

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA
APLICADA

Jonas Pedro Pereira

**TRIRREFRINGÊNCIA E A PROPAGAÇÃO
UNIDIRECIONAL EM METAMATERIAIS
NÃO-LINEARES INDEFINIDOS**

Dissertação de mestrado submetida ao programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Área de concentração: Teoria de Campos, Gravitação e Cosmologia

Professor orientador: Vitorio Alberto De Lorenci (UNIFEI)

Agosto de 2011

Itajubá – MG

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB_6/1700

P436t

Pereira, Jonas Pedro

Trirrefringência e a Propagação Unidirecional em Metamateriais Não-Lineares Indefinidos / Jonas Pedro Pereira. -- Itajubá, (MG) : [s.n.], 2011.

79 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Trirrefringência. 2. Óptica Geométrica. 3. Metamateriais. 4. Propagação em apenas um sentido. 5. Velocidades de Fase e Grupo. I. De Lorenci, Vitorio Alberto, orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

‘‘O ser humano é tão criativo
que, quando não tem problemas,
ele os cria.’’

(‘‘The human being is so creative
that, when he does not have problems,
he creates them.’’)

(A. Cury)

Dedicatória

*A todos aqueles que percebem
a diferença entre sonhos e desejos.
(To those who realize the difference
between dreams and wishes.)*

*A todos aqueles que dedicam
suas vidas a alguma causa nobre.
(To those who dedicate their lives
for some noble cause.)*

Agradecimentos

Ao Professor e orientador Vitorio Alberto de Lorenci, pelas inúmeras discussões e sugestões sobre esse trabalho. Pela inteligência extraordinária repartida, pelo exemplo de vida e de trabalho doados e por ser um dos principais responsáveis (juntamente com o Prof. Mário Novello) pelo futuro desafiador que me aguarda em terras distantes além-mar.

À minha família, principalmente pelo apoio, aparentemente ingênuo, mas indubitavelmente sincero doado. À todos aqueles que me deixaram participar de suas alegrias, sofrimentos, sonhos..., implícitos nas entrelinhas da convivência diária, durante esse período de mestrado. Aos colegas de disciplinas de mestrado e amigos na vida pessoal, Adriano Braga Barreto, Anderson Antunes Nogueira, Filipe Matusalém de Souza, Luis Henrique Campos Borges, Marco Aparecido de Brito e Maria Fernanda Xavier Pinto Medeiros, pela oportunidade de discutir temas diversos num nível tão profundo. A todos os outros colegas de mestrado, pela presença sempre acrescentadora em minha vida.

Aos professores Renato Klippert, Vladimir Perchine, Edisom Moreira Jr., Fabrício Rangel, Gabriel Hidalgo e Ricardo Medina, pelas mais belas aulas que já tive em minha vida. Agradeço a oportunidade de ter ouvido e discutido com mentes tão privilegiadas.

Ao suporte financeiro concedido pela agência de fomento FAPEMIG e por todos aqueles que trabalharam nos imensos bastidores burocráticos exigidos pelo nosso país.

Resumo

Neste trabalho analisaremos principalmente, sob o ponto de vista teórico, os efeitos ópticos denominados Trirrefringência e Propagação Unidirecional, onde esse último chamaremos de “Propagação em apenas um sentido”. O termo Trirrefringência será associado com a presença de três índices de refração distintos em uma dada direção e sentido (associados com três velocidades de fase distintas) devido a existência de uma onda inicial lançada na nessa mesma direção e sentido. Por Propagação em apenas um sentido para alguma dada direção, queremos dizer o efeito onde há uma completa assimetria de propagação de ondas eletromagnéticas em sentidos opostos nessa dada direção, sendo que se esta se propaga em um sentido, não pode se propagar no outro.

Trabalharemos com ondas eletromagnéticas monocromáticas no limite da Óptica Geométrica, propagando-se em meios não-lineares indefinidos quase transparentes com coeficientes dielétricos apenas diagonais na presença de campos elétrico e magnético externos controláveis e intensos (em relação aos campos da onda). Por meios não-lineares, referimo-nos àqueles meios onde os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética são dependentes dos campos resultantes no meio. Mostraremos nesse cenário que os efeitos da Trirrefringência e Propagação Unidirecional podem ocorrer. Pelo termo “metamaterial”, entenderemos aquele meio artificial onde as suas quantidades dielétricas podem ser controladas. Pelo termo “indefinido”, queremos dizer aquele metamaterial onde pelo menos uma das componentes dos seus tensores dielétricos (um/ambos tensores) é negativa. Em termos de permeabilidades magnéticas, tais meios não-lineares serão assumidos isotrópicos, com valores destas sempre positivos.

No Capítulo 1, introduziremos o assunto sobre metamateriais, elucidando algumas das suas principais características. Comentaremos rapidamente sobre os trabalhos nessa área que acreditamos ser os mais importantes aos nossos interesses presentes. Discutiremos também brevemente sobre o que é conhecido na literatura acerca da Trirrefringência (o que conseguimos encontrar nessa área). Birrefringência e velocidades de fase e grupo também são comentadas.

O Capítulo 2 é o mais importante. Neste, estabeleceremos as bases para obtermos as relações de dispersão para ondas eletromagnéticas em meios não-lineares. Analisaremos com muitos detalhes os efeitos ópticos da Trirrefringência e Propagação Unidirecional. Analisaremos também

outros efeitos interessantes, como Birrefringência e Opacidade em meios quase transparentes, relacionados com os metamateriais de interesse.

No Capítulo 3, comentaremos brevemente sobre as diferenças entre velocidade de fase e de grupo para alguns meios usuais e metamateriais indefinidos de interesse. Também comentaremos brevemente sobre a questão da superluminosidade para a velocidade de grupo nesses meios.

Palavras-chave: Trirrefringência, Óptica não-linear, Óptica Geométrica, Metamateriais, Propagação em apenas um sentido, Velocidade de Fase, Velocidade de Grupo, Tensores Dielétricos.

Abstract

In this work we shall mainly analyze, from the theoretical point of view, the optical effects denominated as *Trirefringence* and *One-way Propagation*. The term *Trirefringence* will be associated with the presence of three distinct refractive indexes for a given direction (associated with three distinct phase velocities) due to the existence of an initial wave set in that same direction. By *One-way Propagation* in a given direction, we mean the effect in which there is a complete asymmetry for light propagation in opposite directions, such that if it propagates forwards in this given direction, it can not propagate backwards and vice versa.

We shall work with monochromatic plane waves in the limit of Geometrical Optics, propagating in nearly transparent nonlinear indefinite media described by diagonal dielectric coefficients in the presence of controllable and intense external fields (in relation to their wave counterparts). These media shall be considered to present isotropic permeability tensors, described always by positive quantities. By nonlinear media, we mean those media in which the permittivity and permeability tensors are dependent upon the electromagnetic fields. We shall show in this scenario that *Trirefringence* and *One-way propagation* can happen. By the term *metamaterial*, we mean that artificial medium in which its dielectric quantities can be controlled. By the term *indefinite*, we designate that metamaterial where at least one of its dielectric tensors (one/both tensors) components have a negative value. In terms of permeability, such nonlinear media will be assumed isotropic, always with positive values for such quantities.

In Chapter 1, we shall introduce the issue connected with metamaterials, elucidating some of its most important features. We shall discuss briefly about the papers in this area we consider to be the most important ones to our current interests. We shall also discuss briefly what is known in the literature about *Trirefringence* (what we have found on this subject). *Birefringence* and phase and group velocities are also commented.

Chapter 2 is the most important. In this Chapter, we shall establish the basis for obtaining the dispersion relations for electromagnetic waves in nonlinear media. We shall analyze in-depth the *Trirefringence* and *One-way propagation*. We shall also analyze other interesting effects, for instance *Birefringence* and *Opacity* in nearly transparent media, related to the metamaterials under interest.

In Chapter 3, we shall comment briefly about the differences between the phase and group velocities for some usual media and indefinite metamaterials under interest. We shall also comment briefly about the faster-than-light issue for group velocity in these media.

Keywords: Trirefringence, Nonlinear optics, Geometrical Optics, Metamaterials, One-way Propagation, Phase Velocity, Group Velocity, Dielectric Tensors.

Índice

Dedicatória	iv
Agradecimentos	v
Resumo	vi
Abstract	viii
Índice	x
Lista de Figuras	xii
1 Introdução	1
2 Propriedades Ópticas de Metamateriais Não-Lineares	11
2.1 Introdução	11
2.2 Equações de Maxwell	13
2.3 Método de Hadamard–Papapetrou	17
2.4 Óptica Geométrica	22
2.5 Equação de Autovalores	25
2.6 Permeabilidade Magnética Isotrópica e Permissividade Elétrica Independente do Campo Magnético	28
2.7 Soluções da Equação de Fresnel Generalizada para Metamateriais Não-Lineares Uniaxiais	36
2.8 Não-Ocorrência de Trirrefringência em Cristais Lineares	41
2.9 Trirrefringência e Metamateriais Não-Lineares Indefinidos	42
2.10 Metamaterial Não-Linear Indefinido Unirrefringente e Birrefringente	51
2.11 Metamaterial Não-Linear Indefinido Isotrópico – Propagação em Apenas um Sentido	54
2.12 Metamaterial Não-Linear Indefinido Uniaxial	57
2.13 Cálculo dos Autovetores	58
3 Considerações Acerca das Velocidades de Propagação de Raios	60
3.1 Introdução	60

3.2	Velocidade de Fase e de Grupo	61
3.3	Velocidades Aparentemente Superluminais	66
4	Conclusões e Perspectivas	69
A	Métricas Ópticas	70
A.1	Introdução	70
A.2	Métrica Óptica para o Raio Ordinário	70
A.3	Análise das Métricas Ópticas	72
	Referências Bibliográficas	76

Lista de Figuras

1.1	Fonte de radiação A emitindo raios luminosos que inicialmente se propagam pelo vácuo, atingindo a primeira superfície do meio material com $n = -1$ (lente plana), que se encontra a uma distância l da fonte. Os raios se refratam de acordo com a lei de Snell e percorrem o meio material, até chegarem à segunda superfície do meio material (segunda lente plana), a uma distância $l + d$ da fonte, onde se refratam e convergem para o ponto B, a uma distância $2d$ da fonte A. O vetor \vec{S} representado na figura refere-se à direção e sentido do vetor de Poynting, que dá a direção e sentido do fluxo de energia nos raios luminosos. Figura retirada da Ref. [20].	4
1.2	Metamaterial composto de fios retilíneos sobrepostos a quadrados condutores, onde pequenas porções destes foram retiradas. Essa configuração poderia levar o meio a ser descrito por uma permissividade elétrica e permeabilidade magnética efetivas que podem ser ambas negativas para uma dada faixa de frequências da onda eletromagnética que é inserida nesse meio. Essa onda precisa ter um comprimento de onda muito superior a um lado de uma célula, por exemplo, para que faça sentido falarmos de um meio efetivo homogêneo em termos eletromagnéticos. Figura retirada da Ref. [29].	6
1.3	Simulação de um raio luminoso sendo refratado por um prisma composto de um metamaterial. (a) seria a refração negativa, ocorrendo do mesmo lado da normal N ao prisma. (b) seria a refração usual com um outro meio no formato de prisma. Retirada da Ref. [23].	7
1.4	Metamaterial constituído por fios retilíneos sobrepostos a quadrados com pequenas aberturas. Essa configuração seria necessária para que pudéssemos ter em uma mesma faixa de frequências ambas permissividade elétrica e permeabilidade magnética negativas. Os fios retilíneos e os quadrados são constituídos de materiais distintos. Para maiores detalhes, ver Ref. [27], referência retirada a figura em discussão.	8

2.1 (cores e números) Modelo numérico desenvolvido para o caso que o termo em colchetes da Eq. (2.133) é negativo, a Eq. (2.134) é válida e o vetor de onda é limitado ao plano xz . A velocidade ordinária está representada em azul (1), enquanto que as soluções extraordinárias são exibidas em rosa (2). As linhas em verde (3) delimitam a região que exhibe o efeito da Trirrefringência. A linha em laranja (4) representa uma direção e sentido que exhibe esse efeito. As retas em verde (3) e roxo (7) delimitam regiões que exibem Birrefringência. A linha em cinza (5) representa uma direção e sentido que apresenta esse efeito óptico. Ângulos entre as retas em roxo (7) definem a região que exhibe Unirrefringência. A linha em amarelo (6) representa uma direção e sentido onde esse efeito ocorre. Como mostraremos no próximo Capítulo, escolhida uma direção e sentido qualquer nesse plano para a propagação de uma onda, essa não é da direção e sentido de propagação de uma das soluções físicas extraordinárias (propagação dos raios extraordinários), de forma geral. Isso é um fato para soluções extraordinárias. A propagação física estará na mesma direção e sentido do vetor de onda apenas para o caso ordinário. A figura acima exhibe o perfil dos possíveis índices de refração para cada direção e sentido em relação a um dado ponto P no meio material (origem do sistema de coordenadas), associados com as velocidades de fase [4]. Nessa figura, temos que todas as possíveis intersecções de uma reta em uma direção e sentido representam as velocidades de fase distintas naquela direção e sentido. Os valores numéricos utilizados para esse caso foram $C^1_1 = -3$, $C^3_3 = 2$, $\mu(E) = 2$ e $\mu' EB = 12$ 47

2.2 (cores e números) Modelo numérico desenvolvido para o caso onde o termo em colchetes da Eq. (2.133) é negativo, a Eq. (2.134) não é válida e o vetor de onda é limitado ao plano xz . A velocidade ordinária está representada em azul (1), enquanto que as soluções extraordinárias são exibidas em rosa (2). Ângulos no interior da região delimitada pelas retas em verde (3) apresentam o efeito da Trirrefringência. A linha em laranja (4) representa uma direção e sentido que exhibe esse efeito. As linhas em verde (3) e roxo (5) delimitam regiões que apresentam apenas Birrefringência. A região delimitada pelas retas em roxo (5) apresentam apenas Unirrefringência. Os valores numéricos utilizados nesse modelo foram $C^1_1 = -3$, $C^3_3 = 2$, $\mu(E) = 2$ e $\mu' EB = 99/10$ 48

2.3 (cores e números) Modelo numérico desenvolvido para o caso que o termo em colchetes da Eq. (2.133) está entre zero e um e o vetor de onda é limitado ao plano xz . Pode ser mostrado analiticamente que é impossível nesse caso termos a igualdade entre as velocidades de fase ordinária e extraordinárias apenas na direção do eixo óptico. A velocidade ordinária está representada em azul (1), enquanto que as soluções extraordinárias estão exibidas em vermelho (2). As linhas em verde (3) representam os ângulos limites entre os quais as soluções extraordinárias são imaginárias. Portanto, essa região apresenta apenas Unirrefringência. A linha em roxo (4) representa uma dada direção e sentido em que há três velocidades de fase distintas, caracterizando o efeito da Trirrefringência. Esse efeito estará presente em qualquer ângulo delimitado pelas retas em verde (3) e rosa (5). Ângulos delimitados pelas retas em rosa (5) e amarelo (6) apenas exibem o efeito da Birrefringência. As retas em amarelo (6) define outra região que novamente exhibe o efeito óptico da Unirrefringência. Os valores numéricos escolhidos para esse modelo foram $C^1_1 = -3$, $C^3_3 = 2$, $\mu(E) = 2$ e $\mu' EB = \sqrt{80}$ 50

2.4 (cores e números) Modelo numérico desenvolvido para o caso que não há solução ordinária presente e o vetor de onda é limitado ao plano xz . As soluções extraordinárias são exibidas em vermelho (1). As linhas em verde (2) e em rosa (5) delimitam regiões que apenas apresentam Unirrefringência. A reta em amarelo (6) exemplifica tal efeito em uma dada direção e sentido. Qualquer ângulo entre as retas em azul (4) e rosa (5) exibirão apenas o efeito da Birrefringência. A linha em roxo (3) define uma direção e sentido que exhibe tal efeito, com uma solução extraordinária próxima do valor nulo. Logo, para as regiões opostas a essas, delimitadas pelas retas em verde (2) e em cinza (7), não há propagação de ondas eletromagnéticas, o que caracteriza o efeito da Propagação em apenas um sentido nessas direções. No modelo de interesse, há regiões intrinsecamente opacas à propagação de ondas eletromagnéticas. Essas regiões estão delimitadas entre as linhas em verde (2) e azul (4). Os valores numéricos escolhidos para esse modelo foram $C^1_1 = 3$, $C^3_3 = -2$, $\mu(E) = 2$ e $\mu' EB = 8$ 53

2.5 (cores e números) Modelo numérico desenvolvido para o caso onde a permissividade elétrica é um tensor isotrópico negativo e a permeabilidade magnética é um tensor isotrópico positivo, para qualquer valor do módulo do campo elétrico externo; o vetor de onda é limitado ao plano xz e a Eq. (2.154) não é válida. As soluções extraordinárias são exibidas em vermelho (1). As linhas em verde (2) delimitam a região onde se tem o efeito da Birrefringência. Essas linhas definem direções e sentidos que exibem Unirrefringência. A linha em roxo (3) define uma direção e sentido que apresenta Birrefringência. Para esse caso, há apenas uma região onde há apenas Birrefringência. A região restante do plano é opaca para a luz. A assimetria é evidente em direções e sentidos opostos para esse caso. Os valores escolhidos para o modelo foram $C = -3$, $\mu' E B = 12$ e $\mu(E) = 2$ 56

Capítulo 1

Introdução

O efeito da Birrefringência, isto é, aquele em que **em uma mesma direção e sentido** duas ondas com distintas polarizações propagam-se com distintas velocidades de fase é conhecido aproximadamente desde 1672 [1], com os trabalhos de Christian Huygens sobre a calcita, um cristal bastante conhecido [2]. A predição de tal efeito pode ser obtida com a teoria Maxwelliana do Eletromagnetismo [3]. Estudos do fenômeno da birrefringência em meios lineares, isto é, aqueles que exibem os parâmetros eletromagnéticos macroscópicos (os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética) independentes de campos, podem ser encontrados nas Refs. [3, 4].

A permissividade elétrica e a permeabilidade magnética são quantidades fundamentais para a descrição da propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais lineares. Isso ocorre porque essas são quantidades que aparecem na equação de dispersão, obtida à partir das Equações de Maxwell.¹ Tal equação nos fornece o relacionamento entre a frequência angular de uma onda ω (que assumiremos ser uma constante) com o seu vetor de onda \vec{k} . Essa relação nos permite encontrar a velocidade de grupo de ondas eletromagnéticas constituindo um pacote bem comportado através da expressão $\vec{u} = \partial\omega/\partial\vec{k}$ [4]. Outra forma para expressar a velocidade de grupo seria $\vec{u} = \nabla_{\vec{k}}\omega$, onde definimos $\nabla_{\vec{k}}$ como o gradiente com relação às componentes do vetor de onda, analogamente ao operador ∇ para as coordenadas de posição. Dessa relação segue imediatamente que $d\omega = \vec{u} \cdot d\vec{k}$.

Para meios isotrópicos lineares quase transparentes (aqueles meios onde os termos imaginários dos tensores dielétricos são negligenciáveis) com permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ constantes, é conhecido que $n^2 = \varepsilon\mu$, com $n^2 \doteq 1/v_\phi^2$. Definimos n o

¹Ainda, a relação de dispersão nos afirma que há pelo menos uma solução onde a propagação sempre depende também da direção e sentido do vetor de onda para meios anisotrópicos usuais. Para meios isotrópicos lineares, apenas a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética configuram para a propagação de perturbações. Para meios materiais não-lineares, os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética, as derivadas dessas quantidades e campos externos serão importantes para a propagação de ondas eletromagnéticas.

índice de refração do meio e \vec{v}_ϕ o vetor velocidade de fase das ondas eletromagnéticas que se propagam em tal meio, com $\vec{v}_\phi \doteq \hat{k}\omega/|\vec{k}|$, $\hat{k} \doteq \vec{k}/|\vec{k}|$ [3, 4]. Estamos considerando um sistema de unidades em que a velocidade da luz no vácuo (ausência de meio material) e numa região de ausência de fontes é a unidade, $c = 1$.

Estudos do fenômeno da Birrefringência em meios materiais não-lineares, isto é, aqueles onde a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética são dependentes dos campos elétrico e magnéticos, podem ser encontrados nas Refs. [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12], etc. A ocorrência de tal efeito é natural para cristais anisotrópicos com parâmetros constantes² (componentes dos tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética) ou artificial para meios não-lineares isotrópicos nos tensores dielétricos, por meio de campos externos. Havendo campos presentes, o efeito da Birrefringência foi observado experimentalmente recentemente [13, 14]. Em relação a meios isotrópicos nos tensores dielétricos, um estudo bastante detalhado sobre efeitos eletro e magnético-ópticos pode ser encontrado na Ref. [15]. Birrefringência também ocorre na Eletrodinâmica Quântica, por meio de Lagrangeanas não-lineares do Eletromagnetismo (ver Ref. [16] e referências contidas nesse trabalho).

No entanto, o efeito da Trirrefringência aparentemente não é muito comentado na literatura. Por tal termo, queremos dizer a presença de três índices de refração em uma dada direção e sentido. Provavelmente, o primeiro trabalho **analisando** tal assunto foi desenvolvido por V.E. Wood e R. E. Mills em 1969 [17]. Esses autores demonstraram que, no contexto da óptica linear, para a propagação de ondas monocromáticas planas, o fenômeno da Trirrefringência não pode ocorrer. Tal fato é uma consequência de que a equação de dispersão pode ser reduzida para uma equação quadrática no índice de refração, para uma dada direção e sentido, onde pode-se concluir que apenas o efeito da Birrefringência ocorrerá, não importando quão anisotrópico seja o meio. Tal resultado apenas é válido para meios lineares.

Em 2001, M.C. Netti *et al.* [1] afirmaram ter demonstrado que cristais fotônicos [18] podem exibir o fenômeno da Trirrefringência. No entanto, não está claro se o termo “trirrefringência” utilizado por tais autores é equivalente àquele dado acima. Os autores mencionam a presença de três índices de refração em um dado meio, associados com três energias distintas encontradas em diferentes ângulos, com uma técnica experimental denominada “elipsometria” [19]. Tal técnica se vale da análise das polarizações da onda eletromagnética antes e depois de ser refletida por um meio, semelhante ao que ocorre no efeito Bragg. Não está novamente claro se esse processo é aquele que deveríamos utilizar para se medir o efeito da Trirrefringência.

No entanto, a mensagem clara da Ref. [1] é que materiais artificiais (tais como cristais fotônicos) poderiam exibir características totalmente distintas daquelas encontradas em meios

²Pode ser mostrado que tal efeito pode ser artificialmente amplificado ou suprimido para cristais não-lineares [7].

naturais, levando a efeitos não medidos nesses últimos, como a Trirrefringência. Uma classe importante de materiais artificiais sob o ponto de vista óptico remonta fundamentalmente do trabalho de Veselago em 1967 [20].

Veselago estudou as propriedades que meios isotrópicos hipotéticos quase transparentes onde ambas a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética são negativas (para uma dada faixa de frequências) e constantes. Isso porque uma mudança conjunta dos sinais das quantidades mencionadas acima não modifica n^2 , que ainda continua real. Nesse estudo, três casos poderiam ocorrer. Primeiro, a mudança não alteraria os efeitos usuais onde a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética são positivas. Segundo, essa hipótese poderia ser contraditória com algumas leis físicas. Terceiro, ε e μ negativos poderiam ocorrer e levar a efeitos totalmente distintos daqueles conhecidos.

Até 1967, segundo Veselago, não havia nenhum meio onde se tivesse observado ε e $\mu < 0$. Aparentemente, não chegou ao conhecimento de Veselago estudos em ferritas feitos por Thompson em 1955 que demonstravam a existência de uma permeabilidade magnética negativa [21, 22]. As Equações de Maxwell, complementadas pelas relações constitutivas, escritas nesse capítulo como $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ e $\vec{B} = \mu \vec{H}$, sendo ε e μ negativos, admitem a propagação de uma onda monocromática plana, contanto que $\vec{k} \times \vec{E} = -\vec{H}$ (para meios usuais, teríamos $\vec{k} \times \vec{E} = \vec{H}$). Essa é a primeira característica que tais meios deveriam apresentar. Ainda, Veselago mostrou que tais meios necessariamente têm que ser dispersivos; caso contrário, contradições apareceriam.

Estará implícito de agora em diante nesse trabalho que os coeficientes dielétricos negativos são dependentes da frequência da onda propagante e ocorrem para uma faixa de frequências convenientes. Assumiremos também que os meios que exibem tais coeficientes são quase transparentes. O vetor fluxo de energia de uma onda em um meio material é dado pelo seu vetor de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Este sempre forma uma trinca ordenada (dada pela regra da mão direita) com os vetores \vec{E} e \vec{H} . Para meios lineares usuais (onde as componentes dos tensores dielétricos são sempre positivas) isotrópicos e homogêneos, o vetor de Poynting é sempre paralelo ao vetor de onda, que é paralelo à velocidade de grupo. Dos comentários do parágrafo acima, para meios onde ε e μ são negativos, a direção e sentido do fluxo de energia tem que ser oposta a \vec{k} . É por essa razão que Veselago chamou tais meios de “substâncias com velocidade de grupo negativas”. Uma consequência imediata dessa mudança da velocidade de grupo é a reversão do efeito Doppler usual; um observador se movendo em uma direção e sentido oposta àquela de propagação da energia (vetor de Poynting) de uma onda em um meio com parâmetros dielétricos negativos medirá uma frequência **menor** para a associada onda. Outra consequência dessa mudança entre o vetor de Poynting e o vetor de onda é que uma onda monocromática que se propaga em um meio onde ε e μ são negativos exerce uma tensão, ao invés de pressão, sobre um meio usual quando por este é refletida.

Veselago também estudou a refração da luz de um meio convencional para um meio onde ε e μ são negativas. Foi mostrado que a lei de Snell é válida, contanto que para o meio com quantidades dielétricas negativas seja associado um índice de refração negativo. Isso está relacionado com as condições de fronteira que os campos devem satisfazer devido às Equações de Maxwell. Conforme nos ensina Pendry [23], outra forma de visualizar esse fato é porque $\varepsilon = |\varepsilon| \exp i\pi$ e $\mu = |\mu| \exp i\pi$, logo, $n = -\sqrt{|\varepsilon||\mu|}$.

Segundo Veselago, o uso de “substâncias dadas pela regra da mão esquerda” (outro nome dado para materiais onde $n < 0$) pode levar ao desenvolvimento de sistemas refratores altamente não-usuais. Um exemplo dado por Veselago seria a refração da luz emitida a partir do vácuo por uma fonte puntiforme em A a uma distância l de um meio com $n = -1$ de comprimento d , $l < d$ (sendo suas extremidades compostas pelo que chamaríamos de lentes planas), e depois novamente para o vácuo. Da lei de Snell, seguiria que a luz reconvergiria para um outro ponto B depois da segunda refração pela segunda extremidade do meio com $n = -1$. Todas essas informações estão encapsuladas na Fig. (1.1). Para a obtenção dessa reconvergência, $n = -1$ e o vácuo são importantes porque é apenas nesse caso que o ângulo de incidência é o negativo do ângulo de refração. Outras configurações mais exóticas poderiam ser pensadas; todas elas são advindas da “lei de Snell da forma não-usual”. De forma geral, para lentes formadas por materiais tais que ε e μ negativos, temos que lentes convexas divergem os raios luminosos, enquanto lentes côncavas convergem os raios. Isso é o contrário do que as lentes usuais fazem.

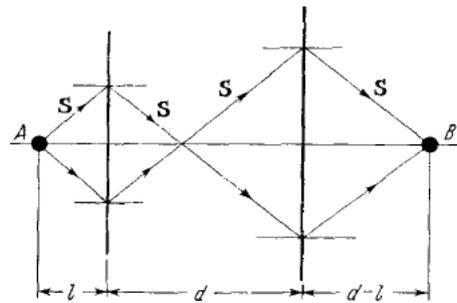


Figura 1.1: Fonte de radiação A emitindo raios luminosos que inicialmente se propagam pelo vácuo, atingindo a primeira superfície do meio material com $n = -1$ (lente plana), que se encontra a uma distância l da fonte. Os raios se refratam de acordo com a lei de Snell e percorrem o meio material, até chegarem à segunda superfície do meio material (segunda lente plana), a uma distância $l + d$ da fonte, onde se refratam e convergem para o ponto B , a uma distância $2d$ da fonte A . O vetor \vec{S} representado na figura refere-se à direção e sentido do vetor de Poynting, que dá a direção e sentido do fluxo de energia nos raios luminosos. Figura retirada da Ref. [20].

Veselago afirma que um exemplo de substâncias onde poderíamos ter uma permissividade elétrica negativa seria para os plasmas de elétrons, onde abaixo da frequência de plasma isso

ocorreria. Semelhante efeito ocorreria para a permeabilidade magnética, se pudéssemos ter um plasma de “monopolos magnéticos”, segundo Veselago. Hoje sabemos que um meio que “reproduz analogamente” a permissividade elétrica de um plasma de elétrons seria obtido com um conjunto periódico de fios condutores, e a permeabilidade magnética de um plasma de monopolos magnéticos poderia ser obtida por meio da circulação de correntes em pequenos laços condutores construídos de forma conveniente [23]. Tais meios (artificiais), construídos a partir de “configurações exóticas” de fios retilíneos, laços condutores e possivelmente outros artefatos, são denominados “metamateriais”.

Não é simples definir de forma precisa o que seria um metamaterial [22]. Para uma discussão sobre essa questão, ver Ref. [24]. Uma definição ingênua seria “aquele material artificial com propriedades eletromagnéticas não-usuais”. No entanto, o termo não-usual é uma definição vaga. Nesse trabalho, tal como na Ref. [22], assumiremos que um metamaterial é um material não encontrado na natureza na sua forma final (construído artificialmente) e tal que sua permissividade elétrica e permeabilidade magnética podem ser **controladas**. Por controle, queremos dizer que **seria** possível obter ambas permissividade elétrica e permeabilidade magnética negativas para alguma faixa de frequências conveniente. Essa condição nos permitiria testar o trabalho de Veselago.

Como dissemos, esses materiais são usualmente construídos a partir de uma combinação conveniente de anéis ou quadrados (ou de forma geral, laços) com uma pequena porção eliminada, dispostos concêntricamente e sobrepostos de fios retilíneos, onde ambos são condutores [22, 23, 25, 26, 27, 28]. A representação pictórica das linhas descritas acima está compactada na Fig. (1.2). A idéia principal desses dispositivos artificiais é poder gerar uma permissividade elétrica e uma permeabilidade magnética (num caso em que o meio artificial é isotrópico) efetivas para o meio [22, 23], que imitam aquelas obtidas por um plasma de elétrons e monopolos magnéticos. Para tal, as células desses dispositivos têm que ser construídos de maneira que o seu tamanho final seja muito inferior ao comprimento de onda da onda eletromagnética que se propaga no meio. É apenas para essa configuração que o meio pode ser “visualizado” como um meio homogêneo pela onda eletromagnética. Comprimentos de onda inferiores aos tamanhos característicos (células) desses materiais artificiais seriam capazes de “perceber” sua estrutura. Como essas estruturas “imitam” plasmas, sempre haverá uma frequência (que pode ser controlada [22]), onde cada quantidade (permissividade elétrica ou permeabilidade magnética) poderia ser negativa. Ainda seria possível que para uma dada faixa de frequências, **ambas** sejam negativas.

O fato de estruturas poderem apresentar permissividade elétrica negativa pode ser entendido quando substituímos os átomos e moléculas de um material real por um conjunto de osciladores harmônicos confinados, tendo como massa a do elétron, ressonantes para alguma frequência

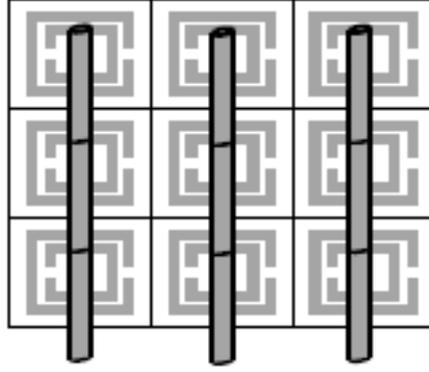


Figura 1.2: Metamaterial composto de fios retilíneos sobrepostos a quadrados condutores, onde pequenas porções destes foram retiradas. Essa configuração poderia levar o meio a ser descrito por uma permissividade elétrica e permeabilidade magnética efetivas que podem ser ambas negativas para uma dada faixa de frequências da onda eletromagnética que é inserida nesse meio. Essa onda precisa ter um comprimento de onda muito superior a um lado de uma célula, por exemplo, para que faça sentido falarmos de um meio efetivo homogêneo em termos eletromagnéticos. Figura retirada da Ref. [29].

ω_0 (modelo de Drude–Lorentz [23, 30]). O campo elétrico da onda eletromagnética é visto como uma fonte externa oscilante apenas temporalmente, pois o comprimento de onda da onda eletromagnética é naturalmente muito maior que as distâncias características de oscilação dos átomos. Nessa aproximação, a influência do campo magnético é desprezado. No entanto, associa-se um termo de amortecimento, devido à perdas de energia, por emissão de radiação, por exemplo. Para certas classes de metamateriais isotrópicos, mostra-se que a permissividade elétrica é da forma [23]

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma}, \quad (1.1)$$

onde ω_p é a frequência de plasma, ω_0 é a frequência de ressonância e Γ é uma constante que quantifica perdas. Se as perdas são pequenas, vemos da Eq. (1.1) que o material exibe permissividade elétrica negativa para $\omega_0 < \omega < \omega_p$. Nessa região, o sistema estaria “fora de fase” com o campo externo. Fora dela, ele estaria em fase. Com metamateriais específicos, uma expressão semelhante para a permeabilidade magnética também pode ser obtida.

Tipicamente, ressonâncias para materiais elétricos ocorrem para altas frequências, enquanto que no caso de materiais magnéticos, as ressonâncias ocorreriam para frequências bem menores [23]. O fato de tipicamente (naturalmente) as ressonâncias para os casos elétrico e magnético ocorrerem em regiões distintas do espectro nos colocaria uma dificuldade sob o ponto de vista experimental de obtermos um meio onde ambas as quantidades acima mencionadas negativas, para uma mesma faixa de frequências, embora não haja em princípio nenhuma restrição física para que isso não ocorra.

Apesar das predições radicais feitas por Veselago, essas apenas foram observadas em labo-

ratório pela primeira vez em 2000, com o trabalho de Smith *et al.* [25]. O grande feito desse trabalho foi ter conseguido projetar um meio artificial onde em uma mesma faixa de frequências seria possível obter ambas a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética negativas (um meio aproximadamente isotrópico e quase transparente), resolvendo (ou apontando caminhos) para o problema acima comentado. Foi mostrado experimentalmente nesse trabalho que não há propagação de ondas eletromagnéticas quando ou a permeabilidade magnética de um meio ou a sua permissividade elétrica são negativas, mas que essa é recuperada quando **ambas** são negativas.

Esse seria um passo para a verificação da hipótese de Veselago. Para sua confirmação, seria necessário medir o índice de refração (negativo) na região em que ambas a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética são negativas. Isso foi feito aproximadamente um ano após o trabalho de Smith *et al.* [25]. Tal trabalho é devido à Shelby *et al.* [27]. Eles enviaram uma onda eletromagnética com frequência característica em um meio artificial em forma de prisma, composto por fios retilíneos sobrepostos de quadrados concêntricos com pequenas aberturas, ambos condutores, e verificaram que a refração ocorria na direção e sentido não-usuais, sendo que os ângulos obedeciam a lei de Snell, considerando-se que o índice de refração de tal meio fosse negativo. Uma simulação do resultado experimental feita pelos autores acima comentados pode ser encontrada na Fig. (1.3). O prisma composto de um metamaterial utilizado no experimento de Shelby *et al.* está representado na Fig. (1.4).

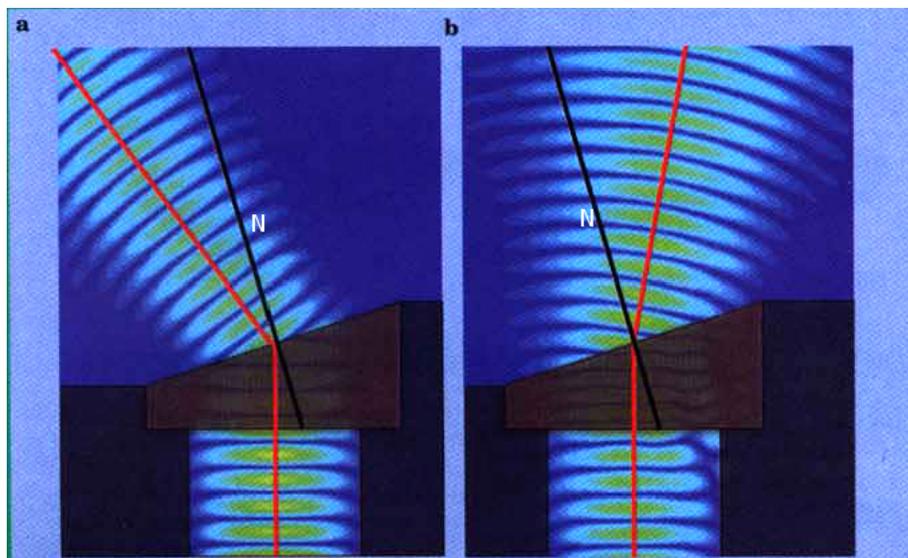


Figura 1.3: Simulação de um raio luminoso sendo refratado por um prisma composto de um metamaterial. (a) seria a refração negativa, ocorrendo do mesmo lado da normal N ao prisma. (b) seria a refração usual com um outro meio no formato de prisma. Retirada da Ref. [23].

Esses trabalhos demonstrariam que as hipóteses de Veselago eram realmente aplicáveis; devido aos efeitos não-usuais, aplicações práticas seriam de grande interesse. Nesse sentido, Pen-

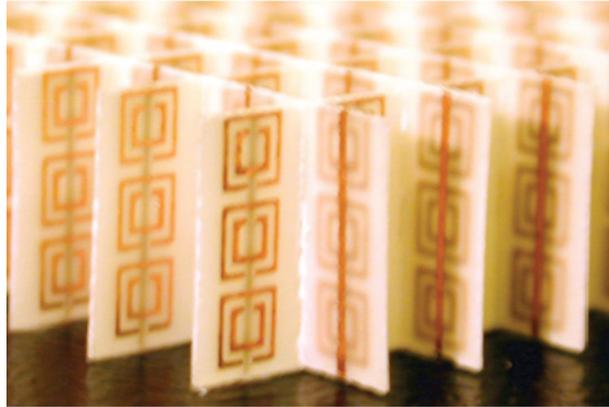


Figura 1.4: Metamaterial constituído por fios retilíneos sobrepostos a quadrados com pequenas aberturas. Essa configuração seria necessária para que pudéssemos ter em uma mesma faixa de frequências ambas permissividade elétrica e permeabilidade magnética negativas. Os fios retilíneos e os quadrados são constituídos de materiais distintos. Para maiores detalhes, ver Ref. [27], referência retirada a figura em discussão.

dry [26] propôs o que ele descreveu de “uma lente perfeita”, que seria construída exclusivamente com um metamaterial onde ambas a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética fossem negativas e iguais a unidade. Em palavras simples, índices de refração negativos seriam capazes de amplificar ondas evanescentes provenientes do processo de se aumentar a resolução (diminuir o comprimento de onda, aumentando-se a norma do vetor de onda) [23, 26], fato impossível para lentes usuais. No entanto, a solução da amplificação causa o problema relacionado com as perdas, uma vez que metamateriais que exibem índice de refração negativos também apresentam dissipação e essa seria amplificada. É necessário que se tente minimizar ao máximo as perdas nesses metamateriais para que faça sentido a propagação de ondas nesses meios [23].

Algumas palavras sobre lentes compostas por metamateriais. Para estudarmos a interação da luz (onda eletromagnética) com meios materiais sob o ponto de vista de raios, estamos assumindo implicitamente que o comprimento de onda dessa onda seja pequeno [3, 4, 31]. No entanto, para que um metamaterial (ou um meio em geral) possa ser visto como **homogêneo** sob o ponto de vista da onda eletromagnética, é necessário que as distâncias características entre seus elementos constituintes sejam muito menores que o comprimento de onda da onda eletromagnética e esse meio tenha dimensões maiores que o comprimento de onda da onda em discussão [22, 25]. Aparentemente, essas exigências são conflituosas. No contexto eletromagnético, está implícito na permissividade elétrica e permeabilidade magnética de um meio, que essas só são definidas quando as distâncias microscópicas entre os elementos que compõem o meio são muito menores que qualquer comprimento de onda presente na onda eletromagnética que se propaga nesse mesmo meio. De fato, se as distâncias entre os elementos que constituem

um material são comparáveis com o comprimento de onda, o fenômeno de difração ocorrerá [3, 4], por exemplo. Esse fenômeno não está no escopo da Óptica Geométrica, porque este é devido apenas a natureza ondulatória da luz.

Assim, para que tenha sentido a propagação de raios em meios materiais, temos que impor que os comprimentos de onda da onda eletromagnética são menores que as dimensões típicas do **problema** [4] e ao mesmo tempo muito maiores que as distâncias características nesses meios [22]. Por exemplo, para um problema envolvendo uma abertura em uma tela, a dimensão física seria o tamanho dessa abertura. O conceito de raios apenas pode ser definido em pequenas regiões do espaço-tempo no entorno de qualquer ponto de uma hipersuperfície³ [31]. Em pequenas regiões dessa hipersuperfície de interesse físico, a maioria das ondas pode ser aproximada por uma onda plana. Logo, a Óptica Geométrica descreve o comportamento de uma onda eletromagnética no limite em que ela pode ser considerada uma onda monocromática plana [3]. Nesse sentido, a teoria adquirirá uma maior simplicidade. Mas, para que faça sentido uma onda em uma pequena região do espaço-tempo, o seu comprimento de onda precisa ser pequeno ou comparável com o comprimento da região que define o raio de luz. Finalmente, para que a luz interaja com o meio (propagando-se por ele), esse tem que ter uma dimensão muito maior que o seu comprimento de onda.

Depois dos trabalhos [25, 26, 27], comentados em linhas gerais acima, um grande número de pesquisadores se interessaram por essa área [22, 23] e continuam se interessando [28]; muitos livros já estão disponíveis sobre o assunto.⁴ Essa área de estudos é hoje denominada metamateriais e muitos avanços estão sendo feitos. Exemplos das mais variadas formas poderiam ser dados. Citamos, por exemplo, os trabalhos para o desenvolvimento de “metamateriais invisíveis” e aprisionamento da luz em metamateriais [32]. Esse último efeito foi observado alguns anos após sua proposta por I.I. Smolyaninov *et al.* [33]; os autores acima apontam algumas aplicações para esse efeito. O desenvolvimento de metamateriais quirais com assimetria de propagação de ondas eletromagnéticas em direções e sentidos opostos também seria outro exemplo (ver Ref. [34] e referências contidas). Propriedades de metamateriais que apresentem uma permissividade elétrica e permeabilidade magnética próximos de zero com a presença de defeitos também já foram estudados [35].

Não apenas metamateriais isotrópicos são de interesse. Em 2002, D.R. Smith e D. Schurig [29] estudaram teoricamente a propagação de ondas eletromagnéticas em metamateriais anisotrópicos indefinidos. Por tal termo queremos dizer aqueles metamateriais onde pelo menos uma das componentes dos tensores dielétricos (um/ambos tensores) têm um sinal negativo

³Para meios isotrópicos homogêneos, essa hipersuperfície coincide com a eikonal constante. No caso de meios anisotrópicos e meios não-lineares, para a solução não-isotrópica da equação de Fresnel, a hipersuperfície que define a direção e sentido dos raios não é mais a eikonal constante [4].

⁴Basta entrar em www.amazon.com e escrever no link de busca “metamaterials”.

para uma faixa de frequências conveniente.⁵ Nesse trabalho, foi mostrado a existência de muitos efeitos já presentes em metamateriais isotrópicos e suas possíveis melhorias de problemas presentes nesses últimos. I.I. Smolyaninov *et al.*, [36] em 2009, mostraram como metamateriais anisotrópicos indefinidos especiais podem ser construídos. Neste trabalho tais metamateriais indefinidos foram aplicados para se demonstrar a possibilidade de melhoria dos “metamateriais invisíveis” (ver Ref. [37] para referências e para uma versão tridimensional desse efeito). Metamateriais isotrópicos e anisotrópicos indefinidos podem também ser utilizados para investigar muitos aspectos da Relatividade Geral, reproduzindo virtualmente qualquer métrica em tal teoria [28].

Limitamos a apenas esses exemplos, tendo a convicção de que muitos outros importantes não foram mencionados, devido à extensão da presente área de pesquisa.

No Capítulo 2, discutiremos com bastante detalhes os efeitos ópticos que nos serão de interesse: Trirrefringência e Propagação em apenas um sentido. Este último efeito será definido, tal como afirma seu nome, como um efeito tal que se ele ocorre em uma dada direção, ondas podem somente ser propagar um dos seus dois sentidos.

No Capítulo 3 desse trabalho, analisaremos rapidamente as diferenças entre velocidade de fase e de grupo (quando também transformações de coordenadas são empregadas) e a questão da superluminosidade associada à velocidade de grupo em metamateriais e materiais não-lineares.

No Apêndice A, discutiremos brevemente uma forma aparentemente geral de se obter as métricas ópticas. Tal expressão está relacionada em princípio com coeficientes (os quais comentaremos) que configuram na equação de dispersão do meio de interesse, quando essa é posta de uma forma conveniente.

Trabalharemos com um espaço-tempo cuja métrica de fundo é Minkowskiana e em coordenadas cartesianas. Discutiremos esse assunto. Unidades serão tais que a velocidade da luz no vácuo é a unidade. Uma análise tensorial será utilizada para a descrição das equações de Maxwell, bem como para o estabelecimento das técnicas empregadas.

⁵A definição do termo “indefinido” dado nesse trabalho é ligeiramente diferente daquela dada por Smith e Schurig Ref. [29]; no entanto, nossa definição tem como caso particular os casos analisados pelos autores acima citados. Ela ainda tem a qualidade de diferenciar meios onde todas suas quantidades dielétricas têm um sinal positivo, daqueles meios onde algumas e eventualmente todas as quantidades dielétricas têm sinais negativos.

Capítulo 2

Propriedades Ópticas de Metamateriais Não-Lineares

2.1 Introdução

Nesse capítulo, desenvolveremos o formalismo para se computar as possíveis velocidades de fase que uma onda eletromagnética pode ter em um dado meio material. Por tal onda eletromagnética, nós significaremos aquela monocromática e de comprimento de onda muito menor que as dimensões do meio. O meio material será caracterizado pelos tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética. Tais quantidades descrevem as características macroscópicas do meio em interesse em termos eletromagnéticos.¹ Por exemplo, a velocidade de fase de uma onda eletromagnética em um meio linear isotrópico é descrita apenas em termos dessas quantidades. Outro exemplo: quando um campo externo é aplicado sobre um dado meio, este campo o polariza, alinhando ou induzindo pequenos dipolos, que afetarão o campo original no meio. A medida macroscópica desse alinhamento (polarização [4]) também está relacionada com os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética.

A presença de campos externos pode ter uma interferência trivial, como no caso de meios lineares, [3, 4, 30, 38], até mesmo bastante complexa, quando o meio é não-linear [7, 8, 9, 39], levando ao aparecimento de efeitos não-triviais (Birrefringência em meios homogêneos e isotrópicos em termos das quantidades dielétricas mesmo após a aplicação de campos seria um exemplo). No que veremos adiante, a presença de campos externos intensos (em relação aos

¹Observe que para meios lineares anisotrópicos, a direção e sentido de propagação da onda eletromagnética interfere na sua velocidade. No entanto, essa não é uma quantidade fundamental, porque dados os tensores dielétricos, poderíamos encontrar a velocidade de propagação para qualquer direção e sentido arbitrariamente escolhidos em relação a algum ponto. O mesmo argumento segue para meios não-lineares em relação a campos externos.

campos da onda propagante) serão fundamentais para os fenômenos que estudaremos.

Trabalharemos no limite da Óptica Geométrica analisando a propagação de ondas eletromagnéticas que se propagam em meios não-lineares indefinidos quase transparentes [4] (apenas para a os seus respectivos tensores permissividade elétrica) apresentando ambos tensores dielétricos diagonais. Mostraremos que o efeito da Trirrefringência e a Propagação em apenas um sentido podem ocorrer para certos meios uniaxiais [4] em termos dos seus tensores permissividade elétrica. Assumiremos que os tensores permeabilidade magnética desses meios são sempre positivos. Mostraremos também que nesses meios a solução isotrópica da equação generalizada de Fresnel pode sempre ser eliminada. Isso não é possível em meios uniaxiais usuais. Por tal equação, queremos dizer aquela que nos fornece as relações de dispersão do meio de interesse, obtida das Equações de Maxwell. Apenas no contexto da inexistência da solução isotrópica aparecerá o efeito da Propagação em apenas um sentido. Representações pictóricas serão empregadas, elucidando os cálculos analíticos.

O efeito da Trirrefringência depende da existência da solução isotrópica. Assim, é impossível obter os efeitos mencionados acima ao mesmo tempo. Veremos que para os meios que nos interessarão que é impossível termos apenas um dado efeito. Logo, acompanhada da Trirrefringência, sempre teremos Birrefringência e Unirrefringência (os prefixos indicam o número de índices de refração distintos em uma dada direção e sentido). Sem a solução isotrópica, sempre teremos regiões opacas para a propagação de ondas eletromagnéticas. Várias outras configurações serão analisadas no contexto dos metamateriais não-lineares de interesse. Como exemplo, citamos o que chamamos de um metamaterial não-linear indefinido isotrópico. Mostraremos que seria possível, com certas imposições, termos propagação de ondas eletromagnéticas nesse metamaterial. Isso contrasta com a impossibilidade de propagação nos metamateriais indefinidos estudados por Veselago. Obviamente, é a não-linearidade que justifica tal fato.

O Método de Hadamard–Papapetrou para a propagação de descontinuidades será utilizado para a descrição de ondas eletromagnéticas no meio que nos interessará. Discutiremos porque esse método pode ser utilizado nesse limite. Tal método será deduzido com detalhes. Uma análise alternativa física também será discutida, explicitando as condições que permitem a aplicação do método comentado.

O limite da Óptica Geométrica será utilizado para também analisarmos a propagação de perturbações sob o ponto de vista de raios.

A métrica do espaço-tempo de fundo é Minkowskiana e em coordenadas cartesianas, igual a $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Unidades são escolhidas de forma que a velocidade da luz no vácuo é $c = 1$. Consideraremos unidades tais que a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética para o vácuo são adimensionais e iguais a unidade.

Nosso objetivo é a caracterização teórica de um cristal sob o ponto de vista de propagação

de perturbações eletromagnéticas. É recomendável que as Refs. [40, 41] sejam estudadas em paralelo com o presente trabalho, uma vez que este se vale de alguns de seus resultados e argumentações. Nestas referências, um suporte bastante didático é dado para os leitores não-familiarizados com a propagação de ondas eletromagnéticas no limite da óptica geométrica em meios lineares e não-lineares.

2.2 Equações de Maxwell

Como é bem conhecido [38], na ausência de um meio material (vácuo), o tensor campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ pode ser escrito na forma

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.1)$$

onde

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}). \quad (2.2)$$

O tensor campo eletromagnético é o objeto fundamental da teoria Maxwelliana, porque é com ele que poderemos escrever as Equações de Maxwell de forma covariante. Os campos elétrico e magnético podem ser obtidos das componentes de A^μ por meio de

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad (2.3)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (2.4)$$

O “tensor dual do tensor eletromagnético”, $*F^{\mu\nu}$, é definido por

$$*F^{\mu\nu} \doteq \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (2.5)$$

com $\eta^{\mu\nu\alpha\beta}$ o tensor de Levi-Civita (para maiores informações e propriedades, ver Ref. [31]). Substituindo a Eq. (2.1) na Eq. (2.5), chega-se a

$$*F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta. \quad (2.6)$$

A representação matricial das quantidades $F^{\mu\nu}$ e $*F^{\mu\nu}$, dadas pelas Eqs. (2.1) e (2.6) respectivamente, em um sistema de coordenadas cartesianas é

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [*F^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

onde estamos considerando que $\vec{E} = (E^1, E^2, E^3)$ e $\vec{B} = (B^1, B^2, B^3)$. Da Eq. (2.7), pode-se inferir facilmente a prescrição que deveria ser feita nos campos para obtermos um tensor a partir do outro.

Considere a definição do “quadrivetor corrente”

$$j^\mu \doteq (\rho, \vec{J}), \quad (2.8)$$

onde ρ é a densidade volumétrica de cargas e \vec{J} é a densidade volumétrica de corrente, ditos fontes das equações de Maxwell. As Equações de Maxwell no vácuo mas com a presença de fontes podem ser obtidas por meio de $F^{\mu\nu}$ e ${}^*F^{\mu\nu}$ através de

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{e} \quad \partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.9)$$

Existe outra forma de se escrever o tensor antissimétrico campo eletromagnético, bem como seu dual no vácuo na presença de fontes, além daquelas dadas pelas Eqs. (2.1) e (2.6). Tais expressões são dadas por

$$F^{\mu\nu} = E^\mu V^\nu - E^\nu V^\mu + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha B_\beta, \quad (2.10)$$

$${}^*F^{\mu\nu} = B^\mu V^\nu - B^\nu V^\mu - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha E_\beta; \quad (2.11)$$

esse é o caso porque estamos definindo V^μ a quadrivelocidade de um observador arbitrário (devidamente normalizada, isto é, $V^\mu V_\mu = 1$) em relação a um dado sistema de coordenadas e

$$E^\mu \doteq F^{\mu\nu} V_\nu, \quad B^\mu \doteq {}^*F^{\mu\nu} V_\nu. \quad (2.12)$$

Da Eq. (2.12) e do Teorema do Quociente [42], segue que as quantidades E^μ e B^μ são quadrivetores. Da definição dessas quantidades e da antissimetria de $F^{\mu\nu}$, segue que $E^\mu V_\mu = 0$ e $B^\mu V_\mu = 0$. Assim, ambos os quadrivetores em discussão são do tipo-espaço. Considere que escolhemos um observador comóvel \mathcal{S} com o laboratório que mede os campos. Nesse caso, das Eqs. (2.12) e (2.7), temos

$$E^\mu = (0, \vec{E}), \quad B^\mu = (0, \vec{B}) \quad \text{e} \quad V^\mu = \delta^\mu_0. \quad (2.13)$$

Do que supusemos anteriormente, a métrica Minkowskiana deve ser aplicada sobre quadrivetores contravariantes para obtermos sua versão covariante. Os quadrivetores E^μ e B^μ têm uma conexão física direta apenas no referencial \mathcal{S} . Em qualquer outro referencial inercial \mathcal{S}' , que se move relativamente a \mathcal{S} com uma velocidade constante, estes quadrivetores não estão diretamente conectados com os campos físicos.

Para o caso de meios materiais, as Equações de Maxwell podem ser escritas em termos de um tensor antissimétrico, análogo à Eq. (2.10), dado por

$$P^{\mu\nu} = D^\mu V^\nu - D^\nu V^\mu + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha H_\beta; \quad (2.14)$$

uma vez que V^μ novamente é definido como o quadrivetor de um observador arbitrário e os quadrivetores da equação acima são definidos, de forma totalmente similar à Eq. (2.12), como

$$D^\mu \doteq P^{\mu\nu} V_\nu, \quad H^\mu \doteq {}^*P^{\mu\nu} V_\nu. \quad (2.15)$$

Das definições dadas pela Eq. (2.15) para as quantidades D^μ e H^μ , segue que $D^\mu V_\mu = 0$ e $H^\mu V_\mu = 0$. Logo, ambas as quantidades definidas acima são quadrivetores do tipo-espaço. Em relação ao referencial \mathcal{S} , $V^\mu = \delta^\mu_0$, segue da Eq. (2.15) e de uma equação semelhante à Eq. (2.7) para os campos $P^{\mu\nu}$ e ${}^*P^{\mu\nu}$

$$D^\mu = (0, \vec{D}) \quad \text{e} \quad H^\mu = (0, \vec{H}). \quad (2.16)$$

Aos campos \vec{D} e \vec{H} , denominamos vetores de indução (excitação) elétrica e magnética, respectivamente. Para os campos \vec{E} e \vec{B} , os nomes respectivamente de vetores de intensidade elétrica e magnética são dados² [43].

As Equações de Maxwell para meios materiais são escritas de forma covariante como

$$\partial_\mu P^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{e} \quad \partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.17)$$

Em forma vetorial, as Equações de Maxwell para um meio material em repouso em relação a \mathcal{S} , com o auxílio das Eqs. (2.8), (2.14), (2.16) e (2.17), apresentam-se como

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (2.18)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.21)$$

Observe que para escrevermos as equações acima, precisamos nos valer da Eq. (2.9), válida de forma geral apenas quando o espaço-tempo é plano. Quando o espaço-tempo não é Minkowskiano, devemos trocar as derivadas parciais por derivadas covariantes. Apenas para pequenas regiões de um espaço-tempo arbitrário, a métrica é aproximadamente Minkowskiana. Em um meio material, o tensor momentum-energia da matéria não é em geral nulo. Se neste há ainda a presença de campos, esses também cooperam em um outro tensor momentum-energia. Logo, para que continuemos tendo uma métrica plana em primeira aproximação, deveríamos considerar que os tensores momenta-energia comentados anteriormente são “pequenos”, no sentido de que sua contribuição para a métrica do espaço-tempo nessa ordem de aproximação seja negligenciável.

²Há variações para essa denominação. Ver Ref. [30], por exemplo. Isso é uma mera questão de simbologia.

Para tornarmos as Eqs. (2.18)–(2.21) completas, precisamos informar o relacionamento entre o vetor indução elétrica com o de intensidade elétrica, bem como o vetor indução magnética com o de intensidade magnética. Supomos nesse capítulo o seguinte relacionamento

$$D^\alpha = \varepsilon^\alpha{}_\beta(\vec{E}, \vec{B}, \vec{r}, t; \omega) E^\beta, \quad (2.22)$$

$$H^\alpha = \mu^\alpha{}_\beta(\vec{E}, \vec{B}, \vec{r}, t; \omega) B^\beta, \quad (2.23)$$

onde estamos supondo que os campos \vec{E} e \vec{B} podem ser funções das coordenadas espaço-temporais e eventualmente de algum outro parâmetro constante. As quantidades $\varepsilon^\alpha{}_\beta$ e $\mu^\alpha{}_\beta$ são respectivamente conhecidas como tensor permissividade elétrica e tensor permeabilidade magnética³ do meio material. Assumiremos que tais tensores são apenas reais (perdas são supostas serem negligenciáveis). A quantidade ω é entendida nas Eqs. (2.22) e (2.23) como um parâmetro constante (independente dos campos \vec{E} , \vec{B} e das coordenadas espaço-temporais) e será identificada com a frequência angular constante de uma onda monocromática que se propaga no meio de interesse. A dependência das coordenadas espaço-temporais é entendida na seguinte forma. As componentes dos tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética dependeriam intrinsecamente dessas quantidades. Isso seria devido à suposição do meio ser heterogêneo.

No caso linear, a presença de um termo imaginário em tais tensores é uma forma de quantificar a perda de energia da onda eletromagnética por meio de sua interação com o meio. Um exemplo de tal perda seria pelas radiações de multipolos devido aos campos oscilantes da onda eletromagnética nos constituintes do meio. Assumiremos nesse trabalho que os meios que nos interessarão não apresentarão efetivamente perdas. Isso é uma aproximação para um caso em que as perdas são pequenas em relação à energia inicial da onda eletromagnética, comparada após a mesma ter percorrido uma distância conveniente.

As Eqs. (2.22) e (2.23) são ditas relações constitutivas para as componentes do vetor indução elétrica e magnética. Elas são uma extensão natural das relações para o caso linear.

As Equações de Maxwell para um meio material, com o auxílio das Eqs. (2.8), (2.11) e (2.14) podem ser apresentadas na forma

$$(\partial_\mu D^\mu) V^\nu - (\partial_\mu D^\nu) V^\mu + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha (\partial_\mu H_\beta) = j^\nu, \quad (2.24)$$

$$(\partial_\mu B^\mu) V^\nu - (\partial_\mu B^\nu) V^\mu - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha (\partial_\mu E_\beta) = 0, \quad (2.25)$$

³O termo “permeabilidade magnética” para a quantidade $\mu^\alpha{}_\beta$ definida pela Eq. (2.23) é um abuso de linguagem quando comparado com a definição desse termo no Capítulo 1. O termo correto deveria ser “permeabilidade magnética inversa”. No entanto, consideraremos esse abuso, uma vez que consideraremos que a permeabilidade magnética do meio de interesse será sempre isotrópica, sendo imediato o cálculo da sua inversa. Essa definição nos trará uma grande simplificação matemática nos cálculos que procederemos.

uma vez que V^μ e $\eta^{\mu\nu\alpha\beta}$ são quantidades constantes. As derivadas parciais das intensidades e das induções dos campos são obtidas pelas Eqs. (2.22) e (2.23) e são expressas por

$$\partial_\mu D^\alpha = (\partial_\mu \varepsilon^\alpha_\beta) E^\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta}{\partial E^\tau} (\partial_\mu E^\tau) E^\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta}{\partial B^\tau} (\partial_\mu B^\tau) E^\beta + \varepsilon^\alpha_\beta (\partial_\mu E^\beta), \quad (2.26)$$

$$\partial_\nu H^\alpha = (\partial_\nu \mu^\alpha_\beta) B^\beta + \frac{\partial \mu^\alpha_\beta}{\partial E^\tau} (\partial_\nu E^\tau) B^\beta + \frac{\partial \mu^\alpha_\beta}{\partial B^\tau} (\partial_\nu B^\tau) B^\beta + \mu^\alpha_\beta (\partial_\nu B^\beta), \quad (2.27)$$

uma vez que supomos que ω é uma quantidade constante.

A substituição das Eqs. (2.26) e (2.27) nas Eqs. (2.24) e (2.25) nos fornece as Equações de Maxwell para as intensidades dos campos em relação a \mathcal{S} .

Estaremos interessados em uma configuração simples, mas que ainda mantenha de forma geral o caráter não-linear das equações envolvidas. Neste trabalho consideraremos um meio material onde densidades livres de carga e correntes não estejam presentes [isto é, $j^\mu = (0, 0, 0, 0)$]. Isso nos permite reescrever as Eqs. (2.24) e (2.25) numa forma mais simplificada

$$(\partial_\mu D^\nu) V^\mu - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha (\partial_\mu H_\beta) = 0, \quad (2.28)$$

$$(\partial_\mu B^\nu) V^\mu + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha (\partial_\mu E_\beta) = 0, \quad (2.29)$$

onde utilizamos a segunda expressão da Eq. (2.13), a primeira expressão da Eq. (2.16) e as Eqs. (2.18) e (2.20).⁴

Estamos interessados em estudar a propagação de ondas eletromagnéticas monocromáticas no limite da Óptica Geométrica em um meio material, caracterizado por dados tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética. Tais ondas eletromagnéticas são vistas como perturbações nesse meio. Não nos interessamos pelas características da fonte que gerou tais perturbações, mas sim na descrição de tais perturbações quando estas estão presentes no meio de interesse. Tal descrição deve ser obtida pelas Equações de Maxwell, dadas pelas Eqs. (2.28) e (2.29), no caso em que densidades de cargas e correntes externas estão ausentes, implementadas pelas Eqs. (2.22) e (2.23). Com suposições convenientes, somos capazes de encontrar das equações mencionadas nas linhas acima a equação de dispersão para o meio (que nos fornece as possíveis velocidades de fase para as perturbações), utilizando o método de Hadamard–Papapetrou [6, 7, 8, 9, 10, 40, 41, 44, 45]. Outra forma de se chegar nas mesmas equações também será apresentada, sem se valer diretamente do método mencionado na linha acima.

2.3 Método de Hadamard–Papapetrou

O método de Hadamard–Papapetrou se baseia na questão de “ondas de choque” em Eletrodinâmica. Para uma interpretação intuitiva dessa questão, ver Ref. [41]. Considere uma

⁴Dito de forma equivalente, utilizamos as Eqs. (2.24) e (2.25) para a componente $\nu = 0$ nessas mesmas equações, supondo que $j^\mu = (0, 0, 0, 0)$.

hipersuperfície Σ no espaço-tempo, definida por

$$Z(x^\alpha) = 0, \quad (2.30)$$

onde as coordenadas x^α são adaptadas a algum referencial inercial \mathcal{S} . Suponha que essa hipersuperfície divida o espaço-tempo em duas regiões disjuntas, definidas por $Z < 0$, $Z > 0$, separadas pela hipersuperfície Σ .

Definamos a descontinuidade de uma função $A(x^\alpha)$, em um ponto P na hipersuperfície Σ , denotada por $[A(P)]$, como [45]

$$[A(P)] \doteq \lim_{P^+, P^- \rightarrow P} [A(P^+) - A(P^-)], \quad (2.31)$$

onde estamos considerando que P^+ é um ponto arbitrário de $Z > 0$ e P^- é um ponto arbitrário de $Z < 0$.

Considere que uma quantidade $A_\mu(x^\alpha)$ é tal que

$$[A_\lambda] = 0 \quad \text{e} \quad [\partial_\mu A_\lambda] = 0, \quad (2.32)$$

onde estamos assumindo que a Eq. (2.32) é válida para todos os pontos da hipersuperfície Σ . Em outras palavras, a Eq. (2.32) nos afirma que todas as componentes de A_μ , bem como todas as suas derivadas de primeira ordem têm descontinuidade nula na hipersuperfície Σ . Assumimos que apenas $[\partial_\mu \partial_\nu A_\lambda] \neq 0$, ao menos para algumas derivadas segundas da quantidade de interesse. Descontinuidades de derivadas superiores de A_μ em geral também ocorrerão.

Considere a mudança de coordenadas

$$\tilde{x}^0 = Z(x^\alpha) \quad \text{e} \quad \tilde{x}^i = w^i(x^\alpha), \quad (2.33)$$

com $i = 1, 2, 3$. Suponha que $Z(x^\alpha)$ e $w^i(x^\alpha)$ sejam pelo menos de classe \mathcal{C}^2 e que a transformação seja não-singular, ou seja, é sempre possível expressarmos x^α em termos de \tilde{x}^α . Observe, da Eq. (2.33), que a nossa hipersuperfície de interesse Σ é determinada, nesse novo sistema de coordenadas, por $\tilde{x}^0 = 0$. Outros valores de \tilde{x}^0 nos fornecem outras hipersuperfícies paralelas a Σ . Para $\tilde{x}^0 = 0$, temos que as coordenadas \tilde{x}^i localizam pontos sobre a hipersuperfície Σ . Assim, a transformação de coordenadas dada pela Eq. (2.33) implementa uma mudança de base, com o eixo \tilde{x}^0 perpendicular à hipersuperfície Σ para todos os seus pontos. Naturalmente, os eixos \tilde{x}^i estão contidos em Σ .

Seja uma função $F(\tilde{x}^\alpha)$. Assuma que essa função é contínua na hipersuperfície Σ . Gostaríamos de computar $[\tilde{\partial}_i F]$, onde estamos considerando que $\tilde{\partial}_i = \partial / \partial \tilde{x}^i$. Da Eq. (2.31) e da definição de uma derivada parcial, temos que a descontinuidade da derivada de $F(\tilde{x}^\alpha)$ é

$$[\tilde{\partial}_i F] = \lim_{\Delta \tilde{x}^i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \tilde{x}^i} \{ [F(\tilde{x}^0, \tilde{x}^i + \Delta \tilde{x}^i, \tilde{x}^k)] - [F(\tilde{x}^0, \tilde{x}^i, \tilde{x}^k)] \}, \quad (2.34)$$

com k denotando as outras coordenadas que descrevem pontos na hipersuperfície Σ . Como os pontos \tilde{x}^i e $\tilde{x}^i + \Delta\tilde{x}^i$ pertencem à hipersuperfície Σ e da hipótese de que a função $F(\tilde{x}^\alpha)$ é contínua sobre todos os pontos de tal hipersuperfície, segue que a primeira derivada de $F(\tilde{x}^\alpha)$ é também contínua sobre Σ . Para sabermos a continuidade da primeira derivada de $F(\tilde{x}^\alpha)$, utilizamos sua derivada de ordem inferior. Logo, segue que todas as derivadas de $F(\tilde{x}^\alpha)$ com respeito a \tilde{x}^i , $i = 1, 2, 3$, são contínuas.

Seja agora o cálculo de $[\tilde{\partial}_\alpha A_\lambda]$. Aplicando a regra da cadeia e a descontinuidade de uma função, temos

$$[\tilde{\partial}_\beta A_\lambda] = (\tilde{\partial}_\beta x^\alpha)[\partial_\alpha A_\lambda], \quad (2.35)$$

uma vez que a transformação não é singular e todas as derivadas de x^α com respeito a \tilde{x}^β são supostas serem contínuas sobre Σ . Da Eq. (2.32), para qualquer β , segue que $[\tilde{\partial}_\beta A_\lambda] = 0$. Em especial, esse resultado ocorre para $\beta = 0$. Logo, $[\tilde{\partial}_i A_\lambda]$ é também contínua sobre Σ . Com a correspondência $F(\tilde{x}^\alpha) \rightarrow \tilde{\partial}_\alpha A_\lambda$, é simples de ser percebido que

$$[\tilde{\partial}_i A_\lambda] = [\tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_j A_\lambda] = [\tilde{\partial}_0 A_\lambda] = [\tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_0 A_\lambda] = \text{etc} = 0, \quad (2.36)$$

onde o “etc” na equação acima refere-se à expressões com no máximo uma derivada com respeito a \tilde{x}^0 . Da suposição $[\partial_\mu \partial_\nu A_\lambda] \neq 0$, temos que $[\tilde{\partial}_0 \tilde{\partial}_0 A_\lambda] \neq 0$, em geral. Suponha que $[\tilde{\partial}_0 \tilde{\partial}_0 A_\lambda] = \phi_\lambda$. Novamente da regra da cadeia e a descontinuidade de uma função, temos

$$[\partial_\mu \partial_\nu A_\lambda] = [\tilde{\partial}_\alpha \tilde{\partial}_\beta A_\lambda](\tilde{\partial}_\nu x^\alpha)(\tilde{\partial}_\mu x^\beta), \quad (2.37)$$

com a consideração da Eq. (2.36) e com o fato de que derivadas parciais de um sistema de coordenadas com respeito ao outro são contínuas sobre Σ .

Das Eqs. (2.33), (2.36) e (2.37) e da suposição de $[\tilde{\partial}_0 \tilde{\partial}_0 A_\lambda] = \phi_\lambda$, temos

$$[\partial_\mu \partial_\nu A_\lambda] = \phi_\lambda p_\mu p_\nu; \quad (2.38)$$

a equação acima é obtida mediante a definição

$$\partial_\nu Z \doteq p_\nu, \quad (2.39)$$

as componentes do quadrivetor perpendicular a hipersuperfície Σ . O quadrivetor ϕ_λ , presente na Eq. (2.39), faz menção à descontinuidade da segunda derivada de A_λ em Σ , que satisfaz a Eq. (2.32).

Até esse ponto, essa análise é geral para um espaço-tempo genérico. Com a definição da descontinuidade dada pela Eq. (2.31), temos que se uma dada quantidade é contínua até uma dada ordem, não sendo na seguinte, a descontinuidade da ordem seguinte será deduzida da mesma forma que aquela que nos levou a Eq. (2.38) [40]. Em outras palavras, precisaremos

apenas substituir cada derivada parcial por um quadri vetor perpendicular à hipersuperfície Σ . Adicionalmente, de forma análoga ao termo ϕ_λ que aparece na Eq. (2.38), que tem o mesmo rank e simetria algébrica de A_λ , ocorrerá o mesmo para a grandeza que estamos interessados em calcular a descontinuidade. No cálculo passado, consideramos que um quadri vetor genérico e sua primeira derivada eram contínuos sobre a hipersuperfície,⁵ isso não ocorrendo para sua segunda derivada. Seja esse quadri vetor o quadripotencial para uma dada configuração de cargas e correntes. No vácuo e na ausência de fontes [$j^\mu = (0, 0, 0, 0)$], isso pode ser interpretado fisicamente de forma muito simples. De acordo com as Eqs. (2.1), (2.3) e (2.4), a suposição da descontinuidade nula das derivadas do quadripotencial é equivalente a suposição dos campos elétrico e magnético serem contínuos sobre a hipersuperfície Σ , o mesmo não ocorrendo para as suas derivadas primeira. Um cálculo feito diretamente com o campo elétrico nos daria um resultado equivalente.

Apenas por uma questão de simplicidade, particularizemos nosso modelo no vácuo e na ausência de fontes [$j^\mu = (0, 0, 0, 0)$]. De acordo com a Eq. (2.9), as Equações de Maxwell para esse caso podem ser apresentadas na forma

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\nu^* F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.40)$$

Da primeira expressão da Eq. (2.40), segue trivialmente que $\partial_\mu F_\lambda^\mu = 0$, o qual, com o auxílio da Eq. (2.1), pode ser escrito como

$$\partial_\mu F_\lambda^\mu = \eta^{\mu\nu} (\partial_\lambda \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A_\lambda) = 0. \quad (2.41)$$

Uma condição que devemos impor à quantidade ϕ_λ , definida pela Eq. (2.38), é que ela seja compatível com as Equações de Maxwell, dadas pela Eq. (2.40). Tal compatibilidade se manifesta pela imposição de que, em ambas as regiões ($\tilde{x}^0 > 0$ e $\tilde{x}^0 < 0$) do espaço-tempo Minkowskiano, as Equações de Maxwell são válidas. Em outras palavras, impomos que

$$[\partial_\mu F_\lambda^\mu] = 0 \quad \text{e} \quad [\partial_\mu^* F^{\nu\mu}] = 0. \quad (2.42)$$

Pode ser verificado que a segunda expressão da Eq. (2.42) é uma identidade. Assim, analisaremos apenas a primeira expressão da equação mencionada. Tomando a descontinuidade sobre Σ da Eq. (2.41), impondo-se a Eq. (2.42) e considerando a Eq. (2.38), temos como resultado final

$$p_\mu \phi_\lambda p^\lambda - \phi_\mu p_\lambda p^\lambda = 0. \quad (2.43)$$

⁵A linguagem matematicamente correta deveria ser que um quadri vetor genérico tem descontinuidade nula sobre a hipersuperfície Σ . Isso é devido ao fato que descontinuidade nula não necessariamente implica em continuidade. Para esse ser o caso, os limites laterais do quadri vetor genérico têm que ser iguais em algum ponto P (por qualquer caminho que tenda a tal ponto) de Σ e iguais ao valor da função nesse ponto. Assumiremos nesse trabalho ser esse o caso, permitindo-nos assim designar uma função com descontinuidade nula em Σ ser contínua sobre Σ .

Considere o caso $p_\mu p^\mu \neq 0$ ($p^\mu p_\mu < 0$ ou $p^\mu p_\mu > 0$). Uma solução imediata da Eq. (2.43) seria $\phi_\lambda = ap_\lambda$. Da contração da Eq. (2.43) com p^μ , temos $a = \phi_\mu p^\mu / (p_\lambda p^\lambda)$. Considere uma transformação de gauge do vetor potencial, sendo essa levando ao novo quadripotencial $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda$ e que $p_\mu p^\mu \neq 0$. Assuma que Λ , $\partial_\mu \Lambda$ e $\partial_\mu \partial_\nu \Lambda$ são contínuas na hipersuperfície Σ . Considere assim que apenas a terceira derivada de Λ seja descontínua nessa hipersuperfície. Uma analogia da Eq. (2.38) no daria $[\partial_\mu \partial_\nu \partial_\beta \Lambda] = (\partial^3 \Lambda / \partial Z^3) p_\mu p_\nu p_\beta$. Para o caso em que o quadripotencial e sua primeira derivada são contínuas na hipersuperfície Σ , segue que com a escolha $\partial^3 \Lambda / \partial Z^3 = -a$, teremos $[\partial_\mu \partial_\nu A'_\lambda] = 0$. Essa escolha é sempre possível. Isso significa que o caso em que p_μ não é do tipo-nulo não nos é interessante, porque queremos descrever a propagação de descontinuidades das derivadas de segunda ordem do quadrivetor potencial. Em outras palavras, nosso interesse são os casos onde as derivadas dos campos físicos são descontínuas em Σ . Como vimos, pode-se sempre fazer escolhas onde esse não é o caso quando $p_\mu p^\mu \neq 0$.

Considere o caso fisicamente relevante para a análise da propagação de descontinuidades, que seria, de acordo com o que acima mostramos, $p_\mu p^\mu = 0$, ou seja, p_μ é um quadrivetor do tipo-nulo na geometria de Minkowski. Para esse caso, a Eq. (2.43) fornece

$$p_\mu p_\nu \phi^\nu = 0. \quad (2.44)$$

A solução para a equação acima é considerar que o quadrivetor descontinuidade, ϕ_μ , é ortogonal ao quadrivetor ortogonal à hipersuperfície Σ . Logo, ϕ_ν pertence à referida hipersuperfície. Como qualquer quadrivetor perpendicular a p_ν pertence à Σ , segue que p^μ também pertence a Σ . Evidentemente, isso apenas surge por estarmos em um espaço-tempo cuja métrica é Minkowskiana. Como p_μ é um vetor tipo-nulo em cada ponto de Σ , segue que temos um campo de vetores do tipo-nulo em Σ , ou um campo de vetores ortogonais a Σ . Seria intuitivo que as trajetórias desse campo vetorial, obtidas com a variação de algum parâmetro afim ao longo de tal trajetória (aqui escolhido por u), fossem geodésicas nulas no espaço-tempo de Minkowski, uma vez que $p_\mu(x^\alpha(u))$ é um vetor tipo-nulo e seria tangente à curva em cada ponto e Esse é realmente o caso, como o cálculo simples abaixo nos fornece.

Seja o cálculo da quantidade $(\nabla_\nu p_\mu) p^\nu = (\partial_\nu p_\mu) p^\nu$, onde estamos assumindo que ∇_ν refere-se à derivada covariante, igual à derivada parcial usual no espaço-tempo de Minkowski. Como $p_\mu = \partial Z / \partial x^\mu$, segue que $\partial_\nu p_\mu = \partial_\mu p_\nu$. Utilizando esse fato, concluímos facilmente que

$$(\nabla_\nu p_\mu) p^\nu = \frac{Dp_\mu}{du} = (\partial_\mu p_\nu) p^\nu = \frac{1}{2} \partial_\mu (p^\alpha p_\alpha) = 0, \quad (2.45)$$

uma vez que consideramos que o vetor ortogonal à hipersuperfície Σ é do tipo-nulo e é tangente à trajetória do ponto P pertencente à Σ pelo espaço-tempo.

A hipersuperfície Σ do espaço-tempo é tridimensional. Logo, três direções linearmente independentes devem existir nessa hipersuperfície. Associe uma com o vetor p_μ . Às demais,

associe os vetores a_μ e b_μ , tais que $a_\mu p^\mu = b_\mu p^\mu = 0$ [45]. Como ϕ_μ pertence a Σ , podemos escrever

$$\phi_\mu = \alpha a_\mu + \beta b_\mu, \quad (2.46)$$

pois estamos desconsiderando a parte $\phi_\mu = \gamma p_\mu$, que não nos leva a uma situação de interesse, conforme explicado nos parágrafos acima. Vemos, da Eq. (2.46), que a descontinuidade é transversa, no sentido que não tem graus de liberdade paralelos ao vetor de propagação p_μ . No contexto da Óptica Geométrica, poderemos interpretar a Eq. (2.46). Tal interpretação será válida apenas para o vácuo.

Observe que se fontes estiverem presentes e suas descontinuidades (funções que representam as fontes) forem nulas sobre Σ , então o método de Hadamard–Papapetrou para o caso onde p_μ é do tipo–nulo nos fornece exatamente a Eq. (2.46).

Outro comentário sobre o Método de Hadamard–Papapetrou. Este se vale de pequenas regiões do espaço-tempo, nas intermediações da hipersuperfície Σ . Outra hipótese é considerar que a derivada de alguma ordem de uma quantidade é descontínua sobre Σ . Para que em uma pequena região uma derivada seja não-nula, a quantidade a ser derivada precisa variar muito rapidamente nessa região. Para que seja descontínua, essa variação precisa ser muito distinta nas regiões acima e abaixo da hipersuperfície Σ , como manifesto pela Eq. (2.31). As quantidades de interesse geralmente são os campos de uma dada onda eletromagnética. A medida das suas variações está relacionada com o comprimento de onda de tal onda. Logo, vemos que o método de Hadamard–Papapetrou deve ser condizente com a aproximação da Óptica Geométrica. Esse é realmente o caso, como demonstrado na Ref. [40]. Com uma análise alternativa, também mostraremos esse fato, supondo certas condições. Isso será importante para estabelecermos as condições em que tal método matemático poderia ser implementado fisicamente.

2.4 Óptica Geométrica

No contexto da Óptica Geométrica, consideramos que a eikonal (a fase da onda associada com os campos) é uma quantidade grande e que a amplitude da onda de interesse varia lentamente com as coordenadas espaço-temporais, para distâncias da ordem do comprimento de onda dessa onda [4, 31]. Isso é equivalente a afirmar que o comprimento de onda da onda monocromática associada tende para zero. Isso significa que no limite da Óptica Geométrica, a propagação de ondas é vista sob o ponto de vista de raios, desprovidos de caráter ondulatório [31]. As leis de propagação dos raios serão assim obtidas por considerações geométricas [3]. A direção e sentido do raio em um ponto do espaço-tempo será dado pela normal à alguma hipersuperfície naquele

ponto.⁶ Logo, para a Óptica Geométrica, apenas pequenas regiões do espaço-tempo no entorno de qualquer ponto serão importantes. Mas, em pequenas regiões, grande parte das superfícies podem ser aproximadas por um plano, aquela eikonal de uma onda plana monocromática. Logo, para qualquer um dos campos, no limite da Óptica Geométrica, podemos escrever

$$f^\mu = c^\mu \exp i(K_\beta x^\beta + \alpha), \quad K_\beta = (\omega, -\vec{k}) = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\beta}, \quad (2.47)$$

com ω a frequência (constante, que no limite da Óptica Geométrica deve ser uma quantidade grande) da onda monocromática considerada e \vec{k} , seu vetor de onda, associado com a direção e sentido de propagação da onda monocromática, α uma constante arbitrária, que a componente $\mu = 0$ de f é nula, Ψ é a eikonal. Suporemos também que c^μ é uma quantidade constante na região do espaço-tempo de interesse, conforme o comentário no parágrafo anterior. K_β é o quadrivetor de onda na sua forma covariante. O sinal negativo introduzido na sua parte espacial, tal como dado pelo segundo termo da Eq. (2.47), é para uma questão de conveniência futura, porque escolheremos trabalhar com quadrivetores contravariantes e a assinatura da métrica de Minkowski é dada por $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$, embora aparentemente seja mais natural trabalhar com quadrivetores covariantes. Fica subentendido que é a parte real da Eq. (2.47) que realmente nos interessa.

Considere agora o problema tratado na seção anterior sob a seguinte perspectiva: suponha que uma fonte puntiforme que emite luz monocromática de comprimento de onda muito pequeno seja ligada no tempo $t = 0$. Suponha que essa fonte puntiforme não esteja inserida no vácuo, mas em um meio com propriedades não-triviais. Logo, não poderemos garantir que os vetores de polarização elétrico, magnético e o vetor de onda sejam mutuamente ortogonais. Serão as Equações de Maxwell que nos darão as relações entre os vetores mencionados acima. No entanto, o vetor de onda é ortogonal à superfície com a eikonal constante,⁷ que supomos ser uma frente de onda, para todo dado instante de tempo. Da Eq. (2.47), segue que o quadrivetor de onda K_μ é ortogonal à hipersuperfície de eikonal constante (para maiores detalhes, ver Refs. [31] ou [40], para uma uma revisão mais didática).

Em uma linguagem tridimensional, existirá uma superfície, que chamaremos de primeira frente de onda, que para cada dado instante de tempo (essa superfície tem uma dada forma para cada dado instante de tempo, evoluindo com o passar do mesmo), dividirá o espaço em duas regiões, aquela que percebeu a mudança de estado da fonte puntiforme e aquela que ainda não. Para cada dado instante de tempo t , temos que pontos dentro dessa superfície (pontos no

⁶Veremos no Capítulo 3 que para o raio ordinário, essa hipersuperfície é a eikonal constante. Para os raios extraordinários, esse não será em geral o caso.

⁷O termo eikonal pode significar tanto a fase da onda eletromagnética (portanto uma hipersuperfície no espaço-tempo para fases constantes), quanto a fase da onda eletromagnética subtraído o fator ωt , sendo portanto uma superfície (para valores constantes dessa quantidade) que evolui com o tempo [4].

volume limitado pela superfície) e nas intermediações de um ponto P sobre a primeira frente de onda associam campos elétrico e magnético aproximadamente na forma dada pela Eq. (2.47). Pontos fora dessa superfície, nas intermediações de P associam campos nulos. Assuma que os campos sejam contínuos quando cruzam a primeira frente de onda. Logo, $[E^\mu] = [B^\mu] = 0$. Considere que a descontinuidade ocorra para as derivadas de primeira ordem dos campos. Do que comentamos nas linhas acima, das Eqs. (2.31) e (2.47), segue que

$$[\partial_\nu E^\mu] = \bar{c}^\mu K_\nu, \quad (2.48)$$

$$[\partial_\nu B^\mu] = \bar{d}^\mu K_\nu, \quad (2.49)$$

onde estamos definindo \bar{c} e \bar{d} proporcionais às polarizações elétrica e magnética da onda monocromática, respectivamente, bem como a uma fase.

Sejam os campos da onda em uma região do espaço-tempo desprovida de um meio material, bem como fontes. Logo, da Eq. (2.12) para um observador $V^\mu = \delta^\mu_0$, segue trivialmente que

$$E^\mu \doteq F^{\mu\nu} V_\nu = -\eta^{\mu\nu} F_{0\nu}, \quad (2.50)$$

onde estamos considerando a Eq. (2.13). Observe que a definição para o quadrivetor campo elétrico dada acima é tal que sua componente zero é sempre nula. Substituindo a Eq. (2.1) na sua versão covariante na Eq. (2.50), aplicando o operador ∂_α a essa mesma equação, aplicando a descontinuidade a essa expressão e levando em conta a Eq. (2.38), com $p_\mu = K_\mu$ (pois estamos identificando a hipersuperfície Σ da seção anterior com a eikonal constante), temos

$$[\partial_\alpha E^\mu] = K_\alpha (\phi_0 K^\mu - \phi^\mu K_0). \quad (2.51)$$

Comparando as Eqs. (2.48) e (2.51), verificamos que

$$\bar{c}^\mu = (\phi_0 K^\mu - \phi^\mu K_0). \quad (2.52)$$

Observe da equação acima que $\bar{c}^0 = 0$, como definimos na Eq. (2.47). Isso obviamente ocorre pela mesma definição do “quadrivetor campo elétrico”, tal como comentado nas linhas acima.

Considere agora o campo magnético. Da Eq. (2.11) para um observador comóvel com o laboratório onde estão presentes os campos ($V^\mu = \delta^\mu_0$), temos que, em analogia com a Eq. (2.50), para o observador $V^\mu = \delta^\mu_0$,

$$B^\mu = {}^*F^{\mu\nu} V_\nu = -\eta^{\mu\nu} {}^*F_{0\nu}. \quad (2.53)$$

Tomando a descontinuidade da equação acima, e levando em conta as Eqs. (2.6) e (2.38), temos

$$[\partial_\tau B^\mu] = K_\tau \eta^{\mu 0 \alpha \beta} \phi_\beta K_\alpha. \quad (2.54)$$

Comparando as Eqs. (2.54) com a Eq. (2.49), vemos imediatamente

$$\bar{d}^\mu = \eta^{\mu 0 \alpha \beta} K_\alpha \phi_\beta. \quad (2.55)$$

Da equação acima, percebemos, tal como no caso para o campo elétrico, que $\bar{d}^0 = 0$. Suponha da Eq. (2.46) que $\phi_0 = 0$. Logo, da Eq. (2.52) segue que ϕ^μ é proporcional à polarização elétrica da onda. Da Eq. (2.55), segue que a polarização magnética da onda é ortogonal à elétrica. Claramente, da Eq. (2.44), vemos que o vetor de onda é ortogonal aos vetores de polarização. Isso é exatamente aquilo que esperávamos. Observe que de forma geral, as mesmas predições podem ser obtidas, com contrações convenientes. Isso demonstra de forma física a conexão do método de Hadamard–Papapetrou com a propagação de ondas no limite da Óptica Geométrica.

2.5 Equação de Autovalores

De agora em diante, até o final desse capítulo, escolheremos a classe de observadores tais que $V^\mu = \delta^\mu_0$, isto é, aquela classe comóvel com o laboratório onde se mede os campos.

Nessa seção, estaremos interessados em derivar uma equação de autovalores cuja solução nos levará a chamada equação generalizada de Fresnel. Essa é uma equação nos permitirá encontrar a equação de dispersão para o meio de interesse de posse dessas, as polarizações de ondas eletromagnéticas, como veremos. Com a relação de dispersão, as velocidades de fase das ondas poderão ser obtidas. Tais velocidades não são em princípio físicas. As velocidades físicas seriam as velocidades de grupo (quando os pacotes de ondas têm um pico bem definido), definidas por $\vec{u} = \nabla_{\vec{k}} \omega$ [4]. Mostraremos no Capítulo 3 que para o meio de interesse, em geral essas quantidades são distintas para as ondas extraordinárias. Observamos que a velocidade de fase é definida na direção e sentido do vetor de onda.

No Método de Hadamard–Papapetrou, como já dissemos, se trabalhássemos com os campos físicos, chegaríamos às seguintes relações para as descontinuidades das suas derivadas

$$[\partial_\nu E^\mu] = e^\mu K_\nu \quad \text{e} \quad [\partial_\nu B^\mu] = b^\mu K_\nu. \quad (2.56)$$

Como já mostramos da equivalência do Método de Hadamard–Papapetrou com a Óptica Geométrica, segue que os quadrivetores e^μ e b^μ estão proporcionais às polarizações elétrica e magnética, respectivamente. Ademais, consideramos que o meio material que analisaremos não tem uma densidade livre de cargas nem de correntes. Isso é apenas uma hipótese simplificadora. Nesse caso, temos que as Eqs. (2.29) e (2.56) nos fornecem

$$b^\nu = \frac{1}{\omega} \eta^{\nu \mu \alpha \beta} V_\alpha K_\mu e_\beta, \quad (2.57)$$

Ainda, para obtermos a Eq. (2.57), valemo-nos das Eqs. (2.47) e (2.13), para a contração do quadrivetores de onda e velocidade ($V^\mu = \delta^\mu_0$).

Seja a identidade

$$\eta^{\beta\tau\alpha\gamma} V_\tau L_\alpha N_\gamma = -(\vec{L} \times \vec{N})^\beta, \quad (2.58)$$

onde enfatizamos que o terceiro termo da Eq. (2.13) foi utilizada e estamos considerando que $L^\mu = (L^0, \vec{L})$ e o mesmo sendo verdade para o quadrivetor N^μ . Note que a componente zero do quadrivetor mencionado anteriormente pode ser arbitrária, inclusive nula, como é o caso de b^μ e e^μ . Está implícito que a métrica do espaço-tempo é Minkowskiana. Comparando as Eqs. (2.58) e (2.57), percebemos facilmente que (para uma confirmação do resultado abaixo em termos de uma manipulação direta das Equações de Maxwell, ver Ref. [30])

$$\vec{b} = \frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{e}). \quad (2.59)$$

Da Eq. (2.59), temos que o vetor de polarização do campo magnético da onda é sempre ortogonal ao vetor de polarização do campo elétrico e ao vetor de onda, não importando quão complexo seja o meio que estamos analisando.⁸ A relação entre os vetores \vec{e} e \vec{k} será fornecida pela Eq. (2.28), que leva em conta a existência do meio. Pode ser mostrado para o vácuo na ausência de fontes que a substituição da Eq. (2.56) na Eq. (2.28) nos leva à ortogonalidade entre o vetor de onda e os de polarização. Logo, os vetores \vec{k} , \vec{e} e \vec{b} formam uma trinca ordenada mutuamente ortogonal.

Vamos calcular a descontinuidade em ambos os termos da Eq. (2.28) para um meio material geral. Estamos supondo que os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética são dependentes dos campos totais, das coordenadas espaço-temporais e da frequência da onda (constante) que se propaga no meio; tais tensores são supostos contínuos, bem como as suas derivadas com respeito às coordenadas espaço-temporais, quando cruzam a primeira frente de onda da perturbação que se propaga pelo meio.⁹ Logo, quando considerarmos a descontinuidade das Eqs. (2.26) e (2.27), o primeiro termo em ambas as expressões será nulo. Os demais não o serão, porque há derivadas com respeito às coordenadas espaço-temporais nos campos. Substituindo as Eqs. (2.56) na Eq. (2.28), temos

$$\begin{aligned} & \omega \left(\varepsilon^\alpha_\beta e^\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta}{\partial E^\mu} E^\beta e^\mu + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta}{\partial B^\mu} E^\beta b^\mu \right) + \\ & + \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} V_\gamma \left(\mu_{\lambda\beta} b^\beta + \frac{\partial \mu_{\lambda\beta}}{\partial E^\mu} B^\beta e^\mu + \frac{\partial \mu_{\lambda\beta}}{\partial B^\mu} B^\beta b^\mu \right) K_\tau = 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

⁸A Eq. (2.59) é válida para qualquer meio, uma vez que tal equação é advinda da parte das equações de Maxwell que os campos \vec{E} e \vec{B} devem intrinsecamente satisfazer. Dito em outras palavras, a Eq. (2.59) é a consequência da (hipótese) não-existência de monopolos magnéticos e que a variação temporal do campo magnético é o negativo do rotacional do campo elétrico.

⁹Essa é apenas uma hipótese simplificadora de trabalho. O caso em que tais tensores são descontínuos é mais sofisticado e pode ser encontrado em detalhes na Ref. [40].

Substituindo a Eq. (2.57) na Eq. (2.60) e depois de alguns cálculos (ver Ref. [41] para uma dedução bastante didática), chega-se em

$$Z^\alpha{}_\beta e^\beta = 0, \quad (2.61)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} Z^\alpha{}_\beta \doteq & \varepsilon^\alpha{}_\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha{}_\mu}{\partial E^\beta} E^\mu + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \varepsilon^\alpha{}_\mu}{\partial B^\chi} \eta^{\chi\varphi\omega}{}_\beta E^\mu q_\varphi V_\omega + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \mu_{\lambda\nu}}{\partial E^\beta} \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} B^\nu q_\tau V_\gamma + \\ & + \frac{1}{\omega^2} (q^2 I^\lambda{}_\beta H_\lambda{}^\alpha - q^2 H_\chi{}^\alpha I^\alpha{}_\beta + H_\beta{}^\chi q_\chi q^\alpha - H_\lambda{}^\chi q^\lambda q_\chi h^\alpha{}_\beta). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Na Eq. (2.62) foi definido,

$$h^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta - V^\alpha V_\beta, \quad (2.63)$$

o projetor no espaço tridimensional do observador $V^\mu = \delta^\mu{}_0$. Ainda, $h^\alpha{}_\beta V^\beta = 0$ e $h^\alpha{}_\beta h^\beta{}_\tau = h^\alpha{}_\tau$. Finalmente, $h^\alpha{}_\alpha = 3$.¹⁰

Também foi definido da Eq. (2.62)

$$I^\alpha{}_\beta \doteq h^\alpha{}_\beta + \hat{q}^\alpha \hat{q}_\beta, \quad (2.64)$$

o projetor ao subespaço ortogonal ao vetor $\hat{q}^\mu \doteq q^\mu/q$, com $q = |\vec{q}|$. Esses pontos devem ser clarificados. Definimos q^μ como $q^\mu \doteq h^\mu{}_\nu K^\nu = k^\mu$, conforme nos afirma as Eqs. (2.47) e (2.63). Observe assim que q^μ apenas tem componentes espaciais, conforme determina o observador $V^\mu = \delta^\mu{}_0$ e, portanto, é um vetor tipo-espaço. De acordo com as Eqs. (2.47) e (2.13), q^μ pode ser escrito como

$$q^\mu = K^\mu - \omega V^\mu = (0, \vec{q}). \quad (2.65)$$

Observe que o vetor resultante da operação anterior pertence ao espaço tridimensional.

Analisemos o segundo termo da Eq. (2.64). Da definição de \hat{q} , segue

$$\hat{q}^\mu \hat{q}_\mu = -1. \quad (2.66)$$

Das Eqs. (2.64), (2.63) e (2.66), segue que $I^\alpha{}_\beta I^\beta{}_\tau = I^\alpha{}_\tau$, $I^\alpha{}_\beta \hat{q}^\beta = 0$ e $I^\alpha{}_\alpha = 2$. Isso mostra que $I^\alpha{}_\beta$ é de fato o projetor ao subespaço ortogonal à \hat{q}^μ .

Da Eq. (2.62) falta-nos ainda definir $H^\alpha{}_\beta$. Essa quantidade é definida por

$$H^\alpha{}_\beta \doteq \mu^\alpha{}_\beta + \frac{\partial \mu^\alpha{}_\tau}{\partial B^\beta} B^\tau. \quad (2.67)$$

¹⁰Observe que para um observador normalizado arbitrário ($V^\mu V_\mu = 1$), $h^\mu{}_\nu$ é o projetor ao subespaço ortogonal a V^μ .

Enfatizamos que a métrica que levanta ou abaixa índices é a Minkowskiana, $\eta^{\mu\nu}$. No entanto, [9, 10] mostraram que podemos associar apenas para luz uma métrica (ou geometria) efetiva,¹¹ $g_{ef}^{\mu\nu}$ que levanta e abaixa os índices de K^μ . Nessas mesmas referências, pode-se ainda encontrar modelos análogos para essa métrica efetiva, tanto para meios materiais, quanto no contexto de Lagrangeanas da eletrodinâmica não-linear. Nessa métrica, o quadrivetor K^μ é do tipo-nulo, não sendo o caso para a métrica $\eta^{\mu\nu}$. Comentaremos brevemente sobre o assunto de métricas ópticas (nome dado às quantidades obtidas a partir da equação de dispersão do meio) no Apêndice A.

Outra questão a ser mais clarificada sobre a utilização da métrica Minkowskiana como métrica do espaço-tempo. Comentamos que estamos supondo uma idealização de que nem o meio material nem os campos externos modifiquem a métrica Minkowskiana. Também deveria ser lembrado que a existência de algum corpo massivo (por exemplo, a Terra) modificaria a métrica plana. No entanto, o meio material que estaremos interessado estará em uma região finita e suficientemente pequena do espaço (em um laboratório) em repouso. Assim, podemos desprezar contribuições devidas à presença de corpos massivos na métrica.

Por uma questão de conveniência futura, considere a definição

$$C^\alpha{}_\beta \doteq \varepsilon^\alpha{}_\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha{}_\mu}{\partial E^\beta} E^\mu + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \varepsilon^\alpha{}_\mu}{\partial B^\chi} \eta^{\chi\varphi\omega}{}_\beta E^\mu q_\varphi V_\omega. \quad (2.68)$$

Assim, a Eq. (2.62) fica

$$\begin{aligned} Z^\alpha{}_\beta &= C^\alpha{}_\beta + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \mu_{\lambda\nu}}{\partial E^\beta} \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} B^\nu q_\tau V_\gamma + \\ &+ \frac{1}{\omega^2} (q^2 I^\lambda{}_\beta H_\lambda{}^\alpha - q^2 H_\chi{}^\alpha I^\alpha{}_\beta + H_\beta{}^\chi q_\chi q^\alpha - H_\lambda{}^\chi q^\lambda q_\chi h^\alpha{}_\beta). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Nas seções seguintes, particularizaremos a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética com o intuito de construir modelos físicos para efeitos de interesse.

2.6 Permeabilidade Magnética Isotrópica e Permissividade Elétrica Independente do Campo Magnético

A Eq. (2.69) é a forma mais geral que temos para escrever as Equações de Maxwell no intuito de estudar a propagação de uma perturbação para um meio material, considerando-se a Eq.

¹¹Assumimos que é dado o nome “métrica (geometria) efetiva” para uma analogia que poderia ser feita assumindo-se que haveria em relatividade geral algum espaço-tempo com um conveniente conteúdo de matéria-energia que geraria a mesma “métrica” que aquela obtida da equação de dispersão do meio de interesse. Claro está que essa analogia deve ser vista com cuidado, porque a “métrica (geometria) efetiva” é válida apenas para fótons, enquanto que aquelas da relatividade geral são válidas para quaisquer partículas teste.

(2.61), no limite da Óptica Geométrica. Considere a particularização para meios que exibam a permeabilidade magnética da forma

$$\mu^\alpha{}_\beta = \frac{1}{\mu(E)} h^\alpha{}_\beta. \quad (2.70)$$

Logo, estamos assumindo que a permeabilidade magnética é isotrópica e dependente apenas do módulo do campo elétrico resultante. A isotropia foi utilizada como elemento simplificador, bem como a apenas dependência no módulo do campo elétrico. Essa é uma forma mais simples de mantermos a influência do campo magnético externo nas soluções para as possíveis velocidades da luz no meio de interesse. Claro está que há muitas outras configurações possíveis, porém, nos limitaremos a esse caso nesse trabalho.

Embora não seja intuitivo, o princípio da superposição é válido apenas quando as equações associadas ao problema são lineares. Por princípio da superposição, referimos ao fato de que se duas quantidades são soluções de uma equação linear, então sua combinação linear (com coeficientes constantes arbitrários) também é uma solução. As quantidades têm dinâmicas separadas e a resultante em um dado ponto é sua soma, vetorial ou algébrica. Por exemplo, considere uma distribuição de cargas. O campo resultante em um ponto fora dessa distribuição é a soma dos campos que cada carga produz naquele ponto, independente da existência das outras cargas. O princípio da superposição vale **apenas** em meios lineares, de forma geral. No entanto, quando consideramos que os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética são dependentes de campos, as Equações de Maxwell que descrevem os meios de interesse tornam-se não-lineares. Se os tensores mencionados acima são dependentes apenas de coordenadas espaço-temporais, constituindo um meio naturalmente heterogêneo, temos que o princípio da superposição ainda é válido (porque esse meio é linear). Isso pode ser visualizado pelas Eqs. (2.26)–(2.29).

Seja um exemplo ilustrativo para a análise do princípio da superposição. Considere a presença de placas submetidas a um potencial nas extremidades de um meio material genérico. O campo elétrico resultante no interior do meio é a solução das Equações de Maxwell para tal meio. Essa solução pode ser não-trivial constante. Suponha agora que desliguemos a diferença de potencial das placas. Considere que um feixe luminoso é dirigido para o meio material, ou é estabelecido em seu interior. Os campos elétrico e magnético da onda que possivelmente se propaga nesse meio são novamente soluções das Equações de Maxwell. Suponha uma terceira configuração, em que o potencial e o feixe são inseridos no meio ao mesmo tempo. Os campos resultantes em geral não mais serão a soma dos casos anteriores, considerando um caso independente do outro, uma vez que se o meio for não-linear, sempre haverá nas equações envolvidas termos cruzados nos campos, que torna impossível de forma geral soluções independentes.

No que se segue, trabalharemos com os tensores permissividade elétrica e permeabilidade

magnética, considerando que estas são funções dos campos resultantes, E^μ e B^μ , das coordenadas espaço-temporais e de um parâmetro constante, que identificamos com a frequência da onda monocromática propagante.¹² Discutiremos uma “linearização parcial” das Equações de Maxwell para um meio material livre de densidade de cargas e correntes, dadas pelas Eqs. (2.28) e (2.29), implementadas pelas Eqs. (2.26) e (2.27). Esse método é em princípio independente do método de Hadamard–Papapetrou. Adicionalmente, poderia ser visto como outra forma de se encontrar as equações que as perturbações devem satisfazer em meios não-lineares sob suposições convenientes.

Suponha que o campo elétrico resultante no meio é dado por $E^\mu = \tilde{E}^\mu + \tilde{e}^\mu$, enquanto que o campo magnético total é $B^\mu = \tilde{B}^\mu + \tilde{b}^\mu$, onde estamos supondo que a componente $\mu = 0$ é nula para qualquer um dos campos, sendo esse resultado nulo devido a ambos termos nulos em cada expressão. Suponha, ademais, que $\tilde{E}^\mu \gg \tilde{e}^\mu$, mas ainda pequeno o bastante para que a aproximação da métrica Minkowskiana para o meio ser válida. Suponha para o campo magnético $\tilde{B}^\mu \gg \tilde{b}^\mu$, com a mesma argumentação que a do campo elétrico. Suporemos também que haja uma onda monocromática propagante e possui um comprimento de onda muito menor que as dimensões do meio e sua amplitude varia lentamente, de tal forma que em pequenas regiões, esta pode ser tomada como constante. Logo, estamos supondo a validade da Óptica Geométrica. Nesse caso, a eikonal dessa onda será grande e, em primeira ordem, o campos elétrico e magnético da onda serão representados pela Eq. (2.47). Os campos elétrico e magnéticos dessa onda são designados por \tilde{e}^μ e \tilde{b}^μ , respectivamente. Esses não são os campos da onda que haveriam no meio sem a presença dos “campos externos”¹³ \tilde{E}^μ e \tilde{B}^μ , não sendo em princípio aqueles no meio sem a presença da onda.

Seja a aproximação de que, para a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética, os campos da onda podem ser desprezados, em confronto com os campos externos. Essa aproximação é razoável uma vez que os campos em geral corrigem os tensores mencionados acima por uma quantidade pequena em relação a seus valores independentes dessas grandezas. Não ignoraremos o campo elétrico ou magnético da onda eletromagnética em comparação com os campos externos quando derivadas espaço-temporais dessas quantidades estiverem presentes. Em outras palavras, iremos até a segunda ordem de correção nas equações. Assim, as Eqs.

¹²Enfatizamos apenas a dependência nesse parâmetro constante porque mais adiante assumiremos que algumas/ todas as componentes do tensor permissividade elétrica são negativas, apenas possível se o meio de interesse é dispersivo.

¹³Este termo é para ser entendido como os campos não relacionados com aqueles da onda.

(2.26) e (2.27) podem ser aproximadas para

$$\begin{aligned} \partial_\mu D^\alpha &\simeq \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta(\tilde{E}^\gamma, \tilde{B}^\gamma)}{\partial \tilde{E}^\tau} (\partial_\mu \tilde{e}^\tau) \tilde{E}^\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta(\tilde{E}^\gamma, \tilde{B}^\gamma)}{\partial \tilde{B}^\tau} (\partial_\mu \tilde{b}^\tau) \tilde{E}^\beta + \varepsilon^\alpha_\beta (\partial_\mu \tilde{e}^\beta) + \\ &+ \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta(\tilde{E}^\gamma, \tilde{B}^\gamma)}{\partial \tilde{E}^\tau} (\partial_\mu \tilde{E}^\tau) \tilde{E}^\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta(\tilde{E}^\gamma, \tilde{B}^\gamma)}{\partial \tilde{B}^\tau} (\partial_\mu \tilde{B}^\tau) \tilde{E}^\beta + \partial_\mu [\varepsilon^\alpha_\beta(\tilde{E}^\gamma, \tilde{B}^\gamma)] \tilde{E}^\beta, \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu H^\alpha &\simeq \frac{\partial \mu^\alpha_\beta(\tilde{E}^\gamma, \tilde{B}^\gamma)}{\partial \tilde{E}^\tau} (\partial_\mu \tilde{e}^\tau) \tilde{B}^\beta + \frac{\partial \mu^\alpha_\beta(\tilde{E}^\gamma, \tilde{B}^\gamma)}{\partial \tilde{B}^\tau} (\partial_\mu \tilde{b}^\tau) \tilde{B}^\beta + \mu^\alpha_\beta (\partial_\mu \tilde{b}^\beta) + \\ &+ \frac{\partial \mu^\alpha_\beta(\tilde{E}^\gamma, \tilde{B}^\gamma)}{\partial \tilde{E}^\tau} (\partial_\mu \tilde{E}^\tau) \tilde{B}^\beta + \frac{\partial \mu^\alpha_\beta(\tilde{E}^\gamma, \tilde{B}^\gamma)}{\partial \tilde{B}^\tau} (\partial_\mu \tilde{B}^\tau) \tilde{B}^\beta + \partial_\mu [\mu^\alpha_\beta(\tilde{E}^\gamma, \tilde{B}^\gamma)] \tilde{B}^\beta. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Está também suposto nas Eqs. (2.71) e (2.72) que os tensores dielétricos são dependentes das coordenadas espaço-temporais e da frequência da onda que se propaga no meio, um parâmetro constante. Dessas equações, identificamos também nas suas segundas linhas aparecem apenas quantidades não-dependentes dos campos da onda. Vemos assim que quando as Eqs. (2.71) e (2.72) são substituídas nas Equações de Maxwell para meios materiais na ausência de fontes, dadas pelas Eqs. (2.28) e (2.29), estas podem ser desacopladas em Equações de Maxwell que envolvem apenas os “campos externos” em um meio específico e outra parte relacionada com os campos da onda e as soluções dos campos externos. Essa última parte é dada por

$$(\partial_\mu \tilde{d}^\nu) V^\mu - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha (\partial_\mu \tilde{h}_\beta) = 0, \quad (2.73)$$

$$(\partial_\mu \tilde{b}^\nu) V^\mu + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha (\partial_\mu \tilde{e}_\beta) = 0, \quad (2.74)$$

com

$$\partial_\mu \tilde{d}^\alpha \simeq \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta(\tilde{E}^\gamma, \tilde{B}^\gamma)}{\partial \tilde{E}^\tau} (\partial_\mu \tilde{e}^\tau) \tilde{E}^\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta(\tilde{E}^\gamma, \tilde{B}^\gamma)}{\partial \tilde{B}^\tau} (\partial_\mu \tilde{b}^\tau) \tilde{E}^\beta + \varepsilon^\alpha_\beta (\partial_\mu \tilde{e}^\beta), \quad (2.75)$$

$$\partial_\mu \tilde{h}^\alpha \simeq \frac{\partial \mu^\alpha_\beta(\tilde{E}^\gamma, \tilde{B}^\gamma)}{\partial \tilde{E}^\tau} (\partial_\mu \tilde{e}^\tau) \tilde{B}^\beta + \frac{\partial \mu^\alpha_\beta(\tilde{E}^\gamma, \tilde{B}^\gamma)}{\partial \tilde{B}^\tau} (\partial_\mu \tilde{b}^\tau) \tilde{B}^\beta + \mu^\alpha_\beta (\partial_\mu \tilde{b}^\beta). \quad (2.76)$$

Uma vez que $\partial_\mu \tilde{e}^\tau \propto e^\tau K_\mu$ e $\partial_\mu \tilde{b}^\tau \propto b^\tau K_\mu$, advindas da Eq. (2.47) (pois podemos eliminar as exponenciais, que são fatores comuns a todos os termos das equações dos campos da onda eletromagnética), segue das Eqs. (2.73)–(2.76) as equações que obteríamos pela método de Hadamard–Papapetrou diretamente das Equações de Maxwell, assumindo a Eq. (2.56) e considerando que os campos totais são substituídos pelos campos externos nos tensores dielétricos e nos campos E^α e B^α . Suporemos ser este o caso, uma vez que uma onda eletromagnética será entendida como uma perturbação. Se esse não for o caso, o processo de linearização parcial não é mais válido e as equações serão distintas daquelas que o método de Hadamard–Papapetrou aplicado nas equações para os campos resultantes nos forneceria.

Voltemos ao meio material de interesse. Substituindo a Eq. (2.70) na Eq. (2.69), temos

$$Z^\alpha{}_\beta = C^\alpha{}_\beta + \frac{q \mu'}{\mu^2 \omega} \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} B_\lambda V_\gamma \hat{q}_\tau E_\beta - \frac{q^2}{\omega^2 \mu} I^\alpha{}_\beta, \quad (2.77)$$

uma vez que

$$\frac{\partial E}{\partial E^\beta} = -\frac{E_\beta}{E} = -\frac{E_\beta}{\sqrt{-E^\alpha E_\alpha}}, \quad (2.78)$$

$$\mu' \doteq \frac{1}{E} \frac{\partial \mu}{\partial E}, \quad (2.79)$$

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta, \quad (2.80)$$

sendo essa última equação obtida trivialmente da Eq. (2.63).

Seja a Eq. (2.77). Façamos outra definição conveniente:

$$G^\alpha{}_\beta = C^\alpha{}_\beta + \frac{q}{\omega} \frac{\mu'}{\mu^2} \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} B_\lambda V_\gamma \hat{q}_\tau E_\beta. \quad (2.81)$$

Assim, a Eq. (2.77) fica

$$Z^\alpha{}_\beta = G^\alpha{}_\beta - \frac{q^2}{\omega^2 \mu} I^\alpha{}_\beta. \quad (2.82)$$

Considere a resolução da Eq. (2.61). Essa é uma equação de autovalores. Soluções não-triviais para os autovetores serão obtidas mediante a imposição

$$\begin{aligned} \det |Z^\alpha{}_\beta| &= (Z^\mu{}_\mu)^3 - 3 Z^\mu{}_\mu Z^\alpha{}_\beta Z^\beta{}_\alpha + 2 Z^\alpha{}_\beta Z^\beta{}_\gamma Z^\gamma{}_\alpha \\ &\doteq Z_1^3 - 3 Z_1 Z_2 + 2 Z_3 = 0; \end{aligned} \quad (2.83)$$

a equação acima é conhecida como equação de Fresnel generalizada, expressa em termos dos traços Z_i , $i = 1, 2, 3$. Para maiores detalhes, ver Ref. [46]. A Eq. (2.83) nos possibilitará encontrar as velocidades de fase para a luz no meio material em descrição. Esses são os autovalores da equação de Fresnel generalizada.

Defina, apenas para simplicidade dos cálculos, $A \doteq q^2/(\omega^2 \mu)$. Das Eqs. (2.82) e (2.83), segue

$$Z_1 = Z^\mu{}_\mu = G^\mu{}_\mu - 2A, \quad (2.84)$$

onde utilizamos uma das propriedades do projetor sobre o subespaço ortogonal ao vetor de onda. Analogamente, das Eqs. (2.82) e (2.83),

$$Z_2 = Z^\alpha{}_\beta Z^\beta{}_\alpha = G^\alpha{}_\beta G^\beta{}_\alpha - 2A G^\alpha{}_\beta I^\beta{}_\alpha + 2A^2. \quad (2.85)$$

Finalmente, com o uso das Eqs. (2.82) e (2.83), temos

$$Z_3 = Z^\alpha{}_\beta Z^\beta{}_\gamma Z^\gamma{}_\alpha = G^\alpha{}_\beta G^\beta{}_\gamma G^\gamma{}_\alpha - 3A G^\alpha{}_\beta G^\gamma{}_\alpha I^\beta{}_\gamma + 3A^2 G^\alpha{}_\beta I^\beta{}_\alpha - 2A^3. \quad (2.86)$$

Substituindo as Eqs. (2.84)–(2.86) na Eq. (2.83) e observando a Eq. (2.64), após algumas simplificações, chega-se em

$$\tilde{\alpha} v_\phi^4 - \tilde{\beta} v_\phi^2 - \tilde{\gamma} = 0, \quad (2.87)$$

onde voltamos com a definição de A , consideramos que $v_\phi = \omega/q$ e

$$\tilde{\alpha} \doteq \frac{1}{6} [(G^\mu{}_\mu)^3 - 3G^\mu{}_\mu G^\alpha{}_\beta G^\beta{}_\alpha + 2G^\alpha{}_\beta G^\beta{}_\gamma G^\gamma{}_\alpha], \quad (2.88)$$

$$\tilde{\beta} \doteq \frac{1}{\mu} [(-G^\mu{}_\mu G^{\gamma\beta} + G^\gamma{}_\alpha G^{\alpha\beta}) \hat{q}_\gamma \hat{q}_\beta], \quad (2.89)$$

$$\tilde{\gamma} \doteq \frac{1}{\mu^2} G^{\alpha\beta} \hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta. \quad (2.90)$$

Observe que a Eq. (2.87) não pode, em princípio, ser reduzida a uma equação quadrática como parece. A razão é que os coeficientes $G^\alpha{}_\beta$ são dependentes de v_ϕ , como é manifesto na Eq. (2.81), em ambos os termos dessa expressão [ver Eq. (2.68)]. A Eq. (2.87) é quadrática apenas quando a permeabilidade magnética é independente do campo elétrico externo e o tensor permissividade elétrica é independente do campo magnético externo ou controlável. Logo, para o caso em que $\mu = \mu_0$, uma constante, recuperamos resultados conhecidos [7].

Para obtermos a equação que define os autovalores da equação de Fresnel generalizada, devemos substituir a Eq. (2.81) na Eq. (2.87). Suponha que o tensor permissividade elétrica não é dependente do campo magnético externo (se não fizermos essa hipótese, teríamos coeficientes que são dependentes de v_ϕ). Procedendo tal operação, após algumas simplificações, temos que a Eq. (2.87) se reduz para

$$\alpha v_\phi^4 + \mathcal{J} v_\phi^3 + (\mathcal{P} - \beta) v_\phi^2 + (\mathcal{L} - \mathcal{F}) v_\phi - \gamma = 0, \quad (2.91)$$

onde as definições foram feitas

$$\alpha \doteq \frac{1}{6} [(C^\mu{}_\mu)^3 - 3C^\mu{}_\mu C^\alpha{}_\beta C^\beta{}_\alpha + 2C^\alpha{}_\beta C^\beta{}_\gamma C^\gamma{}_\alpha], \quad (2.92)$$

$$\beta \doteq \frac{1}{\mu} [(-C^\mu{}_\mu C^{\gamma\beta} + C^\gamma{}_\alpha C^{\alpha\beta}) \hat{q}_\gamma \hat{q}_\beta], \quad (2.93)$$

$$\gamma \doteq \frac{1}{\mu^2} C^{\alpha\beta} \hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta, \quad (2.94)$$

$$\mathcal{J} \doteq \frac{1}{2} (C^\mu{}_\mu)^2 A^\mu{}_\mu - C^\mu{}_\mu C^\alpha{}_\beta A^\beta{}_\alpha - \frac{1}{2} A^\mu{}_\mu C^\alpha{}_\beta C^\beta{}_\alpha + C^\alpha{}_\beta C^\beta{}_\gamma A^\gamma{}_\alpha, \quad (2.95)$$

$$\mathcal{P} \doteq \frac{1}{2} (A^\mu{}_\mu)^2 C^\mu{}_\mu - \frac{1}{2} C^\mu{}_\mu A^\alpha{}_\beta A^\beta{}_\alpha - A^\mu{}_\mu C^\alpha{}_\beta A^\beta{}_\alpha + A^\alpha{}_\beta C^\beta{}_\gamma A^\gamma{}_\alpha, \quad (2.96)$$

$$\mathcal{L} \doteq \frac{1}{6} (A^\mu{}_\mu)^3 - \frac{1}{2} A^\mu{}_\mu A^\alpha{}_\beta A^\beta{}_\alpha + \frac{1}{3} A^\alpha{}_\beta A^\beta{}_\gamma A^\gamma{}_\alpha, \quad (2.97)$$

$$\mathcal{F} \doteq \frac{1}{\mu} [C^\lambda{}_\alpha A^{\alpha\nu} - A^\alpha{}_\alpha C^{\lambda\nu}] \hat{q}_\lambda \hat{q}_\nu, \quad (2.98)$$

$$A^{\alpha}_{\beta} \doteq \frac{\mu'}{\mu^2} \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} B_{\lambda} V_{\gamma} \hat{q}_{\tau} E_{\beta} = \frac{\mu'}{\mu^2} (\hat{q} \times \vec{B})^{\alpha} E_{\beta}. \quad (2.99)$$

Na Eq. (2.99), utilizamos a Eq. (2.58).

Desenvolvamos mais tais coeficientes. Da Eq. (2.92), temos

$$\alpha = \frac{1}{6} [(C_1)^3 - 3 C_1 C_2 + 2 C_3], \quad (2.100)$$

onde definimos C_i , $i = 1, 2, 3$, tal como feito na Eq. (2.83) para Z^{α}_{β} . Da Eq. (2.93), segue

$$\beta = \frac{1}{\mu} (C^{\gamma}_{\alpha} C^{\alpha}_{\beta} - C_1 C^{\gamma}_{\beta}) \hat{q}_{\gamma} \hat{q}^{\beta}. \quad (2.101)$$

Enfatizamos que quem levanta ou abaixa índices é a métrica de Minkowski. Da Eq. (2.94), uma simples manipulação resulta em

$$\gamma = \frac{1}{\mu^2} C^{\alpha}_{\beta} \hat{q}_{\alpha} \hat{q}^{\beta}. \quad (2.102)$$

Das Eqs. (2.95) e (2.99), após definirmos

$$(E_C)_{\beta} \doteq C^{\alpha}_{\beta} E_{\alpha}, \quad (2.103)$$

juntamente com

$$(E_{CC})_{\gamma} \doteq C^{\alpha}_{\beta} C^{\beta}_{\gamma} E_{\alpha}, \quad (2.104)$$

chegamos facilmente à quantidade

$$\mathcal{J} = \frac{\mu'}{2\mu^2} \hat{q} \cdot \{[(C_1)^2 - C_2] \vec{E} \times \vec{B} - 2 C_1 \vec{E}_C \times \vec{B} + 2 \vec{E}_{CC} \times \vec{B}\}. \quad (2.105)$$

Atenção deve ser tomada nas componentes dos vetores definidos acima, dados pelas Eqs. (2.103) e (2.104), covariantes por definição. Da Eq. (2.99), é uma tarefa simples mostrar que

$$\mathcal{L} = 0, \quad (2.106)$$

o mesmo resultado válido para \mathcal{P} . Finalmente, a Eq. (2.98) se apresenta, de acordo com a Eq. (2.99)

$$\mathcal{F} = -\frac{\mu'}{\mu^3} [\hat{q} \cdot (\hat{q}_C \times \vec{B}) (\vec{E} \cdot \hat{q}) - \hat{q} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) (\hat{q}_C \cdot \hat{q})], \quad (2.107)$$

onde $(\hat{q}_C)_{\beta} \doteq C^{\alpha}_{\beta} q_{\beta}$, de forma análoga ao que foi feito na Eq. (2.103) para as componentes do campo elétrico externo. Adicionalmente, como comentado anteriormente, estamos considerando que \hat{q} é o vetor unitário na direção e sentido do vetor \vec{q} , ou seja, $\hat{q} = \vec{q}/q$.

Particularizaremos ainda mais nosso modelo, considerando que o tensor permissividade elétrica é dependente apenas do módulo do campo elétrico resultante, o qual, conforme discutimos acima, é aproximado pelo campo elétrico externo, e que apenas as componentes diagonais do tensor acima mencionado são não-nulas. Logo, a Eq. (2.68) nos fornece

$$C^{\alpha}_{\beta} = \varepsilon^{\alpha}_{\beta} - (\varepsilon^{\alpha}_{\mu})' E^{\mu} E_{\beta}, \quad (2.108)$$

onde $(\varepsilon^\alpha_\mu)' \doteq (1/E) (\partial\varepsilon^\alpha_\mu/\partial E)$, semelhante a “operação linha” para a permissividade elétrica, dada pela Eq. (2.79). Estamos supondo que todas as componentes diagonais são distintas, em princípio.

Observe que com a hipótese acima, a Eq. (2.91) é uma equação quártica com coeficientes constantes. No intuito de simplificarmos o problema, suponha ainda que os campos externos, ou controláveis, em um sistema de coordenadas cartesianas, são

$$E^\mu \approx \tilde{E}^\mu \doteq (0, E, 0, 0), \quad (2.109)$$

$$B^\mu \approx \tilde{B}^\mu \doteq (0, 0, B, 0), \quad (2.110)$$

onde imporemos que as quantidades acima sejam funções bem comportadas das coordenadas espaço-temporais e possivelmente da frequência ω da perturbação propagante e sejam tais que não invalidem as aproximações feitas. Esses campos têm que ser soluções das Equações de Maxwell aplicadas a um dado meio material, como discutimos anteriormente. Considerando a Eq. (2.109) e as hipóteses anteriores para o tensor permissividade elétrica, é fácil perceber que C^α_β , dado pela Eq. (2.108), é apenas diagonal. Obviamente esse resultado independe do campo magnético externo. A hipótese deste último ter apenas componente y é conveniente para cálculos envolvendo produtos vetoriais e mistos, definido o campo elétrico acima. Ainda, apenas uma componente para esse campo seria outra hipótese simplificadora. Ainda, vemos que com a hipótese dada pela Eq. (2.109), apenas a primeira componente de C^α_β é distinta de ε^α_β . As outras são as demais componentes do tensor permissividade elétrica.

De agora em diante, a fim de evitarmos confusões com as componentes contravariantes de uma dada quantidade e potências dessa, convencionaremos que qualquer potência de um dado vetor sempre estará entre parênteses. Por exemplo, para o versor de onda, $(\hat{q}_1)^2 = \hat{q}_1 \hat{q}_1 = \hat{q}^1 \hat{q}^1$. Ainda \hat{q}^1 , refere-se à **componente** $\mu = 1$ do quadrivetor de onda contravariante $\hat{q}^\mu = (0, \hat{q})$. Assim, quando não houver potências (ou se estas forem ímpares, com a devida presença de parênteses), manteremos a notação **contravariante**, exceto quando explicitamente mencionado o contrário.

Com os C^α_β apenas diagonal e com a convenção adotada no parágrafo anterior, as Eqs. (2.100)–(2.102) podem ser escritas

$$\alpha = C^1_1 C^2_2 C^3_3, \quad (2.111)$$

$$\beta = \frac{1}{\mu} [C^1_1 (C^2_2 + C^3_3) (\hat{q}_1)^2 + C^2_2 (C^1_1 + C^3_3) (\hat{q}_2)^2 + C^3_3 (C^1_1 + C^2_2) (\hat{q}_3)^2], \quad (2.112)$$

$$\gamma = -\frac{1}{\mu^2} [C^1_1 (\hat{q}_1)^2 + C^2_2 (\hat{q}_2)^2 + C^3_3 (\hat{q}_3)^2]. \quad (2.113)$$

Pela escolha dada pela Eq. (2.109), temos que a única componente não-nula da Eq. (2.103) é aquela com $\beta = 1$. O mesmo segue para a Eq. (2.104), com $\gamma = 1$. Outra razão fundamental

para tal resultado é a suposição que fizemos do tensor permissividade elétrica do meio depender apenas do módulo do campo elétrico resultante e ser diagonal. Logo, para \mathcal{J} , temos

$$\mathcal{J} = \frac{\mu'}{\mu^2} \hat{q}^3 E B C^2_2 C^3_3. \quad (2.114)$$

Finalmente, considere a Eq. (2.107). Utilizando a Eq. (2.103), tal expressão é simplificada para

$$\mathcal{F} = -\frac{\mu'}{\mu^3} E B \hat{q}^3 \{(C^2_2 - C^3_3)[(\hat{q}_1)^2 + (\hat{q}_3)^2] - C^2_2\}. \quad (2.115)$$

Observamos da nossa definição de \hat{q}^μ que $\hat{q}^3 = \hat{q} \cdot \hat{z}$, sendo \hat{q} o vetor unitário na direção e sentido do vetor de propagação $\vec{q} \doteq \vec{k}$. Ainda na Eq. (2.115), utilizamos o fato que a norma quadrática de \hat{q} é a unidade, isto é,

$$(\hat{q}_1)^2 + (\hat{q}_2)^2 + (\hat{q}_3)^2 = 1. \quad (2.116)$$

Façamos algumas simplificações nas Eqs. (2.112) e (2.113), considerando-se a Eq. (2.116). Algumas simples manipulações algébricas nos fornecem

$$\beta = \frac{1}{\mu} [C^3_3 (C^1_1 - C^2_2) (\hat{q}_1)^2 + C^1_1 (C^3_3 - C^2_2) (\hat{q}_3)^2 + C^2_2 (C^1_1 + C^3_3)], \quad (2.117)$$

$$\gamma = -\frac{1}{\mu^2} [(C^1_1 - C^2_2) (\hat{q}_1)^2 + (C^3_3 - C^2_2) (\hat{q}_3)^2 + C^2_2]. \quad (2.118)$$

As demais equações para os coeficientes da equação quártica já estão em termos de \hat{q}_1 e \hat{q}_3 . Vamos supor adicionalmente que

$$C^2_2 = C^3_3. \quad (2.119)$$

Vemos das Eqs. (2.108) e (2.109), que a Eq. (2.119) é equivalente a considerarmos $\varepsilon^2_2 = \varepsilon^3_3$. Logo, podemos escrever o tensor permissividade elétrica para o meio em que estamos interessados como

$$\varepsilon^\alpha_\beta = \text{diag}(\varepsilon_{\parallel}(E), \varepsilon_{\perp}(E), \varepsilon_{\perp}(E)), \quad (2.120)$$

onde ε_{\parallel} e ε_{\perp} são as componentes do tensor permissividade elétrica em relação às direções paralela e perpendicular do campo elétrico externo, respectivamente. Assim, as componentes para o tensor C^α_β , de acordo com as Eqs. (2.108) e (2.120), podem ser escritas como

$$C^\alpha_\beta = \text{diag}(\varepsilon_{\parallel}(E) + (\varepsilon_{\parallel}(E))' E^2, \varepsilon_{\perp}(E), \varepsilon_{\perp}(E)). \quad (2.121)$$

2.7 Soluções da Equação de Fresnel Generalizada para Metamateriais Não-Lineares Uniaxiais

Consideramos a Eq. (2.119) porque estamos interessados em analisar um meio uniaxial (ver Refs. [3, 4, 7, 41, 47] para maiores detalhes). As soluções da Eq. (2.91), considerando-se as

Eqs. (2.106), (2.111), (2.114), (2.115), (2.117), (2.118) e (2.119), são apresentadas na forma

$$v_\phi = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu C^3_3}}, \quad (2.122)$$

$$v_\phi^\pm = \frac{\Gamma \pm \sqrt{\left(\frac{4C^1_1(C^3_3)^2[1-(\hat{q}_1)^2]}{\mu} + \frac{4C^3_3(C^1_1)^2(\hat{q}_1)^2}{\mu} + \Gamma^2\right)}}{2C^1_1 C^3_3}, \quad (2.123)$$

onde definimos

$$\Gamma \doteq -\frac{1}{\mu^2} C^3_3 \hat{q}^3 \mu' E B, \quad (2.124)$$

apenas por uma questão de comodidade.

Seja a Eq. (2.122). Essa solução é independente da direção e sentido do vetor de onda e portanto é isotrópica. Tal solução é dita ordinária. No entanto, essa solução muda com a variação do campo elétrico externo, sendo totalmente indiferente às variações do campo magnético externo. Isso ocorre basicamente devido à suposição de que os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética serem dependentes apenas do módulo do campo elétrico externo, do meio ser uniaxial e das relações constitutivas.

No entanto, as soluções expressas pela Eq. (2.123) dependem da direção e sentido do vetor de onda, bem como do campo magnético externo. Tais soluções são chamadas de extraordinárias. A dependência em termos do campo magnético externo apenas existe devido à relação constitutiva dada pela Eq. (2.23) e pela permeabilidade magnética ser dependente do campo elétrico externo. Observe que para esse caso, quando consideramos $(\hat{q}_2)^2 = (\hat{q}_3)^2 = 0$, temos que as soluções ordinária e extraordinárias são iguais. Em outras palavras, quando o vetor de onda é paralelo à direção do campo elétrico externo, há apenas uma solução para a velocidade de fase da onda que se propaga no meio de interesse. Esse resultado é típico de meios uniaxiais [3, 4, 7].

As soluções da Eq. (2.91), dadas pelas Eqs. (2.122) e (2.123), são relativamente simples porque consideramos muitas hipóteses simplificadoras. Por exemplo, se desconsiderássemos a Eq. (2.119), teríamos que a solução da Eq. (2.91) seria extremamente complexa. Nesse caso, não teríamos uma solução isotrópica (solução independente de direção e sentido do vetor de onda; discutiremos essa questão mais adiante), como a dada pela Eq. (2.122). Isso ocorre porque estaríamos considerando um meio biaxial (ver novamente as Refs. [3, 4, 7, 41, 47] para maiores detalhes), que em geral não apresenta tal solução.

O significado das soluções dados pelas Eqs. (2.122) e (2.123) é o seguinte. Suponha que os campos que configurem nos C^α_β sejam constantes, bem como os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética sejam homogêneos. Lançamos no meio em interesse uma dada onda eletromagnética monocromática de comprimento de onda muito inferior às dimensões desse meio em uma dada direção e sentido. Nessa direção e sentido, temos que devido às propriedades não-lineares do meio (compactadas por C^α_β), a onda se “divide” (em geral duas, mas como veremos

nesse trabalho, até mesmo em três ou não se divide). Assim, se a direção e sentido é \hat{q} para o vetor de onda, então seu vetor velocidade de fase é dado por $\vec{v}_\phi = v_\phi \hat{q}$, com v_ϕ dado pelas Eqs. (2.122) e (2.123). Vemos assim que na direção e sentido que escolhemos há soluções com v_ϕ positivos e negativos. Observe que para esse caso, o vetor de onda é constante [4, 48]. No caso mais geral, onde os campos externos dependem das coordenadas espaço-temporais, bem como os tensores dielétricos, o vetor de onda varia à medida que a onda se propaga [4, 48]. Observe ademais que as soluções extraordinárias dependem do conhecimento da direção e sentido do vetor de onda em cada ponto do meio. Assim, nesse caso geral, dada uma direção e sentido para a onda em algum ponto no espaço-tempo (o ponto espacial pertencendo ao meio material), a solução dada pela Eq. (2.123) em termos destes é válida apenas no entorno desse ponto no meio e para pequenos instantes de tempo.

As soluções negativas representam as velocidades na direção e sentido opostos àquela considerada inicialmente. Logo, para a direção e sentido escolhidas, as soluções que nos interessariam seriam aquelas positivas. No entanto, um cuidado deve ser tomado. O número máximo de soluções em uma dada direção e sentido não seria apenas dado pelo número de soluções positivas naquela direção e sentido. Teríamos que analisar a direção e sentido opostas àquela de interesse para verificarmos se há soluções negativas distintas das positivas na direção e sentido iniciais. As soluções distintas negativas nessa nova direção e sentido representam soluções ainda existentes na direção e sentido inicialmente consideradas. Se algumas das velocidades são iguais em uma dada direção e sentido, com os vetores polarização distintos (autovalores degenerados), a solução para a polarização é a soma vetorial das polarizações antes comentadas, que constitui apenas uma solução [4].

Para os trabalhos com meios isotrópicos (ver Ref. [8] e referências contidas nesse trabalho), temos que todas as soluções negativas em uma dada direção e sentido são iguais às soluções positivas na direção e sentido opostas, o que significa que não há mais soluções do que aquelas positivas em uma dada direção e sentido. Nesse caso, o número máximo de soluções é dois e o meio é dito birrefringente. Com cristais uniaxiais não-magnéticos (aqueles onde μ é isotrópico, constante e independente dos campos externos), o número máximo de soluções em uma dada direção e sentido é ainda dois, mas para configurações específicas, é possível eliminar Birrefringência com a presença de campos externos (ver Ref. [7] para maiores detalhes). Observe que para meios isotrópicos constantes, o número máximo de soluções é uma. No caso de cristais, esses já são naturalmente anisotrópicos, donde temos que a Birrefringência é verificada.

A presença de campos pode, para condições específicas, eliminar o efeito da Birrefringência. Seja a Eq. (2.123). Se impormos que $C^1_1 = C^3_3$ para um meio não-magnético, então teremos apenas uma solução independente para a velocidade de fase. Como comentamos, da Eq. (2.121), a igualdade acima é obtida por meio de um campo elétrico conveniente. As direções privilegi-

ados do meio poderiam assim ser canceladas por um campo elétrico em outra direção também privilegiada. Para um meio onde a permeabilidade magnética depende do módulo do campo externo, haverá apenas uma solução independente para a velocidade de fase se não houver um campo magnético externo. Na presença de um campo externo em um meio não-linear, teríamos ainda Birrefringência mesmo se a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética fossem isotrópicas, como novamente vemos das Eqs. (2.121) e (2.123). Isso ocorre porque para um meio não-linear, diferentemente de um meio linear, os campos externos (vetorialmente dizendo) também cooperam na interação com a onda eletromagnética.

Para um meio com os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética constantes, porém não-isotrópicos, sentidos opostos em uma dada direção jamais poderão exibir propriedades eletromagnéticas distintas. Isso é devido basicamente ao fato do tensor permissividade elétrica ser sempre simétrico. Para meios não-lineares, não é necessariamente verdadeiro que sentidos opostos para uma dada direção são equivalentes (ver Ref. [6] para um caso em que isso não ocorre e Ref. [8], para um caso em que sentidos opostos são sempre equivalentes).

Os coeficientes da Eq. (2.91) para o meio que estamos analisando exibem uma simetria particular. Das propriedades das soluções de uma equação polinomial de quarto grau a coeficientes reais, temos que quando invertemos os sinais globais dos coeficientes \mathcal{J} e \mathcal{F} (isto é, fazemos $\mathcal{J} \rightarrow -\mathcal{J}$, e o mesmo ocorrendo para \mathcal{F}), temos que a nova solução é aquela obtida trocando-se os sinais globais das suas soluções originais [49]. Suponha uma dada direção e sentido. Pode ser facilmente visto para o modelo que estamos interessados que apenas os coeficientes acima mencionados irão mudar de sinal quando invertermos a direção e sentido inicialmente escolhidas. Assim, o fato de todas as soluções mudarem de sinal quando invertemos o sentido de propagação em uma dada direção nos garante que em uma dada direção e sentido, o número máximo de soluções é igual àquelas com sinal positivo e diferentes. De forma análoga, no sentido contrário ao sentido inicialmente estabelecido em uma dada direção, esse número será dado pelas soluções negativas na direção e sentido inicialmente escolhidos para a análise.

Voltemos ao meio de interesse desse trabalho, um cristal uniaxial com a permissividade elétrica anisotrópica (dependente da frequência constante da onda monocromática que se propaga em tal meio e do módulo do campo elétrico externo) e a permeabilidade magnética isotrópica (dependente apenas do módulo do campo elétrico externo ou controlável). Suponha que todas as componentes do tensor permissividade elétrica e a permeabilidade magnética sejam reais e positivas. É isso que é considerado usualmente [3]. Estabeleça alguma direção e sentido de interesse. Da Eqs. (2.123) e (2.122) segue trivialmente que temos duas soluções positivas para essa direção e sentido. Assim, teremos no máximo o efeito da Birrefringência. No entanto, sentidos opostos para uma dada direção não serão equivalentes, de forma geral.

No caso de meios com permissividade elétrica e permeabilidade magnética **independentes**

dos campos externos, constantes e reais, a equação quártica sempre se reduz para uma quadrática no limite da Óptica Geométrica, conforme já comentamos. Para esse caso, não há troca de sinais nos coeficientes da equação quando a direção e sentido são invertidas. No entanto, como os sentidos opostos para uma dada direção são sempre equivalentes, ainda podemos garantir que as soluções independentes em uma direção e sentido serão todas aquelas positivas e distintas.

Um teste de consistência pode ser aplicado. No trabalho dado pela Ref. [7], foi considerado um meio não-magnético, mas com as mesmas propriedades para o tensor permissividade elétrica. Se considerarmos que $\mu' = 0$ na Eq. (2.123), deveríamos chegar na mesma expressão para as velocidades em uma dada direção e sentido que os autores acima. De fato, considerando tal hipótese, a Eq. (2.123) nos leva a

$$v_{\phi}^{\pm} = \pm \sqrt{\left(\frac{(C^1_1 - C^3_3) (\hat{q}_1)^2 + C^3_3}{\mu C^1_1 C^3_3} \right)}, \quad (2.125)$$

que é exatamente a expressão (31) no trabalho acima mencionado para a solução extraordinária da equação de Fresnel generalizada. Da equação acima, o efeito de não-Birrefringência é mantido quando impomos $C^1_1 = C^3_3$ [7]. Observe que a restrição para obtermos a Eq. (2.125) não é apenas impondo que a permeabilidade magnética seja constante. Se supusermos que não há um campo magnético externo presente, a expressão acima é aproximadamente verdadeira (ainda haveria o campo magnético da onda eletromagnética). Isso significa que mesmo se o meio tiver uma permissividade elétrica dependente do campo elétrico externo, esse fator não é acionado sem a presença do campo magnético externo. Logo, teríamos também o efeito da não-Birrefringência apenas impondo $C^1_1 = C^3_3$ e eliminando o campo magnético externo.

A equação geral para a não-Birrefringência, obtida da imposição que as Eqs. (2.122) e (2.123) são iguais, é

$$[1 - (\hat{q}_1)^2] \frac{1}{\sqrt{\mu C^3_3}} [C^1_1 - C^3_3] = \mp \frac{d\mu}{dE} \frac{B \hat{q}^3}{\mu^2}, \quad (2.126)$$

onde devemos procurar por soluções válidas para ambos os sinais simultaneamente (os sinais seriam irrelevantes apenas quando $\mu' = 0$). No entanto, a equação acima não pode ser resolvida para todas as direções e sentidos em relação a um dado ponto, de forma geral. Soluções particulares dessa equação já foram comentadas no parágrafo acima. Logo, poderíamos em princípio excluir o fenômeno da Birrefringência apenas para algumas direções e sentidos, se condições específicas são impostas.

A Eq. (2.91), de forma geral, não pode ser reduzida em uma equação quadrática. Como consequência, novamente de forma geral, isso quebra a equivalência de propagação de ondas em sentidos opostos para uma dada direção. De acordo com a Eq. (2.123), para o modelo que estamos analisando, essa quebra é uma consequência conjunta da existência de um campo

magnético, do meio apresentar uma permeabilidade magnética que depende do campo elétrico externo e das relações constitutivas. É esse **conjunto** de fatos que gera a assimetria em sentidos opostos para uma dada direção. Apenas no escopo da eletrodinâmica, não temos elementos para afirmar quem, em termos de primeiros princípios, gera a assimetria. Para tentarmos responder a origem da assimetria, teríamos que estudar a origem de um meio ser linear ou não e das relações constitutivas. Não faremos tal estudo nesse trabalho.

Uma observação importante se faz necessária. Pela simetria das Equações de Maxwell, se tivéssemos suposto que $\varepsilon^\alpha_\beta = h^\alpha_\beta \varepsilon(B)$ e $\mu^\alpha_\beta = \mu^\alpha_\beta(B)$, chegaríamos essencialmente nos mesmos resultados qualitativos, com apenas algumas modificações nas expressões. Logo, trabalhando com o modelo estabelecido inicialmente, estamos analisando efetivamente dois casos em princípio distintos. Isso ocorre devido à forma como escrevemos as relações constitutivas, privilegiando a permissividade elétrica em relação ao campo elétrico e da mesma forma a permissividade elétrica em relação ao campo magnético.

2.8 Não-Ocorrência de Trirrefringência em Cristais Lineares

Nessa seção, consideraremos que as componentes do tensor permissividade elétrica são constantes (positivas) e reais. Wood mostrou algum tempo atrás [17], que o efeito da Trirrefringência não pode ocorrer em cristais lineares (aqueles em que as componentes do tensor permissividade elétrica e permeabilidade magnética são constantes e reais), não importa o “quão anisotrópicos” eles sejam. Conforme nos ensina [3, 4], quando a permissividade elétrica é real, é possível sempre encontrar um sistema de coordenadas onde tal tensor é diagonal. Logo, nesse sistema de coordenadas, assumamos que as componentes do tensor permissividade elétrica são representadas por C^i_i , $i = 1, 2, 3$ (emprestamos a linguagem anterior com o caso mais geral). Suponha que a permeabilidade magnética nesse sistema de coordenadas seja isotrópica e constante e igual a μ_0 (um caso particular do trabalho de Wood). Pode ser demonstrado sem dificuldades que as soluções para a equação de Fresnel generalizada nesse caso são

$$v_\phi = \pm \sqrt{\frac{1}{2\mu_0} \left(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - \frac{4\zeta}{C^1_1 C^2_2 C^3_3}} \right)}, \quad (2.127)$$

onde definimos

$$\xi \doteq \frac{1 - (\hat{q}_1)^2}{C^1_1} + \frac{1 - (\hat{q}_2)^2}{C^2_2} + \frac{1 - (\hat{q}_3)^2}{C^3_3}, \quad (2.128)$$

$$\zeta \doteq C^1_1 (\hat{q}_1)^2 + C^2_2 (\hat{q}_2)^2 + C^3_3 (\hat{q}_3)^2. \quad (2.129)$$

Observe que as Eq. (2.127), as soluções para um cristal biaxial, são tais que não há assimetria em sentidos opostos para uma dada direção de propagação, em acordo com o comentário geral feito nos parágrafos acima. Não há solução ordinária, de forma geral. Os campos externos não configuram nessas soluções e suas presenças seriam irrelevantes para o meio de interesse. No máximo podem haver duas soluções para cada direção e sentido, ou Birrefringência.

2.9 Trirrefringência e Metamateriais Não-Lineares Indefinidos

Com o advento dos chamados metamateriais, ou materiais artificiais que exibem propriedades controláveis, a questão da Trirrefringência poderá ganhar outra luz. Veselago [20], mostrou os efeitos não-usuais que um meio quase transparente com uma permissividade elétrica e uma permeabilidade magnética isotrópicas negativas (para alguma faixa de frequências conveniente) podem exibir. Citamos por exemplo, o efeito chamado índice de refração negativo, envolvendo o fenômeno da refração (para uma revisão didática desses assuntos, ver Ref. [23]). Com o avanço da tecnologia de se construir metamateriais, Pendry [26], Smith *et al.* [25], Shelby *et al.* [27] e depois muitos outros mostraram experimentalmente a existência dos efeitos preditos por Veselago. Atualmente, novos efeitos estão sendo descobertos [32], causando um grande interesse nessa nova área de pesquisa [28].

O trabalho de Wood e Mills [17] é apenas válido no contexto de meios lineares. Nessa seção nos empenharemos na questão da análise do efeito da Trirrefringência em meios não-lineares. Nessa seção, suporemos que todas as hipóteses que culminaram nas Eqs. (2.122) e (2.123) são válidas.¹⁴ Mostramos que quando as quantidades C^{α}_{β} são todas positivas, então o meio estudado nesse trabalho apenas pode exibir Birrefringência. Assuma, agora, que algumas das quantidades comentadas acima possam ser negativas (para qualquer valor de interesse do campos externos). Não nos questionaremos em relação aos detalhes para se realizar tal suposição experimentalmente, mas apenas assumimos que isto ocorra para alguma faixa de frequências conveniente. Suporemos simplesmente que isto é o caso para um dado metamaterial não-linear indefinido e que este satisfaça todas as exigências anteriores.

A hipótese de que ambas permissividade elétrica e permeabilidade magnética precisam ser negativas para que a velocidade de fase de perturbações seja real é apenas um requisito necessário para metamateriais lineares isotrópicos; para meios mais gerais, isso não será necessariamente o caso, como nossa análise nos mostrará.

¹⁴Certamente são as Equações de Maxwell quem descrevem metamateriais em geral, porque esses são apenas meios dispersivos.

Para o caso de um metamaterial não-linear indefinido descrito em termos das quantidades C^{α}_{β} , dadas pela Eq. (2.121), temos que a Eq. (2.123) poderia apresentar duas soluções positivas (e reais) para algumas direções e sentidos, impossível no caso onde $C^{\alpha}_{\beta} > 0$. Outra velocidade de fase seria advinda da solução ordinária, se esta é real. Um raciocínio análogo pode ser apresentado quando ambas as soluções extraordinárias são negativas. Logo, em princípio, para uma dada direção e sentido, poderíamos ter três soluções distintas, restando apenas uma solução na direção e sentido opostas. Esse seria o efeito da Trirrefringência, que como uma análise simples mostra para o meio de interesse desse trabalho, apenas pode ocorrer em metamateriais não-lineares indefinidos. Para obtermos tais materiais, condições muito específicas têm que ser obtidas [23]. Isso poderia explicar o fato de encontrarmos a vasta maioria dos materiais exibindo permissividade elétrica e permeabilidade magnética positivas. Isso também explicaria porque o efeito da Trirrefringência não ter sido observado em cristais usuais.

Observe que o efeito da Trirrefringência em uma dada direção e sentido tem que criar uma assimetria de propagação de ondas em sentidos opostos para uma dada direção. A recíproca não é verdadeira. Comentamos anteriormente que essa assimetria está relacionada com correções em segunda ordem para a permeabilidade magnética e a presença de campos externos para os meios que nos são de interesse. Como vemos, não é suficiente que os meios sejam não-lineares e hajam campos externos presentes para que tal efeito ocorra, mas é necessário. Logo, o efeito da Trirrefringência seria um efeito propiciado por correções de segunda ordem. Assim, esse efeito sempre viria acompanhado de efeitos de primeira ordem, como a Birrefringência e a Unirrefringência (apenas uma velocidade em uma dada direção e sentido), dito de forma geral.

No que se segue, analisemos as características do efeito da Trirrefringência em algum metamaterial não-linear indefinido e referencial comóvel com o laboratório onde são estabelecidos os campos, tais que nos conduza às Eqs. (2.122) e (2.123). Considere uma dada onda monocromática de comprimento de onda inferior às dimensões desse meio (porém muito superior aos seus elementos constituintes) possa ser estabelecida inicialmente em uma dada direção e sentido no metamaterial não-linear de interesse em relação a algum sistema de coordenadas com origem em algum ponto conveniente do meio. Suponha que o vetor de onda esteja restrito ao plano xz desse sistema de coordenadas, sendo o eixo x o mesmo do campo elétrico externo e o eixo y um eixo paralelo ao campo magnético externo.¹⁵ Logo, suponha que o vetor de onda da onda eletromagnética sempre é perpendicular ao campo magnético externo. Isso é apenas outra hipótese simplificadora. Assim, teremos que $\hat{q}^2 = 0$. Suponha que C^{α}_{β} sejam dados (para

¹⁵Essa seria uma condição inicial matemática. Na realidade, conforme comentamos anteriormente, para um meio geral, as Eqs. (2.122) e (2.123) são apenas válidas para uma pequena região do espaço-tempo em torno de algum ponto P (origem do nosso sistema de coordenadas). Seria apenas para essa pequena região do espaço-tempo que o vetor de onda pode ser considerado como constante, de forma geral. Voltaremos a essa questão no Apêndice A, quando analisarmos as chamadas “Métricas ópticas”.

algum campo elétrico muito maior que aquele da onda e frequência convenientes) e sejam tais que $C^1_1 < 0$, $C^2_2 = C^3_3 > 0$. Suponha que $\mu = \mu(E)$ seja também especificado.

Defina θ como o ângulo entre o versor de onda e o eixo z , sendo portanto $\hat{q}^1 = \sin \theta$ e $\hat{q}^3 = \cos \theta$. Para descrever todo o plano, $0 \leq \theta < 2\pi$. No caso geral, os ângulos de um sistema de coordenadas esféricas poderiam ser utilizados para descrever \hat{q}^i , $i = 1, 2, 3$. A escolha mais natural teria sido definir o ângulo com relação à direção do campo elétrico. No entanto, como veremos, a hipótese descrita anteriormente será mais conveniente. Observe que de forma geral, a solução dada pela Eq. (2.123) é invariante pela mudança $\theta \rightarrow -\theta$. Logo, vemos que o eixo x é um eixo de simetria. Assim, precisamos nos preocupar apenas em descrever as velocidades para $0 \leq \theta \leq \pi$. Outra consideração: comentamos anteriormente que o meio que estamos analisando exibe outra simetria em termos de propagação de ondas em sentidos opostos para uma dada direção. Isso nos permitiria resumir nossa análise das velocidades apenas para o primeiro quadrante do plano xz .

Seja a Eq. (2.123). Imporemos sobre essa equação as condições

$$4 C^1_1 (C^3_3)^2 (\hat{q}_3)^2 + 4 C^3_3 (C^1_1)^2 (\hat{q}_1)^2 + \mu \Gamma^2 > 0 \quad (2.130)$$

$$\frac{4 C^1_1 (C^3_3)^2 (\hat{q}_3)^2}{\mu} + \frac{4 C^3_3 (C^1_1)^2 (\hat{q}_1)^2}{\mu} + \Gamma^2 < \Gamma^2, \quad (2.131)$$

onde consideramos a Eq. (2.116), juntamente com a nossa hipótese de que o vetor de onda está restrito ao plano xz . As imposições acima nos forneceriam as regiões em que a Trirrefringência ocorreria. A Eq. (2.130) nos garante que as velocidades são reais. A Eq. (2.131) nos garante que no primeiro quadrante, todas as soluções são positivas. Como discutimos anteriormente, apenas esse quadrante nos interessa fisicamente. Da Eq. (2.131), como $C^1_1 < 0$, segue que

$$\tan^2 \theta < \frac{C^3_3}{|C^1_1|}. \quad (2.132)$$

A condição dada pela Eq. (2.132) obviamente não é suficiente para garantirmos a Trirrefringência, mas necessária para que essa ocorra.

Da Eq. (2.130), após algumas manipulações, temos

$$\tan^2 \theta > \frac{C^3_3}{|C^1_1|} \left[1 - \frac{(\mu' E B)^2}{4 \mu^3 |C^1_1|} \right]. \quad (2.133)$$

A condição dada pela Eq. (2.133) é a mais importante, porque ela é aquela que garante a realidade das soluções da equação de Fresnel generalizada. A Eq. (2.132) é apenas uma condição para verificarmos um efeito específico.

Algumas palavras sobre as soluções físicas. Seja o nosso meio de interesse. Sejam as soluções para um dado \hat{q} . As soluções para $-\hat{q}$ são o negativo das soluções para \hat{q} , como comentamos anteriormente. Isso nos permitiu concluir que as soluções em uma dada direção e sentido

são apenas aquelas positivas nessa direção e sentido. Assim, vemos que a solução ordinária, dada pela Eq. (2.122), nos fornece uma mesma solução para qualquer ângulo. Se em uma dada direção e sentido, a Eq. (2.123) nos fornece duas soluções positivas, isso significa que na direção e sentido opostos não existem soluções extraordinárias e na direção e sentido originais há em geral três soluções distintas¹⁶. Da Eq. (2.133), observe que se o termo em colchetes for negativo, a desigualdade é óbvia para qualquer ângulo. Logo, para esse caso, a condição necessária e suficiente para termos Trirrefringência é que a Eq. (2.132) seja satisfeita. Quando o termo em colchetes da Eq. (2.133) não for negativo, apenas uma análise mais cuidadosa revelará a região no plano xz em que teremos o efeito acima mencionado.

Das Eqs. (2.122) e (2.123), as soluções ordinária e extraordinárias são idênticas na direção do campo elétrico externo. Assim, essa seria uma característica dos meios uniaxiais. Essa será a única direção de igualdade se

$$\frac{(\mu' E B)^2}{\mu^3} > \frac{[C^1_1 - C^3_3]^2}{C^3_3}. \quad (2.134)$$

Observe que se imposições anteriores são feitas [em relação aos termos da Eq. (2.133)], não podemos simplesmente impor a Eq. (2.134), mas verificar sua consistência com tais imposições anteriores. Nada comentamos ou assumimos se a solução ordinária é maior ou menor (numericamente) que as extraordinárias. Não nos preocuparemos com esse detalhe. Pode ser verificado que quando $C^1_1 < 0$ e $C^3_3 > 0$, sempre ocorrerá

$$\frac{[|C^1_1| + C^3_3]^2}{C^3_3} \geq 4|C^1_1|. \quad (2.135)$$

Considere o caso em que o termo entre colchetes da Eq. (2.133) é menor que zero. Da Eq. (2.135), podemos ver que é sempre possível estabelecermos o caso em que as soluções ordinária e extraordinárias são distintas. Para o caso em que o termo entre parênteses da Eq. (2.133) está entre zero e um, pode ser mostrado que é impossível impor a Eq. (2.134).

Suponhamos o caso em que todas as soluções da equação de Fresnel generalizada são distintas, exceto na direção do campo elétrico externo. Uma análise revelará que para

$$0 \leq \theta < \arctan \left(\sqrt{\frac{C^3_3}{|C^1_1|}} \right), \quad (2.136)$$

teremos Trirrefringência. Para

$$\arctan \left(\sqrt{\frac{C^3_3}{|C^1_1|}} \right) \leq \theta < \pi - \arctan \left(\sqrt{\frac{C^3_3}{|C^1_1|}} \right), \quad (2.137)$$

¹⁶Eventualmente, para alguma direção e sentido, uma das soluções extraordinárias pode coincidir com a solução isotrópica ordinária. Nesse caso, teríamos apenas duas soluções positivas naquela direção e sentido. Esse caso é obviamente um caso particular e de forma geral isso seguramente não ocorre.

teremos Birrefringência. Finalmente, para

$$\pi - \arctan \left(\sqrt{\frac{C_3^3}{|C_1^1|}} \right) \leq \theta \leq \pi, \quad (2.138)$$

teremos Unirrefringência.

Representações gráficas das velocidades de fase para algum ponto de interesse do meio material uniaxial podem ser construídas. Essas são um esboço polar das velocidade de fase, assumidas funções do versor de propagação, limitado inicialmente a um dado plano. Cada direção e sentido são caracterizadas por uma reta com coeficiente angular constante, que se inicia na origem do sistema de coordenadas. As velocidades são curvas nessa representação e seus módulos em uma dada direção e sentido são as distâncias de dados pontos dessas curvas à origem. Iremos supor que o plano inicial em que a onda está limitada é o plano xz no ponto P genérico de interesse, origem do sistema de referência adotado para a representação pictórica. Escolheremos que ângulo polar que localiza pontos nesse plano é com relação ao eixo z . Para o presente caso em discussão, as curvas para as velocidades de fase serão uma circunferência e uma cardioide sobrepostas, que se encontrariam apenas no ângulo $\theta = \pi/2$. Para o semiplano $x < 0$, a simetria de reflexão em torno do eixo z pode ser utilizada. A representação pictórica do caso em discussão pode ser encontrada na Fig. (2.1) para uma escolha particular das quantidades que cooperam para as velocidades de propagação das possíveis ondas no meio. Para o caso em que a Eq. (2.134) não é válida, segue que há outros ângulos, além daqueles que definem o eixo óptico, onde as soluções ordinária e uma das extraordinárias são iguais. Estamos supondo que o termo entre colchetes da Eq. (2.133) é negativo. A representação gráfica deste caso pode ser encontrada na Fig. (2.2) no caso de uma dada escolha para os coeficientes dielétricos, derivadas destes e campos externos. De forma geral, para que o efeito da Trirrefringência ocorra, temos que impor que as Eqs. (2.132) e (2.133) sejam satisfeitas simultaneamente. É simples de ser visto dessas equações que quando o termo em colchetes da Eq. (2.133) é maior ou igual à um, não existe região em que haja Trirrefringência e as soluções sejam reais. No contexto das condições que impomos, não precisamos nos preocupar com esse caso, porque ele nunca ocorrerá.

Por fim, falta-nos analisar a implicação do termo em colchetes da Eq. (2.133) estar entre zero e um (incluindo ambos extremos). Esse é um caso realmente interessante, porque se acreditamos que a derivada com relação ao campo elétrico externo da permeabilidade magnética representa uma correção de segunda ordem para as soluções, então esse caso estaria contemplado nessa análise, na presença de campos controláveis intensos (quando comparados com os campos da onda). Das Eqs. (2.132) e (2.133), segue trivialmente

$$\frac{C_3^3}{|C_1^1|} \left[1 - \frac{(\mu' E B)^2}{4 \mu^3 |C_1^1|} \right] < \tan^2 \theta < \frac{C_3^3}{|C_1^1|}. \quad (2.139)$$

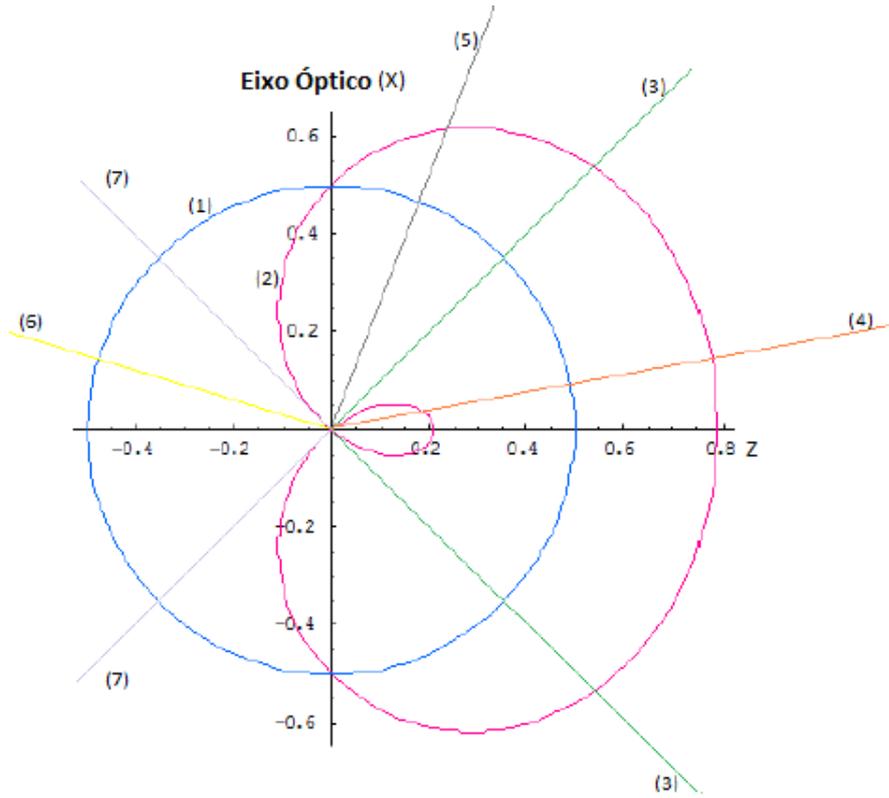


Figura 2.1: (cores e números) Modelo numérico desenvolvido para o caso que o termo em colchetes da Eq. (2.133) é negativo, a Eq. (2.134) é válida e o vetor de onda é limitado ao plano xz . A velocidade ordinária está representada em azul (1), enquanto que as soluções extraordinárias são exibidas em rosa (2). As linhas em verde (3) delimitam a região que exibe o efeito da Trirrefringência. A linha em laranja (4) representa uma direção e sentido que exibe esse efeito. As retas em verde (3) e roxo (7) delimitam regiões que exibem Birrefringência. A linha em cinza (5) representa uma direção e sentido que apresenta esse efeito óptico. Ângulos entre as retas em roxo (7) definem a região que exibe Unirrefringência. A linha em amarelo (6) representa uma direção e sentido onde esse efeito ocorre. Como mostraremos no próximo Capítulo, escolhida uma direção e sentido qualquer nesse plano para a propagação de uma onda, essa não é da direção e sentido de propagação de uma das soluções físicas extraordinárias (propagação dos raios extraordinários), de forma geral. Isso é um fato para soluções extraordinárias. A propagação física estará na mesma direção e sentido do vetor de onda apenas para o caso ordinário. A figura acima exibe o perfil dos possíveis índices de refração para cada direção e sentido em relação a um dado ponto P no meio material (origem do sistema de coordenadas), associados com as velocidades de fase [4]. Nessa figura, temos que todas as possíveis intersecções de uma reta em uma direção e sentido representam as velocidades de fase distintas naquela direção e sentido. Os valores numéricos utilizados para esse caso foram $C^1_1 = -3$, $C^3_3 = 2$, $\mu(E) = 2$ e $\mu' EB = 12$.

Exporemos com mais detalhes os resultados desse caso. Uma investigação simples revela que é impossível termos a igualdade das soluções ordinária e extraordinárias apenas na direção do

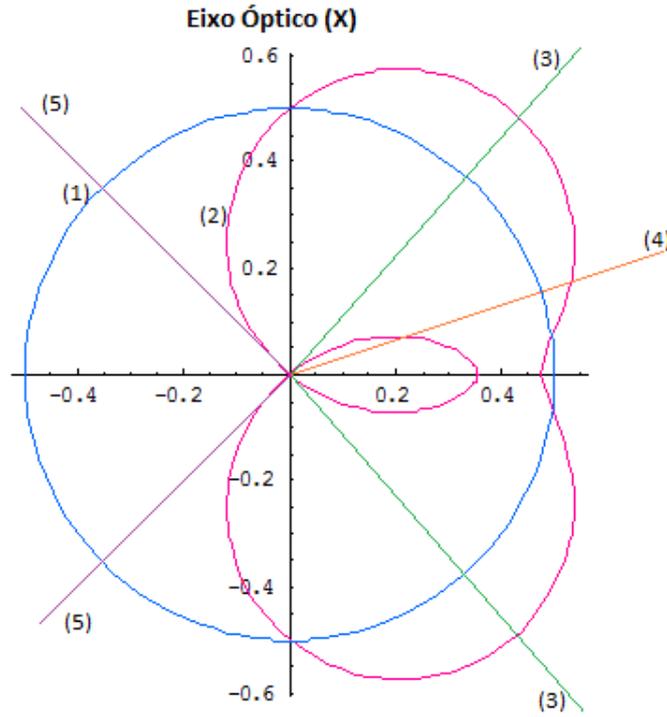


Figura 2.2: (cores e números) Modelo numérico desenvolvido para o caso onde o termo em colchetes da Eq. (2.133) é negativo, a Eq. (2.134) não é válida e o vetor de onda é limitado ao plano xz . A velocidade ordinária está representada em azul (1), enquanto que as soluções extraordinárias são exibidas em rosa (2). Ângulos no interior da região delimitada pelas retas em verde (3) apresentam o efeito da Trirrefringência. A linha em laranja (4) representa uma direção e sentido que exhibe esse efeito. As linhas em verde (3) e roxo (5) delimitam regiões que apresentam apenas Birrefringência. A região delimitada pelas retas em roxo (5) apresentam apenas Unirrefringência. Os valores numéricos utilizados nesse modelo foram $C^1_1 = -3$, $C^3_3 = 2$, $\mu(E) = 2$ e $\mu' EB = 99/10$.

campo externo. Pode ser mostrado que o ângulo onde a igualdade ocorre é sempre maior que o mínimo expresso pela Eq. (2.133). Salvo o detalhe da igualdade entre as soluções ordinária e extraordinárias além da direção do campo elétrico externo, uma análise geral ainda poderia ser inferida. Para

$$0 \leq \theta < \arctan \left(\sqrt{\frac{C^3_3}{|C^1_1|} \left[1 - \frac{(\mu' EB)^2}{4\mu^3 |C^1_1|} \right]} \right), \quad (2.140)$$

teremos apenas Unirrefringência. Para

$$\arctan \left(\sqrt{\frac{C^3_3}{|C^1_1|} \left[1 - \frac{(\mu' EB)^2}{4\mu^3 |C^1_1|} \right]} \right) < \theta < \arctan \left(\sqrt{\frac{C^3_3}{|C^1_1|}} \right), \quad (2.141)$$

teremos Trirrefringência. Para

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{C_3^3}{|C_1^1|}}\right) \leq \theta \leq \pi - \arctan\left(\sqrt{\frac{C_3^3}{|C_1^1|}}\right), \quad (2.142)$$

temos Birrefringência. Finalmente, para

$$\pi - \arctan\left(\sqrt{\frac{C_3^3}{|C_1^1|}}\right) < \theta \leq \pi, \quad (2.143)$$

temos Unirrefringência. Conforme salientamos anteriormente, para algum ângulo entre aquele do limite superior da desigualdade dada pela Eq. (2.140) e o eixo óptico, uma das soluções extraordinárias coincide com a ordinária.

Para o único ângulo não mencionado na análise acima, teremos Birrefringência. A terceira solução é nula. Não esboçamos a solução para o semiplano $x < 0$, devido à simetria em relação ao eixo z acima mencionada. A representação pictórica desse caso encontra-se na Fig. (2.3) para uma particular escolha das quantidades relevantes à propagação de ondas.

O caso em que o termo entre colchetes da Eq. (2.133) está entre zero e um [incluídos] é um caso peculiar. Vemos que há regiões em que não há soluções extraordinárias, regiões onde cada uma delas tende para zero e regiões onde “surtem” soluções extraordinárias. Isso mostra de forma geral a assimetria das velocidades de propagação em sentidos opostos para algumas direções, salvo as exceções das regiões que apresentam Unirrefringência.

Enfatizamos que esse cenário apenas ocorre se tivermos um campo magnético externo, bem como o metamaterial ser não-linear na permeabilidade magnética e dependente apenas do campo elétrico externo¹⁷ (sendo sempre positiva para qualquer valor do campo elétrico externo). Se não houver um campo magnético externo (ou no limite quando esse tende a zero), não teríamos assimetria na propagação ao longo do eixo z ; logo, não haverá região em que ocorrerá Trirrefringência. Haverá apenas Birrefringência e Unirrefringência. A representação pictórica (onde $B = 0$) pode também ser facilmente inferida. Todos os comentários são válidos se supormos agora que a permeabilidade magnética não depende do campo elétrico externo (ou tem uma variação muito pequena devido ao campo, quando comparada com a permeabilidade magnética do meio sem essa quantidade). Quando o termo entre colchetes tende a zero, dado por um particular valor de algum dos campos externos, temos que a região onde as soluções da Eq. (2.123) são reais tende para todo o plano de interesse, xz , exceto a direção perpendicular ao campo elétrico, onde não há solução real.

¹⁷A dependência no campo elétrico externo para os coeficientes do tensor permissividade elétrica poderia ser importante para estabelecermos algumas desigualdades para o termo entre colchetes da Eq. (2.133) (que também poderia ser feito com o campo magnético externo).

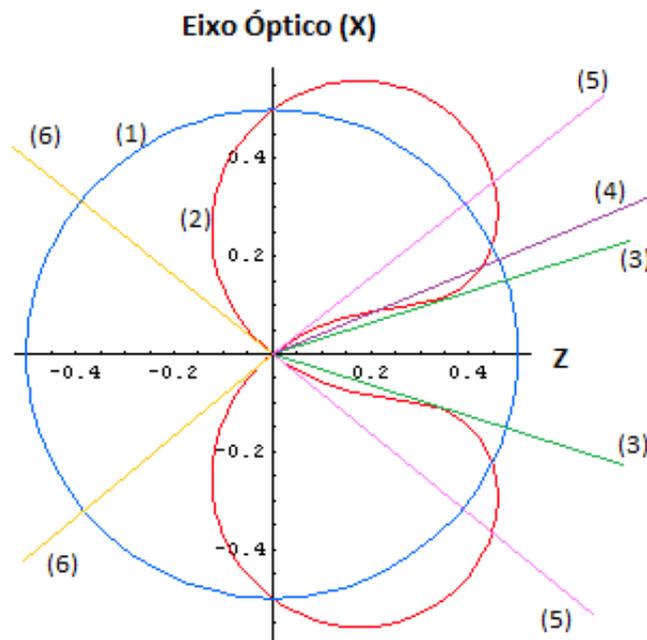


Figura 2.3: (cores e números) Modelo numérico desenvolvido para o caso que o termo em colchetes da Eq. (2.133) está entre zero e um e o vetor de onda é limitado ao plano xz . Pode ser mostrado analiticamente que é impossível nesse caso termos a igualdade entre as velocidades de fase ordinária e extraordinárias apenas na direção do eixo óptico. A velocidade ordinária está representada em azul (1), enquanto que as soluções extraordinárias estão exibidas em vermelho (2). As linhas em verde (3) representam os ângulos limites entre os quais as soluções extraordinárias são imaginárias. Portanto, essa região apresenta apenas Unirrefringência. A linha em roxo (4) representa uma dada direção e sentido em que há três velocidades de fase distintas, caracterizando o efeito da Trirrefringência. Esse efeito estará presente em qualquer ângulo delimitado pelas retas em verde (3) e rosa (5). Ângulos delimitados pelas retas em rosa (5) e amarelo (6) apenas exibem o efeito da Birrefringência. As retas em amarelo (6) define outra região que novamente exhibe o efeito óptico da Unirrefringência. Os valores numéricos escolhidos para esse modelo foram $C^1_1 = -3$, $C^3_3 = 2$, $\mu(E) = 2$ e $\mu' EB = \sqrt{80}$.

Notamos assim que sempre será possível, supondo que o metamaterial seja aquele que estamos descrevendo nessa seção, manipular os campos externos de tal forma a termos pequenas regiões em que existe Trirrefringência e pequenas regiões em que não há soluções extraordinárias.

Para os cálculos acima, não foi feita nenhuma restrição para o valor máximo das velocidades de fase. Não fizemos menção à valores absolutos das grandezas envolvidas, mas desigualdades que elas deveriam satisfazer para que dados efeitos ocorressem. Poderíamos restringir o meio físico para que efeitos estejam presentes, bem como tais velocidades sejam não-superluminais. No entanto, para metamateriais lineares, a velocidade física seria a de grupo [29]. No en-

tanto, para metamateriais não-lineares, é necessário ainda proceder investigações nesse sentido. Faremos alguns comentários sobre a velocidade de grupo no próximo capítulo.

2.10 Metamaterial Não-Linear Indefinido Unirrefringente e Birrefringente

O fenômeno da Unirrefringência já ocorreu anteriormente, no momento em que estávamos considerando a Trirrefringência. Nesse caso, o efeito era devido à solução ordinária da equação de Fresnel generalizada, exclusivamente, para regiões do plano xz opostas àquelas que apresentavam duas soluções extraordinárias. Seria interessante eliminar a presença dessa solução em um metamaterial não-linear indefinido, para analisarmos as características que o meio em interesse apresentaria apenas com as soluções extraordinárias. Observe que para eliminarmos a solução ordinária, precisaremos necessariamente modificar as propriedades do meio de interesse. Considere as mesmas hipóteses feitas anteriormente sobre a dependência dos tensores dielétricos com os campos externos, a decomposição desses num sistema de coordenadas cartesianas e a propagação das ondas estar restrita ao plano xz . Suponha que $C^3_3 < 0$ e $C^1_1 > 0$. Suporemos ainda que

$$\frac{4 C^1_1 (C^3_3)^2 (\hat{q}_3)^2}{\mu} - \frac{4 |C^3_3| (C^1_1)^2 (\hat{q}_1)^2}{\mu} + \Gamma^2 > 0, \quad (2.144)$$

$$\frac{4 C^1_1 (C^3_3)^2 (\hat{q}_3)^2}{\mu} - \frac{4 |C^3_3| (C^1_1)^2 (\hat{q}_1)^2}{\mu} + \Gamma^2 \geq \Gamma^2. \quad (2.145)$$

No que se segue, estaremos interessados em analisar as desigualdades acima.

Observe que as Eqs. (2.144) e (2.145) são relações que gostaríamos que o argumento da raiz da Eq. (2.123) satisfizesse. Obviamente, isso apenas ocorrerá para algumas regiões do plano xz . Se tivéssemos interessados apenas no efeito da Unirrefringência, a Eq. (2.145) já seria suficiente. No entanto para uma análise mais detalhada, a Eq. (2.144) também é importante.

Da Eq. (2.144), segue trivialmente que

$$\tan^2 \theta < \frac{|C^3_3|}{C^1_1} \left[1 + \frac{(\mu' E B)^2}{4 \mu^3 C^1_1} \right]. \quad (2.146)$$

O lado direito da Eq. (2.146) é sempre positivo, porque ainda estamos supondo que $\mu > 0$. Nesse caso, não teremos subcasos para analisar, como ocorreu no estudo da Trirrefringência.

Da Eq. (2.145), somos levados para

$$\tan^2 \theta \leq \frac{|C^3_3|}{C^1_1}. \quad (2.147)$$

Vemos claramente das Eqs. (2.146) e (2.147) que o intervalo em que as soluções são reais é maior que aquele em que há Unirrefringência. Assim, segue que é impossível que o metamaterial não-linear indefinido de interesse exiba apenas um fenômeno. Haverá nesse meio regiões

que apresentam Unirrefringência, Birrefringência e regiões opacas para a propagação de ondas eletromagnéticas. A opacidade é devido à modificação que tivemos que proceder no meio para que ele não apresentasse solução ordinária real. Observe que assim obteremos um meio material quase transparente que apresenta regiões intrinsecamente opacas. Isso é naturalmente devido ao fato que algumas das componentes dos tensores dielétricos são negativos.

Das Eqs. (2.146) e (2.147), segue trivialmente que a região em que apenas haverá Unirrefringência será dada pela Eq. (2.147). Uma análise mais cuidadosa, considerando-se as Eqs. (2.123), (2.146) e (2.147), nos levará que para

$$0 \leq \theta \leq \arctan \left(\sqrt{\frac{|C^3_3|}{C^1_1}} \right), \quad (2.148)$$

teremos Unirrefringência. Para

$$\arctan \left(\sqrt{\frac{|C^3_3|}{C^1_1}} \right) < \theta < \arctan \left(\sqrt{\frac{|C^3_3|}{C^1_1} \left[1 + \frac{(\mu' E B)^2}{4 \mu^3 C^1_1} \right]} \right), \quad (2.149)$$

teremos Birrefringência. Logo, essa região exibirá o efeito da Propagação em apenas um sentido. Quando θ for igual ao limite superior da equação acima, teremos Unirrefringência. Para

$$\arctan \left(\sqrt{\frac{|C^3_3|}{C^1_1} \left[1 + \frac{(\mu' E B)^2}{4 \mu^3 C^1_1} \right]} \right) < \theta \leq \pi - \arctan \left(\sqrt{\frac{|C^3_3|}{C^1_1}} \right), \quad (2.150)$$

não teremos solução real da Equação de Fresnel generalizada. Isso significa que nessa região (e na sua região simétrica), o meio será opaco. Finalmente, para

$$\pi - \arctan \left(\sqrt{\frac{|C^3_3|}{C^1_1}} \right) < \theta \leq \pi, \quad (2.151)$$

teremos novamente Unirrefringência. Para o resto do plano, a simetria dos semiplanos $x > 0$ e $x < 0$ pode ser utilizada. A representação pictórica do caso de interesse encontra-se na Fig. (2.4) para uma escolha particular das quantidades envolvidas nas desigualdades acima.

Fato relevante do modelo analisado nessa seção, conforme já comentamos anteriormente, é que há regiões intrinsecamente opacas para a luz. As regiões opostas às regiões que apresentam Birrefringência são exemplos. Há ainda regiões (e suas opostas) intrinsecamente opacas, dados os campos externos intensos (em comparação com os campos da onda, mas suficientemente fracos para não invalidar a aproximação da métrica de Minkowski na descrição do espaço-tempo). Conforme já mencionamos, isso não ocorria no caso anterior devido à presença da solução ordinária. Ainda, como já esperávamos, há de forma geral uma assimetria para a propagação da luz em direções e sentidos opostos. Adicionalmente, tal como no caso da Trirrefringência,

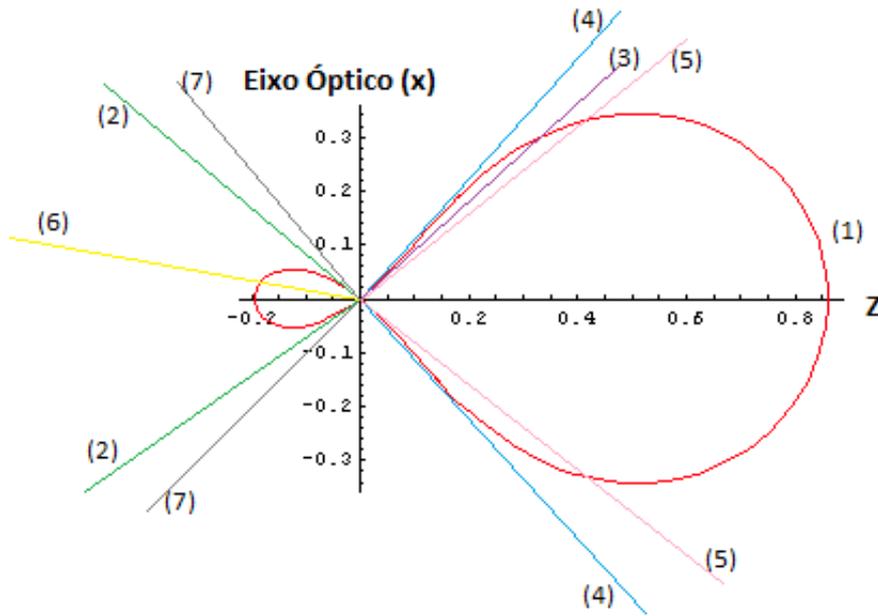


Figura 2.4: (cores e números) Modelo numérico desenvolvido para o caso que não há solução ordinária presente e o vetor de onda é limitado ao plano xz . As soluções extraordinárias são exibidas em vermelho (1). As linhas em verde (2) e em rosa (5) delimitam regiões que apenas apresentam Unirefringência. A reta em amarelo (6) exemplifica tal efeito em uma dada direção e sentido. Qualquer ângulo entre as retas em azul (4) e rosa (5) exibirão apenas o efeito da Birrefringência. A linha em roxo (3) define uma direção e sentido que exhibe tal efeito, com uma solução extraordinária próxima do valor nulo. Logo, para as regiões opostas a essas, delimitadas pelas retas em verde (2) e em cinza (7), não há propagação de ondas eletromagnéticas, o que caracteriza o efeito da Propagação em apenas um sentido nessas direções. No modelo de interesse, há regiões intrinsecamente opacas à propagação de ondas eletromagnéticas. Essas regiões estão delimitadas entre as linhas em verde (2) e azul (4). Os valores numéricos escolhidos para esse modelo foram $C^1_1 = 3$, $C^3_3 = -2$, $\mu(E) = 2$ e $\mu' EB = 8$.

teremos regiões em que as velocidades de ambas as soluções extraordinárias serão extremamente pequenas.

Observe que sem a presença dos campos externos ou a não-linearidade em termos da permeabilidade magnética do metamaterial, eliminaremos as regiões onde há Birrefringência, bem como a anisotropia de propagação em direções e sentidos opostos (esse último já era esperado). Aumentando o valor do campo magnético externo, expandiremos essa região. O ângulo limite ocorre na direção do campo elétrico externo, com o campo magnético tendendo para o infinito. Claramente essa situação não é física. Nesse limite a região onde há opacidade intrínseca tenderia a zero, mas jamais aquela devido à direção oposta da região que apresenta Birrefringência.

No entanto, as regiões onde há Unirefringência não são alteradas por nenhuma reconfi-

guração do campo magnético. A mudança do campo elétrico externo, no entanto, modifica essa região, porque os coeficientes C^α_β são dependentes de tal entidade, de forma geral. Se as componentes do tensor permissividade elétrica são independentes do campo elétrico, então a região de Unirrefringência é uma característica intrínseca do metamaterial em discussão. Partimos inicialmente na nossa análise que o meio exibia coeficientes da permissividade elétrica todos reais (aproximação da quase transparência, onde supusemos que perdas são negligenciáveis). No entanto, para o modelo em análise, é impossível que o meio apresente propagações em todas as direções e sentidos. Isso só é possível porque estamos permitindo que este apresente componentes da permissividade elétrica negativas (para alguma frequência conveniente). No entanto, como é simples de ser percebido, a negatividade de algumas das componentes do tensor permissividade elétrica implicar em regiões opacas não é geral.

Outra extensão interessante de soluções seria considerar aquelas em que não existe solução ordinária e há apenas **uma** solução extraordinária. Isso seria o caso se impuséssemos $C^3_3 < 0$ e trocamos a desigualdade na Eq. (2.145) apenas por uma igualdade. De fato, esse caso já está contemplado no modelo estudado nas linhas acima, e vemos que há apenas dois ângulos no plano xz , onde isso ocorre. No entanto, podemos argumentar que haverá um entorno desse ângulo onde os equipamentos de medição não serão capazes de diferenciar as possíveis velocidades de fase que tendem para o mesmo valor. Nessa subregião, teremos o efeito da Propagação em apenas um sentido, com a presença experimental de apenas uma perturbação e nenhuma na associada região oposta. Há sempre regiões que apresentam propagação em apenas um sentido, mas com a presença de duas perturbações, conforme comentamos anteriormente.

2.11 Metamaterial Não-Linear Indefinido Isotrópico — Propagação em Apenas um Sentido

Outro caso de interesse a ser analisado seria a ocorrência ou não de propagação para um metamaterial não-linear indefinido **isotrópico**, com todas as componentes do tensor permissividade elétrica (diagonal) negativas. Sabemos que para metamateriais lineares isotrópicos tanto na permissividade elétrica, quanto na permeabilidade magnética, a coeficientes constantes e reais, a propagação apenas ocorre se ambos os coeficientes dielétricos são negativos (para uma dada faixa de frequências) [20]. Isso é uma exigência, verificada experimentalmente [25].

Considere que ambas as componentes dos tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética dependam do campo elétrico externo e que este é dado pela Eq. (2.109). Continuamos supondo a isotropia da permeabilidade magnética. Suponha que o campo magnético seja dado pela Eq. (2.110). Para o modelo em discussão, se as componentes do tensor permissividade elétrica dependem apenas do módulo do campo elétrico externo, as quantidades

relevantes para as velocidades de propagação são os $C^{\alpha\beta}$. A isotropia da propagação de ondas poderia ser obtida “artificialmente”, impondo $C^1_1 = C^3_3$. Isso levaria para um valor específico do campo elétrico externo, como indicado pela Eq. (2.121). Essa é a qualidade de supormos que as componentes do tensor permissividade elétrica sejam dependentes do campo elétrico externo, o controle artificial da isotropia de propagação das ondas eletromagnéticas.

Um outro caso mais simples seria supor que todas as componentes do tensor permissividade elétrica são constantes, reais, negativas e iguais. No que se segue, trabalharemos com ambos os casos simultaneamente (dependentes ou não do módulo do campo elétrico externo). Isso será evidenciado pela definição $C \doteq C^1_1 = C^3_3 < 0$, que garante a isotropia da propagação de ondas no meio. Observe que para os casos de interesse, a isotropia da permissividade elétrica não necessariamente implica na isotropia da propagação de ondas eletromagnéticas. Mesmo no caso da permissividade elétrica ser constante, a presença do campo elétrico externo seria importante para garantir que a derivada da permeabilidade magnética com respeito a essa quantidade seja não-nula.

Esperamos que efeitos não-usuais ocorram para os meios de interesse presente, porque estes são não-lineares. Em especial, mostraremos que propagações são permitidas para esses metamateriais não-lineares indefinidos “isotrópicos”, contanto que certas exigências sejam satisfeitas. Essa análise é uma simples extensão da seção anterior e nos limitaremos apenas a aspectos fundamentais.

Suponha que $C < 0$ e $\mu > 0$ (para um dado valor do campo elétrico externo) e que a propagação apenas ocorra no plano xz para as circunvizinhanças de algum ponto P nos associados meios materiais. Das Eqs. (2.122) e (2.123), temos que não há solução ordinária, como esperado, e as soluções extraordinárias são

$$v_{\phi}^{\pm} = \frac{\tilde{\Gamma} \pm \sqrt{\tilde{\Gamma}^2 - \frac{4|C|}{\mu}}}{2|C|}, \quad (2.152)$$

onde definimos

$$\tilde{\Gamma} \doteq \frac{\mu' E B \hat{q}^3}{\mu^2}. \quad (2.153)$$

Da Eq. (2.152), não há propagação se

$$\frac{(\mu' E B)^2}{\mu^3} < 4|C|. \quad (2.154)$$

Se a condição expressa pela Eq. (2.154) não ocorre, existirá um ângulo que separará a região que apresenta Birrefringência de uma região intrinsecamente opaca. Uma análise mais detalhada mostra que para

$$0 \leq \theta < \arccos \left(\frac{2}{\mu' E B} \sqrt{|C| \mu^3} \right), \quad (2.155)$$

teremos Birrefringência. Para o ângulo superior da expressão acima, teremos apenas Unirrefringência (com o efeito da Propagação em apenas um sentido). Para

$$\arccos\left(\frac{2}{\mu' E B} \sqrt{|C| \mu^3}\right) < \theta \leq \pi, \quad (2.156)$$

não há propagação de ondas eletromagnéticas. A análise pictórica desse caso está exibida na Fig. (2.5) para uma escolha particular de um meio e campos sobre este.

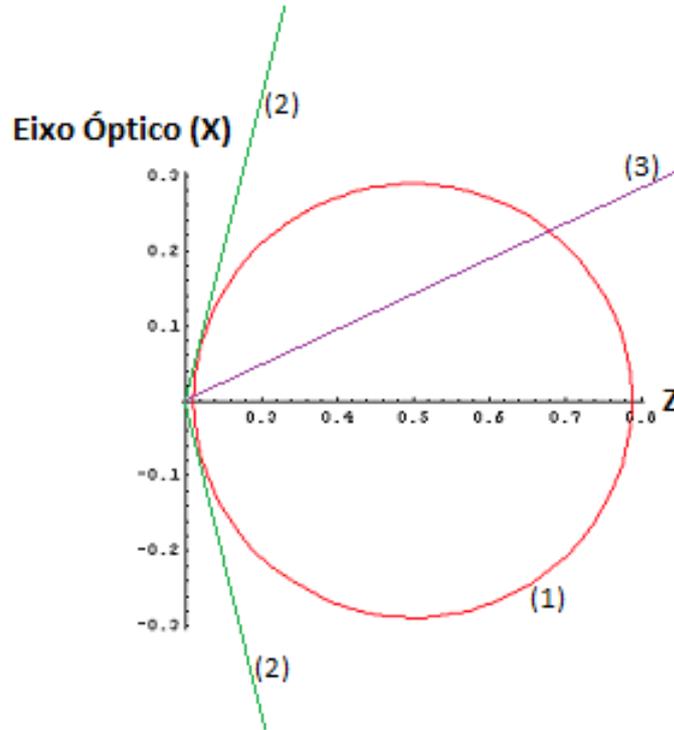


Figura 2.5: (cores e números) Modelo numérico desenvolvido para o caso onde a permissividade elétrica é um tensor isotrópico negativo e a permeabilidade magnética é um tensor isotrópico positivo, para qualquer valor do módulo do campo elétrico externo; o vetor de onda é limitado ao plano xz e a Eq. (2.154) não é válida. As soluções extraordinárias são exibidas em vermelho (1). As linhas em verde (2) delimitam a região onde se tem o efeito da Birrefringência. Essas linhas definem direções e sentidos que exibem Unirrefringência. A linha em roxo (3) define uma direção e sentido que apresenta Birrefringência. Para esse caso, há apenas uma região onde há apenas Birrefringência. A região restante do plano é opaca para a luz. A assimetria é evidente em direções e sentidos opostos para esse caso. Os valores escolhidos para o modelo foram $C = -3$, $\mu' E B = 12$ e $\mu(E) = 2$.

Pode ser verificado que para um metamaterial não-linear indefinido isotrópico que apresenta uma permissividade elétrica sempre muito menor que a permeabilidade magnética (em princípio possível para alguma faixa de frequências e campo elétrico externo convenientes), teremos experimentalmente apenas uma solução para uma região do plano xz , exceto nas proximidades

da direção do campo externo, onde as soluções tenderão para o mesmo valor. A outra solução extraordinária seria próxima de zero na região mencionada.

Para um metamaterial não-linear indefinido isotrópico que não satisfaz a Eq. (2.154), nas proximidades do ângulo crítico que anula o argumento da raiz da Eq. (2.152), teremos experimentalmente apenas uma solução. De forma geral, para esse caso isotrópico, teremos sempre a Propagação em apenas um sentido para uma dada região, mas de duas ondas eletromagnéticas. Aumentando-se o valor do campo magnético externo, diminuiríamos a região opaca. Outra forma seria diminuir a permissividade elétrica ou a permeabilidade magnética.

Se C fosse maior que zero não haveria região opaca, mas a assimetria ainda existiria em sentidos opostos para uma dada direção, devido à presença do campo magnético externo e da não-linearidade do meio. Exatamente esse caso foi contemplado na Ref. [6].

Se tivéssemos suposto que a permeabilidade magnética é sempre negativa, chegaríamos ao mesmo resultado que para o caso $C < 0$ apenas se a derivada de tal quantidade é sempre negativa, ou se um dos campos forem invertidos de direção e sentido. Se a derivada da permeabilidade magnética não é negativa e os campos não forem invertidos, chegaremos à conclusão de que a propagação ocorre de forma análoga ao caso analisado anteriormente, mas na direção e sentido contrárias.

2.12 Metamaterial Não-Linear Indefinido Uniaxial

Seja o caso em que a permissividade elétrica do meio é diagonal, de forma geral dependente apenas do módulo do campo elétrico externo, com todas as componentes negativas e $C^1_1 \neq C^3_3$, com $C^2_2 = C^3_3$. Estamos supondo ainda que todas as componentes de C^{α}_{β} são também negativas, para qualquer campo elétrico externo que utilizemos. Estamos considerando o que chamaríamos de metamaterial não-linear indefinido uniaxial. Considere ainda que a permeabilidade magnética é diagonal, isotrópica, positiva e dependente do módulo do campo externo. Pode ser mostrado sem dificuldades que a região de propagação [em que haverá Birrefringência] é determinada por

$$\tan^2 \theta \leq \frac{|C^3_3|}{|C^1_1|} \left[\frac{(\mu' E B)^2}{4 \mu^3 |C^1_1|} - 1 \right]. \quad (2.157)$$

Da equação acima é manifesto que para certas configurações dos campos e do meio, não será possível a propagação de ondas eletromagnéticas. Observe que o caso de um metamaterial não-linear indefinido isotrópico analisado anteriormente é um caso particular do caso em discussão.

Muitos outros modelos poderiam ser construídos; limitaremos aos apresentados até aqui.

2.13 Cálculo dos Autovetores

Nessa seção, calcularemos os autovetores da Eq. (2.61). As Eqs. (2.122) e (2.123) são os autovalores dessa equação. Esses são obtidos pela imposição de que a Eq. (2.61) não tenha soluções triviais em termos da polarização elétrica, \vec{e} , no limite da Óptica Geométrica e quando os campos externos são maiores que os da onda. A polarização magnética pode ser encontrada da polarização elétrica, tal como nos afirma a Eq. (2.57) ou (2.59). Como vimos, não importa o meio, no limite da Óptica Geométrica, o campo magnético (da onda eletromagnética) sempre será ortogonal ao campo elétrico dessa onda e também do vetor de propagação. Como discutiremos anteriormente, as equações que fornecem tal característica são as Equações de Maxwell.

Para a exposição das equações que nos darão os autovetores da Eq. (2.61), consideraremos quadrivetores covariantes e contravariantes. No que se seguirá, voltaremos apenas para a análise contravariante.

De forma explícita, para os meios em que estamos analisando (aqueles que apresentam uma permeabilidade magnética isotrópica dependente apenas do campo elétrico externo e uma permissividade elétrica diagonal, dependente de tal campo e também a frequência da onda que se propaga), segue das Eqs. (2.64), (2.63), (2.81), (2.82) e (2.121) que

$$Z^\alpha_1 = C^\alpha_1 + \frac{\mu'}{\mu^2 v_\phi} \eta^{\alpha\beta 02} B E \hat{q}_\beta - \frac{1}{\mu v_\phi^2} (\delta^\alpha_1 + \hat{q}^\alpha \hat{q}_1). \quad (2.158)$$

Ainda

$$Z^\alpha_2 = C^\alpha_2 - \frac{1}{\mu v_\phi^2} (\delta^\alpha_2 + \hat{q}^\alpha \hat{q}_2). \quad (2.159)$$

Finalmente

$$Z^\alpha_3 = C^\alpha_3 - \frac{1}{\mu v_\phi^2} (\delta^\alpha_3 + \hat{q}^\alpha \hat{q}_3). \quad (2.160)$$

Suponha que a o autovetor de polarização \vec{e} pode ser escrito, em relação a um sistema de coordenadas cartesianas com mesma orientação que aquele que descreve os campos externos, na forma

$$\vec{e} = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}, \quad (2.161)$$

onde os coeficientes são ainda indeterminados. Considerando-se as Eqs. (2.61), (2.158)–(2.161), temos o sistema de equações para as incógnitas a, b, c ,

$$\left(C^1_1 + \frac{\mu' B E \hat{q}^3}{\mu^2 v_\phi} - \frac{[1 - (\hat{q}_1)^2]}{\mu v_\phi^2} \right) a + \frac{\hat{q}^1 \hat{q}^2}{\mu v_\phi^2} b + \frac{\hat{q}^1 \hat{q}^3}{\mu v_\phi^2} c = 0, \quad (2.162)$$

$$\frac{\hat{q}^1 \hat{q}^2}{\mu v_\phi^2} a + \left(C^3_3 - \frac{[1 - (\hat{q}_2)^2]}{\mu v_\phi^2} \right) b + \frac{\hat{q}^3 \hat{q}^2}{\mu v_\phi^2} c = 0 \quad (2.163)$$

$$\left(\frac{\hat{q}^1 \hat{q}^3}{\mu v_\phi^2} - \frac{\mu' B E \hat{q}^1}{\mu^2 v_\phi} \right) a + \frac{\hat{q}^3 \hat{q}^2}{\mu v_\phi^2} b + \left(C^3_3 - \frac{[1 - (\hat{q}_3)^2]}{\mu v_\phi^2} \right) c = 0. \quad (2.164)$$

O caso particular onde a propagação apenas ocorre no plano xz (para uma pequena região no entorno do ponto P de interesse no meio material) é uma aproximação matemática para o caso físico onde a decomposição do versor de onda na direção y é pequeno. Nesse sentido, iremos nessa seção calcular os autovetores da Equação de autovalores para uma propagação arbitrária no espaço tridimensional. Considere agora o cálculo dos autovetores extraordinários. É simples de ser percebido que a Eq. (2.123) é solução da equação quadrática

$$C^3_3 \left(C^1_1 + \frac{\mu' E B \hat{q}^3}{\mu^2 v_\phi} - \frac{1 - (\hat{q}_1)^2}{\mu v_\phi^2} \right) - \frac{C^1_1 (\hat{q}_1)^2}{\mu v_\phi^2} = 0. \quad (2.165)$$

Substituindo a Eq. (2.165) nas Eqs. (2.162)–(2.164), após alguns cálculos segue que a Eq. (2.161) pode ser apresentada na forma

$$\vec{e}_\pm = b \left\{ \frac{(1 - \mu v_\phi^{\pm 2} C^3_3) C^3_3}{(C^3_3 - C^1_1) \hat{q}^1 \hat{q}^2} \hat{x} + \hat{y} - \left[\frac{(1 - \mu v_\phi^{\pm 2} C^3_3) C^1_1}{(C^3_3 - C^1_1) \hat{q}^2 \hat{q}^3} + \frac{\hat{q}^2}{\hat{q}^3} \right] \hat{z} \right\}, \quad (2.166)$$

onde b é uma constante arbitrária e os símbolos “ \pm ” referem-se as soluções extraordinárias associadas aos respectivos sinais na Eq. (2.123). O casos particulares de propagação podem facilmente ser analisados e não os faremos nesse trabalho.

Seja a análise dos autovetores para a solução ordinária da Equação generalizada de Fresnel. Substituindo a Eq. (2.122) nas Eqs. (2.162)–(2.164), segue que

$$\vec{e}_o = c \left(-\frac{\hat{q}^3}{\hat{q}^2} \hat{y} + \hat{z} \right), \quad (2.167)$$

onde o símbolo “o” refere-se à solução ordinária. Observamos que a polarização ordinária, dada pela Eq. (2.167), é sempre ortogonal ao vetor campo elétrico externo. Ainda, note que os autovetores extraordinários, dados pela Eq. (2.166) podem ser escritos em termos de tal autovetor. Logo, os autovetores da Eq. (2.61) não são linearmente independentes. Isso não é problemático, porque estritamente dizendo, a Eq. (2.61) é uma equação de autovalores e autovetores onde os “verdadeiros autovalores λ ($Z^\alpha_\beta e^\beta = \lambda e^\alpha$)” são todos nulos.

Capítulo 3

Considerações Acerca das Velocidades de Propagação de Raios

3.1 Introdução

Uma das vantagens de se trabalhar com equações na sua forma tensorial é que tais equações são válidas para qualquer sistema de coordenadas. Nesse trabalho, exatamente um formalismo tensorial foi empregado. No entanto, limitamo-nos a um referencial onde o observador se encontra em repouso relativamente a um laboratório que mede os campos. Nesse capítulo, gostaríamos de ampliar um pouco tal discussão, analisando o que ocorreria com certas quantidades de interesse em outros sistemas de coordenadas. Em especial, escolheremos as transformações de coordenadas que conectam referenciais inerciais.

Uma análise poderia ser feita partindo-se da Eq. (2.10). Uma vez que $F^{\mu\nu}$ é um tensor do tipo $(2, 0)$, sabemos exatamente qual sua lei de transformação para outro sistema de coordenadas. Como V^ν é definido como quadri vetor de um observador, conforme já comentamos, isso implica que E^μ é também um quadri vetor contravariante, como expresso pela Eq. (2.12). No entanto, embora E^μ esteja relacionado com o campo elétrico para o observador comóvel com o laboratório [vide Eq. (2.13)], E'^μ não está relacionado com o campo físico para um outro observador \mathcal{S}' , que se move em relação ao primeiro. Mas, isso é irrelevante, uma vez que as equações de Maxwell são escritas em termos de $F^{\mu\nu}$. Essa discussão poderia ser estendida para $P^{\mu\nu}$, definido pela Eq. (2.14).

Para os nossos fins, tal análise não será feita. Poderemos obter aquilo que desejamos utilizando certas quantidades invariantes. Por exemplo, para obtermos o módulo das velocidades de fase (ordinária e extraordinárias) em um referencial que se move em relação ao laboratório, podemos utilizar a invariância de $K^\mu K_\mu$.

Nesse Capítulo, discutiremos sobre as diferenças entre as velocidades de fase e de grupo e

suas leis de transformação quando mudanças de coordenadas estão envolvidas. Uma expressão geral para a velocidade de grupo será obtida, elucidando que esta é igual ao vetor velocidade de fase para o raio ordinário e distinta das velocidades de fase extraordinárias para os raios extraordinários (direção de propagação da energia associada com as soluções extraordinárias da equação generalizada de Fresnel). Analisaremos brevemente a questão da velocidade de grupo em metamateriais indefinidos e materiais usuais, ambos lineares ou não.

Utilizando a velocidade de grupo e invariâncias, poderíamos estudar o que se chama de “métrica óptica”.¹ Isso será discutido brevemente no Apêndice A.

3.2 Velocidade de Fase e de Grupo

Suponha para todo esse capítulo que \mathcal{S}' é um referencial que se move com velocidade $\vec{V} = V\hat{x}$, V uma constante, com respeito a \mathcal{S} , um referencial comóvel com o laboratório.

Seja o referencial \mathcal{S} . Conforme nos ensinam Landau, Jackson e Brillouin, [4, 38, 51] para o caso de um meio usual (onde as componentes dos tensores dielétricos são positivas) quase transparente em uma região de frequências que não apresenta anomalias no índice de refração $n^2 \doteq 1/\bar{v}_\phi^2$ e as ondas são descritas por pacotes com um pico acentuado para algum valor do módulo do vetor de onda, a velocidade física seria a velocidade de grupo, definida por $\vec{u} \doteq \partial\omega/\partial\vec{q} = \nabla_{\vec{q}}\omega$. Vejamos a relação entre essa quantidade e o módulo da velocidade de fase. Da definição desta, segue trivialmente que $\omega = v_\phi \sqrt{\vec{q} \cdot \vec{q}}$. Considere um conjunto de meios materiais (lineares ou não) onde a velocidade de fase dependa apenas de \hat{q} (e eventualmente de campos externos dados). Da definição de \hat{q} , segue que

$$\vec{u} = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{q}} = v_\phi\hat{q} + \hat{q} \times \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial\hat{q}} \times \hat{q} \right) = \left[v_\phi - \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial\hat{q}} \right) \cdot \hat{q} \right] \hat{q} + \frac{\partial v_\phi}{\partial\hat{q}}. \quad (3.1)$$

A Eq. (3.1) nos afirma que para tais meios de interesse, velocidades de fase e de grupo não são paralelas, de forma geral. Isso já é um fato conhecido de soluções extraordinárias da equação generalizada de Fresnel para meios materiais anisotrópicos [3, 4]. Esse também deve ser o caso para as soluções extraordinárias em meios não-lineares isotrópicos (em termos dos coeficientes dielétricos, não necessariamente em termos de propagação de ondas eletromagnéticas) [6, 8]. Como vemos da Eq. (3.1), para a velocidade ordinária da equação de Fresnel, velocidade de grupo e de fase são iguais. Isso ocorre basicamente porque para essa solução tudo se passa como se o meio fosse isotrópico em termos de propagação de ondas eletromagnéticas (e também em termos dos coeficientes dielétricos) [4], para algum dado valor de campo elétrico externo. Observe que a hipótese acima para a dependência do módulo da velocidade de fase não se aplica aos metamateriais indefinidos de interesse desse trabalho.

¹Para maiores detalhes da nomenclatura, ver Ref. [50].

Uma possível igualdade entre as velocidades de fase e de grupo deveria ser vista com cuidado. Nos cálculos, supomos que a onda de interesse é monocromática. Isso é claramente uma idealização de um caso onde as frequências das infinitas ondas que constituem a perturbação são muito próximas entre si. A velocidade de fase refere-se à relação entre a frequência angular e o comprimento de onda de uma das ondas, que têm extensão infinita. A velocidade de grupo refere-se à velocidade do pacote concentrado em uma pequena região do espaço-tempo, gerado por essas infinitas ondas.

O segundo termo da segunda igualdade da Eq. (3.1) é ortogonal ao vetor de onda \vec{q} . Assim, quando tomamos o produto interno da Eq. (3.1) com tal vetor, obtemos como resultado a frequência da onda. Esse é um resultado geral válido quando o tensor permissividade elétrica é linear (em geral anisotrópico) e o tensor permeabilidade magnética é linear e isotrópico [3]. Assim, vemos que podemos estender esse resultado para meios não-lineares com permeabilidade magnética isotrópica e permissividade elétrica anisotrópica diagonal, na presença de campos intensos (vide Capítulo 2).

Seja a análise para um meio uniaxial que exhibe permeabilidade magnética constante e igual à unidade e permissividade elétrica anisotrópica constante e positiva e vetor de onda limitado ao plano xz no entorno de algum ponto P de interesse no meio material. Para esse caso, a velocidade de grupo pertence ao plano formado pelos vetores de onda e pelo eixo óptico para um meio uniaxial linear [4]. Esse resultado também pode ser inferido das Eqs. (3.1) e (2.123), para o caso de interesse, como mostra o resultado abaixo

$$\vec{u} = \left(v_\phi - \frac{(\hat{q} \cdot \hat{x})^2}{v_\phi} \left[\frac{1}{\varepsilon_\perp} - \frac{1}{\varepsilon_\parallel} \right] \right) \hat{q} + \frac{\hat{q} \cdot \hat{x}}{v_\phi} \left[\frac{1}{\varepsilon_\perp} - \frac{1}{\varepsilon_\parallel} \right] \hat{x}, \quad (3.2)$$

onde para esse caso

$$v_\phi^2 = \frac{\cos^2 \varphi}{\varepsilon_\perp} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varepsilon_\parallel}, \quad (3.3)$$

onde φ é o ângulo entre o vetor de onda e o eixo óptico, ε_\parallel refere-se à componente da permissividade elétrica na direção do eixo óptico e ε_\perp às componentes perpendiculares. Logo, para o ângulo θ que definimos no Capítulo 2, segue que $\theta + \varphi = \pi/2$. Lembramos que essa análise se processa num sistema de coordenadas cujos eixos são coincidentes com as direções principais desse meio.

Logo, de acordo com as Eqs. (3.2) e (3.3), o módulo da velocidade de grupo é dada por

$$|\vec{u}|^2 = \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\varepsilon_\perp^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varepsilon_\parallel^2} \right) \frac{1}{v_\phi^2}. \quad (3.4)$$

Das Eqs. (3.3) e (3.4), segue que $|\vec{u}|^2 \leq 1$, se ambos os coeficientes do tensor permissividade elétrica são maiores que a unidade.² Ainda, pode ser demonstrado que o ângulo entre o vetor

²Para meios quase transparentes não-dispersivos (aproximadamente), pode-se mostrar facilmente que esse é o caso. Ver Ref [4], pag. 287, para maiores detalhes.

velocidade de grupo e o de fase é

$$\tan \alpha = \frac{(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \tan \varphi}{(\varepsilon_{\parallel} \tan^2 \varphi + \varepsilon_{\perp})}. \quad (3.5)$$

Finalmente, desse resultado e de relações geométricas entre os ângulos de interesse, mostra-se que

$$\tan \tilde{\varphi} = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \tan \varphi, \quad (3.6)$$

onde $\tilde{\varphi}$ é o ângulo entre o vetor velocidade de grupo e o eixo óptico.

Se o tensor permissividade elétrica é simétrico e não-dependente dos campos da onda, então a velocidade de grupo é paralela ao vetor de Poynting (a média temporal desse vetor oscilante) [4]. Considere um pacote de ondas concentrado em alguma região do espaço para um certo tempo. A medida que esse pacote move, a energia contida nele também se move. Assim, a velocidade de grupo nos dá a medida de variação desse pacote, bem como a do fluxo de energia. Para meios anisotrópicos, do que discutimos anteriormente, os raios extraordinários não podem ser definidos como os vetores normais à eikonal constante para pequenas regiões desta. No entanto, pode ser mostrado que a direção dos raios é a normal a outra superfície, aquela advinda da equação de Fresnel no espaço dos momenta [4] (associada com alguma hipersuperfície no espaço-tempo).

Da analogia óptica–mecânica no limite da Óptica Geométrica, segue que a definição da velocidade de grupo é equivalente à velocidade de uma partícula [52]. Nos domínios da Mecânica Clássica, partículas são sempre muito bem localizadas. Disso segue que a velocidade de grupo apenas terá significado físico no contexto de ondas se essas forem descritas por pacotes concentrados em uma pequena região (é apenas nesse caso que poderíamos localizá-las, no caso pelo seu pico). Em \mathcal{S} , suponha que a velocidade de grupo de uma dada perturbação seja \vec{u} . Esperamos que em \mathcal{S}' , essa velocidade se transforme tal como aquela de uma partícula. Pode ser mostrado que esse é exatamente o caso [4]. Logo,

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - u_x V}, \quad (3.7)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{(1 - u_x V) \Omega}, \quad (3.8)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{(1 - u_x V) \Omega}, \quad (3.9)$$

onde estamos definindo $\Omega \doteq 1/(\sqrt{1 - V^2})$. O módulo da velocidade de grupo no sistema \mathcal{S}' é dado de forma usual ($\vec{u}'^2 \doteq u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2$), a partir das componentes listadas nas Eqs. (3.7)–(3.9) e é

$$u'^2 = \frac{\Omega^2 (u_x - V)^2 + u^2 - u_x^2}{\Omega^2 (1 - u_x V)^2}. \quad (3.10)$$

Aproximações podem ser tomadas para essa lei de transformação no limite de pequenos valores de V .

A velocidade de fase e a velocidade de grupo se transformam de maneiras distintas. Da invariância de $K^\mu K_\mu$ [$K^\mu = (\omega, \vec{q})$] e da lei de transformação de K_μ para o referencial \mathcal{S}' , segue que

$$v_\phi'^2 = \frac{\Omega^2(v_\phi^2 - V v_{\phi x})^2}{\Omega^2(v_\phi^2 V - v_{\phi x})^2 + v_\phi^2 - v_{\phi x}^2}, \quad (3.11)$$

onde Ω já foi definido anteriormente. Essa expressão é em geral distinta daquela obtida pela invariância do comprimento infinitesimal entre dois pontos no espaço-tempo de Minkowski [dada pela Eq. (3.10)]. Observe que com a Eq. (3.11), poderíamos analisar o índice de refração medido por \mathcal{S}' .

Reforçamos que a velocidade de grupo está relacionada com a direção de propagação da energia de uma onda. Em meios isotrópicos lineares, mesmo na presença de campos externos, as interações da onda com o meio têm que ser iguais em todas as direções e não há razão para que a propagação da energia seja em uma direção distinta da onda. No entanto, para meios anisotrópicos lineares, isso certamente não é o caso. Observamos ainda que meios isotrópicos (permissividade elétrica e permeabilidade magnética) não-lineares, mesmo após a aplicação de campos externos, não interagem com uma onda eletromagnética de forma isotrópica [6, 8]. Isso ocorre porque para meios não-lineares, as derivadas dos coeficientes dielétricos com respeito aos campos externos são também quantidades importantes para a propagação de ondas.

A razão fundamental atrás da diferença entre a direção do raio e a do vetor de onda para meios lineares está no fato do vetor deslocamento elétrico não ser paralelo ao vetor campo elétrico da onda. Isso é devido às relações constitutivas. Assim, como já nos deparamos anteriormente, a resposta em termos de primeiros princípios do porquê da diferença entre as direções de propagação da velocidade de fase e de grupo não reside no escopo da eletrodinâmica, uma vez que essa assume as relações constitutivas.

Seja agora a análise das direções dos raios extraordinários nos metamateriais não-lineares indefinidos de interesse desse trabalho. Considere que a convenção feita no capítulo anterior em relação à forma de escrever potências de um quadrivetor seja válida também nesse capítulo. Conforme dada pela Eq. (2.123), as velocidades de fase extraordinárias, que se propagam inicialmente no plano xz , advém de

$$C^1_1 C^3_3 v_\phi^2 + C^3_3 \hat{q}^3 \frac{\mu' E B}{\mu^2} v_\phi - \frac{(C^3_3 (\hat{q}_3)^2 + C^1_1 (\hat{q}_1)^2)}{\mu} = 0. \quad (3.12)$$

Estamos assumindo que μ' seja ainda dado pela Eq. (2.79). Para o meio de interesse desse trabalho, segue que sempre existem quatro ângulos (com relação ao eixo óptico) para o vetor

de onda tais que a velocidade de fase é nula. Esses ângulos são dados por

$$\tan^2 \chi = \frac{|C^1_1|}{|C^3_3|}, \quad (3.13)$$

pois para isso ser o caso, sempre uma das componentes do tensor permissividade elétrica é negativa. No caso da permissividade elétrica depender do módulo do campo elétrico externo, haverá um valor de campo elétrico que satisfaça a Eq. (3.13) para ângulos χ arbitrários (obviamente fazendo com que a tangente seja finita). A equação em discussão jamais é válida para meios lineares usuais. Observe que o ângulo χ da Eq. (3.13) foi tomado com respeito ao eixo óptico. No Capítulo 2, consideramos que o ângulo de interesse era com relação ao eixo z .

Para ângulos onde não vale a Eq. (3.13), pode-se mostrar facilmente que o relacionamento entre os ângulos do vetor velocidade de grupo com o eixo óptico e velocidade de fase para cada onda extraordinária também com o eixo óptico, denotados respectivamente por $\tilde{\varphi}^\pm$ e φ é

$$\tan \tilde{\varphi}^\pm = \frac{C^3_3}{C^1_1} \tan \varphi - \frac{C^3_3 \mu' E B v_\phi^\pm}{2 C^1_1 \mu \cos \varphi}. \quad (3.14)$$

Para o caso em que as componentes do tensor permissividade elétrica não dependem dos campos, o mesmo ocorrendo para o tensor permeabilidade magnética, sendo esse isotrópico, resgatamos a Eq. (3.6), utilizando a Eq. (2.121). Considere o caso onde todos os coeficientes da permissividade elétrica são iguais, constantes e negativos. Isso pode ser pensado para uma dada faixa de frequências em um meio dispersivo. Tal consideração é necessária para não termos contradições internas [20]. Nesse caso, a Eq. (3.14) nos afirma que uma solução é a trivial, $\tilde{\varphi} = \varphi$; a outra solução para essa equação é $\tilde{\varphi} = \varphi + \pi$. Precisamos de outra condição para a determinação da solução física da Eq. (3.14). De acordo com [20], a velocidade de grupo para o meio de interesse é sempre na direção do vetor de Poynting. Este é oposto ao vetor de onda. Logo, concluímos que a solução física para esse caso seria $\tilde{\varphi} = \varphi + \pi$.

Outro caso de interesse seria considerar um meio anisotrópico uniaxial constante onde uma das componentes do tensor permissividade elétrica seja negativa. Considere que o ângulo entre o vetor velocidade de grupo e o eixo óptico, no caso em que as constantes em discussão são positivas, é $\tilde{\varphi}$. Pode-se verificar facilmente para o caso onde alguma das componentes seja negativa que as possíveis direções para a velocidade de grupo serão $\tilde{\sigma}_A = \pi - \tilde{\varphi}$ e $\tilde{\sigma}_B = 2\pi - \tilde{\varphi}$ (também com relação ao eixo óptico). Essas direções são opostas entre si. É novamente a direção do vetor de Poynting que nos definirá a direção a ser escolhida.

Um terceiro caso seria considerar o meio de interesse desse trabalho, aquele com alguma componente do tensor permissividade elétrica negativa e não-linear, com permeabilidade magnética também não-linear, positiva e isotrópica. Nesse caso, vemos que para os ângulos $\varphi = \pi/4$ e $5\pi/4$, a velocidade de grupo será antiparalela e paralela com a de fase, respectivamente, para uma escolha conveniente do módulo do campo elétrico externo. Para os ângulos $\varphi = \pi/2$ e $3\pi/2$, é

necessário especificar o meio e os campos externos para avaliar se as velocidades são paralelas ou antiparalelas. A presença de um campo magnético externo intenso faria com que a velocidade de grupo tendesse a alguma direção ortogonal ao eixo óptico. É impossível, de forma geral, garantir que as velocidades sejam sempre paralelas para um meio não-linear da forma como propomos. No entanto, isso é em princípio possível para alguma direção, com a escolha conveniente dos parâmetros do meio e dos campos externos. Finalmente, no caso do meio ser não-linear apenas na permissividade elétrica, com componentes todas positivas, temos que é sempre possível estabelecermos um campo elétrico externo conveniente para as velocidades serem **sempre** paralelas. Basta impormos $C^1_1 = C^3_3$. Para metamateriais indefinidos com $C^1_1 = C^3_3$, $C^1_1 < 0$, as velocidades de fase e grupo seriam sempre opostas.

3.3 Velocidades Aparentemente Superluminais

Suponha um meio uniaxial linear, não-dispersivo (aproximadamente) e não-absorvido (quase transparente), anisotrópico na permissividade elétrica e isotrópico na permeabilidade magnética (e igual à unidade). Assim, as componentes do tensor permissividade elétrica são dadas constantes positivas. Nesse caso, a velocidade dos raios que se propagam no meio é a velocidade de grupo, estando esses na direção do vetor de Poynting. Como nos afirma a Eq. (3.4) e as condições para os coeficientes dielétricos que comentamos anteriormente, a velocidade de grupo para tal meio é sempre menor que a unidade. Considere agora um metamaterial linear uniaxial anisotrópico na permissividade elétrica (diagonal) e isotrópico na permeabilidade magnética (igual à unidade). Suponha que a Eq. (3.3) descreve a velocidade de fase da onda que se propaga em tal meio. Logo, se alguma das componentes da permissividade elétrica for negativa, sempre haverá uma região em que não há propagação. Suponha que $\varepsilon_{\parallel} < 0$ e $\varepsilon_{\perp} > 1$. De acordo com a Eq. (3.3), a região em que há propagação é

$$\tan^2 \theta > \frac{\varepsilon_{\perp}}{|\varepsilon_{\parallel}|}, \quad (3.15)$$

onde estamos utilizando o ângulo com respeito ao eixo z , relacionado com aquele em relação ao eixo óptico por $\varphi + \theta = \pi/2$.

Assuma que a velocidade de grupo seja dada ainda pela Eq. (3.2). Logo, a região do plano xz em que o módulo de tal velocidade é menor que a unidade é

$$\tan^2 \theta' \geq \left(\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \right)^2 \left[\frac{1 + |\varepsilon_{\parallel}|}{\varepsilon_{\perp} - 1} \right], \quad (3.16)$$

onde θ' é medido com relação ao eixo z , não em relação ao eixo óptico.

Das Eqs. (3.15) e (3.16), é simples de se convencer que $\theta' > \theta$. Isso implicaria que há regiões onde a velocidade de fase é real e a velocidade de grupo cresce sem limites.

Um cálculo semelhante pode ser feito quando $\varepsilon_{\perp} < 0$ e $\varepsilon_{\parallel} > 1$. As mesmas conclusões em termos de propagação superluminal serão obtidas.

Para as conclusões que obtivemos acima, supomos que ou ε_{\perp} ou ε_{\parallel} são negativos e independentes da frequência ou vetor de onda da onda eletromagnética. No entanto, conforme nos ensina Veselago, [20] os coeficientes do tensor permissividade elétrica ou permeabilidade magnética que são negativos precisam **necessariamente** depender da frequência da onda. Isso deve ocorrer para evitarmos inconsistências internas. Ainda, para metamateriais onde alguns dos coeficientes principais do tensor permissividade elétrica são negativos, isto é, para algum $i = 1, 2, 3$ $\varepsilon_i < 0$, teríamos que impor a condição de causalidade $\partial(\varepsilon_i \omega)/\partial\omega \geq 2$.³ A mesma relação é válida quando algumas das componentes do tensor permeabilidade magnética são negativas [4]. Se algumas das componentes da permissividade elétrica dependem da frequência da onda, então a velocidade de grupo necessariamente é diferente daquela exibida pela Eq. (3.4). Assuma que o módulo da velocidade de fase seja dependente da direção de propagação da onda eletromagnética, bem como da sua frequência. De $\omega = v_{\phi} \sqrt{\vec{q} \cdot \vec{q}}$, pode ser mostrado facilmente que

$$\vec{u} = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{q}} = \frac{v_{\phi}\hat{q} + \hat{q} \times \left(\frac{\partial v_{\phi}}{\partial\vec{q}} \times \hat{q} \right)}{1 - \frac{\omega}{v_{\phi}} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial\omega}}. \quad (3.17)$$

A direção do raio seria na mesma direção da velocidade de grupo mesmo para metamateriais [29]. Para o caso de um meio isotrópico com ambas permissividade elétrica e permeabilidade magnética negativas, da Eq. (3.17) pode-se mostrar que a velocidade de grupo é na direção oposta ao vetor de onda. Com as desigualdades apresentadas no parágrafo acima para as componentes negativas dos tensores dielétricos, mostra-se também que para esses meios lineares isotrópicos a velocidade de grupo é sempre inferior a da luz no vácuo. No entanto, de forma geral, para metamateriais indefinidos lineares, não é suficiente considerar apenas a dispersividade de tais meios e as relações de causalidade para as componentes negativas dos tensores dielétricos afim de “evitar” superluminosidade. Certas condições adicionais deveriam ser obtidas. Essas podem ser facilmente inferidas da Eq. (3.17) para os meios de interesse.

Seja a agora análise da superluminosidade para meios usuais isotrópicos não-lineares e não-dispersivos. Seja um meio com permissividade elétrica dependente do módulo do campo elétrico externo e permeabilidade magnética constante. Esse é um meio particular para esse trabalho.

³Nos seus trabalhos, Smith e Schurig [29] afirmam que a relação de causalidade, que garante a não-superluminosidade para as propagações físicas, é $\partial(\varepsilon_i \omega)/\partial\omega \geq 1$ para todas as componentes i do tensor permissividade elétrica ou permeabilidade magnética que são negativas. Esse resultado é obtido como um resultado médio associado com desigualdades que os coeficientes dielétricos (dependentes de frequência) devem satisfazer para meios quase transparentes [4]. No entanto, ainda na Ref. [4], é simples de se convencer que a desigualdade geral que as componentes negativas dos tensores dielétricos devem satisfazer tem que ser aquela com limite inferior igual a 2.

Das Eqs. (2.123) e (2.121), com $\varepsilon_{\parallel}(E) = \varepsilon_{\perp}(E) = \varepsilon(E)$ e $\mu(E) = \mu_0$, segue que a velocidade de fase extraordinária pode ser apresentada na forma

$$v_e^2 = \frac{1}{\mu_0 (\varepsilon + \varepsilon' E^2)} \left[1 + \frac{\varepsilon' E^2 (\hat{q}_1)^2}{\varepsilon} \right], \quad (3.18)$$

onde a operação “linha” é a mesma definida pela Eq. (2.79). Observe que essa expressão é um caso particular de [8].

Para a Eq. (3.18), com o auxílio da Eq. (3.1), mostra-se que o módulo da associada velocidade de grupo, é

$$|\vec{u}|^2 = 1 + \frac{B (\hat{q}_1)^2 (1 + B)}{1 + B (\hat{q}_1)^2}, \quad (3.19)$$

onde definimos $B \doteq (E/\varepsilon)(\partial\varepsilon/\partial E)$, apenas por comodidade. Segue assim que velocidades de grupo superluminais serão em princípio possíveis se $B > 0$ ou $-1/(\hat{q}_1)^2 < B < -1$, se $\hat{q}_1 \neq 0$.

Não iremos entrar mais em detalhes nesse assunto. O exemplo dado acima elucida um caso em que a velocidade de grupo não é automaticamente inferior a da luz no vácuo $c = 1$. Certamente, esse será o caso para os metamateriais não-lineares indefinidos analisados nesse trabalho. Uma análise detalhada poderia ser feita para certos metamateriais não-lineares, utilizando-se a Eq. (3.17). Não faremos esse estudo nesse trabalho, embora alguns cálculos nos tenham sugerido que velocidades de grupo para os raios extraordinários poderiam ser superiores ao da luz no vácuo para certas configurações de metamateriais não-lineares (uma justificativa seria que fisicamente essas configurações não poderiam ocorrer). Essa seria uma questão muito importante a ser analisada, pois poderia colocar em questionamento as afirmativas de que para certas configurações as “velocidades físicas” seriam as de grupo. Um vasto estudo sobre superluminosidade para a velocidade de grupo e sua compatibilidade com a relatividade restrita podem ser encontrados na literatura (ver Ref. [53] para revisões detalhadas e referências) para outras dadas configurações de propagação de ondas.

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas

Mostramos que para a classe de metamateriais não-lineares uniaxiais, aqueles que podem exibir os fenômenos da Trirrefringência e Propagação em apenas um sentido são apenas os indefinidos. Com os avanços notáveis dessa área de pesquisa, parece ser possível testar as previsões desse trabalho num futuro próximo. Se estas resultarem verdadeiras, aplicações tecnológicas interessantes poderiam ser pensadas para esses efeitos.

Pela simetria das Equações de Maxwell, percebemos que para um metamaterial não-linear indefinido com permissividade elétrica isotrópica e permeabilidade magnética anisotrópica diagonal, ambas dependentes apenas do módulo do campo magnético, teremos essencialmente os mesmos efeitos que os de presente discussão. Outras configurações mais complexas do que aquelas apresentadas nesse trabalho ainda precisam ser analisadas. Citamos por exemplo a questão de se encontrar o fenômeno da Trirrefringência em meios materiais naturais. Ainda, metamateriais com tensores dielétricos não-diagonais precisam ser analisados, bem como efeitos associados com multirrefringência em metamateriais.

Em relação às velocidades de propagação de raios em metamateriais não-lineares, um vasto estudo ainda é requerido, uma vez que em princípio questões relacionadas com propagações superluminais não estão automaticamente eliminadas. Ainda está para ser analisado a possibilidade de interpretação dos efeitos analisados nesse trabalho sob o ponto de vista da velocidade de grupo, ao invés da velocidade de fase.

Apêndice A

Métricas Ópticas

A.1 Introdução

Definimos o termo “métrica óptica” como a quantidade que pode ser obtida a partir das equações de dispersão que o meio apresenta (para as soluções ordinária e extraordinárias, no caso de um meio uniaxial), quando essa é posta em uma forma conveniente. Este termo é assumido em princípio ser distinto da chamada “geometria efetiva”, definido na nota de rodapé da página 28. Discutiremos brevemente sobre uma forma alternativa de se obter as métricas ópticas associadas com a propagação de descontinuidades no meio material. Tal dedução é em princípio geral. Veremos que tal construção é equivalente com a geometria efetiva do raio ordinário quando certas operações forem feitas nessa métrica óptica [10]. Para o raio extraordinário, argumentaremos que em princípio esse seria também o caso para pequenas regiões do espaço-tempo em torno de qualquer qualquer ponto P . Tal dedução será guiada pela propagação de raios no meio de interesse e por certas quantidades cinematicamente conservadas.

A.2 Métrica Óptica para o Raio Ordinário

A equação generalizada de Fresnel nos fornece a relação de dispersão de um dado material, donde podem ser extraídas as velocidades de fase para ondas eletromagnéticas. Definimos a velocidade de fase de uma onda monocromática a partir do seu vetor de onda \vec{q} e da sua frequência angular ω , pela relação $v_\phi = \omega/|\vec{q}|$. Logo, a partir da Eq. (2.47) e da redefinição feita $\vec{k} = \vec{q}$, concluímos trivialmente que essa mesma equação pode ser escrita como $K_\beta = \omega(1, -\hat{q}/v_\phi)$, onde \hat{q} é o versor na direção do vetor de onda, como já definimos no Capítulo 2. Assim, segue que a contração do quadrivetor de onda covariante com o seu associado contravariante (utilizando a

métrica de Minkowski) nos fornece

$$g^{\mu\nu} K_\mu K_\nu = 0, \quad \text{onde,} \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - V^\mu V^\nu \left(1 - \frac{1}{v_\phi^2}\right), \quad (\text{A.1})$$

pois consideramos a terceira expressão da Eq. (2.13) e $\omega = V^\mu K_\mu$. Observe que definimos inicialmente o quadrivetor de onda na forma covariante.

A quantidade simétrica $g^{\mu\nu}$ definida na equação acima é chamada de métrica óptica para as ondas eletromagnéticas. Porque o quadrivetor de onda é definido de forma covariante, a métrica óptica precisa ser definida de forma contravariante. Nessa métrica, o quadrivetor de onda é um quadrivetor do tipo-nulo. Observe que esse não é o caso para a métrica Minkowskiana.

Considere para o restante dessa seção que a solução ordinária da equação generalizada de Fresnel, dada pela Eq. (2.122), foi substituída na Eq. (A.1). Pode ser mostrado [10] que as trajetórias que fótons realizam nessa “métrica óptica ordinária” são geodésicas nulas. Essa dedução é possível pela definição de K_α , o vetor ortogonal à eikonal constante. Tal métrica óptica ordinária apenas depende das características do meio e eventualmente de campos externos dados. Nesse caso, poderíamos construir modelos análogos para a relatividade geral (ver Refs. [10, 50] e referências contidas nesses trabalhos) onde as métricas dos espaços-tempo efetivos seriam dadas pela Eq. (A.1). Essas analogias seriam importantes porque nos permitiriam testar aspectos cinemáticos da Relatividade Geral em laboratórios terrestres [10]. Metamateriais seriam exemplos de meios materiais onde poderíamos criar modelos ópticos análogos para virtualmente qualquer métrica da Relatividade Geral (ver Ref. [28] e referências contidas).

Conforme mostramos no Capítulo 2 para um meio onde $v_\phi = v_\phi(\hat{q}^i)$ $i = 1, 2, 3$, a velocidade de fase é igual à velocidade de grupo **apenas** para a solução ordinária. Como um raio em um dado ponto deve estar na mesma direção da velocidade de grupo, segue que o quadrivetor K_μ dá a direção do raio ordinário no espaço-tempo.

As trajetórias de fótons¹ seriam obtidas via princípio variacional, com uma lagrangeana construída a partir de $g_{\mu\nu}$ (ver Ref. [42] para maiores detalhes). Assim, suporemos que esse é definido por $g^{\mu\nu} g_{\mu\alpha} = \delta^\nu_\alpha$. É simples de se verificar, a partir da Eq. (A.1), que $g_{\mu\nu}$ é dado por (a métrica que sobe ou abaixa índices é a de Minkowski)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu (1 - v_\phi^2). \quad (\text{A.2})$$

Para o restante desse apêndice, considere que \mathcal{S}' seja um outro referencial, que se move na direção x (paralelo ao campo elétrico externo) com uma velocidade V (constante) em relação ao

¹No limite da Óptica Geométrica, estaríamos analisando as trajetórias de raios luminosos. Logo, a existência de uma métrica efetiva é apenas válida para fótons, pelo fato de que estamos estudando a propagação de ondas eletromagnéticas. Assim, para fótons, não haveria diferença entre estar em um meio material com campos externos presentes num espaço-tempo de fundo Minkowskiano ou estar em um espaço-tempo efetivo com métrica dada pela Eq. (A.1) sem a presença de tais entidades.

referencial do laboratório \mathcal{S} . As coordenadas cartesianas dos dois referenciais estão relacionadas via transformação de Lorentz. Analogamente a \mathcal{S} , a velocidade de fase da onda monocromática em \mathcal{S}' seria definida por $v'_\phi \doteq \omega'/q'$, onde $q' \doteq |\vec{q}'|$.

A velocidade de fase v_ϕ não é em geral um invariante, como é simples de ser percebido. Observamos que $K^\mu K_\mu$ é o mesmo em todos os sistemas de coordenadas. No sistema de coordenadas \mathcal{S} (onde K^μ é definido), esse resultado é $\omega^2 - q^2$. Assim segue que $\omega^2 [1 - 1/v_\phi^2]$ é um invariante. Observe que $V^\mu K_\mu$ é outra quantidade cinematicamente conservada. No referencial \mathcal{S} , essa quantidade coincide com ω . Logo $\omega = V^\mu K_\mu = V'^\mu K'_\mu$. Observe ainda que em \mathcal{S}' , $V'^\mu K'_\mu$ não é igual a frequência da onda nesse sistema de referência. De fato, a igualdade acima faz menção ao efeito Doppler para a luz em diferentes sistemas de coordenadas. Assim, segue imediatamente que a métrica no sistema de coordenadas \mathcal{S}' se transforma como um tensor contravariante de rank 2.

Para a classe de sistemas de coordenadas em que é válida a relação $x'^0 = x^0$ e $x'^i = x^i(x^\mu)$, pode ser mostrado que a relação $K'_0 = K'_\mu V'^\mu$ é sempre válida, o que implica que a velocidade de fase da onda eletromagnética é um invariante. No entanto, não estaremos interessados em tais transformações de coordenadas.

A.3 Análise das Métricas Ópticas

Enfatizamos que para as velocidades de fase extraordinárias, a direção do raio não é aquela dada pelo vetor de onda [4]. Logo, segue que não faz sentido associarmos para as velocidades extraordinárias que K^μ é também a direção do raio em relação a um ponto P sobre a trajetória que esse segue no espaço-tempo. Isso apenas tem sentido para o raio ordinário.

No entanto, De Lorenci e Klippert [10] consideraram que para o raio extraordinário, a direção deste no espaço-tempo é a mesma que de K_μ . Ainda nesse trabalho, utilizando-se uma dada métrica efetiva, as curvas integrais de K_μ foram calculadas. O cálculo nos revela que não é possível, com a geometria efetiva utilizada, termos que a velocidade de um ponto P sobre a curva (definindo-se $v^2 = -g_{ij}v^i v^j$, com $i = 1, 2, 3$ e $v^i = dx^i/dt = (dx^i/d\tau)(d\tau/dt)$, τ sendo um parâmetro afim ao longo de tal curva integral de K_μ) é a mesma que a velocidade de fase da onda no limite da Óptica Geométrica. Esse resultado não é esperado, porque o ponto P também pertence a eikonal constante. Segundo os autores acima, é necessário modificar a definição da velocidade de P sobre a curva integral de K_μ para se obter v_ϕ . Mostraremos que com as métricas ópticas que deduziremos para os raios extraordinários, com a definição dada acima para a velocidade de P , esta é sempre igual à velocidade de grupo.

A equação generalizada de Fresnel pode ser posta na forma $f \doteq g^{\alpha\beta} K_\alpha K_\beta = 0$. Defina a

quantidade contravariante N^μ por

$$N^\mu = \frac{\partial f}{\partial K_\mu} = \frac{\partial f}{\partial \omega} (1, \vec{u}), \quad (\text{A.3})$$

onde \vec{u} é a velocidade de grupo, que supomos estar na mesma direção do raio. Tal fato é possível porque $f = f(\omega(\vec{q}), \vec{q})$ e a velocidade de grupo é definida por $\vec{u} \doteq \partial\omega/\partial\vec{q}$. Observamos que essa expressão é válida tanto para materiais usuais, quanto para metamateriais. No entanto, enquanto que para meios usuais, os coeficientes dielétricos poderiam ser não-dispersivos, isso não é o caso para as componentes negativas dos coeficientes dielétricos de metamateriais indefinidos.

Observe da Eq. (A.3), que N^μ é ortogonal à hipersuperfície $f = 0$ no espaço dos momenta. Seguindo G. Boillat, [48], assumiremos que os raios se propagam na direção de N^μ . Logo, deve existir uma hipersuperfície Σ' tal que N^μ é ortogonal a ela no espaço-tempo e essa se propague no espaço com velocidade \vec{u} . A direção do raio seria definida em uma pequena região dessa. Chamaremos N^μ de quadrivetor de propagação. Para uma discussão didática sobre o assunto, ver Ref. [40].

Seja o observador \mathcal{S} . Sua quadrivelocidade é dada por $V^\mu = \delta^\mu_0$. Logo, segue que

$$N^\mu = N^\alpha V_\alpha (1, \vec{u}). \quad (\text{A.4})$$

Contraindo o quadrivetor de propagação com ele mesmo (utilizando a métrica de Minkowski), segue a equação

$$\tilde{g}_{\mu\nu} N^\mu N^\nu = 0, \quad \text{onde} \quad \tilde{g}_{\mu\nu} \doteq \eta_{\mu\nu} - (1 - |\vec{u}|^2) V_\mu V_\nu. \quad (\text{A.5})$$

A Eq. (A.5) seria apenas um rótulo para expressarmos as métricas ópticas dos raios ordinário e extraordinários. Observe que as geometrias efetivas não poderiam em princípio serem escritas como dada pela Eq. (A.5), porque essas dependeriam das características das entidades propagantes (fótons) em tais espaço-tempos.

Observe que poderíamos afirmar em princípio que o raio efetivamente seguiria uma geodésica nula em um espaço-tempo com métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Pode-se mostrar esse resultado porque definimos N^μ como um vetor normal a alguma hipersuperfície Σ' [9]. Essa métrica óptica é também naturalmente simétrica. Para o raio ordinário, segue que $|\vec{u}|^2 = v_\phi^2$. Logo, concluímos que apenas para esse caso, as métricas ópticas dadas pelas Eqs. (A.2) e (A.5) são iguais. Como os vetores N^μ e K_μ são tipo-nulos para essa geometria, segue que ambos são proporcionais.

A métrica óptica dada pela Eq. (A.5) seria uma métrica válida para ambas as soluções ordinária e extraordinárias. Apenas temos liberdade de manipulação na sua componente 00, para o caso de um observador comóvel com o laboratório. Para a solução ordinária, a velocidade de fase (ou a de grupo) é independente das características da onda eletromagnética que se propaga no meio de interesse. Ou seja, havendo uma onda ordinária presente, esta está obrigada a se mover com uma velocidade dada pela Eq. (2.13). Nesse caso, a sua associada métrica

óptica [quando a expressão da velocidade de fase ordinária é substituída no segundo termo da Eq. (A.5)] poderia ser considerada uma métrica efetiva para a Relatividade Geral, isto é, uma analogia com um espaço-tempo com um conteúdo de matéria-energia que resulta na métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Curvas seguidas pelo raio ordinário são as mesmas que geodésicas nulas nesse espaço-tempo, conforme comentamos anteriormente. No entanto, da Eq. (A.5) e da Eq. (2.122), temos que essa “geometria efetiva ordinária” apenas pode descrever analogamente modelos com seção espacial isotrópica.

As métricas ópticas extraordinárias, tal como dada pela Eq. (A.5), quando as respectivas velocidades de grupo [obtidas da Eq. (3.17) com $v_\phi = v_\phi^\pm$] dos associados raios extraordinários são substituídas em tal equação, de forma geral dependem da direção de propagação da onda eletromagnética. No entanto, a direção do versor de onda (ou a direção do raio) pode ser escolhido inicialmente de forma arbitrária em relação a qualquer ponto P genérico no meio material. Seja a análise para algum dos raios extraordinários. Logo, para uma pequena região no entorno de P , a métrica óptica do associado raio extraordinário apenas dependeria das coordenadas espaço-temporais e do parâmetro \hat{q} e poderia ser vista como geometria efetiva. A curva obtida mediante as equações geodésicas apenas teria uma interpretação física até um ponto P' cujo versor de onda varie pouco em relação o valor constante estabelecido inicialmente. Assuma esse novo versor de onda (nova direção do raio) em P' , obtido do primeiro segmento calculado. Assumindo que esse versor é constante para outro pequeno entorno de P' , resolvemos novamente as equações geodésicas e estas nos darão outro ponto P'' onde o versor agora considerado não irá variar muito em relação ao estabelecido anteriormente, e assim por diante, até que construamos toda a curva integral de N^μ para o escolhido raio extraordinário. Esse é o caso uma vez que se a curva integral de N^μ para algum raio extraordinário é uma geodésica, então cada um dos seus segmentos constituintes são também geodésicas.

Seja a Eq. (A.5). Assuma um espaço-tempo onde essa seja sua métrica. A Lagrangeana para essa métrica seria, em um sistema de coordenadas cartesianas (t, x, y, z) ,

$$L(x^\mu, \dot{x}^\mu) \doteq \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} (|\vec{u}|^2 \dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2), \quad (\text{A.6})$$

onde $\dot{A} \doteq dA/d\tau$, com τ algum parâmetro afim ao longo da curva integral de N^μ . Suponha ainda que a velocidade de fase dependa de uma função arbitrária das coordenadas espaço-temporais e de alguns parâmetros constantes. A curva integral de N^μ seria obtida por meio da resolução do sistema de equações advindas das equações de Euler-Lagrange para a lagrangeana dada pela Eq. (A.6). Supomos ainda que $N^\mu = dx^\mu/d\tau$. Suponha novamente que $v^i = dx^i/dt = (dx^i/d\tau)(d\tau/dt)$, $i = 1, 2, 3$ é a componente i da velocidade do ponto P sob a curva integral de N^μ . Se definirmos $v_i \doteq \tilde{g}_{ij} v^j$ e $v^2 = -v^i v_i$ e utilizarmos que em relação à métrica efetiva $ds^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$, é trivial de ser mostrado que $|\vec{u}|^2 = v^2$. Logo, se a velocidade de grupo

dos raios é substituída no segundo termo da Eq. (A.5), se a velocidade de grupo é uma função qualquer das coordenadas espaço-temporais, segue que a velocidade de um ponto P sobre a curva integral de N^μ deve ser a mesma velocidade da hipersuperfície que se define o raio para cada instante de tempo.

Os comentários proferidos acima não são todos conclusivos e ainda estão em fase de desenvolvimento. O estudo de geometrias efetivas poderia nos ajudar nos testes das predições cinemáticas da Relatividade Geral. No contexto desse trabalho, ainda alguns esforços precisam ser dirigidos para se entender até que ponto a analogia óptica-gravitacional, descrita pela Eq. (A.5) [quando as velocidades de grupo dos raios ordinário e extraordinários para as respectivas ondas são substituídos nessa equação], pode ser feita e a correta interpretação dos seus resultados.

Referências

- [1] M.C. Netti, A.Harris, J.J. Baumberg, D.M. Whittaker, M.B.D. Charlton, M.E.Zoorob, and G.J. Parker, *Optical Trirefringence in Photonic Crystals Waveguides*, Phys. Rev. Lett. **86**, 1526 (2001).
- [2] <http://webmineral.com/data/Calcite.shtml>
- [3] M. Born, and E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1999).
- [4] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Vol. 8, Pergamon Press, New York (1984).
- [5] Y.N. Obukhov and G.F. Rubilar, *Fresnel analysis of wave propagation in nonlinear electrodynamics*, Phys. Rev. D, **66**, 024042 (2002).
- [6] V.A. De Lorenci, D.D. Pereira, *Magnetolectric birefringence as a unique effect in isotropic media*, Phys. Rev. D, **82**, 036605 (2010).
- [7] V.A. De Lorenci, R. Klippert, D.H. Teodoro, *Birefringence in nonlinear anisotropic dielectric media*, Phys. Rev. D, **70**, 124035 (2004).
- [8] V.A. De Lorenci, G.P. Goulart, *Magnetolectric birefringence revisited*, Phys. Rev. D **78**, 045015 (2008).
- [9] M. Novello, V.A. De Lorenci, J.M. Salim and R. Klippert, *Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics*, Phys. Rev. D, **61**, 45001 (2000).
- [10] V.A. De Lorenci, R. Klippert, *Analogue gravity from electrodynamics in nonlinear media*, Phys. Rev. D, **65**, 064027 (2002);
- [11] V.A. De Lorenci, M.A. Souza, *Electromagnetic wave propagation inside a material medium: an effective geometry interpretation*, Phys. Lett. B, **512**, 417-422 (2001);

- [12] M. Novello, J.M. Salim, *Effective Electromagnetic Geometry*, Phys. Rev. D, **63**, 083511 (2001); V.A. De Lorenci, *Effective Geometry for light travelling in material media*, Phys. Rev. E, **65**, 026612 (2002).
- [13] T. Roth and G.L.J.A. Rikken, *Observation of magnetoelectric Jones birefringence*, Phys. Rev. Lett., **85**, 4478 (2000).
- [14] T. Roth and G.L.J.A. Rikken, *Observation of magnetoelectric linear birefringence*, Phys. Rev. Lett., **88**, 063001 (2002).
- [15] N.B. Baranova, Yu.V. Bogdanov and B.Ya. Zel'dovich, *New electro-optical and magneto-optical effects in liquids*, Sov. Phys. Usp., **20**, 870 (1997).
- [16] V.A. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello, J.M. Salim, *Light propagation in non-linear electrodynamics*, Phys. Lett. B, **482**, 134 (2000).
- [17] V.E. Wood and R.E. Mills, *Non Occurrence of trirefringence*, Optica Acta, **16**, 1 (1969).
- [18] J.D. Joannopoulos, R.D. Meade and J.N. Winn, *Photonic Crystals*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1995).
- [19] <http://en.wikipedia.org/wiki/Ellipsometry>.
- [20] V.G. Veselago, *The Electrodynamics of Substances with simultaneous Negative values of ϵ and μ* , Soviet Physics Uspekhi, **10**, 509 (1968).
- [21] G.H.B. Thompson, *Unusual waveguide characteristics associated with the apparent negative permeability obtainable in ferrites*, Nature, **175**, 1135 (1955).
- [22] L. Solymar and E. Shamonina, *Waves in Metamaterials*, Oxford University Press, Oxford, New York (2009).
- [23] J.B. Pendry, D.R. Smith, *Reversing Light With Negative Refraction*, Physics Today, **57**, 37, June 2004.
- [24] A. Sihvola, *Metamaterials in electromagnetics*, Matamaterials, **1**, 2 (2007).
- [25] D.R. Smith, W.J. Padilla, D.C. Vier, S.C. Nemat-Nasser and S. Schultz, *Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity*, Phys. Rev. Lett. **84**, 4184 (2000).
- [26] J.B. Pendry, *Negative Refraction Makes a Perfect Lens*, Phys. Rev. Lett., **85**, 3966 (2000).

- [27] R.A. Shelby, D.R. Smith and S. Schultz, *Experimental verification of a negative index of refraction*, Science, **292**, 77 (2001).
- [28] I.I. Smolyaninov, E.E. Narimanov, *Metric Signature Transitions in Optical Metamaterials*, Phys. Rev. Lett., **105**, 067402 (2010).
- [29] D.R. Smith, D. Schurig, *Electromagnetic Wave Propagation in Media with Indefinite Permittivity and Permeability Tensors*, Phys. Rev. Lett., **90**, 077405 (2003).
- [30] D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Third ed., Printice Hall, New Jersey (1999).
- [31] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Vol.2, Butterworth Heine-
mann, New York (1975).
- [32] A. Alù and N. Engheta, *Achieving transparency with plasmonic and Metamaterials coatings*, Phys. Rev. E, **72**, 016623 (2005); K.L. Tsakmakidis, A.D. Boardman and O. Hess, *Trapped Rainbow storage of light in Metamaterials*, Nature, **450**, 397 (2007); N.I. Zheludev, *The Road Ahead for Metamaterials*, Science, **328**, 582 (2010).
- [33] I.I. Smolyaninov, V.N. Smolyaninova, A.V. Kildishev, V.M. Shalaev, *Experimental Observation of the trapped rainbow*, Appl. Phys. Lett., **96**, 211121 (2010).
- [34] C. Menzel, C. Helgert, C. Rockstuhl, E.-B. Kley, A. Tunnermann, T. Pertsch, F. Lederer, *Asymmetric Transmission of Linearly Polarized Light at Optical Metamaterials*, Phys. Rev. Lett., **104**, 253902 (2010).
- [35] V.C. Nguyen, L. Chen, K. Haltermann, *Total Transmission and total reflection by Zero Index Metamaterials*, Phys. Rev. Lett., **105**, 233908 (2010).
- [36] I.I. Smolyaninov, V.N. Smolyaninova, A.V. Klished, V.M. Shalaev, *Anisotropic Metamaterials Emulated by Tapered Waveguides: Application to Optical Cloaking*, Phys. Rev. Lett., **102**, 213901 (2009).
- [37] T. Ergin, N. Stenger, P. Brenner, J.B. Pendry, M. Wegener, *Three Dimensional Invisibility Cloak at Optical Wavelengths*, Science, **328**, 337 (2010).
- [38] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Thrid ed., John Willey and Sons, New York (1998).
- [39] R.W. Boyd, *Non-linear Optics*, Thrid ed., Elsevier (2008).

- [40] D.D. Pereira, *Estudo Comparativo entre o Formalismo Eikonal e o Formalismo das Ondas de Choque* (2009), *Dissertação de Mestrado* (disponível em <http://adm-net-a.unifei.edu.br/phl/pdf/0034576.pdf>).
- [41] G.P. Goulart, *Fenômenos Eletro-magneto-ópticos em meios materiais* (2007), *Dissertação de Mestrado* (disponível em <http://adm-net-a.unifei.edu.br/phl/pdf/0032381.pdf>).
- [42] J. Foster and J.D. Nightingale, *A short course in General Relativity*, Longman Scientific and Technical, England (1979).
- [43] F.W. Hehl, Y.N. Obukhov, *A gentle introduction to the foundations of classical electrodynamics: Meaning of the excitations (D , H) and field strengths (E , D)*, arXiv:physics/0005084 (2000).
- [44] J. Hadamard, *Leçons sur la Propagation des Ondes et les Équations de L'Hydrodynamique*, Hermann, Paris (1903).
- [45] A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity*, D. Reidel, Dordrecht, Holland, (1974).
- [46] R.R. Silva, *The trace formulas yield the inverse metric formula*, J. Math. Phys., 39, 6206 (1998).
- [47] G.R. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, Hold, Rinehart and Winston, Inc., New York (1968).
- [48] G. Boillat, *Nonlinear Electrodynamics: Lagrangians and Equations of Motion*, J. Math. Phys., **11**, 941 (1970).
- [49] L. Euler, *Elements of Algebra*, Longmann, London (1822).
- [50] V.A. De Lorenci, J.M. Salim, *Aspects of light propagation anisotropic dielectric media*, Phys. Lett. A, **360**, 10 (2006).
- [51] Brillouin, L., *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic Press, New York (1960).
- [52] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Mechanics*, Third ed., Butterworth Heinemann Press, Oxford (1976).
- [53] E. Recami and M. Zamboni-Rached, *Localized waves: a not-so-short review*, Adv. Imag. Elect. Phys., **156** (2009) [arXiv: 0902.2734v2]; E. Recami and M. Zamboni-Rached, *On the Localized Superluminal Solutions to the Maxwell equations*, IEEE J. Quant. Elect., **9** (2003) [arXiv: 0709.2191v1].