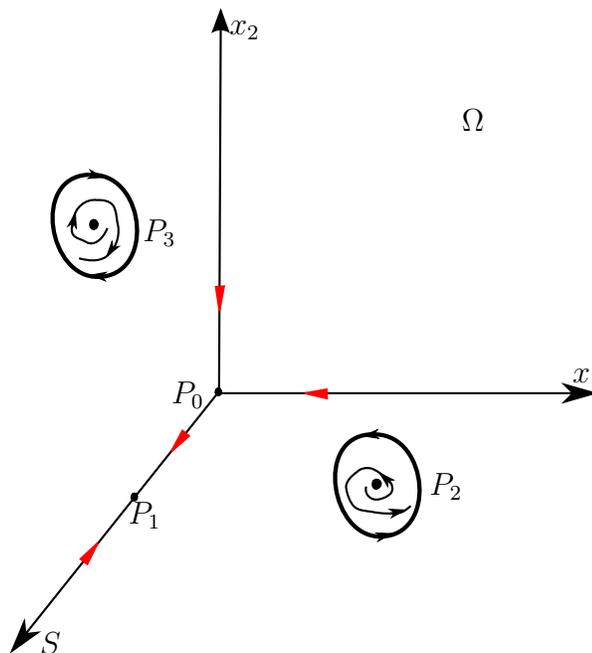


Figura 2.3: Pontos de equilíbrio para $\lambda_1 = \lambda_2$ e $a_1 + 2\lambda_1 < K < a_1 + 2\lambda_1 + \epsilon$ (ou, equivalentemente, $a_2 + 2\lambda_2 < K < a_2 + 2\lambda_2 + \epsilon$).

Ao se obter a igualdade entre λ_1 e λ_2 , poderão ocorrer dois tipos de bifurcações, visto que há agora um segmento de reta de equilíbrio para o sistema (2.2). Para a bifurcação *zip*, $a_1 \neq a_2$, há uma parte estável e outra instável do segmento de reta, separados por um ponto P_C , como será discutido em outra seção, essas partes serão determinadas pelas desigualdades entre a_1 e a_2 . Com a igualdade $a_1 = a_2$, o segmento de reta terá sempre a mesma estabilidade.

Uma questão a ser estudada posteriormente é se há outras órbitas periódicas no pri-

meiro octante, que não estejam restritas aos planos $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$. Uma resposta afirmativa, encontra-se em [10]. Mas será possível enumerar a quantidade de órbitas? Teriam todas a mesma estabilidade?

2.2.2 Caso 2: $\lambda_1 = \lambda_2$ e $a_1 = a_2$

Devido às igualdades, far-se-á $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e $a_1 = a_2 = a$. É válido lembrar que os pontos P_0 e P_1 possuem a mesma estabilidade de quando $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Assim, quer-se agora estudar a estabilidade de L , que assume a seguinte forma:

$$L = \left\{ (S, x_1, x_2) \in \bar{\Omega} : S = \lambda, \frac{m_1 x_1}{a + \lambda} + \frac{m_2 x_2}{a + \lambda} = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) \right\}. \quad (2.5)$$

Seja a função

$$\begin{aligned} H : \bar{\Omega} - \{x_1 = 0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (S, x_1, x_2) &\longmapsto H(S, x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1^\rho}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde

$$\rho = \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

e $\rho \geq 1$.

O seguinte teorema garante que $H = c$ define uma superfície implicitamente, demonstração ver [9].

Teorema 2.2.5. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ aberto e $H : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aplicação de classe C^k . Seja $c \in \mathbb{R}^n$. Consideremos o conjunto*

$$M_c = \{p \in U : H(p) = c \text{ e a transformação linear } dH_p : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ é sobrejetora}\}.$$

Então,

1. M_c é aberto em $H^{-1}(c) = \{p \in U : H(p) = c\}$.

2. Supondo que M_c é não vazio, M_c é superfície de dimensão m e de classe C^k do \mathbb{R}^{m+n} , e
3. $T_p M_c = \text{Ker}(dH_p)$ para todo $p \in M_c$.

Lema 2.2.5. *As superfícies de nível de H definida em (2.6) folheiam Ω , isto é, dado $(S', x'_1, x'_2) \in \Omega$, existe $c > 0$ tal que $H(S', x'_1, x'_2) = c$.*

Demonstração. Seja $(S', x'_1, x'_2) \in \Omega$, como H independe de S , defina $c = x'_2/x_1'^\rho$. Denotando $H^{-1}(c) = \{(S, x_1, x_2) \in \Omega : H(S, x_1, x_2) = c\}$. Assim $(S', x'_1, x'_2) \in H^{-1}(c)$. Veja as Figuras 2.4, 2.5 e 2.6.

□

Lema 2.2.6. *Sejam L e H , tais como em (2.5) e (2.6), respectivamente. Então L é transversal a $H^{-1}(c)$, para todo $c > 0$.*

Demonstração. Como H independe de S , mostrar-se-á que as projeções de $H = c$ e a de L no plano $x_1 x_2$ possuem um único ponto de intersecção transversal, tal como nas Figuras 2.7 e 2.8. Para isso, como a equação de L projetada é $x_2 = -ax_1 + b$, $a > 0$ e $b > 0$, e a de $H^{-1}(c)$ é $x_2 = cx_1^\rho$, basta mostrar que $f(x_1) = cx_1^\rho + ax_1 - b$ se anula em um único ponto. Isso é consequência do Teorema do Valor Médio. Denotando o ponto de intersecção de L com $H = c$ por (λ, ξ_1, ξ_2) , ξ_1 é a única solução positiva de

$$\xi_1 + \rho c \xi_1^\rho = \frac{\gamma(a + \lambda)}{m_1} \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) \quad (2.7)$$

e $\xi_2 = c \xi_1^\rho$.

□

O próximo lema garante que H é integral primeira de (2.2), visto que $\lambda_1 = \lambda_2$ e $a_1 = a_2$.

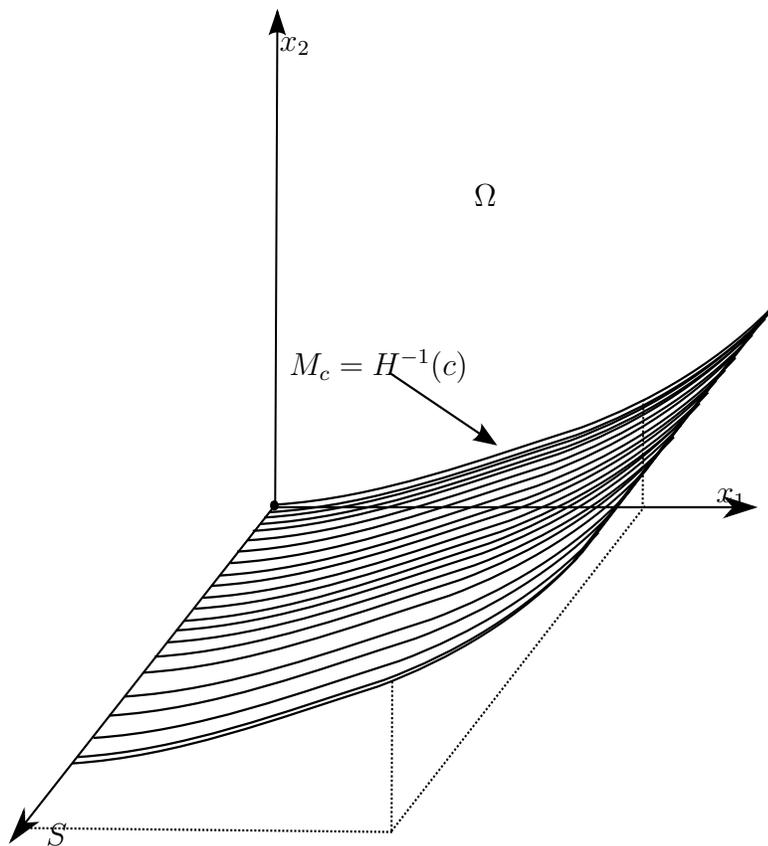


Figura 2.4: A superfície de nível $H^{-1}(c)$.

Lema 2.2.7. Para todo $c > 0$, $M_c = H^{-1}(c)$ é uma superfície invariante pelo fluxo de (2.2).

Demonstração. De fato, para cada $P \in H^{-1}(c)$, $F(P) \in T_P M_c$, sendo $T_P M_c$ o espaço tangente a M_c em P . Como M_c é dada pela imagem inversa de valor regular, $T_P M_c = \text{Ker}(dH_P)$, onde $dH_P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é a diferencial de H em P . Calculando-se $dH_P(F(P)) = \text{grad}H(S, x_1, x_2) \cdot F(S, x_1, x_2)$:

$$\left(0, -\frac{\rho x_1}{x_1^{\rho+1}}, \frac{1}{x_1^\rho}\right) \cdot \left(\gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{m_1 x_1 S}{a+S} - \frac{m_2 x_2 S}{a+S}, \beta_1 x_1 \frac{S-\lambda}{a+S}, \beta_2 x_2 \frac{S-\lambda}{a+S}\right) = 0.$$

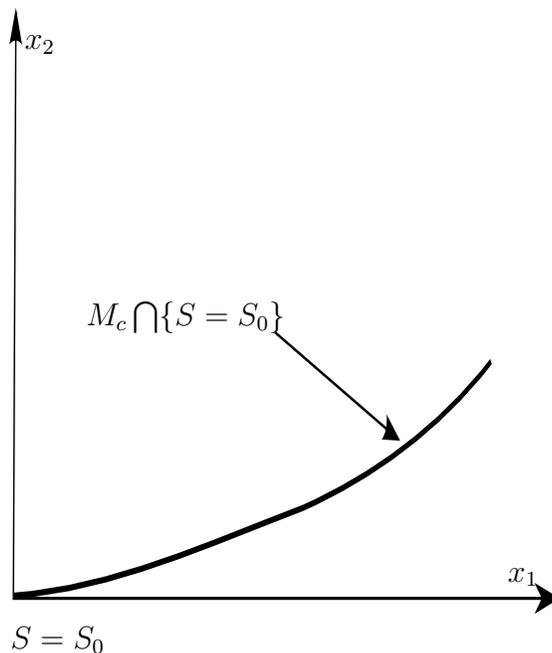


Figura 2.5: Projeção da superfície de nível $H^{-1}(c)$ no plano $\{S = S_0\}$.

Portanto, o campo é tangente a $H = c$, desse modo, soluções de (2.2) com condições iniciais em H estão restritas a H . \square

Teorema 2.2.6. *O ponto de equilíbrio $(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L$ possui a seguinte estabilidade com relação ao fluxo de (2.2) restrito à superfície $H^{-1}(c)$, onde $c = H(\lambda, \xi_1, \xi_2)$:*

- se $\lambda < K < a + 2\lambda$, (λ, ξ_1, ξ_2) é atrator;
- se $K = a + 2\lambda$, (λ, ξ_1, ξ_2) é foco atrator fraco e ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica, i.e, existe $\epsilon > 0$ tal que $a + 2\lambda < K < a + 2\lambda + \epsilon$, o sistema (2.2) apresenta uma órbita periódica atratora;
- se $K > a + 2\lambda$, (λ, ξ_1, ξ_2) é repulsor.

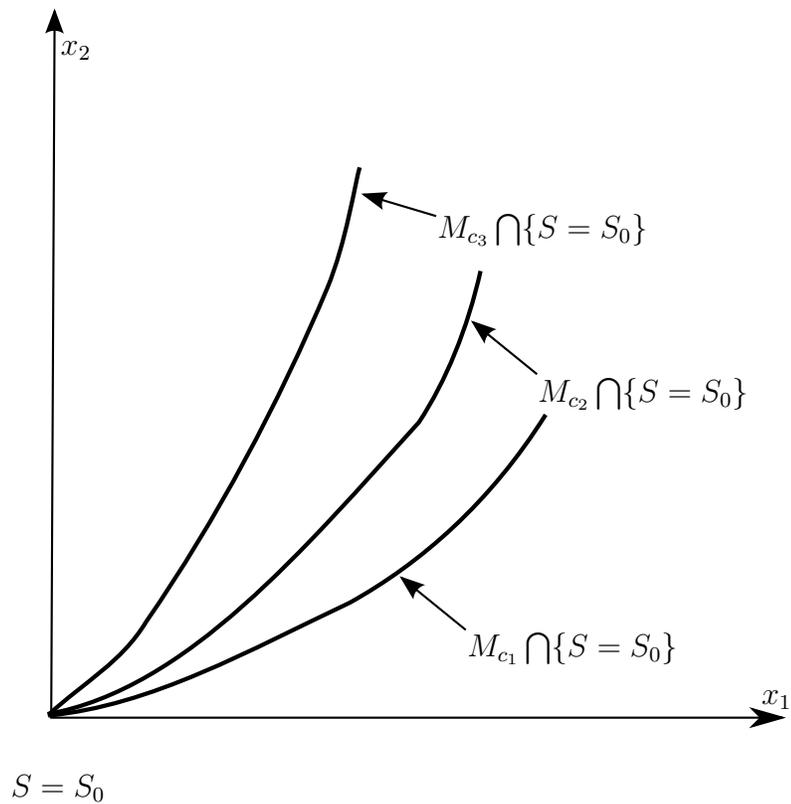


Figura 2.6: $H^{-1}(c)$ no plano $\{S = S_0\}$, para $c \in \{c_1, c_2, c_3\}$.

Demonstração. Como, para todo $c > 0$, $H^{-1}(c)$ é invariante pelo fluxo de (2.2), seja a restrição de (2.2) a M_c

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S \left(1 - \frac{1}{K}\right) - \frac{(x_1 + \rho c x_1^\rho) m_1 S}{a + S}, \\ \dot{x}_1 = \beta_1 x_1 \frac{S - \lambda}{a + S}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Seja a translação dada por $y = S - \lambda$ e $z = x_1 - \xi_1$, onde ξ_1 é a solução de (2.7) que pode ser reescrita como

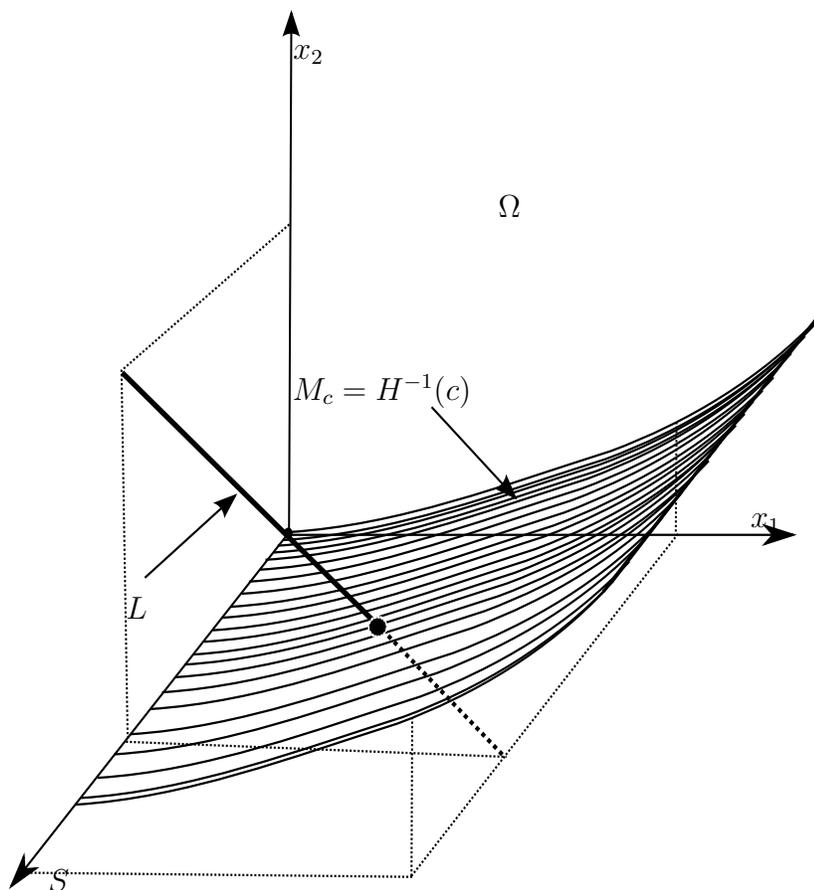


Figura 2.7: Intersecção de $H^{-1}(c)$ e L .

$$\rho c = \frac{\frac{\gamma(a + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K} - \xi_1}{\xi_1^\rho}. \quad (2.9)$$

Utilizando a mudança de coordenadas e (2.9), o sistema (2.8) assumirá a seguinte forma

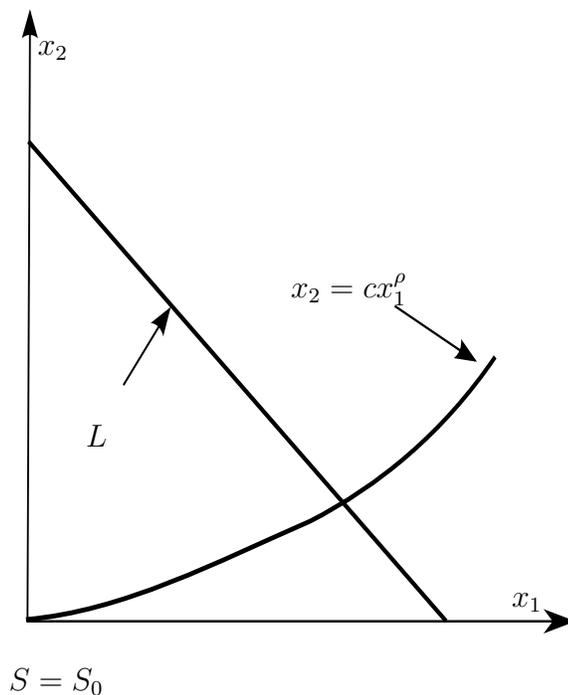


Figura 2.8: Projeção no plano $\{S = S_0\}$ de $H^{-1}(c)$ e L .

$$\begin{cases} \dot{y} = \gamma(y + \lambda) \left(1 - \frac{y + \lambda}{K}\right) - \frac{m_1(y + \lambda)}{y + a + \lambda} \left[z + \xi_1 + \left(\frac{\gamma(a + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K \xi_1^\rho} - \frac{1}{\xi_1^{\rho-1}} \right) (z + \xi_1)^\rho \right], \\ \dot{z} = \beta_1 y \frac{(z + \xi_1)}{a + \lambda + y}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Assim, quando $(y, z) = (0, 0)$, equilíbrio de (2.10), o ponto de equilíbrio estudado é o $(\lambda, \xi_1, x_2 = c\xi_1^\rho)$. Seja a matriz Jacobiana de (2.10) aplicada na origem

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma\lambda}{K(a+\lambda)}(K-a-2\lambda) & -\frac{m_1\lambda}{a+\lambda} \left[1 - \rho + \rho \left(\frac{\gamma(a+\lambda)(K-\lambda)}{m_1K\xi_1} \right) \right] \\ \frac{\beta_1\xi_1}{a+\lambda} & 0 \end{bmatrix}.$$

Desse modo o polinômio característico associado é

$$p(\mu) = \mu^2 + \frac{\gamma\lambda}{K(a+\lambda)}(a+2\lambda-K)\mu + \frac{m_1\lambda\beta_1\xi_1}{(a+\lambda)^2} \left[1 - \rho + \frac{\gamma(a+\lambda)(K-\lambda)}{m_1K\xi_1} \right] \quad (2.11)$$

Nessas condições, se $\lambda < K < a+2\lambda$ a origem é assintoticamente estável. Já se $K > a+2\lambda$, ela é instável. Para $K = a+2\lambda$, (λ, ξ_1, ξ_2) é ponto não hiperbólico, ou seja, suas raízes são imaginárias puras

$$\mu = \pm \frac{i}{a+\lambda} \left[m_1\lambda\beta_1\xi_1 \left(1 - \rho + \frac{\rho\gamma(a+\lambda)^2}{m_1\xi_1(a+2\lambda)} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ao se calcular

$$\frac{dRe(\mu)}{dK},$$

obtém-se para $K = a+2\lambda$

$$\frac{dRe(\mu)}{dK} = \frac{\gamma\lambda}{(a+\lambda)(a+2\lambda)} > 0$$

e portanto a condição de transversalidade é satisfeita. Para se mostrar que a bifurcação é supercrítica precisa-se calcular o primeiro coeficiente de Liapunov. Assim, seja a expansão em série de potências de (2.10) em torno de $(0,0)$ com $K = a+2\lambda$

$$\begin{cases} \dot{y} = a_0z + a_1y^2 + a_2yz + a_3z^2 + a_4y^3 + a_5y^2z + a_6yz^2 + a_7z^3 + O(4), \\ \dot{z} = b_0y + b_1y^2 + b_2yz + b_3y^3 + b_4y^2z + O(4), \end{cases} \quad (2.12)$$

onde

- $a_0 = -\frac{\lambda m_1}{a + \lambda} (1 + \rho^2 c \xi_1^{\rho-1});$
- $a_1 = -\frac{\gamma \lambda}{(a + \lambda)(a + 2\lambda)};$
- $a_2 = -\frac{a m_1}{(a + \lambda)^2} (1 + \rho^2 c \xi_1^{\rho-1});$
- $a_3 = -\frac{\lambda \rho (\rho - 1)}{2 \xi_1^2 (a + \lambda)} m_1 \rho c \xi_1^\rho;$
- $a_4 = -\frac{a \gamma}{(a + \lambda)^2 (a + 2\lambda)};$
- $a_5 = \frac{a m_1}{(a + \lambda)^3} (1 + \rho^2 c \xi_1^{\rho-1});$
- $a_6 = -\frac{a \rho (\rho - 1)}{2 \xi_1^2 (a + \lambda)^2} m_1 \rho c \xi_1^\rho;$
- $a_7 = -\frac{\lambda \rho (\rho - 1) (\rho - 2)}{6 \xi_1^3} m_1 \rho c \xi_1^\rho;$
- $b_0 = \frac{\beta_1 \xi_1}{a + \lambda};$
- $b_1 = -\frac{\beta_1 \xi_1}{(a + \lambda)^2};$
- $b_2 = \frac{\beta_1}{a + \lambda};$
- $b_3 = \frac{\beta_1 \xi_1}{a + \lambda};$

- $b_4 = -\frac{\beta_1}{(a + \lambda)^2}$.

Seja a função

$$V(y, z) = y^2 + Bz^2 + p_3(y, z) + p_4(y, z),$$

onde

- $p_3(y, z) = \alpha_0 y^3 + \alpha_1 y^2 z + \alpha_2 y z^2 + \alpha_3 z^3$,
- $p_4(y, z) = \theta_0 y^4 + \theta_1 y^3 z + \theta_2 y^2 z^2 + \theta_3 y z^3 + \theta_4 z^4$.

Quer-se calcular $\dot{V}(y, z)$, ou seja, $\dot{V}(y, z) = \text{grad}V(y, z) \cdot F(y, z)$, onde $F(y, z)$ é o campo (2.12), assim:

$$\begin{aligned} \text{grad}V(y, z) \cdot F(y, z) &= (2a_0 y z + 2B b_0 y z) + \\ &+ \left[a_0 z \frac{\partial}{\partial y} p_3(y, z) + b_0 y \frac{\partial}{\partial z} p_3(y, z) + 2y(a_1 y^2 + a_2 y z + a_3 z^2) + 2B z(b_1 y^2 + b_2 y z) \right] + \\ &+ \left[a_0 z \frac{\partial}{\partial y} p_4(y, z) + b_0 y \frac{\partial}{\partial z} p_4(y, z) + (a_1 y^2 + a_2 y z + a_3 z^2) \frac{\partial}{\partial y} p_3(y, z) + \right. \\ &+ \left. (b_1 y^2 + b_2 y z) \frac{\partial}{\partial z} p_3(y, z) + 2y(a_4 y^3 + a_5 y^2 z + a_6 y z^2 + a_7 z^3) + 2B z(b_3 y^3 + b_4 y^2 z) \right] + \\ &+ O(5). \end{aligned}$$

Como se quer que $\text{grad}V(y, z) \cdot F(y, z) = G(y^2 + z^2)^2$, então, têm-se os seguintes sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a_0 + 2B b_0 = 0 \Rightarrow B = -\frac{a_0}{b_0}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a_1 + b_0\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{2a_1}{b_0}, \\ a_0\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0, \\ 3a_0\alpha_0 + 2a_2 + 2Bb_1 + 2b_0\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -\frac{2a_2 + 2Bb_1}{3a_0}, \\ 2a_0\alpha_1 + 2Bb_2 + 3b_0\alpha_3 + 2a_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{4a_0a_1}{3b_0^2} - \frac{2Bb_2}{3b_0} - \frac{2a_3}{3b_0}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3a_1\alpha_0 + b_1\alpha_1 + b_0\theta_1 + 2a_4 = G, \\ 2a_1\alpha_1 + 3a_2\alpha_0 + b_2\alpha_1 + 4a_0\theta_0 + 2b_0\theta_2 + 2a_5 = 0, \\ a_1\alpha_2 + 2a_2\alpha_1 + 3a_3\alpha_0 + 3b_1\alpha_3 + 3a_0\theta_1 + 3b_0\theta_3 + 2Bb_4 + 2a_6 = 2G, \\ 2a_3\alpha_1 + 3b_2\alpha_3 + 2a_0\theta_2 + 4b_0\theta_4 + 2a_7 = 0, \\ a_0\theta_3 = G. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Para que (2.13) possua solução

$$G = \frac{\frac{2a_1a_2}{b_0} - \frac{2a_2a_3}{a_0} + \frac{2a_0b_1b_2}{b_0^2} + \frac{4a_0a_1b_1}{b_0^2} - \frac{2a_0b_4}{b_0} - \frac{6a_0a_3}{b_0} + 2a_6}{2 - \frac{3b_0}{a_0} - \frac{3a_0}{b_0}}.$$

Substituindo os valores dos coeficientes, obtém-se

$$G = - \frac{\frac{4m_1\lambda\gamma(1 + \rho^2 c\xi_1^{\rho-1})}{\beta\xi_1(a + \lambda)^2(a + 2\lambda)}}{2 + \frac{3\beta_1\xi_1}{m_1\lambda(1 + \rho^2 c\xi_1^{\rho-1})} + \frac{3m_1\lambda(1 + \rho^2 c\xi_1^{\rho-1})}{\beta_1\xi_1}}.$$

Portanto $G < 0$, e o ponto $(0, 0)$ é um foco atrator fraco. \square

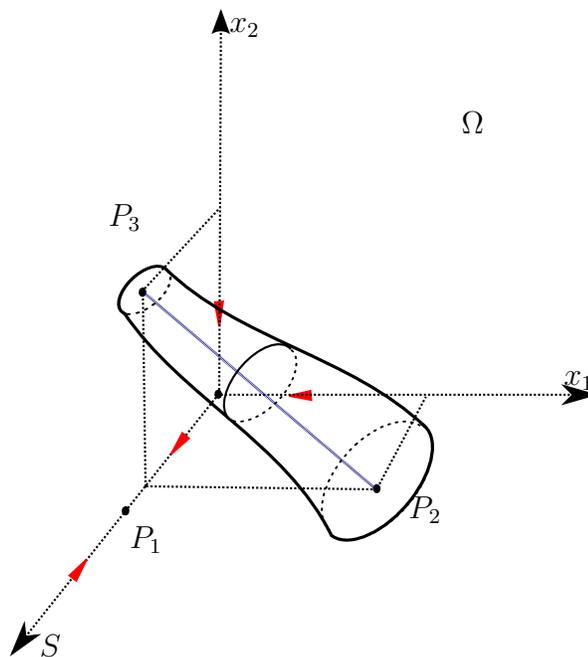


Figura 2.9: Cilindros de órbitas periódicas atratoras para $\lambda_1 = \lambda_2$ e $a_1 = a_2$.

Como o resultado do Teorema 2.2.6 vale para todo ponto $(\lambda, \xi_1, c\xi_1^\rho) \in L$, decorre imediatamente dele o seguinte abuso de linguagem, ilustrado na Figura 2.9.

Corolário 2.2.7. *L possui a seguinte estabilidade para o fluxo de (2.2) restrito a $H^{-1}(c)$.*

- Se $\lambda < K \leq a + 2\lambda$, L é assintoticamente estável;
- Se $K > a + 2\lambda$, L é instável.

2.2.3 Caso 3: $\lambda_1 = \lambda_2$ e $a_1 \neq a_2$

Para a situação em que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e $a_1 \neq a_2$, o segmento de equilíbrio L ainda persiste, no entanto, aparece nele uma outra bifurcação, a *zip*, tendo K como o parâmetro de bifurcação.

Sem perda de generalidade, suponha que $a_1 > a_2$. Sejam $(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L$,

$$L = \left\{ (S, x_1, x_2) \in \bar{\Omega}, S = \lambda, \frac{m_1 x_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2 x_2}{a_2 + \lambda} = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) \right\}$$

e a respectiva matriz Jacobiana

$$J(\lambda, \xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma\lambda}{K} + \lambda \left(\frac{m_1 \xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} \right) & -\frac{m_1 \lambda}{a_1 + \lambda} & -\frac{m_2 \lambda}{a_2 + \lambda} \\ \frac{\beta_1 \xi_1}{a_1 + \lambda} & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2 \xi_2}{a_2 + \lambda} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, seu polinômio característico associado é

$$p(\mu) = -\mu \left[\mu^2 + \mu \left(\frac{\gamma\lambda}{K} - \frac{m_1 \xi_1 \lambda}{(a_1 + \lambda)^2} - \frac{m_2 \xi_2 \lambda}{(a_2 + \lambda)^2} \right) + \frac{m_1 \beta_1 \xi_1 \lambda}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \beta_2 \xi_2 \lambda}{(a_2 + \lambda)^2} \right]. \quad (2.14)$$

Como um dos autovalores é sempre nulo, resta analisar os outros dois.

Lema 2.2.8. *Se $\lambda < K < a_2 + 2\lambda$, então (2.14) possui duas raízes com partes reais negativas.*

Demonstração. Para que (2.14) possua duas raízes com partes reais negativas é necessário que

$$\frac{\gamma\lambda}{K} - \frac{m_1\xi_1\lambda}{(a_1 + \lambda)^2} - \frac{m_2\xi_2\lambda}{(a_2 + \lambda)^2} > 0,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\gamma}{K} > \frac{m_1\xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2\xi_2}{(a_2 + \lambda)^2}.$$

Como $\lambda < K < a_2 + 2\lambda$, e usando L , ocorrem as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{m_1\xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2\xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} &\leq \frac{1}{a_2 + \lambda} \left[\frac{m_1\xi_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2\xi_2}{a_2 + \lambda} \right] = \\ &\frac{\gamma}{a_2 + \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) < \frac{\gamma}{a_2 + \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{a_2 + 2\lambda} \right) < \frac{\gamma}{K}, \end{aligned}$$

ou seja, $\lambda < K < a_2 + 2\lambda$, satisfaz a condição para que o polinômio (2.14) possua duas raízes com partes reais negativas.

□

Lema 2.2.9. *Se $K > a_1 + 2\lambda$, então o polinômio (2.14) possui duas raízes com partes reais positivas.*

Demonstração. A demonstração é análoga a do lema anterior. Para que (2.14) possua duas raízes com partes reais positivas é necessário que

$$\frac{\gamma\lambda}{K} - \frac{m_1\xi_1\lambda}{(a_1 + \lambda)^2} - \frac{m_2\xi_2\lambda}{(a_2 + \lambda)^2} < 0,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\gamma}{K} < \frac{m_1\xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2\xi_2}{(a_2 + \lambda)^2}.$$

Como $K > a_1 + 2\lambda$, e usando L , ocorrem as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{m_1\xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2\xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} &\geq \frac{1}{a_1 + \lambda} \left[\frac{m_1\xi_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2\xi_2}{a_2 + \lambda} \right] = \\ &\frac{\gamma}{a_1 + \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) > \frac{\gamma}{a_1 + \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{a_1 + 2\lambda} \right) > \frac{\gamma}{K}, \end{aligned}$$

ou seja, $K > a_1 + 2\lambda$, satisfaz a condição para que (2.14) possua duas raízes com partes reais positivas.

□

Seja agora $P_C = (\lambda, \xi_1^*, \xi_2^*)$, tal que ξ_1^* e ξ_2^* sejam soluções de

$$\begin{cases} \frac{m_1\xi_1^*}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2\xi_2^*}{a_2 + \lambda} = \frac{\gamma}{K}(K - \lambda), \\ \frac{m_1\xi_1^*}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2\xi_2^*}{(a_2 + \lambda)^2} = \frac{\gamma}{K}. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \xi_1^* &= \frac{\gamma(a_1 + \lambda)^2(K - a_2 - 2\lambda)}{Km_1(a_1 - a_2)}, \\ \xi_2^* &= \frac{\gamma(a_2 + \lambda)^2(a_1 + 2\lambda - K)}{Km_2(a_1 - a_2)} \end{aligned}$$

e como $\xi_1 > 0$ e $\xi_2 > 0$, $a_2 + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$. Vale ressaltar que P_C move-se ao longo de L ao se variar K , ver Figura 2.10 , ou seja, P_C depende do valor do parâmetro de bifurcação K . Para a estabilidade de $(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L$ e $a_2 + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$ segue o seguinte lema.

Lema 2.2.10. *Sejam $P_C = (\lambda, \xi_1^*, \xi_2^*)$, $P = (\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L$ e $a_2 + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$, se $\xi_1 < \xi_1^*$, o polinômio característico associado a P possui duas raízes com partes reais positivas e se $\xi_1 > \xi_1^*$, o polinômio característico associado a P possui duas raízes com partes reais negativas.*

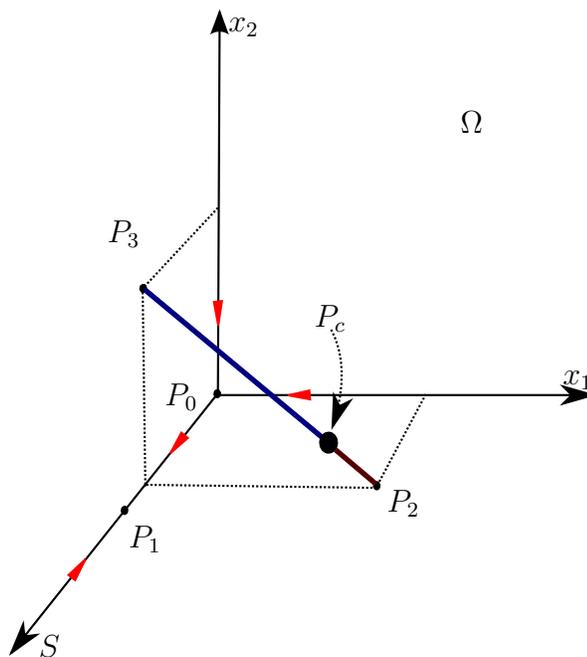


Figura 2.10: Pontos de equilíbrio para $\lambda_1 = \lambda_2$ e $a_1 \neq a_2$.

Demonstração. Para que (2.14) tenha raízes com partes reais positivas

$$\frac{\gamma\lambda}{K} - \frac{m_1\xi_1\lambda}{(a_1 + \lambda)^2} - \frac{m_2\xi_2\lambda}{(a_2 + \lambda)^2} < 0$$

e usando

$$\frac{m_2\xi_2}{a_2 + \lambda} = \frac{\gamma}{K}(K - \lambda)$$

obtém-se

$$\xi_1 < \frac{\gamma(a_1 + \lambda)^2(K - a_2 - 2\lambda)}{Km_1(a_1 - a_2)};$$

portanto

$$\xi_1 < \xi_1^*.$$

De maneira análoga, para que (2.14) tenha duas raízes com partes reais negativas, chega-se a

$$\xi_1 > \frac{\gamma(a_1 + \lambda)^2(K - a_2 - 2\lambda)}{Km_1(a_1 - a_2)} = \xi_1^*.$$

□

O Lema 2.2.10 afirma que dados dois pontos de L e $a_2 + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$, eles podem não apresentar a mesma estabilidade, tal como na seção anterior. Esse comportamento recebe o nome de bifurcação *zip*, apresentada em 1984 por Farkas, ver [1] e [2].

Como P_C , $a_2 + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$, divide L em dois segmentos de distintas estabilidades, o seguinte abuso de linguagem pode ser feito, sempre lembrando que uma das raízes do polinômio característico associado a $(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L$ é identicamente nula.

Corolário 2.2.8. *Se $a_2 + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$, P_C divide L em dois segmentos*

$$L_u = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L : \xi_1 < \xi_1^*\}$$

no qual todos os pontos são instáveis; e

$$L_s = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L : \xi_1 > \xi_1^*\}$$

onde todos os pontos são estáveis.

Ao assumir que $a_1 > a_2$, considera-se a espécie de predador x_1 como r -estrategista, tem alta taxa de natalidade comparada com a de mortalidade e elevada constante de meia

saturação, ou seja, necessita de muita comida. A espécie x_2 é uma K -estrategista, ou seja, sua taxa de natalidade é relativamente baixa e não precisa de uma alta densidade de presas para sobreviver, isto é, sua constante de meia saturação é baixa. Tendo em vista esses comentários, ao se analisar a Figura 2.10, pode-se concluir que o sistema (2.2) tende a alta e baixa densidades de predadores x_1 e x_2 , respectivamente. Lembrando que a L_s é a parte bordô de L , e a parte azul é a L_u (versão em pdf). Portanto, biologicamente, a condição $a_1 > a_2$ faz com a situação “estável” para as espécies de predadores x_1 e x_2 seja a de r -estrategista e K -estrategista, respectivamente.

A estabilidade de P_C não é conhecida - o polinômio característico a ele associado possui um autovalor nulo e os outros dois imaginários puros. A investigação dessa estabilidade está em projetos futuros.

Capítulo 3

Extensões do modelo (2.1)

3.1 Modelo de competição de predadores com funções Holling tipo III generalizadas

Seja agora o novo sistema a ser estudado com respostas funcionais Holling tipo III generalizadas, ver [15]

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = \gamma S \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \frac{m_1 x_1 S^n}{a_1^n + S^n} - \frac{m_2 x_2 S^n}{a_2^n + S^n}, \\ \dot{x}_1 = \frac{m_1 x_1 S^n}{a_1^n + S^n} - d_1 x_1, \\ \dot{x}_2(t) = \frac{m_2 x_2 S^n}{a_2^n + S^n} - d_2 x_2. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Todas as condições discutidas acerca das funções S, x_1, x_2 e os parâmetros para (2.1) são as mesmas para (3.1) e $n \geq 2$, n inteiro.

Novos parâmetros são introduzidos,

$$\lambda_i^n = \frac{a_i^n d_i}{m_i - d_i}$$

e $\beta_i = m_i - d_i$, $i = 1, 2$ (lembrando que para a sobrevivência do i -ésimo predador $0 < \lambda_i < K$ e portanto $m_i > d_i$, $i = 1, 2$), assim (3.1)

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{m_1 x_1 S^n}{a_1^n + S^n} - \frac{m_2 x_2 S^n}{a_2^n + S^n}, \\ \dot{x}_1 = \beta_1 x_1 \frac{S^n - \lambda_1^n}{a_1^n + S^n}, \\ \dot{x}_2(t) = \beta_2 x_2 \frac{S^n - \lambda_2^n}{a_2^n + S^n}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Recordando, $\Omega = \{(S, x_1, x_2) : S > 0, x_1 > 0, x_2 > 0\}$, o Teorema 2.2.2 é também válido para o sistema (3.2), ou seja, as soluções de (3.2) com condições iniciais em Ω tendem a um conjunto limitado em Ω . Bem como os planos $S = 0$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ são invariantes pelo fluxo de (3.2). Atentando que para as demonstrações basta substituir o campo vetorial (1.3) por

$$F(S, x_1, x_2) = \left(\gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{m_1 x_1 S^n}{a_1^n + S^n} - \frac{m_2 x_2 S^n}{a_2^n + S^n}, \beta_1 x_1 \frac{S^n - \lambda_1^n}{a_1^n + S^n}, \beta_2 x_2 \frac{S^n - \lambda_2^n}{a_2^n + S^n} \right).$$

É fácil verificar que os pontos de equilíbrio de (3.2) são:

1. Se $\lambda_1^n \neq \lambda_2^n$:

- $P_0 = (0, 0, 0)$;
- $P_1 = (K, 0, 0)$;
- $P_2 = \left(\lambda_1, \frac{\gamma(a_1^n + \lambda_1^n)}{m_1 \lambda_1^{n-1}} \left(1 - \frac{\lambda_1}{K}\right), 0 \right)$;

- $P_3 = \left(\lambda_2, 0, \frac{\gamma(a_2^n + \lambda_2^n)}{m_2 \lambda_2^{n-1}} \left(1 - \frac{\lambda_2}{K} \right) \right)$.

2. Se $\lambda_1^n = \lambda_2^n = \lambda^n$:

- $P_0 = (0, 0, 0)$;
- $P_1 = (K, 0, 0)$;
- $L = \left\{ (S, x_1, x_2) \in \bar{\Omega} : S = \lambda, \frac{m_1 x_1 \lambda^{n-1}}{a_1^n + \lambda^n} + \frac{m_2 x_2 \lambda^{n-1}}{a_2^n + \lambda^n} = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) \right\}$.

A apresentação dos resultados estará restrita a $\lambda_1^n = \lambda_2^n = \lambda^n$ pois há um segmento de equilíbrios para o sistema, e nele, com parâmetros adequados, ocorre também a bifurcação *zip*.

Os pontos de equilíbrio P_0 e P_1 não possuem suas estabilidades modificadas pois elas independem do vetor no espaço de parâmetros considerando que $0 < \lambda_i < K$ ocorre. Os polinômios característicos associados a eles são

$$p_{P_0}(\mu) = (\gamma - \mu) \left(-\frac{\beta_1 \lambda_1^n}{a_1^n} - \mu \right) \left(-\frac{\beta_2 \lambda_2^n}{a_2^n} - \mu \right),$$

$$p_{P_1}(\mu) = (-\gamma - \mu) \left(\beta_1 \frac{K^n - \lambda_1^n}{K^n + a_1^n} - \mu \right) \left(\beta_2 \frac{K^n - \lambda_2^n}{K^n + a_2^n} - \mu \right),$$

portanto P_0 e P_1 são hiperbólicos, sendo localmente topologicamente conjugados a selas 2-1 e 1-2, respectivamente.

3.1.1 Caso 1: $a_1 = a_2$

Seja novamente a função

$$\begin{aligned} H : \bar{\Omega} - \{x_1 = 0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (S, x_1, x_2) &\longmapsto H(S, x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1^\rho} \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde

$$\rho = \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

e $\rho \geq 1$.

As superfícies de nível de H folheiam Ω ; soluções com condições iniciais numa superfície de nível de H ficam restritas a essa superfície e a intersecção de cada superfície de nível de H com o segmento de equilíbrio

$$L = \left\{ (S, x_1, x_2) \in \bar{\Omega} : S = \lambda, \frac{m_1 x_1 \lambda^{n-1}}{a^n + \lambda^n} + \frac{m_2 x_2 \lambda^{n-1}}{a^n + \lambda^n} = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) \right\}$$

é a única solução positiva de

$$\xi_1 + \rho c \xi_1^\rho = \frac{\gamma(a^n + \lambda^n)}{m_1 \lambda^{n-1}} \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right).$$

É natural, portanto, um teorema a respeito da estabilidade dos pontos de L .

Teorema 3.1.1. *O ponto de equilíbrio $(\lambda, x_1, x_2) \in L$ possui a seguinte estabilidade para o fluxo de (3.2) restrito a $H^{-1}(c)$:*

- se $\lambda < K < \lambda \left[\frac{a^n(2-n) + 2\lambda^n}{a^n(1-n) + \lambda^n} \right]$, (λ, x_1, x_2) é atrator;
- se $K > \lambda \left[\frac{a^n(2-n) + 2\lambda^n}{a^n(1-n) + \lambda^n} \right]$, (λ, x_1, x_2) é repulsor.

Demonstração. Como, para todo $c > 0$, $H^{-1}(c)$ é invariante pelo fluxo de (3.2), seja a restrição de (3.2) a M_c

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \frac{m_1(x_1 + \rho c x_1^\rho) S^n}{a_1^n + S^n}, \\ \dot{x}_1 = \beta_1 x_1 \frac{S^n - \lambda_1^n}{a_1^n + S^n}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Note que estudar a estabilidade de (λ, ξ) é o mesmo que estudar o de $(\lambda, \xi_1, \xi_2 = c\xi_1^\rho)$, assim, a matriz Jacobiana é

$$\begin{bmatrix} \gamma \left(1 - \frac{2\lambda}{K}\right) - \frac{na^n\gamma}{a^n + \lambda^n} \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) & -\frac{m_1\lambda^n}{a^n + \lambda^n} - \frac{m_1\lambda^n\rho^2c\xi_1^{\rho-1}}{a^n + \lambda^n} \\ \frac{n\beta_1\xi_1\lambda^{n-1}}{a^n + \lambda^n} & 0 \end{bmatrix}$$

e polinômio característico associado a (λ, ξ) é

$$p(\mu) = \mu^2 + \mu \left[\frac{n\gamma a^n}{a^n + \lambda^n} \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) - \gamma \left(1 - \frac{2\lambda}{K}\right) \right] + \frac{nm_1\beta_1\xi_1\lambda^{n-1}}{(a^n + \lambda^n)^2} (1 + \rho^2c\xi^{\rho-1}). \quad (3.5)$$

Não é difícil ver que, se

$$\lambda < K < \lambda \left[\frac{a^n(2-n) + 2\lambda^n}{a^n(1-n) + \lambda^n} \right],$$

então (3.5) é estável, e se

$$K > \lambda \left[\frac{a^n(2-n) + 2\lambda^n}{a^n(1-n) + \lambda^n} \right],$$

(3.5) é instável. Quando

$$K = \lambda \left[\frac{a^n(2-n) + 2\lambda^n}{a^n(1-n) + \lambda^n} \right],$$

(3.5) possui duas raízes imaginárias puras, logo o ponto (λ, ξ_1) é não hiperbólico,

$$\mu = \pm \frac{i}{a^n + \lambda^n} \left[nm_1\beta_1\xi_1\lambda^{2n-1}(1 + \rho^2c\xi^{\rho-1}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

não podendo afirmar algo a respeito da estabilidade nessa situação. \square

É natural perguntar se ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica em

$$K = \lambda \left[\frac{a^n(2-n) + 2\lambda^n}{a^n(1-n) + \lambda^n} \right],$$

no entanto a resposta a essa questão é objetivo de estudos futuros.

Com o devido abuso de linguagem, o teorema anterior poderia ser enunciado da seguinte forma.

Corolário 3.1.2. *L possui a seguinte estabilidade para o fluxo de (3.2) restrito a $H^{-1}(c)$:*

- se $\lambda < K < \lambda \left[\frac{a^n(2-n) + 2\lambda^n}{a^n(1-n) + \lambda^n} \right]$, *L é estável;*
- se $K > \lambda \left[\frac{a^n(2-n) + 2\lambda^n}{a^n(1-n) + \lambda^n} \right]$, *L é instável.*

Observação 3.1.1. *Por questões de nomenclatura $n \geq 2$ (o que caracteriza a resposta funcional Holling tipo III generalizada), no entanto, pode-se adotar $n \geq 1$. Dessa forma, se $n = 1$ os resultados apresentados neste capítulo, são os mesmos do Capítulo 2.*

3.1.2 Caso 2: $a_1 \neq a_2$

Primeiramente, considere $a_1 > a_2$. Sejam $P \in L$, ou seja, $P = (\lambda, \xi_1, \xi_2)$, ξ_1 e ξ_2 tais que

$$\frac{m_1 \xi_1 \lambda^{n-1}}{a_1^n + \lambda^n} + \frac{m_2 \xi_2 \lambda^{n-1}}{a_2^n + \lambda^n} = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right),$$

e a matriz Jacobiana

$$J(\lambda, \xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} \gamma \left(1 - \frac{2\lambda}{K} \right) - \frac{na_1^n m_1 \xi_1 \lambda^{n-1}}{(a_1^n + \lambda^n)^2} - \frac{na_2^n m_2 \xi_2 \lambda^{n-1}}{(a_2^n + \lambda^n)^2} & \frac{m_1 \lambda^n}{a_1^n + \lambda^n} & \frac{m_2 \lambda^n}{a_2^n + \lambda^n} \\ \frac{n\beta_1 \xi_1 \lambda^{n-1}}{a_1^n + \lambda^n} & 0 & 0 \\ \frac{n\beta_2 \xi_2 \lambda^{n-1}}{a_2^n + \lambda^n} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo o polinômio característico associado é

$$p(\mu) = -\mu \left\{ \mu^2 + \mu \left[\frac{nm_1 a_1^n \xi_1 \lambda^{n-1}}{(a_1^n + \lambda^n)^2} + \frac{nm_2 a_2^n \xi_2 \lambda^{n-1}}{(a_2^n + \lambda^n)^2} - \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) \right] - \frac{nm_1 \beta_1 \xi_1 \lambda^{2n-1}}{(a_1^n + \lambda^n)^2} - \frac{nm_2 \beta_2 \xi_2 \lambda^{2n-1}}{(a_2^n + \lambda^n)^2} \right\}. \quad (3.6)$$

Seja agora $P_C = (\lambda, \xi_1^*, \xi_2^*)$, tal que ξ_1^* e ξ_2^* sejam soluções de

$$\begin{cases} \frac{m_1 \xi_1^* \lambda^{n-1}}{a_1^n + \lambda^n} + \frac{m_2 \xi_2^* \lambda^{n-1}}{a_2^n + \lambda^n} = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right), \\ \frac{nm_1 a_1^n \xi_1^*}{(a_1^n + \lambda^n)^2} + \frac{nm_2 a_2^n \xi_2^*}{(a_2^n + \lambda^n)^2} = \gamma \left(1 - \frac{2\lambda}{K} \right). \end{cases}$$

Portanto,

$$\xi_1^* = \frac{\gamma(a_1^n + \lambda^n)^2 [K(a_2^n(1-n) + \lambda^n) - \lambda((2-n)a_2^n + 2\lambda^n)]}{Knm_1 \lambda^{2n-1} (a_1^n - a_2^n)};$$

$$\xi_2^* = \frac{\gamma(a_2^n + \lambda^n)^2 [\lambda(a_1^n(2-n) + 2\lambda^n) - K(a_1^n(1-n) + \lambda^n)]}{Knm_2 \lambda^{2n-1} (a_1^n - a_2^n)};$$

$\xi_1^* > 0$ e $\xi_2^* > 0$ somente se

$$\lambda \left[\frac{a_2^n(2-n) + 2\lambda^n}{a_2^n(1-n) + \lambda^n} \right] \leq K \leq \lambda \left[\frac{a_1^n(2-n) + 2\lambda^n}{a_1^n(1-n) + \lambda^n} \right].$$

Note que

$$\frac{nm_1 a_1^n \xi_1}{(a_1^n + \lambda^n)^2} + \frac{nm_2 a_2^n \xi_2}{(a_2^n + \lambda^n)^2} = \gamma \left(1 - \frac{2\lambda}{K} \right)$$

faz com que as outras duas raízes de (3.6) sejam imaginárias puras.

Lema 3.1.1. *Sejam $P_C = (\lambda, \xi_1^*, \xi_2^*)$, $P = (\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L$ e*

$$\lambda \left[\frac{a_2^n(2-n) + 2\lambda^n}{a_2^n(1-n) + \lambda^n} \right] \leq K \leq \lambda \left[\frac{a_1^n(2-n) + 2\lambda^n}{a_1^n(1-n) + \lambda^n} \right],$$

se $\xi_1 < \xi_1^*$ o polinômio característico associado a P possui duas raízes com partes reais positivas e se $\xi_1 > \xi_1^*$ o polinômio característico associado a P possui duas raízes com partes reais negativas.

Demonstração. Para que (3.6) tenha raízes com partes reais positivas

$$\frac{nm_1 a_1^n \xi_1 \lambda^{n-1}}{(a_1^n + \lambda^n)^2} + \frac{nm_2 a_2^n \xi_2 \lambda^{n-1}}{(a_2^n + \lambda^n)^2} - \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) < 0,$$

portanto, $\xi_1 < \xi_1^*$. Para que (3.6) tenha raízes com partes reais negativas

$$\frac{nm_1 a_1^n \xi_1 \lambda^{n-1}}{(a_1^n + \lambda^n)^2} + \frac{nm_2 a_2^n \xi_2 \lambda^{n-1}}{(a_2^n + \lambda^n)^2} - \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) > 0,$$

portanto, $\xi_1 > \xi_1^*$.

□

O ponto P_C divide o segmento de equilíbrio em dois segmentos de estabilidades distintas, com um abuso de linguagem, segue o corolário.

Corolário 3.1.3. *Se*

$$\lambda \left[\frac{a_2^n(2-n) + 2\lambda^n}{a_2^n(1-n) + \lambda^n} \right] \leq K \leq \lambda \left[\frac{a_1^n(2-n) + 2\lambda^n}{a_1^n(1-n) + \lambda^n} \right],$$

P_C divide L em dois segmentos

$$L_u = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L : \xi_1 < \xi_1^*\}$$

no qual todos os pontos são instáveis; e

$$L_s = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L : \xi_1 > \xi_1^*\}$$

onde todos os pontos são estáveis.

3.2 Modelo de competição entre n predadores

Seja o sistema

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{m_i x_i S}{a_i + S}, \\ \dot{x}_i = \frac{m_i x_i S}{a_i + S} - d_i x_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.7)$$

onde

- S é o número de presas num dado instante t ;
- x_i é o número do i -ésimo predador num dado instante t ;
 $i = 1, \dots, n$.

Por se tratar de um sistema biológico, $S \geq 0$, $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.

Os parâmetros presentes em (3.7) possuem os mesmos significados que em (1.1), lembrando-os:

- $\gamma > 0$ é a taxa de crescimento intrínseca da presa;
- $K > 0$ é a capacidade ambiental com respeito à presa;
- $m_i > 0$ é a taxa máxima de nascimento do i -ésimo predador;
- $d_i > 0$ é a taxa de mortalidade do i -ésimo predador;
- $a_i > 0$ é a constante de meia saturação para o i -ésimo predador;
 $i = 1, \dots, n$.

Introduzindo novos parâmetros

$$\lambda_i = \frac{a_i d_i}{m_i - d_i},$$

$i = 1, \dots, n$, com o seguinte significado: x_i é crescente se e somente se $S > \lambda_i$, e o i -ésimo predador sobrevive apenas se $0 < \lambda_i < K$; e $\beta_i = m_i - d_i$, $i = 1, \dots, n$; o sistema (3.7) assume a seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{m_i x_i S}{a_i + S}, \\ \dot{x}_i = \beta_i x_i \frac{S - \lambda_i}{a_i + S}, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.8)$$

Seja $\Omega = \{(S, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : S > 0, x_i > 0, i = 1, \dots, n\}$, assim, soluções de (3.8) com condições iniciais em Ω tendem a um conjunto limitado em Ω . Os planos $S = 0$, $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ são invariantes pelo fluxo do campo definido por (3.8). As demonstrações são análogas às encontradas no Capítulo 2.

O estudo estará restrito à situação em que os λ_i , $i = 1, \dots, n$, são idênticos, pois o sistema apresenta um hiperplano de equilíbrio, onde ocorre uma bifurcação *zip*. Portanto, os pontos de equilíbrio são

1. (i) $P_0 = (0, 0, \dots, 0)$;
2. (ii) $P_1 = (K, 0, \dots, 0)$;
3. (iii) $L = \left\{ (S, x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega} : S = \lambda, \sum_{i=1}^n \frac{m_i x_i}{a_i + \lambda} = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) \right\}$.

3.2.1 Caso 1: $a_1 = \dots = a_n = a$

Seja a função

$$\begin{aligned} H : \bar{\Omega} - \bigcup_{i=1}^{n-1} \{x_i = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ (S, x_1, \dots, x_n) &\longmapsto H(S, x_1, \dots, x_n) = (h_1(x_1, x_2), h_2(x_2, x_3), \dots, h_{n-1}(x_{n-1}, x_n)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde

$$h_i = \frac{x_{i+1}}{x_i^{\rho_i}},$$

$$\rho_i = \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i},$$

com $i = 1, \dots, n - 1$.

As superfícies de nível de H definida em (3.9), folheiam Ω , isto é, dado $(S', x'_1, \dots, x'_n) \in \Omega$, existem $c_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, tais que $H(S', x'_1, \dots, x'_n) = (c_1, \dots, c_{n-1})$, e será cometido um abuso de linguagem, referindo-se a (c_1, \dots, c_{n-1}) simplesmente como C . Por esse abuso, quando $c_1 > 0, \dots, c_{n-1} > 0$, $i = 1, \dots, n - 1$, apenas se dirá que $C > 0$.

Sejam $H^{-1}(C)$ e

$$L = \left\{ (S, x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega} : S = \lambda, \sum_{i=1}^n \frac{m_i x_i}{a_i + \lambda} = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) \right\},$$

eles se interceptam em $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$ onde ξ_1 é a única solução positiva de

$$x_1 + \nu_1 x_1^{\eta_1} + \nu_2 x_1^{\eta_2} + \dots + \nu_{n-1} x_1^{\eta_{n-1}} = \frac{\gamma(a + \lambda)}{m_1} \left(1 - \frac{S}{K} \right);$$

os ξ_i são dados por

$$\begin{aligned} \xi_2 &= c_1 \xi_1^{\rho_1} \\ \xi_3 &= c_2 c_1^{\rho_2} \xi_1^{\rho_1 \rho_2} \\ &\vdots \\ \xi_n &= c_{n-1} c_{n-2}^{\rho_{n-1}} c_{n-3}^{\rho_{n-1} \rho_{n-2}} \dots c_1^{\rho_{n-1} \rho_{n-2} \dots \rho_2 \rho_1} \xi_1^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1}}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

e as constantes

$$\eta_1 = \rho_1, \eta_2 = \rho_1 \rho_2, \dots, \eta_{n-1} = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1};$$

$$\nu_1 = c_1 \rho_1, \nu_2 = c_2 c_1^{\rho_2} \rho_1 \rho_2, \dots, \nu_{n-1} = c_{n-1} c_{n-2}^{\rho_{n-1}} \dots c_1^{\rho_2 \rho_3 \dots \rho_{n-1}} \rho_1 \rho_2 \rho_{n-1}.$$

A função H é integral primeira de (3.8), ou seja, para todo $C > 0$, $M_C = H^{-1}(C)$ é uma superfície invariante pelo fluxo de (3.8).

De fato, para cada $P \in H^{-1}(C)$, $F(P) \in T_P M_C$, sendo $T_P M_C$ o espaço tangente a M_C em P . Como M_C é dada por imagem inversa de valor regular, $T_P M_C = \text{Ker}(dH_P)$, onde $dH_P : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ é a diferencial de H em P .

Calculando-se $dH_P(F(P))$ encontra-se o vetor nulo em \mathbb{R}^{n-1} , onde

$$dH_P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\rho_1 x_2}{x_1^{\rho_1+1}} & \frac{1}{x_1^{\rho_1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\rho_2 x_3}{x_2^{\rho_2+1}} & \frac{1}{x_2^{\rho_2}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\rho_{n-1} x_n}{x_{n-1}^{\rho_{n-1}+1}} & \frac{1}{x_{n-1}^{\rho_{n-1}}} \end{bmatrix}$$

e

$$F(P) = \begin{bmatrix} \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{m_i x_i S}{a + S} \\ \beta_1 x_1 \frac{S - \lambda}{a + S} \\ \vdots \\ \beta_n x_n \frac{S - \lambda}{a + S} \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.2.1. *O ponto de equilíbrio $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in L$ possui a seguinte estabilidade com relação ao fluxo de (3.8) restrito à superfície $H^{-1}(C)$, onde $H^{-1}(C) = (S', x'_1, \dots, x'_n)$:*

- se $\lambda < K < a + 2\lambda$, $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$ é atrator;
- se $K > a + 2\lambda$, $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$ é repulsor.

Demonstração. Como, para todo $C > 0$, $H^{-1}(C)$ é invariante pelo fluxo de (3.8), seja a restrição de (3.8) a M_C

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - m_1 S \frac{x_1 + \nu_1 x_1^{\eta_1} + \nu_2 x_1^{\eta_2} + \cdots + \eta_{n-1} x_1^{\eta_{n-1}}}{a + S}, \\ \dot{x}_1 = \beta_1 x_1 \frac{S - \lambda_1}{a + S}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Portanto, a matriz Jacobiana em um ponto qualquer (S, x_1) é

$$J(S, x_1) = \begin{bmatrix} \gamma \left(1 - \frac{2S}{K}\right) - m_1 a \frac{x_1 + \sum \nu_i x_1^{\eta_i}}{(a + S)^2} & -m_1 S \frac{1 + \sum \nu_i \eta_i x_1^{\eta_i - 1}}{a + S} \\ \beta_1 x_1 \frac{a + \lambda}{(a + \lambda)^2} & \beta_1 \frac{S - \lambda}{a + S} \end{bmatrix},$$

logo o polinômio característico associado ao ponto de equilíbrio (λ, ξ_1) de (3.11) é

$$p(\mu)_{(\lambda, \xi_1)} = \mu^2 + \mu \left(\frac{\gamma \lambda (a + 2\lambda - K)}{K(a + \lambda)} \right) + \frac{m_1 \beta_1 \xi_1 \lambda}{(a + \lambda)^2} \left(1 + \sum \nu_i \eta_i \xi_1^{\eta_i - 1} \right).$$

Desse modo, se $\lambda < K < a + 2\lambda$, (λ, ξ_1) é atrator; e se $K > a + 2\lambda$, $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$ é repulsor. \square

Em [3], os autores mostram que em $K = a + 2\lambda$ ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica, não apresentada aqui. O seguinte corolário é enunciado, utilizando-se um abuso de linguagem.

Corolário 3.2.2. *L possui a seguinte estabilidade com relação ao fluxo de (3.8) restrito à superfície $H^{-1}(C)$, onde $H^{-1}(C) = (S', x'_1, \dots, x'_n)$.*

- Se $\lambda < K \leq a + 2\lambda$, L é assintoticamente estável;
- Se $K > a + 2\lambda$, L é instável.

Os pontos P_0 e P_1 mantêm suas estabilidades, ou seja, independem dos parâmetros a_i , $i = 1, \dots, n$, e como toda a análise feita anteriormente, $K > \lambda$, mesmo na situação em que os λ_i são distintos, considera-se que $K > \max\{\lambda_i : i = 1, \dots, n\}$, pois essa condição está relacionada à sobrevivência dos n predadores. Desse modo, os polinômios característicos associados a eles são

$$p(\mu)_{P_0} = (\gamma - \mu) \prod_{i=1}^n \left(-\frac{\beta_i \lambda}{a_i} - \mu \right),$$

$$p(\mu)_{P_1} = (-\gamma - \mu) \prod_{i=1}^n \left(\frac{\beta_i (K - \lambda)}{K + a_i} - \mu \right),$$

portanto, P_0 é localmente topologicamente conjugado a uma sela $n - 1$, e P_1 a uma sela $1 - n$.

3.2.2 Caso 2: $a_1 \neq a_2 \neq \dots \neq a_n$

Sem perda de generalidade, suponha $a_1 > \dots > a_n$.

Não é difícil mostrar que o polinômio característico para um ponto em L é

$$p(\mu) = (-1)^{n-1} \mu^{n-1} \left[\mu^2 + \mu \left(\frac{\gamma \lambda}{K} - \lambda \sum_{i=1}^n \frac{m_i \xi_i}{(a_i + \lambda)^2} \right) + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{m_i \beta_i \xi_i}{(a_i + \lambda)^2} \right].$$

Esse polinômio possui uma raiz identicamente nula com multiplicidade $n - 1$, as outras duas dependerão do parâmetro K . Desse modo, se $\lambda < K < a_n + 2\lambda$, há duas raízes com partes reais negativas, e se $K > a_1 + 2\lambda$ duas raízes com partes reais positivas. As desigualdades, tais como no Capítulo 2, são verificadas com pequenas modificações.

Se $a_n + 2\lambda < K < a_1 + 2\lambda$ ocorre a bifurcação *zip*. Seja a intersecção dos dois hiperplanos

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{m_i \xi_i}{a_i + \lambda} = \frac{\gamma}{K} (K - \lambda), \\ \sum_{i=1}^n \frac{m_i \xi_i}{(a_i + \lambda)^2} = \frac{\gamma}{K}, \end{cases}$$

obtêm-se

$$\sum_{i=2}^n \frac{m_i \xi_i}{(a_i + \lambda)^2} = \sum_{i=2}^n \frac{\gamma(a_1 + 2\lambda - K)}{K(a_1 - a_i)},$$

$$\xi_1^* = \sum_{i=2}^n \frac{(a_1 + \lambda)^2 (K - a_i - 2\lambda)}{m_1 K(a_1 - a_i)}.$$

Lema 3.2.1. *Sejam*

$$\sum_{i=2}^n \frac{m_i \xi_i}{(a_i + \lambda)^2} = \sum_{i=2}^n \frac{\gamma(a_1 + 2\lambda - K)}{K(a_1 - a_i)},$$

$$\xi_1^* = \sum_{i=2}^n \frac{(a_1 + \lambda)^2 (K - a_i - 2\lambda)}{m_1 K(a_1 - a_i)},$$

$P = (\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in L$ e $a_n + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$, se $\xi_1 < \xi_1^*$, o polinômio característico associado a P possui duas raízes com partes reais positivas e se $\xi_1 > \xi_1^*$, o polinômio característico associado a P possui duas raízes com partes reais negativas.

Com um devido abuso de linguagem o lema anterior pode ser colocado da seguinte forma.

Corolário 3.2.3. *Se $a_n + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$, L está dividido em dois segmentos*

$$L_u = \{(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in L : \xi_1 < \xi_1^*\}$$

no qual todos os pontos são instáveis; e

$$L_s = \{(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in L : \xi_1 > \xi_1^*\}$$

onde todos os pontos são estáveis.

Uma generalização natural de (3.8) parece ser quando se considera uma função

$$\frac{S^n}{a_i^n + S^n},$$

para cada i -ésimo predador. Em cálculos recentes, os resultados obtidos concordam com os encontrados para (3.8), com as devidas adaptações no parâmetro de bifurcação K , semelhante ao encontrado no Teorema 3.1.1. A possibilidade da ocorrência de uma bifurcação de Hopf deve ser trabalhada mais detalhadamente, pois a condição de não degenerescência dependerá de outros parâmetros.

Discussões finais

Ao se estudar os sistemas (1.2), (2.2), (3.2) e (3.8) verificou-se que, para determinadas condições dos parâmetros, sempre existia um “ponto”, seja ele pontual, contínuo ou um ciclo periódico, de equilíbrio atrator do sistema considerado e com a coexistência de todas as espécies envolvidas.

A possibilidade de órbitas periódicas em Ω quando $\lambda_1 \neq \lambda_2$ no modelo (2.2) de modo a tentar esgotar todas as possibilidades de soluções de equilíbrio em Ω é um dos objetivos dos próximos estudos.

A investigação da estabilidade de P_C é outra pergunta que se tentará responder, visto que as raízes do polinômio característico a ele associados são duas imaginárias puras e a outra identicamente nula.

Verificar se a bifurcação de Hopf ocorre no *continuum* de equilíbrios dos modelos (3.2) e (3.8), bem como em um novo modelo, considerando n predadores competindo por uma única presa e utilizando resposta funcional da forma

$$\frac{S^n}{a_i^n + S^n},$$

para cada i -predador, com $i = 1, \dots, n$, é uma resposta a ser respondida. Pode-se investigar se há outros tipos de bifurcações que ocorrem nesses sistemas, principalmente se se considerar outros parâmetros de bifurcação.

Uma última questão curiosa é quando se tem um modelo predador-presa tal como em [14], onde a interação das espécies se dá em fases distintas de desenvolvimento, pois se

tratam de artrópodes. Seria possível ter um *continuum* de equilíbrios se houver pelo menos uma resposta funcional Holling tipo II? E se considerar a competição entre dois predadores, com cada um deles interagindo em fases distintas do desenvolvimento da presa? Questões como essas guiarão próximos estudos.

Bibliografia

- [1] Farkas, M., *Zip bifurcation in a competition model*, *Nonlinear Anal.* **8**, 1295-1309 (1984).
- [2] Farkas, M., *Dynamical Models in Biology*. Academic Press, USA, 2001.
- [3] Ferreira, J. D., Oliveira, L. A. F., *Hopf bifurcation in a specific $(n+1)$ -dimensional compete system*, *Matemáticas* **XV**, nº 1, Colômbia, 2007.
- [4] Hirsh, M., Smale, S., Devaney, R., *Differential Equations, Dynamics System and an Introduction to Chaos*, second edition, Academic Press, New York, 2004.
- [5] Hofbauer, J., Sigmund, K., *Evolutionary Games and Population Dynamics* Cambridge University Press, 1998. Reprinted 2002.
- [6] Hsu, S. B., Hubbel, S. P, Waltman, P., *Competing predators*, *SIAM J. Appl. Math.* **35**, 617-625 (1978).
- [7] Hsu, S. B., Hubbel, S. P, Waltman, P., *A contribution to the theory of competing predators*, *Ecological Monographs* **48**, 337-349 (1978).
- [8] Kuznetsov, Y. A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, second edition, Springer-Verlag Inc. New York, 1998

- [9] Lima, E. L., *Variiedades Diferenciáveis*, Coleção Publicações Matemáticas, Rio de Janeiro, 2009.
- [10] Mamani, A. L. C., *Bifurcação de Hopf num modelo de competição dois predadores-uma presa*. Dissertação de Mestrado, IME - USP. São Paulo, 2010.
- [11] Notas de aula do professor Luis Fernando de Osório Mello ministradas no curso de Tópicos em Sistemas Dinâmicos.
- [12] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [13] Pontryagin, L. S., *Ordinary Differential Equations*. Addison-Wesley, USA, 1969.
- [14] Rosa, M. A., *Estudo das bifurcações de Hopf no sistema regulador de Watt*. Dissertação de Mestrado, ICE - Unifei. Itajubá, 2008.
- [15] Sáez, E., Stange, E., Szántó, I., *Simultaneous zip bifurcation and limit cycles in three dimensional competition models*, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **5**, 1-11 (2006).
- [16] Santos, D. B., *Bifurcação de Hopf num Modelo de Controle Biológico*. Dissertação de Mestrado, IME - USP. São Paulo, 2004.
- [17] Smith, H. L., *The interaction of steady state and Hopf bifurcations in a two-predator-one-prey competition model*, *SIAM J. Appl. Math.* **42**, 27-43 (1982).
- [18] Weiss, H., *Mathematical Introduction to Population Dynamics*, 27º Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, 2009.
- [19] Wilken, D. R., *Some remarks on a competing predators problem*, *SIAM J. Appl. Math.* **42**, 895-902 (1982).

Anexo 1

Para ilustrar os resultados obtidos ao longo do trabalho, serão apresentadas uma série de simulações feitas com o software Maple[®], versão 12. Essas simulações serão colocadas em dois anexos, Anexo 1, que se destina ao modelo de [1], e o Anexo 2, ao modelo [15].

Considere na figuras apresentadas, x_1 como sendo o x , x_2 , o y , e z representa S .

As Figuras 3.1 a 3.14 referem-se aos resultados do Capítulo 2, ou seja, são referentes à equação (2.2).

As Figuras 3.1, 3.2 e 3.3 ilustram os Lema 2.2.3 e 2.2.4, onde há órbita periódica atratora em $x_2 = 0$ e $x_1 = 0$, respectivamente, e o Teorema 2.2.4, onde há a coexistência das órbitas periódicas atratoras em $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Para essas figuras $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Já as Figuras 3.4, 3.5 e 3.6 são ilustrações para o caso em que $a_1 = a_2$ e $\lambda_1 = \lambda_2$, estando associadas ao Teorema 2.2.6. As Figuras 3.4 e 3.6 ilustram duas situações distintas, a que o *continuum* de equilíbrio, L , é instável e a que é estável, respectivamente. A existência das órbitas periódicas atratoras é dada na Figura 3.5.

Para condições dos parâmetros ainda distintos, as Figuras 3.7 e 3.8 são uma tentativa de ilustrar a “formação” da reta de equilíbrio.

Os Lemas 2.2.8 e 2.2.9 e 2.2.10, quando $a_1 \neq a_2$ e $\lambda_1 = \lambda_2$, estão associados às Figuras 3.9, 3.10 e 3.11, respectivamente, ou seja, dentro do abuso de linguagem, L estável, L instável, e a bifurcação *zip*.

O resultado apresentado em [10], existência de órbita periódica atratora em Ω , está,

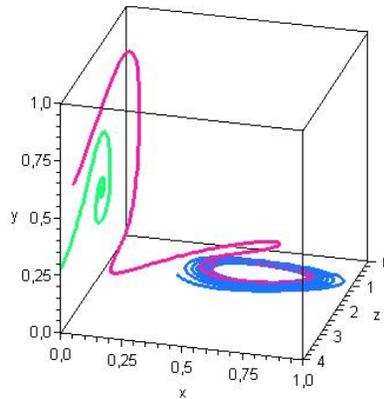


Figura 3.1: Retrato de fase: órbita periódica atratora em $x_2 = 0$. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 0.9$, $d_1 = 1$, $m_1 = 2$, $a_2 = 0.8$, $d_2 = 1.95$, $m_2 = 3$, $K = 2.75$. Intervalo de integração: $[-50,100]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.85, 0)$, $(1, 0, 0.3)$, $(0.99, 0.1, 0.9)$.

aparentemente, ilustrado na Figura 3.12. A figura 3.13, vem apenas mostrar que para uma mudança na terceira casa decimal do parâmetro a_1 o retrato de fase é modificado.

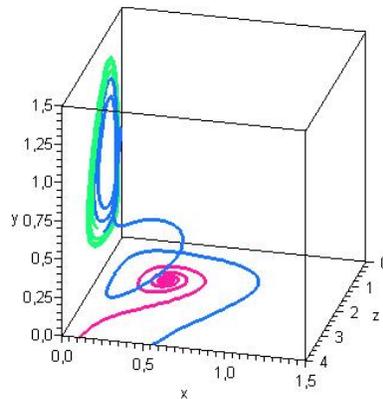


Figura 3.2: Retrato de fase: órbita periódica atratora em $x_1 = 0$. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 0.8$, $d_1 = 1.95$, $m_1 = 3$, $a_2 = 0.9$, $d_2 = 1$, $m_2 = 2$, $K = 3.25$. Intervalo de integração: $[-10,50]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.9, 0.02)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0)$.

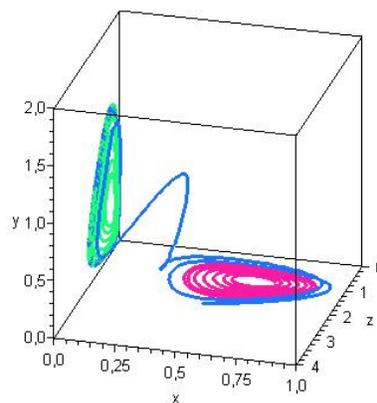


Figura 3.3: Retrato de fase: órbitas periódicas atradoras em $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 0.5$, $d_1 = 1$, $m_1 = 1.5$, $a_2 = 1$, $d_2 = 1$, $m_2 = 3$, $K = 2.7$. Intervalo de integração: $[-20,80]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.9, 0.02)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0)$.

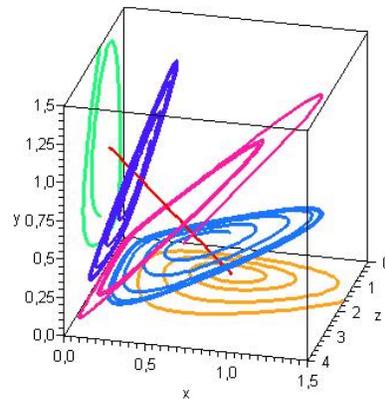


Figura 3.4: Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 2$, $a_2 = 1$, $d_2 = 1$, $m_2 = 2$, $K = 3.25$. Intervalo de integração: $[-10,100]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.9, 0.3)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0)$, $(0.99, 0.3, 1)$, $(0.99, 1.3, 1.2)$.

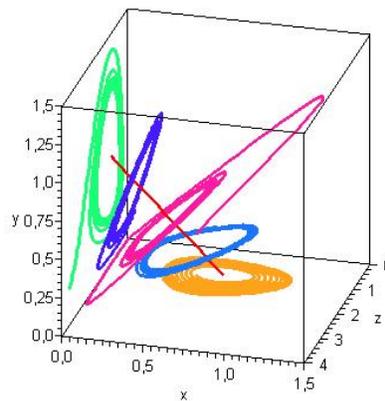


Figura 3.5: Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 2$, $a_2 = 1$, $d_2 = 1$, $m_2 = 2$, $K = 1.5$. Intervalo de integração: $[-10,100]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.9, 0.3)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0)$, $(0.99, 0.3, 1)$, $(0.99, 1.3, 1.2)$.

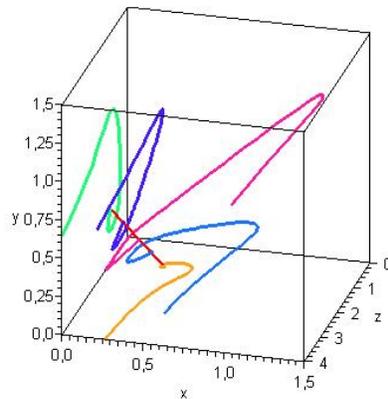


Figura 3.6: Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 2$, $a_2 = 1$, $d_2 = 1$, $m_2 = 2$, $K = 4$. Intervalo de integração: $[-10,100]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.9, 0.3)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0)$, $(0.99, 0.3, 1)$, $(0.99, 1.3, 1.2)$.

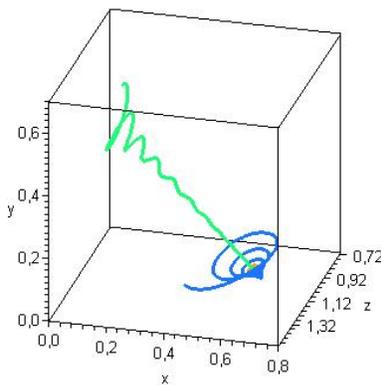


Figura 3.7: Retrato de fase: “formação” do *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 0.99$, $m_1 = 2$, $a_2 = 0.95$, $d_2 = 1.05$, $m_2 = 2$, $K = 2.5$. Intervalo de integração: $[20,300]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.9, 0.3)$, $(0.99, 0.02, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0.05)$.

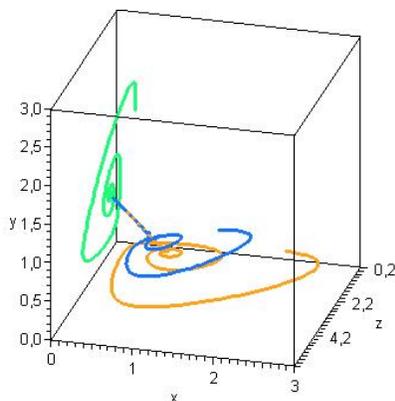


Figura 3.8: Retrato de fase: “formação” do *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 0.99$, $m_1 = 2$, $a_2 = 0.95$, $d_2 = 1.05$, $m_2 = 2$, $K = 6$. Intervalo de integração: $[-100, 500]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.9, 0.3)$, $(0.99, 0.02, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0.05)$.

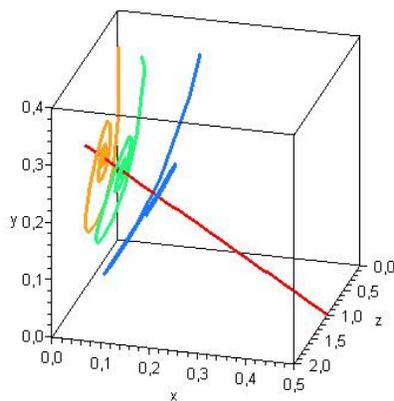


Figura 3.9: Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 2$, $a_2 = 0.5$, $d_2 = 2$, $m_2 = 3$, $K = 2$. Intervalo de integração: $[0, 500]$. Condições iniciais: $(1.1, 2/11, 5/11)$, $(0.99, 1/11, 3/11)$, $(0.99, 1/11, 13/44)$.

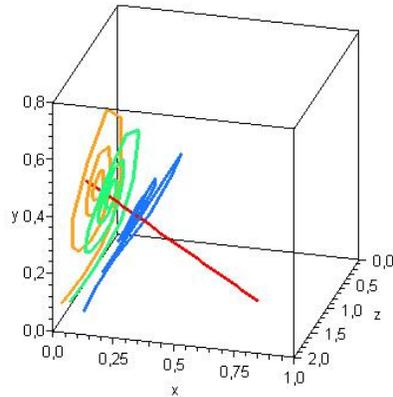


Figura 3.10: Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 2$, $a_2 = 0.5$, $d_2 = 2$, $m_2 = 3$, $K = 3.5$. Intervalo de integração: $[0,500]$. Condições iniciais: $(1.1, 2/11, 5/11)$, $(0.99, 1/11, 3/11)$, $(0.99, 1/11, 13/44)$.

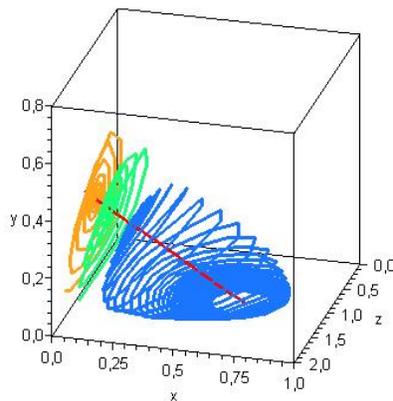


Figura 3.11: Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 2$, $a_2 = 0.5$, $d_2 = 2$, $m_2 = 3$, $K = 3$. Intervalo de integração: $[0,500]$. Condições iniciais: $(1.1, 2/11, 5/11)$, $(0.99, 1/11, 3/11)$, $(0.99, 1/11, 13/44)$.

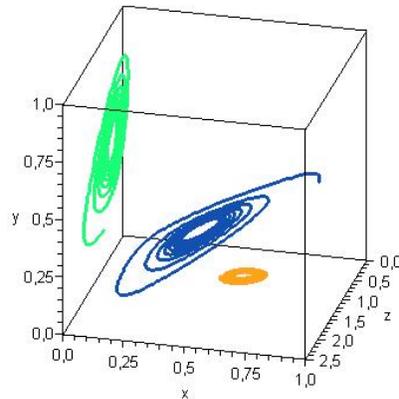


Figura 3.12: Retrato de fase: órbitas em Ω . Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 3$, $a_2 = 0.999$, $d_2 = 1$, $m_2 = 2$, $K = 2.9$. Intervalo de integração: $[0,100]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.0, 0.5)$, $(0.99, 0.02, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0.05)$.

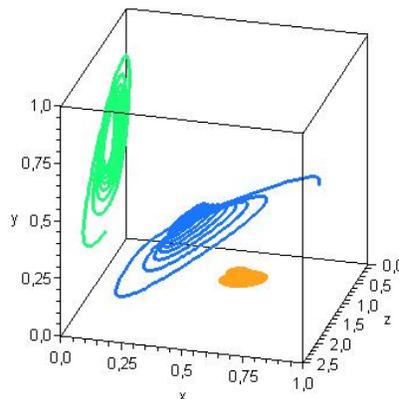


Figura 3.13: Retrato de fase. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $m_1 = 3$, $a_2 = 0.991$, $d_2 = 1$, $m_2 = 2$, $K = 2.9$. Intervalo de integração: $[0,100]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.0, 0.5)$, $(0.99, 0.02, 0.2)$, $(0.99, 0.5, 0.05)$.

Anexo 2

Como dito no Anexo 1, as Figuras 3.14 a 3.21 referem-se aos resultados da primeira seção do Capítulo 3, [15], considerando que $n = 5$.

O Teorema 3.1.1, $a_1 = a_2$ e $\lambda_1^n = \lambda_2^n$, está ilustrado nas respectivas Figuras 3.14, onde L é estável, 3.16, onde L é instável, e 3.17, que é apenas uma visualização mais ampla da Figura 3.16. A Figura 3.15 refere-se à questão levantada sobre bifurcação de Hopf para essas condições.

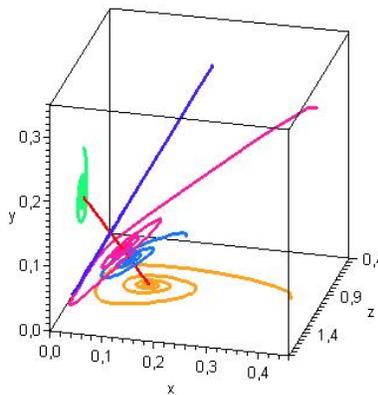


Figura 3.14: Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 0.5$, $d_1 = 1$, $m_1 = 3$, $a_2 = 0.5$, $d_2 = 1$, $m_2 = 3$, $K = 1.6$, $n = 5$. Intervalo de integração: $[0, 20]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.4, 0)$, $(0.99, 0.25, 0.35)$, $(0.99, 0.45, 0.3)$.

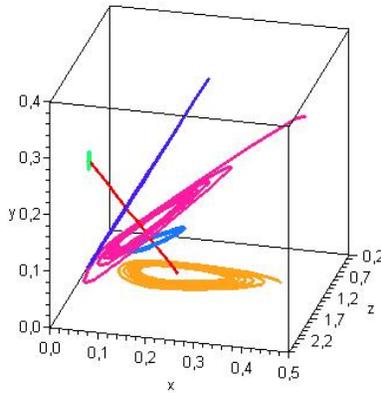


Figura 3.15: Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 0.5$, $d_1 = 1$, $m_1 = 3$, $a_2 = 0.5$, $d_2 = 1$, $m_2 = 3$, $K = 2.15$, $n = 5$. Intervalo de integração: $[0,30]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.4, 0)$, $(0.99, 0.25, 0.35)$, $(0.99, 0.45, 0.3)$.

A condição $a_1 \neq a_2$ e $\lambda_1^n = \lambda_2^n$, com $n = 5$, está ilustrada nas Figuras 3.18 a 3.21. A Figura 3.18, com o abuso de linguagem, ilustra quando L é estável, a 3.20, L instável, e novamente, 3.21 apenas uma visualização mais ampla da Figura 3.20. A Figura 3.19 está associada ao Lema 3.1.1, ou seja, à bifurcação *zip*.

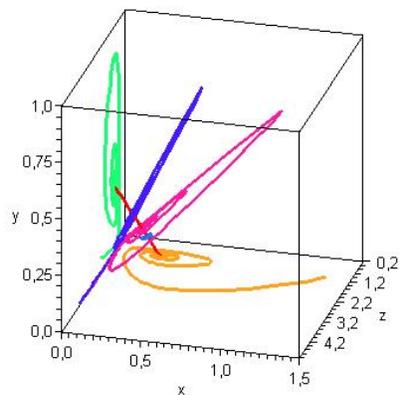


Figura 3.16: Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 0.5$, $d_1 = 1$, $m_1 = 3$, $a_2 = 0.5$, $d_2 = 1$, $m_2 = 3$, $K = 6$, $n = 5$. Intervalo de integração: $[-5,8]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.4, 0)$, $(0.99, 0.25, 0.35)$, $(0.99, 0.45, 0.3)$.

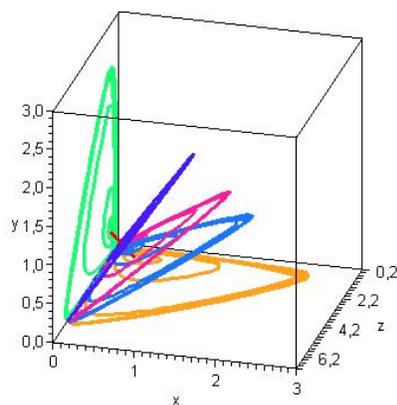


Figura 3.17: Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 0.5$, $d_1 = 1$, $m_1 = 3$, $a_2 = 0.5$, $d_2 = 1$, $m_2 = 3$, $K = 6$, $n = 5$. Intervalo de integração: $[0,100]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.4, 0)$, $(0.99, 0.25, 0.35)$, $(0.99, 0.45, 0.3)$.

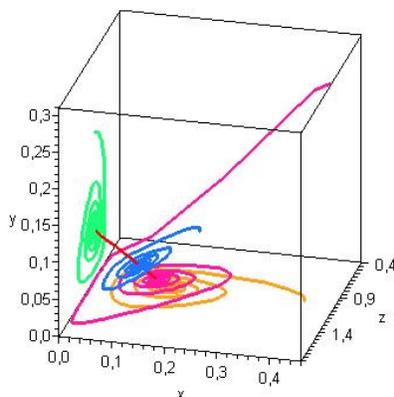


Figura 3.18: Retrato de fase: *continnum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 0.5$, $d_1 = 1$, $m_1 = 3$, $a_2 = 0.5$, $d_2 = 5$, $m_2 = 6$, $K = 1.7$, $n = 5$. Intervalo de integração: $[0,50]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.4, 0)$, $(0.99, 0.25, 0.35)$, $(0.99, 0.45, 0.3)$.

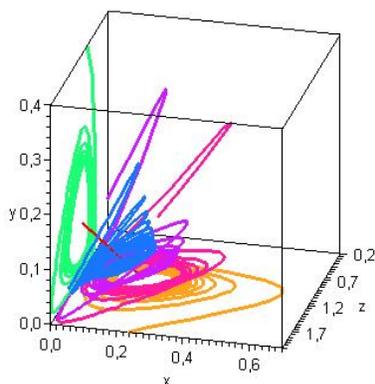


Figura 3.19: Retrato de fase: *continnum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 0.5$, $d_1 = 1$, $m_1 = 3$, $a_2 = 0.5$, $d_2 = 5$, $m_2 = 6$, $K = 2.15$, $n = 5$. Intervalo de integração: $[-50,30]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.4, 0)$, $(0.99, 0.25, 0.35)$, $(0.99, 0.45, 0.3)$.

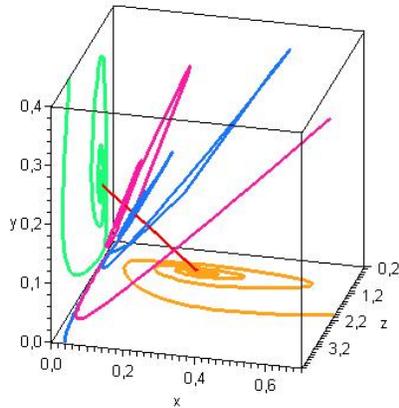


Figura 3.20: Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 0.5$, $d_1 = 1$, $m_1 = 3$, $a_2 = 0.5$, $d_2 = 5$, $m_2 = 6$, $K = 5$, $n = 5$. Intervalo de integração: $[-10,10]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.4, 0)$, $(0.99, 0.25, 0.35)$, $(0.99, 0.45, 0.3)$.

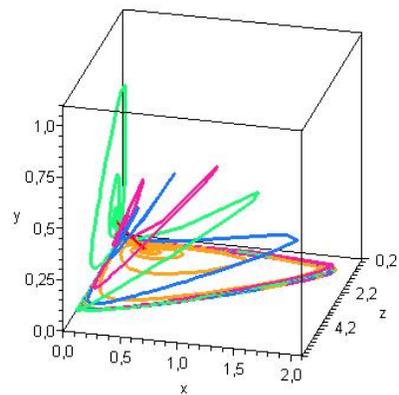


Figura 3.21: Retrato de fase: *continuum* de equilíbrio. Os valores dos parâmetros são: $\gamma = 1$, $a_1 = 0.5$, $d_1 = 1$, $m_1 = 3$, $a_2 = 0.5$, $d_2 = 5$, $m_2 = 6$, $K = 5$, $n = 5$. Intervalo de integração: $[-10,60]$. Condições iniciais: $(0.99, 0.2, 0.08)$, $(0.99, 0, 0.2)$, $(0.99, 0.4, 0)$, $(0.99, 0.25, 0.35)$, $(0.99, 0.45, 0.3)$.