

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

**Estudo de Conexões Heteroclínicas  
em Campos Quadráticos no Plano**

**Rafael Faria Caldeira**

**Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello**

ITAJUBÁ, 15 DE JULHO DE 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

# Estudo de Conexões Heteroclínicas em Campos Quadráticos no Plano

Rafael Faria Caldeira

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.

Área de Concentração: Matemática Aplicada.

ITAJUBÁ – MG

15 DE JULHO DE 2011

*Aos meus pais Sílvio e Maria Iva  
e ao meu irmão Sebastião Arilson.*

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus pela vida que me concedeu, por me dar saúde e condições de estudar. Agradeço a minha amada família, minha mãe Maria Iva, meu pai Sílvio e meu irmão Arilson que tanto me apoiaram e me incentivaram, principalmente nos momentos de dificuldades. Agradeço aos meus tios e tias por estarem sempre me apoiando.

Ao Prof. Luis Fernando, meus sinceros agradecimentos por ter me aceito como seu orientando, pela dedicação, compreensão, paciência, pelo seu tempo e conhecimento dividido comigo.

Aos professores Baeta, Marcia e Mariza, pelo incentivo e conhecimento compartilhado.

Ao Prof. Paulo César Carrião, por ter aceito participar da banca de defesa desta dissertação.

A todos os meus colegas de mestrado e graduação, com os quais fiz grandes amizades, em especial, Adriano, Ana Paula, Juliana, Larissa e P.A., amizades que levarei por toda a minha vida. Aos colegas de república, pelos bons momentos de convívio.

A Capes/Reuni, pela bolsa de estudos, que foi de suma importância para a realização deste trabalho.

“Quem não se movimenta não sente as correntes que o prendem”

Rosa Luxemburgo

# Resumo

Nesta dissertação são estudados os retratos de fase de campos quadráticos no plano, possuindo quatro pontos de equilíbrio e uma conexão heteroclínica em linha reta entre dois pontos de sela. Tais estudos são feitos em dois casos: o caso convexo e o não convexo.

**Palavras-chave:** Retrato de fase; conexão heteroclínica; campo quadrático no plano; compactificação de Poincaré.

# Abstract

In this work we study phase portraits of quadratic vector fields on the plane with four equilibrium points and a heteroclinic connection between two saddle points. We make such studies in two cases: the convex and the non-convex ones.

**Keywords:** Phase portrait; heteroclinic connection; quadratic vector field; Poincaré compactification.

# Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	x
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 A Forma Normal</b>	<b>5</b>
2.1 Fundamentos da Teoria Qualitativa . . . . .	5
2.1.1 Fluxos no Plano . . . . .	5
2.1.2 Sistemas Lineares . . . . .	6
2.1.3 Estrutura Local dos Pontos Singulares Hiperbólicos: Teorema de Hartman-Grobman . . . . .	9
2.1.4 O Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	11
2.1.5 O Teorema de Bautin, a Bifurcação de Hopf e o Ponto sela-nó . . .	12
2.2 Generalidades de Campos Quadráticos Planares . . . . .	15
2.3 A Forma Normal . . . . .	20

<b>3</b>	<b>Singularidades no Infinito</b>	<b>25</b>
3.1	A Compactificação de Poincaré . . . . .	25
3.2	As Singularidades no Infinito . . . . .	30
3.3	Caso Quadrilátero Convexo . . . . .	33
3.4	Caso Quadrilátero Não-Convexo . . . . .	36
<b>4</b>	<b>As Singularidades Finitas</b>	<b>38</b>
4.1	O Caso Convexo . . . . .	40
4.2	O Caso Não Convexo . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Retratos de Fase</b>	<b>42</b>
5.1	Caso Convexo . . . . .	42
5.2	Caso Não-Convexo . . . . .	53
	<b>Conclusões</b>	<b>72</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>73</b>

# Lista de Figuras

1.1	Retratos de fase para o caso convexo. A obtenção de cada um dos retratos de fase será explicada no decorrer do texto. . . . .	3
1.2	Retratos de fase para o caso não convexo. A obtenção de cada um dos retratos de fase será explicada no decorrer do texto. . . . .	4
2.1	Retratos de fase próximos de um nó. . . . .	7
2.2	Retrato de fase próximo de uma sela. . . . .	8
2.3	Retratos de fase próximos de um foco ou centro. . . . .	9
2.4	Interpretação geométrica do Teorema de Hartman-Grobman. . . . .	10
2.5	Retrato de fase do campo numa vizinhança de um ponto sela-nó. . . . .	13
3.1	Projeção central. . . . .	26
3.2	Retrato de fase no disco de Poincaré do sistema (3.4). . . . .	30
5.1	Orientações das órbitas de $\chi$ para o caso convexo. . . . .	43
5.2	Região $G(d)$ . . . . .	48
5.3	Retratos de fase de $\chi_d$ com $m = 0$ . . . . .	53
5.4	Retratos de fase de $\chi_d$ com $m^2 - 4n(l - 1) > 0$ . . . . .	54
5.5	Retratos de fase de $\chi_d$ com $m^2 - 4n(l - 1) < 0$ . . . . .	55
5.6	Retratos de fase de $\chi_d$ com $m^2 - 4n(l - 1) = 0$ . . . . .	56
5.7	Orientações de $\chi$ para o caso não convexo. . . . .	57
5.8	Orientações do campo $\chi$ para $d > \text{Max}\{d_1, d_2\}$ . . . . .	60

5.9	Retratos de fase de $\chi_d$ com $(n - l\varepsilon) = 0$ . Veja também as Figuras 5.7 e 5.8 para os rótulos dos pontos de equilíbrio. . . . .	64
5.10	Retratos de fase de $\chi_d$ com $(n - l\varepsilon) > 0$ e $m > 0$ . Veja também as Figuras 5.7 e 5.8 para os rótulos dos pontos de equilíbrio. . . . .	66
5.11	Retratos de fase de $\chi_d$ com $(n - l\varepsilon) > 0$ e $m = 0$ . Veja também as Figuras 5.7 e 5.8 para os rótulos dos pontos de equilíbrio. . . . .	67
5.12	Retratos de fase de $\chi_d$ com $(n - l\varepsilon) > 0$ e $m < 0$ . Veja também as Figuras 5.7 e 5.8 para os rótulos dos pontos de equilíbrio. . . . .	68
5.13	Retratos de fase de $\chi_d$ com $(n - l\varepsilon) < 0$ e $m > 0$ . Veja também as Figuras 5.7 e 5.8 para os rótulos dos pontos de equilíbrio. . . . .	69
5.14	Retratos de fase de $\chi_d$ com $(n - l\varepsilon) < 0$ e $m = 0$ . Veja também as Figuras 5.7 e 5.8 para os rótulos dos pontos de equilíbrio. . . . .	70
5.15	Retratos de fase de $\chi_d$ com $(n - l\varepsilon) < 0$ e $m < 0$ . Veja também as Figuras 5.7 e 5.8 para os rótulos dos pontos de equilíbrio. . . . .	71

# Lista de Tabelas

2.1	Classificação das singularidades de um sistema linear de equações diferenciais.	9
-----	---	---

# Capítulo 1

## Introdução

Este trabalho busca trazer uma contribuição ao estudo de campos polinomiais planares. Num primeiro momento poderíamos julgar esta abordagem extremamente restritiva, mas, logo nos convencemos da complexidade destes problemas visto que vários deles ainda não possuem solução satisfatória, como, por exemplo, a questão da finitude do número de ciclos limites de sistemas polinomiais planares e o 16º Problema de Hilbert [11]. Além disso, existe uma grande variedade de aplicações nas mais diversas áreas das ciências que requerem o estudo de sistemas polinomiais de equações diferenciais ordinárias no plano e o estudo destes sistemas tem chamado a atenção de matemáticos puros e aplicados.

De forma mais específica, buscamos conhecer os retratos de fase de um sistema quadrático planar com quatro singularidades e possuindo uma conexão heteroclínica de selas em linha reta. Sistemas com conexão de selas são importantes, pois estão na fronteira entre as configurações estáveis. Chicone [8] demonstrou que para sistemas quadráticos gradientes todas as conexões de sela estão em linha reta.

Este trabalho é baseado nos artigos *Planar quadratic vector fields with finite saddle connection on a straight line (convex case)* [5] e *Planar quadratic vector fields with finite saddle connection on a straight line (non-convex case)* [6] publicados recentemente por Paulo Cesar Carrião, Maria Elásir Seabra Gomes e Antonio Augusto Gaspar Ruas.

De forma geral, buscamos demonstrar os dois teoremas a seguir:

**Teorema 1.0.1.** *Seja  $\chi$  um campo de vetores quadrático planar com quatro singularidades formando um quadrilátero convexo e tal que a reta que passa através de duas selas, ambas em regiões limitadas do plano, é invariante. Então, o retrato de fase de  $\chi$  é dado por uma das 30 figuras apresentadas na Figura 1.1.*

**Teorema 1.0.2.** *Seja  $\chi$  um campo de vetores quadrático planar com quatro singularidades formando um quadrilátero não convexo e tal que a reta que passa através de duas selas, ambas em regiões limitadas do plano, é invariante. Então, o retrato de fase de  $\chi$  é dado por uma das 21 figuras apresentadas na Figura 1.2.*

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No segundo capítulo apresentamos definições e alguns resultados que serão importantes no desenrolar do trabalho. Apresentamos também uma forma normal para um sistema quadrático planar com conexão em linha reta entre selas. No terceiro capítulo apresentamos a classificação do comportamento das singularidades em partes não limitadas do plano. Já no capítulo quatro, com o auxílio da compactificação de Poincaré, encontramos e classificamos as singularidades do campo existentes em partes não limitadas do plano. No capítulo cinco apresentamos os retratos de fase do campo em estudo e no sexto e último capítulo tecemos nossas considerações finais.

Salientamos que as demonstrações dos Teoremas 1.0.1 e 1.0.2 estão distribuídas ao longo dos Capítulos 2, 3, 4 e 5.

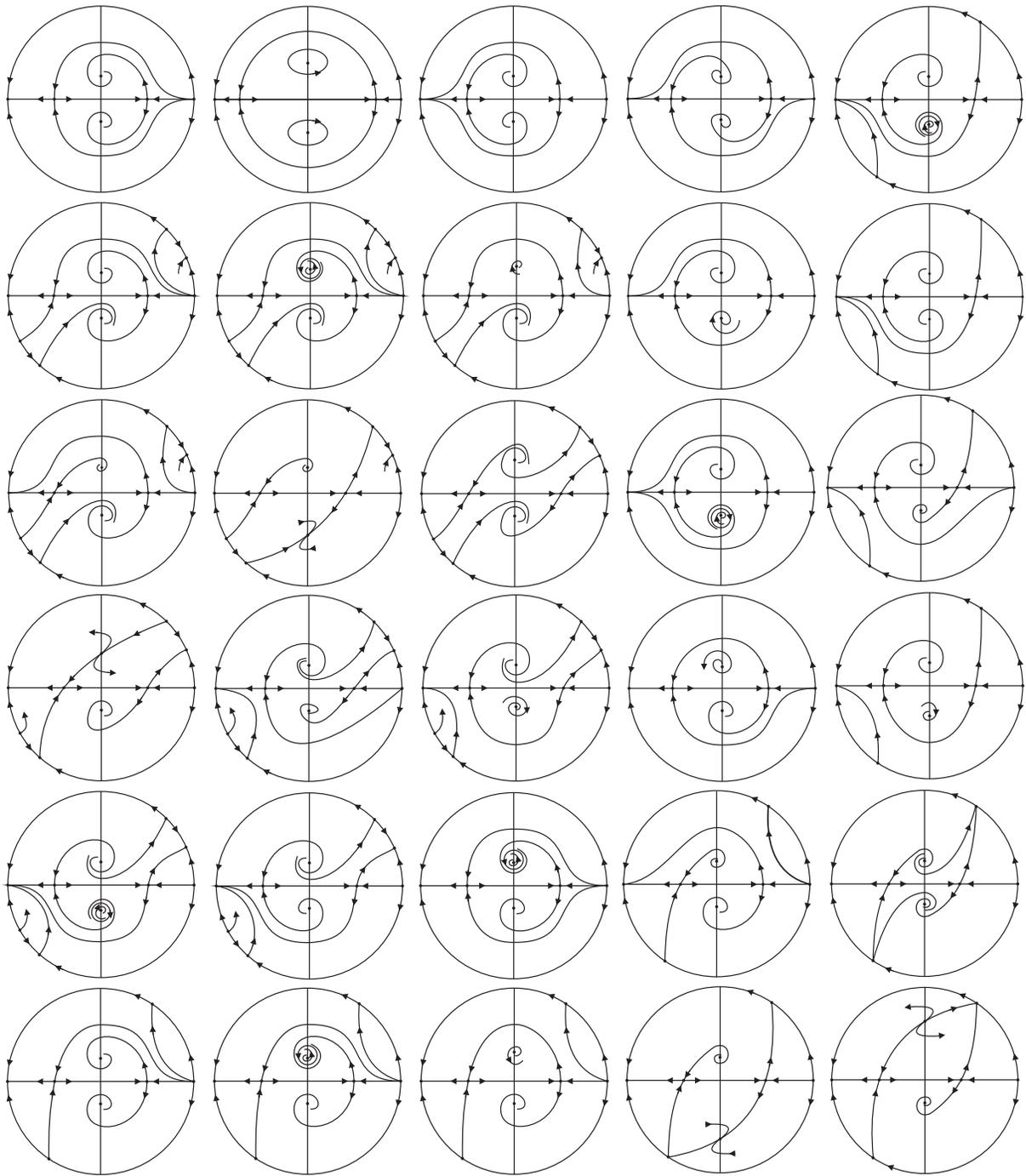


Figura 1.1: Retratos de fase para o caso convexo. A obtenção de cada um dos retratos de fase será explicada no decorrer do texto.

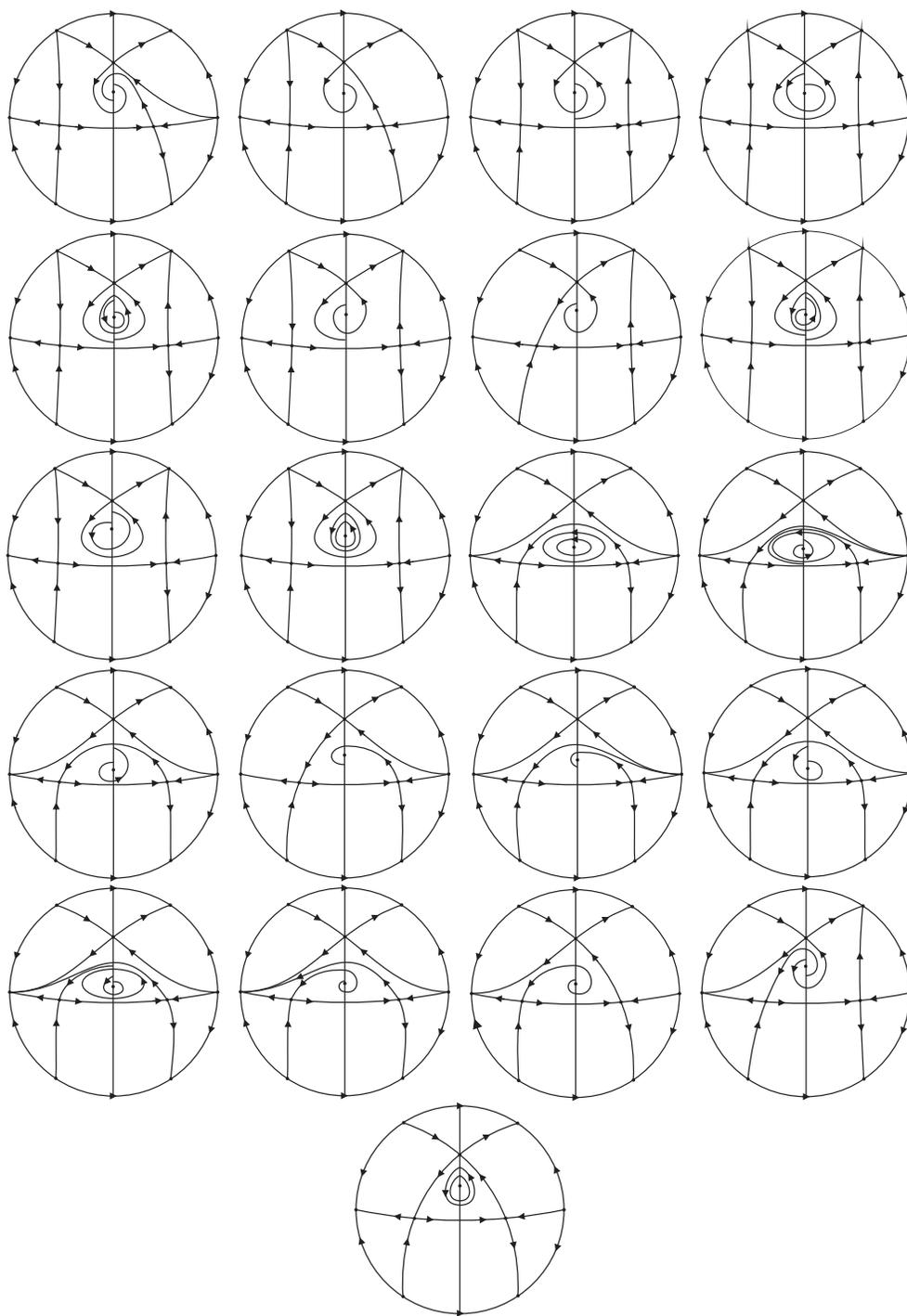


Figura 1.2: Retratos de fase para o caso não convexo. A obtenção de cada um dos retratos de fase será explicada no decorrer do texto.

# Capítulo 2

## A Forma Normal

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados da teoria qualitativa das equações diferenciais no plano que ser-nos-ão úteis no desenrolar deste trabalho. Apresentamos também uma forma normal para o campo quadrático planar com conexão heteroclínica de selas em linha reta.

### 2.1 Fundamentos da Teoria Qualitativa

#### 2.1.1 Fluxos no Plano

**Definição 2.1.1.** *Um campo de vetores polinomial em  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ , onde  $P$  e  $Q$  são polinômios. Dizemos que este campo polinomial é quadrático quando  $\text{Max}\{\text{grau de } P, \text{grau de } Q\} = 2$ . Confundiremos os conceitos de equação diferencial no plano e campo de vetores planares, pois, dado um campo de vetores  $F$  fica definida a equação diferencial  $X' = F(X)$ ,  $X = (x, y)$  e reciprocamente.*

**Definição 2.1.2.** *Um ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  é dito um ponto crítico, ponto de equilíbrio ou singularidade de um campo de vetores  $F(x, y) = (P(x, y), (Q(x, y)))$  se  $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ .*

**Definição 2.1.3.** Uma trajetória de um campo de vetores polinomial  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva diferenciável  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida em um intervalo não degenerado da reta real, tal que

$$\gamma'(t) = F(\gamma(t)), \forall t \in I.$$

**Definição 2.1.4.** Uma aplicação  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  é dita um fluxo se:

i)  $\phi(0, x) = x$ ;

ii)  $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$   $t, s \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.1.5.** Dizemos que um conjunto  $C \subseteq \mathcal{U}$ , onde  $\mathcal{U}$  é um aberto do  $\mathbb{R}^2$  é invariante pelo fluxo se  $\phi(t, C) \subset C$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $\phi$  denota o fluxo. Mais precisamente, dizemos que  $C$  é positivamente invariante se  $\phi(t, C) \subset C$  para todo  $t \geq 0$  e que é negativamente invariante se  $\phi(t, C) \subset C$  para todo  $t \leq 0$ .

Inicialmente vamos estudar como são classificadas as singularidades para sistemas lineares, para depois estudar o caso não linear.

## 2.1.2 Sistemas Lineares

Um sistema de equações diferenciais planares é dito ser linear quando este pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ou, de forma equivalente,  $X' = AX$ , onde  $X = (x, y)$  e  $A$  tem entradas  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Note que se  $\det A \neq 0$ , o único ponto de equilíbrio é a origem  $(0, 0)$ . Caso  $\det A = 0$  e  $A$  seja a matriz nula, então todo ponto do plano é ponto de equilíbrio, se  $A$  não for a matriz nula, então teremos uma reta formada por pontos de equilíbrio.

O polinômio característico de  $A$  é o polinômio dado por

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\text{tr}A)\lambda + \det A,$$

onde  $\text{tr}A = a + d$  e  $\det A = ad - bc$ .

Assim as soluções da equação característica  $p(\lambda) = 0$  são os autovalores de  $A$ . Temos três possibilidades para os autovalores:

- a) autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  reais e distintos;
- b) autovalores complexos conjugados  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ , com  $\beta \neq 0$ ;
- c) autovalor real com multiplicidade dois  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ .

O discriminante da equação característica é dado  $\Delta_p = (\text{tr}A)^2 - 4 \det A$ . Logo, os casos  $a)$ ,  $b)$  e  $c)$  correspondem a  $\Delta_p > 0$ ,  $\Delta_p < 0$  e  $\Delta_p = 0$ , respectivamente.

Assim podemos classificar as singularidades da seguinte forma:

1. Nós: Corresponde ao caso onde as raízes características são reais e de sinais iguais. Dizemos que um nó é próprio quando  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  onde  $\lambda_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2$  e impróprio quando  $\lambda_1 = \lambda_2$ , dizemos também que um nó é atrator ou estável quando os autovalores (ou o autovalor no caso impróprio) possuem (possui) sinal negativo e repulsor ou instável caso o sinal seja positivo. Veja Figura 2.1.

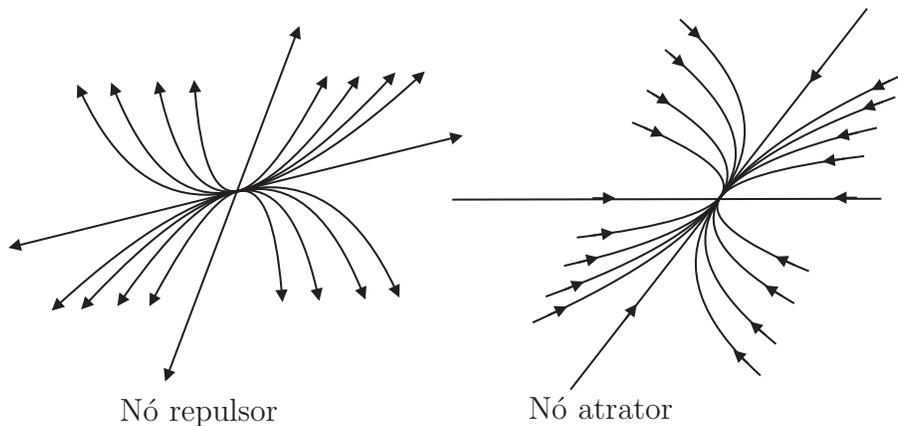


Figura 2.1: Retratos de fase próximos de um nó.

2. Pontos de Sela: Corresponde ao caso onde as raízes características são reais e com sinais opostos. Veja Figura 2.2

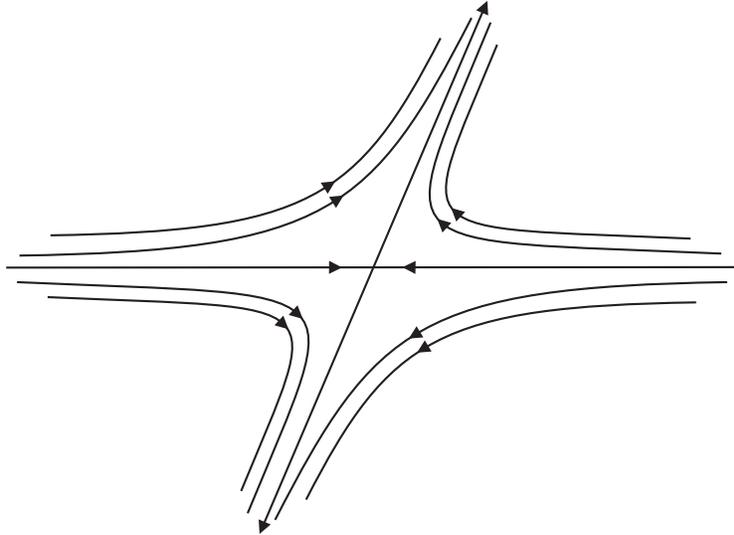


Figura 2.2: Retrato de fase próximo de uma sela.

3. Focos: Corresponde a raízes características complexas conjugadas  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + \beta i$  com  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \neq 0$ . O foco é dito atrator ou estável quando  $\alpha < 0$  e repulsor ou instável quando  $\alpha > 0$ . Veja Figura 2.3.
4. Centro: Corresponde a raízes características complexas com parte real nula. Veja Figura 2.3.

Assim podemos classificar as singularidades de um sistema linear a partir do polinômio característico de  $A$  ( $\det A \neq 0$ ) conforme a Tabela 2.1.

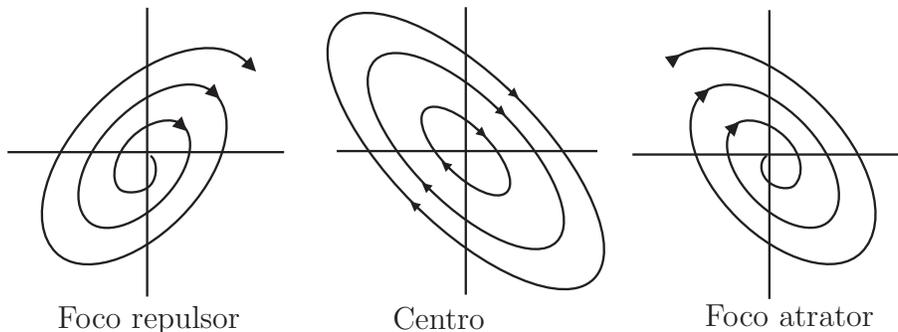


Figura 2.3: Retratos de fase próximos de um foco ou centro.

$\Delta$	det	tr	$(0, 0)$
$> 0$	$< 0$	$\in \mathbb{R}$	sela
$> 0$	$> 0$	$< 0$	nó atrator
$> 0$	$> 0$	$> 0$	nó repulsor
$< 0$	$> 0$	$= 0$	centro
$< 0$	$> 0$	$< 0$	foco atrator
$< 0$	$> 0$	$> 0$	foco atrator
$= 0$	$> 0$	$> 0$	nó repulsor
$= 0$	$> 0$	$< 0$	nó atrator

Tabela 2.1: Classificação das singularidades de um sistema linear de equações diferenciais.

### 2.1.3 Estrutura Local dos Pontos Singulares Hiperbólicos: Teorema de Hartman-Grobman

**Definição 2.1.6.** *Uma matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

*é hiperbólica se seus autovalores não tem partes reais nulas. Dizemos que  $(x_0, y_0)$  é um equilíbrio hiperbólico de um campo de vetores  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se  $F(x_0, y_0) = (0, 0)$  e se a matriz Jacobiana de  $F$  em  $(x_0, y_0)$ ,  $JF(x_0, y_0)$ , tem todos os autovalores com partes reais diferentes de 0.*

**Definição 2.1.7.** *Dois campos de vetores polinomiais  $F_1$  e  $F_2$  definidos, respectivamente em  $U, V \subset \mathbb{R}^2$ , sendo  $U$  e  $V$  abertos, são ditos topologicamente equivalentes quando existir um homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  que leva órbitas de  $F_1$  em órbitas de  $F_2$  preservando as orientações. Se denotarmos por  $\sigma$  e  $\mu$  os fluxos de  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente, dizemos que  $h$  é uma equivalência topológica entre  $F_1$  e  $F_2$  se*

$$h(\sigma(t, (x, y))) = \mu(t, h(x, y)),$$

para todo  $t$  e para todo  $(x, y)$  onde estiverem definidos.

O teorema a seguir nos diz que quando um sistema de equações diferenciais tem uma singularidade hiperbólica, o comportamento local das órbitas numa vizinhança da singularidade é dado pela análise da parte linear do sistema.

**Teorema 2.1.1** (Hartman-Grobman). *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial polinomial e  $(x_0, y_0)$  uma singularidade hiperbólica. Então, existem vizinhanças  $V \subset \mathbb{R}^2$ , com  $(x_0, y_0) \in V$  e  $W \subset \mathbb{R}^2$  com  $(0, 0) \in W$  e um homeomorfismo  $h : V \rightarrow W$  que satisfaz a equação de equivalência topológica.*

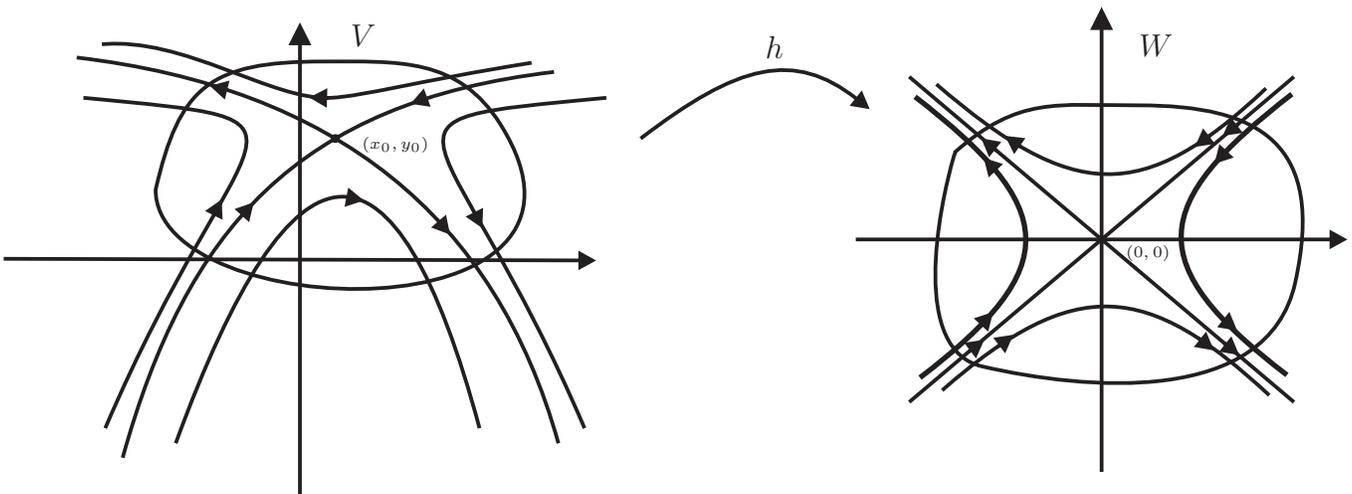


Figura 2.4: Interpretação geométrica do Teorema de Hartman-Grobman.

A demonstração do Teorema de Hartman-Grobman pode ser encontrada na referência [15]. Uma ilustração deste teorema pode ser vista na Figura 2.4.

**Definição 2.1.8.** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial polinomial. Uma solução  $\phi$  é uma órbita periódica ou fechada se não for uma solução de equilíbrio e existir um  $\tau > 0$  tal que  $\phi(\tau, X) = X$ , para algum  $X \in \mathbb{R}^2$ . Logo,  $\phi(\tau + t, X) = \phi(t, \phi(\tau, X)) = \phi(t, X)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Logo, podemos definir a órbita periódica por  $\gamma = \{\phi(t, X), t \in \mathbb{R}\}$ .*

**Definição 2.1.9.** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial polinomial. Uma órbita periódica  $\gamma$  de  $F$  é chamada ciclo limite se existe uma vizinhança  $V$  de  $\gamma$  tal que  $\gamma$  é a única órbita fechada de  $F$  contida  $V$ , ou seja, um ciclo limite é uma órbita periódica isolada no conjunto das órbitas periódicas.*

## 2.1.4 O Teorema de Poincaré-Bendixson

**Definição 2.1.10.** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial e seja  $\varphi(t) = \varphi(t, (x_0, y_0))$  a trajetória de  $F$  passando pelo ponto  $(x_0, y_0)$  definida no seu intervalo maximal  $I_{(x_0, y_0)} = (\omega_-(x_0, y_0), \omega_+(x_0, y_0))$ .*

*Se  $\omega_+(x_0, y_0) = \infty$ , definimos o conjunto*

$$\omega(x_0, y_0) = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2; \exists(t_n), t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n, (x_0, y_0)) \rightarrow (x_1, y_1), n \rightarrow \infty\}$$

*como sendo o conjunto  $\omega$ -limite de  $(x_0, y_0)$ .*

*Se  $\omega_-(x_0, y_0) = -\infty$ , definimos o conjunto*

$$\alpha(x_0, y_0) = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2; \exists(t_n), t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n, (x_0, y_0)) \rightarrow (x_1, y_1), n \rightarrow \infty\}$$

*como sendo o conjunto  $\alpha$ -limite de  $(x_0, y_0)$ .*

Notemos que se  $\varphi(t) = \varphi(t, (x_0, y_0))$  é trajetória do campo polinomial  $F$  pelo ponto  $(x_0, y_0)$  e se  $\psi(t) = \psi(t, (x_0, y_0))$  é a trajetória do campo vetorial polinomial  $-F$  pelo ponto  $(x_0, y_0)$ , temos  $\psi(t, (x_0, y_0)) = \varphi(-t, (x_0, y_0))$ .

Logo temos que

$$\omega\text{-limite de } \varphi(t) = \alpha\text{-limite de } \psi(t)$$

$$\omega\text{-limite de } \psi(t) = \alpha\text{-limite de } \varphi(t).$$

Por isso, para enunciar o próximo lema iremos nos restringir ao conjunto  $\omega$ -limite.

**Lema 2.1.1.** *Sejam  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo polinomial,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $[0, \infty) \subset I_{(x_0, y_0)}$ ,  $\gamma_{(x_0, y_0)}^+ = \{\varphi(t, (x_0, y_0)), t \geq 0\}$  a semi órbita positiva do campo  $F$  pelo ponto  $(x_0, y_0)$ . Se  $\gamma_{(x_0, y_0)}^+$  está contida em  $K \subset \mathbb{R}^2$ ,  $K$  compacto, então:*

1.  $\omega(x_0, y_0) \neq \emptyset$ ;
2.  $\omega(x_0, y_0)$  é compacto;
3.  $\omega(x_0, y_0)$  é invariante por  $F$ , isto é, se  $(x_1, y_1) \in \omega(x_0, y_0)$ , então a trajetória de  $F$  por  $(x_1, y_1)$  está contida em  $\omega(x_0, y_0)$ ;
4.  $\omega(x_0, y_0)$  é conexo.

A demonstração deste lema pode ser encontrada na referência [15]. Um resultado análogo pode ser obtido para o conjunto  $\alpha(x_0, y_0)$ .

**Teorema 2.1.2** (Poincaré-Bendixson). *Seja  $\rho$  um conjunto limite não vazio e compacto de um sistema de equações diferenciais planares. Se  $\rho$  não contém pontos de equilíbrio, então  $\rho$  é formado por uma única órbita fechada.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [13].

## 2.1.5 O Teorema de Bautin, a Bifurcação de Hopf e o Ponto sela-nó

**Definição 2.1.11.** *Considere um campo vetorial planar  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ . Uma singularidade não hiperbólica  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  é chamada sela-nó se as seguintes condições são satisfeitas:*

- a)  $JF(x_0, y_0)$  tem um único autovalor simples igual a zero;

b)  $W(D_{(x,y)}^2 F(x_0, y_0)(V, V)) = W(VHessP(x_0, y_0)V, VHessQ(x_0, y_0)V) \neq 0$ , onde  $W$  é um autovetor à esquerda e  $V$  um autovetor à direita associados ao autovalor 0 e  $HessP$  e  $HessQ$  são as matrizes Hessianas de  $P$  e  $Q$ , respectivamente. Veja ilustração na Figura 2.5.

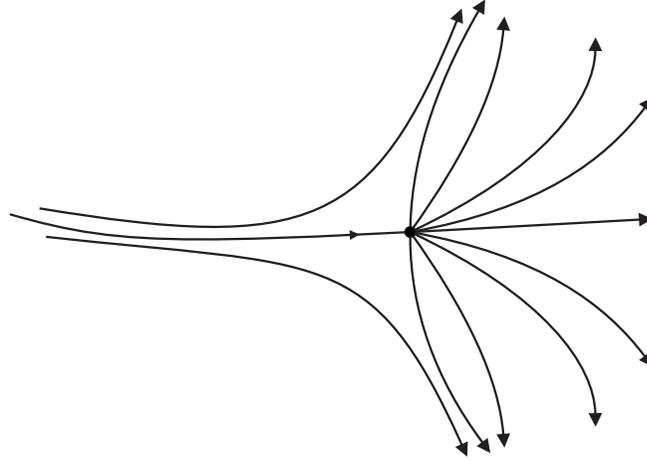


Figura 2.5: Retrato de fase do campo numa vizinhança de um ponto sela-nó.

O teorema de Bautin nos ajuda a decidir se uma singularidade não hiperbólica é um foco ou um centro.

**Teorema 2.1.3** (Bautin). *Considere um sistema da forma*

$$\begin{cases} x' = \delta_1 x - y - \delta_3 x^2 + (2\delta_2 + \delta_5)xy + \delta_6 y^2 \\ y' = x + \delta_1 y + \delta_2 x^2 + (2\delta_3 + \delta_4)xy - \delta_2 y^2, \end{cases}$$

com  $\delta_1 = 0$ . A origem é um centro se, e somente se, uma das seguintes condições for satisfeita:

- a)  $\delta_3 = \delta_6$ ;
- b)  $\delta_2 = \delta_5 = 0$ ;
- c)  $\delta_4 = \delta_5 = 0$ ;
- d)  $\delta_5 = \delta_4 + 5(\delta_3 - \delta_6) = \delta_3 \delta_6 - \delta_2^2 - 2\delta_6^2 = 0$ .

A demonstração do Teorema de Bautin pode ser encontrada em [14].

A idéia de uma bifurcação é a de uma mudança drástica no retrato de fase de um sistema dependente de parâmetros, para determinados valores dos parâmetros. Considere uma família  $F_d$  de campos em  $\mathbb{R}^2$ , onde  $d \in \mathbb{R}$  é um parâmetro. Mais precisamente, dizemos que  $d_0 \in \mathbb{R}$  é um parâmetro de bifurcação quando existir  $\epsilon > 0$ , tal que, para todo  $d \in (d_0 - \epsilon, d_0 + \epsilon)$  os sistemas  $X' = F_d(X)$  e  $X' = F_{d_0}(X)$  não são topologicamente equivalentes.

Geometricamente, uma bifurcação de Hopf ocorre se existe uma mudança de estabilidade da singularidade, de foco estável para foco instável (ou o contrário) gerando um ciclo limite. Veja [12].

No próximo teorema faremos uso do primeiro coeficiente de Lyapunov. Este coeficiente nos ajuda a decidir sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio não hiperbólico. Caso seja positivo, temos um foco fraco repulsor e caso seja negativo teremos um foco fraco atrator. Para mais informações sobre o coeficiente de Lyapunov, inclusive como obtê-lo, veja [2].

A demonstração do seguinte teorema pode ser encontrada em [12].

**Teorema 2.1.4** (Bifurcação de Hopf). *Suponha que  $X' = F_d(X)$ ,  $F_d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  suave para cada  $d$  e tal que para  $d = 0$ ,  $(x, y) = (0, 0)$  é uma singularidade onde os autovalores de  $JF|_{d=0}(0, 0)$  são  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta_0$ , com  $\beta_0 > 0$ . Suponha que:*

a)  $\alpha'(0) = 0$ , onde  $\lambda_1(d) = \alpha(d) + i\beta(d)$  e  $\lambda_2 = \bar{\lambda} = \alpha(d) - i\beta(d)$  são autovalores de  $A(d) = JF(x(d), y(d), d)$ ;

b) o primeiro coeficiente de Lyapunov é não nulo.

Então ocorre uma bifurcação de Hopf em  $d = 0$ .

## 2.2 Generalidades de Campos Quadráticos Planares

De modo geral, um campo quadrático planar é escrito da seguinte forma

$$\chi : \begin{cases} x' = P(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 a_{ij} x^i y^j, \\ y' = Q(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij} x^i y^j, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $P$  e  $Q$  são relativamente primos e  $P$  ou  $Q$  tem grau 2.

**Lema 2.2.1.** *Considere  $\chi$  um campo quadrático planar. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

a) *Existem no máximo quatro pontos de equilíbrio;*

b) *Três equilíbrios nunca estão numa mesma reta;*

c) *Se  $L$  é uma reta unindo dois pontos de equilíbrio de  $\chi$ , então  $L$  é uma isóclina.*

**Demonstração:** A demonstração da afirmação a) é imediata, pois as singularidades são soluções de

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases}$$

isto é, duas cônicas tem no máximo quatro pontos de interseção. Seja  $L$  uma reta contendo 3 pontos de equilíbrio. Então,  $L$  intersepta cada cônica  $P(x, y) = 0$  e  $Q(x, y) = 0$  em 3 pontos. Isto implica que  $L \subset P = 0$  e  $L \subset Q = 0$ , de modo que  $L$  é um fator comum de  $P$  e  $Q$ , contrariando a hipótese de  $P$  e  $Q$  serem primos, concluindo a prova do item b). Sejam  $A, B \in L$  singularidades de modo que, sem perda de generalidade,  $A = (0, 0)$  e,  $L$  é o gráfico de  $y = mx$ , onde  $m$  é o coeficiente angular de  $L$ .

$$\eta(x, mx) = \frac{Q(x, mx)}{P(x, mx)} = \kappa,$$

pois  $P(x, mx)$  e  $Q(x, mx)$  são polinômios quadráticos na variável  $x$  tendo zeros comuns. Logo, diferem por uma constante o que prova a afirmação c).

■

**Definição 2.2.1.** *Sejam  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  um campo de vetores e  $L$  uma reta qualquer. Dizemos que  $F$  tem contato com  $L$  no ponto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  se  $(x_0, y_0) \in L$  e se  $F(x_0, y_0)$  é paralelo a  $L$ .*

**Lema 2.2.2.** *Suponha que os autovalores da linearização de  $\chi$  em uma singularidade  $O$  sejam reais. Então:*

- a) *Ou existe uma reta  $L$  invariante passando por  $O$ ;*
- b) *Ou existe uma reta  $L$  passando por  $O$  sobre a qual não existem outros equilíbrios ou contatos, de modo que a orientação do campo ao longo de  $L$  não muda em  $O$ .*

**Demonstração:** Suponha, sem perda de generalidade, que  $O = (0, 0)$  seja uma singularidade do sistema  $\chi$ . Assim,

$$F(x, y) = \begin{cases} P(x, y) = a_{10}x + a_{11}xy + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 \\ Q(x, y) = b_{10}x + b_{11}xy + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{02}y^2. \end{cases} \quad (2.2)$$

Tome  $L$  da forma  $ax + y = 0 \Leftrightarrow y = -ax$ , onde “ $a$ ” deverá ser determinado. Defina

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto V(x, y) = ax + y. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} V'(x, y) &= \nabla V(x, y) \cdot F(x, y) \\ &= (a, 1) \cdot F(x, -ax) \\ &= (-a_{11}a^2 + (a_{10} - b_{01})a + b_{10})x + (a_{02}a^3 + (b_{02} - a_{11})a^2 + (a_{20} - b_{11})a + b_{20})x^2 \\ &= n(a)x + m(a)x^2, \end{aligned}$$

onde  $n(a) = -a_{11}a^2 + (a_{10} - b_{01})a + b_{10}$  e  $m(a) = a_{02}a^3 + (b_{02} - a_{11})a^2 + (a_{20} - b_{11})a + b_{20}$ .

Assim, o discriminante de  $n(a) = 0$  é dado por

$$\Delta_n = (a_{10} - b_{01})^2 - 4(-a_{01})(b_{10}) = (a_{10} - b_{01})^2 + 4a_{01}b_{10}.$$

A matriz Jacobiana de  $F$  em  $(0, 0)$  é dada por

$$JF(0, 0) = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{01} \\ b_{10} & b_{01} \end{vmatrix},$$

portanto, temos o seguinte polinômio característico  $p(\lambda) = \lambda^2 - (a_{10} + b_{01})\lambda + (a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10})$ . Como por hipótese, os autovalores de  $JF(0, 0)$  são reais, devemos ter

$$0 \leq \Delta_p(\lambda) = (a_{10} + b_{01})^2 - 4(a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10}) = (a_{10} - b_{01})^2 + 4a_{01}b_{10} = \Delta_n,$$

logo,  $n(a)$  tem raízes reais, seja  $a = a_1$  uma destas raízes, isto é,  $n(a_1) = 0$ . Temos dois casos:

I) Se  $m(a_1) = n(a_1) = 0$ , então  $V'(x, y)|_L \equiv 0$  e, portanto,  $L$  é uma reta invariante.

II) Se  $n(a_1) = 0$ , mas  $m(a_1) \neq 0$ , então  $V'(x, y)|_L = m(a_1)x^2$ , que tem sinal fixo. Logo, a orientação do campo não muda ao longo de  $L$ .

■

**Lema 2.2.3.** *Uma singularidade na região limitada por uma órbita fechada em um sistema quadrático deve ser um foco ou um centro.*

**Demonstração:** Assuma, sem perda de generalidade, que a singularidade esteja na origem. Assim, o sistema quadrático pode ser escrito da da forma (2.2). Assuma, por contradição, que a singularidade na origem não seja um foco nem um centro. Então os autovalores da parte linear deste sistema quadrático na origem serão reais. Desta forma, estamos nas hipóteses do Lema 2.2.2 e então, ou existe uma reta  $L$  invariante passando por  $O$ , ou existe uma reta  $L$  passando pela origem sobre a qual não existem outros equilíbrios ou contatos, de modo que a orientação do campo ao longo de  $L$  não muda em  $O$ . Mas, isso inviabiliza a existência de uma órbita fechada circundando a origem, o que é um absurdo.

■

**Definição 2.2.2.** *Uma singularidade de um campo de vetores planar é uma anti-sela se o retrato de fase numa vizinhança sua for topologicamente equivalente ao retrato de fase numa vizinhança de um nó, centro ou foco.*

**Lema 2.2.4.** *Suponha que o sistema (2.1) tenha quatro equilíbrios. Então, estes equilíbrios são vértices de um quadrilátero.*

- a) *Se este quadrilátero é convexo, então existem dois vértices opostos que são selas e os outros dois vértices (opostos) são anti-selas;*
- b) *Se este quadrilátero é não convexo, então os vértices exteriores são selas e o vértice interior é uma anti-sela, ou vice versa. Em particular, existem no máximo três selas e no máximo três anti-selas.*

**Demonstração:** Nas hipóteses do lema, através de uma translação seguida por uma transformação linear podemos considerar que os pontos críticos sejam  $O = (0, 0)$ ,  $A = (1, 0)$ ,  $B = (0, 1)$ ,  $C = (\alpha, \beta)$ , onde  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$  e  $\alpha + \beta \neq 1$  e o sistema  $\chi$  seja escrito na forma

$$\begin{cases} x' = a_1x(x-1) + b_1y(y-1) + c_1xy = P_*(x, y), \\ y' = a_2x(x-1) + b_2y(y-1) + c_2xy = Q_*(x, y), \end{cases}$$

onde

$$c_i = -\frac{\alpha-1}{\beta}a_i - \frac{\beta-1}{\alpha},$$

para  $i = 1, 2$ . Vamos demonstrar o caso em que  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , nos demais casos a demonstração é análoga. A matriz Jacobiana do campo  $F(x, y)$  é dada por

$$JF(x, y) = \begin{bmatrix} 2a_1x - a_1 + c_1y & 2b_1y - b_1 + c_1x \\ 2a_2x - a_2 + c_2y & 2b_2y - b_2 + c_2x \end{bmatrix}.$$

Assim,  $\det(JF(0, 0)) = a_1b_2 - a_2b_1$ . Suponhamos que  $\det(JF(0, 0)) = 0$ , ou seja,  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Rightarrow a_2b_1 = a_1b_2$ . Logo,

$$\begin{aligned} b_1Q(x, y) &= b_1a_2x(x-1) + b_1b_2y(y-1) + b_1c_2xy \\ &= b_2a_1x(x-1) + b_2b_1y(y-1) + b_1c_2xy \end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned} b_1c_2 &= -\frac{\alpha-1}{\beta}a_2b_1 - \frac{\beta-1}{\alpha}b_2b_1 \\ &= b_2\left[-\frac{\alpha-1}{\beta}a_1 - \frac{(\beta-1)}{\alpha}b_1\right] \\ &= b_2c_1 \end{aligned}$$

e então,

$$b_1Q(x, y) = b_2[a_1x(x - 1) + b_1y(y - 1) + c_1xy] = b_2P(x, y),$$

o que é um absurdo, visto que,  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  são relativamente primos. Logo,  $\det(JF(x, y)) \neq 0$ . A singularidade  $O$  será uma sela se  $\det(JF(0, 0)) < 0$  e uma anti-sela se  $\det(JF(0, 0)) > 0$ . Com relação as demais singularidades temos:

$$\det(JF(A)) = - \left\{ \frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha} \right\} \det(JF(O)),$$

$$\det(JF(B)) = - \left\{ \frac{\alpha + \beta - 1}{\beta} \right\} \det(JF(O)),$$

$$\det(JF(C)) = \{\alpha + \beta - 1\} \det(JF(O)).$$

Caso  $\alpha + \beta > 1$ , os sinais dos determinantes  $\det(JF(A))$  e  $\det(JF(B))$  são contrários ao sinal de  $\det(JF(O))$ . Por outro lado, o sinal de  $\det(JF(C))$  concorda com a sinal de  $\det(JF(O))$ . Se  $\det(JF(O)) < 0$ , então  $\det(JF(C)) < 0$ ,  $\det(JF(A)) > 0$  e  $\det(JF(B)) > 0$ , de onde  $O$  e  $C$  são selas e  $A$  e  $B$  são anti-selas. Caso  $\alpha + \beta < 1$ ,  $\det(JF(A))$  e  $\det(JF(B))$  tem o mesmo sinal de  $\det(JF(O))$  e  $\det(JF(C))$  tem sinal oposto ao sinal de  $\det(JF(O))$ . Portanto,  $O$ ,  $A$ ,  $B$  ou são selas e, neste caso,  $C$  é uma anti-sela, ou são anti-selas e, neste caso,  $C$  é sela.

■

**Definição 2.2.3.** *Seja  $(x_0, y_0)$  uma singularidade de um campo  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\gamma$  uma curva de Jordan que limita um disco contendo  $(x_0, y_0)$  como única singularidade no seu interior. Suponhamos que o ponto  $(x, y)$  percorre  $\gamma$  no sentido positivo. Como, sobre  $\gamma$ ,  $F(x, y) \neq (0, 0)$ , a correspondência  $(x, y) \rightarrow \frac{F(x, y)}{\|F(x, y)\|}$  define então uma aplicação  $f : \gamma \rightarrow \mathbb{S}^1$  onde  $\mathbb{S}^1$  é o círculo unitário. Definimos, então, o índice de  $F$  em  $(x_0, y_0)$ ,  $I(F, (x_0, y_0)) = I(F, \gamma)$ , como o grau dessa aplicação.*

O índice  $I(F, (x_0, y_0))$  possui grande estabilidade seja no que diz respeito a variações do campo  $F$ , seja no que diz respeito a variação da curva  $\gamma$ . Esta estabilidade fica preservada quando consideramos não apenas o índice de uma única singularidade, mas a soma dos

índices de todas as singularidades de  $F$ . Para maiores informações sobre o índice veja, por exemplo, [3].

**Lema 2.2.5.** *Suponha que um sistema quadrático planar tenha somente três singularidades  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Então, pelo menos uma singularidade é uma anti-sela.*

**Demonstração:** Considere o sistema (2.1) com quatro singularidades. Iremos considerar o caso onde as três singularidades restantes são obtidas por uma bifurcação de um sistema que apresenta quatro singularidades. Vamos analisar o caso convexo e o não convexo.

I) Caso convexo: Pelo Lema 2.2.4 sabemos que as quatro singularidades determinam um quadrilátero convexo e que se dois vértices opostos do quadrilátero são selas os outros dois são anti-selas. Observe que é impossível uma sela se colapsar com outra sela, pois para que isso acontecesse, haveria um momento em que teríamos três singularidades em linha reta o que é impossível. Pelo mesmo motivo, as duas anti-selas não se colapsam. Assim nos resta somente a possibilidade de uma anti-sela se colapsar com uma sela, mas então, teremos no mínimo uma anti-sela.

II) Caso não convexo: Neste caso só pode ocorrer colapso da singularidade contido no interior do triângulo formado pelas outras três com uma destas três singularidades. Se a singularidade que está no interior do triângulo é uma sela, as outras três são anti-selas e então se a sela se colapsar com uma anti-sela, ainda temos duas anti-selas. Agora, se a singularidade que se encontra no interior do triângulo for uma anti-sela, as outras três serão selas e quando esta sela se colapsar com uma anti-sela, a singularidade resultante será uma anti-sela, pois caso contrário teríamos uma mudança no índice do campo que é a soma do índice de cada singularidade, o que é impossível.

■

## 2.3 A Forma Normal

**Lema 2.3.1.** *Consideremos o campo quadrático planar dado por  $\chi$  em (2.1) possuindo uma conexão heteroclínica de selas em linha reta. Se a conexão de selas é horizontal,*

então  $b_{11} \neq 0$ .

**Demonstração:** Seja  $y = c$  a reta invariante que contém os pontos de sela  $(x_1, c)$  e  $(x_2, c)$ . Temos que  $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, c) = 0$  pois, a reta  $y = c$  é invariante. Como  $x_1$  e  $x_2$  são raízes da equação  $P(x, c) = a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xc + a_{02}c^2 + a_{01}c = 0$ , então,  $\frac{\partial P}{\partial x}(x_1, c)$  e  $\frac{\partial P}{\partial x}(x_2, c)$  tem sinais opostos. Mas, se  $b_{11} = 0$ , então  $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, c) = b_{01} + 2b_{02}c$  que é uma constante e o determinante da matriz Jacobiana de (2.1) nos pontos  $(x_1, c)$  e  $(x_2, c)$ , tem sinais opostos, contradizendo o fato destas singularidades serem selas. ■

**Lema 2.3.2.** *Consideremos o campo quadrático planar dado por  $\chi$  em (2.1) possuindo uma conexão heteroclínica de selas em linha reta. Se  $\chi$  tiver mais do que duas singularidades, então ele pode ser escrito na forma*

$$\chi : \begin{cases} x' = dx + \varepsilon y + lx^2 + mxy + ny^2, \\ y' = x(1 + y), \end{cases} \quad (2.3)$$

com  $l < 0$ ,  $\varepsilon < n$  e  $\varepsilon \leq 0$ . Teremos três singularidades se  $n\varepsilon = 0$  e quatro singularidades se  $n\varepsilon \neq 0$ . No último caso, o quadrilátero é convexo se  $n < 0$  e não convexo se  $n > 0$ .

**Demonstração:** Desde que o campo dado por  $\chi$  tenha 3 singularidades, pelo Lema 2.2.5, umas delas não é uma sela. Suponhamos, então, que este ponto seja a origem e que a reta invariante, suporte das selas, seja a reta  $y = -1$ . Assim, podemos reescrever (2.1) da seguinte forma

$$\begin{cases} x' = a_{10}x + a_{11}xy + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{02}y^2, \\ y' = b_{10}x + b_{11}xy + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{02}y^2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Como a reta  $y = -1$  é invariante, temos que  $Q(x, -1) = 0$  para todo  $x \in (-\infty, \infty)$ . Logo,

$$\begin{aligned} Q(x, -1) &= b_{10}x - b_{01} + b_{20}x^2 - b_{11}x + b_{02} \\ &= (b_{02} - b_{01}) + (b_{10} - b_{11})x + b_{20}x^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo  $x \in (-\infty, \infty)$ . Se  $x = 0$ , temos  $(b_{02} - b_{01}) = 0$ , ou seja,  $b_{02} = b_{01}$ . Sabemos que  $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, -1) = 0 = b_{10} + 2b_{02}x - b_{11}$ . Se  $x = 0$ , temos  $\frac{\partial Q}{\partial x}(0, -1) = b_{10} - b_{11}$ , de onde se conclui que  $b_{10} = b_{11} \neq 0$ , pelo Lema 2.3.1. Se  $x \neq 0$ , concluimos que  $b_{20} = 0$ . Assim, podemos reescrever (2.4) da seguinte forma

$$\begin{cases} x' = a_{10}x + a_{11}xy + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{02}y^2, \\ y' = b_{11}x + b_{11}xy + b_{01}y + b_{01}y^2. \end{cases}$$

Chamando  $b_{11} = b_{10} = \alpha$  e  $b_{01} = b_{02} = \beta$ , obtemos

$$\begin{cases} x' = a_{10}x + a_{11}xy + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 \\ y' = (\alpha x + \beta y)(1 + y), \end{cases} \quad (2.5)$$

com  $\alpha \neq 0$  pelo Lema 2.3.1. Agora vamos realizar a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} X = \alpha x + \beta y, \\ Y = y. \end{cases} \quad (2.6)$$

Assim,

$$\begin{aligned} X' &= \alpha x' + \beta y' \\ &= \alpha(a_{10}x + a_{11}xy + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{02}y^2) + \beta(\alpha x + \beta y)(1 + y) \\ &= \alpha a_{10}x + \alpha a_{01}y + \alpha a_{11}xy + \alpha a_{20}x^2 + \alpha a_{02}y^2 + \alpha \beta x + \beta^2 y + \alpha \beta xy + \beta^2 y^2. \end{aligned}$$

Substituindo  $y = Y$  e  $x = (X - \beta Y)/\alpha$ , temos

$$X' = \frac{(a_{10}\alpha + \beta\alpha)X + (a_{01}\alpha^2 - a_{10}\alpha\beta)Y + (\alpha a_{11} - 2a_{20}\beta + \alpha\beta)XY + a_{20}X^2 + (a_{20}\beta^2 + a_{02}\alpha^2 - a_{11}\alpha)Y^2}{\alpha}.$$

Com relação a  $Y'$ , temos

$$Y' = y' = (\alpha x + \beta y)(1 + y) = X(1 + Y).$$

Então, podemos reescrever o campo (2.4) como

$$\begin{cases} x' = dx + \varepsilon y + lx^2 + mxy + ny^2, \\ y' = x(1 + y), \end{cases} \quad (2.7)$$

onde  $X = x$  e  $Y = y$ . Mas, como a reta  $y = -1$  que contém duas singularidades do tipo sela é invariante, temos

$$x'(x, -1) = dx - \varepsilon + lx^2 - mx + n = lx^2 + (d - m)x + (n - \varepsilon) = 0,$$

com duas raízes distintas

$$x_1 = \frac{m-d-\sqrt{\Delta}}{2l} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{m-d+\sqrt{\Delta}}{2l}, \quad (2.8)$$

onde  $\Delta = (m-d)^2 - 4l(n-\varepsilon)$ . As matrizes Jacobianas de (2.7) nas singularidades  $(x_1, -1)$  e  $(x_2, -1)$  são dadas por

$$JF(x_1, -1) = \begin{bmatrix} -\sqrt{\Delta} & \varepsilon + mx_1 - 2n \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad JF(x_2, -1) = \begin{bmatrix} \sqrt{\Delta} & \varepsilon + mx_2 - 2n \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}.$$

Como  $(x_1, -1)$  é ponto de sela, o determinante deve ter sinal negativo, ou seja,

$$\det(JF(x_1, -1)) < 0 \Rightarrow -\sqrt{\Delta}x_1 < 0 \Rightarrow x_1 > 0.$$

De forma análoga,

$$\det(JF(x_2, -1)) < 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}x_2 < 0 \Rightarrow x_2 < 0.$$

Visto que  $x_2 - x_1 < 0$ , temos

$$\frac{m-d+\sqrt{\Delta}}{2l} - \frac{m+d+\sqrt{\Delta}}{2l} = \frac{\sqrt{\Delta}}{l} < 0 \Rightarrow l < 0.$$

Como  $x_1 > 0$  (ou  $x_2 < 0$ ), temos que

$$4l(n-\varepsilon) < 0 \Rightarrow l(n-\varepsilon) < 0$$

e como consequência  $n > \varepsilon$ . Finalmente, temos  $\varepsilon \leq 0$ , pois

$$\det JF(0,0) = \begin{vmatrix} d+2l & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\varepsilon$$

e como  $(0,0)$  não é uma sela, então  $\varepsilon \leq 0$ . Com relação as demais singularidades, analisando (2.7), observamos que o campo se anula na direção do eixo  $0y$ , ou  $1+y=0$  quando  $y = -1$  ou  $x = 0$ .

Se  $y = -1$ , o campo se anula na direção  $x$ , ou seja,  $x' = 0$  quando  $x = x_1$  ou  $x = x_2$ .

Se  $x = 0$ , o campo se anula na direção  $x$  quando  $x' = \varepsilon y + ny^2 = 0 = y(\varepsilon + ny)$ , ou seja,  $y = 0$  ou  $y = -\frac{\varepsilon}{n}$ , com  $n\varepsilon \neq 0$ . Neste caso, as singularidades são

$$O = (0, 0), \quad S_1 = (x_1, -1), \quad S_2 = (x_2, -1) \quad \text{e} \quad F = \left(0, \frac{-\varepsilon}{n}\right).$$

Caso  $n\varepsilon = 0$ , as singularidades  $O$  e  $F$  colidem e então teremos três singularidades:

$$O = (0, 0), \quad S_1 = (x_1, -1), \quad \text{e} \quad S_2 = (x_2, -1).$$

No caso  $n\varepsilon \neq 0$ , o quadrilátero é convexo se  $n < 0$  e não convexo se  $n > 0$ .

■

**Observação 2.3.1.** *As funções  $x_1 = x_1(d)$  e  $x_2 = x_2(d)$ , dadas em (2.8), são estritamente crescentes.*

Neste trabalho preocuparemos-nos com o caso em que  $n\varepsilon \neq 0$  e estudaremos o caso convexo e o não convexo.

# Capítulo 3

## Singularidades no Infinito

Neste capítulo buscaremos compreender o comportamento assintótico das órbitas do campo  $\chi$  no infinito. Para isso, usaremos o método da projeção central e a compactificação de Poincaré.

### 3.1 A Compactificação de Poincaré

Dentre as diversas formas de se compactificar o  $\mathbb{R}^2$ , utilizaremos o método da projeção central juntamente com a compactificação de Poincaré. Boas referências sobre este assunto podem ser encontradas em [1] e [10].

Dado um campo vetorial polinomial planar  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ , considere o  $\mathbb{R}^2$  como um plano  $\pi$  no  $\mathbb{R}^3$  definido por  $(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, 1)$ . Seja  $\mathbb{S}^2 = \{Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$  a esfera unitária, tangente a  $\pi$  no ponto  $(0, 0, 1)$ , a qual chamaremos de esfera de Poincaré. Definimos  $H^+ = \{Y \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\}$  o hemisfério superior da esfera  $\mathbb{S}^2$ ,  $H^- = \{Y \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\}$  o hemisfério inferior da esfera  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{S}^1 = \{Y \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$  o equador da esfera de  $\mathbb{S}^2$ . Assim,  $\mathbb{S}^2 = H^+ \cup H^- \cup \mathbb{S}^1$ .

Via projeção central, podemos obter duas cópias de  $\pi$  em  $\mathbb{S}^2$ , uma em  $H^+$  e outra em  $H^-$ , da seguinte maneira: dado um ponto  $X = (x_1, x_2, 1) \in \pi$ , considere a reta  $L(t)$  que

une a origem  $(0, 0, 0)$  a este ponto

$$L(t) = (0, 0, 0) + t(x_1, x_2, 1) = t(x_1, x_2, 1),$$

de modo que as projeções de  $(x_1, x_2, 1)$  serão as interseções de  $L$  com os hemisférios  $H^+$  e  $H^-$ . Mais precisamente, considere

$$\begin{cases} f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow H^+, \\ f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow H^-, \end{cases}$$

onde  $f^+(x_1, x_2, 1) = L(t) \cap H^+$  e  $f^-(x_1, x_2, 1) = L(t) \cap H^-$ .

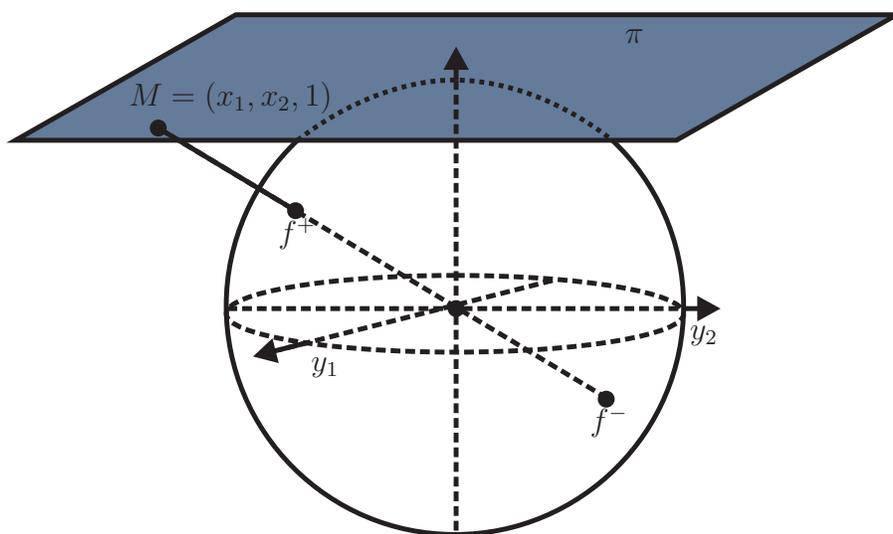


Figura 3.1: Projeção central.

Como,  $\|L(t)\|^2 = 1 \Rightarrow t^2(x_1^2 + x_2^2 + 1) = 1$ , então,

$$t^2 = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \Rightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}}.$$

Portanto,

$$\begin{cases} f^+(x_1, x_2, 1) = \left( \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} \right), \\ f^-(x_1, x_2, 1) = -f^+(x_1, x_2, 1). \end{cases}$$

Assim, todo par de pontos antípodas em  $\mathbb{S}^2$  (que não esteja em  $y_3 = 0$ ), define exatamente um ponto no  $\mathbb{R}^2$ . É natural esperar que pontos antípodas no equador represente algum ponto no infinito.

O campo de vetores induzido em  $H^+$  é dado por

$$\overline{F}(Y) = J(f^+(X))F(X), \quad \text{onde } Y = f^+(X),$$

de forma análoga, temos o campo de vetores induzido em  $H^-$

$$\overline{F}(Y) = J(f^-(X))F(X), \quad \text{onde } Y = f^-(X).$$

Destacamos que o campo  $\overline{F}$  está definido em  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$  e é tangente a  $\mathbb{S}^2$ .

Afim de determinar o comportamento das trajetórias numa vizinhança do equador usaremos cartas locais. Cobrimos  $\mathbb{S}^2$  com 6 cartas locais  $(U_k, \phi_k)$  e  $(V_k, \psi_k)$  com  $k = 1, 2, 3$ , onde

$$U_k = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\},$$

$$V_k = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\}$$

e

$$\begin{aligned} \phi_k : U_k &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (y_1, y_2, y_3) &\longmapsto \phi_k(y_1, y_2, y_3) = \left( \frac{y_i}{y_k}, \frac{y_j}{y_k} \right), \quad i, j \neq 0 \quad \text{e} \quad i < j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_k : V_k &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (y_1, y_2, y_3) &\longmapsto \psi_k(y_1, y_2, y_3) = -\phi_k(y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Vamos agora calcular a expressão de  $\overline{F}(Y)$  nas coordenadas  $(U_1, \phi_1)$ .

$$\overline{F}(Y)|_{U_1 \cap H_+} = J(\phi_1(Y))[J(f_+(X))F(X)] = J(\phi_1 \circ f_+)F(X),$$

mas,

$$(\phi_1 \circ f_+)(X) = \phi_1(f_+(X)) = \phi_1 \left( \frac{x_1}{\Delta(X)}, \frac{x_2}{\Delta(X)}, \frac{1}{\Delta(X)} \right) = \left( \frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right) = (u, v),$$

onde  $\Delta(X) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$ , ou seja,

$$x_1 = \frac{1}{v} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{u}{v}.$$

Daqui temos,

$$J(\phi_1 \circ f_+) = \begin{bmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{bmatrix},$$

e assim,

$$\overline{F}(Y)|_{U_1 \cap H_+} = \begin{bmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2}P(x_1, x_2) + \frac{1}{x_1}Q(x_1, x_2) \\ -\frac{1}{x_1^2}P(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

Em termos de  $(u, v)$ , temos

$$\overline{F}(Y)|_{U_1 \cap H_+} = \left( -uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).$$

Observe que existe uma bijeção entre os pontos no infinito de  $\mathbb{R}^2$  e os pontos do equador de  $\mathbb{S}^2$ , então gostaríamos de estender o campo  $F$  a partir de  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ , para  $\mathbb{S}^2$ . Em geral,  $\overline{F}$  não permanece limitado quando nos aproximamos de  $\mathbb{S}^1$ , mas se multiplicarmos o campo por um fator  $\rho(Y) = y_3^{r-1}$ , onde  $r = \text{Max}\{\text{grau de } P, \text{grau de } Q\}$ , a extensão se torna possível. O campo vetorial estendido a todo  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{P} = \rho(Y)\overline{F}$  é chamado de compactificação de Poincaré do campo de vetores  $F$  em  $\mathbb{R}^2$ . Em termos de  $(u, v)$ , temos

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, x_3) &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{v^2} + \frac{u^2}{v^2} + 1} = \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + 1}{v^2}}, \\ \rho(Y) &= y_3^{r-1} = \frac{1}{\Delta(x)^{(r-1)}} = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^{\frac{r-1}{2}}} = \frac{v^{r-1}}{(u^2 + v^2 + 1)^{\frac{r-1}{2}}} \\ &= v^{r-1}(u^2 + v^2 + 1)^{\frac{1-r}{2}} = v^{r-1}m(u, v). \end{aligned}$$

Assim, a compactificação de Poincaré do campo  $F$  na carta  $(\phi_1, U_1)$  é dada por

$$\mathbb{P}(F) = \rho(Y)\overline{F}(Y)|_{U_1 \cap H_+} = v^{r-1}m(u, v) \left( -uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right)$$

ou, por uma reparametrização do tempo,

$$\mathbb{P}(F) = \rho(Y)\overline{F}(Y)|_{U_1 \cap H_+} = v^{r-1} \left( -uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right),$$

ou seja, na carta  $(U_1, \phi_1)$  o campo é dado por

$$\begin{cases} u' = v^r \left( -uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right), \\ v' = -v^{r+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right). \end{cases} \quad (3.1)$$

De forma análoga, na carta  $(U_2, \phi_2)$  temos

$$\begin{cases} u' = v^r P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right), \\ v' = -v^{r+1}Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right). \end{cases} \quad (3.2)$$

e na carta  $(U_3, \phi_3)$

$$\begin{cases} u' = P(u, v), \\ v' = Q(u, v). \end{cases} \quad (3.3)$$

Em  $(V_k, \psi_k)$ , com  $k = 1, 2, 3$ , temos o mesmo que em  $(U_k, \phi_k)$  com  $k = 1, 2, 3$ , mas multiplicado por  $(-1)^{r-1}$ . Assim, para conhecermos o comportamento dos pontos no infinito, basta olharmos as cartas  $(U_1, \phi_1)$  e  $(U_2, \phi_2)$ .

Observe que o fator  $(-1)^{r-1}$  desempenha um papel fundamental no estudo das estabilidade das singularidades em  $\mathbb{S}^1$ .

Uma outra forma de se obter as equações (3.1) e (3.2) é fazendo a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ w = \frac{1}{x} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v = \frac{x}{y} \\ w = \frac{1}{y} \end{cases}$$

respectivamente, seguida da reparametrização no tempo  $\frac{dt}{d\tau} = w^{r-1}$ .

A projeção central do plano  $\pi = \mathbb{R}^2$  na esfera  $\mathbb{S}^2$  associa cada ponto de  $\pi$  a dois pontos antípodas na esfera  $\mathbb{S}^2$ . Afim de evitar essa dualidade, vamos concentrar nossa atenção em apenas um dos hemisférios juntamente com o equador. Consideremos, então, o hemisfério superior que denotamos por  $H^+$ .

Projetamos o hemisfério  $H^+$  ortogonalmente no plano  $\pi$ , obtemos assim, um aplicação do hemisfério no disco unitário  $K$  de  $\pi$ . O equador da esfera é levado no círculo  $C$ , bordo de  $K$ . Órbitas sobre a esfera são levadas em certas curvas no disco  $K$ , as quais vamos chamar de órbitas em  $K$ . Em particular, singularidades em  $H^+$  são projetadas como singularidades em  $K$ . O disco  $K$  é chamado de disco de Poincaré.

**Exemplo 3.1.1.** *Vamos determinar o retrato de fase no disco de Poincaré do seguinte sistema*

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases} \quad (3.4)$$

Este sistema tem uma única singularidade na parte finita do plano, a origem. Para conhecer o comportamento do campo em partes ilimitadas do plano, ou seja, determinar direções assintóticas do campo no infinito, vamos calcular a expressão da campo na carta local  $U_1$ .

$$\begin{cases} u' = -2u, \\ v' = -v, \end{cases}$$

que apresenta uma única singularidade na origem, a qual é nó atrator. Visto que o maior grau dos polinômios que determinam o campo (3.4) é 1, a origem do campo na carta  $V_1$  também será um nó estável. A expressão do campo (3.4) na carta  $U_2$  é dada por

$$\begin{cases} u' = 2u, \\ v' = v, \end{cases}$$

cuja origem é um nó instável, o mesmo ocorre com a singularidade na origem da carta  $V_2$ . Assim, o retrato de fase de (3.4) é dado pela Figura 3.2.

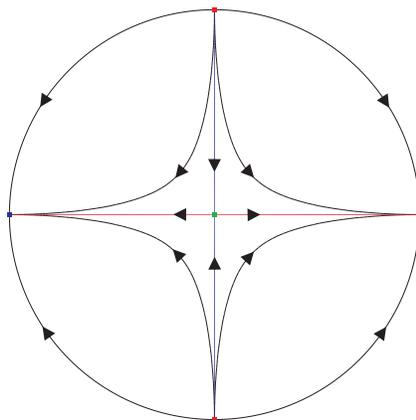


Figura 3.2: Retrato de fase no disco de Poincaré do sistema (3.4).

## 3.2 As Singularidades no Infinito

Para conhecer o comportamento assintótico das órbitas do campo

$$\begin{cases} x' = P(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 a_{ij}x^i y^j \\ y' = Q(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij}x^i y^j \end{cases} \quad (3.5)$$

usaremos a compactificação de Poincaré discutida na seção anterior.

Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{e} \quad w = \frac{1}{x} \quad \text{se} \quad x \neq 0, \quad (3.6)$$

$$v = \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad w = \frac{1}{y} \quad \text{se} \quad y \neq 0. \quad (3.7)$$

Usando as coordenadas (3.6) em (3.5) e fazendo uma reparametrização do tempo  $t = w\tau$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} w = w \left[ \frac{y'x - yx'}{x^2} \right] \\ &= \frac{w}{x^2} [(b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2)x \\ &\quad - y(a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2)] \\ &= w^3 [(b_{00} + b_{10}\frac{1}{w} + b_{01}\frac{u}{w} + b_{20}\frac{1}{w^2} + b_{11}\frac{1}{w}\frac{u}{w} + b_{02}\frac{u^2}{w^2})\frac{1}{w} \\ &\quad - \frac{u}{w}(a_{00} + a_{10}\frac{1}{w} + a_{01}\frac{u}{w} + a_{20}\frac{1}{w^2} + a_{11}\frac{1}{w}\frac{u}{w} + a_{20}\frac{u^2}{w^2})] \\ &= w^2 (b_{00} + b_{10}\frac{1}{w} + b_{01}\frac{u}{w}) + b_{20} + b_{11}u + b_{02}u^2 \\ &\quad - u(a_{00} + a_{10}\frac{1}{w} + a_{01}\frac{u}{w})w^2 - (a_{20} + a_{11}u + a_{02}u^2)u \\ &= (-a_{02}u^3 + (b_{02} - a_{11})u^2 + (b_{11} - a_{20})u + b_{20}) \\ &\quad + w(b_{01}u + b_{10} + b_{00}w - a_{00}uw - a_{10}u + a_{01}u^2) \\ &= -a_{02}u^3 + (b_{02} - a_{11})u^2 + (b_{11} - a_{20})u + b_{20} \\ &\quad + w(-a_{01}u^2 + (b_{01} - a_{10})u + b_{10} + b_{00}w - a_{00}uw) \\ &= \phi(u) + wG(u, w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= \frac{dw}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dw}{dt} = w \frac{-1}{x^2} x' = \frac{-w}{x^2} (a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2) \\ &= -w^3 (a_{00} + \frac{a_{10}}{w} + \frac{a_{01}}{w}u + a_{11}\frac{1}{w}\frac{u}{w} + \frac{a_{20}}{w^2} + a_{02}\frac{u^2}{w^2}) = -wH(u, w), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \phi(u) + wG(u, w) = P_1(u, w), \\ \frac{dw}{d\tau} = -wH(u, w) = Q_1(u, w), \end{cases} \quad (3.8)$$

onde,

$$\begin{aligned} \phi(u) &= -a_{02}u^3 + (b_{02} - a_{11})u^2 + (b_{11} - a_{20})u + b_{20}, \\ G(u, w) &= -a_{01}u^2 + (b_{01} - a_{10})u + b_{10} + b_{00}w - a_{00}uw \text{ e} \end{aligned}$$

$$H(u, w) = a_{02}u^2 + a_{11}u + a_{20} + a_{10}w + a_{01}uw + a_{00}w^2.$$

De forma análoga, para as coordenadas (3.7), temos

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\tau} = \psi(v) + wZ(u, w) = P_2(v, w) \\ \frac{dw}{d\tau} = -wK(v, w) = Q_2(v, w) \end{cases} \quad (3.9)$$

onde,

$$\begin{aligned} \psi(v) &= -b_{20}v^3 + (a_{02} - b_{11})v^2 + (a_{11} - b_{20})v + a_{20}, \\ Z(v, w) &= -b_{01}v^2 + (a_{10} - b_{01})v + b_{01} + a_{00}w - b_{00}vw \text{ e} \\ K(v, w) &= a_{02}v^2 + a_{11}v + a_{20} + a_{10}w + a_{01}vw + a_{00}w^2. \end{aligned}$$

Os pontos  $(u, 0)$  e  $(v, 0)$ , ou seja,  $w = 0$  representam os pontos na parte ilimitada do plano.

Sejam  $u_*$  e  $v_*$  valores tais que,  $\phi(u_*) = 0$  e  $\psi(v_*) = 0$ . Os pontos  $(u_*, 0)$  e  $(v_*, 0)$  são singularidades do sistema (3.8) e (3.9) respectivamente, o que significa que  $u_*$  e  $v_*$  são direções assintóticas para o campo  $\chi$ .

Dizemos que  $u_*$  e  $v_*$  são singularidades no infinito e que  $\phi(u) = 0$  e  $\psi(u) = 0$  são equações dos pontos críticos no infinito para o campo  $\chi$ .

A matriz Jacobiana do sistema (3.8) no ponto  $(u, 0)$  é dada por

$$J(u) = \begin{bmatrix} \phi(u) & G(u, 0) \\ 0 & -H(u, 0) \end{bmatrix}$$

e a matriz Jacobiana do sistema (3.9) no ponto  $(0, 0)$  é dada por

$$L_0 = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{02} & a_{01} \\ 0 & -b_{02} \end{bmatrix}.$$

Vamos estudar agora as singularidades no infinito para o campo  $\chi$  dado pelo Lema 2.3.2 quando este apresenta quatro singularidades. Inicialmente estudaremos o caso convexo e depois o não convexo.

### 3.3 Caso Quadrilátero Convexo

Como dito anteriormente, as equações das singularidades no infinito são:

$$\phi(u) = -a_{20}u^3 + (b_{02} - a_{11})u^2 + (b_{11} - a_{20})u + b_{20} = 0$$

e

$$\psi(v) = -b_{20}v^3 + (a_{02} - b_{11})v^2 + (a_{11} - b_{20})v + a_{20} = 0$$

ou seja, para o campo (2.3.2)

$$\phi(u) = -u(nu^2 + mu + l - 1) = 0 \quad (3.10)$$

e

$$\psi(v) = (l - 1)v^2 + mv + n = 0. \quad (3.11)$$

De (3.10), temos que  $u = 0$  sempre será uma singularidade no infinito. Além disso,

$$J(0) = \begin{bmatrix} 1 - l & * \\ 0 & -l \end{bmatrix}$$

e, como  $l < 0$ , essa singularidade será sempre um repulsor hiperbólico.

Assim, se  $u \neq 0$  é uma raiz de  $\phi(u)$ , como

$$H(u, v) = nu^2 + mu + l + dw + \epsilon uw,$$

$$-H(u, 0) = -nu^2 - mu - l = -1,$$

pois,  $nu^2 + mu + l - 1 = 0$ , temos

$$J(u) = \begin{bmatrix} \phi'(u) & * \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e concluímos que  $u$  será uma singularidade não-hiperbólica no infinito para (3.8) se, e somente se,  $\phi'(u) = 0$ .

Observamos que  $v = 0$  será uma singularidade no infinito para  $\chi$  se, e somente se,  $n = 0$ , o que não acontece neste caso.

O lema a seguir, descreve todas as possibilidades para as singularidades no infinito para o campo  $\chi$ .

**Lema 3.3.1.** *Considere o campo (2.3) dado pelo Lema 2.3.2, com quatro singularidades e distribuição convexa. Temos as seguintes possibilidades para as singularidades no infinito distintas de  $u = 0$ :*

- a) *Se  $m^2 - 4n(l - 1) > 0$  teremos duas singularidades,  $u_1 < u_2 < 0$ , onde  $u_1$  é um ponto de sela e  $u_2$  um atrator, caso  $m < 0$  e  $0 < u_1 < u_2$ , onde  $u_1$  é um atrator e  $u_2$  é um ponto de sela, caso  $m > 0$ ;*
- b) *Se  $m^2 - 4n(l - 1) = 0$ , temos uma singularidade  $u_1$  que é uma sela-nó com  $u_1 < 0$  quando  $m < 0$  e  $0 < u_1$ , quando  $m > 0$ ;*
- c) *Se  $m^2 - 4n(l - 1) < 0$  não teremos outra singularidade além de  $u = 0$ .*

**Demonstração:** Temos que  $\phi(u) = -u(nu^2 + mu + l - 1) = 0$  se, e somente se,  $u = 0$  ou  $nu^2 + mu + l - 1 = 0$ . Queremos descobrir o comportamento das singularidades diferentes de  $u = 0$ . A matriz de linearização é dada por

$$J(u) = \begin{bmatrix} \phi'(u) & * \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onde  $\phi'(u) = -(nu^2 + mu + l - 1) - u(2nu + m) = -u(2nu + m)$ . Se  $m^2 - 4n(l - 1) > 0$  então,

$$nu^2 + mu + l - 1 = 0,$$

se, e somente se,  $u = u_1$  ou  $u = u_2$ , onde

$$u_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4n(l - 1)}}{2n} \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4n(l - 1)}}{2n}.$$

Assim,

$$\phi'(u_1) = -u_1(2nu_1 + m) = -u_1(2n) \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4n(l-1)} + m}{2n} = -u_1 \sqrt{m^2 - 4n(l-1)}$$

e

$$\phi'(u_2) = -u_2(2nu_2 + m) = u_2 \sqrt{m^2 - 4n(l-1)}.$$

I) Se  $m > 0$ , temos  $0 < u_1 < u_2$ , também temos  $\phi'(u_1) < 0$  e  $\phi'(u_2) > 0$ . Portanto, a matriz de linearização do sistema (3.8) no ponto  $u_1$  tem autovalores com partes reais negativas e no ponto  $u_2$  a parte real dos autovalores tem sinais opostos, ou seja,  $u_1$  é um nó atrator e  $u_2$  é um ponto de sela.

II) Se  $m < 0$ , temos  $u_1 < u_2 < 0$ , então  $\phi'(u_1) < 0$  e  $\phi'(u_2) > 0$ . Portanto, a matriz de linearização do sistema (3.8) no ponto  $u_1$  tem autovalores com partes reais negativas e no ponto  $u_2$  os autovalores tem partes reais de sinais opostos, ou seja,  $u_1$  é um atrator e  $u_2$  é um ponto de sela. Se  $m^2 - 4n(l-1) < 0$ , não existem singularidades diferentes de  $u = 0$ . Se  $m^2 - 4n(l-1) = 0$ , então,

$$nu^2 + mu + l - 1 = 0$$

se, e somente se,  $u = u_1 = -m/2n$ . Se  $m > 0$ , temos  $u_1 < 0$  e se  $m < 0$ ,  $0 < u_1$ . Temos também que

$$\phi'(u_1) = -u_1(2nu_1 + m) = \frac{-m}{2n} \left( 2n \frac{-m}{2n} + m \right) = 0,$$

ou seja,  $J(u)$  tem um autovalor nulo e conseqüentemente não podemos utilizar o Teorema de Hartman-Grobman. Mas, observe que este ponto será um ponto de sela-nó, visto que satisfaz as condições da Definição 2.1.11 como segue abaixo. A matriz de linearização do sistema (3.8) tem um autovalor nulo e outro com parte real diferente de zero. Vamos agora calcular o autovetor à direita associado ao autovalor  $\lambda = 0$ .

$$J(u)V_1 = 0V_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja,  $V_1 = (1, 0)$ . Vamos calcular agora, o autovetor à esquerda associado ao autovalor  $\lambda = 0$ .

$$V_2 J(u) = 0V_2$$

$$(v_{21}, v_{22}) \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou seja,  $V_2 = (1, * = G(u, 0))$ . Calculemos agora a matriz Hessiana de  $P_1$  e  $Q_1$

$$HessP_1 = \begin{bmatrix} -6nu - 2m & 3\epsilon u - d \\ -2\epsilon u - d & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$HessQ_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2nu - m - d \\ -2nu - m - d & -2\epsilon u \end{bmatrix}.$$

Como

$$D^2F_1(V_1) = (V_1 HessP_1 V_1, V_1 HessQ_1 V_1) = (-6nu - 2m, 0),$$

temos,

$$[D^2F_1(u, 0)(v_{11}, v_{12})]V_2 = (-6nu - 2m, 0)(1, G(u, 0)),$$

mas como  $u = u_1 = -m/2n$  então,

$$D^2F(u, 0)(v_{11}, v_{12})V_2 = m \neq 0.$$

■

### 3.4 Caso Quadrilátero Não-Convexo

No que tange ao caso quadrilátero não-convexo, temos o seguinte lema.

**Lema 3.4.1.** *As singularidades no infinito do plano para o campo  $\chi$  com quatro singularidades em distribuição não convexa são  $u = 0$ , repulsora e  $u_1 < 0 < u_2$ , ambas atratoras. Todos os equilíbrios são hiperbólicos.*

**Demonstração:** Como visto anteriormente, a equação dos pontos críticos no infinito para o campo  $\chi$  é dada por

$$\phi(u) = -u(nu^2 + mu + l - 1),$$

que contém três raízes distintas,

$$u_1 = 0, u_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4n(l-1)}}{2n} \text{ e } u_3 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4n(l-1)}}{2n}.$$

Como  $l < 0$  e  $n > 0$ , temos que  $u_1 < 0 < u_3$ . A matriz Jacobiana em  $u = 0$  é dada por

$$J(0) = \begin{bmatrix} 1 - l & * \\ 0 & -l \end{bmatrix}$$

e como  $l < 0$ , temos que a origem é um repulsor hiperbólico. Se  $u \neq 0$ , então  $\phi'(u) < 0$  e como

$$J(u) = \begin{bmatrix} \phi'(u) & * \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

as singularidades  $u_2$  e  $u_3$  são atratores hiperbólicos. ■

No próximo capítulo, faremos um estudo das singularidades em partes finitas do plano.

# Capítulo 4

## As Singularidades Finitas

Temos, por hipótese, que as singularidades  $S_1$  e  $S_2$  são pontos de sela. Neste capítulo, estudaremos a natureza das outras duas singularidades  $O = (0, 0)$  e  $E = (0, \frac{-\varepsilon}{n})$  para o caso convexo e o não convexo.

A parte linear do campo  $\chi$  dado pelo Lema 2.3.2 nestes pontos é dada por

$$JF(0,0) = \begin{bmatrix} d & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad JF\left(0, \frac{-\varepsilon}{n}\right) = \begin{bmatrix} d - \frac{m\varepsilon}{n} & -\varepsilon \\ 1 - \frac{\varepsilon}{n} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

**Lema 4.0.2.** *Se  $d = 0$ , então  $\chi$  não tem ciclo limite e a origem  $O$  é:*

- a) *Um centro, se  $m(n - l\varepsilon) = 0$ ,*
- b) *Um atrator fraco, se  $m(n - l\varepsilon) < 0$ ,*
- c) *Um repulsor fraco, se  $m(n - l\varepsilon) > 0$ .*

**Demonstração:** Fazendo a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = |b|\sqrt{-\varepsilon}X \\ y = bY, \end{cases}$$

e uma reparametrização do tempo,

$$t = \frac{b}{|b|\sqrt{-\varepsilon}}\tau,$$

temos,

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\tau} &= \frac{dX}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx + \varepsilon y + lx_2 + mxy + ny_2}{|b|\sqrt{-\varepsilon}} \frac{b}{|b|\sqrt{-\varepsilon}} = b \frac{\varepsilon y + lx_2 + mxy + ny_2}{-\varepsilon b^2} \\ &= \frac{-y}{b} + \frac{blx^2}{-\varepsilon b^2} + \frac{bmxy}{b^2(\sqrt{\varepsilon^2})} + \frac{bny^2}{b^2 - \varepsilon} = -Y + blX^2 + \frac{|b|m}{\sqrt{-\varepsilon}}XY - \frac{bn}{\varepsilon}Y^2\end{aligned}$$

e

$$\frac{dY}{d\tau} = \frac{dY}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{x(1+y)}{b} \frac{b}{|b|\sqrt{-\varepsilon}} = b \frac{x(1+y)b}{b^2\sqrt{-\varepsilon}} = X(1+bY),$$

ou seja,

$$\begin{cases} X' = -Y + blX^2 + \frac{|b|m}{\sqrt{-\varepsilon}}XY - \frac{bn}{\varepsilon}Y^2, \\ Y' = X(1+bY). \end{cases}$$

A equação acima está na forma normal de Bautin, onde  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = 0$ ,  $\delta_3 = -bl$ ,  $\delta_4 = (b + 2bl)/2$ ,  $\delta_5 = (|b|m)/\sqrt{-\varepsilon}$  e  $\delta_6 = (-bn)/\varepsilon$ . Para que  $m(n - l\varepsilon) = 0$  devemos ter  $m = 0$  ou  $n - l\varepsilon = 0$ . Caso  $m = 0$ , temos  $\delta_2 = \delta_5 = 0$ , caso  $m \neq 0$ , temos  $n - l\varepsilon = 0$  e, conseqüentemente,  $l = \frac{n}{\varepsilon}$ , ou seja,  $\delta_3 = \delta_6$ . Logo, pelas duas primeiras condições Teorema de Bautin concluímos a afirmação *a)* do lema. Para mostrar as afirmações *b)* e *c)*, vamos calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov [2], o qual é dado por

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{4\varepsilon^2\sqrt{-\varepsilon}}m(n - l\varepsilon).$$

Se  $m(n - l\varepsilon) < 0$ , então,  $\alpha_3 < 0$  e conseqüentemente  $O$  será um atrator fraco. Se  $m(n - l\varepsilon) > 0$ ,  $\alpha_3 > 0$  e, então,  $O$  será um repulsor fraco. Falta mostrar que se  $d = 0$ ,  $O$  não tem ciclo limite. Mas, na origem, quando  $d = 0$ , se  $m(n - l\varepsilon) = 0$ , temos um centro e caso  $m(n - l\varepsilon) \neq 0$  ocorrerá uma bifurcação de Hopf. Observe que os autovalores da linearização de  $\chi$  na origem são da forma

$$\lambda_{1,2} = \frac{d}{2} \pm \frac{\sqrt{d^2 + 4\varepsilon}}{2}$$

e quando  $d = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\varepsilon}i$ . Assim,  $\alpha(d) = d/2$  e então  $\alpha'(0) = 1/2$  satisfazendo a condição de transversalidade. Como

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{4\varepsilon^2\sqrt{-\varepsilon}}m(n - l\varepsilon),$$

assumindo que  $m(n - l\varepsilon) \neq 0$ , teremos  $\alpha_3 \neq 0$ , o que satisfaz a condição de não degenerescência.

■

## 4.1 O Caso Convexo

**Lema 4.1.1.** *Se  $\chi$  dado em (2.3) é tal que  $\varepsilon < n < 0$ , temos as seguintes possibilidades para a origem  $O$  e para a singularidade  $E$ :*

$$O : \begin{cases} d = 0 \begin{cases} m = 0 \Rightarrow \text{centro,} \\ m < 0 \Rightarrow \text{repulsor fraco,} \\ m > 0 \Rightarrow \text{atrator fraco,} \end{cases} \\ d > 0 \Rightarrow \text{repulsor hiperbólico,} \\ d < 0 \Rightarrow \text{atrator hiperbólico.} \end{cases}$$

$$E : \begin{cases} d = \frac{m\varepsilon}{n} \begin{cases} m = 0 \Rightarrow \text{centro,} \\ m < 0 \Rightarrow \text{atrator fraco,} \\ m > 0 \Rightarrow \text{repulsor fraco,} \end{cases} \\ d > \frac{m\varepsilon}{n} \Rightarrow \text{repulsor hiperbólico,} \\ d < \frac{m\varepsilon}{n} \Rightarrow \text{atrator hiperbólico.} \end{cases}$$

**Demonstração:** Primeiramente, vamos analisar a singularidade  $O$ . Se  $d = 0$ , o Lema 4.0.2 nos dá a natureza desta singularidade. Caso  $d \neq 0$ , a análise linear nos dá o comportamento, visto que, os autovalores da matriz de linearização do sistema  $\chi$  são da forma

$$\lambda = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + 4\varepsilon}}{2},$$

com partes reais não nulas. Então pelo Teorema de Hartman-Grobman, se  $d > 0$ , esta singularidade será um repulsor hiperbólico e se  $d < 0$ , um atrator hiperbólico. No caso da singularidade  $E$ , a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = \bar{x}, \\ y = \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \bar{y} - \frac{\varepsilon}{n}, \end{cases} \quad (4.2)$$

conduz ao sistema

$$\bar{\chi} : \begin{cases} \bar{x}' = \bar{d}\bar{x} + \varepsilon\bar{x}^2 + m\bar{x}\bar{y} + n\bar{y}^2, \\ \bar{y}' = \bar{x}(1 + \bar{y}), \end{cases} \quad (4.3)$$

onde

$$\bar{d} = d - \frac{m\varepsilon}{n}, \quad \bar{l} = l < 0, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \frac{\varepsilon - n}{n} < \bar{n} = n \left( \frac{n - \varepsilon}{n} \right)^2 < 0 \text{ e } \bar{m} = m \left( 1 - \frac{\varepsilon}{n} \right).$$

Esta mudança de coordenadas permuta as singularidades  $O$  e  $E$ , visto que, se  $\bar{x}' = 0$ , então,  $x' = 0$ , se  $\bar{y}' = 0$ , então,  $y' = -\varepsilon/n$ . Observe também que se  $\bar{d} = 0$ ,  $\bar{d} > 0$  ou  $\bar{d} < 0$ , então,  $d = 0$ ,  $d > 0$  ou  $d < 0$ , respectivamente. Com relação ao parâmetro  $m$ , se  $\bar{m} = 0$ ,  $\bar{m} > 0$  ou  $\bar{m} < 0$ , então,  $m = 0$ ,  $m < 0$  e  $m > 0$ , respectivamente. ■

## 4.2 O Caso Não Convexo

**Lema 4.2.1.** *Considere o campo  $\chi$  como em (2.3). Se  $\varepsilon < 0 < n$ , então a singularidade  $E$  é uma sela e temos as seguintes possibilidades para a singularidade na origem:*

$$O : \begin{cases} d = 0 \begin{cases} m(n - l\varepsilon) = 0 \Rightarrow \text{centro}, \\ m(n - l\varepsilon) < 0 \Rightarrow \text{atrator fraco}, \\ m(n - l\varepsilon) > 0 \Rightarrow \text{repulsor fraco}, \end{cases} \\ d > 0 \Rightarrow \text{repulsor hiperbólico}, \\ d < 0 \Rightarrow \text{atrator hiperbólico}. \end{cases}$$

**Demonstração:** Caso  $d = 0$ , o Lema 4.0.2 descreve o comportamento da singularidade na origem. Caso  $d \neq 0$ , os autovalores da matriz de linearização de  $\chi$  dada em (4.1) possuem partes reais diferentes de zero. Se  $d > 0$ , pelo Teorema de Hartman-Grobman, a singularidade  $O$  será um repulsor hiperbólico e caso  $d < 0$  será um atrator hiperbólico. Com relação a singularidade  $E$ , temos que

$$\det \left( JF \left( 0, -\frac{\varepsilon}{n} \right) \right) = \varepsilon \left( 1 - \frac{\varepsilon}{n} \right) < 0,$$

visto que,  $\varepsilon < 0$  e  $n > 0$  e, conseqüentemente,  $E$  é uma singularidade do tipo sela. ■

# Capítulo 5

## Retratos de Fase

Neste capítulo, esboçaremos todos os possíveis retratos de fase do sistema quadrático planar  $\chi$  com quatro singularidades. Pelo Lema 2.3.2 este campo é escrito como

$$\chi : \begin{cases} x' = dx + \varepsilon y + lx^2 + mxy + ny^2, \\ y' = x(1 + y), \end{cases} \quad (5.1)$$

onde  $l < 0$ ,  $\varepsilon < n$  e  $\varepsilon \leq 0$ . As singularidades determinam um quadrilátero convexo se  $n < 0$  e não convexo se  $n > 0$ .

As singularidades serão  $S_1 = (x_1, -1)$ ,  $S_2 = (x_2, -1)$ , onde  $x_2 < 0 < x_1$ ,  $O = (0, 0)$  e  $E = (0, -\varepsilon/n)$ . No caso convexo,  $S_1$  e  $S_2$  são selas e  $O$  e  $E$  são anti-selas, já no caso não-convexo, as singularidades  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S = E = (0, -\varepsilon/n)$  são selas e  $O$  é uma anti-sela.

### 5.1 Caso Convexo

Para o caso convexo vamos assumir  $m \geq 0$ . O caso  $m < 0$  pode ser obtido do caso  $m > 0$  através de uma mudança de coordenadas. Analisaremos inicialmente o caso em que  $m > 0$  e mais tarde o caso  $m = 0$ .

Denotaremos por  $U_1(d)$  e  $L_1(d)$  as separatrizes instáveis da sela  $S_1$  localizado no semi-plano  $y > -1$  e  $y < -1$  respectivamente e por,  $U_2(d)$  e  $L_2(d)$  as separatrizes estáveis da sela  $S_2$  localizada no semi-plano  $y > -1$  e  $y < -1$  respectivamente.

As singularidades no infinito em coordenadas  $(u, w)$ , de acordo com o Lema 3.3.1 são os pontos  $A = (u = 0, w = 0)$ ,  $B = (u = u_1, w = 0)$  e  $C = (u = u_2, w = 0)$ , quando  $m^2 - 4n(l - 1) > 0$ ,  $A$  e  $B$ , quando  $m^2 - 4n(l - 1) = 0$  e somente  $A$ , quando  $m^2 - 4n(l - 1) < 0$ .

Denotaremos por  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  e  $\bar{C}$  as singularidades simétricas no infinito e por  $Z_1$  e  $Z_2$  as separatrizes das selas  $C$  e  $\bar{C}$ .

Analisando o sistema  $\chi$ , de acordo com o que já foi estudado, observamos que este sistema, para o caso convexo apresenta as orientações dadas pela Figura 5.1, para qualquer valor de  $d$ . A reta invariante  $y = -1$  será desenhada como  $y = 0$ .

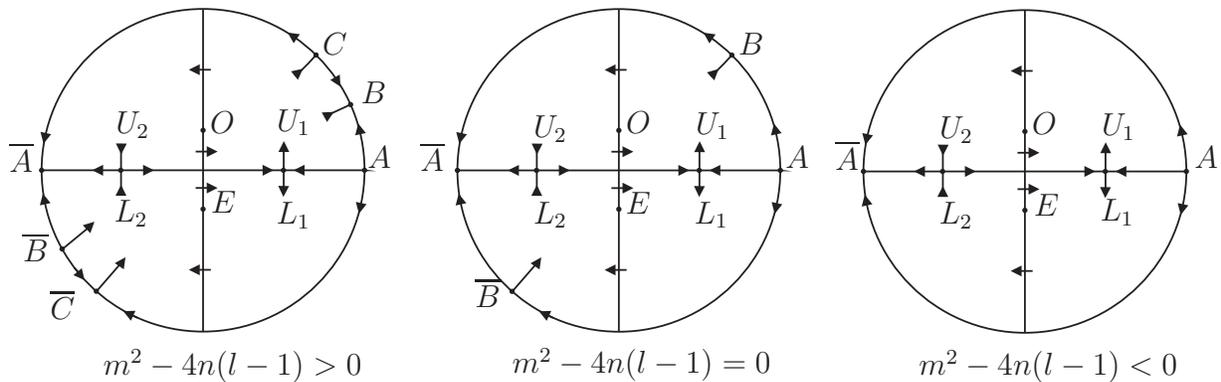


Figura 5.1: Orientações da órbitas de  $\chi$  para o caso convexo.

Usaremos a notação  $\chi_d$  para o campo  $\chi$ , considerando  $d$  como parâmetro e fixando os coeficientes  $\varepsilon$ ,  $l$ ,  $m$  e  $n$ .

Para descrever  $\chi$  devemos conhecer o  $\omega$ -limite e  $\alpha$ -limite das separatrizes das selas  $S_1$  e  $S_2$ , o  $\alpha$ -limite de  $Z_1$  e o  $\omega$ -limite de  $Z_2$ .

O próximo lema nos dá valores de  $d$  para os quais teremos um conexão de selas entre uma sela na região limitada do plano e uma sela no infinito.

**Lema 5.1.1.** *Considere o campo  $\chi_d$  dado pelo Lema 2.3.2. Seja  $u = r$  uma singularidade do tipo sela no infinito quando  $m^2 - 4n(l - 1) > 0$  ou do tipo sela-nó quando  $m^2 - 4n(l - 1) = 0$ , como no Lema 3.3.1. Então, existem dois valores  $d_1$  e  $d_2$  para  $d$ , com as seguintes propriedades:*

a) A reta  $y = rx$  é invariante pelo fluxo de  $\chi_{d_2}$ . Mais precisamente, para algum  $P = (x, rx)$  a função  $h_2(d) = \langle x_d^\perp, (1, r) \rangle$  satisfaz  $h_2'(d) = rx$  e  $h_2(d_2) = 0$ .

b) A reta  $y = rx - \frac{\varepsilon}{n}$  é invariante pelo fluxo de  $\chi_{d_1}$ . Mais precisamente, para algum  $p = (x, rx - \varepsilon/n)$  a função  $h_1(d) = \langle \chi_d^\perp(p), (1, r) \rangle$  satisfaz  $h_1'(d) = rx$  e  $h_1(d_1) = 0$ .

c)  $0 < d_1 < d_2 < (m\varepsilon)/n$ .

**Demonstração:** Considere a reta  $y = rx + s$  e seja  $p$  um ponto desta reta. Então,

$$\chi_d(p) = (dx + \varepsilon(rx + s) + lx^2 + mx(rx + s) + n(rx + s)^2, x + x(rx + s)).$$

Como  $r = u$  é uma singularidade no infinito, temos

$$\phi(u) = \phi(r) = -r(nr^2 + mr + l - 1) = 0,$$

ou seja, como  $r \neq 0$  pelo Lema 3.3.1,  $nr^2 + mr + l - 1 = 0$ . Então,

$$\begin{aligned} \chi_d(p) &= (dx + \varepsilon rx + \varepsilon s + lx^2 + mx^2r + msx + nr^2x^2 + 2nr sx + ns^2, x + rx^2 + sx) \\ &= (dx + \varepsilon rx + \varepsilon s + x^2 + msx + 2nr sx) + ns^2, x + rx^2 + sx). \end{aligned}$$

Seja  $\chi_d^\perp = (-y', x')$ , assim,

$$\begin{aligned} \langle x_d^\perp(p), (1, r) \rangle &= (-x - rx^2 - sx + drx + \varepsilon r^2x + \varepsilon rs + rx^2 + mrsx + 2r^2nsx + nrs^2) \\ &= (dr + \varepsilon r^2 + mrs + 2nr^2s - s - 1)x + rs(\varepsilon + ns). \end{aligned}$$

Se  $s = 0$  e fazendo

$$d = d_2 = \frac{1}{r} - \varepsilon r$$

temos,

$$\langle x_{d_2}^\perp(p), (1, r) \rangle = (dr + \varepsilon r^2 - 1)x = \left[ \left( \frac{1}{r} - \varepsilon r \right) r + \varepsilon r^2 - 1 \right] x = (1 - \varepsilon r^2 + \varepsilon r^2 - 1)x = 0,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ , o que prova a afirmação a). De forma análoga, se  $s = -\varepsilon/n$  e fazendo

$$d = d_1 = \left( 1 - \frac{l\varepsilon}{n} \right) \frac{1}{r},$$

temos

$$\begin{aligned}\langle x_{d_1}^\perp(p), (1, r) \rangle &= \left( dr + \varepsilon r^2 + mr \frac{-\varepsilon}{n} + 2r^2 n \left( \frac{-\varepsilon}{n} \right) + \frac{\varepsilon}{n} - 1 \right) x + r \left( \frac{-\varepsilon}{n} \right) \left( \varepsilon - \frac{n\varepsilon}{n} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{n} (-l - nr^2 - mr + 1) = 0,\end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ , o que prova a afirmação *b*). A inequação  $d_1 > 0$  é clara, visto que,

$$\left( 1 - \frac{l\varepsilon}{n} \right) > 0, \frac{1}{r} > 0 \text{ e } d_1 = \left( 1 - \frac{l\varepsilon}{n} \right) \frac{1}{r}.$$

Para provar que  $d_2 > d_1$ , ou seja,

$$\frac{1}{r} - \varepsilon r > \left( 1 - \frac{l\varepsilon}{n} \right) \frac{1}{r}$$

observamos primeiro que

$$r = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4n(l-1)}}{2n}$$

e como  $m^2 - 4n(l-1) \geq 0$ , temos

$$r \geq \frac{-m}{2n} > 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{(d_1 - d_2)r}{\varepsilon} &= \left( \frac{1}{r} - \frac{l\varepsilon}{nr} - \frac{1}{r} + \varepsilon r \right) \frac{r}{\varepsilon} = \left( \frac{-l}{n} + r^2 \right) \geq \frac{m^2}{4n^2} - \frac{l}{n} \\ &> \frac{m^2}{4n^2} - \frac{l}{n} \left( \frac{4n}{4n} \right) + \frac{1}{n} = \frac{m^2 - 4ln + 4n}{4n^2} = \frac{m^2 - 4n(l-1)}{4n^2} \geq 0,\end{aligned}$$

de onde se conclui a prova da inequação  $d_2 > d_1$ . Finalmente, vamos mostrar que  $d_2 < m\varepsilon/n$ . Temos que

$$d_2 - \frac{m\varepsilon}{n} = \frac{1}{r} - \varepsilon r - \frac{m\varepsilon}{n} = \frac{\varepsilon}{nr} \left( \frac{n}{\varepsilon} - nr^2 - mr \right),$$

mas,  $n/\varepsilon < 1$ , pois  $\varepsilon < n < 0$  e  $nr^2 + mr = 1 - l$ , logo

$$d_2 - \frac{m\varepsilon}{n} = \frac{\varepsilon}{nr} \left( \frac{n}{\varepsilon} + l - 1 \right) < \frac{l\varepsilon}{nr} < 0.$$

■

**Lema 5.1.2.** *Seja  $\chi_d$  o campo vetorial dado em (5.1), com distribuição convexa. Seja  $(0, R(d))$  o primeiro ponto de interseção de  $U_1(d)$  com o eixo  $0y$  e  $(0, L(d))$  o último ponto de interseção de  $U_2(d)$  também com o eixo  $0y$ . As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- a) *A função  $R(d)$  é contínua, positiva, estritamente crescente e definida em um intervalo  $[0, b_R)$ , com  $\lim_{d \rightarrow b_R} R(d) = \infty$ .*
- b) *A função  $L(d)$  é contínua, positiva, estritamente decrescente e definida em um intervalo  $[0, b_L)$ , com  $\lim_{d \rightarrow b_L} L(d) = 0$ .*

**Demonstração:** A função  $R(d)$  é contínua e definida em um conjunto convexo pela variação contínua da variedade instável de  $S_1$  com o parâmetro  $d$ . Seja  $a < b$  valores para os quais  $R(d)$  está definida. Para cada ponto  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , temos

$$\chi^b(p) = \chi^a(p) + ((b - a)x, 0)$$

e, portanto, para cada ponto  $p$ ,  $y > -1$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \chi_b, \chi_a^\perp \rangle &= -x(bx + \varepsilon y + lx^2 + mxy + ny^2)(1 + y) + x(ax + \varepsilon y + lx^2 + mxy + ny^2)(1 + y) \\ &= (1 + y)x(-bx + ay) = (a - b)x^2(1 + y) < 0. \end{aligned}$$

Sabemos que  $x_1(d)$  e  $x_2(d)$  são funções estritamente crescentes, temos  $x_1(b) > x_1(a)$  e então,  $R(b) > R(a)$ , pois, caso contrário,  $\langle \chi_b, \chi_a^\perp \rangle \geq 0$ , para algum ponto  $p \in U_1(a) \cup U_1(b)$ . Para demonstrar o restante da afirmação a), analisaremos primeiramente o caso  $m^2 - 4n(l - 1) \geq 0$ . Observe que, pelo Lema 5.1.1, a separatriz  $U_1(d)$  não pode estar do lado direito da reta  $y = rx - \varepsilon/n$ , haja visto que  $h_1(d)$  tem derivada positiva no primeiro quadrante e  $h_1(d_1) = 0$ , ou seja, se  $d < d_1$ ,  $h_1(d) < 0$ . Além disso, não podemos ter  $U_1(d) \subset \{x > 0\}$ , para  $d \geq 0$ , pois, pelo Lema 4.1.1, a singularidade  $O$  é um repulsor se  $d > 0$  e um atrator fraco se  $d = 0$ . Logo,  $U_1$  deve cruzar o eixo  $0y$  em um ponto acima da singularidade  $O$  para todo  $d \in [0, d_1)$ . A última afirmação de a) é comprovada observando o fato que se  $d = d_1$ , teremos  $\omega(U_1(d)) = r$  e, então, para  $d$  próximo de  $d_1$  teremos  $R(d)$  arbitrariamente grande. Suponha agora que  $m^2 - 4n(l - 1) < 0$ . Neste caso, temos somente  $u = 0$  como direção assintótica de  $\chi$  e assim, com a mesma argumentação

anterior, podemos provar que  $U_1$  cruza o eixo  $0y$  em um ponto acima da singularidade  $O$ , para todo  $d \in [0, \infty)$ . Assim, neste caso  $\lim_{d \rightarrow \infty} R(d) = \infty$ . Definimos, então,  $b_r$  como  $d_1$  no caso  $m^2 - 4n(l-1) \geq 0$  e como  $\infty$  no caso  $m^2 - 4n(l-1) < 0$ . De forma análoga, mostra-se que a função  $L(d)$  é contínua, estritamente decrescente e definida num conjunto convexo. Observe que a orientação do campo  $\chi$  no eixo  $0y$  nos mostra que  $L(d) > 0$ , para valores de  $d$  onde esta função está definida. Como não temos singularidades no quadrante  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > -1, x < 0\}$ , nem direções assintóticas negativas,  $L(d)$  não está definida somente para valores do parâmetro  $d$  para os quais  $U_2(d)$  está completamente contida neste quadrante. Visto que  $O$  é um atrator fraco para  $d = 0$ ,  $U_2(d)$  não está contida neste quadrante e, portanto,  $L(d)$  está definida em  $d = 0$ . Assim, podemos assumir que  $L$  está definida em um intervalo  $[0, b_L)$  e não definida em  $d = b_L$ . Neste caso,  $\alpha(U_2(b_L)) = O$  estará completamente contido neste quadrante e então podemos concluir que se  $d < d_L$ , perto de  $b_L$ , então  $L(d)$  estará próximo da origem  $O$ .

■

Com argumentos análogos, provamos o seguinte lema.

**Lema 5.1.3.** *Seja  $\chi_d$  o campo vetorial dado em (5.1), com distribuição convexa. Seja  $(0, \bar{R}(d))$  o primeiro ponto de interseção de  $L_1(d)$  com o eixo  $0y$  e  $(0, \bar{L}(d))$  o último ponto de interseção de  $L_2(d)$  também com o eixo  $0y$ . As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- a) *A função  $\bar{R}(d)$  é contínua,  $\bar{R}(d) < \frac{\varepsilon}{n}$ , positiva, estritamente decrescente e definida em um intervalo  $(a_R, \frac{m\varepsilon}{n}]$  com  $\lim_{d \rightarrow a_R} \bar{R}(d) = -\frac{\varepsilon}{n}y$ ;*
- b) *A função  $\bar{L}(d)$  é contínua,  $\bar{L}(d) < -\frac{\varepsilon}{n}$  positiva, estritamente crescente e definida em um intervalo  $(a_L, \frac{m\varepsilon}{n}]$  com  $\lim_{d \rightarrow a_L} \bar{L}(d) = -\infty$ .*

Para todo  $d$  onde as funções  $L(d)$  e  $R(d)$  estão definidas, seja  $G(d)$  uma região do plano limitada pela parte da separatriz  $U_1$  entre  $S_1$  e  $(0, R(d))$ , pela parte da separatriz  $U_2$  entre  $S_2$  e  $(0, L(d))$ , pelo segmento de reta ligando  $S_1$  e  $S_2$  e pelo segmento de reta  $I(d)$  ligando  $(0, L(d))$  e  $(0, R(d))$ . Veja Figura 5.2.

Note que, se  $p$  é um ponto interior do segmento  $I(d)$ , então o  $\omega$ -limite de  $p$  está localizado na região  $G$  se, e somente se  $R(d) < L(d)$ . Neste caso, dizemos que  $G$  é uma região atratora. Agora, o  $\alpha$ -limite de  $p$  está localizado na região  $G$  se, e somente, se  $L(d) < R(d)$ . Neste caso, diremos que  $G$  é uma região repulsora.

Analogamente as funções  $\bar{L}(d)$  e  $\bar{R}(d)$  definem uma região  $\bar{G}(d)$  contida no semi-plano inferior  $y \leq -1$ , que será atratora, se  $\bar{L}(d) < \bar{R}(d)$ , e repulsora se  $\bar{R}(d) < \bar{L}(d)$ .

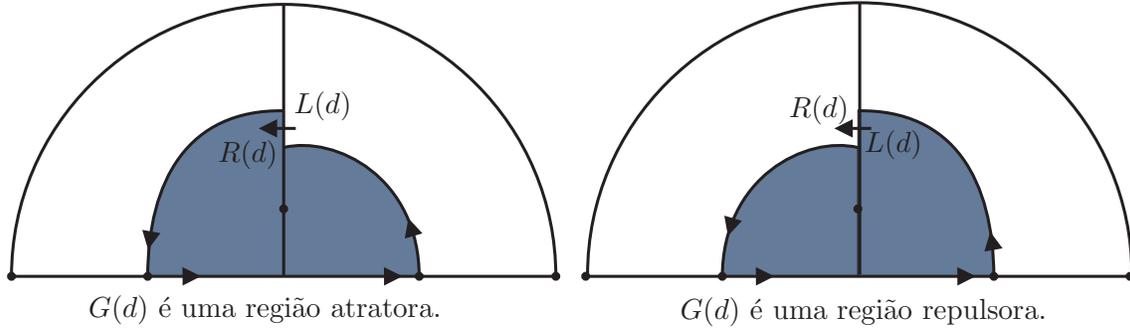


Figura 5.2: Região  $G(d)$ .

Vamos encontrar agora valores de  $d$  para os quais o campo  $\chi_d$  apresenta uma conexão de sela não contida em uma reta.

**Lema 5.1.4.** *Seja  $f$  e  $\bar{f}$  funções definidas por*

$$\begin{aligned} f(d) &= R(d) - L(d), \\ \bar{f}(d) &= \bar{R}(d) - \bar{L}(d), \end{aligned}$$

onde  $R, L, \bar{R}$  e  $\bar{L}$  são definidos pelos Lemas 5.1.2 e 5.1.3. Então:

- a)  $f$  e  $\bar{f}$  são contínuas,  $f$  é crescente e  $\bar{f}$  é decrescente.
- b) Existe um único calor  $d_U$  para o qual  $f(d_U) = 0$ .
- c) Existe um único valor  $d_L$  para o qual  $f(d_L) = 0$ .
- d)  $0 < d_U < m < d_L$ .

**Demonstração:** A afirmação a) é clara pelas definições das funções  $L(d)$  e  $R(d)$ . Para provar b) é suficiente mostrar que  $f(0) < 0$ ,  $f(d) > 0$  para algum ponto  $d > 0$ . Se

$f(0) > 0$ , teremos  $R(0) > L(0)$  de onde se conclui que  $G(0)$  é uma região repulsora. Mas, se  $p$  é um ponto interior desta região, diferente da origem, teremos  $\alpha(p) \subset G(0)$ . Visto que a origem é um atrator fraco (quando  $d = 0$ ),  $\alpha(p)$  não pode ser a origem. Concluimos então que existe uma órbita fechada repulsora em volta da origem. Mas, a existência de tal órbita é impossível, pois um campo quadrático com uma reta invariante e um foco fraco não admite ciclos limites [14]. Vamos agora calcular os autovalores da matriz Jacobiana do sistema  $\chi$  nos pontos de selas  $S_1$  e  $S_2$ . As matrizes Jacobianas em  $S_1$  e  $S_2$  são dadas por

$$JF(x_1, -1) = \begin{bmatrix} -\sqrt{\Delta} & \varepsilon + mx_1 - 2n \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad JF(x_2, -1) = \begin{bmatrix} \sqrt{\Delta} & \varepsilon + mx_1 - 2n \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}.$$

Analisando  $JF(x_1, -1)$  chegamos à seguinte equação característica

$$P_\lambda(S_1) = \lambda^2 - (x_1 - \sqrt{\Delta})\lambda - x_1\sqrt{\Delta} = 0.$$

Calculando as raízes de  $P_\lambda(S_1) = 0$  temos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-(x_1 - \sqrt{\Delta}) \pm \sqrt{(x_1 - \sqrt{\Delta})^2 + 4(x_1\sqrt{\Delta})}}{2} = \frac{x_1 - \sqrt{\Delta} \pm \sqrt{x_1^2 - 2x_1\sqrt{\Delta} + \Delta + 4x_1\sqrt{\Delta}}}{2} \\ &= \frac{x_1 - \sqrt{\Delta} \pm \sqrt{x_1^2 + 2x_1\sqrt{\Delta} + \Delta}}{2} = \frac{x_1 - \sqrt{\Delta} \pm \sqrt{(x_1 + \sqrt{\Delta})^2}}{2} = \frac{(x_1 - \sqrt{\Delta}) \pm (x_1 + \sqrt{\Delta})}{2}. \end{aligned}$$

Assim, os autovalores de  $JF(x_1, -1)$  são  $\lambda_1 = x_1$  e  $\lambda_2 = \sqrt{\Delta}$ . De forma análoga calcula-se os autovalores de  $JF(x_2, -1)$  chegando a  $\lambda_1 = x_2$  e  $\lambda_2 = \sqrt{\Delta}$ . Para  $d = 0$ , temos  $|x_2| > x_1$ . Isto mostra que, se  $f(0) = 0$ , então a região  $G(0)$  será delimitada por um gráfico atrator. Com a mesma argumentação anterior, provamos que  $f(0) = 0$  é impossível. Então, devemos ter  $f(0) < 0$ . Como  $\lim_{d \rightarrow b_R} R(d) = \infty$  e  $\lim_{d \rightarrow d_L} L(d) = 0$ , temos que  $f(d) > 0$  para algum  $d < \text{Min}\{b_R, b_L\}$ . Visto que  $f$  é estritamente crescente, então existe um único valor  $d_U$  para o qual  $f(d_U) = 0$ . Para provar c) é suficiente mostrar que  $\bar{f}(m\varepsilon/n) < 0$  e que existe  $d < m\varepsilon/n$  tal que  $\bar{f}(d) > 0$ , o que é feito de forma análoga ao anterior, usando o fato de que a singularidade  $E$  para  $d = m\varepsilon/n$  é um repulsor fraco. Para provar d),

considere o campo dado por (5.1) com  $d = m = 0$ , ou seja,

$$\chi_* : \begin{cases} x' = \varepsilon x + lx^2 + ny^2, \\ y' = x + xy. \end{cases}$$

Este campo tem as singularidades  $O$  e  $F$  como centros,  $U_1 = U_2$  e  $L_1 = L_2$ . Então, temos  $f(0) = \bar{f}(0) = 0$  se  $m = d = 0$ . Observamos agora que

$$\begin{aligned} \langle \chi_m(x, y), \chi_*^\perp(x, y) \rangle &= \langle (mx + \varepsilon y + lx^2 + mxy + ny^2, x + xy), (-x - xy, \varepsilon y + lx^2 + ny^2) \rangle \\ &= -(x + xy)(mx + \varepsilon y + lx^2 + mxy + ny^2) + (x + xy)(\varepsilon y + lx^2 + ny^2) \\ &= (x + xy)(-mx - \varepsilon y - lx^2 - mxy - ny^2 + \varepsilon y + lx^2 + ny^2) \\ &= (x + xy)(-mx - mxy) = -mx^2 - 2mx^2y - mx^2y^2 = -mx^2(1 + y)^2 \end{aligned}$$

é negativo quando  $m > 0$  e  $x + 1 \neq 0$ . Concluimos então, como no Lema 5.1.1, que  $f(m) > 0$ , se  $f(m)$  está definida e, então  $m > d_U$  em todo caso. Da mesma forma mostra-se que  $\bar{f}(m) < 0$  se  $\bar{f}(m)$  está definida e, portanto,  $m < d_L$ .

■

Pelo Lema 5.1.4, vemos que  $\chi_{d_U}$  apresenta uma conexão  $L_U$ , entre as selas  $S_1$  e  $S_2$ , contida no semi-plano  $y > -1$ ,  $\chi_{d_L}$  apresenta uma conexão  $L_L$  entre as selas  $S_1$  e  $S_2$  contida no semi-plano  $y < -1$ . Se  $d$  não é igual a  $d_U$  ou  $d_L$ , então  $\chi_d$  não apresenta uma conexão entre as selas  $S_1$  e  $S_2$  além da contida na reta  $y = -1$ . No próximo lema, vamos utilizar fortemente o fato que um campo quadrático com uma reta invariante tem um centro ou no máximo uma órbita fechada hiperbólica [9].

**Lema 5.1.5.** *Seja  $\chi_d$  o campo de vetores dado em (5.1) e sejam  $d_L$  e  $d_U$ , os valores definidos no Lema 5.1.4. Então, temos:*

- a)  $\chi_d$  tem uma órbita fechada (atrator hiperbólico)  $\mathcal{O}_U$  em torno da origem se, e somente se,  $d \in (0, d_U)$ .
- b)  $\chi_d$  terá uma órbita fechada (repulsor hiperbólico)  $\mathcal{O}_L$  em torno da singularidade  $E$  se, e somente se,  $d \in (d_L, \frac{m\varepsilon}{n})$ .

**Demonstração:** Se  $d \in (0, d_U)$ , então  $f(d) < 0$  e, portanto,  $\omega(C) \subset G(d)$ , para todo  $C \in G(d)$ . Mas,  $\omega(C) \neq O$ , pois a origem é repulsora se  $d > 0$  e assim podemos concluir que existe uma órbita fechada  $\mathcal{O}_U$ , contida em  $G(d)$ . Por [9] esta órbita é única e hiperbólica. Se supormos que  $\chi_d$  tem uma órbita fechada  $\mathcal{O}$  em torno da origem para algum  $d > d_U$ , então esta órbita será atratora, pois a origem é repulsora e  $\mathcal{O}$  será a única órbita fechada do campo de vetores. Seja  $p$  um ponto da bacia de atração de  $\mathcal{O}$ , localizado fora da região limitada por  $\mathcal{O}$ . Temos, então, que  $\omega(p) = \mathcal{O}$  e  $\alpha(p)$  deve ser a sela  $S_1$  ou a singularidade no infinito  $A$ . Em todo caso, isso implica que  $\omega(U_1) = \mathcal{O}$  e temos  $f(d)$  definida e satisfazendo  $f(d) < 0$ , contradizendo a hipótese  $d > d_U$ . Suponhamos agora que  $\chi_d$  tenha um órbita fechada  $\mathcal{O}$  em torno da origem para algum  $d < 0$ . Esta órbita é repulsora, pois, a origem está atraindo e  $\mathcal{O}$  é a única órbita fechada do campo de vetores. Então,  $L(d)$  está definida, uma vez que não podemos ter  $\alpha(U_2) = O$ . Também temos  $R(d)$  bem definida, pois não temos  $\omega(U_1) = 0$  e obviamente  $d < d_U$  e, assim,  $f(d)$  está definida. Não temos  $f(d) \geq 0$ , pois  $d < 0$  e  $f$  é crescente com  $f(0) < 0$ , pelo Lema 5.1.4. Portanto,  $f(d) < 0$  e a região  $G(d)$  é atratora, conseqüentemente  $\mathcal{O}$  é atratora, uma contradição. O campo de vetores  $\chi_d$  não exibe uma órbita fechada se  $d = 0$  ou  $d = d_U$ , pois esta órbita, se existisse, seria hiperbólica e persistiria por pequenas variações de  $d$ , o que implica na existência de uma órbita fechada para  $\chi_d$  quando  $d < 0$  ou quando  $d > d_U$  uma contradição.

■

Com base nos lemas anteriores vamos agora descrever o comportamento das seis separatrizes de selas  $U_1, U_2, L_1, L_2, Z_1$  e  $Z_2$ . Em qualquer caso, independente do sinal de  $m^2 - 4n(l - 1)$ , o  $\alpha$ -limite de  $U_2$  será  $S_1$  se  $d = d_U$ , pelo Lema 5.1.4. O mesmo lema mostra que se diminuirmos  $d$  teremos  $\alpha(U_2) = A$  e se aumentarmos o valor de  $d$ , teremos  $\alpha(U_2) = O$ . Com argumentos similares mostramos que  $\omega(L_1)$  é  $S_1, E$  ou  $\bar{A}$  se  $d$  é, respectivamente, igual, menor ou maior que  $d_L$ .

Do Lema 5.1.1, quando  $m^2 - 4n(l - 1) \geq 0$ , segue que  $\alpha$ -limite de  $Z_1$  é  $S_1$  se  $d = d_1$  e o  $\omega$ -limite de  $Z_2$  é  $S_2$  quando  $d = d_2$ . Concluimos também que  $\alpha(Z_1) = A$  se  $d > d_1$ ,  $\alpha(Z_1) = O$  se  $d < d_1$ ,  $\alpha(Z_2) = \bar{A}$  se  $d > d_2$  e  $\alpha(Z_2) = E$  se  $d < d_2$ .

O  $\omega$ -limite da separatriz  $U_1$  e o  $\alpha$ -limite da separatriz  $L_2$  dependerá do sinal de  $m^2 - 4n(l - 1)$ .

Note que, pelos Lemas de 4.1.1 a 5.1.5, temos os seguintes casos:

a) Se  $m^2 - 4n(l - 1) \geq 0$  ( $\chi_d$  tem duas ou três singularidades no infinito), então  $\chi_d$  muda de comportamento em  $d \in \{0, d_U, d_1, d_2, d_L, \frac{m\varepsilon}{n}\}$ .

b) Se  $m^2 - 4n(l - 1) < 0$  ( $\chi_d$  tem um par de singularidades no infinito), então  $\chi_d$  muda de comportamento em  $d \in \{0, d_U, d_L, \frac{m\varepsilon}{n}\}$ .

Ao observar o comportamento de  $\chi_d$  quando o parâmetro  $d$  está próximo de um ponto do conjunto  $\{0, d_U, d_1, d_2, d_L, \frac{m\varepsilon}{n}\}$  concluímos que quando  $m^2 - 4n(l - 1) > 0$ , temos os seguintes comportamentos das duas separatrizes de selas  $\omega(U_1)$  e  $\alpha(L_2)$ :

$$\omega(U_1) = \begin{cases} O & \text{se } d < 0, \\ \mathcal{O}_U & \text{se } 0 < d < d_U, \\ S_2 & \text{se } d = d_U, \\ \bar{A} & \text{se } d_U < d < d_1, \\ C & \text{se } d = d_1, \\ B & \text{se } d > d_1. \end{cases}$$

$$\alpha(L_2) = \begin{cases} \bar{B} & \text{se } d < d_2, \\ \bar{C} & \text{se } d = d_2, \\ A & \text{se } d_2 < d < d_L, \\ S_1 & \text{se } d = d_L, \\ \mathcal{O}_L & \text{se } d_L < d < \frac{m\varepsilon}{n}, \\ E & \text{se } d = \frac{m\varepsilon}{n}. \end{cases}$$

Quando  $m^2 - 4n(l - 1) = 0$ , as singularidades no infinito  $B$  e  $C$  colidem em  $B$ ; de forma análoga, as singularidades  $\bar{B}$  e  $\bar{C}$  colidem em  $\bar{B}$ . Veja a Figura 5.1. As únicas mudanças na tabela acima são  $\omega(U_1) = B$ , quando  $d \geq d_1$  e  $\alpha(L_2) = \bar{B}$ , quando  $d \leq d_2$ .

Se  $m^2 - 4n(l - 1) < 0$  e  $m \neq 0$  não teremos as singularidades  $B$  e  $\bar{B}$ , conseqüentemente,

não teremos as separatrizes  $Z_1$  e  $Z_2$ . Assim,

$$\omega(U_1) = \begin{cases} O & \text{se } d \leq 0, \\ \mathcal{O}_U & \text{se } 0 < d < d_U, \\ S_2 & \text{se } d = d_U, \\ \bar{A} & \text{se } d > d_U. \end{cases}$$

$$\alpha(L_2) = \begin{cases} A & \text{se } d < d_L, \\ S_1 & \text{se } d = d_L, \\ \mathcal{O}_L & \text{se } d_L < d < \frac{m\varepsilon}{n}, \\ E & \text{se } d = \frac{m\varepsilon}{n}. \end{cases}$$

Finalmente, quando  $m = 0$ , teremos somente um par de singularidades no infinito e, pelo Lema 4.1.1 as singularidades  $O$  e  $E$  serão centros, quando  $d = 0$ , repulsores hiperbólicos, quando  $d > 0$  e atratores hiperbólicos, quando  $d < 0$ .

Observe que, no caso  $m = 0$ , os retratos de fase de  $\chi_d$  quando  $d < 0$  e  $d > 0$  são os mesmos que os retratos de fase quando  $d \leq 0$  e  $d \geq m\varepsilon/n$ , respectivamente, no caso  $m \neq 0$  e  $m^2 - 4n(l-1) < 0$ . Veja as Figuras 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6.

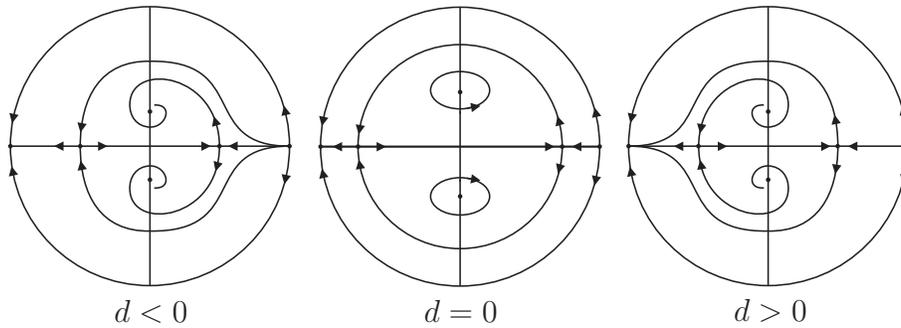


Figura 5.3: Retratos de fase de  $\chi_d$  com  $m = 0$ .

Isto finaliza a demonstração do Teorema 1.1.

## 5.2 Caso Não-Convexo

Descreveremos nesta seção as possíveis configurações para os retratos de fase do campo vetorial  $\chi$  quando as singularidades finitas formam um quadrilátero não-convexo. Pelo

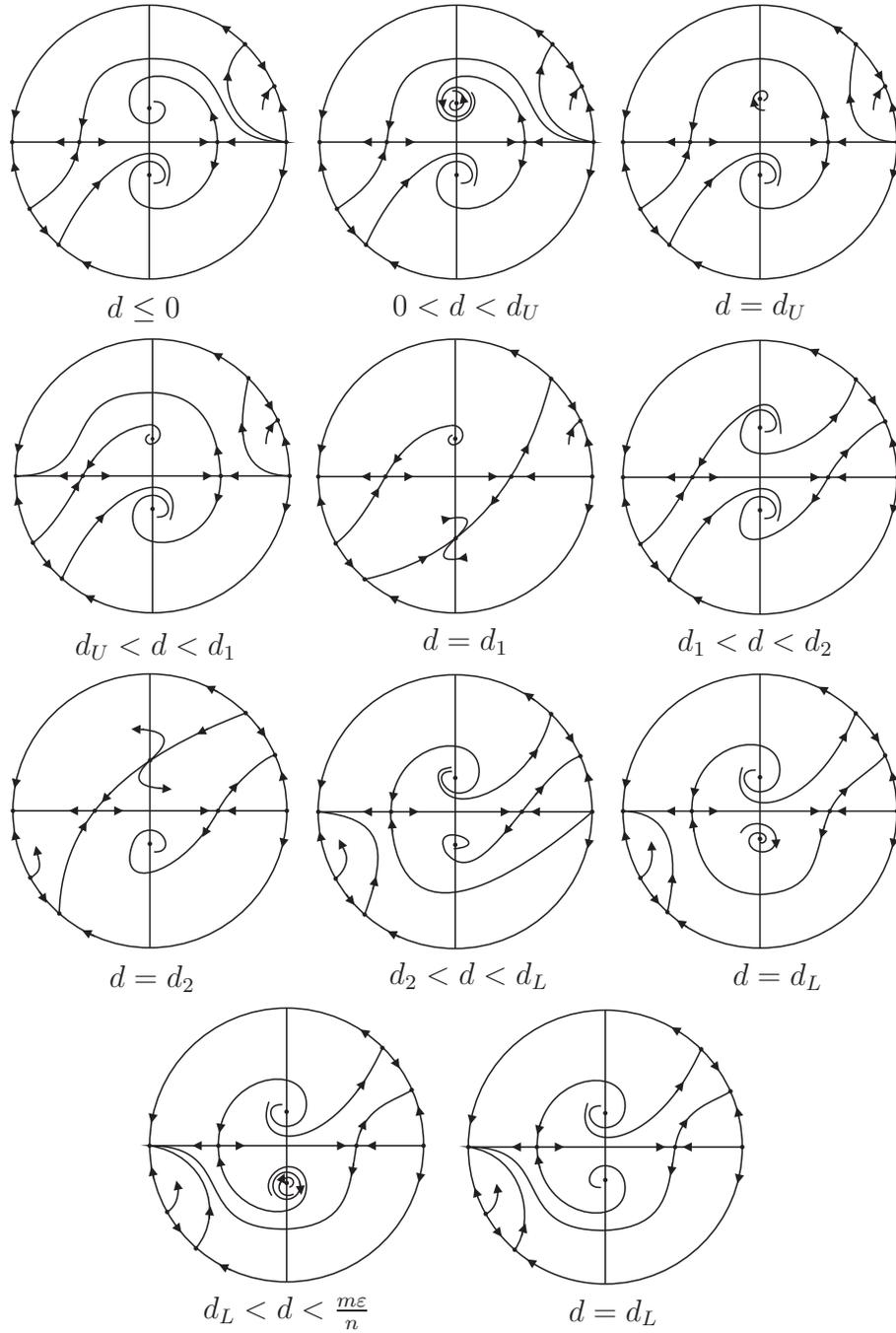


Figura 5.4: Retratos de fase de  $\chi_d$  com  $m^2 - 4n(l-1) > 0$ .

Lema 2.3.2, podemos escrever o campo como

$$\begin{cases} x' = dx + \varepsilon y + lx^2 + mxy + ny^2, \\ y' = x(1 + y), \end{cases}$$

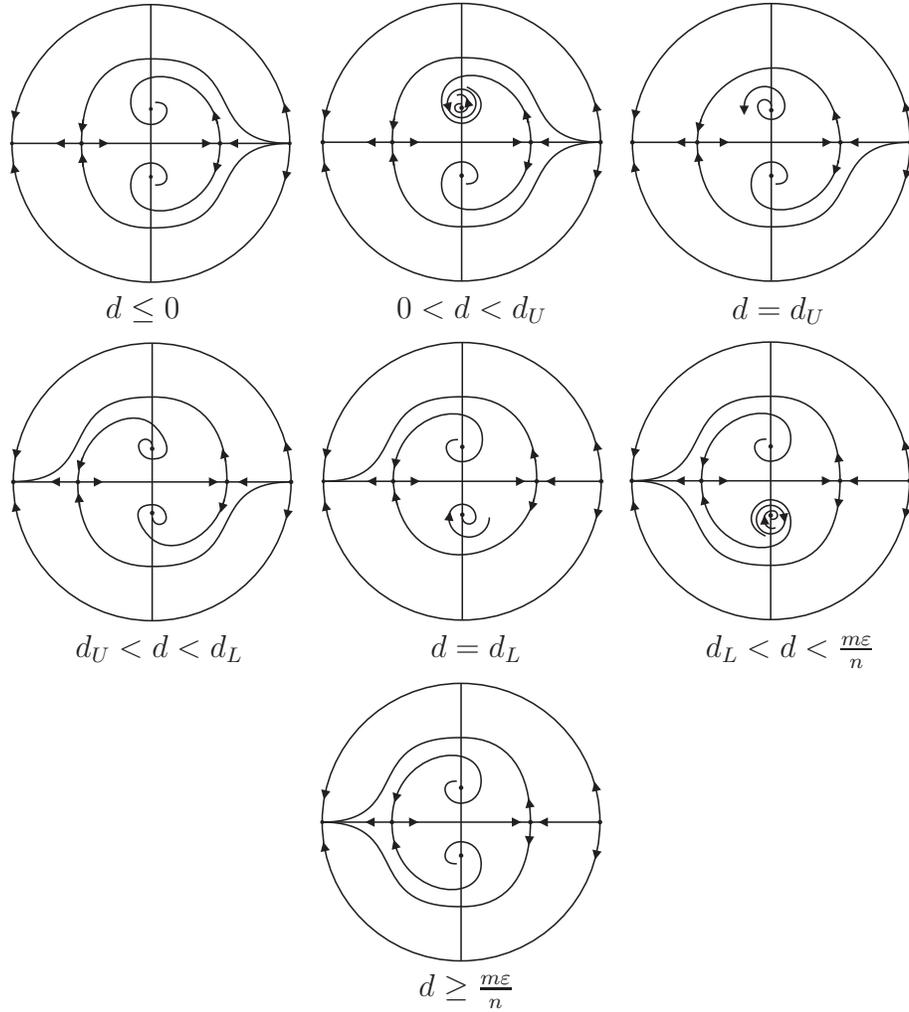


Figura 5.5: Retratos de fase de  $\chi_d$  com  $m^2 - 4n(l - 1) < 0$ .

onde  $l < 0$ ,  $\varepsilon < 0 < n$ .

As singularidades finitas são  $S_1 = (x_1, -1)$ ,  $S_2 = (x_2, -1)$  e  $S = (0, -m\varepsilon/n)$ , todos pontos de selas e  $O = (0, 0)$ , uma anti-sela.

Se denotarmos por  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , os autovalores da matriz Jacobiana associada ao ponto de sela  $S$ , temos

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{dn - m\varepsilon + \sqrt{(dn - m\varepsilon)^2 - 4\varepsilon n^2 + 4n\varepsilon^2}}{n} \right) < 0$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{dn - m\varepsilon - \sqrt{(dn - m\varepsilon)^2 - 4\varepsilon n^2 + 4n\varepsilon^2}}{n} \right) < 0$$

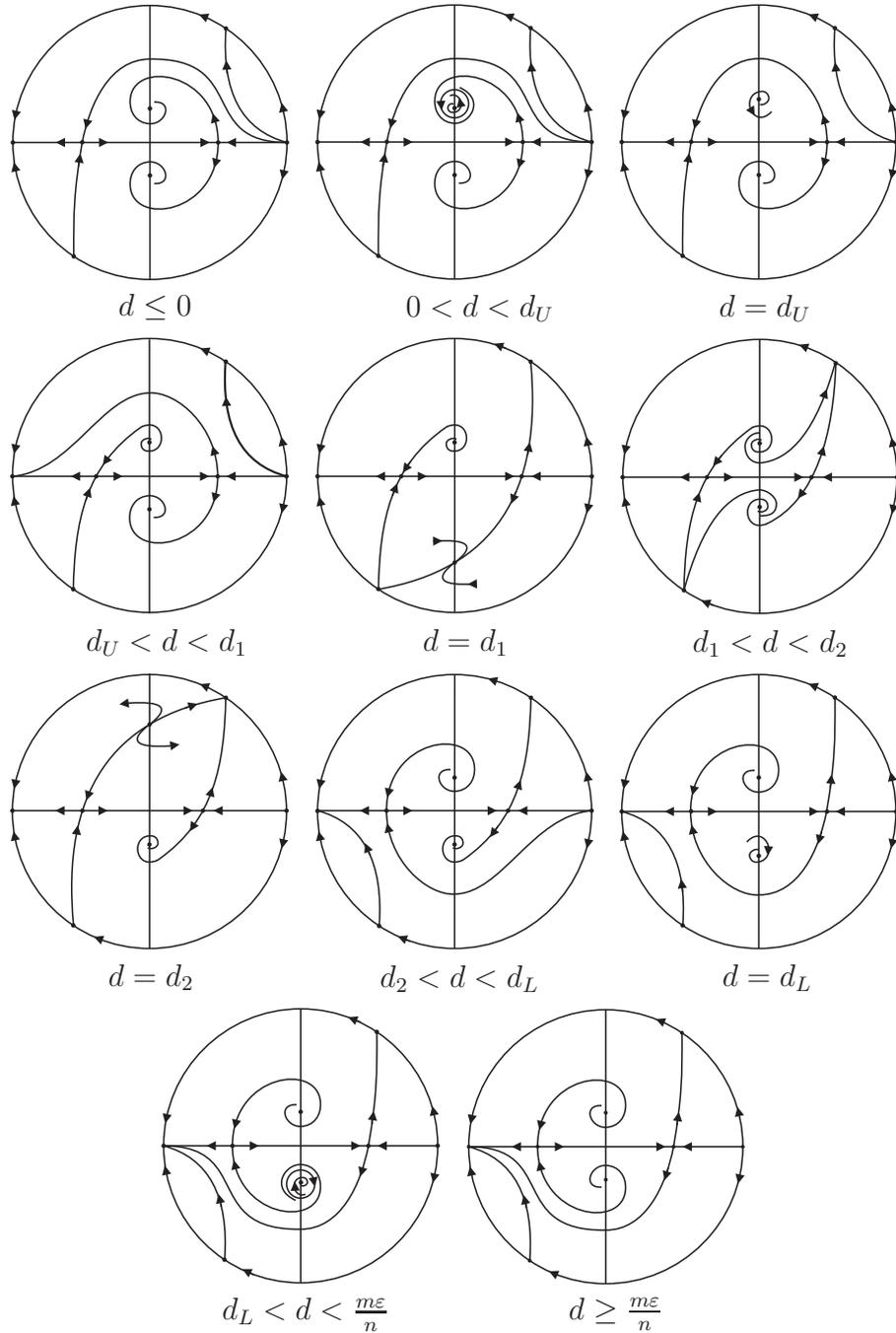


Figura 5.6: Retratos de fase de  $\chi_d$  com  $m^2 - 4n(l-1) = 0$ .

e os autovetores  $(\sigma_1, 1) = \left(\frac{n\lambda_1}{n-\varepsilon}, 1\right)$  e  $(\sigma_2, 1) = \left(\frac{n\lambda_2}{n-\varepsilon}, 1\right)$ , onde  $\sigma_1 < 0$  e  $\sigma_2 > 0$ .

Além disso, de acordo com o Lema 3.4.1, as singularidades no infinito, nas coordenadas  $(u, w)$  são:  $A = (0, 0)$ , um repulsor,  $B = (u_1, 0)$  e  $C = (u_2, 0)$ , ambos atratores, com

$u_1 < 0 < u_2$ . Denotaremos por  $\bar{A}, \bar{B}$  e  $\bar{C}$  as singularidades simétricas no infinito.

Denotaremos por  $U_1$  a separatriz instável da sela  $S_1$  e por  $U_2$  a separatriz estável da sela  $S_2$  localizadas no semi-plano  $y > -1$ . Denotaremos também por  $L_1$  a separatriz instável da sela  $S_1$  e por  $L_2$  a separatriz estável de  $S_2$  no semi-plano  $y < -1$ .

Assim podemos concluir que o campo  $\chi$  sempre apresenta as orientações dadas pela Figura 5.7.

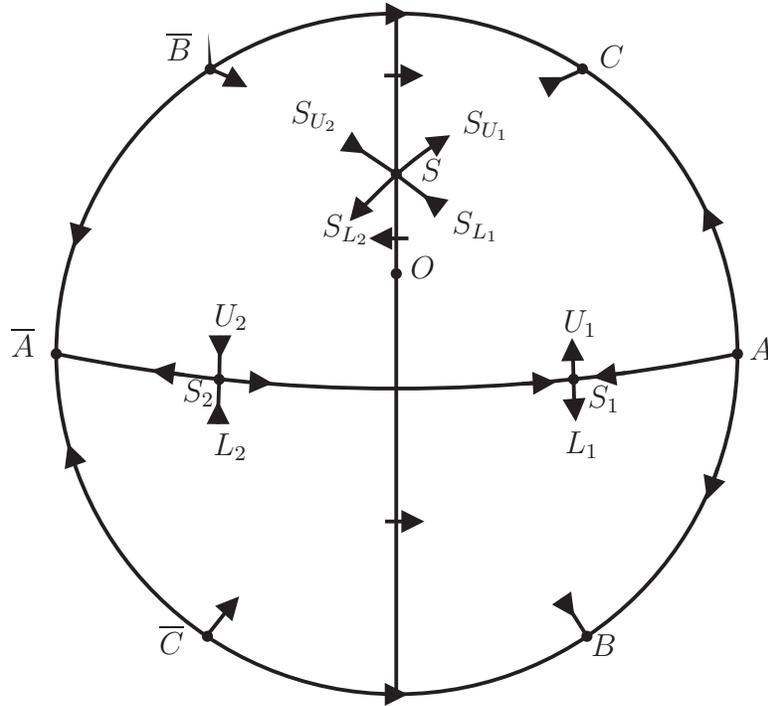


Figura 5.7: Orientações de  $\chi$  para o caso não convexo.

Denotaremos por  $S_{U_1}, S_{U_2}, S_{L_1}$  e  $S_{L_2}$  as separatrizes da sela  $S$ , conforme a Figura 5.7.

**Lema 5.2.1.** *Nas condições anteriores, temos:  $\alpha(S_{U_2}) = \bar{B}, \omega(S_{U_1}) = C, \alpha(L_2) = \bar{C}$  e  $\omega(L_1) = B$ .*

**Demonstração:** Seja  $R_1$  a região do disco de Poincaré com  $x \geq 0, y \geq -\varepsilon/n$ ,  $R_2$  a região onde  $x \leq 0, y \geq -\varepsilon/n$ ,  $R_3$  a região onde  $x \leq 0, y \leq -1$  e  $R_4$  a região onde  $x \geq 0$  e  $y \leq -1$ . Observe que a campo sobre a reta  $y = -\varepsilon/n$  tem componente  $y' > 0$  se  $x > 0$  e  $y' < 0$  se  $x < 0$ .

Assim,  $R_1$  é positivamente invariante e, conseqüentemente,  $\omega(S_{U_1}) = C$ ; de forma análoga,  $R_2$  é negativamente invariante e, portanto,  $\alpha(S_{U_2}) = \overline{B}$ . Temos também que  $R_3$  é negativamente invariante e  $R_4$  positivamente invariante e, conseqüentemente,  $\alpha(L_2) = \overline{C}$  e  $\omega(L_1) = B$ . ■

Então, para descrever o retrato de fase do campo  $\chi$  com distribuição não-convexa, devemos determinar  $\omega(S_{L_2}), \alpha(S_{L_1}), \alpha(U_2)$  e  $\omega(U_1)$ .

Seja  $T$  o triângulo de vértices nos pontos de selas. Designaremos por  $t_1$  o lado de  $T$  que liga os vértices  $S$  e  $S_1$  e por  $t_2$  o lado que liga os vértices  $S$  e  $S_2$ . Dizemos que  $T$  atrai, repele ou é invariante em  $t_1$  (respectivamente  $t_2$ ) se a órbita de qualquer ponto  $p \in t_1$  (respectivamente  $p \in t_2$ ) tende para o interior de  $T$ , exterior de  $T$  ou é tangente a  $t_1$  (respectivamente  $t_2$ ), ou seja,  $T$  atrai, repele ou é invariante em  $t_1$  (respectivamente  $t_2$ ) se

$$\langle \chi_\perp(p), (1, r) \rangle = \langle (-y'(p), x'(p)), (1, r) \rangle$$

é maior, menor ou igual a zero, onde  $r < 0$  (respectivamente  $r > 0$ ) é o coeficiente angular da reta de suporte de  $t_1$  (respectivamente  $t_2$ ).

Considere

$$d_1 = \frac{n - l\varepsilon}{n} \text{ e } d_2 = \frac{n - l\varepsilon}{n} \frac{1}{u_2}.$$

**Lema 5.2.2.** *Nas condições acima, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- a)  $T$  é invariante, atrator ou repulsor em  $t_1$  se  $d = d_1$ ,  $d < d_1$  ou  $d > d_1$ , respectivamente.
- b)  $T$  é invariante, atrator ou repulsor em  $t_2$  se  $d = d_2$ ,  $d < d_2$  ou  $d > d_2$ , respectivamente.

**Demonstração:** A reta suporte de  $t_1$  é  $y = rx - \varepsilon/n$ , onde

$$r = \frac{\varepsilon - n}{nx_1} < 0.$$

Então, se  $p = (x, y)$  é um ponto da reta, temos

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{\bar{d}}^\perp(p, (1, r)) \rangle &= \langle (-y'(p), x'(p), (1, r)) \rangle \\
&= \langle -x - x \left( rx - \frac{\varepsilon}{n} \right), dx + \varepsilon \left( rx - \frac{\varepsilon}{n} \right) + lx^2 + mx \left( rx - \frac{\varepsilon}{n} \right) + n \left( rx - \frac{\varepsilon}{n} \right)^2, (1, r) \rangle \\
&= \left\langle \left( -x - rx^2 + \frac{\varepsilon x}{n}, dx + \varepsilon rx - \frac{\varepsilon^2}{n} + lx^2 + mrx^2 - \frac{m\varepsilon x}{n} + nr^2x^2 - 2rx\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{n} \right), (1, r) \right\rangle \\
&= -x - rx^2 + \frac{\varepsilon x}{n} + drx + \varepsilon r^2x + lrx^2 + mrx^2 - \frac{m\varepsilon rx}{n} + nr^3x^2 - 2r^2\varepsilon x \\
&= x^2(-r + lr + mr^2 + nr^3) + x \left( -1 + \frac{\varepsilon}{n} + dr + \varepsilon r^2 - \frac{m\varepsilon r}{n} - 2r^2\varepsilon \right) \\
&= r(nr^2 + mr + (l-1))x^2 - \frac{\varepsilon}{nr}(nr^3 + mr^2 - r + lr)x + \left( \frac{l\varepsilon}{n} - 1 + dx \right) x \\
&= -\varphi(r)x^2 + \frac{\varepsilon}{nr}\varphi(r)x + \left( dr - \frac{n-l\varepsilon}{n} \right) x,
\end{aligned}$$

onde  $\varphi(r) = \varphi(u) - u(nu^2) + mu + l - 1$  é a equação das singularidades de  $\chi$  no infinito. Sabemos pela Seção 2.3, que  $x_1 = x_1(d)$  é bijeção de  $(-\infty, \infty)$  em  $(0, \infty)$ ,  $x_1(d)$  é crescente. Assim, existem  $\bar{d} \in (-\infty, \infty)$  tal que  $(\bar{d}) = u_1$  e, portanto,  $\varphi(r(\bar{d})) = 0$ . Visto que  $\langle \chi_\perp(p), (1, r) \rangle = 0$  para  $p = S$  e  $p = S_1$ , temos que  $\bar{d}u_1 = \frac{n-l\varepsilon}{n}$ , o que significa  $\bar{d} = d_1$ . Se  $d > d_1$ , então  $u_1 < r(d) < 0$  e então  $\varphi(r(d)) < 0$  e  $y = r(d)x - \frac{\varepsilon}{n}$  é não invariante. Então, podemos concluir que

$$\langle \chi_\perp(p), (1, r) \rangle > 0$$

se  $p \in t_1$ . A prova que  $\langle \chi_\perp(p), (1, r) \rangle > 0$  se  $d < d_1$  é similar. ■

Note que, por este lema, existe uma ligação entre as selas  $S_i$  e  $S$  se, e somente se,  $d = d_i$ , para  $i = 1, 2$ .

Na sequência usaremos o fato que um campo quadrático com uma reta invariante tem um centro ou no máximo uma órbita fechada hiperbólica [9].

**Lema 5.2.3.** *Nas condições anteriores, seguem as seguintes afirmações:*

- a) Se  $d > \text{Max}\{d_1, d_2\}$ , então  $\chi$  não tem órbita fechada e  $\omega(S_{L_2}) = \bar{A}$ ,  $\alpha(S_{L_1}) = O$ ,  $\alpha(U_2) = O$  e  $\omega(U_1) = C$ .
- b) Se  $d < \text{Min}\{d_1, d_2\}$  então,  $\chi$  não tem órbita fechada e  $\omega(S_{L_2}) = O$ ,  $\alpha(S_{L_1}) = A$ ,  $\alpha(U_2) = \bar{B}$  e  $\omega(U_1) = O$ .

**Demonstração:** Vamos provar a), a prova de b) é análoga. Toda órbita fechada de  $\chi$  deve estar no interior de  $T$  e ao redor da origem. Visto que  $d > \text{Max}\{d_1, d_2\} > 0$ , a origem é um repulsor e  $T$  repele em  $t_1$  e  $t_2$ . Como resultado de [9], temos que  $\chi$  não tem órbitas fechadas. As demais afirmações são verificadas analisando as orientações de  $\chi$ . Veja a

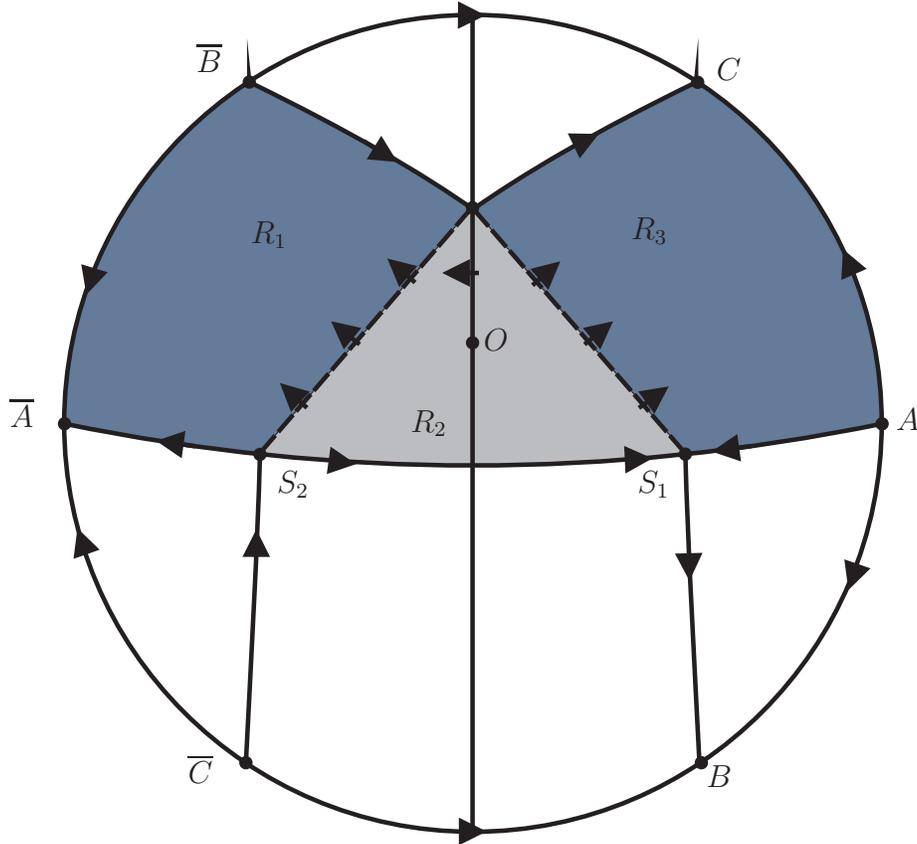


Figura 5.8: Orientações do campo  $\chi$  para  $d > \text{Max}\{d_1, d_2\}$ .

Figura 5.8. Observe que as regiões  $R_1$  e  $R_3$  são positivamente invariantes e a região  $R_2$ , compreendida na região limitada pelos segmentos de reta que ligam as singularidades  $S_1$  a  $S_2$ ,  $S_1$  a  $S$  e  $S_2$  a  $S$ , é negativamente invariante. Sabemos que  $\alpha(U_2)$  está na região acima da reta  $y = -1$ , visto que esta reta é invariante. Pela orientação do campo  $\chi$ ,  $\alpha(U_2)$  não pode ser  $\bar{A}$ . Suponha que  $\alpha(U_2)$  seja  $\bar{B}$ , então teríamos uma região positivamente invariante delimitada pelo segmentos de reta que ligam  $S_2$  a  $S$ , pela separatriz de  $S$  que está ligada a  $\bar{B}$  e pela separatriz de  $S_2$  ligada a  $\bar{B}$ , que supomos existir. Mas, isso não pode ocorrer, visto que, no interior desta região não temos nenhuma singularidade ou

ciclo limite. Então,  $\alpha(U_2)$  deve estar na região  $R_2$ . Pela orientação do campo vemos que  $\alpha(U_2)$  não pode ser a singularidade  $S_1$  e então concluímos que  $\alpha(U_2) = O$ . Como dito anteriormente, observando a orientação do campo concluímos também que  $\omega(S_{L_2}) = \overline{A}$ ,  $\alpha(S_{U_1}) = O$  e  $\omega(U_1) = C$ .

■

Observe que  $n - l\varepsilon = 0$ , implica que  $d_1 = d_2 = 0$ . Então, se  $d = 0$ , as três selas  $S$ ,  $S_1$  e  $S_2$  estão ligadas e a origem é um centro pelo Lema 4.0.2. Este fato juntamente com o Lema 5.8 permite-nos descrever o retrato de fase de  $\chi$  quando variamos o parâmetro  $d$  no caso  $n - l\varepsilon = 0$ . Na sequência analisamos os casos em que  $n - l\varepsilon \neq 0$ . Primeiramente vamos considerar  $n - l\varepsilon < 0$ . Neste caso, visto que  $u_1 < 0 < u_2$ , temos  $d_2 < d < d_1$  e então  $T$  atrai em  $t_1$  e repele em  $t_2$  para todo  $d \in (d_2, d_1)$ . Observamos que se  $d \in (d_2, d_1)$ , ou a separatriz  $U_1$  está contida em  $\{x > 0\}$  ou intercepta o eixo  $0y$  em algum ponto entre  $O$  e  $-\varepsilon/n$ . Seja  $(0, R(d))$  o primeiro ponto de interseção de  $U_1$  com o eixo  $0y$ , seja  $(0, L(d))$  o último ponto de interseção de  $U_2$  também com o eixo  $0y$ .

**Lema 5.2.4.** *Seja  $\chi$  o campo de vetores dado pela equação (5.1) com  $n - l\varepsilon < 0$  e  $d_2 \leq d \leq d_1$ .*

a) *A função  $R(d)$  é contínua, estritamente crescente e definida em um intervalo  $(a_R, d_1)$ ,  $a_R < 0$ , com  $\lim_{d \rightarrow a_R} R(d) = 0$  e  $\lim_{d \rightarrow d_1} R(d) = \frac{-\varepsilon}{n}$ .*

b) *A função  $L(d)$  é contínua, estritamente decrescente e definida em um intervalo  $(d_2, b_L)$ ,  $b_L > 0$ , com  $\lim_{d \rightarrow d_2} L(d) = \frac{-\varepsilon}{n}$  e  $\lim_{d \rightarrow b_L} L(d) = 0$ .*

**Demonstração:** A função  $R(d)$  é contínua e definida em um intervalo pela variação contínua da variedade instável de  $S_1$  com o parâmetro  $d$ . Ela está definida em  $d = 0$ , pois neste caso, a singularidade  $S$  é um foco ou um centro, pelo Lema 4.0.2, e, portanto, não podemos ter  $U_1 \in \{x > 0\}$ . Seja  $(a_R, b_r)$  o intervalo de definição de  $R$ . Para  $d = d_1$  a separatriz  $U_1$  coincide com  $t_1$  e então  $b_R = d_1$  e  $\lim_{d \rightarrow d_1} R(d) = -\varepsilon/n$ . Visto que  $0 \in (a_R, b_R)$ ,  $a_R < 0$  e  $\lim_{d \rightarrow a_R} L(d) = 0$ . pela definição de  $R(d)$ . A afirmação c) é provada por argumentos similares.

■

Definimos  $f(d) = R(d) - L(d)$ . Pelo Lema 5.2.4,  $f$  é contínua, crescente e definida em um intervalo  $(a_R, b_L) \subset (d_2, d_1)$ . Para cada  $d \in (a_R, b_L)$ , denotaremos por  $G(d)$  a região do plano limitada pela parte da separatriz  $U_1$  entre  $S_1$  e  $(0, R(d))$ , a parte da separatriz  $U_2$  entre  $S_1$  e  $(0, L(d))$ , o segmento de reta entre  $S_1$  e  $S_2$  e o segmento de reta  $I(d)$ , entre  $(0, L(d))$  e  $(0, R(d))$ .

Observamos que a região  $G(d)$  é atratora se  $f(d) < 0$  e repulsora caso  $f(d) > 0$ .

Considere agora que  $n - l\varepsilon > 0$ . Neste caso, temos  $d_1 < 0 < d_2$  e, então,  $T$  repele em  $t_1$  e atrai em  $t_2$  para todo  $d \in (d_1, d_2)$ .

Observamos também que se  $d \in (d_1, d_2)$  a separatriz  $S_{L_1}$  está contida no semi-plano  $x > 0$  ou  $S_{L_1}$  intercepta o eixo  $0y$  em algum ponto entre  $-1$  e  $0$ . Além disso, a separatriz  $S_{L_2}$  está contida no semi-plano  $x < 0$  ou  $S_{L_2}$  intercepta  $0y$  em algum ponto entre  $-1$  e  $0$ .

Denotaremos por  $(0, \overline{R}(d))$  o último ponto de interseção de  $S_{L_1}$  com o eixo  $0y$  e por  $(0, \overline{L}(d))$  o primeiro ponto de interseção de  $S_{L_2}$  também com o eixo  $0y$ .

A demonstração do seguinte lema é similar à demonstração do Lema 5.2.4.

**Lema 5.2.5.** *Seja  $\chi$  o campo de vetores dado por (5.1), onde  $n - l\varepsilon > 0$  e  $d_1 \leq d \leq d_2$ .*

a) *A função  $\overline{R}(d)$  é contínua, estritamente crescente e definida em um intervalo  $(d_1, b_{\overline{R}})$ ,  $b_{\overline{R}} > 0$  com  $\lim_{d \rightarrow d_1} \overline{R}(d) = -1$  e  $\lim_{d \rightarrow b_{\overline{R}}} \overline{R}(d) = 0$ .*

b) *A função  $\overline{L}(d)$  é contínua, estritamente decrescente e definida em um intervalo  $(a_{\overline{L}}, d_2)$ ,  $a_{\overline{L}} < 0$ , com  $\lim_{d \rightarrow a_{\overline{L}}} \overline{L}(d) = 0$  e  $\lim_{d \rightarrow d_2} \overline{L}(d) = -1$ .*

O próximo lema mostra que quando  $n - l\varepsilon \neq 0$ , o campo vetorial  $\chi$  apresenta um ciclo limite para algum valor do parâmetro  $d$ .

**Lema 5.2.6.** *Seja  $\chi$  o campo de vetores dado por (5.1) com  $n - l\varepsilon \neq 0$ . Então existe  $d_*$ , tal que  $f(d_*) = 0$  ou  $\overline{f}(d_*) = 0$ . Além disso,  $d_* = 0$  se  $m = 0$  ou  $m(n - l\varepsilon)d_* < 0$ .*

**Demonstração:** Se  $n - l\varepsilon < 0$ , pelo Lema 5.2.4,  $\lim_{d \rightarrow a_{\overline{R}}} f(d) < 0$  e  $\lim_{d \rightarrow d_{\overline{L}}} f(d) > 0$  e então existe  $d_* \in (a_R, b_L)$  tal que  $f(d_*) = 0$ . Se  $n - l\varepsilon > 0$ , pelo Lema 5.2.5,  $\lim_{d \rightarrow a_{\overline{R}}} \overline{f}(d) > 0$  e

$\lim_{d \rightarrow b_L^-} \bar{f}(d) > 0$  e então existe  $d_* \in (a_R, b_L)$  tal que  $\bar{f}(d_*) = 0$ . Agora, se  $m(n - l\varepsilon) > 0$  e  $d = 0$ , a origem é um repulsor fraco e  $\chi$  não tem uma órbita fechada pelo Lema 4.0.2. Então, as regiões  $G(0)$  ou  $\bar{G}(0)$  são repulsoras e, então,  $f(0)$  ou  $\bar{f}(0)$  é positiva, visto que  $f$  ou  $\bar{f}$  é crescente, devemos ter  $d_* < 0$ . De forma análoga, se  $m(n - l\varepsilon) < 0$  e  $d = 0$ , a origem é um atrator fraco e  $\chi$  não apresenta uma órbita fechada, pelo Lema 4.0.2. Então, as regiões  $G(0)$  ou  $\bar{G}(0)$  são atratoras e, então,  $f(0)$  ou  $\bar{f}(0)$  é negativo e, visto que  $f$  ou  $\bar{f}$  é crescente devemos ter  $d_* > 0$ . Se  $m = 0$  e  $d = 0$ , novamente pelo Lema 4.0.2 a origem é um centro e, então,  $G(0)$  ou  $\bar{G}(0)$  não pode estar atraindo nem repelindo. Assim,  $f(0) = 0$  ou  $\bar{f}(0) = 0$ , isto é,  $d_* = 0$ .

■

**Lema 5.2.7.** *O campo de vetores  $\chi$  dado pelo sistema (5.1) com  $m(n - l\varepsilon) < 0$  (respectivamente  $m(n - l\varepsilon) > 0$ ) tem um órbita hiperbólica fechada atratora (respectivamente repulsora) se, e somente se,  $d \in (0, d_*)$  (respectivamente  $d \in (d_*, 0)$ ).*

**Demonstração** Observamos que pelo Lema 5.2.6,  $d_* = 0$  se  $m = 0$ . Provaremos o lema quando  $n - l\varepsilon < 0$  e  $m > 0$ . Neste caso,  $d_* > 0$ . Os demais casos são similares. Se  $d \in (0, d_*)$ , então  $f(d) < 0$ , portanto,  $G(d)$  é uma região atratora. Visto que  $d > 0$ , a origem é repulsora, concluímos, então, que existe pelo menos uma órbita fechada  $\mathcal{O}$  contida em  $G(d)$ . Por [9] esta órbita é única e hiperbólica. Suponha que  $\chi$  tenha uma órbita fechada  $\mathcal{O}$  em torno da origem para  $d > d_*$ . Esta órbita é atratora, pois, ela é única e a origem é repulsora para  $d > 0$ . Seja  $p$  um ponto na bacia de atração de  $\mathcal{O}$ , localizado fora da região limitada por  $\mathcal{O}$ . Devemos ter  $\omega(p) = \mathcal{O}$  e  $\alpha(p)$  deve ser a sela  $S_1$  ou a singularidade  $A$  no infinito. Em todo caso, isto implica que  $\omega(U_1) = \mathcal{O}$  e temos  $f(d)$  definida e satisfazendo  $f(d) < 0$ , contradizendo a hipótese  $d > d_*$ . Suponha agora que  $\chi$  tenha uma órbita  $\mathcal{O}$  em torno da origem para  $d < 0$ . Esta órbita é repulsora, pois, é única e a origem é atratora para  $d < 0$ . Então,  $L(d)$  está definida visto que não temos  $\alpha(U_2) = 0$ . Também temos  $R(d)$  definida, pois podemos ter  $\omega(U_1) = 0$  e obviamente  $d < b_R$ , então  $f(d)$  está definida. Temos que  $f(d) < 0$ , pois,  $d < 0$  e  $f$  é crescente, portanto, a região  $G(d)$  é atratora e, conseqüentemente,  $\mathcal{O}$  está atraindo pontos de fora

de  $\mathcal{O}$ , uma contradição. O campo de vetores não pode exibir uma órbita fechada se  $d = 0$  ou  $d = d_*$ , pois esta órbita seria hiperbólica e persistente por pequenas variações de  $d$ , implicando a existência de uma órbita fechada para  $\chi$  quando  $d < 0$  ou quando  $d > d_*$ .

■

A seguir, baseado nos lemas enunciados até aqui para o caso não-convexo, apresentaremos o  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite das selas de  $\chi$  e o desdobramento do plano de fase, observando os sinais de  $n - l\varepsilon$  e  $m$ , de acordo com a variação do parâmetro  $d$ .

1. *Caso  $n - l\varepsilon = 0$ :*

$$\alpha(U_2) = \begin{cases} \bar{B} & \text{se } d < 0, \\ S & \text{se } d = 0, \\ O & \text{se } d > 0. \end{cases} \quad \omega(U_1) = \begin{cases} O & \text{se } d < 0, \\ S & \text{se } d = 0, \\ C & \text{se } d > 0. \end{cases}$$

$$\alpha(S_{L_1}) = \begin{cases} A & \text{se } d < 0, \\ S_1 & \text{se } d = 0, \\ O & \text{se } d > 0. \end{cases} \quad \omega(S_{L_2}) = \begin{cases} O & \text{se } d < 0, \\ S_2 & \text{se } d = 0, \\ \bar{A} & \text{se } d > 0. \end{cases}$$

Veja Figura 5.9.

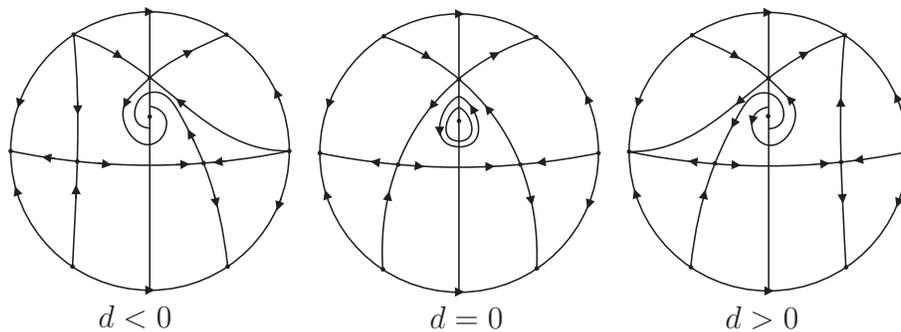


Figura 5.9: Retratos de fase de  $\chi_d$  com  $(n - l\varepsilon) = 0$ . Veja também as Figuras 5.7 e 5.8 para os rótulos dos pontos de equilíbrio.

2. *Caso  $n - l\varepsilon > 0$ :*

$$\alpha(U_2) = \begin{cases} \bar{B} & \text{se } d_2 < 0, \\ S & \text{se } d_2 = 0, \\ O & \text{se } d_2 > 0. \end{cases} \quad \omega(U_1) = \begin{cases} O & \text{se } d_1 < 0, \\ S & \text{se } d_1 = 0, \\ C & \text{se } d_1 > 0. \end{cases}$$

(i)  $m > 0$ :

$$\alpha(S_{L_1}) = \begin{cases} A & \text{se } d < d_1, \\ S_1 & \text{se } d = d_1, \\ \bar{B} & \text{se } d_1 < d < d_*, \\ S & \text{se } d = d_*, \\ \mathcal{O} & \text{se } d_* < d < 0, \\ O & \text{se } d \geq 0. \end{cases} \quad \omega(S_{L_2}) = \begin{cases} O & \text{se } d < d_*, \\ S & \text{se } d = d_*, \\ C & \text{se } d_* < d < d_2, \\ S_2 & \text{se } d = d_2, \\ \bar{A} & \text{se } d > d_2. \end{cases}$$

Veja Figura 5.10.

(ii)  $m = 0$ :

$$\alpha(S_{L_1}) = \begin{cases} A & \text{se } d < d_1, \\ S_1 & \text{se } d = d_1, \\ \bar{B} & \text{se } d_1 < d < 0, \\ S & \text{se } d = 0, \\ O & \text{se } d > 0. \end{cases} \quad \omega(S_{L_2}) = \begin{cases} O & \text{se } d < 0, \\ S & \text{se } d = 0, \\ C & \text{se } 0 < d < d_2, \\ S_2 & \text{se } d = d_2, \\ \bar{A} & \text{se } d > d_2. \end{cases}$$

Veja Figura 5.11.

(iii)  $m < 0$ :

$$\alpha(S_{L_1}) = \begin{cases} A & \text{se } d < d_1, \\ S_1 & \text{se } d = d_1, \\ \bar{B} & \text{se } d_1 < d < d_*, \\ S & \text{se } d = d_*, \\ O & \text{se } d > d_*. \end{cases} \quad \omega(S_{L_2}) = \begin{cases} O & \text{se } d \geq 0, \\ \mathcal{O} & \text{se } 0 < d < d_*, \\ S & \text{se } d = d_*, \\ C & \text{se } d_* < d < d_2, \\ S_2 & \text{se } d = d_2, \\ \bar{A} & \text{se } d > d_2. \end{cases}$$

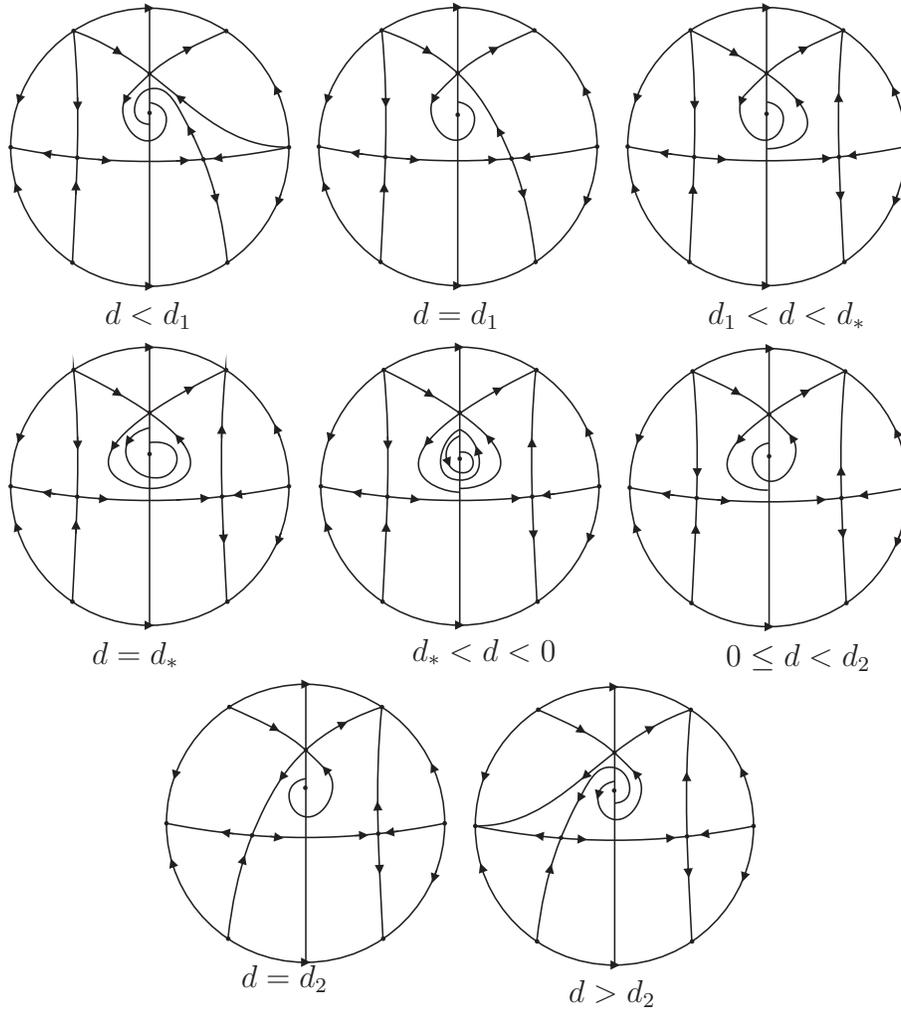


Figura 5.10: Retratos de fase de  $\chi_d$  com  $(n - l\varepsilon) > 0$  e  $m > 0$ . Veja também as Figuras 5.7 e 5.8 para os rótulos dos pontos de equilíbrio.

Veja Figura 5.12.

3. Caso  $n - l\varepsilon < 0$ :

$$\alpha(S_{L_1}) = \begin{cases} A & \text{se } d < d_1, \\ S_1 & \text{se } d = d_1 \\ O & \text{se } d > d_1. \end{cases} \quad \omega(S_{L_2}) = \begin{cases} O & \text{se } d < d_2, \\ S & \text{se } d = d_2, \\ C & \text{se } d > d_2. \end{cases}$$

(i)  $m > 0$ :

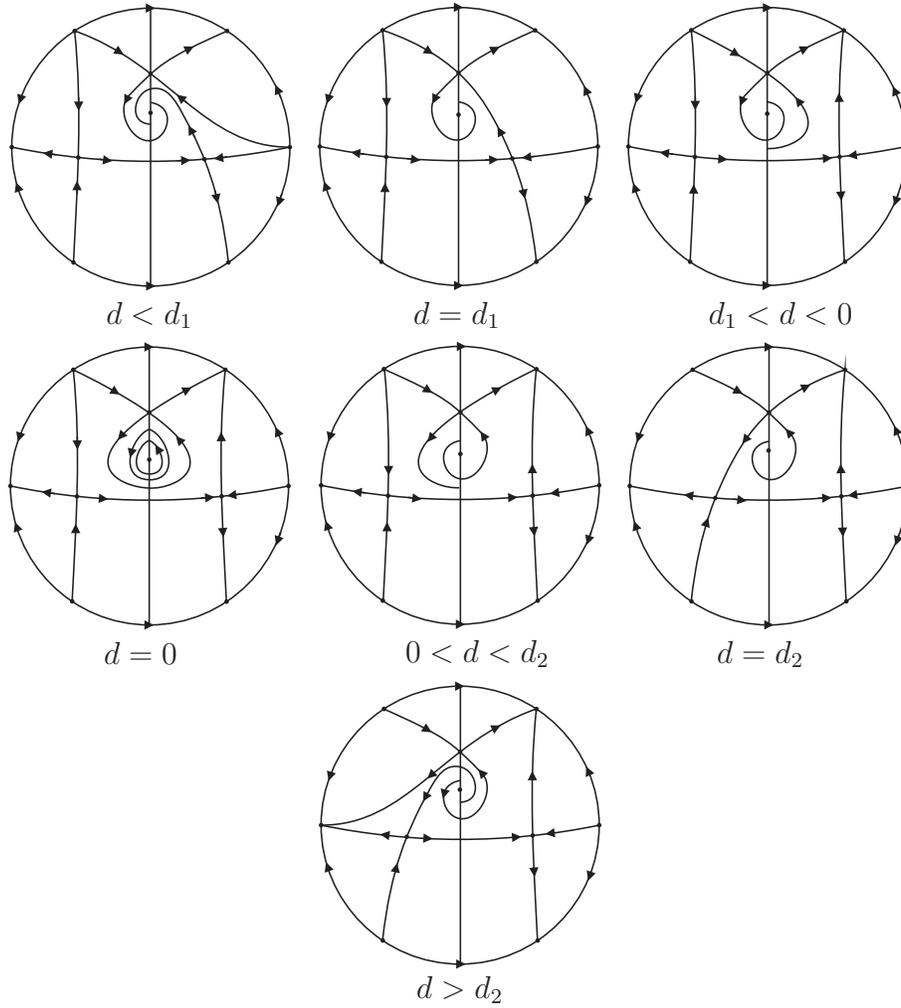


Figura 5.11: Retratos de fase de  $\chi_d$  com  $(n - l\varepsilon) > 0$  e  $m = 0$ . Veja também as Figuras 5.7 e 5.8 para os rótulos dos pontos de equilíbrio.

$$\alpha(U_2) = \begin{cases} \overline{B} & \text{se } d < d_2, \\ S & \text{se } d = d_2, \\ A & \text{se } d_2 < d < d_*, \\ s_1 & \text{se } d = d_*, \\ O & \text{se } d > d_*. \end{cases} \quad \omega(U_1) = \begin{cases} O & \text{se } d \geq 0, \\ \mathcal{O} & \text{se } 0 < d < d_*, \\ S_2 & \text{se } d = d_*, \\ \overline{A} & \text{se } d_* < d < d_1, \\ S & \text{se } d = d_1, \\ C & \text{se } d > d_1. \end{cases}$$

Veja Figura 5.13.

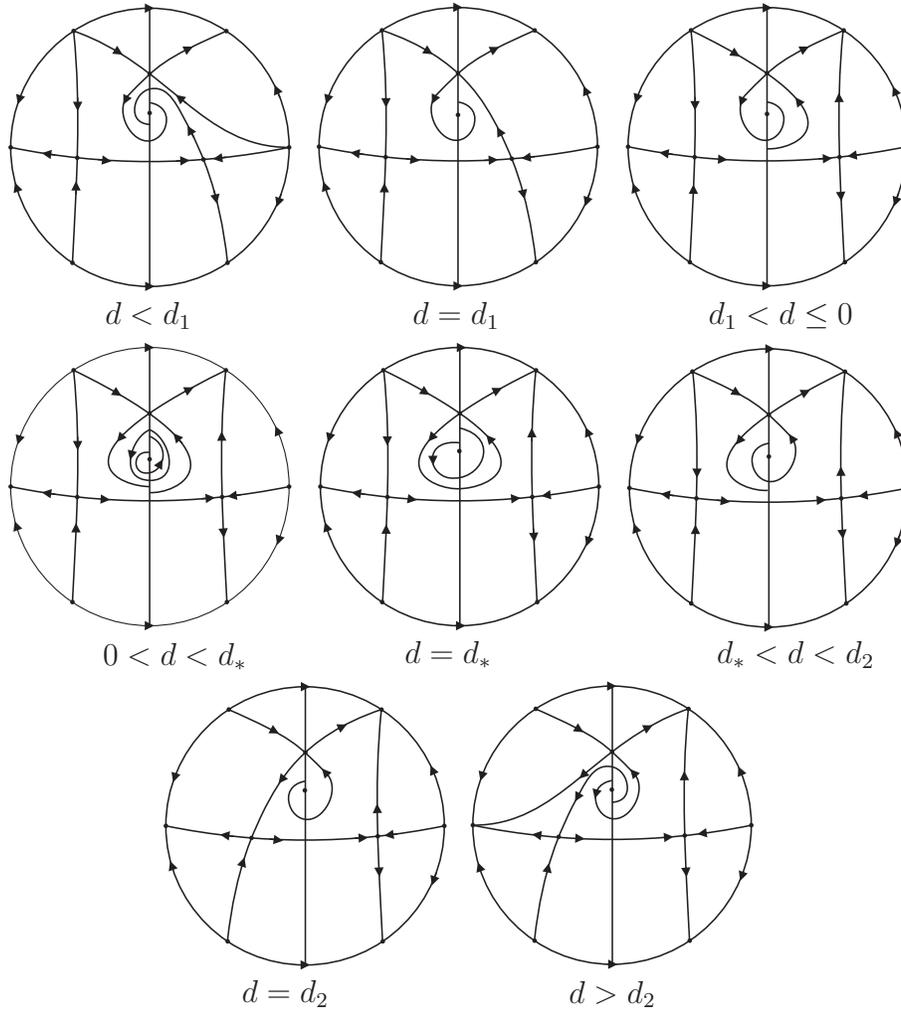


Figura 5.12: Retratos de fase de  $\chi_d$  com  $(n - l\varepsilon) > 0$  e  $m < 0$ . Veja também as Figuras 5.7 e 5.8 para os rótulos dos pontos de equilíbrio.

(ii)  $m = 0$ :

$$\alpha(U_2) = \begin{cases} \bar{B} & \text{se } d < d_2, \\ S & \text{se } d = d_2, \\ A & \text{se } d_2 < d < 0, \\ s_1 & \text{se } d = 0, \\ O & \text{se } d > 0. \end{cases} \quad \omega(U_1) = \begin{cases} O & \text{se } d > 0, \\ S_2 & \text{se } d = 0, \\ \bar{A} & \text{se } 0 < d < d_1, \\ S & \text{se } d = d_1, \\ C & \text{se } d > d_1. \end{cases}$$

Veja Figura 5.14.

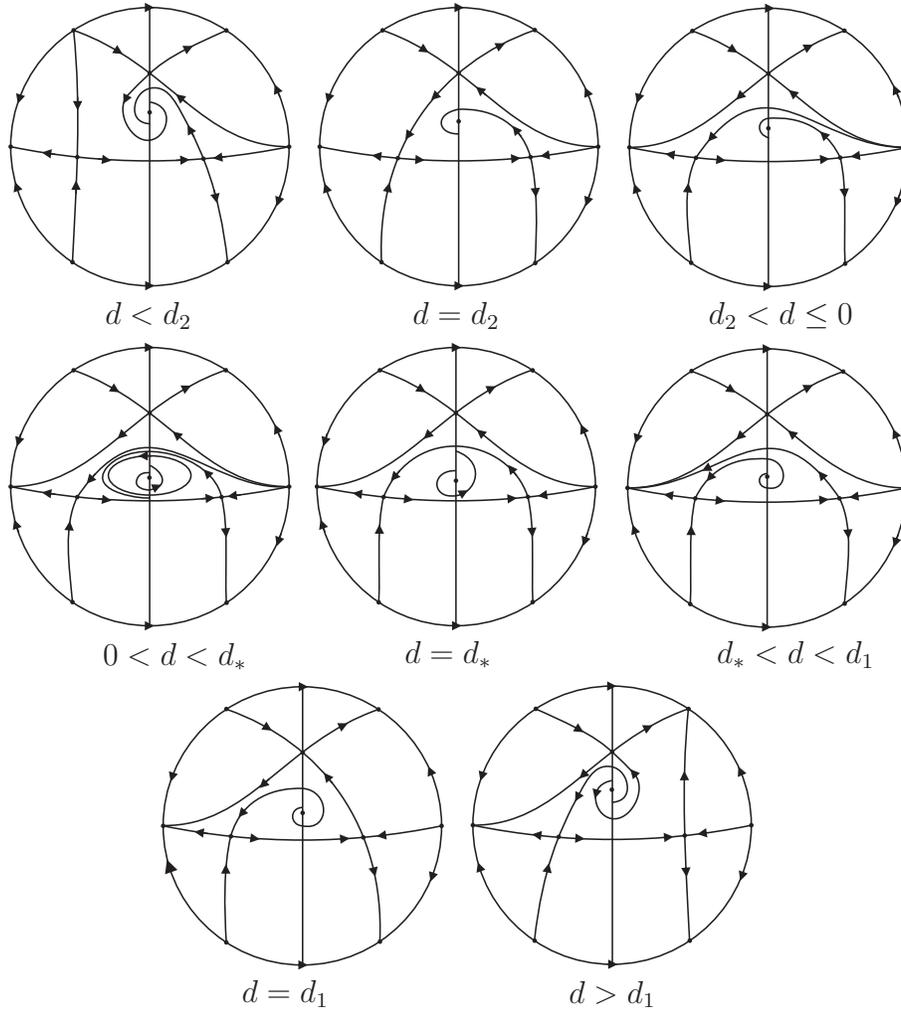


Figura 5.13: Retratos de fase de  $\chi_d$  com  $(n - l\varepsilon) < 0$  e  $m > 0$ . Veja também as Figuras 5.7 e 5.8 para os rótulos dos pontos de equilíbrio.

(iii)  $m < 0$ :

$$\alpha(U_2) = \begin{cases} \overline{B} & \text{se } d < d_2, \\ S & \text{se } d = d_2, \\ A & \text{se } d_2 < d < d_*, \\ s_1 & \text{se } d = d_*, \\ \mathcal{O} & \text{se } d_* < d < 0, \\ O & \text{se } d \geq 0. \end{cases} \quad \omega(U_1) = \begin{cases} O & \text{se } d > d_*, \\ S_2 & \text{se } d = d_*, \\ \overline{A} & \text{se } d_* < d < d_1, \\ S & \text{se } d = d_1, \\ C & \text{se } d > d_1. \end{cases}$$

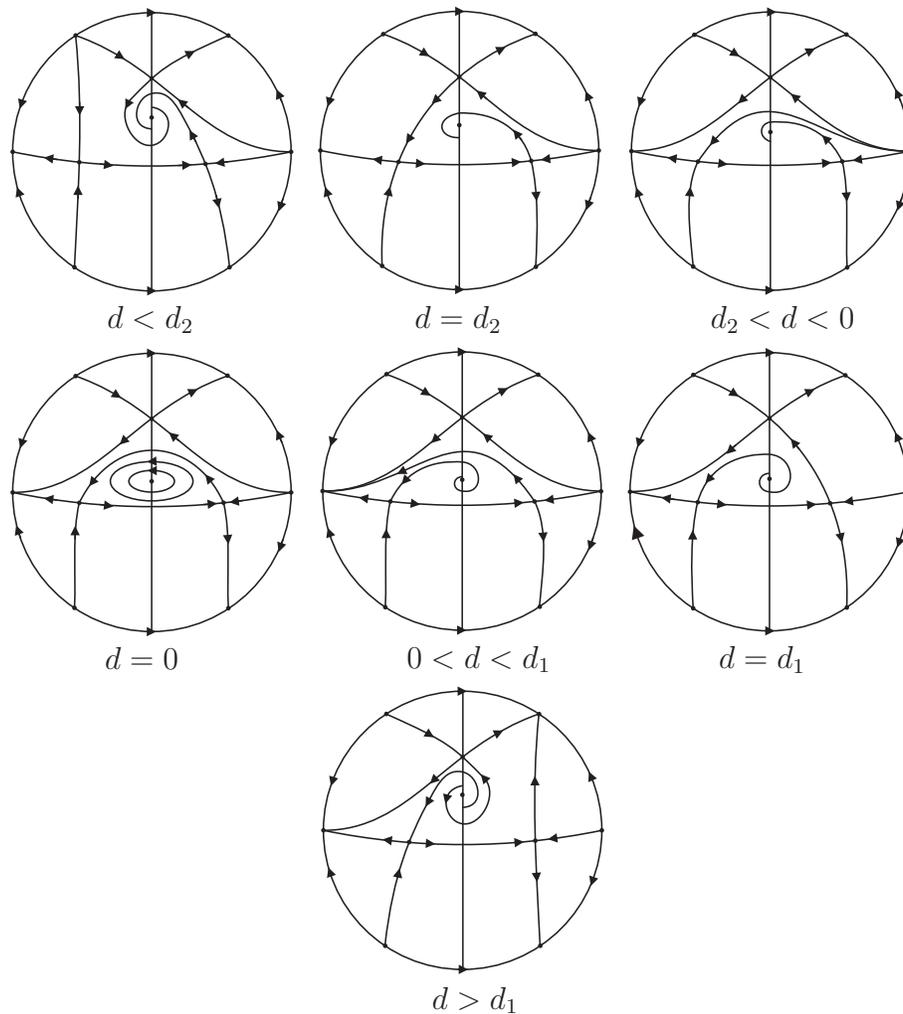


Figura 5.14: Retratos de fase de  $\chi_d$  com  $(n - l\varepsilon) < 0$  e  $m = 0$ . Veja também as Figuras 5.7 e 5.8 para os rótulos dos pontos de equilíbrio.

Veja Figura 5.15

Isto finaliza a demonstração do Teorema 1.2.

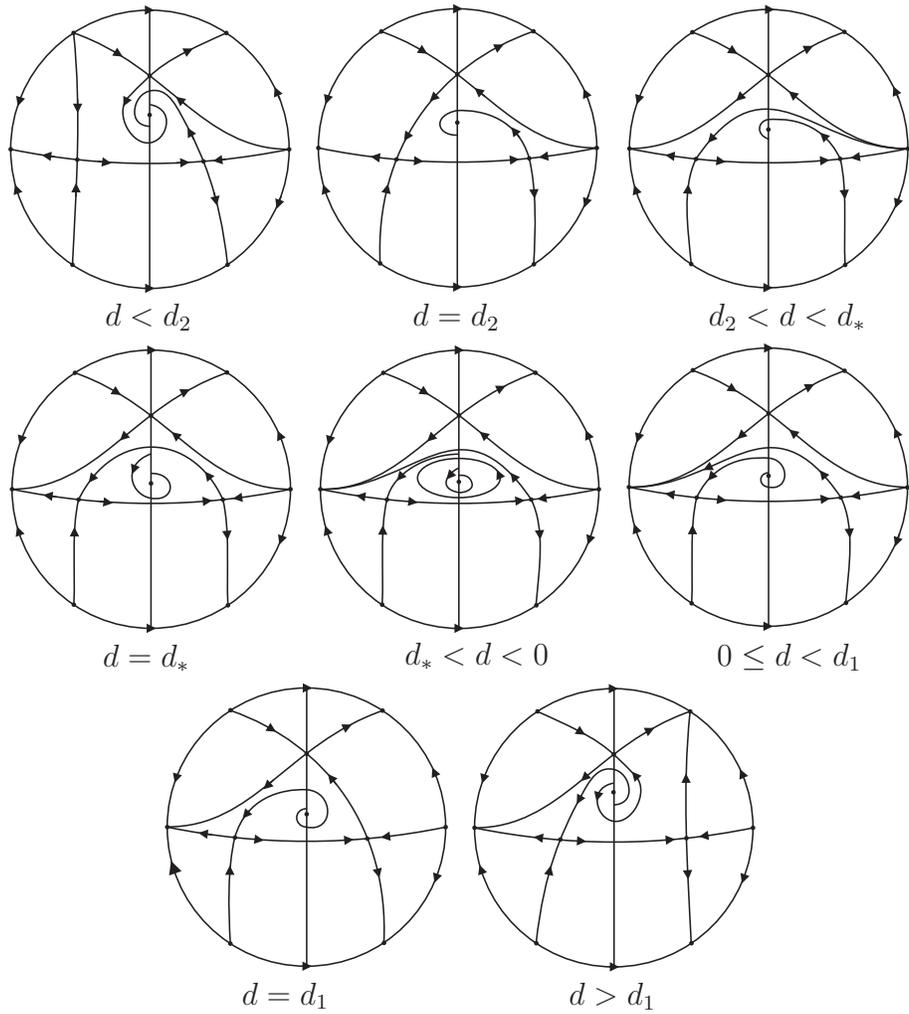


Figura 5.15: Retratos de fase de  $\chi_d$  com  $(n - l\varepsilon) < 0$  e  $m < 0$ . Veja também as Figuras 5.7 e 5.8 para os rótulos dos pontos de equilíbrio.

# Conclusões

Neste trabalho encontramos todos os possíveis retratos de fase para campos quadráticos planares com quatro singularidades possuindo uma conexão heteroclínica de selas em linha reta. Para isso, fizemos uma análise detalhada das singularidades, tanto na parte limitada do plano, como na parte ilimitada do plano através da compactificação de Poincaré.

Um instrumento de grande valia neste estudo e provavelmente para trabalhos futuros é o software P4 [10]. Este programa elaborado pelos matemáticos Jaume Llibre, Freddy Dumortier, Joan Carlos Artés e Chris Herssens, desenha o retrato de fase de um campo polinomial planar no disco de Poincaré.

Para trabalhos futuros pretendemos estudar campos polinomiais quadráticos planares com outras configurações, como por exemplo, possuindo retas invariantes passando por alguma singularidade. Outra área de estudo interessante diz respeito aos campos polinomiais planares de grau 3. O estudo de formas de compactificação do plano para campos não polinomiais também parece interessante.

# Bibliografia

- [1] ANDRONOV, A.A., LEONTOVICH, E.A., GORDAN, I.I., MAIER, A.G., *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*, John Willey & Sons, New York, (1973).
- [2] ANDRONOV, A.A., LEONTOVICH, E.A., GORDAN, I.I., MAIER, A.G., *Theory of Bifurcation of Dynamical Systems on a Plane*, John Willey & Sons, New York, (1973).
- [3] ARNOLD, V., *Equações Diferenciais Ordinárias*, Mir, (1985).
- [4] BAUTIN, N.N., *On the number of limit cycles which the variations of coefficients from an equilibrium state of the type focus or center*, Amer. Math. Soc. Translations, **100** (1954), 1–19.
- [5] CARRIÃO, P.C., GOMES, M.E.S., RUAS, A.G.G., *Planar quadratic vector fields with finite saddle connection on a straight line (convex case)*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, **6**, (2005), 187–204.
- [6] CARRIÃO, P.C., GOMES, M.E.S., RUAS, A.G.G., *Planar quadratic vector fields with finite saddle connection on a straight line (non-convex case)*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, **7**, (2009), 417–433.
- [7] CHICONE, C., *Ordinary Differential Equations with Applications*, Applied Mathematical, Springer-Verlag, New York, (1999).
- [8] CHICONE, C., *Quadratic gradients on the plane are generically Morse-Smale*, J. Diff. Equations, **33**, (1999), 159–166.

- [9] COPPEL, W.A., *Some quadratic systems with at most one line cycle*, Dynamics Reported **2**, (1989), 61–88. Springer-Verlag, New York, (1999).
- [10] DUMORTIER, F., LLIBRE, J., ARTÉS, J.C., *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer, New York, (2006).
- [11] HILBERT, D., *Mathematical problems*, Reprinted from Bull. Amer. Math. Soc., **8** (1902), 473–479.
- [12] KUZNETSOV, Y.A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Applied Math. Sciences, v. 112 Springer-Verlag, Berlin, (1995).
- [13] HIRSCH, M.W., SMALE, S., DEVANEY, R.L., *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Elsevier, USA, (2004).
- [14] QUIAN–YE, Y., *Theory of Limit Cycles*, Translation of Mathematical Monographs, v. 66, American Math. Society Translations, Providence, RI, (1986).
- [15] SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias Projeto Euclides*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.