

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA**

**Caio Fernandes de Paula**

**Sintonia Analítica de Controladores PID por Resposta em  
Frequência para Sistemas de Fase Não-Monótona**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Automação e Sistemas Elétricos Industriais

Orientador: Dr. Luis Henrique de Carvalho Ferreira

**Fevereiro de 2011  
Itajubá - MG**

# *Epígrafe*

*“Mestre não é quem sempre ensina,  
mas quem sempre aprende”*

João Guimarães Rosa, escritor e romancista brasileiro.

## *Dedicatória e agradecimentos*

Agradeço a Deus pelas oportunidades em toda a minha vida.

Agradeço e também dedico este trabalho primeiramente aos meus pais, Ataíde e Zilda, por me apoiarem incondicionalmente durante todo o percurso.

Também devo agradecer ao restante dos meus familiares, especialmente minhas irmãs Liége e Gisele, pelo incentivo e carinho.

Em seguida, agradeço ao meu orientador e também amigo, Prof. Luis Henrique de Carvalho Ferreira, pela paciência, confiança e crédito em mim depositado.

Agradeço ao Prof. Carlos Alberto Murari Pinheiro por me apresentar esta maravilhosa área sobre a qual versa o trabalho e ao Prof. Agnaldo José da Rocha Reis por também contribuir para o enriquecimento deste trabalho.

Agradeço também a todos os amigos de república, faculdade, mestrado e grupo de pesquisa pelo incentivo e colaboração.

Agradeço à CAPES que, através do programa “Demanda Social”, viabilizou financeiramente este trabalho.

# *Resumo*

Uma técnica aprimorada de sintonia analítica de controladores PID por resposta em frequência é proposta neste trabalho. Esta técnica é desenvolvida para sistemas que apresentam curva de fase não-monotonicamente decrescente dentro da banda passante em malha aberta. Através de especificações de margem de fase e frequência de cruzamento de ganho, o método proposto permite reduzir a sobrepassagem da resposta ao degrau do sistema em malha fechada.

A fim de se alcançar tal aprimoramento, é necessário redefinir o conceito de margem de fase quando a resposta em frequência da planta apresenta fase não-monotonicamente decrescente dentro da banda passante em malha aberta. Sendo assim, o método proposto consiste em garantir a margem de fase mínima especificada dentro de toda a banda passante em malha aberta. Desta forma, a margem de fase pode continuar ser utilizada como um bom indicativo de robustez e ainda é possível utilizar-se o critério de estabilidade para a análise de sistemas de fase-mínima monótona e fase-mínima não-monótona.

Com este intuito, neste trabalho é introduzido o desenvolvimento das equações analíticas de compensação para as variações do controlador PID e apresentada uma análise crítica da metodologia proposta. Ainda demonstra-se que, caso o sistema apresente fase monótona dentro da banda passante em malha aberta, as equações de projeto desenvolvidas neste trabalho convergem para as equações clássicas de compensação por resposta em frequência.

A fim de demonstrar o potencial e a eficácia da técnica proposta, é proposto um exemplo de aplicação no qual o sistema a ser compensado tipicamente apresentará fase não-monótona dentro da banda passante em malha aberta.

**Palavras-Chave:** Sistemas de Fase Não-Monótona, Compensação por Resposta em Frequência, Controladores PID, Técnicas Analíticas de Sintonia de Controladores.

# *Abstract*

An improved analytical technique of PID controller design by frequency-response is proposed in this work. This technique is conceived to systems which present phase plot non-monotonically decrescent inside the open-loop bandwidth. The proposed methodology allows the designer to reduce the system overshoot for the closed-loop step response by means of phase margin and gain-crossover frequency specifications.

In order to achieve such improvement, it is necessary to redefine the concept of phase margin when the plant frequency-response presents non-monotonically decreasing phase inside the open-loop bandwidth. Thus, the proposed method consists in assuring the specified minimum phase margin inside all the open-loop bandwidth. Hence, the phase margin can still be used as a good robust indication and allows the Bode's stability criterion to be properly used to analyze stability of monotonic minimum-phase and non-monotonic minimum-phase systems.

For such purposes, the analytical equations development to PID controller variations are introduced and a critical analysis of the proposed methodology is presented in this work. Moreover, it is demonstrated that, provided that the system presents monotonic phase inside the open-loop bandwidth, the design equations developed in this work will approach the classical frequency-response design equations.

In order to demonstrate the potential and effectiveness of the proposed technique, it is proposed an application example which consists of the system to be controlled typically presents non-monotonic phase inside the open-loop bandwidth.

**Keywords:** Non-Monotonic Phase Systems, Frequency-Response Compensator Design, PID Controllers, Analytical Design Techniques of Compensators.

# *Sumário*

<b>Lista de Figuras</b>	p. viii
<b>Lista de Tabelas</b>	p. x
<b>Lista de abreviaturas e siglas</b>	p. xi
<b>Lista de símbolos</b>	p. xiii
<b>1 Introdução</b>	p. 1
1.1 Considerações Gerais . . . . .	p. 1
1.2 Sistemas de Fase Não-Monótona . . . . .	p. 2
1.3 Organização do Trabalho . . . . .	p. 4
<b>2 Métodos de Resposta em Frequência</b>	p. 6
2.1 O Conceito da Resposta em Frequência . . . . .	p. 6
2.1.1 Diagramas de Bode . . . . .	p. 10
2.1.2 Diagramas de Nyquist . . . . .	p. 10
2.2 Análise de Estabilidade Através da Resposta em Frequência . . . . .	p. 11
2.2.1 Análise de Estabilidade pelo Diagrama de Bode . . . . .	p. 12
2.2.2 Análise de Estabilidade pelo Diagrama de Nyquist . . . . .	p. 13
2.2.3 Estabilidade Relativa . . . . .	p. 13
2.3 Compensação Através da Resposta em Frequência . . . . .	p. 17
2.3.1 Compensação por Ganho Proporcional . . . . .	p. 17
2.3.2 Controlador PID . . . . .	p. 18

---

<b>3</b>	<b>Metodologia de Sintonia Analítica Aprimorada para Sistemas de Fase Não-Monótona</b>	p. 20
3.1	Fundamentos da Metodologia . . . . .	p. 20
3.2	Controlador PI . . . . .	p. 23
3.3	Controlador PD . . . . .	p. 26
3.4	Controlador PID . . . . .	p. 29
3.5	Análise e Discussão da Metodologia Proposta . . . . .	p. 37
3.5.1	Análise das Equações Obtidas . . . . .	p. 37
3.5.2	Análise da Rotina para Encontrar a Frequência de Margem de Fase Crítica . . . . .	p. 42
<b>4</b>	<b>Exemplo de Aplicação - Conversor Buck</b>	p. 44
4.1	Considerações Gerais . . . . .	p. 45
4.2	Análise e Modelagem do Conversor <i>Buck</i> . . . . .	p. 45
4.2.1	Análise em Regime Estacionário . . . . .	p. 46
4.2.2	Análise em Regime Transitório Empregando Modelo de Pequenos Sinais . . . . .	p. 47
4.3	Projeto de um Conversor <i>Buck</i> . . . . .	p. 51
4.3.1	Parâmetros do Conversor <i>Buck</i> . . . . .	p. 51
4.3.2	Especificações de Desempenho do Conversor <i>Buck</i> . . . . .	p. 54
4.3.3	Projeto via Posicionamento do Zero do Controlador . . . . .	p. 56
4.3.4	Projeto via Sintonia Analítica Tradicional . . . . .	p. 56
4.3.5	Projeto via Sintonia Analítica Aprimorada . . . . .	p. 58
4.4	Análise e Discussão dos Resultados . . . . .	p. 61
<b>5</b>	<b>Conclusão e Trabalhos Futuros</b>	p. 70
	<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 72

---

<b>Apêndice A – Rotina de Cálculo do Compensador PI</b>	p. 74
---	-------

<b>Apêndice B – Artigo Publicado no CBA 2010</b>	p. 76
--	-------

## *Lista de Figuras*

1.1	Diagrama de Bode da resposta em frequência do sistema exemplo. . . . .	p. 4
2.1	Sistema dinâmico $G$ . . . . .	p. 7
2.2	Margens de estabilidade relativa no diagrama de Bode. . . . .	p. 14
2.3	Margens de estabilidade relativa no diagrama de Nyquist. . . . .	p. 15
2.4	Diagrama de blocos geral de uma malha de controle. . . . .	p. 17
4.1	Diagrama simplificado do conversor <i>buck</i> síncrono empregado. . . . .	p. 46
4.2	Esboço do diagrama de Bode do estágio de potência do conversor <i>buck</i> . . .	p. 50
4.3	Diagrama esquemático do conversor <i>buck</i> síncrono como um conjunto de sistemas. . . . .	p. 53
4.4	Diagrama de Bode da resposta em frequência do conversor <i>buck</i> síncrono em malha aberta. . . . .	p. 54
4.5	Diagrama de Bode da resposta em frequência do conversor <i>buck</i> compensado via posicionamento do zero do controlador. . . . .	p. 57
4.6	Resposta ao degrau de amplitude $V_{REF}$ do conversor <i>buck</i> síncrono compensado via posicionamento do zero do controlador. . . . .	p. 58
4.7	Diagrama de Bode da resposta em frequência do conversor <i>buck</i> compensado via sintonia analítica tradicional. . . . .	p. 59
4.8	Resposta ao degrau de amplitude $V_{REF}$ do conversor <i>buck</i> síncrono compensado via sintonia analítica tradicional. . . . .	p. 60
4.9	Diagrama de Bode da resposta em frequência do conversor <i>buck</i> compensado via sintonia analítica aprimorada. . . . .	p. 61
4.10	Resposta ao degrau de amplitude $V_{REF}$ do conversor <i>buck</i> síncrono compensado via sintonia analítica aprimorada. . . . .	p. 62

- 
- 4.11 Diagrama de Bode da resposta em frequência do conversor *buck* compensado via sintonias analíticas. . . . . p. 63
- 4.12 Resposta ao degrau de amplitude  $V_{REF}$  do conversor *buck* síncrono compensado via sintonias analíticas. . . . . p. 64
- 4.13 Diagrama de Nyquist da resposta em frequência do conversor *buck* síncrono compensado via ambas as sintonias analíticas. . . . . p. 65
- 4.14 Diagrama de Nyquist da resposta em frequência do conversor *buck* síncrono compensado via ambas as sintonias analíticas. . . . . p. 66
- 4.15 Diagrama de Nyquist da resposta em frequência do conversor *buck* síncrono compensado via ambas as sintonias analíticas. . . . . p. 67

## *Lista de Tabelas*

3.1	Natureza do ganho $K_P$ <i>versus</i> coeficientes. . . . .	p. 33
3.2	Cálculo dos parâmetros de compensação <i>versus</i> tipo do compensador. . .	p. 37
3.3	Natureza do ganho $K_P$ <i>versus</i> ângulo de defasagem $\theta$ e coeficiente $c_k$ . . .	p. 41
3.4	Cálculo dos parâmetros de compensação <i>versus</i> parâmetro designado – Controlador PID. . . . .	p. 41
4.1	Tipo do compensador em função da localização das frequências. . . . .	p. 50
4.2	Parâmetros do conversor <i>buck</i> . . . . .	p. 52
4.3	Ganhos das técnicas de sintonia aplicadas. . . . .	p. 61
4.4	Arranjo de Routh para o sistema compensado via técnica de sintonia analítica tradicional. . . . .	p. 68

## *Lista de abreviaturas e siglas*

PID	Proporcional-Integral-Derivativo,	p. 1
LIT	Linear e Invariante no Tempo,	p. 2
CC	Corrente Contínua,	p. 5
SPD	Semi-Plano à Direita,	p. 9
SPE	Semi-Plano à Esquerda,	p. 10
BIBO	Bounded Input Bounded Output,	p. 11
MF	Margem de Fase,	p. 14
MG	Margem de Ganho,	p. 14
GND	Potencial de terra ( <i>Ground</i> ),	p. 45
MOS	Metal-Óxido-Semicondutor ( <i>Metal-Oxide-Semiconductor</i> ),	p. 46
PWM	Modulação em Largura de Pulso ( <i>Pulse Width Modulation</i> ),	p. 46
CA	Corrente Alternada,	p. 47

# *Lista de símbolos*

$\omega_u$	Frequência de cruzamento de ganho,	p. 12
$\omega_{180}$	Frequência de cruzamento de fase,	p. 12
$\omega_n$	Frequência natural ou frequência de oscilação não-amortecida de um sistema de segunda-ordem padrão,	p. 15
$\zeta$	Fator de amortecimento de um sistema de segunda-ordem padrão,	p. 15
$\phi_m$	Margem de fase crítica,	p. 16
$M_p$	<i>Overshoot</i> ou ultrapassagem máxima,	p. 16
$t_a$	Tempo de acomodação,	p. 16
$K_P$	Ganho Proporcional,	p. 18
$K_I$	Ganho Integral,	p. 18
$K_D$	Ganho Derivativo,	p. 18
$\theta$	Ângulo de defasagem do controlador,	p. 19
$\omega_m$	Frequência de margem de fase crítica,	p. 21
$\phi_u$	Margem de fase de cruzamento de ganho,	p. 21
$T_I$	Tempo ou período de integração,	p. 23
$T_D$	Tempo ou período de derivação,	p. 26
$e_{ss}$	Erro em regime permanente,	p. 29
$\Omega$	Razão de Monotonicidade,	p. 38
$V_{IN}$	Tensão de entrada do conversor <i>buck</i> ,	p. 45
$V_{OUT}$	Tensão de saída do conversor <i>buck</i> ,	p. 45
$T_S$	Período de chaveamento do conversor <i>buck</i> ,	p. 47
$f_S$	Frequência de chaveamento do conversor <i>buck</i> ,	p. 47
$D$	Razão de conversão de tensão do conversor <i>buck</i> ,	p. 47
$V_{OSC}$	Tensão pico-a-pico do oscilador do conversor <i>buck</i> ,	p. 48
$C$	Capacitância do capacitor de saída do estágio de potência do conversor <i>buck</i> ,	p. 48
$R_C$	Resistência série do capacitor de saída do estágio de potência do conversor <i>buck</i> ,	p. 48
$L$	Indutância do indutor de saída do estágio de potência do conversor <i>buck</i> ,	p. 48
$R_L$	Resistência série do indutor de saída do estágio de potência do conversor <i>buck</i> ,	p. 48

---

$R$	Resistência de carga do conversor <i>buck</i> ,	p. 48
$f_z$	Frequência do zero oriundo da resistência série do capacitor de saída do conversor <i>buck</i> ,	p. 49
$f_B$	Frequência da banda passante em malha aberta do conversor <i>buck</i> ,	p. 50
$V_{REF}$	Tensão de referência do conversor <i>buck</i> ,	p. 51
$g_m$	Transcondutância do amplificador do conversor <i>buck</i> ,	p. 51
$R_K$	Resistência do resistor de compensação do conversor <i>buck</i> ,	p. 51
$C_K$	Capacitância do capacitor de compensação do conversor <i>buck</i> ,	p. 51
$I_{OUT}$	Corrente de saída do conversor <i>buck</i> ,	p. 51
$R_1$	Resistência de realimentação série do conversor <i>buck</i> ,	p. 51
$R_2$	Resistência de realimentação paralela do conversor <i>buck</i> ,	p. 51

# 1 *Introdução*

## 1.1 Considerações Gerais

O controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo) é provavelmente o mais utilizado em sistemas de controle em realimentação negativa devido a sua simplicidade com boas propriedades dinâmicas e de robustez. Durante a última metade do século passado, grandes esforços acadêmicos e industriais tiveram como foco o aprimoramento da sintonia de controladores PID [1], com técnicas que vão desde o método empírico de Ziegler e Nichols [2] até as compensações analíticas por lugar das raízes e por resposta em frequência [3, 4].

Com o passar dos anos, as abordagens clássicas através de lugar das raízes e resposta em frequência foram sendo aprimoradas através de métodos que procuram uma melhor adaptação à planta, como o escalonamento de ganhos, integradores *anti-windup* [5] e boa parte das técnicas que vieram a ser chamadas de controle adaptativo [1].

Ainda assim, outras metodologias de sintonia de controladores PID também começaram e continuam a serem desenvolvidas com o advento das técnicas de otimização e inteligência artificial [1, 6, 7, 8, 9] e até abordagens não-lineares [10] e de ordem fracionária [11, 12]. Cominos e Munro [13] apresenta uma comparação entre uma boa parte das diferentes abordagens e técnicas de sintonia de controladores PID existentes.

Sendo assim, o controlador PID é, provavelmente, o mais utilizado e conhecido no projeto de sistemas de controle, inclusive comercialmente [3] e por isto este trabalho tem como objetivo desenvolver uma técnica de sintonia analítica aprimorada por resposta em frequência para sistemas que apresentam uma característica peculiar na curva de fase: a não-monotonicidade, que será discutida na próxima seção.

## 1.2 Sistemas de Fase Não-Monótona

O princípio por trás da compensação por resposta em frequência de um sistema dinâmico Linear e Invariante no Tempo (LIT) contínuo ou discreto é que todas as frequências que são amplificadas na função de transferência de malha aberta possuem a capacidade de exercer uma ação de controle em um sistema em realimentação negativa [14]. Este princípio define um conceito de banda passante para um sistema de controle, o qual é útil para entender os benefícios e as barreiras envolvidas quando se utiliza um sistema de controle em realimentação negativa. Em termos gerais, quanto mais larga for a banda passante na função de malha aberta, menor será o tempo de acomodação na resposta temporal e mais sensível o sistema em realimentação negativa será às variações de parâmetros e distúrbios. Entretanto, a estabilidade de um sistema em realimentação negativa está relacionada à equação característica, a qual está relacionada às frequências nas quais o ganho de malha aberta cruza com o ganho em malha fechada [3, 4, 14].

Considere um sistema de controle em realimentação unitária e negativa. É importante ter a ideia de que o controlador, planta e sensor formam uma unidade; crédito ou descrédito pelos resultados obtidos são atribuídos tanto a um como aos outros [2]. Assumindo que o controlador faça com que a função de transferência em malha aberta possua um comportamento passa-baixas na sua resposta em frequência com uma única frequência solução da equação característica, a banda passante em malha aberta pode então ser definida como a faixa de frequências entre zero e a frequência solução da equação característica, a qual é chamada frequência de cruzamento de ganho.

Para um sistema em realimentação negativa com a fase monotonicamente decrescente dentro da banda passante em malha aberta, a distância entre a fase na frequência de cruzamento de ganho e o limite de estabilidade de  $-180^\circ$  é chamada de margem de fase. Baseado no critério de estabilidade de Bode (válido somente para sistemas de fase mínima), se a margem de fase é positiva, então o sistema em malha fechada será estável [14].

Assim, a margem de fase pode ser vista como um *indicativo* de robustez, informando o quanto a fase do sistema em malha aberta pode variar de forma que o sistema em malha fechada ainda seja estável. Além do mais, ela está diretamente relacionada com o fator de amortecimento de um sistema de segunda ordem padrão, no qual quanto maior for o fator de amortecimento, menor será o *overshoot* do sistema [3, 4].

No entanto, a técnica clássica de sintonia analítica de controladores por resposta em

frequência considera que a margem de fase é sempre definida na frequência de cruzamento de ganho [3]. Contudo, esta consideração nem sempre é válida, pois, mesmo para um sistema de fase mínima, a simples presença de um zero no semiplano à esquerda localizado próximo aos pólos dominantes leva a uma resposta em frequência de fase não-monótona [3].

Considere um sistema dinâmico LIT contínuo que pode ser modelado através da seguinte equação diferencial:

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0u(t) \quad (1.1)$$

Um filtro passa-baixas *LC* que considera a resistência intrínseca do capacitor (comumente utilizado na eletrônica de potência), um sistema de aquecimento acoplado por dois ambientes ou um sistema de suspensão ativa automobilística são exemplos típicos cujo processo físico pode ser modelado pela equação diferencial em (1.1). Aplicando-se a Transformada de Laplace em (1.1) com condições iniciais nulas, isto é,  $\dot{y}(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$  e  $u(0) = 0$ , resulta em:

$$s^2y(s) + a_1sy(s) + a_0y(s) = b_1su(s) + b_0u(s) \quad (1.2)$$

Então, uma função de transferência admissível para o sistema exemplo em (1.2) pode ser obtida designando-se um valor específico aos parâmetros  $a_1$ ,  $a_0$ ,  $b_1$  e  $b_0$ . Suponha que tais parâmetros sejam iguais  $a_1 = 2$ ,  $a_0 = 9$ ,  $b_1 = 1$  e  $b_0 = 6$ , então uma possível função de transferência admissível (com condições iniciais nulas) associada à dinâmica expressa em (1.1) pode ser dada por:

$$G(s) = \frac{s + 6}{s^2 + 2s + 9} \quad (1.3)$$

na qual a frequência natural de oscilação não-amortecida é 3 [rad/s] e o fator de amortecimento é aproximadamente 0,33. Há ainda um zero no semiplano à esquerda localizado em 6 [rad/s] (o dobro da frequência natural). A Figura 1.1 mostra o diagrama de Bode da resposta em frequência do sistema exemplo dado em (1.3).

Como pode ser visto na Figura 1.1, existe um *vale* na curva de fase, próximo à frequência natural. Sendo assim, se no projeto do compensador for desejado uma frequência de cruzamento de ganho maior que a frequência natural de oscilação não-amortecida, o sistema irá apresentar um avanço de fase adicional dentro da banda passante em malha

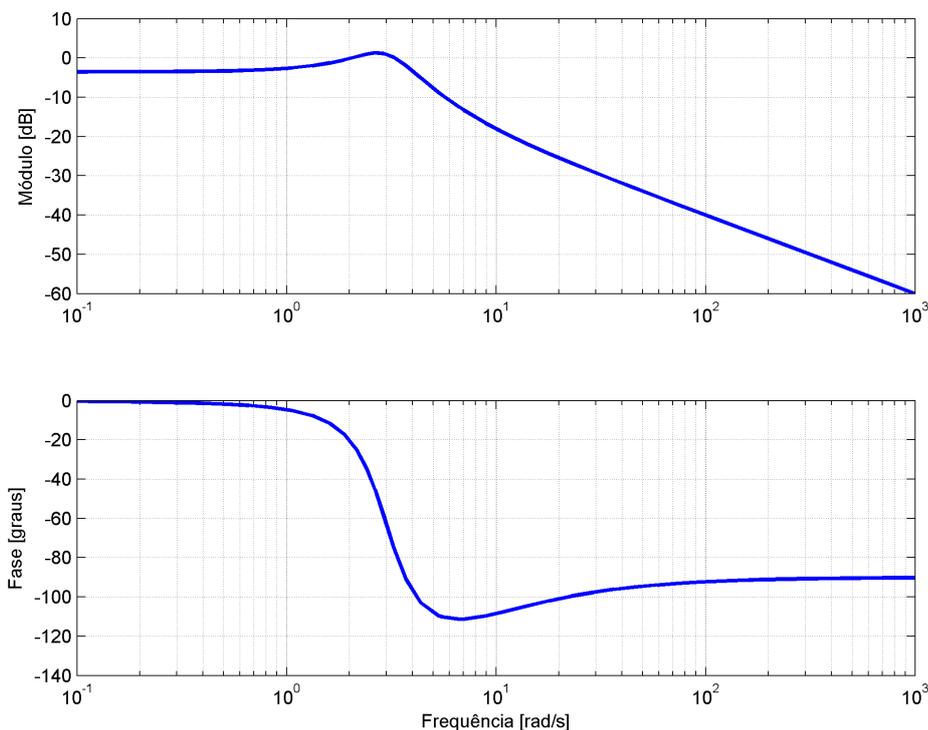


Figura 1.1: Diagrama de Bode da resposta em frequência do sistema exemplo.

aberta. Neste caso, a fase não decresce *monotonicamente* com o avanço da frequência, e conseqüentemente a menor fase dentro da banda passante em malha aberta não ocorre na frequência de cruzamento de ganho. Com isto a margem de fase não pode ser utilizada como um bom indicativo de robustez e desempenho, uma vez que o sistema irá possuir fases menores dentro da banda passante em malha aberta. À sistemas que apresentam tal característica na curva de fase dá-se o nome de *sistemas de fase não-monótona* e são a motivação para o desenvolvimento deste trabalho

## 1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho está dividido em capítulos organizados de forma a conferir uma sequência lógica e conceitual para se alcançar objetivo traçado.

O Capítulo 2 faz uma breve análise da literatura clássica dos métodos de resposta em frequência, desde a conceituação da abordagem, passando pela análise de estabilidade por resposta em frequência e a sintonia analítica tradicional de controladores PID em Phillips e Harbor [3].

O Capítulo 3 introduz o núcleo principal do trabalho, onde é desenvolvida a técnica de

sintonia analítica aprimorada que leva em consideração sistemas que apresentam fase não monótona. São apresentados desde os fundamentos da metodologia proposta, passando pelo desenvolvimento para cada tipo de controlador e culminando na análise crítica do método proposto, comparando-o com a sintonia analítica tradicional de Phillips e Harbor [3].

O Capítulo 4 apresenta um exemplo com potencial aplicação da metodologia proposta: um conversor CC-CC tipo *buck*. São feitas a análise e modelagem teórica do conversor, bem como o projeto de um conversor e seu respectivo sistema de controle, sendo este feito através de três técnicas distintas, a qual uma delas é a técnica proposta neste trabalho. Por fim, são feitas a análise e discussão dos resultados para o exemplo de aplicação, evidenciando a potencialidade da metodologia proposta.

Finalmente, no Capítulo 5 apresentam-se as conclusões deste trabalho, através da análise dos resultados obtidos e da proposição de trabalhos futuros que podem vir a enriquecer a metodologia proposta.

## 2 *Métodos de Resposta em Frequência*

Neste capítulo são revisados alguns conceitos básicos para a análise e compensação de sistemas sob o viés da resposta em frequência. Tais métodos têm sido utilizados exaustivamente e com sucesso na prática em sistemas de controle por décadas, e se mostraram indispensáveis quando se trata de compreender com clareza os benefícios, problemas e limitações na teoria e prática de sistemas de controle realimentados.

### 2.1 O Conceito da Resposta em Frequência

Existem diversas abordagens para exemplificar o conceito da resposta em frequência. Ao se substituir matematicamente  $s$  por  $j\omega$  em um sistema com função de transferência  $G(s)$  tem-se a chamada *descrição da resposta em frequência*. A resposta em frequência pode ser usada para descrever:

1. A resposta que um sistema apresenta quando na entrada aplicam-se sinais senoidais com frequências variantes.
2. As frequências contidas em um sinal determinístico via Transformada de Fourier.
3. A distribuição dos espectros de frequência de um sinal estocástico via Função Densidade Espectral.

Pela abordagem que relaciona sistemas e sinais apenas a primeira interpretação é útil e será utilizada neste trabalho, uma vez que possui a vantagem de estar diretamente relacionada com o domínio do tempo onde para cada frequência  $\omega$ , o número complexo  $G(j\omega)$  possui uma *interpretação física*. As outras duas interpretações não possuem significado físico que as relacione à  $G(j\omega)$ , pois é a distribuição em relação às outras frequências que é importante.

Considere então um sistema dinâmico linear de dimensão finita  $G$  que relaciona uma saída  $y$  à uma entrada  $u$ :

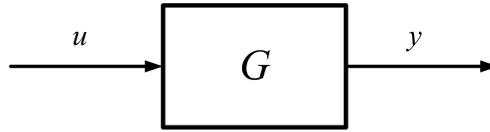


Figura 2.1: Sistema dinâmico  $G$ .

Pela Transformada de Laplace, tem-se que:

$$y(s) = G(s)u(s) . \quad (2.1)$$

Considere agora que na entrada  $u$  é aplicado um sinal senoidal persistente (aplicado desde  $t = -\infty$ ) com amplitude  $u_0$ , frequência  $\omega$  [rad/s] e fase  $\alpha$  [rad]. Ou seja, no domínio do tempo, o sinal  $u(t)$  pode ser descrito por:

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t + \alpha) . \quad (2.2)$$

Neste caso, o sinal de saída  $y$  também será um sinal senoidal persistente, com amplitude  $y_0$  e fase  $\beta$  [rad]. Uma vez que  $G$  é um sistema linear, o sinal  $y$  também possuirá a mesma frequência  $\omega$  [rad/s]:

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \beta) . \quad (2.3)$$

Aqui  $y_0$  e  $u_0$  representam magnitudes e por isto são não-negativos. Desta forma, a análise de (2.2) e (2.3) indica que há uma relação entre as amplitudes de  $y$  e  $u$  e que a saída  $y$  está defasada de  $u$  da ordem de  $\phi = \beta - \alpha$ . Considere a notação fasorial de um número complexo  $f$  em função da frequência  $\omega$ :

$$f(j\omega) = |f(j\omega)| \angle f(j\omega) \quad (2.4)$$

onde  $|\cdot|$  denota o valor absoluto (magnitude) de  $f$  e  $\angle$  denota a fase de  $f$ .

Relembrando-se das propriedades das operações com números complexos e de (2.1), tem-se que:

$$|y(j\omega)| = |G(j\omega)| \cdot |u(j\omega)| \quad (2.5a)$$

$$\angle y(j\omega) = \angle G(j\omega) + \angle u(j\omega) \quad (2.5b)$$

Logo:

$$|G(j\omega)| = \frac{y_0}{u_0} \quad (2.6a)$$

$$\angle G(j\omega) = \beta - \alpha = \phi . \quad (2.6b)$$

Desta forma, o conjunto de equações (2.6) mostra que a relação das amplitudes dos sinais de saída e entrada e a defasagem angular entre eles pode ser obtido diretamente da Transformada de Laplace de  $G(s)$  depois de substituir  $s = j\omega$  e avaliar o módulo e fase de  $G(j\omega)$  para cada  $\omega$ .

Em outras palavras, *um sinal senoidal de frequência  $\omega$  que passa através de um sistema dinâmico linear  $G(s)$  tem sua amplitude aumentada (ou diminuída) por um fator  $|G(j\omega)|$  e sua fase deslocada por um fator  $\angle G(j\omega)$* . Sendo assim, diz-se que  $G(j\omega)$  é a resposta em frequência de  $G(s)$ .

Naturalmente, vê-se que tanto  $|G(j\omega)|$  quanto  $\angle G(j\omega)$  dependem da frequência  $\omega$ . Sendo  $G(j\omega)$  um número complexo, pode-se plotar explicitamente esta dependência através de um gráfico módulo e fase em função de  $\omega$  como variável independente ou implicitamente no plano complexo onde para cada  $\omega$  há uma parte real e imaginária de  $G(j\omega)$ .

A primeira forma fornece o tão conhecido *Diagrama de Bode*, também chamado de curva de Bode, onde geralmente se emprega uma escala logarítmica para frequência e módulo e uma escala linear para a fase. A segunda fornece o também conhecido *Diagrama de Nyquist* [14].

**Definição 2.1** (Fase Mínima). *Um sistema estável é dito de fase-mínima se a relação entre módulo e fase é única para toda a resposta em frequência.*

Em outras palavras, o termo *fase mínima* se refere ao fato que o sistema possui o mínimo atraso de fase possível para um determinado módulo  $|G(j\omega)|$ , considerando um sistema próprio (número de pólos igual ao número de zeros) ou estritamente próprio (número de pólos superior ao número de zeros). Zeros no Semi-Plano à Direita (SPD) e atrasos de transporte contribuem com um atraso de fase adicional para o sistema quando comparados à um sistema de fase-mínima com o mesmo ganho, e por esta razão sistemas

que apresentem tais características são chamados de *sistema de fase não-mínima*. Por exemplo, considere os três sistemas a seguir:

1.  $G_1(s) = 1$ ;
2.  $G_2(s) = \frac{s-a}{s+a}$ ;
3.  $G_3(s) = e^{-\tau s}$ .

Todos os sistemas acima apresentam módulo constante igual a 1. No entanto, enquanto a fase de  $G_1(s)$  é constante em 0 [rad] (ou seja, uma relação constante), o sistema  $G_2(s)$  possui fase igual a  $-2 \tan^{-1}(\omega/a)$  [rad] e o sistema  $G_3(s)$  fase igual a  $-\omega\tau$  [rad]. Isto mostra que a relação entre ganho e fase para  $G_2(s)$  e  $G_3(s)$  não é única para toda a resposta em frequência. Para  $G_2(s)$ , vê-se que a fase pode atrasar em até  $-\pi$  [rad] quando  $\omega$  tende ao infinito e para  $G_3(s)$  há múltiplos *giros de fase* conforme  $\omega$  cresce.

Logo, qual a relação entre um zero no SPD e a consequente conclusão de que um sistema que o apresenta é de fase não-mínima? Intuitivamente um zero é responsável por avançar a fase de um sistema. No entanto, para um zero no SPD:

$$z(s) = s - a , \quad (2.7)$$

o módulo de  $z(s)$  é  $\sqrt{\omega^2 + a^2}$  e a fase é  $-\tan^{-1}(\omega/a)$  [rad]. Logo, infere-se que o zero, ao contrário do que se espera, contribui para o atraso da fase do sistema, ferindo além da definição de sistema de fase mínima, o senso de que o sistema não possui o mínimo atraso de fase possível.

Agora, imagine um pólo no SPD (o que caracteriza um sistema instável):

$$p(s) = \frac{1}{s-a} . \quad (2.8)$$

O módulo do pólo em (2.8) é  $(\omega^2 + a^2)^{-1/2}$  e a fase é  $\tan^{-1}(\omega/a)$ . Vê-se que o pólo no SPD contribui para o *avanço* da fase no sistema, ao contrário do que se espera (um atraso de fase). Embora por definição não possa ser considerado um sistema de fase mínima, uma vez que não é estável, não pode ser considerado um sistema de fase não-mínima, uma vez que o pólo no SPD contribui para o mínimo atraso de fase possível no sistema.

Uma definição mais *conservadora* de fase mínima requer que o sistema possua pólos e zeros apenas no Semi-Plano à Esquerda (SPE). No entanto, como será visto adiante na

análise de estabilidade pelo critério de Bode, apenas o zero no SPD se mostra um inconveniente. Pelo exposto, neste trabalho (como em muitos outros trabalhos e referências na literatura), considera-se um sistema de fase mínima aquele que não possui nem zeros no SPD nem atrasos de transporte na malha aberta.

### 2.1.1 Diagramas de Bode

Como mencionado anteriormente, o diagrama de Bode expressa a dependência do módulo e da fase de um sistema explicitamente em função da frequência. Usualmente, para a curva de módulo  $\times$  frequência, emprega-se escala logarítmica em ambos, sendo que o módulo é geralmente expresso em decibéis. Já para a curva de fase  $\times$  frequência é usual empregar-se a fase numa escala linear, geralmente medida em graus, e a frequência em escala logarítmica.

Muito embora hoje existam *softwares* que possuem a capacidade de construir o diagrama de Bode com extrema fidelidade e facilidade, em alguns casos o conhecimento de curvas assíntotas dos diagramas de Bode se mostra útil, como por exemplo, para se identificar sistemas de fase não-monótona. Phillips e Harbor [3] faz uma análise bastante abrangente de como traçar as curvas assíntotas das curvas de módulo e fase para os principais termos presentes em funções de transferência lineares, tais como pólos e zeros finitos, pólos e zeros na origem, pólos e zeros complexo-conjugados e atraso de transporte ideal (*ideal time delay*).

Uma característica elementar da influência dos zeros na curva de fase da resposta em frequência é o avanço de fase que eles proporcionam. Se um sistema tiver um ou mais pólos posicionados *antes* do zero na frequência, o comportamento da curva de fase irá apresentar um *vale* a partir da frequência característica do zero, fazendo com que o sistema apresente fase não-monótona, isto é, a fase não decai continuamente com o avanço da frequência. De fato, qualquer termo que propicia um avanço de fase pode acarretar um sistema de fase não-monótona. Zeros no SPE e pólos instáveis na malha aberta contribuem bastante para isso [3].

### 2.1.2 Diagramas de Nyquist

O diagrama de Nyquist essencialmente contém a mesma informação que o diagrama de Bode, porém, ao invés de ser um diagrama de módulo e fase em função da frequência, constroi-se um diagrama de parte real e parte imaginária do sistema dinâmico implícita-

mente em função da frequência, inclusive para frequências negativas (embora estas não possuam significado físico). Desta forma, o diagrama de Nyquist também é conhecido como um diagrama *polar*.

## 2.2 Análise de Estabilidade Através da Resposta em Frequência

Existem diversos conceitos e definições para a estabilidade de um sistema dinâmico. Para sistemas dinâmicos LIT, um conceito bastante empregado e aceito é o de *estabilidade BIBO* (*Bounded Input Bounded Output*). Em outras palavras, um sistema dinâmico LIT é dito estável se, para uma entrada limitada em magnitude a saída também é limitada em magnitude.

Para uma função de transferência no domínio de Laplace isto equivale a dizer que todos os pólos da função de transferência devem estar situados no SPE, excluindo o eixo imaginário. Observe então que esta definição não restringe estabilidade ao sistema por si só, ou seja, um sistema pode ser instável em malha aberta e estável em malha fechada (afinal, um dos objetivos de uma malha de controle é estabilizar um sistema instável) e o oposto também se aplica. Observe que aqui sistema também não deve ser entendido só pela planta ou planta de processo: o controlador, sensores e atuadores também devem estar inclusos.

Para averiguar a estabilidade da malha aberta o método mais usual é computar todos os pólos do sistema. No entanto, é mais comum averiguar a estabilidade da malha fechada. Para um sistema de controle usual com realimentação negativa, representada através da planta  $G(s)$  e função de realimentação  $H(s)$ , com entrada de comando (ou referência)  $r(s)$  e saída  $y(s)$ , a função de transferência avaliada da saída para a entrada, ou seja, de  $y(s)$  para  $r(s)$ , de forma a se analisar a estabilidade de acordo com o conceito estabilidade BIBO, é:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2.9)$$

onde os pólos são as raízes de  $1 + G(s)H(s)$ , também conhecida como equação característica. Sem perda de generalidade, assuma que a função de realimentação  $H(s)$  é unitária e então aplicando-se o conceito da resposta em frequência, tem-se que:

$$G(j\omega) = -1 \quad (2.10)$$

de forma que o sistema seja criticamente estável em malha fechada (ou seja, estável mas oscilante). A equação (2.10) é a base para dois critérios de estabilidade amplamente utilizados: o critério de estabilidade de Bode e o critério de estabilidade de Nyquist.

### 2.2.1 Análise de Estabilidade pelo Diagrama de Bode

Assumindo que o sistema  $G(s)$  seja fisicamente factível, ou seja, possui no mínimo tantos pólos quantos zeros, o ponto  $-1$  equivale em termos de módulo e fase a  $1 \angle -180^\circ$ . Desta forma, a equação (2.10) pode ser reescrita como:

$$G(j\omega) = 1 \angle -180^\circ . \quad (2.11)$$

Sabendo-se que é possível decompor  $G(j\omega)$  em módulo e fase, então a equação (2.11) é reescrita como:

$$|G(j\omega)| \angle G(j\omega) = 1 \angle -180^\circ \quad (2.12)$$

Então, pela equação (2.12), a correspondência entre todas as raízes da equação característica estarem no SPE equivale a:

- A fase de  $G(j\omega)$  estar acima de  $-180^\circ$  na frequência onde o módulo de  $G(j\omega)$  cruza o ganho unitário no sentido de amplificação para atenuação.
- O módulo de  $G(j\omega)$  ser menor que a unidade na frequência onde a fase de  $G(j\omega)$  cruza os  $-180^\circ$  de cima (fase maior que  $-180^\circ$ ) para baixo (fase menor que  $-180^\circ$ ).

A frequência obtida no primeiro item é geralmente conhecida como frequência de cruzamento de ganho (*gain crossover frequency*), geralmente denotada por  $\omega_u$ . A frequência característica do segundo item é conhecida como frequência de cruzamento de fase (*phase crossover frequency*), geralmente denotada por  $\omega_{180}$ . Desta forma ao se analisar o critério de estabilidade de Bode é necessário a existência e unicidade de ambas frequências acima [14] e que o sistema não possua nem pólos nem zeros no SPD aberto.

De certa forma a necessidade de todos os pólos e zeros da malha aberta estarem no SPE é justificável, pois o avanço de fase que um pólo instável produz poderia levar a

conclusão de que o sistema é estável sendo que na realidade o sistema pode ser instável. O zero no SPD se traduz na contraparte: a análise poderia concluir que o sistema é instável (pelo atraso de fase) sendo que na realidade ele pode ser estável.

Uma das formas de se contornar tal problema é utilizar o critério de estabilidade de Nyquist.

### 2.2.2 Análise de Estabilidade pelo Diagrama de Nyquist

A análise de estabilidade pelo critério de Nyquist é baseado no princípio do argumento de Cauchy [3]. Em suma, o critério diz que para um sistema ser estável na malha fechada, o número de circulações *anti-horárias* deve ser igual ao número de pólos instáveis na malha aberta. Seja  $Z$  o número de pólos instáveis na malha fechada,  $P$  o número de pólos instáveis na malha aberta e  $N$  o número de circulações em torno do ponto crítico  $-1$  (positivo se as circulações forem *horárias* e negativo caso sejam *anti-horárias*), o critério diz que:

$$Z = P + N \quad (2.13)$$

e logo  $Z$  deve ser igual a zero para um sistema estável na malha fechada. Observe que  $Z$  negativo embora não caracterize um sistema instável por definição também não possui nenhum significado físico e logo qualquer conclusão não pode ser obtida.

O fato do critério de Nyquist ser tão popular para a análise de estabilidade em resposta em frequência se deve ao fato de ser um diagrama polar, e com isso pólos e zeros no SPD aberto não se tornam um problema na análise.

Embora um sistema real e de valor prático (usável) deva ser estável, há outras considerações além de estabilidade. Primeiro, ele deve possuir *resposta transitória* e desempenho aceitáveis e possuir margens de segurança para inferir estabilidade [3]. À isso dá-se o nome de *estabilidade relativa*.

### 2.2.3 Estabilidade Relativa

Além de estabilidade, um sistema deve possuir alguma *margem de segurança* para assegurar a estabilidade.

Considere inicialmente um sistema que tenha a sua resposta em frequência representada através do diagrama de Bode. Conforme mencionado na seção 2.2.1, para um sistema

ser estável, a fase de  $G(j\omega_u)$  deve ser *maior* que  $-180^\circ$ . Logo, o senso comum diz que quanto *maior* for  $\angle G(j\omega_u)$ , maior a margem de segurança para assegurar a estabilidade. Desta forma, define-se como *Margem de Fase* (MF) o quanto a fase de  $G(j\omega_u)$  *dista* da linha de  $-180^\circ$ .

Também conforme mencionado na seção 2.2.1, o sistema também deve possuir módulo menor que a unidade na frequência onde a curva de fase cruza de cima para baixo a linha de  $-180^\circ$ . Logo, o senso comum também diz que quanto *menor* for  $|G(j\omega_{180})|$ , maior a margem de segurança para assegurar a estabilidade. Desta forma, define-se como *margem de ganho* (MG) o quanto o módulo de  $G(j\omega_{180})$  pode *aumentar* de forma que não seja maior que a unidade e consequentemente instável.

Logo, neste trabalho considera-se que tanto a margem de fase quanto a margem de ganho podem ser consideradas como *margens de estabilidade relativa*. A Figura 2.2 ilustra como obter tais informações a partir do diagrama de Bode.

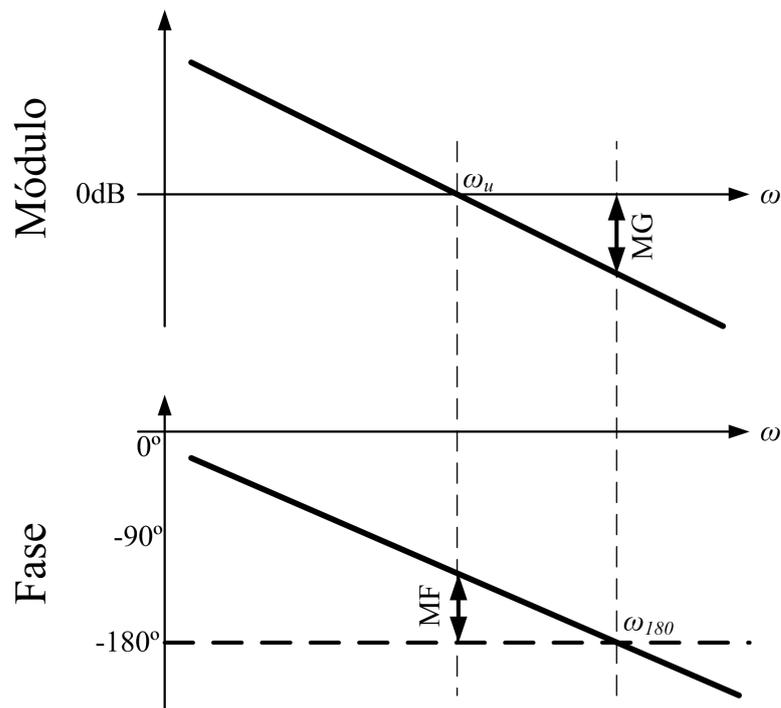


Figura 2.2: Margens de estabilidade relativa no diagrama de Bode.

Sabendo que o diagrama de Nyquist contém essencialmente as mesmas informações que o diagrama de Bode, as margens de estabilidade relativa então podem ser retiradas do diagrama de Nyquist conforme ilustrado pela Figura 2.3.

Quando o sistema possui múltiplas frequências onde a linha de  $-180^\circ$  é cruzada na curva de fase, uma das soluções para a análise é esboçar o diagrama de Nyquist para

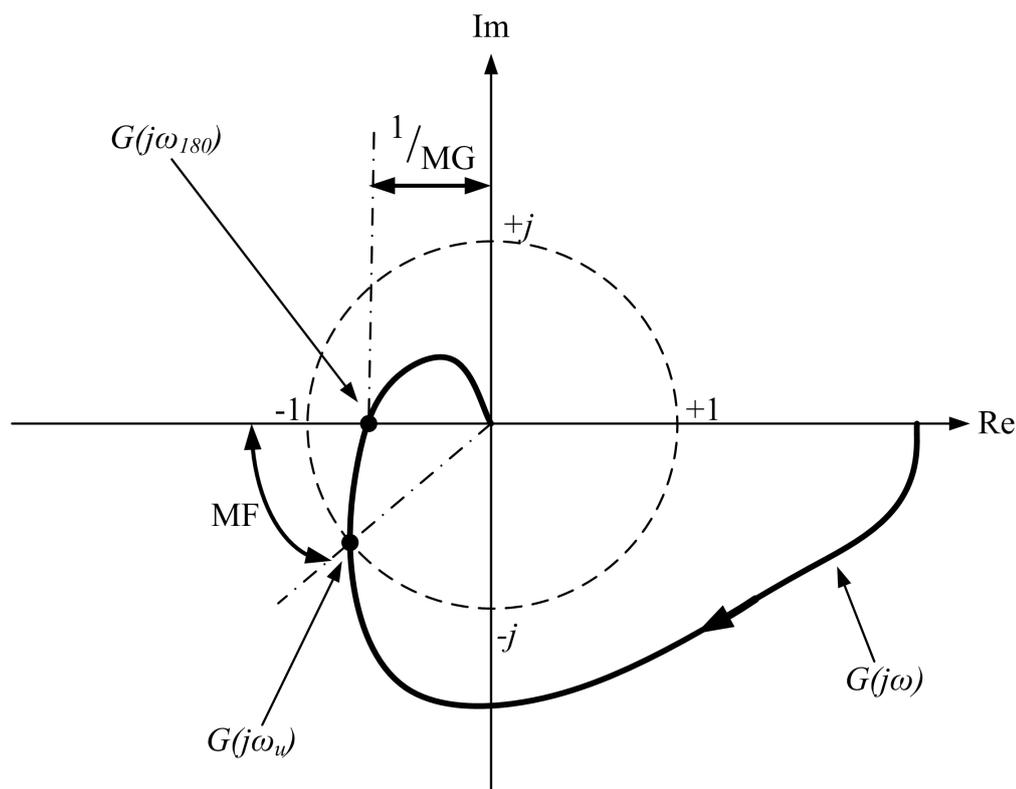


Figura 2.3: Margens de estabilidade relativa no diagrama de Nyquist.

averiguar a estabilidade e depois, através do diagrama de Bode, verificar quais são as margens de ganho correspondentes e adotar a menor delas [3, 14].

No entanto, uma das margens de estabilidade relativa tem uma correlação íntima com uma característica de desempenho da resposta ao degrau: a margem de fase.

Considere um sistema com um pólo na origem e outro pólo definido da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} . \quad (2.14)$$

Muitos sistemas físicos podem ser descritos pela equação (2.14). No entanto, aplicando realimentação negativa e unitária e fechando-se a malha, a função de transferência avaliada da saída  $y(s)$  para a entrada  $r(s)$  é:

$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} . \quad (2.15)$$

Observe que a equação (2.15) possui exatamente a mesma equação que um sistema de segunda-ordem padrão com fator de amortecimento  $\zeta$  e frequência natural de oscilação não-amortecida  $\omega_n$ . É possível provar analiticamente que a margem de fase  $\phi_m$  do sistema

é dada por [3]:

$$\phi_m = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}} \right). \quad (2.16)$$

A equação (2.16) fornece a relação exata entre margem de fase e fator de amortecimento para o sistema em (2.14). No entanto, como nem todos os sistemas são descritos por (2.14) e também como forma de simplificação, geralmente, utiliza-se a seguinte aproximação:

$$\phi_m = 100\zeta [^\circ]. \quad (2.17)$$

A equação (2.17) é muito mais simples e em geral é uma boa aproximação para (2.16) para muitas aplicações [3]. Para um sistema de segunda-ordem padrão com malha fechada  $T(s)$  dado por (2.15), também é possível provar analiticamente que a ultrapassagem máxima, ou *overshoot*,  $M_p$ , do sistema para a resposta ao degrau é igual a:

$$M_p = \exp \left( -\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \times 100 [\%]. \quad (2.18)$$

Também para o sistema de segunda-ordem padrão em (2.15) o tempo de acomodação  $t_a$  (*settling time*), que é o tempo decorrente onde as amplitudes das oscilações da saída não ultrapassam  $\pm 5\%$  do valor final, pode ser aproximado para [14]:

$$t_a = \frac{4}{\zeta\omega_n} [s]. \quad (2.19)$$

Em geral, considera-se que a frequência de cruzamento de ganho  $\omega_u$  é aproximadamente igual à frequência natural de oscilação não-amortecida  $\omega_n$ , logo:

$$\omega_u \approx \omega_n. \quad (2.20)$$

As relações descritas pelas equações (2.17)-(2.20) fornecem o conceito básico da compensação por técnicas de resposta em frequência: designar os parâmetros do compensador de forma que a malha de controle  $K(s)G(s)H(s)$  possua margem de fase  $\phi_m$  e frequência de cruzamento de ganho  $\omega_u$  desejadas, sabendo que tais especificações no domínio da frequência terão relação direta com características de desempenho no tempo, através da

resposta ao degrau.

É importante ressaltar que as especificações na frequência podem não ser os únicos objetivos no projeto de uma malha de controle. Em geral, além de ultrapassagem máxima e tempo de acomodação, ocasionalmente deve-se levar em consideração o erro em regime permanente, margem de ganho, sensibilidade à variação de parâmetros, rejeição à distúrbios e ruídos, amplitude dos sinais de controle, entre outros [3].

## 2.3 Compensação Através da Resposta em Frequência

A seção anterior apresentou as bases da análise de estabilidade por resposta em frequência e as conseqüentes relações entre especificações no domínio da frequência e características de desempenho no tempo. Nesta seção apresentar-se-ão alguns conceitos clássicos de compensação no domínio da frequência. Considere o diagrama de blocos geral de um sistema de controle:

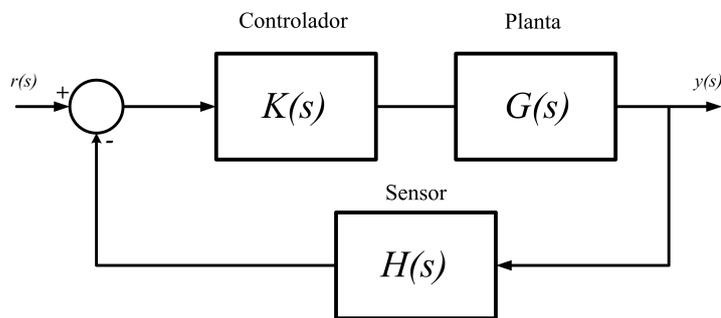


Figura 2.4: Diagrama de blocos geral de uma malha de controle.

Primeiramente assume-se o tipo mais simples de controlador: um ganho proporcional.

### 2.3.1 Compensação por Ganho Proporcional

Para um ganho proporcional, o compensador  $K(s)$  é simplesmente um ganho  $K$ . Uma vez que  $K$  é um número real, seu efeito só é visto na curva de módulo no diagrama de Bode: aumentando-se o valor de  $K$  desloca-se a curva de módulo para cima e diminuindo-se  $K$  desloca-se a curva de módulo para baixo. Assumindo que o sistema tenha módulo e fase decaindo com o avanço da frequência, como na Figura 2.2, um aumento de  $K$  provoca um aumento da frequência de cruzamento de ganho e conseqüentemente uma diminuição da margem de fase, reduzindo o tempo de acomodação e aumentando o *overshoot*.

Com a diminuição do valor de  $K$  ocorre o inverso: uma diminuição da frequência de cruzamento de ganho e um conseqüente aumento na margem de fase, reduzindo o *overshoot* e aumentando o tempo de acomodação. Desta forma, vê-se que os recursos de um controlador puramente proporcional são limitados: é possível apenas especificar margem de fase ou frequência de cruzamento de ganho.

Desta forma é necessário lançar-se mão de um controlador *dinâmico*, ou seja, que possua a capacidade de alterar tanto a curva de fase como a curva de módulo. Entre alguns tipos, ou topologias, de compensadores amplamente utilizados com esta capacidade pode-se elencar os compensadores de atraso/avanço de fase (*Phase Lead/Phase Lag*) e os controladores PID. Devido as suas boas propriedades de robustez e amplo conhecimento e disponibilidade comercial [1, 3], a próxima seção é dedicada ao controlador PID. Convém salientar que o estudo para o controlador de atraso/avanço de fase também pode ser encontrado em Phillips e Harbor [3].

### 2.3.2 Controlador PID

O controlador PID clássico, definido em termos de três ganhos, é dado por:

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (2.21)$$

onde  $K_P$  é o ganho proporcional,  $K_I$  o ganho integral e  $K_D$  o ganho derivativo. Conforme pode ser visto pela equação (2.21), uma das propriedades que tornam o controlador PID tão popular é o pólo na origem que ele insere no sistema. Conforme mencionado por Ogata [4], o pólo na origem se traduz num *indicativo* de robustez bastante importante para o sistema.

Pela Figura 2.4 e tomando a resposta em frequência, tem-se que a equação característica é dada por:

$$K(j\omega)G(j\omega)H(j\omega) = -1 . \quad (2.22)$$

Se na especificação é desejado uma margem de fase  $\phi_m$  e uma frequência de cruzamento de ganho  $\omega_u$ , então a equação (2.22) se traduz em:

$$K(j\omega_u)G(j\omega_u)H(j\omega_u) = 1 \angle -180^\circ + \phi_m \quad (2.23)$$

que pode ser decomposta em duas equações distintas de módulo e fase, considerando-se  $K(j\omega_u)$  como incógnita:

$$|K(j\omega_u)| \cdot |G(j\omega_u)H(j\omega_u)| = 1 \quad (2.24a)$$

$$\angle K(j\omega_u) + \angle G(j\omega_u)H(j\omega_u) = -180^\circ + \phi_m . \quad (2.24b)$$

As equações (2.24a) e (2.24b) fornecem as restrições básicas para o projeto de qualquer compensador no domínio da frequência. Resolvendo-se para o controlador PID em (2.21) resulta em [3]:

$$\theta \triangleq -180^\circ + \phi_m - \angle G(j\omega_u)H(j\omega_u) \quad (2.25a)$$

$$K_P = \frac{\cos \theta}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} \quad (2.25b)$$

$$K_D \omega_u - \frac{K_I}{\omega_u} = \frac{\sin \theta}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} . \quad (2.25c)$$

As equações (2.25a)-(2.25c) se traduzem na técnica clássica de sintonia analítica de controladores PID. Conforme pode ser visto, este não é um problema determinístico para o controlador PID, uma vez que ou  $K_I$  ou  $K_D$  deve ser designado à priori. Em geral, escolhe-se  $K_I$  pela possibilidade deste ser calculado através da equação de erro em regime permanente. No entanto, para o controlador PI ou PD o problema se torna determinístico ao se zerar a contraparte em (2.25c) e obter duas equações e duas incógnitas.

Observe que por definição a margem de fase ocorre na frequência de cruzamento de ganho, ou seja, considera-se que o sistema como um todo apresenta a menor fase dentro da banda passante em malha aberta justamente na frequência de cruzamento de ganho. No entanto, para sistemas de fase não-monótona isto não se traduz em uma verdade. Embora a estabilidade seja assegurada com margem de fase positiva na frequência de cruzamento de ganho ela não será mais um bom *indicativo* de desempenho na resposta ao degrau. Logo, este trabalho se propõe a reconsiderar o problema do projeto de compensadores PID levando em consideração sistemas que apresentem esse tipo de fase característica, o que será feito no próximo capítulo.

# ***3 Metodologia de Sintonia Analítica Aprimorada para Sistemas de Fase Não-Monótona***

Neste capítulo serão mostrados os detalhes do desenvolvimento do procedimento de sintonia analítica proposto, objeto central deste trabalho. A seção 3.1 apresenta os fundamentos que são a base da metodologia proposta, enquanto que as seções 3.2, 3.3 e 3.4 apresentam em detalhes o desenvolvimento para cada tipo de controlador, respectivamente PI, PD e PID. A seção 3.5 faz uma análise crítica sobre as características e limitações da metodologia proposta.

## **3.1 Fundamentos da Metodologia**

O conceito de compensação por resposta em frequência se baseia no fato que o desempenho no domínio do tempo para a resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem padrão está ligado a características do sistema como fator de amortecimento e frequência natural de oscilação não-amortecida. Estas características, por sua vez, estão ligadas a características no domínio da frequência, como margem de fase e frequência de cruzamento de ganho [3, 4].

No entanto, o método de compensação clássico de Phillips e Harbor [3] assume que a pior fase da malha ocorre exatamente na frequência de cruzamento de ganho, e ali então é definida a *margem de fase* do sistema. Isto é válido somente para sistemas com fase monótona, isto é, sistemas onde a fase decresce invariavelmente com o avanço da frequência. Para sistemas de fase não-monótona a margem de fase na frequência de cruzamento de ganho não exemplifica de fato a menor margem de fase dentro da banda passante em malha aberta. Ao se garantir a margem de fase apenas na frequência de cruzamento de ganho, a margem de fase *dentro* da banda passante em malha aberta será menor para sistemas de fase não-monótona. Logo, o sistema irá apresentar um *overshoot*

maior do que o esperado.

Desta forma, apresenta-se neste trabalho um método que permite especificar a frequência de cruzamento de ganho (que está relacionada com o tempo de acomodação) e a margem de fase crítica, ou seja, a margem de fase de pior caso dentro da banda passante em malha aberta para sistemas de fase não-monótona. Isto faz com que a margem de fase continue a ser utilizada como um bom *indicativo* de robustez e permite que o critério de Bode seja corretamente utilizado para analisar a estabilidade do sistema.

Considere o diagrama de blocos usual de um sistema de controle representado na Figura 2.4. Obtendo-se a função de transferência da saída  $y(s)$  em relação a entrada de referência  $r(s)$ :

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)H(s)}. \quad (3.1)$$

Desta forma, a equação característica da malha fechada pode ser dada por:

$$K(s)G(s)H(s) = -1. \quad (3.2)$$

Assumindo que o controlador faça com que o sistema em malha aberta possua um comportamento passa-baixas na sua resposta em frequência, faz-se necessário definir quatro parâmetros para a compensação por resposta em frequência de um sistema dinâmico LIT de fase não-monótona dentro da banda passante em malha aberta: a frequência de cruzamento de ganho  $\omega_u$ , a frequência de margem de fase crítica  $\omega_m$ , a margem de fase de cruzamento de ganho  $\phi_u$  e a margem de fase crítica  $\phi_m$ .

A frequência de cruzamento de ganho  $\omega_u$  é a solução da equação característica, a qual deve ser única. A margem de fase de cruzamento de ganho  $\phi_u$  é a distância entre a fase do sistema em malha aberta na frequência de cruzamento de ganho e o limite de estabilidade de  $-180^\circ$ . Baseado no critério de estabilidade de Bode, se a margem de fase de cruzamento de ganho  $\phi_u$  é positiva, então o sistema em malha fechada será estável [14]. Logo, na frequência de cruzamento de ganho tem-se:

$$K(j\omega_u)G(j\omega_u)H(j\omega_u) = 1 \angle -180^\circ + \phi_u. \quad (3.3)$$

Pode-se reescrever (3.3) como duas restrições de módulo e fase:

$$|K(j\omega_u)| \cdot |G(j\omega_u)H(j\omega_u)| = 1 \quad (3.4a)$$

$$\angle K(j\omega_u) + \angle G(j\omega_u)H(j\omega_u) = -180^\circ + \phi_u . \quad (3.4b)$$

A frequência de margem de fase crítica  $\omega_m$  é a frequência na qual a resposta em frequência do sistema apresenta a fase mais baixa, isto é, apresenta a menor margem de fase na banda passante em malha aberta. Logo,  $\omega_m$  é, por definição, menor ou igual à frequência de cruzamento de ganho  $\omega_u$ . A margem de fase crítica  $\phi_m$  é a distância entre a fase do sistema em malha aberta na frequência de margem de fase crítica (isto é, a menor margem de fase dentro da banda passante em malha aberta) e o limite de estabilidade de  $-180^\circ$ . Desta forma, a restrição de fase deve ser redefinida de forma a se considerar que a menor fase não ocorre na frequência de cruzamento de ganho, mas sim em outro ponto, denominado frequência de margem de fase crítica, como se segue:

$$\angle K(j\omega_m) + \angle G(j\omega_m)H(j\omega_m) = -180^\circ + \phi_m . \quad (3.5)$$

E, com isto, as duas restrições fundamentais para o projeto do controlador são dadas por:

$$|K(j\omega_u)| = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} \quad (3.6a)$$

$$\angle K(j\omega_m) = -180 + \phi_m - \angle G(j\omega_m)H(j\omega_m) . \quad (3.6b)$$

Note que, pela consideração feita anteriormente sobre um sistema de fase não-monótona, tem-se que:

$$\phi_m \leq \phi_u \quad (3.7a)$$

$$\omega_m \leq \omega_u . \quad (3.7b)$$

A equação (3.7a) mostra que ao se especificar  $\phi_m$  positivo garante-se estabilidade de toda a malha de controle em questão.

O conjunto de equações (3.6) fornece as restrições básicas para qualquer controlador ser determinado por técnicas de resposta em frequência. No entanto, foca-se neste trabalho o controlador PID e suas variações, que serão desenvolvidas nas seções a seguir.

## 3.2 Controlador PI

O controlador PI é definido em termos de ganhos como:

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} \quad (3.8a)$$

e numa abordagem em termos de ganho proporcional  $K_P$  e tempo de integração  $T_I$  é definido como:

$$K(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) . \quad (3.8b)$$

Na resposta em frequência o controlador PI em (3.8a) tem módulo e fase dado por:

$$|K(j\omega)| = \sqrt{K_P^2 + \frac{K_I^2}{\omega^2}} \quad (3.9a)$$

$$\angle K(j\omega) = -\tan^{-1} \left( \frac{K_I}{K_P \omega} \right) . \quad (3.9b)$$

Considere:

$$\theta \triangleq -180 + \phi_m - \angle G(j\omega_m)H(j\omega_m) . \quad (3.10)$$

Com o conjunto de restrições (3.6) e as relações de módulo e fase do controlador PI dados por (3.9) e a definição de  $\theta$  em (3.10) é possível obter expressões analíticas para o cálculo dos ganhos  $K_P$  e  $K_I$ . Pela restrição de módulo tem-se que:

$$\sqrt{K_P^2 + \frac{K_I^2}{\omega_u^2}} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} . \quad (3.11)$$

Elevando-se ambos os membros de (3.11) ao quadrado:

$$K_P^2 + \frac{K_I^2}{\omega_u^2} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2} . \quad (3.12)$$

Pela restrição de fase tem-se:

$$\theta = -\tan^{-1} \left( \frac{K_I}{K_P \omega_m} \right) . \quad (3.13)$$

Extraindo a tangente de ambos os lados de (3.13) e isolando-se  $K_I$  leva a:

$$K_I = -K_P \omega_m \tan \theta . \quad (3.14)$$

Agora, para determinar  $K_P$  basta substituir (3.14) em (3.12):

$$K_P^2 + \frac{K_P^2 \omega_m^2 \tan^2 \theta}{\omega_u^2} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2} . \quad (3.15)$$

Colocando-se  $K_P^2$  em evidência na equação (3.15) fornece:

$$K_P^2 \left[ 1 + \left( \frac{\omega_m}{\omega_u} \right)^2 \tan^2 \theta \right] = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2} . \quad (3.16)$$

Agora isolando  $K_P^2$  em (3.16) resulta em:

$$K_P^2 = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2 \left[ 1 + \left( \frac{\omega_m}{\omega_u} \right)^2 \tan^2 \theta \right]} . \quad (3.17)$$

Finalmente, extraindo-se a raiz quadrada de (3.17) fornece o ganho  $K_P$ :

$$K_P = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \sqrt{1 + \left( \frac{\omega_m}{\omega_u} \right)^2 \tan^2 \theta}} . \quad (3.18)$$

Agora, substituindo (3.18) em (3.14) encontra-se o valor de  $K_I$ :

$$K_I = -\frac{\omega_m \tan \theta}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \sqrt{1 + \left( \frac{\omega_m}{\omega_u} \right)^2 \tan^2 \theta}} . \quad (3.19)$$

A equação (3.19) pode ser reescrita como:

$$K_I = - \frac{\omega_m \tan \theta}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \sqrt{\left(\frac{\omega_m}{\omega_u}\right)^2 \left[\left(\frac{\omega_u}{\omega_m}\right)^2 + \tan^2 \theta\right]}} . \quad (3.20)$$

Simplificando (3.20) fornece:

$$K_I = - \frac{\omega_u \tan \theta}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \sqrt{\left(\frac{\omega_u}{\omega_m}\right)^2 + \tan^2 \theta}} . \quad (3.21)$$

Expressando-se (3.21) em termos de cotangente:

$$K_I = - \frac{\omega_u}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \cot \theta \sqrt{\left(\frac{\omega_u}{\omega_m}\right)^2 + \frac{1}{\cot^2 \theta}}} . \quad (3.22)$$

Com algum algebrismo no termo dentro da raiz quadrada de (3.22) se chega a:

$$K_I = - \frac{\omega_u}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \cot \theta \sqrt{\frac{\omega_u^2 \cot^2 \theta + \omega_m^2}{\omega_m^2 \cot^2 \theta}}} . \quad (3.23)$$

No entanto, sabe-se que cotangente é uma função ímpar, ou seja,  $\cot(-\theta) = -\cot \theta$ , e então  $\cot^2 \theta = \cot^2(-\theta)$ . Com isto, pode-se reescrever a equação (3.23) como:

$$K_I = \frac{\omega_u}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \cot(-\theta) \sqrt{\frac{\cot^2 \theta \omega_u^2 + \omega_m^2}{\omega_m^2 \cot^2(-\theta)}}} . \quad (3.24)$$

Simplificando (3.24) chega-se finalmente a:

$$K_I = \frac{\omega_u}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_u}{\omega_m}\right)^2 \cot^2 \theta}} . \quad (3.25)$$

No entanto, é mais usual representar o valor da ação integral em termos de  $T_I$ , que é definido como:

$$T_I = \frac{K_P}{K_I} . \quad (3.26)$$

Logo, substitui-se (3.26) em (3.14) e o tempo  $T_I$  é dado por:

$$T_I = -\frac{\cot \theta}{\omega_m} . \quad (3.27)$$

### 3.3 Controlador PD

O controlador PD é definido em termos de ganho como:

$$K(s) = K_P + K_D s \quad (3.28a)$$

e numa abordagem em termos de ganho proporcional  $K_P$  e tempo de derivação  $T_D$  é definido como:

$$K(s) = K_P (1 + T_D s) . \quad (3.28b)$$

Na resposta em frequência o controlador PD em (3.28a) tem módulo e fase dados por:

$$|K(j\omega)| = \sqrt{K_P^2 + K_D^2 \omega^2} \quad (3.29a)$$

$$\angle K(j\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{K_D \omega}{K_P} \right) . \quad (3.29b)$$

Com o conjunto de restrições (3.6) e as relações de módulo e fase do controlador PD dadas em (3.29), juntamente com a definição do ângulo  $\theta$  em (3.10) é possível obter expressões analíticas para o cálculo dos ganhos  $K_P$  e  $K_D$ . Pela restrição de módulo:

$$\sqrt{K_P^2 + K_D^2 \omega_u^2} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} . \quad (3.30)$$

Elevando-se ambos os membros de (3.30) ao quadrado:

$$K_P^2 + K_D^2 \omega_u^2 = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2} . \quad (3.31)$$

Pela restrição de fase, tem-se que:

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{K_D \omega_m}{K_P} \right). \quad (3.32)$$

Extraindo-se a tangente de ambos os lados de (3.32) e isolando  $K_D$  fornece:

$$K_D = \frac{K_P \tan \theta}{\omega_m}. \quad (3.33)$$

Agora, para se determinar  $K_P$  basta substituir (3.33) em (3.31):

$$K_P^2 + \frac{K_P^2 \omega_u^2 \tan^2 \theta}{\omega_m^2} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2}. \quad (3.34)$$

Colocando o termo  $K_P^2$  em evidência em (3.34) fornece:

$$K_P^2 \left[ 1 + \left( \frac{\omega_u}{\omega_m} \right)^2 \tan^2 \theta \right] = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2}. \quad (3.35)$$

Agora isolando o termo  $K_P^2$  em (3.35) resulta em:

$$K_P^2 = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2 \left[ 1 + \left( \frac{\omega_u}{\omega_m} \right)^2 \tan^2 \theta \right]}. \quad (3.36)$$

E finalmente extraindo-se a raiz quadrada de ambos os membros de (3.36) fornece:

$$K_P = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \sqrt{1 + \left( \frac{\omega_u}{\omega_m} \right)^2 \tan^2 \theta}}. \quad (3.37)$$

Agora para determinar  $K_D$  é necessário substituir a equação (3.37) em (3.33):

$$K_D = \frac{\tan \theta}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \omega_m \sqrt{1 + \left( \frac{\omega_u}{\omega_m} \right)^2 \tan^2 \theta}}. \quad (3.38)$$

A equação (3.38) pode ser reescrita como:

$$K_D = \frac{\tan \theta}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|\omega_m \sqrt{\left(\frac{\omega_u}{\omega_m}\right)^2 \left[ \left(\frac{\omega_m}{\omega_u}\right)^2 + \tan^2 \theta \right]}} . \quad (3.39)$$

Simplificando (3.39) fornece:

$$K_D = \frac{\tan \theta}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|\omega_u \sqrt{\left(\frac{\omega_m}{\omega_u}\right)^2 + \tan^2 \theta}} . \quad (3.40)$$

Expressando (3.40) em termos de cotangente:

$$K_D = \frac{\omega_u^{-1}}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \cot \theta \sqrt{\left(\frac{\omega_m}{\omega_u}\right)^2 + \frac{1}{\cot^2 \theta}}} . \quad (3.41)$$

Manipulando algebricamente o termo dentro da raiz quadrada de (3.41):

$$K_D = \frac{\omega_u^{-1}}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \cot \theta \sqrt{\frac{\omega_m^2 \cot^2 \theta + \omega_u^2}{\omega_u^2 \cot^2 \theta}}} . \quad (3.42)$$

Simplificando (3.42) chega-se finalmente a:

$$K_D = \frac{\omega_u^{-1}}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_m}{\omega_u}\right)^2 \cot^2 \theta}} . \quad (3.43)$$

Entretanto, é mais usual representar o termo da ação derivativa em termos de  $T_D$ , que é definido como:

$$T_D = \frac{K_D}{K_P} . \quad (3.44)$$

Através da substituição de (3.44) em (3.33), o tempo  $T_D$  é dado por:

$$T_D = \frac{\tan \theta}{\omega_m} \quad (3.45)$$

### 3.4 Controlador PID

O controlador PID é definido em termos de três ganhos como:

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s . \quad (3.46)$$

Na resposta em frequência o controlador PID tem módulo e fase dados por:

$$|K(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 K_P^2 + (K_I - \omega^2 K_D)^2}}{\omega} \quad (3.47a)$$

$$\angle K(j\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{\omega^2 K_D^2 - K_I}{\omega K_P} \right) . \quad (3.47b)$$

Com o conjunto de restrições (3.6) e as relações de módulo e fase do controlador PID em (3.47), juntamente com a definição do ângulo  $\theta$  em (3.10), é possível obter expressões analíticas para o cálculo dos ganhos  $K_P$ ,  $K_I$  e  $K_D$ . No entanto, como existem três incógnitas e apenas duas equações uma solução determinística torna-se impossível. Em geral, especifica-se um ganho  $K_I$  arbitrário ou um erro em regime permanente dado por:

$$s^n K_I \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \frac{1}{e_{ss}} \quad (3.48)$$

onde  $n$  indica o tipo do sistema (número de pólos na origem em malha aberta) e  $e_{ss}$  é o erro em regime permanente para um determinado tipo de entrada de acordo com o tipo do sistema.

Desta forma, a equação (3.48) possibilita uma solução determinística para o controlador PID. Logo, as soluções derivadas das restrições de módulo e fase serão desenvolvidas em torno de  $K_P$  e  $K_D$ , tendo como  $K_I$  um parâmetro fixo determinado pela equação (3.48).

A restrição de módulo fornece:

$$\frac{\sqrt{(K_I - \omega_u^2 K_D)^2 + \omega_u^2 K_P^2}}{\omega_u} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} . \quad (3.49)$$

Elevando-se ambos os membros de (3.49) ao quadrado:

$$(K_I - \omega_u^2 K_D)^2 + \omega_u^2 K_P^2 = \frac{\omega_u^2}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2} . \quad (3.50)$$

Desenvolvendo-se o termo ao quadrado no membro esquerdo de (3.50) fornece:

$$K_I^2 - 2\omega_u^2 K_I K_D + \omega_u^4 K_D^2 + \omega_u^2 K_P^2 = \frac{\omega_u^2}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2} . \quad (3.51)$$

Da restrição de fase vem:

$$\tan \theta = \frac{\omega_m^2 K_D - K_I}{\omega_m K_P} . \quad (3.52)$$

Isolando-se  $K_D$  em (3.52) fornece:

$$K_D = \frac{K_P \tan \theta}{\omega_m} + \frac{K_I}{\omega_m^2} . \quad (3.53)$$

Agora substituindo  $K_D$  dado por (3.53) em (3.51) resulta em:

$$K_I^2 - 2\omega_u^2 K_I \left( \frac{K_P \tan \theta}{\omega_m} + \frac{K_I}{\omega_m^2} \right) + \omega_u^4 \left( \frac{K_P \tan \theta}{\omega_m} + \frac{K_I}{\omega_m^2} \right)^2 + \omega_u^2 K_P^2 = \frac{\omega_u^2}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2} . \quad (3.54)$$

Desenvolvendo o termo ao quadrado em (3.54) fornece:

$$K_I^2 - 2\omega_u^2 K_I \left( \frac{K_P \tan \theta}{\omega_m} + \frac{K_I}{\omega_m^2} \right) + \omega_u^4 \left( \frac{K_P^2 \tan^2 \theta}{\omega_m^2} + \frac{2K_P K_I \tan \theta}{\omega_m^3} + \frac{K_I^2}{\omega_m^4} \right) + \omega_u^2 K_P^2 = \frac{\omega_u^2}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2} . \quad (3.55)$$

Aplicando a propriedade distributiva em (3.55):

$$K_I^2 - 2K_I K_P \frac{\omega_u^2}{\omega_m} \tan \theta - 2K_I \frac{\omega_u^2}{\omega_m^2} + K_P^2 \frac{\omega_u^4}{\omega_m^2} \tan^2 \theta + 2K_P K_I \frac{\omega_u^4}{\omega_m^3} \tan \theta + K_I^2 \frac{\omega_u^4}{\omega_m^4} + \omega_u^2 K_P^2 = \frac{\omega_u^2}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2} . \quad (3.56)$$

Agrupando alguns termos comuns de (3.56) resulta em:

$$\left(\frac{\omega_u^2}{\omega_m^2} \tan^2 \theta + 1\right) \omega_u^2 K_P^2 + \left(2K_I \frac{\omega_u^2}{\omega_m^3} \tan \theta - 2K_I \frac{1}{\omega_m} \tan \theta\right) \omega_u^2 K_P + K_I^2 - 2K_I^2 \frac{\omega_u^2}{\omega_m^2} + K_I^2 \frac{\omega_u^4}{\omega_m^4} - \frac{\omega_u^2}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2} = 0. \quad (3.57)$$

Dividindo (3.57) por  $\omega_u^2$ :

$$\left(\frac{\omega_u^2}{\omega_m^2} \tan^2 \theta + 1\right) K_P^2 + \left[\frac{2K_I \tan \theta}{\omega_m} \left(\frac{\omega_u^2}{\omega_m^2} - 1\right)\right] K_P + \frac{K_I^2}{\omega_u^2} - \frac{2K_I^2}{\omega_m^2} + K_I^2 \frac{\omega_u^2}{\omega_m^4} - \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2} = 0. \quad (3.58)$$

Considere que a razão  $\omega_u/\omega_m$  possa ser assim chamada:

$$\Omega = \frac{\omega_u}{\omega_m}. \quad (3.59)$$

Sendo assim, a equação (3.58) pode ser simplificada para:

$$(\Omega^2 \tan^2 \theta + 1) K_P^2 + \left[\frac{2K_I \tan \theta}{\omega_m} (\Omega^2 - 1)\right] K_P + K_I^2 \left(\frac{1}{\omega_u^2} + \frac{\Omega^2}{\omega_m^2} - \frac{2}{\omega_m^2}\right) - \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2} = 0. \quad (3.60)$$

Com algum algebrismo em (3.60) chega-se a:

$$[\Omega^2 \tan^2 \theta + 1] K_P^2 + \left[\frac{2K_I \tan \theta}{\omega_m} (\Omega^2 - 1)\right] K_P + \frac{K_I^2}{\omega_m^2} \left(\frac{1}{\Omega^2} + \Omega^2 - 2\right) - \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2} = 0. \quad (3.61)$$

Simplificando (3.61) fornece:

$$[\Omega^2 \tan^2 \theta + 1] K_P^2 + \left[ \frac{2K_I \tan \theta}{\omega_m} (\Omega^2 - 1) \right] K_P + \frac{K_I^2}{\omega_m^2} \left( \frac{1}{\Omega} - \Omega \right)^2 - \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2} = 0. \quad (3.62)$$

Pode-se ver pela equação (3.62) que o ganho  $K_P$  deve ser determinado através da resolução de uma equação de segundo grau. Considere então:

$$a_k = \Omega^2 \tan^2 \theta + 1 \quad (3.63a)$$

$$b_k = \frac{2K_I \tan \theta}{\omega_m} (\Omega^2 - 1) \quad (3.63b)$$

$$c_k = \frac{K_I^2}{\omega_m^2} \left( \frac{1}{\Omega} - \Omega \right)^2 - \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|^2} \quad (3.63c)$$

e então  $K_P$  tem soluções iguais a:

$$K_P = \frac{-b_k \pm \sqrt{b_k^2 - 4a_k c_k}}{2a_k}. \quad (3.64)$$

e  $K_D$  é encontrado substituindo-se os ganhos  $K_P$  calculados na equação (3.53).

A análise de (3.63a) mostra que além do coeficiente  $a_k$  ser sempre positivo ele nunca é nulo. Isto implica que as raízes de (3.64) devem ser analisadas de acordo com uma equação de segundo grau com concavidade para cima em função dos termos  $b_k$  e  $c_k$ , onde  $b_k$  está relacionado com a posição no eixo das abcissas do vértice do gráfico e  $c_k$  indica a coordenada onde o gráfico cruza com o eixo das ordenadas. A Tabela 3.1 mostra a natureza de  $K_P$  em função dos sinais dos coeficientes  $b_k$  e  $c_k$ . Considere as seguintes notações:

$$K_{P_1} = \frac{-b_k - \sqrt{b_k^2 - 4a_k c_k}}{2a_k} \quad (3.65a)$$

$$K_{P_2} = \frac{-b_k + \sqrt{b_k^2 - 4a_k c_k}}{2a_k}. \quad (3.65b)$$

Agora verifica-se a condição de existência de  $K_D$ . De (3.53) e sabendo que  $K_D$  deve ser positivo:

Tabela 3.1: Natureza do ganho  $K_P$  versus coeficientes.

	$c_k > 0$	$c_k = 0$	$c_k < 0$
$b_k > 0$	$K_{P_1} < 0$ e $K_{P_2} < 0$	$K_{P_1} < 0$ e $K_{P_2} = 0$	$K_{P_1} < 0$ e $K_{P_2} > 0$
$b_k = 0$	Não existe (complexos)	$K_{P_1} = K_{P_2} = 0$	$K_{P_1} = -K_{P_2}$
$b_k < 0$	$K_{P_1} > 0$ e $K_{P_2} > 0$	$K_{P_1} = 0$ e $K_{P_2} > 0$	$K_{P_1} < 0$ e $K_{P_2} > 0$

$$\frac{K_P \tan \theta}{\omega_m} + \frac{K_I}{\omega_m^2} \geq 0. \quad (3.66)$$

Multiplicando-se (3.66) por  $\omega_m$ :

$$K_P \tan \theta + \frac{K_I}{\omega_m} \geq 0. \quad (3.67)$$

Logo:

$$\tan \theta \geq -\frac{K_I}{K_P \omega_m}. \quad (3.68)$$

Extraindo o arco-tangente de (3.68) resulta em:

$$\theta \geq \tan^{-1} \left( -\frac{K_I}{K_P \omega_m} \right). \quad (3.69)$$

No entanto, sabendo-se que o arco-tangente é uma função ímpar:

$$\theta \leq \tan^{-1} \left( \frac{K_I}{K_P \omega_m} \right). \quad (3.70)$$

A igualdade nas equações anteriores está presente apenas por rigor matemático, pois um  $K_D$  nulo implicaria em um controlador PI. Logo, de forma geral:

$$\tan^{-1} \left( -\frac{K_I}{K_P \omega_m} \right) \leq \theta \leq \tan^{-1} \left( \frac{K_I}{K_P \omega_m} \right) \quad \forall \theta \neq 0. \quad (3.71)$$

É interessante notar que, quando  $K_I$  for nulo, a equação do ganho  $K_P$  em (3.64) se transforma na equação do ganho  $K_P$  para o controlador PD.

No entanto, existe outra abordagem para o controlador PID, dada pelas mesmas ações de controle, entretanto, definido em termos de um ganho proporcional  $K_P$  e dois períodos (ou tempos), chamados de tempo de integração  $T_I$  e de derivação  $T_D$ , como se segue:

$$K(s) = K_P \left( 1 + T_D s + \frac{1}{T_I s} \right) . \quad (3.72)$$

Na resposta em frequência, o controlador PID em (3.72) tem módulo igual a:

$$|K(j\omega)| = K_P \sqrt{1 + \left( T_D \omega - \frac{1}{T_I \omega} \right)^2} \quad (3.73)$$

e fase igual a:

$$\angle K(j\omega) = \tan^{-1} \left( T_D \omega - \frac{1}{T_I \omega} \right) \quad (3.74)$$

e, com as restrições de módulo e fase, é possível encontrar os parâmetros do compensador. No entanto, diferentemente da abordagem do controlador PID em termos de três ganhos, não é possível obter o parâmetro da ação integral da equação de erro em regime permanente, pois o ganho  $K_I$  depende diretamente de  $K_P$  e  $T_I$ , dois parâmetros a serem calculados. Logo, ou o tempo de derivação  $T_D$  ou o tempo de integração  $T_I$  devem fazer parte da especificação.

Numa primeira abordagem, considera-se que  $T_I$  é designado e que  $K_P$  e  $T_D$  serão calculados. Da restrição de fase:

$$\tan \theta = T_D \omega_m - \frac{1}{T_I \omega_m} . \quad (3.75)$$

Isolando-se  $T_D$  em (3.75) resulta em:

$$T_D = \frac{\tan \theta}{\omega_m} + \frac{1}{T_I \omega_m^2} . \quad (3.76)$$

No entanto, pela restrição de módulo:

$$K_P \sqrt{1 + \left( T_D \omega_u - \frac{1}{T_I \omega_u} \right)^2} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} . \quad (3.77)$$

Substituindo-se  $T_D$  dado por (3.76) em (3.77) fornece:

$$K_P \sqrt{1 + \left[ \left( \frac{\tan \theta}{\omega_m} + \frac{1}{T_I \omega_m^2} \right) \omega_u - \frac{1}{T_I \omega_u} \right]^2} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} . \quad (3.78)$$

Reescrevendo-se a equação (3.78):

$$K_P \sqrt{1 + \left( \frac{\omega_u}{\omega_m} \tan \theta + \frac{\omega_u}{\omega_m} \frac{1}{T_I \omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega_u} \frac{1}{T_I \omega_m} \right)^2} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|}. \quad (3.79)$$

Manipulando-se algebricamente (3.79):

$$K_P \sqrt{1 + \left\{ \left( \frac{\omega_u}{\omega_m} \right) \left[ \tan \theta + \frac{1}{T_I \omega_m} - \left( \frac{\omega_m}{\omega_u} \right)^2 \frac{1}{T_I \omega_m} \right] \right\}^2} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|}. \quad (3.80)$$

Agrupando-se alguns termos comuns em (3.80) e com algum algebrismo chega-se a:

$$K_P \sqrt{1 + \left( \frac{\omega_u}{\omega_m} \right)^2 \left\{ \tan \theta + \frac{1}{T_I \omega_m} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_m}{\omega_u} \right)^2 \right] \right\}^2} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|}. \quad (3.81)$$

O que finalmente leva a:

$$K_P = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \sqrt{1 + \left( \frac{\omega_u}{\omega_m} \right)^2 \left\{ \tan \theta + \frac{1}{T_I \omega_m} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_m}{\omega_u} \right)^2 \right] \right\}^2}} \quad (3.82)$$

e o parâmetro  $T_D$  é dado pela equação (3.76).

Agora, mudando-se a abordagem e considerando que  $T_D$  é designado a priori, então  $K_P$  e  $T_I$  devem ser calculados. Da restrição de fase:

$$\tan \theta = T_D \omega_m - \frac{1}{T_I \omega_m}. \quad (3.83)$$

A equação (3.83) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{T_I} = T_D \omega_m^2 - \omega_m \tan \theta. \quad (3.84)$$

No entanto, pela restrição de módulo, tem-se que:

$$K_P \sqrt{1 + \left( T_D \omega_u - \frac{1}{T_I \omega_u} \right)^2} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} . \quad (3.85)$$

Substituindo-se (3.84) em (3.85) fornece:

$$K_P \sqrt{1 + \left[ T_D \omega_u - (T_D \omega_m^2 - \tan \theta \omega_m) \frac{1}{\omega_u} \right]^2} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} . \quad (3.86)$$

Reescrevendo-se (3.86) é possível chegar a:

$$K_P \sqrt{1 + \left( \frac{\omega_m}{\omega_u} \tan \theta - \frac{\omega_m}{\omega_u} T_D \omega_m + \frac{\omega_u}{\omega_m} T_D \omega_m \right)^2} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} . \quad (3.87)$$

Manipulando-se algebricamente (3.87) fornece:

$$K_P \sqrt{1 + \left\{ \left( \frac{\omega_m}{\omega_u} \right) \left[ \tan \theta - T_D \omega_m + T_D \omega_m \left( \frac{\omega_u}{\omega_m} \right)^2 \right] \right\}^2} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} . \quad (3.88)$$

Agrupando-se alguns termos comuns em (3.88) e com algum algebrismo chega-se a:

$$K_P \sqrt{1 + \left( \frac{\omega_m}{\omega_u} \right)^2 \left\{ \tan \theta + T_D \omega_m \left[ \left( \frac{\omega_u}{\omega_m} \right)^2 - 1 \right] \right\}^2} = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} . \quad (3.89)$$

O que finalmente leva a:

$$K_P = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \sqrt{1 + \left( \frac{\omega_m}{\omega_u} \right)^2 \left\{ \tan \theta + T_D \omega_m \left[ \left( \frac{\omega_u}{\omega_m} \right)^2 - 1 \right] \right\}^2}} \quad (3.90)$$

e o tempo  $T_I$  é encontrado isolando-o na equação (3.84):

$$T_I = \frac{1}{\omega_m} \left( \frac{1}{T_D \omega_m - \tan \theta} \right) . \quad (3.91)$$

Logo, verifica-se que a abordagem do controlador PID em termos de um ganho proporcional e dois períodos resulta num controlador mais simples que o controlador PID de

três ganhos mas que, no entanto, não é passível de ser completamente determinístico.

## 3.5 Análise e Discussão da Metodologia Proposta

### 3.5.1 Análise das Equações Obtidas

Considerando a razão  $\Omega$  definida na seção anterior, a Tabela 3.2 mostra as equações de cálculo dos parâmetros de compensação dos controladores PI e PD em função do tipo de controlador desejado.

Tabela 3.2: Cálculo dos parâmetros de compensação *versus* tipo do compensador.

	PI	PD
$K_P$	$\frac{1}{ G(j\omega_u)H(j\omega_u) \sqrt{1 + \Omega^{-2} \tan^2 \theta}}$	$\frac{1}{ G(j\omega_u)H(j\omega_u) \sqrt{1 + \Omega^2 \tan^2 \theta}}$
$K_I$	$\frac{\omega_u}{ G(j\omega_u)H(j\omega_u) \sqrt{1 + \Omega^2 \cot^2 \theta}}$	0
$K_D$	0	$\frac{\omega_u^{-1}}{ G(j\omega_u)H(j\omega_u) \sqrt{1 + \Omega^{-2} \cot^2 \theta}}$
$T_I$	$-\frac{\cot \theta}{\omega_m}$	$\infty$
$T_D$	0	$\frac{\tan \theta}{\omega_m}$

A análise da Tabela 3.2 mostra que as equações de compensação para os controladores PI e PD são muito parecidas, sugerindo uma interessante dualidade entre ambos os controladores.

A razão  $\Omega$  está presente nas equações de cálculo de todos os parâmetros relativos a *ganho*. Devido a sua importância na metodologia proposta e na análise a seguir, será dada à razão  $\Omega$  o nome de *razão de monotonicidade*. A razão de monotonicidade de certa forma é um indicador do quão *não-monótono* o sistema é. Quanto menor seu valor,

mais monótono é o sistema, ao passo que uma razão de monotonicidade unitária indica um sistema perfeitamente monótono. Convém novamente lembrar que por definição  $\omega_m \leq \omega_u$ , e desta forma não é possível obter uma razão de monotonicidade menor que um.

Pela coluna do controlador PI na Tabela 3.2 é possível inferir que quanto maior for a razão de monotonicidade maior será o ganho  $K_P$  e menor será o ganho  $K_I$ . Isto indica que compensar um sistema de fase não-monótona como um de fase monótona dentro da banda passante em malha aberta levará a um ganho  $K_P$  subestimado e um ganho  $K_I$  superestimado. Sabendo que em geral valores muito grandes de  $K_I$  tendem a deixar o sistema mais oscilatório [2, 3, 4], compensar um sistema de fase não-monótona como um de fase monótona deve ser evitado, principalmente em presença de ação integral.

Já a coluna do controlador PD na Tabela 3.2 revela que quanto maior for a razão de monotonicidade, menor será o ganho  $K_P$  e maior será o ganho  $K_D$ . Isto indica que compensar um sistema de fase não-monótona como um de fase monótona dentro da banda passante em malha aberta levará a um ganho  $K_P$  superestimado e um ganho  $K_D$  subestimado. Sabendo que em geral valores muito grandes de  $K_P$  tendem a reduzir a margem de ganho do sistema [3, 4], compensar um sistema de fase não-monótona como um de fase monótona também deve ser evitado de forma a não se reduzir a margem de ganho substancialmente. Entretanto, devido ao aumento no ganho  $K_D$ , as especificações devem ser cuidadosamente escolhidas para não acentuar os efeitos que a ação derivativa acarreta.

As linhas dos parâmetros  $T_I$  e  $T_D$  também indicam facilmente quais as condições de existência dos controladores. O ângulo  $\theta$  deve ser entendido como o atraso ou avanço de fase necessário que o controlador deve impor para que a margem de fase de pior caso especificada seja alcançada.

Para não se obter um  $T_I$  negativo é necessário que o ângulo  $\theta$  esteja no 2º ou 4º quadrante. Como um controlador com apenas um pólo não consegue atrasar a fase em mais de 90º, é possível inferir que  $-90^\circ \leq \theta \leq 0^\circ$  para um controlador PI. Isto explica intuitivamente que para um atraso de fase de até  $-90^\circ$  é necessário escolher um controlador PI. Por outro lado, para não se obter um  $T_D$  negativo é necessário que o ângulo  $\theta$  esteja no 1º ou 3º quadrante. Como um controlador com apenas um zero não consegue avançar a fase em mais de 90º, é possível inferir que  $0^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$  para um controlador PD. Isto explica intuitivamente que para um avanço de fase de até  $+90^\circ$  é necessário escolher um controlador PD.

Embora haja igualdade em ambos lados nas duas condições, elas são raramente alcançáveis e podem ser desprezadas. O fato de  $\theta = 0^\circ$  implica que o controlador deve

ser puramente proporcional e  $\theta = \pm 90^\circ$  demandaria um esforço de controle muito grande para atingir as especificações desejadas, debilitando a factibilidade física do controlador.

Considere agora que o sistema apresente fase monótona dentro da banda passante em malha aberta. Isto significa que  $\omega_u = \omega_m$  e então a razão de monotonicidade  $\Omega$  é igual a 1. A margem de fase de pior caso coincide com a margem de fase no cruzamento de ganho, ou seja,  $\phi_m = \phi_u$ . Desta forma o ganho  $K_P$  em ambos controladores PI e PD se traduz em:

$$K_P = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \underbrace{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}_{\sec \theta}} .$$

Sabendo que o inverso da secante é o cosseno:

$$K_P = \frac{\cos \theta}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} . \quad (3.92a)$$

Já o ganho  $K_I$  para o controlador PI:

$$K_I = \frac{\omega_u}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \underbrace{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}_{\csc \theta}} .$$

Sabendo que o inverso da cossecante é o seno:

$$K_I = -\frac{\omega_u \sin \theta}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} . \quad (3.92b)$$

E o ganho  $K_D$  para o controlador PD:

$$K_D = \frac{\omega_u^{-1}}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \underbrace{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}_{\csc \theta}} .$$

Sabendo que o inverso da cossecante é o seno:

$$K_D = \frac{\omega_u^{-1} \sin \theta}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} . \quad (3.92c)$$

O sinal negativo em (3.92b) é colocado de forma a se adequar ao fato de que o seno de um ângulo no 4º quadrante gera um número negativo e o ganho  $K_I$  deve ser positivo. A equação do ganho  $K_P$  em (3.92a) é a mesma da compensação analítica clássica de Phillips

e Harbor [3] em (2.25b) e a equação dos ganhos  $K_I$  e  $K_D$  dados respectivamente por (3.92b) e (3.92c), são obtidas ao se zerar uma das contrapartes em (2.25c). Isto mostra que as equações de compensação analíticas propostas neste trabalho se traduzem nas equações clássicas de compensação de Phillips e Harbor [3] quando o sistema a ser compensado apresenta fase monótona dentro da banda passante em malha aberta.

Já o controlador PID de três ganhos requer uma análise mais cautelosa. As restrições de módulo e fase fornecem apenas duas equações de compensação, entretanto o controlador PID possui três parâmetros a serem calculados. Desta forma, um deles precisa ser designado a priori e os outros dois calculados analiticamente. O fato do ganho  $K_I$  ser possível de ser determinado através da equação de erro em regime permanente o torna muitas das vezes o ganho designado a priori, abordagem esta que é seguida neste trabalho.

Conforme a seção 3.4 mostrou, o equacionamento do controlador PID de três ganhos se mostra complexo, sendo necessário verificar muitas condições para a existência do controlador, uma vez que se chega a uma equação de segundo grau na qual o termo que acompanha a variável  $K_P$  não é nulo. A análise de (3.63b) mostra que o único fator que afeta o sinal do termo  $b_k$  é  $\tan \theta$ , uma vez que a razão de monotonicidade é sempre maior ou igual a um e todos os outros fatores e/ou especificações são positivos.

Desta forma, através da análise da primeira linha da Tabela 3.1 é possível inferir que a única forma de se obter um avanço de fase com o controlador PID e um  $K_P$  factível é fazer o termo  $c_k$  negativo. Uma alternativa de se obter  $c_k$  negativo é reduzir o valor de  $K_I$ . Este fato explica o senso comum que diz que é impossível obter avanço de fase com um controlador PID com alto valor de  $K_I$ . Analisando-se a segunda linha da Tabela 3.1 é possível concluir que quando a defasagem é nula, o termo  $c_k$  também deve ser negativo para que haja um ganho  $K_P$  factível.

No entanto, quando é desejado um atraso de fase, a factibilidade física de  $K_P$  independe do sinal de  $c_k$ . No entanto, para um atraso de fase e coeficiente  $c_k$  positivo haverá dois ganhos  $K_P$  factíveis, o que pode ser um problema, muito embora o menor deles não deva respeitar a condição de existência de  $K_D$  em (3.71).

A Tabela 3.3 sumariza a existência e factibilidade física dos ganhos  $K_P$  em função do ângulo de defasagem  $\theta$  e coeficiente  $c_k$ .

Convém salientar mais uma vez que para que o controlador PID seja fisicamente factível todos os ganhos devem ser positivos, e para isso a condição de existência de  $K_D$  em (3.71) deve ser verificada de posse de  $K_P$ .

Tabela 3.3: Natureza do ganho  $K_P$  versus ângulo de defasagem  $\theta$  e coeficiente  $c_k$ .

	$c_k > 0$	$c_k = 0$	$c_k < 0$
$\theta \geq 0$	–	–	$K_{P_2}$
$\theta < 0$	$K_{P_1}$ e $K_{P_2}$	$K_{P_2}$	$K_{P_2}$

Por fim, é feita a análise do controlador PID sob o ponto de vista de um ganho proporcional e dois períodos. Levando em consideração a razão de monotonicidade, constroi-se novamente mais uma tabela com as equações de compensação, mas desta vez com as duas abordagens apresentadas em função do ganho  $K_P$  e dos tempos  $T_I$  e  $T_D$ , exemplificada pela Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Cálculo dos parâmetros de compensação versus parâmetro designado – Controlador PID.

	$T_I$ designado	$T_D$ designado
$K_P$	$\frac{ G(j\omega_u)H(j\omega_u) ^{-1}}{\sqrt{1 + \Omega^2 \left[ \tan \theta + \frac{1}{T_I \omega_m} (1 - \Omega^{-2}) \right]^2}}$	$\frac{ G(j\omega_u)H(j\omega_u) ^{-1}}{\sqrt{1 + \Omega^{-2} [\tan \theta + T_D \omega_m (\Omega^2 - 1)]^2}}$
$T_I$	Especificação	$\frac{1}{\omega_m} \left( \frac{1}{T_D \omega_m - \tan \theta} \right)$
$T_D$	$\frac{1}{\omega_m} \left( \tan \theta + \frac{1}{T_I \omega_m} \right)$	Especificação

A análise da Tabela 3.4 também sugere uma dualidade evidente e interessante entre ambas abordagens para o controlador PID de um ganho e dois períodos. Observe que a medida que  $T_I$  vai ao infinito, chega-se nas mesmas equações encontradas para o controlador PD anteriormente, e que quando  $T_D$  vai a zero chega-se nas mesmas equações do controlador PI, conforme pode ser visto comparando-se a Tabela 3.4 com a Tabela 3.2.

Outra conclusão a ser tirada da Tabela 3.4 é que o ganho  $K_P$  é único quando as especificações respeitam as condições de existência. Isto confirma que, para o controlador PID definido em termos de três ganhos, quando há a possibilidade de haver dois ganhos reais e distintos, um deles não deve respeitar a condição de existência do ganho  $K_D$  e por isso deve ser desprezado, não fornecendo uma solução de fato para o problema.

Convém salientar mais uma vez que é possível representar o controlador PID de três ganhos a partir do controlador PID de um ganho e dois períodos e vice-versa mas que, no entanto, uma delas deve ser adotada para o projeto inicial do controlador.

A abordagem de um ganho proporcional e dois períodos é mais simples, mas não pode ser completamente determinística, uma vez que não é possível especificar  $T_I$  através do erro em regime permanente. No entanto, a abordagem por três ganhos é passível de ser completamente determinística (quando  $K_I$  é especificado através do erro em regime permanente) mas resulta num controlador complexo com especificações bastante restritivas.

Como se sabe, o controlador PID pode contribuir em até  $180^\circ$  de avanço de fase na malha aberta, acentuando mais ainda o problema de não-monotonicidade da fase na banda passante em malha aberta. Desta forma, seu uso só é aconselhável onde é desejado simultaneamente erro nulo em regime permanente para determinado tipo de entrada e uma leve melhora na dinâmica do sistema, com um avanço de fase pequeno. No entanto, as especificações devem ser cuidadosamente escolhidas de forma a não serem tão restritivas, sob pena de não haver ganhos factíveis que impõem a dinâmica desejada.

### 3.5.2 Análise da Rotina para Encontrar a Frequência de Margem de Fase Crítica

Conforme mencionado na seção 3.1, a frequência de margem de fase crítica  $\omega_m$  não pode ser uma especificação livre, mas somente uma frequência dada pela malha aberta que deve ser encontrada recursivamente uma vez que, a cada cálculo dos ganhos, o compensador irá modificar a malha aberta. Isso sugere um procedimento de busca como se segue:

- Passo 1: Especificações iniciais.
- Passo 2: Obtenha a resposta em frequência da malha aberta  $G(j\omega)H(j\omega)$  até a banda passante em malha aberta especificada.
- Passo 3: Faça um procedimento de busca e encontre a menor fase da malha aberta  $G(j\omega)H(j\omega)$ . Obtenha a frequência correspondente à esta menor fase.
- Passo 4: Faça  $\omega_m$  igual a frequência encontrada.
- Passo 5: Calcule os ganhos do compensador e obtenha a resposta em frequência da malha aberta agora com o compensador, ou seja, obtenha a resposta em frequência de  $K(j\omega)G(j\omega)H(j\omega)$  até a banda passante em malha aberta especificada.

- Passo 6: Faça um procedimento de busca e encontre a menor fase da malha aberta  $K(j\omega)G(j\omega)H(j\omega)$ . Obtenha a frequência correspondente a esta menor fase.
- Passo 7: Subtraia a frequência atual da frequência anterior  $\omega_m$ .
- Passo 8: Se o módulo da subtração for maior que a tolerância especificada, faça  $\omega_m$  igual a frequência atual e volte ao Passo 5.
- Passo 9: Fim.

O algoritmo acima é bastante adequado se implementado em *softwares* que possuem funções que calculam a resposta em frequência e retornam o módulo, fase e frequência, como por exemplo o MATLAB<sup>®</sup>.

Também se faz necessário colocar outra condição limite pra sair do *loop* existente entre os passos 5 e 8, principalmente se o valor de tolerância for muito pequeno e o procedimento de busca retornar alternadamente dois pontos equidistantes do ponto de mínimo da função. Em geral, coloca-se uma condição que impõe que tal *loop* deva ser executado um número limite de vezes e o valor de  $\omega_m$  é igual ao último a ser encontrado.

Alternativamente pode-se implementar outros métodos ou algoritmos para calcular tal frequência, como métodos numéricos ou métodos de inteligência artificial. Neste caso, uma abordagem que pode se mostrar bastante adequada é a utilização de algoritmos evolutivos, tais como algoritmos genéticos ou enxame de partículas, uma vez que o problema definido (encontrar a frequência de margem de fase crítica) pode ser representado como um problema de busca de um mínimo global.

O Apêndice A fornece a rotina em MATLAB<sup>®</sup> baseada no algoritmo proposto que será utilizada para se calcular os ganhos do compensador na aplicação destacada no próximo capítulo.

## 4 *Exemplo de Aplicação - Conversor Buck*

Nos capítulos anteriores todo o fundamento das técnicas de análise e compensação por resposta em frequência, tanto de sistemas de fase monótona quanto de sistemas de fase não-monótona dentro da banda passante em malha aberta, foram analisados e convenientemente demonstrados.

Com o intuito de avaliar a eficácia e demonstrar o potencial do método proposto, considerar-se-á um exemplo de aplicação no qual a planta a ser controlada é um sistema físico que apresenta a característica da fase não-monótona notável: o conversor CC-CC tipo *buck*, também conhecido como abaixador de tensão. O conversor *buck* é amplamente utilizado nas diversas aplicações onde é necessário uma fonte de potência CC fixa e com habilidade de corrigir variações na tensão de alimentação e as oscilações de carga.

Sendo assim, para o desenvolvimento do exemplo de aplicação, inicialmente faz-se necessário uma apresentação do funcionamento geral do conversor *buck* síncrono. A seguir é feita a análise do modelo dinâmico do conversor para pequenos sinais, na qual modelam-se os diferentes estágios presentes no conversor, e logo após a modelagem dos estágios é proposto um projeto de um conversor e da sua respectiva malha de controle, incluindo a escolha do compensador mais adequado. Para o projeto da malha serão utilizadas três técnicas de sintonia dos parâmetros do compensador, sendo uma delas a técnica proposta neste trabalho.

Finalmente, uma análise e discussão dos resultados obtidos será feita com o intuito de endossar a empregabilidade e a eficácia da técnica proposta frente as outras técnicas apresentadas e comprovar algumas características da técnica proposta que foram mencionadas anteriormente.

## 4.1 Considerações Gerais

As três topologias básicas de conversores chaveados mais comumente utilizadas são os conversores *buck* (abaixador), *boost* (elevador) e *buck-boost* (abaixador-elevador). Essas topologias têm recebido grande atenção, muito em função da grande eficiência na conversão CC-CC em baixa potência e baixa-tensão, que são utilizadas no projeto de fontes de energia para diversas aplicações em produtos eletrônicos como computadores e telefones celulares, entre muitos outros.

Embora essencialmente diferentes, tais topologias apresentam algumas características em comum como, por exemplo, o fato de que a tensão de entrada  $V_{IN}$  e a tensão de saída  $V_{OUT}$  compartilham a mesma referência GND. No entanto, as topologias se diferem em relação a forma como as chaves, indutores e capacitores são conectados, o que leva cada topologia a ter suas próprias características e finalidades, como razão de conversão de tensão, natureza das correntes de entrada e saída, ondulação da tensão de saída, etc.

Todos os conversores podem ser analisados em regime permanente e em regime transitório, sendo que neste último é empregado uma modelagem em pequenos sinais que permite equacionar as variáveis do sistema em função de equações diferenciais, o que leva a um modelo dinâmico.

Como será visto adiante, o conversor *buck* em sua modelagem apresenta fase não-mónotona. Por esta razão, este conversor foi escolhido de forma a apresentar um potencial exemplo de aplicação da metodologia de sintonia analítica proposta.

## 4.2 Análise e Modelagem do Conversor *Buck*

Esta seção apresenta a análise e modelagem de um conversor *buck* em modo tensão operando em condução contínua.

O conversor *buck* é utilizado quando se deseja uma redução na tensão de saída  $V_{OUT}$  em relação à tensão de entrada  $V_{IN}$ . Basicamente, um conversor *buck* é constituído de um filtro passa-baixas *LC* e um par de chaves que regulam a tensão  $V_{IN}$  aplicada no filtro *LC*. Em geral, ao conjunto filtro *LC* e chaves, dá-se o nome de estágio de potência, que do ponto de vista de controle é a planta a ser controlada. Como forma de cumprir determinados requisitos de desempenho do conversor é desejado o projeto de um bloco controlador.

Fisicamente, as chaves podem ser implementadas de diversas formas. A chave superior

pode ser implementada através de um transistor MOS ou um transistor bipolar, sendo que a chave inferior pode ser implementada através de um outro transistor MOS, bipolar ou mesmo um diodo. Para uma maior eficiência, pode-se optar por um conversor *síncrono*, empregando-se duas chaves MOS que, no entanto, apresentam uma maior complexidade no chaveamento. Uma forma mais simples, porém menos eficiente, é empregar um diodo como chave inferior, tornando o conversor *assíncrono*.

Uma das formas mais simples e eficiente de se implementar o bloco controlador é através de um amplificador de transcondutância com resistores e capacitores. Um modulador PWM em conjunto com *drivers* é responsável pelo chaveamento dos transistores MOS. A Figura 4.1 apresenta um diagrama simplificado do conversor *buck* a ser estudado no decorrer deste capítulo.

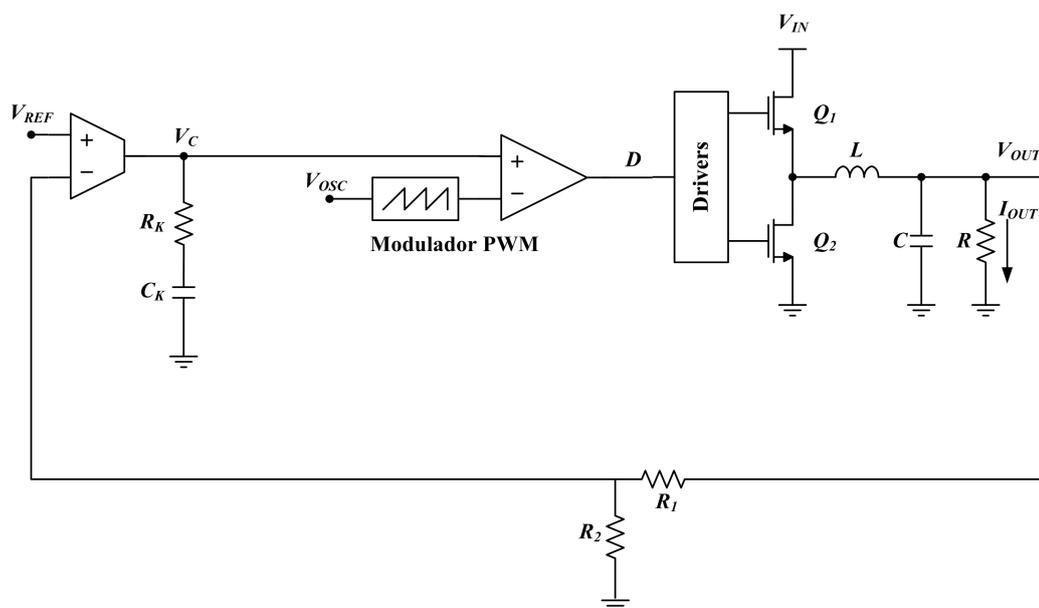


Figura 4.1: Diagrama simplificado do conversor *buck* síncrono empregado.

### 4.2.1 Análise em Regime Estacionário

Através da análise em regime estacionário é possível dimensionar os elementos ativos e passivos envolvidos no estágio de potência do conversor *buck*. De acordo com as especificações, é definido o ponto de operação do circuito e, assim, os elementos que o compõe.

A análise em regime estacionário com o conversor operando em modo contínuo é constituída de dois estados: os estados *ON* e *OFF*. Durante o estado *ON*, o transistor  $Q_1$  conduz por um período caracterizado  $T_{ON}$  e o transistor  $Q_2$  é cortado. Durante o estado

*OFF* o transistor  $Q_1$  é cortado e o transistor  $Q_2$  conduz por um período determinado por  $T_S - T_{ON}$ , onde  $T_S$  é o período correspondente à frequência de chaveamento  $f_S$ . Define-se então a razão de conversão de tensão  $D$ :

$$D = \frac{T_{ON}}{T_S} \quad (4.1)$$

Considerando-se a resistência  $R_{DS}$  entre dreno e fonte de ambos transistores  $Q_1$  e  $Q_2$  desprezível e que ainda a resistência parasita série do indutor também pode ser considerada como desprezível, a relação entre a tensão de saída  $V_{OUT}$  e tensão de entrada  $V_{IN}$  pode ser dada por:

$$V_{OUT} = DV_{IN} . \quad (4.2)$$

A equação (4.2) fornece a relação entre tensão de entrada e saída através da razão de conversão de tensão de um conversor *buck* operando em regime permanente. A menos de perdas ôhmicas nos componentes, a tensão de saída independe da corrente fornecida para a carga, característica desejável em fontes de alimentação.

### 4.2.2 Análise em Regime Transitório Empregando Modelo de Pequenos Sinais

Com a análise CA do regime transitório por meio de resposta em frequência é possível verificar a estabilidade do circuito e verificar parâmetros de desempenho do regime transitório. No entanto, o conversor *buck* é, por natureza, um sistema chaveado e não-linear, e as técnicas de resposta em frequência, como a análise por Diagramas de Bode e afins, não são aplicáveis já que se baseiam no teorema da superposição. No entanto, através de alguns critérios [15] e empregando-se um modelo de pequenos sinais é possível compreender a dinâmica média dos sinais em torno do ponto de operação e assim fazer a análise linearizada do conversor empregando-se técnicas clássicas de resposta em frequência.

#### Modelo Contínuo do Modulador PWM

O modelo contínuo do modulador PWM foi primeiramente descrito por Volpérian [16] no intuito de se analisar os conversores chaveados de forma contínua no domínio do tempo. Considerando  $V_C$  a queda de tensão gerada pela corrente de saída do amplificador de transcondutância e  $V_{OSC}$  a tensão pico-a-pico do oscilador empregado, a razão de conversão

de tensão gerado pelo modulador PWM pode ser dado por:

$$\frac{D(s)}{V_C(s)} = \frac{1}{V_{OSC}} \quad (4.3)$$

O modelo contínuo do modulador PWM em (4.3) só é válido quando a frequência de chaveamento  $f_S$  é muito maior que a frequência natural do filtro  $LC$ , fazendo com que o sistema tenda aos valores médios de tensão e corrente sem os *ripples* (oscilações) característicos dessas grandezas.

### Modelo Contínuo do Estágio de Potência

O modelo do estágio de potência para pequenos sinais basicamente pode ser dado pelo modelo de um filtro  $LC$  puro. No entanto, devido as características não-ideais dos componentes passivos do filtro  $LC$  e a carga aplicada, o modelo torna-se um pouco mais complexo do que o de um filtro  $LC$  ideal. Um exemplo é o surgimento de um zero no modelo devido ao fato de que a resistência série do capacitor de saída não é nula. Logo, considerando-se  $C$  a capacitância do capacitor de saída,  $R_C$  a resistência série do capacitor de saída,  $L$  a indutância do indutor de saída,  $R_L$  a resistência série do indutor de saída e que a carga é modelada através de uma resistência pura  $R$ , o modelo linearizado para pequenos sinais do estágio de potência é dado por [15]:

$$\frac{V_{OUT}(s)}{D(s)} = \frac{R}{R + R_L} \frac{1 + sR_C C}{1 + s \left[ C \left( R_C + \frac{R R_L}{R + R_L} \right) + \frac{L}{R + R_L} \right] + s^2 L C \frac{R + R_C}{R + R_L}} V_{IN} \quad (4.4)$$

para um  $V_{IN}$  constante.

No entanto, nos casos onde a resistência série  $R_L$  do indutor de saída e a resistência série  $R_C$  do capacitor de saída podem ser desprezadas em relação a resistência da carga  $R$  e ainda que a resistência  $R_L$  pode ser desprezível em face da resistência  $R_C$ , o modelo em (4.4) pode ser simplificado para:

$$\frac{V_{OUT}(s)}{D(s)} = \frac{1 + sR_C C}{1 + s \left( R_C C + \frac{L}{R} \right) + s^2 L C} V_{IN} \quad (4.5)$$

também para  $V_{IN}$  constante.

Reescreve-se (4.5) de forma que se assemelhe mais à um sistema de segunda-ordem padrão:

$$\frac{V_{OUT}(s)}{D(s)} = \frac{1}{LC} \frac{1 + sR_C C}{s^2 + \left(\frac{R_C}{L} + \frac{1}{RC}\right)s + \frac{1}{LC}} V_{IN} \quad (4.6)$$

também para  $V_{IN}$  constante.

O filtro  $LC$  tipicamente introduz um pólo complexo-conjugado no sistema dado em (4.6) com frequência natural igual a:

$$f_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ [Hz]} \quad (4.7)$$

e fator de amortecimento igual a:

$$\zeta = \frac{\sqrt{LC}}{2} \left( \frac{R_C}{L} + \frac{1}{RC} \right). \quad (4.8)$$

A frequência do zero oriundo da resistência série  $R_C$  do capacitor de saída é dada por:

$$f_z = \frac{1}{2\pi R_C C} \text{ [Hz]}. \quad (4.9)$$

Tipicamente a resistência parasita série  $R_C$  do capacitor de saída faz com que a frequência do zero que surge esteja entre duas a três vezes mais distante do pólo complexo-conjugado. A Figura 4.2 apresenta um esboço do Diagrama de Bode do estágio de potência do conversor *buck*. O pólo complexo contribui com uma atenuação de  $-40$  [dB/dec] a partir da frequência natural  $f_n$  na curva de módulo e um atraso de fase de até  $-180^\circ$  na curva de fase. O zero no SPE contribui com uma amplificação de  $+20$  [dB/dec] a partir da frequência  $f_z$  e um avanço de até  $+90^\circ$  na curva de fase.

### Filosofia da Compensação de Conversores *Buck*

Como pode ser visto na Figura 4.2, se no projeto da malha de controle para o conversor *buck* for desejado uma frequência de cruzamento de ganho maior que a frequência do zero do modelo, o sistema irá apresentar fase não-monótona dentro da banda passante em malha aberta.

Em geral, deseja-se uma banda passante em malha aberta  $f_B$  grande de forma a acelerar a resposta do sistema, diminuindo o tempo de acomodação. Tipicamente  $f_B$  é escolhido entre  $1/10$  e  $1/5$  da frequência de chaveamento  $f_S$  e se deseja uma margem de fase em torno de  $45^\circ$  ou mais [17].

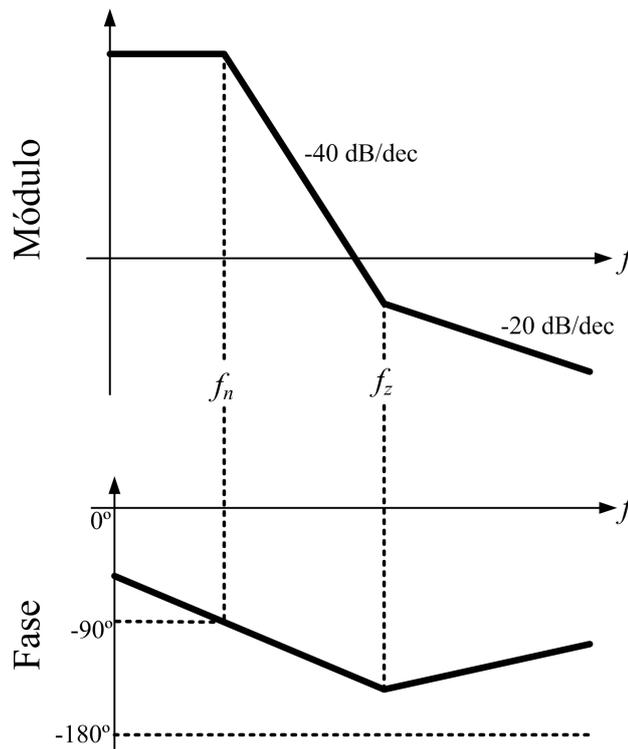


Figura 4.2: Esboço do diagrama de Bode do estágio de potência do conversor *buck*.

A escolha de qual tipo de compensador mais adequado é feita com base no posicionamento relativo das frequências dos pólos complexo-conjugados  $f_n$ , frequência do zero  $f_z$ , frequência da banda passante em malha aberta  $f_B$  e frequência de chaveamento  $f_S$ . A Tabela 4.1 mostra como deve ser feita a escolha do compensador em função das frequências [17]:

Tabela 4.1: Tipo do compensador em função da localização das frequências.

Tipo	Localização das Frequências	Tipo do Compensador
I	$f_n < f_z < f_B < \frac{f_S}{2}$	PI
II	$f_n < f_B < f_z < \frac{f_S}{2}$	PID
III	$f_n < f_B < \frac{f_S}{2} < f_z$	PID

Como pode ser visto na Tabela 4.1, os tipos II e III não acarretam em fase não-monótona dentro da banda passante em malha aberta. No entanto, devido ao fato de se desejar uma grande banda passante em malha aberta de forma a diminuir o tempo de acomodação do sistema, a acomodação da banda passante em malha aberta entre as

frequências do pólo complexo-conjugado e do zero torna-se desvantajosa, principalmente se tais frequências estiverem bem próximas. Neste caso, é preferível acomodar a banda passante em malha aberta afastada do zero e lidar com as dificuldades que a fase não-monótona acarretam.

Uma solução bastante adequada para se empregar fisicamente tanto o controlador como o bloco subtrator da malha é através de um amplificador de transcondutância. Considerando  $e$  como o sinal de erro proveniente da diferença entre a tensão de referência  $V_{REF}$  e a tensão de saída realimentada,  $g_m$  a transcondutância característica do amplificador e  $V_C$  a tensão na saída do amplificador, a equação do controlador é dada por:

$$\frac{V_C(s)}{e(s)} = g_m R_K + \frac{g_m}{C_K s} . \quad (4.10)$$

Logo, comparando-se a equação (4.10) com a de um controlador PI padrão, tem-se que os ganhos  $K_P$  e  $K_I$  são dados por:

$$K_P = g_m R_K \quad (4.11a)$$

$$K_I = \frac{g_m}{C_K} . \quad (4.11b)$$

## 4.3 Projeto de um Conversor *Buck*

Esta seção apresenta o projeto de um conversor *Buck*, onde os parâmetros do estágio de potência e do controlador são dados por Chiao et. al. [17]. Paralelamente, para o conversor analisado serão feitas mais duas compensações, uma utilizando a técnica de sintonia proposta neste trabalho e outra com a técnica de sintonia clássica dada por [3].

### 4.3.1 Parâmetros do Conversor *Buck*

Um conversor *buck* síncrono com os parâmetros listados na Tabela 4.2 é proposto por Chiao et. al. [17]:

Da Tabela 4.2, vê-se que o resistor de carga é dado por  $R = V_{OUT}/I_{OUT} = 330$  [m $\Omega$ ]. A resistência série do indutor é desprezível e a resistência série do capacitor é aproximadamente 5,5% da resistência de carga. Então, o termo que multiplica  $s^2$  em (4.4) é aproximadamente unitário. Desta forma, a função de transferência do estágio de potência pode ser dada por (4.5). Sendo assim, substituindo-se os valores da Tabela 4.2 em (4.5)

Tabela 4.2: Parâmetros do conversor *buck*.

Parâmetro	Sigla	Valor
Tensão de Entrada	$V_{IN}$	5 [V]
Tensão de Saída	$V_{OUT}$	3,3 [V]
Corrente de Saída	$I_{OUT}$	10 [A]
Frequência de Chaveamento	$f_s$	200 [KHz]
Indutor de Saída	$L$	3,3 [ $\mu$ H]
Capacitor de Saída	$C$	2200 [ $\mu$ F]
Resistência Série do Indutor	$R_L$	0 [ $\Omega$ ]
Resistência Série do Capacitor	$R_C$	18 [m $\Omega$ ]
Tensão Pico-a-Pico da Rampa do Oscilador	$V_{OSC}$	1,25 [V]
Tensão de Referência	$V_{REF}$	1,25 [V]
Transcondutância	$g_m$	600 [ $\mu$ S]
Resistência de Realimentação Série	$R_1$	1,65 [K $\Omega$ ]
Resistência de Realimentação Paralela	$R_2$	1 [K $\Omega$ ]

obtem-se:

$$\frac{V_{OUT}(s)}{D(s)} = G_P(s) = 5 \frac{1 + 39,6 \cdot 10^{-6}s}{1 + 4,96 \cdot 10^{-5}s + 7,26 \cdot 10^{-9}s^2} \cdot \quad (4.12)$$

A frequência do pólo complexo-conjugado está em:

$$f_n = \frac{1}{2 \cdot \pi \sqrt{3,3 \cdot 10^{-6} \cdot 2200 \cdot 10^{-6}}} \approx 1,87 \text{ [KHz]} \quad (4.13)$$

e a frequência do zero oriundo da resistência parasita série  $R_C$  do capacitor de saída está em:

$$f_z = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot 2200 \cdot 10^{-6}} \approx 4 \text{ [KHz]} \cdot \quad (4.14)$$

A função do modulador PWM é dada por:

$$M(s) = \frac{D(s)}{V_C(s)} = \frac{1}{1,25} = 0,8 \cdot \quad (4.15)$$

Em geral, a função do modulador PWM é combinada com a função com o estágio de potência. Dá-se a esta função combinada o nome de planta  $G(s)$ :

$$G(s) = G_P(s)M(s) = G_P(s)\frac{1}{V_{OSC}} . \quad (4.16)$$

Sendo assim, a planta a ser controlada  $G(s)$  possui função de transferência dada por:

$$G(s) = \frac{V_{OUT}(s)}{V_C(s)} = 4 \frac{1 + 39,6 \cdot 10^{-6}s}{1 + 4,96 \cdot 10^{-5}s + 7,26 \cdot 10^{-9}s^2} . \quad (4.17)$$

A saída é realimentada através de um divisor de tensão. Sendo assim, a função de transferência da realimentação  $H(s)$  não é unitária, mas dada por:

$$H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2,65} \approx 0,37 . \quad (4.18)$$

Analisando-se o conversor *buck* síncrono como um conjunto de sistemas, um diagrama esquemático do conversor pode ser visto pela Figura 4.3.

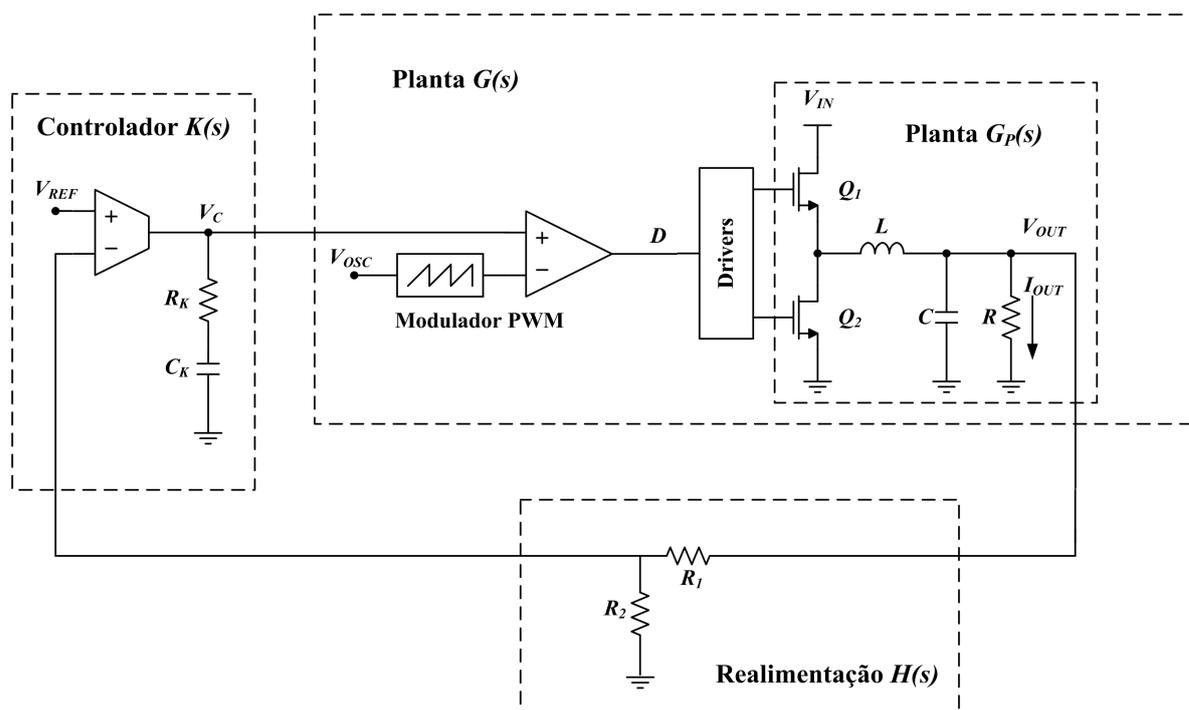


Figura 4.3: Diagrama esquemático do conversor *buck* síncrono como um conjunto de sistemas.

A partir de (4.17) e (4.18) traça-se o diagrama de Bode da resposta em frequência da planta em malha aberta  $G(s)H(s)$ , que pode ser vista na Figura 4.4.

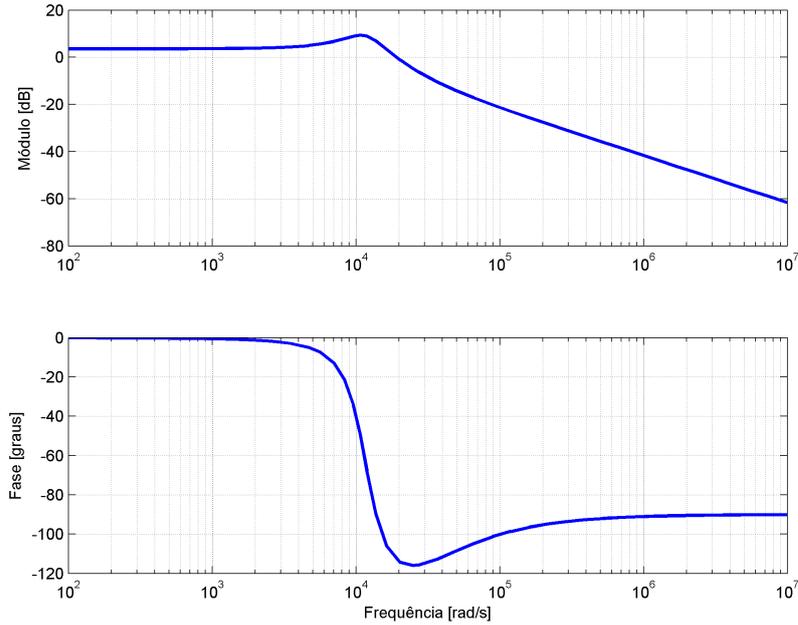


Figura 4.4: Diagrama de Bode da resposta em frequência do conversor *buck* síncrono em malha aberta.

### 4.3.2 Especificações de Desempenho do Conversor *Buck*

A referência [17] propõe que o projeto da malha de controle tenha uma banda passante em malha aberta igual a  $1/10$  da frequência de chaveamento e uma margem de fase de  $45^\circ$ . Então, a banda passante em malha aberta deve ser de 20 [KHz], o que em radianos por segundo leva a:

$$\omega_u = 2\pi \cdot \frac{f_s}{10} \quad \longrightarrow \quad \omega_u \approx 1,3 \cdot 10^5 \text{ [rad/s]} . \quad (4.19)$$

Analisando-se a Figura 4.4 nota-se que para a banda passante em malha aberta desejada o sistema irá apresentar um vale na curva de fase, acarretando fase não-monótona. Também é possível notar que pelo posicionamento das frequências envolvidas no projeto, dada pelas equações (4.7) e (4.9), frequência de cruzamento de ganho e de chaveamento desejadas, o tipo de controlador mais adequado é um controlador PI, conforme pode ser visto na Tabela 4.1.

Para uma margem de fase de  $45^\circ$ , o fator de amortecimento da malha compensada deve ser aproximadamente:

$$\zeta \approx 0,01 \cdot \phi_m \quad \longrightarrow \quad \zeta \approx 0,45 .$$

Com essas especificações, pode-se calcular o desempenho esperado da malha de controle:

$$M_p = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \times 100[\%] \quad (4.20)$$

$$t_a \approx \frac{4}{\zeta\omega_u} . \quad (4.21)$$

Com as especificações desejadas, pela equação (4.20) espera-se um *overshoot* de aproximadamente 20,5% e pela equação um tempo de acomodação aproximadamente igual a 68,4  $[\mu\text{s}]$ .

Com as especificações desejadas, serão feitos três projetos de um controlador para o conversor *buck* síncrono apresentado, a saber:

- Projeto via posicionamento do zero do controlador PI sugerido por Chiao et. al. [17]. Esta técnica consiste em posicionar o zero do controlador PI numa tradicional abordagem conhecida como “cancelamento de pólos e zeros”. Embora não haja um cancelamento de pólos e zeros efetivo, a abordagem se baseia em posicionar o zero de forma que o efeito desse anule o efeito do pólo complexo-conjugado na curva de módulo. Neste trabalho, esta técnica será referenciada como “**Posicionamento do Zero do Controlador**”.
- Projeto via sintonia analítica dada por Phillips e Harbor [3]. Esta técnica consiste em, a partir de especificações na frequência, calcular através de equações analíticas os parâmetros do controlador PI para atingir determinado desempenho no tempo. No entanto, a técnica não leva em consideração a possibilidade da fase não-monótona dentro da banda passante em malha aberta. Neste trabalho, esta técnica será referenciada como “**Sintonia Analítica Tradicional**”.
- Projeto via sintonia analítica proposta neste trabalho. Esta técnica é semelhante à técnica anterior, mas a possibilidade de fase não-monótona é considerada e as equações analíticas são modificadas de forma a se considerar essa possibilidade. Neste trabalho, esta técnica será referenciada como “**Sintonia Analítica Aprimorada**”.

### 4.3.3 Projeto via Posicionamento do Zero do Controlador

Este método descrito em [17] consiste em posicionar o zero do controlador PI de forma que a curva de módulo possua uma taxa de atenuação de  $-20$  [dB/dec] em torno da frequência da banda passante em malha aberta. Para isto, recomenda-se posicionar a frequência do zero do controlador PI em torno de  $f_{z_k} = 0,75f_n$ . Com essa recomendação, espera-se atingir as especificações desejadas. Os ganhos  $K_P$  e  $K_I$  são dados [17] a seguir:

$$K_P = 15,2$$

$$K_I = 142857$$

$$T_I \approx 1,06 \cdot 10^{-4} .$$

Logo:

$$K(s) = 15,2 + \frac{142857}{s} \quad (4.23)$$

A seguir são exibidas algumas figuras de mérito do projeto do controlador PI para o conversor *buck* síncrono analisado via posicionamento do zero do controlador. Na Figura 4.5 pode ser analisado o Diagrama de Bode da resposta em frequência da malha aberta e na Figura 4.6 a resposta ao degrau de amplitude  $V_{REF} = 1,25$  [V]. Convém lembrar que, devido ao fator de realimentação do sensor  $H(s)$ , o valor final da saída deve ser  $V_{\text{final}} = V_{REF}/H \approx 3,3$ [V], que é o valor desejado da tensão de saída  $V_{OUT}$ .

A Figura 4.5 mostra que a banda passante em malha aberta do sistema está aproximadamente em  $1,3 \cdot 10^5$  [rad/s], o que equivale a aproximadamente a  $20,7$  [KHz] e que a margem de fase está em torno de  $40^\circ$ , indicando que a compensação atingiu adequadamente as especificações. Já na Figura 4.6 observa-se que o *overshoot* é aproximadamente  $10,6\%$  e o tempo de acomodação está em torno de  $90$  [ $\mu$ s].

### 4.3.4 Projeto via Sintonia Analítica Tradicional

Para o projeto via sintonia analítica tradicional, considera-se que a frequência onde ocorre a margem de fase crítica é a frequência de cruzamento de ganho (frequência da banda passante em malha aberta). Sendo assim, os parâmetros de projeto são margem de fase  $\phi_m = 45^\circ$  e frequência de cruzamento de ganho  $\omega_u = 1,3 \cdot 10^5$  [rad/s]. As equações para a compensação são:

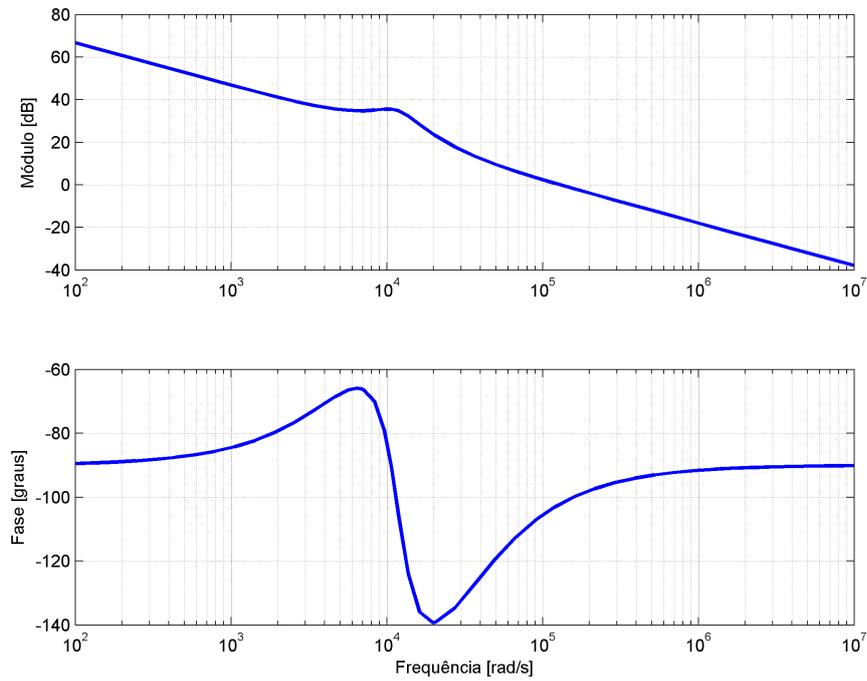


Figura 4.5: Diagrama de Bode da resposta em frequência do conversor *buck* compensado via posicionamento do zero do controlador.

$$\theta = 180^\circ + \phi_m - \angle G(j\omega_u)H(j\omega_u) \quad (4.24a)$$

$$K_P = \frac{\cos \theta}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} \quad (4.24b)$$

$$K_I = -\frac{\omega_u \sin \theta}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)|} \quad (4.24c)$$

Então os ganhos são dados por:

$$K_P = 12,24$$

$$K_I = 1200000$$

$$T_I = 0,102 \cdot 10^{-4}$$

Logo:

$$K(s) = 12,24 + \frac{1200000}{s} \quad (4.26)$$

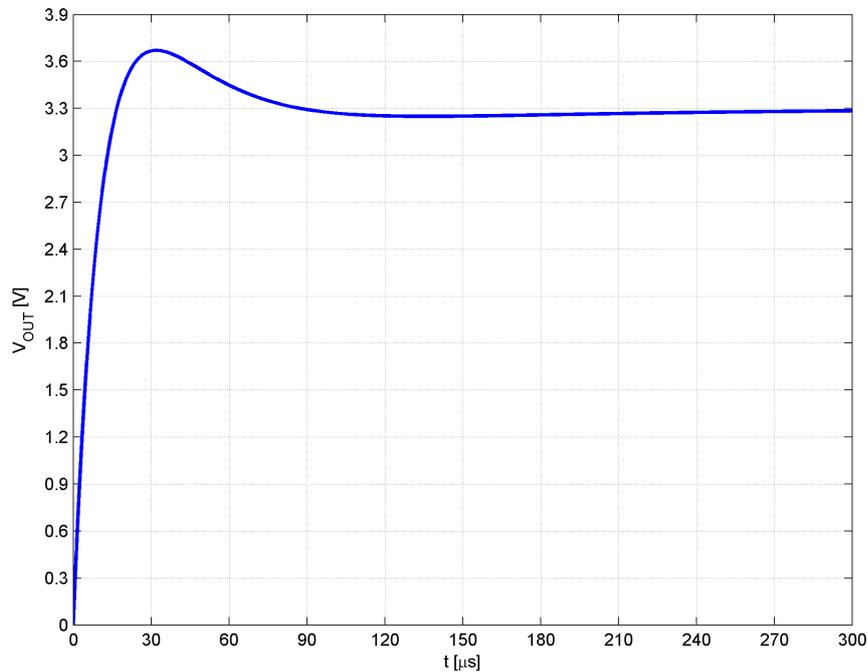


Figura 4.6: Resposta ao degrau de amplitude  $V_{REF}$  do conversor *buck* síncrono compensado via posicionamento do zero do controlador.

Novamente são exibidas as figuras de mérito para esta compensação. A Figura 4.7 exibe o Diagrama de Bode da resposta em frequência do sistema compensado e a Figura 4.8 mostra a resposta ao degrau de amplitude  $V_{REF}$  do conversor *buck* síncrono compensado.

A leitura da Figura 4.7 indica que a banda passante em malha aberta do sistema está aproximadamente em  $1,3 \cdot 10^5$  [rad/s] e que a margem de fase está em torno de  $45^\circ$ , indicando que a compensação atingiu adequadamente as especificações. Já na Figura 4.8 observa-se que o *overshoot* é aproximadamente 36,4% e o tempo de acomodação está em torno de 90 [ $\mu\text{s}$ ].

### 4.3.5 Projeto via Sintonia Analítica Aprimorada

No projeto via sintonia analítica aprimorada especifica-se a margem de fase crítica  $\phi_m$  e a frequência de cruzamento de ganho  $\omega_u$ . Sendo assim, os parâmetros de projeto são  $\phi_m = 45^\circ$  e  $\omega_u = 1,3 \cdot 10^5$  [rad/s]. Inicialmente considera-se que a frequência onde ocorre a margem de fase crítica  $\omega_m$  é igual a frequência onde ocorre a menor margem de fase na malha aberta  $G(j\omega)H(j\omega)$  dentro da banda passante em malha aberta. Para o conversor *buck* em questão, esta frequência é exatamente igual à frequência do zero, ou seja, inicialmente  $\omega_m \approx 25253$  [rad/s]. Para um controlador PI, as equações de compensação

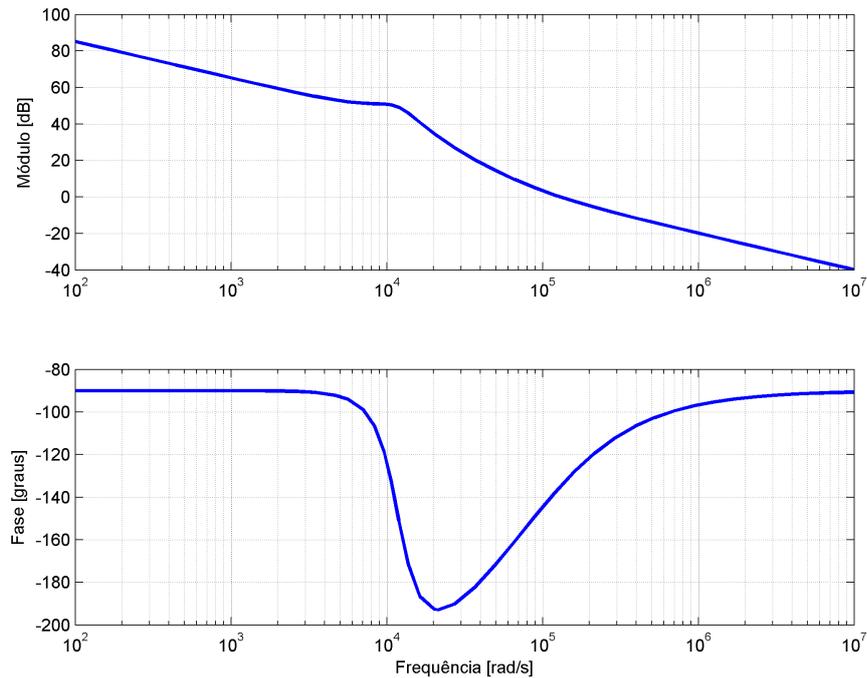


Figura 4.7: Diagrama de Bode da resposta em frequência do conversor *buck* compensado via sintonia analítica tradicional.

são:

$$\theta = 180^\circ + \phi_m - \angle G(j\omega_m)H(j\omega_m) \quad (4.27a)$$

$$K_P = \frac{1}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_m}{\omega_u}\right)^2 \tan^2 \theta}} \quad (4.27b)$$

$$K_I = \frac{\omega_u}{|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_u}{\omega_m}\right)^2 \cot^2 \theta}} . \quad (4.27c)$$

Novamente, convém dizer que o conjunto de equações (4.27) deve ser utilizado um número de vezes suficiente de forma que  $\omega_m$  se estabilize. O procedimento iterativo utilizado aqui foi o sugerido no Capítulo 3. Logo, os ganhos encontrados são:

$$K_P = 15,3106$$

$$K_I = 116890$$

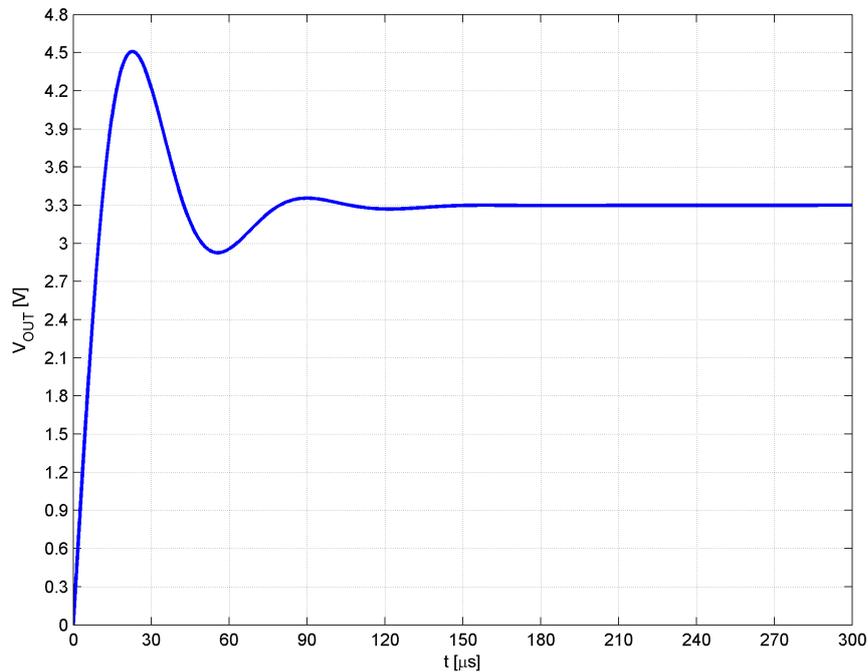


Figura 4.8: Resposta ao degrau de amplitude  $V_{REF}$  do conversor *buck* síncrono compensado via sintonia analítica tradicional.

$$T_I = 1,31 \cdot 10^{-4}$$

Logo:

$$K(s) = 15,3106 + \frac{116890}{s} \quad (4.29)$$

Assim como nas compensações anteriores são exibidas as figuras de mérito para esta compensação. A Figura 4.9 mostra o Diagrama de Bode da resposta em frequência da malha aberta do sistema compensado via sintonia analítica aprimorada e a Figura 4.10 a resposta ao degrau de amplitude  $V_{REF}$  do sistema compensado via sintonia analítica aprimorada.

A leitura da Figura 4.9 indica que o sistema atingiu as especificações desejadas na frequência e a Figura 4.10 mostra que o sistema apresentou *overshoot* de aproximadamente 10,4% e tempo de acomodação aproximadamente igual a 90  $[\mu s]$ .

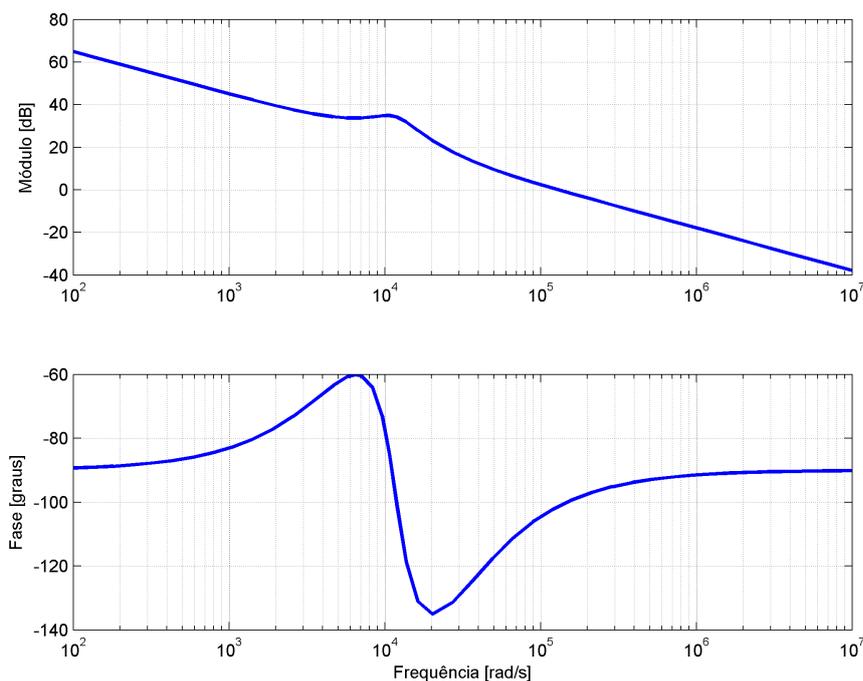


Figura 4.9: Diagrama de Bode da resposta em frequência do conversor *buck* compensado via sintonia analítica aprimorada.

## 4.4 Análise e Discussão dos Resultados

Esta seção é dedicada a uma análise crítica e discussão dos resultados obtidos, onde são feitas as conclusões e comparações entre as três técnicas de sintonia apresentadas para o conversor CC-CC tipo *buck* síncrono.

Primeiramente, listam-se os ganhos calculados para cada compensação, que podem ser visualizados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Ganhos das técnicas de sintonia aplicadas.

	Posicionamento do Zero	Analítica Tradicional	Analítica Aprimorada
$K_P$	15,2	12,24	15,3106
$K_I$	142857	1200000	116890
$T_I$	$1,06 \cdot 10^{-4}$	$10,2 \cdot 10^{-4}$	$1,31 \cdot 10^{-4}$

A análise da Tabela 4.3 confirma a expectativa de que a compensação via sintonia analítica tradicional levará a um  $K_P$  subestimado e a um  $K_I$  superestimado em relação à sintonia analítica aprimorada. A Tabela 4.3 ainda mostra como estão próximos os ganhos calculados via técnica de posicionamento do zero do controlador e a técnica de sintonia analítica aprimorada indicando que, para este caso, a sintonia analítica aprimorada se

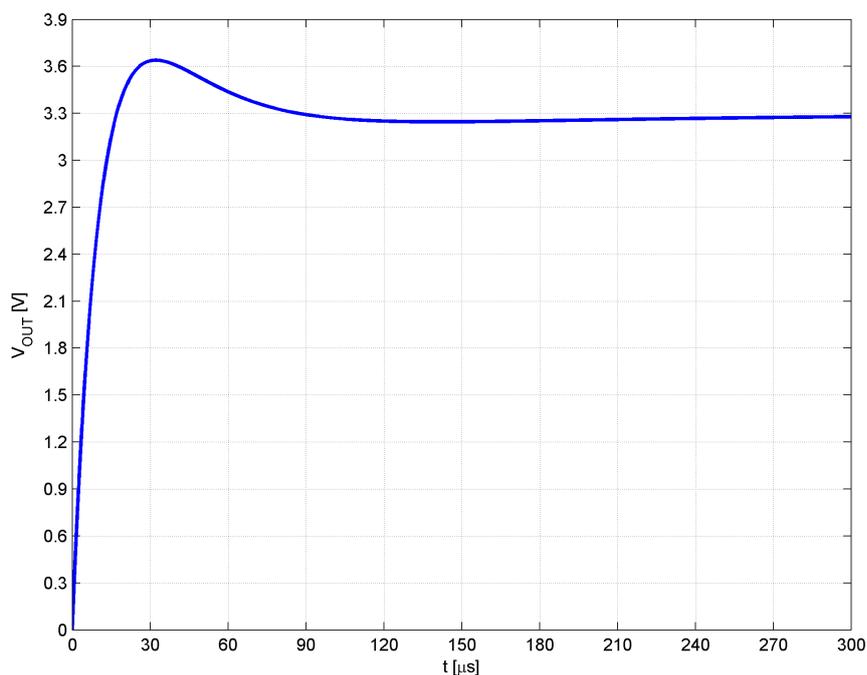


Figura 4.10: Resposta ao degrau de amplitude  $V_{REF}$  do conversor *buck* síncrono compensado via sintonia analítica aprimorada.

aproxima bastante de uma prática consagrada do projeto de compensadores para conversores *buck*, comprovando a sua eficácia.

Agora dá-se início a análise das figuras. Inicialmente, a análise dos diagramas de Bode da resposta em frequência das três malhas projetadas, ilustradas pelas Figuras 4.5, 4.7 e 4.9, revela que as únicas compensações que atingiram as especificações desejadas no domínio da frequência são a sintonia via posicionamento do zero do controlador e sintonia analítica aprimorada, muito embora a sintonia via posicionamento do zero do controlador tenha fornecido uma margem de fase ligeiramente menor que a especificada. Isto se deve ao fato de que este é um procedimento com teor empírico ou mesmo baseado em experiência e observações, e que apenas tenta alocar a frequência da banda passante em malha aberta. Neste caso, espera-se que a margem de fase não seja crítica a ponto de deteriorar a dinâmica do sistema, pois não há a possibilidade de especificá-la.

Embora seja um procedimento bastante efetivo e com resultados muito significativos, a falta da capacidade de especificar margem de fase pode se tornar um grave empecilho para sistemas que apresentem uma fase “excessivamente” não-monótona, ou seja, o *vale* da curva de fase esteja muito próximo da linha de  $-180^\circ$ . Logo, é um método cuja eficácia depende indesejavelmente do comportamento natural da planta.

Entretanto, pela comparação entre o comportamento no domínio do tempo para uma resposta ao degrau de amplitude  $V_{REF}$  dos sistemas compensados via posicionamento do zero do controlador e sintonia analítica aprimorada, ilustrado pelas Figuras 4.6 e 4.10, vê-se que o método via posicionamento do zero do controlador apresentou um desempenho bastante similar ao método via sintonia analítica aprimorada, com mesmo tempo de acomodação (como esperado, uma vez que ambos possuem a mesma banda passante em malha aberta) e com diferença em torno de pouco mais de 0,2% de *overshoot* entre ambos.

Outro ponto bastante interessante de se notar entre as duas compensações analisadas é o fato de que ambas apresentam margem de ganho infinita, uma vez que em nenhuma das duas a fase do sistema em malha aberta se encontra abaixo da linha de  $-180^\circ$ .

Agora será feita uma comparação entre as duas técnicas de sintonia analíticas utilizadas. A Figura 4.11 retrata o diagrama de Bode da resposta em frequência de ambas malhas de controle e a Figura 4.12 corresponde a resposta ao degrau de amplitude  $V_{REF}$  de ambas malhas de controle. Em ambas figuras, a curva em azul corresponde a sintonia analítica tradicional e a curva em verde corresponde a sintonia analítica aprimorada.

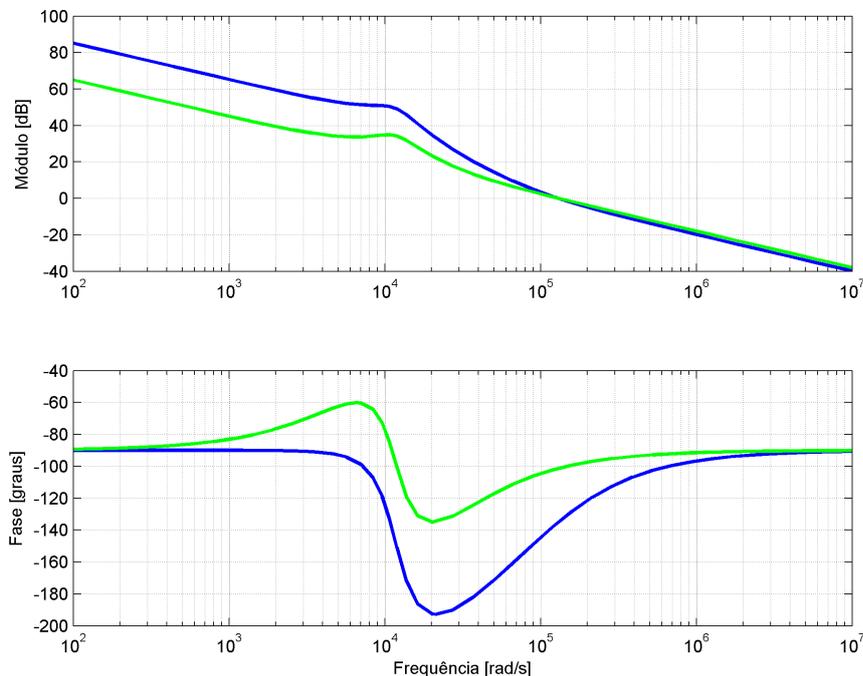


Figura 4.11: Diagrama de Bode da resposta em frequência do conversor *buck* compensado via sintonias analíticas.

A análise das Figuras 4.11 e 4.12 retrata o que se esperava da sintonia analítica aprimorada: o fato de garantir a margem de fase em toda a banda passante em malha

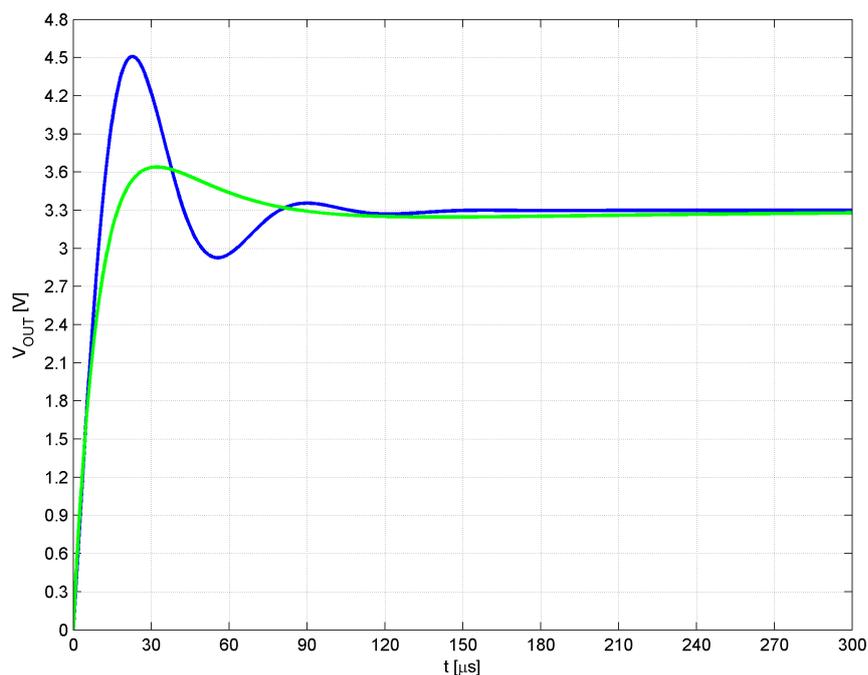


Figura 4.12: Resposta ao degrau de amplitude  $V_{REF}$  do conversor *buck* síncrono compensado via sintonias analíticas.

aberta especificada produz um menor *overshoot* que a sintonia analítica tradicional, que só garante a margem de fase na frequência de cruzamento de ganho. Outro ponto bastante interessante na Figura 4.11 é que para a sintonia analítica tradicional há dois pontos onde a curva de fase toca a linha de  $-180^\circ$  e uma conseqüente banda entre essas duas frequências. Qualquer ganho proporcional que estiver entre essa banda tornará o sistema instável.

Existem mais duas formas de se comprovar tal fato. Uma delas é a análise do diagrama de Nyquist, que é dado pela Figura 4.13 e as figuras com efeito de *zoom* correspondentes para uma melhor visualização do gráfico, dadas pelas Figuras 4.14 e 4.15.

A análise das Figuras 4.13, 4.14 e 4.15 mostra que para a compensação analítica aprimorada o sistema é estável e possui margem de ganho infinito, uma vez que sua curva correspondente (em verde) nunca possui circulações que cruzam o eixo real. Isso explica o fato de que se há margem de fase positiva dentro da banda passante em malha aberta não há ganhos proporcionais dentro da mesma que levem o sistema a instabilidade.

Por outro lado, uma análise não cuidadosa do sistema compensado via sintonia analítica tradicional poderia concluir que o sistema é instável para o compensador projetado, uma vez que em tese há uma circulação anti-horária em torno do ponto  $-1 + j0$  e o sistema

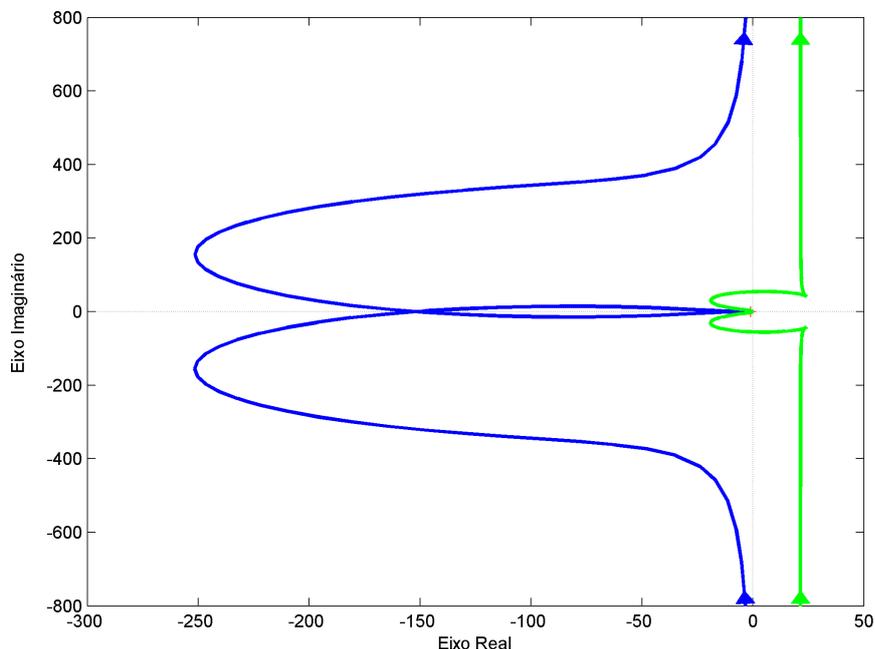


Figura 4.13: Diagrama de Nyquist da resposta em frequência do conversor *buck* síncrono compensado via ambas as sintonias analíticas.

não possui polos instáveis em malha aberta. Tal fato levaria a conclusão equivocada de que a malha fechada possui “-1” pólos instáveis, o que não possui significado físico algum.

No entanto, conforme demonstrado em Phillips e Harbor [3], a análise do diagrama de Nyquist para sistemas com múltiplos cruzamentos no eixo real e várias circulações deve ser cuidadosa. Uma técnica bastante eficaz para determinar o número de contornos no entorno do ponto crítico consiste em traçar uma linha com início no ponto  $-1 + j0$  e com direção “conveniente”. O número de circulações é então dado pelo número de vezes que essa linha cruza com a curva no sentido horário menos o número de vezes que a linha cruza a curva no sentido anti-horário. Por “conveniente” entende-se traçar uma direção que forneça o menor número de contornos possíveis. Pelas Figuras 4.13, 4.14 e 4.15 é possível verificar que ao se traçar uma linha com início em  $-1 + j0$  em direção ao ponto  $-50 - j600$  vê-se que a linha imaginária toca a curva em azul uma vez no sentido horário e uma vez no sentido anti-horário e, portanto, o número de circulações é nulo e o sistema é estável.

No entanto, observe a faixa de pontos onde a curva em azul cruza com o eixo real na Figura 4.14. Fazendo-se o mesmo procedimento explicado anteriormente é possível inferir que o sistema irá apresentar um número de circulação igual a 2, e portanto passará a ter

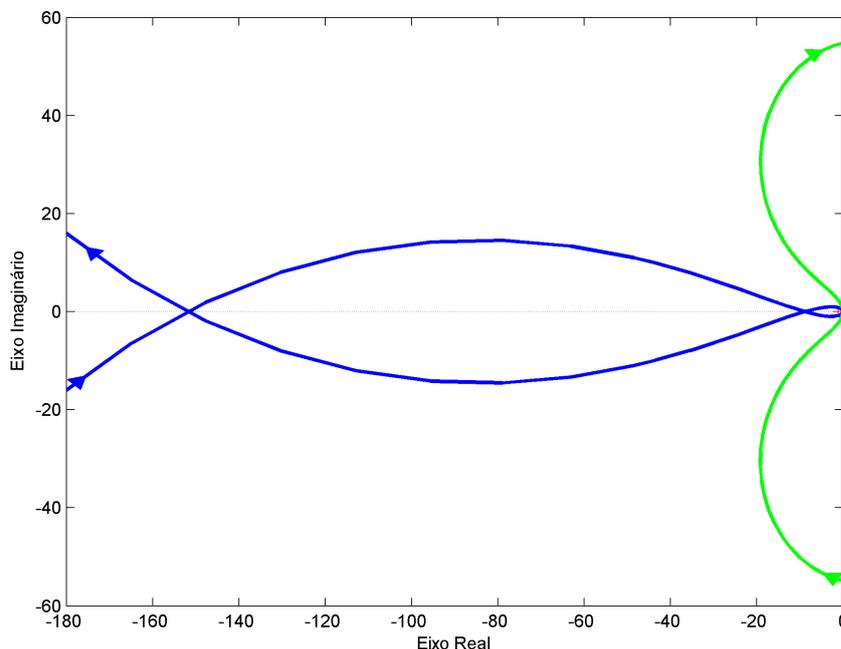


Figura 4.14: Diagrama de Nyquist da resposta em frequência do conversor *buck* síncrono compensado via ambas as sintonias analíticas.

dois pólos em malha fechada no SPD, caracterizando um sistema instável. Os pontos onde a curva em azul toca o eixo real caracterizam os ganhos proporcionais que fariam com que essas circulações fossem positivas, e correspondem aos pontos comentados anteriormente na análise do diagrama de Bode. Logo, qualquer ganho situado nessa faixa de pontos fará com que o sistema seja instável. Pela Figura 4.14 verifica-se que o primeiro ponto está situado aproximadamente em  $-152 + j0$  e pela Figura 4.15 o segundo ponto está situado em aproximadamente  $-9 + j0$ . Logo, a faixa de ganhos que tornarão o sistema instável está situada em  $0,0066 < K < 0,1111$ .

Em tese, isto se torna crítico apenas quando, por algum motivo, como envelhecimento ou variação de parâmetros com o ambiente, a planta sofra uma redução do ganho proporcional natural, o que poderia levar todo o sistema a instabilidade. Observe que o foco deste trabalho não está situado em controle robusto, mas apenas é interessante verificar que a margem de ganho para a compensação analítica tradicional não é infinita.

Como este problema da não-infinitude da margem de ganho poderia se traduzir em uma consideração para o exemplo em questão? A análise da malha aberta para a planta em questão na subseção 4.2.2 revela que o ganho DC do sistema é dado por:

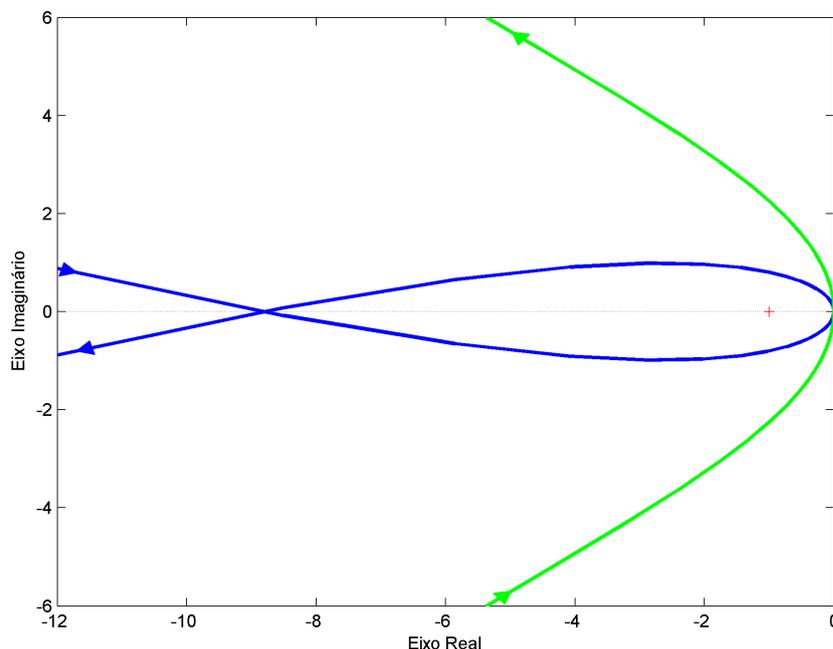


Figura 4.15: Diagrama de Nyquist da resposta em frequência do conversor *buck* síncrono compensado via ambas as sintonias analíticas.

$$K = H(s) \frac{V_{IN}}{V_{OSC}} \quad (4.30)$$

onde a função de realimentação  $H(s)$  é estática, mas o domínio de Laplace está ali representado apenas por conveniência e padronização da notação.

Logo, possíveis causas para a diminuição do ganho de poderiam ser: alteração nos valores de resistência dos resistores de realimentação, diminuição abrupta de  $V_{IN}$  ou aumento abrupto de  $V_{OSC}$ . Para o problema dos resistores pode-se utilizar resistores com baixíssima tolerância e pouco sensíveis ao envelhecimento e a tensão  $V_{OSC}$  é relativamente fixa e passível de ser facilmente controlável. O maior problema poderia residir em uma queda abrupta de  $V_{IN}$ , que de fato não é facilmente controlável.

O outro método que torna possível esta análise é o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz. A equação característica é:

$$1 + KK(s)G(s)H(s) = 0 \quad (4.31)$$

e as raízes características são as raízes em  $s$  do numerador de (4.31).

Para o sistema compensado via técnica de sintonia analítica tradicional as raízes características são as raízes de:

$$7,26 \cdot 10^{-9} s^3 + (731,6122 \cdot 10^{-6} K + 4,96 \cdot 10^{-5}) s^2 + (89,7187 K + 1) s + 1,8113 \cdot 10^6 K = 0 \quad (4.32)$$

e então o arranjo de Routh é construído e mostrado na Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Arranjo de Routh para o sistema compensado via técnica de sintonia analítica tradicional.

$s^3$	$7,26 \cdot 10^{-9}$
$s^2$	$731,6122 \cdot 10^{-6} K + 4,96 \cdot 10^{-5}$
$s^1$	$\frac{0,06564 K^2 - 7,9684 \cdot 10^{-3} K + 4,96 \cdot 10^{-5}}{731,6122 \cdot 10^{-6} K + 4,96 \cdot 10^{-5}}$
$s^0$	$1,8113 \cdot 10^6 K$

Para o sistema ser estável, todos os coeficientes de (4.32) e todos os elementos do arranjo de Routh na Tabela 4.4 devem ser positivos. Logo, as seguintes inequações devem ser satisfeitas:

$$731,6122 \cdot 10^{-6} K + 4,96 \cdot 10^{-5} > 0 \quad (4.33a)$$

$$89,7187 K + 1 > 0 \quad (4.33b)$$

$$1,8113 \cdot 10^6 K > 0 \quad (4.33c)$$

$$\frac{0,06564 K^2 - 7,9684 \cdot 10^{-3} K + 4,96 \cdot 10^{-5}}{731,6122 \cdot 10^{-6} K + 4,96 \cdot 10^{-5}} > 0 \quad (4.33d)$$

e, adicionalmente,  $K$  deve ser positivo, logo:

$$K > 0. \quad (4.33e)$$

Ao se resolver as inequações em (4.33), verifica-se que os valores de  $K$  para que o

sistema seja estável são  $0 < K < 0,0067$  ou  $K > 0,1114$ . Logo a faixa de valores de  $K$  para que o sistema se torne instável é  $0,0067 < K < 0,1114$ . Logo, o critério de Routh-Hurwitz comprova a observação feita no diagrama de Nyquist e de Bode.

Observe que os valores de  $K$  não são conceitualmente a margem de ganho, mas sim os fatores de ganho proporcional cuja multiplicação pelo ganho dc de toda a malha (inclusos controlador, planta e realimentação) dentro da banda passante em malha aberta torna o sistema instável. Isto significa, de forma geral, que se por algum motivo o ganho DC da malha (através do controlador, planta e/ou realimentação) sofrer uma redução de  $K$  vezes, estando  $K$  dentro da faixa encontrada, o sistema se tornará instável.

Com isto conclui-se a análise e discussão dos resultados para o exemplo de aplicação proposto e o presente capítulo.

## 5 *Conclusão e Trabalhos Futuros*

Neste trabalho foi apresentada uma técnica aprimorada de sintonia de controladores PID no domínio da frequência para sistemas de fase não-monotonicamente decrescente através de especificações de frequência de cruzamento de ganho e de margem de fase.

O método proposto oferece algumas melhorias desejáveis que não são obtidas quando se utiliza as equações de compensação monótona providas por Phillips e Harbor [3], como uma margem de fase mínima (crítica) garantida, que dará ao sistema em malha fechada um melhor desempenho. Se o sistema apresenta fase monótona dentro da banda passante em malha aberta, as equações de projeto apresentadas aqui convergem para aquelas dadas por [3].

O exemplo de aplicação do conversor *buck* síncrono mostrou o potencial da técnica desenvolvida com resultados bastante satisfatórios e muito similares a uma metodologia “prática” de projeto de controladores para conversores CC-CC tipo *buck*. Os resultados foram apresentados e discutidos fazendo-se uma análise crítica tanto do método como uma comparação com a sintonia clássica de controladores PID por Phillips e Harbor [3]. Além disso, também foi mostrado e discutido que se o sistema apresenta fase monótona dentro da banda passante em malha aberta o método proposto recai sobre o mesmo método dado por Phillips e Harbor [3].

Adicionalmente, o método proposto poderia ser utilizado como base para melhorias de algoritmos de adaptação, como escalonamento de ganho, integradores *anti-windup*, entre outros [1]. Os mesmos resultados podem ser obtidos aplicando-se a técnica proposta anteriormente para sistemas contínuos a um sistema discretizado através de uma transformação bilinear [18, 19].

Como trabalhos futuros sugere-se (mas não estão limitados a):

- Extender o mesmo procedimento de fase não-monótona para os controladores *Phase Lead*, *Phase Lag* e/ou *Lead/Lag*, ou qualquer outro controlador que ocasionalmente tenha uma estrutura conveniente.

- Melhorar e aprimorar o procedimento de busca da frequência de margem de fase crítica com outros métodos.
- Fazer um estudo mais amplo no exemplo de aplicação do conversor CC-CC tipo *buck* síncrono, desta vez com um enfoque maior de eletrônica de potência.
- Procurar mais sistemas reais físicos que apresentem fase não-monótona e testar a metodologia desenvolvida para averiguar a sua eficácia.

Sendo assim, o objetivo inicial de desenvolver uma técnica analítica de compensadores PID para sistemas de fase não-monótona dentro da banda passante em malha aberta foi cumprido e com potencial demonstrado através de um típico exemplo de aplicação. Como resultados científicos este trabalho gerou um artigo publicado no XVIII Congresso Brasileiro de Automática, o qual se encontra na íntegra no Apêndice B.

## *Referências Bibliográficas*

- [1] ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. *Advanced PID Control*. [S.l.]: Research T. Park, NC: ISA, 2005.
- [2] ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Process lags in automatic control circuits. *Trans. of the American Society of Mechanical Engineers*, v. 65, p. 433–444, 1943.
- [3] PHILIPS, C. L.; HARBOR, R. D. *Feedback Control Systems*. [S.l.]: Prentice Hall, 1999.
- [4] OGATA, K. *Modern Control Engineering*. [S.l.]: Prentice Hall, 2009.
- [5] CHOI, J.; LEE, S. Antiwindup strategy for PI-type speed controller. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, v. 56, n. 6, p. 2039–2046, 2009.
- [6] PANAGOPOULOS, H.; ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. Design of PID controllers based on constrained optimisation. *IEE Control Theory and Applications*, v. 149, n. 1, p. 32–40, 2002.
- [7] ZHAO, Z.; ZHANG, J.; HOU, M. An adaptative IMC-PID control scheme based on neural network. In: *Proc. 4th IEEE International Conference on Industrial Electronics and Applications*. [S.l.: s.n.], 2009.
- [8] SEKARA, T.; MATAUSEK, M. Optimization of PID controller based on maximization of the proportional gain under constraints on robustness and sensitivity to measurement noise. *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 54, n. 1, p. 184–189, 2009.
- [9] CONG, S.; LIANG, Y. PID-like neural network nonlinear adaptive control for uncertain multivariable motion control systems. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, v. 56, n. 10, p. 3872–3879, 2009.
- [10] HAN, J. From PID to active disturbance rejection control. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, v. 16, n. 3, p. 91–102, 2006.
- [11] HAMAMCI, S. An algorithm for stabilization of fractional-order time delay systems using fractional-order PID controllers. *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 52, n. 10, p. 1964–1969, 2007.
- [12] WANG, C.; CHEN, Y.; LUO, Y. An analytical design of fractional order proportional integral and [proportional integral] controllers for robust velocity servo. In: *Proc. 4th IEEE International Conference on Industrial Electronics and Applications*. [S.l.: s.n.], 2009.
- [13] COMINOS, P.; MUNRO, N. PID controllers: Recent tuning methods and design to specification. *IEE Control Theory and Applications*, v. 149, n. 1, p. 46–53, 2002.

- 
- [14] SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. [S.l.]: Wiley, 2005.
- [15] TEXAS Instruments Application Report SLVA057 *Understanding Buck Power Stages in Switchmode Power Supplies*. [S.l.], 03 1999.
- [16] VOLPÉRIAN, V. Simplified analysis of PWM converters using model of PWM switch - part i: Continuous conduction mode. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, v. 23, n. 3, p. 490–496, 1990.
- [17] CHIAO, M.; PARTO, P.; AMIRANI, R. *Stabilize Buck Converter with Transconductance Amplifier*. [S.l.], 07 2002.
- [18] YEUNG, K. S.; CHAID, K. Q.; DINH, T. X. Bode design charts for continuous-time and discrete-time compensators. *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 38, n. 2, p. 252–257, 1995.
- [19] XU, H.; DATTA, A.; BHATTACHARYYA, S. P. Computation of all stabilizing PID gains for digital control systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 46, n. 4, p. 647–652, 2001.

## *APÊNDICE A -- Rotina de Cálculo do Compensador PI*

Este apêndice mostra a rotina utilizada para o cálculo do compensador PI utilizado no Capítulo 4, implementada através do *software* MATLAB<sup>®</sup>.

A rotina se baseia no procedimento de busca sugerido no Capítulo 3, e tem como parâmetros a função de transferência em malha aberta  $G(s)H(s)$ , a margem de fase crítica  $\phi_m$ , a frequência de cruzamento de ganho  $\omega_u$ , a tolerância para a execução do *loop* que calcula a frequência onde ocorre a margem de fase crítica e o número de vezes que tal *loop* deve ser executado caso não atinja a tolerância especificada. Em contrapartida, a rotina fornece os ganhos  $K_P$  e  $K_I$  calculados e o número de repetições para o qual o *loop* do cálculo de  $\omega_m$  foi executado.

---



---

```

1  %Cálculo do controlador PI com a modificação para a compensação de sistemas de
    fase não-monótona
2  %[kp, ki, loops ] = mpic (gs, pm, wu, tol, repeat)
3  %gs é a função de transferência em malha aberta
4  %pm é a margem de fase crítica (em graus)
5  %wu é a frequência de cruzamento de ganho (em rad/s)
6  %tol é o valor de tolerância absoluta para calcular wm
7  %repeat é o número de repetições do loop para calcular wm
8  %Para maiores informações, verifique a teoria descrita
9  function [kp, ki, loops ] = mpic (gs, pm, wu, tol, repeat);
10 mg = bode (gs, wu); %calcula o módulo de G(jwu) ;
11 [ma, pa, wa ] = bode (gs, 0:wu/1000:wu); %calcula a resp em freq de G(jw);
12 [ph, entry ] = min (pa); %menor fase de G(jw)
13 wm = wa (entry); %frequência onde ocorre a menor fase de G(jw)
14 %Equações de Compensação para o Controlador PI
15 th = pi *(pm-ph-180)/180;
16 kp = inv (mg)*sqrt (inv (1+((wm/wu)*tan (th))^2));
17 ki =inv (mg)*sqrt (inv (1+((wu/wm)*cot (th))^2))*wu;
18 %Inicialização de variáveis
19 wma = 0;
20 loops = 1;
21 %Loop para calcular wm
22 while (abs (wma-wm) >= tol) & (loops < repeat),
23 wma = wm; %atualização da variável
24 ks = tf ([kp ki ],[1 0]); %função de transferência do controlador PI
25 [ma, pa, wa ] = bode (gs *ks, 0:wu/1000:wu); %RF de K(s)G(s);
26 [ph, entry ] = min (pa); %busca da menor fase de K(jw)G(jw)
27 wm = wa (entry); %frequência de menor fase de K(jw)G(jw) ;
28 [mx, ph ] = bode (gs, wm); %módulo e fase de K(jwm)G(jwm)
29 %Equações de Compensação para o Controlador PI
30 th = pi *(pm-ph-180)/180;
31 kp = inv (mg)*sqrt (inv (1+((wm/wu)*tan (th))^2));
32 ki =inv (mg)*sqrt (inv (1+((wu/wm)*cot (th))^2))*wu;
33 loops = loops +1; %atualização de variável
34 end

```

---

## *APÊNDICE B -- Artigo Publicado no CBA 2010*

Este apêndice fornece, na íntegra, o artigo que este trabalho produziu e foi publicado no XVIII Congresso Brasileiro de Automática 2010, realizado em Bonito/MS entre os dias 12 e 16 de Setembro de 2010. O artigo foi apresentado sob a forma de pôster durante o período da manhã na seção TC5 no dia 15 de Setembro de 2010.

# UMA TÉCNICA APRIMORADA DE SINTONIA ANALÍTICA DE CONTROLADORES PID POR RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

CAIO F. DE PAULA\*, FELIPE H. R. CUNHA\*, LUÍS H. C. FERREIRA\*

\*Universidade Federal de Itajubá  
Instituto de Engenharia de Sistemas e Tecnologia da Informação  
37500-903 Itajubá, Minas Gerais, Brasil.

Emails: caiofernandes@gmail.com, felipe.cunha@ymail.com, luis@unifei.edu.br

**Abstract**— An improved technique of analytical design of PID controllers in frequency-domain for non-monotonically decreasing phase systems by means of gain crossover frequency and phase margin specifications is presented in this paper. The proposed method guarantees a minimum phase margin inside the desired bandwidth, assuring better performance to step response for the closed-loop system. In order to achieve this feature, it is necessary to redefine the concept of phase margin when the uncontrolled process presents a non-monotonically decreasing phase inside the bandwidth. Hence, the phase margin can still be used as a good robustness indication and allows the Bode's stability criterion to be used for monotonic minimum-phase or non-monotonic minimum-phase systems.

**Keywords**— Frequency-response compensation, PID compensation, non-monotonic phase systems.

**Resumo**— Neste artigo uma técnica aprimorada de sintonia analítica de controladores PID no domínio da frequência para sistemas de fase não-monotonamente decrescente através de especificações de frequência de cruzamento de ganho e de margem de fase é apresentada. O método proposto garante uma margem de fase mínima dentro da banda passante desejada, assegurando um melhor desempenho para a resposta ao degrau da malha fechada. A fim de alcançar tal aprimoramento, é necessário redefinir o conceito de margem de fase quando a planta de processo apresenta a fase não-monotonamente decrescente dentro da banda passante. Desta forma, a margem de fase ainda pode ser utilizada como um bom indicativo de robustez e além disso é possível utilizar o critério de estabilidade de Bode na análise da estabilidade de sistemas de fase mínima monótona ou fase mínima não-monótona.

**Palavras-chave**— compensação por resposta em frequência, compensadores PID, sistemas de fase não-monótona.

## 1 Introdução

O controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo) é provavelmente o mais utilizado em sistemas de controle em realimentação negativa devido a sua simplicidade com boas propriedades dinâmicas e de robustez. Durante a última metade do século passado, grandes esforços acadêmicos e industriais tiveram como foco o aprimoramento da sintonia de controladores PID (Åström and Hägglund, 2005), com técnicas que vão desde o método empírico de Ziegler and Nichols (1943) até as compensações analíticas por lugar das raízes e por resposta em frequência (Philips and Harbor, 1999), (Ogata, 2009). Além dessas abordagens clássicas, existem métodos que procuram uma melhor adaptação à planta, como o escalonamento de ganhos, os integradores *anti-windup* (Choi and Lee, 2009), as técnicas baseadas em otimização e inteligência artificial (Panagopoulos et al., 2002), (Åström and Hägglund, 2005), (Zhao et al., 2009), (Sekara and Matausek, 2009), (Cong and Liang, 2009) e até abordagens não-lineares (Han, 2006) e de ordem fracional (Hamamci, 2007), (Wang et al., 2009).

Uma notação padrão de um controlador PID

é dada por:

$$K(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (1)$$

na qual  $K_P$  é o ganho proporcional,  $T_I$  é o tempo de ação integral e  $T_D$  é o tempo de ação derivativa (Cominos and Munro, 2002).

O princípio por trás da compensação por resposta em frequência de um sistema dinâmico linear invariante no tempo (LTI) contínuo ou discreto é que todas as frequências que são amplificadas na função de transferência de malha aberta possuem a capacidade de exercer uma ação de controle em um sistema em realimentação negativa (Skogestad and Postlethwaite, 2005). Este princípio define um conceito de banda passante para um sistema de controle, o qual é útil para entender os benefícios e as barreiras envolvidas quando se utiliza um sistema de controle em realimentação negativa. Em termos gerais, quanto mais larga for a banda passante na função de malha aberta, mais rápida será a resposta temporal e mais sensível será o sistema em realimentação negativa às variações de parâmetros e distúrbios.

Entretanto, a estabilidade de um sistema em realimentação negativa está relacionada à equação característica, a qual está relacionada às frequências nas quais o ganho de malha aberta cruza com o ganho em malha fechada (Philips

and Harbor, 1999), (Skogestad and Postlethwaite, 2005), (Ogata, 2009).

Considere um sistema de controle em realimentação unitária e negativa, como mostrado na Fig. 1. É importante ter a ideia de que o controlador e a planta formam uma unidade; crédito ou descrédito pelos resultados obtidos são atribuídos tanto a um como ao outro (Ziegler and Nichols, 1943). Assumindo que o controlador faça com que a função de malha aberta possua um comportamento passa-baixas na sua resposta em frequência com uma única frequência solução da equação característica, a banda passante pode então ser definida como a faixa de frequências entre zero e a frequência solução da equação característica, a qual é chamada frequência de cruzamento de ganho.

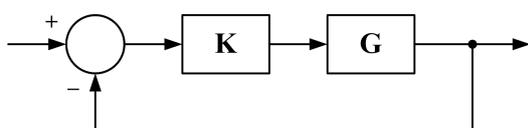


Figura 1: Diagrama de blocos do sistema de controle realimentado.

Para um sistema em realimentação negativa com a fase monotonamente decrescente dentro da banda passante em malha aberta, a distância entre a fase na frequência de cruzamento de ganho e o limite de estabilidade de  $-180^\circ$  é chamada de margem de fase. Baseado no critério de estabilidade de Bode (válido somente para sistemas de fase mínima), se a margem de fase é positiva, então o sistema em malha fechada será estável (Skogestad and Postlethwaite, 2005).

Assim, a margem de fase pode ser vista como um indicativo de robustez, informando o quanto a fase do sistema em malha aberta pode variar de forma que o sistema em malha fechada ainda seja estável. Além do mais, ela está diretamente relacionada com o fator de amortecimento de um sistema de segunda ordem padrão, no qual quanto maior for o fator de amortecimento, menor será o *overshoot* do sistema (Philips and Harbor, 1999), (Ogata, 2009).

No entanto, a técnica clássica de sintonia analítica de controladores por resposta em frequência considera que a margem de fase é sempre definida na frequência de cruzamento de ganho (Philips and Harbor, 1999). Contudo, esta consideração não é sempre válida, pois, mesmo para um sistema de fase mínima, a simples presença de um zero no semiplano à esquerda localizado próximo aos pólos dominantes leva a uma resposta em frequência de fase não-monótona.

Este artigo apresenta uma técnica aprimorada de sintonia analítica de controladores PID no domínio da frequência para sistemas dinâmicos de fase monótona ou não-monótona dentro da banda

passante, tendo como especificações a frequência de cruzamento de ganho e a margem de fase. Esta técnica pode ser vista como uma expansão da técnica mostrada por Philips and Harbor (1999), a qual foi baseada nos trabalhos de Wakeland (1976) e Mitchell (1977). No intuito de alcançar este aprimoramento, o conceito de margem de fase precisa ser redefinido quando a resposta em frequência do sistema apresenta fase não-monotonamente decrescente dentro da banda passante. Esta redefinição se faz necessária pelos seguintes motivos: permite que a margem de fase continue sendo utilizada como um bom indicativo de robustez e ainda permite que o critério de estabilidade de Bode seja corretamente utilizado para sistemas de fase mínima monótona e fase mínima não-monótona.

## 2 Objeto de Estudo

Considere um sistema dinâmico LTI contínuo que pode ser modelado através da seguinte equação diferencial, que será utilizado como o objeto de estudo neste artigo:

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0u(t) \quad (2)$$

Um filtro passa-baixas LC que considera a resistência intrínseca do capacitor (comumente utilizado na eletrônica de potência) ou um sistema de aquecimento acoplado por dois ambientes são exemplos típicos cujo processo físico pode ser modelado pela equação diferencial em (2). Então, uma função de transferência admissível (com condições iniciais nulas) associadas à dinâmica expressa em (2) pode ser dada por:

$$G(s) = \frac{s + 6}{s^2 + 2s + 9} \quad (3)$$

na qual a frequência natural de oscilação não-amortecida é 3-rad/s e o fator de amortecimento é aproximadamente 0.33. Há ainda um zero no semiplano à esquerda localizado em 6-rad/s (o dobro da frequência natural). A Fig. 2 mostra o diagrama de Bode de (3).

Como pode ser visto na Fig. 2, existe um vale na curva de fase, próximo à frequência natural. Assim, a banda passante a ser considerada levará a uma compensação de fase não-monótona. Entretanto, a função de transferência de malha aberta ainda se mantém de fase mínima e o critério de estabilidade de Bode poderia ser utilizado sem maiores restrições.

## 3 Metodologia de Sintonia

Nesta seção será mostrado um procedimento de sintonia analítica que permitirá que o projetista especifique uma margem de fase crítica (de pior caso) e uma frequência de cruzamento de ganho para uma função de transferência em malha

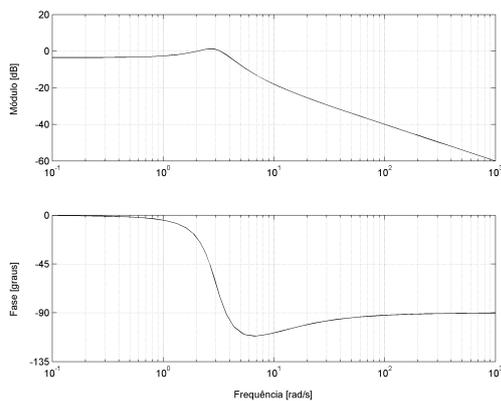


Figura 2: Diagrama de Bode da planta de processo.

aberta estável e de fase mínima, dado pelo critério de estabilidade de Bode. É importante lembrar que as especificações de margem de fase e de frequência de cruzamento de ganho estão intimamente ligadas à resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem padrão, como fator de amortecimento e frequência natural (Philips and Harbor, 1999), (Ogata, 2009).

Assumindo que o controlador faça com que o sistema em malha aberta possua um comportamento passa-baixas na sua resposta em frequência, faz-se necessário definir quatro parâmetros para a compensação por resposta em frequência de um sistema dinâmico LTI de fase não-monótona dentro da banda passante: a frequência de cruzamento de ganho  $\omega_u$ , a frequência de margem de fase crítica  $\omega_m$ , a margem de fase de cruzamento de ganho  $\phi_u$  e a margem de fase crítica  $\phi_m$ . A frequência de cruzamento de ganho  $\omega_u$  é a solução da equação característica. A margem de fase de cruzamento de ganho  $\phi_u$  é a distância entre a fase do sistema em malha aberta na frequência de cruzamento de ganho e o limite de estabilidade de  $-180^\circ$ . Baseado no critério de estabilidade de Bode, se a margem de fase de cruzamento de ganho  $\phi_u$  é positiva, então o sistema em malha fechada será estável (Skogestad and Postlethwaite, 2005). A frequência de margem de fase crítica  $\omega_m$  é a frequência na qual a resposta em frequência do sistema apresenta a fase mais baixa, isto é, apresenta a menor margem de fase na banda passante, que é menor ou igual à frequência de cruzamento de ganho  $\omega_u$ . A margem de fase crítica  $\phi_m$  é a distância entre a fase do sistema em malha aberta na frequência de margem de fase crítica (isto é, a menor margem de fase dentro da banda passante) e o limite de estabilidade de  $-180^\circ$ . Em outras palavras, resolvendo a equação característica no domínio da frequência leva a:

$$K(j\omega_u)G(j\omega_u) = 1\angle(-180^\circ + \phi_u) \quad (4a)$$

com:

$$\phi_m \leq \phi_u \quad (4b)$$

Note que, se a margem de fase crítica  $\phi_m$  é positiva, então a margem de fase de cruzamento de ganho  $\phi_u$  também será positiva, e o sistema será estável, uma vez que  $\omega_u$  é sempre maior ou igual a  $\omega_m$ . Sendo assim, aplicando o critério de estabilidade de Bode a (4a), o compensador pode ser analiticamente determinado pelas seguintes equações, em que  $\omega_u$  e  $\phi_m$  são as especificações livres de projeto:

$$|K(j\omega_u)| = \frac{1}{|G(j\omega_u)|} \quad (5a)$$

$$\angle K(j\omega_m) = -180^\circ + \phi_m - \angle G(j\omega_m) \quad (5b)$$

com:

$$\omega_m \leq \omega_u \quad (5c)$$

A frequência de margem de fase crítica  $\omega_m$  não pode ser uma especificação livre, mas somente um valor dado pelo sistema em malha aberta. Este valor deve ser encontrado de maneira recursiva, já que os ganhos do compensador irão modificar o sistema em malha aberta. Um bom ponto de partida para determinar a frequência de margem de fase crítica  $\omega_m$  é a frequência em que a planta de processo apresenta a menor fase dentro da banda passante. Desta maneira, o problema de controle se resume a encontrar os parâmetros do compensador que irão dar ao sistema em malha aberta a resposta em frequência de um passa-baixa com banda passante e desempenho em malha fechada desejados através de especificações de frequência de cruzamento de ganho e de margem de fase.

#### 4 Controlador PID

Resolvendo-se as equações em (5a) e (5b) para o controlador PID padrão em (1) resulta em:

$$K_P = \frac{1}{|G(j\omega_u)|\sqrt{1 + \left(\omega_u T_D - \frac{1}{\omega_u T_I}\right)^2}} \quad (6a)$$

$$\omega_m T_D - \frac{1}{\omega_m T_I} = \tan \varphi \quad (6b)$$

e:

$$\varphi = -180^\circ + \phi_m - \angle G(j\omega_m) \quad (6c)$$

Note que se a frequência de margem de fase crítica  $\omega_m$  é exatamente a frequência de cruzamento de ganho  $\omega_u$ , isto é, um sistema de fase monótona, então as equações (6a) e (6b) se tornam as já conhecidas equações de compensação mostradas por Philips and Harbor (1999). Uma das dificuldades no projeto analítico de controladores PID por técnicas de resposta em frequência é o fato de que há menos equações do que incógnitas, caracterizando um sistema de equações indeterminado, no qual  $T_I$  ou  $T_D$  devem ser designados livremente ou através de outros critérios. De

fato, sempre que possível, é comum determinar  $T_I$  através de especificações de erro em regime permanente. Assim, reescrevendo as equações (6a) e (6b) para o controlador PID em termos de  $K_P$  e  $T_D$  resulta em:

$$K_P = \frac{1}{|G(j\omega_u)| \sqrt{1 + \Omega^2 \left[ \tan \varphi + \frac{\bar{\Omega}}{\omega_m T_I} \right]^2}} \quad (7a)$$

$$T_D = \frac{\tan \varphi}{\omega_m} + \frac{1}{\omega_m^2 T_I} \quad (7b)$$

onde:

$$\Omega = \frac{\omega_u}{\omega_m} \quad (7c)$$

e:

$$\bar{\Omega} = \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \quad (7d)$$

Entretanto, as variações PI e PD são determinadas e possuem uma única solução cada. Na prática, o controlador PID não deve ser utilizado para compensar sistemas dinâmicos de fase não-monótona uma vez que tais sistemas, por sua própria natureza, já apresentam zeros no semiplano à esquerda na função de transferência em malha aberta, resultando em um efeito de avanço de fase muito similar ao termo derivativo presente na forma padrão em (1). Por esta razão, as próximas subseções irão apresentar as equações e alguns comentários acerca das variações PI e PD.

#### 4.1 Controlador PI

Se  $T_D$  for feito igual a zero nas equações (6a) e (6b), é possível obter:

$$K_P = \frac{1}{|G(j\omega_u)| \sqrt{1 + \frac{1}{\Omega^2} \tan^2 \varphi}} \quad (8a)$$

$$T_I = -\frac{\cot \varphi}{\omega_m} \quad (8b)$$

ou:

$$K_I = \frac{K_P}{T_I} = \frac{\omega_u}{|G(j\omega_u)| \sqrt{1 + \Omega^2 \cot^2 \varphi}} \quad (8c)$$

Observe que quanto maior for a razão  $\Omega$ , maior será o ganho  $K_P$  e menor será o ganho  $K_I$ . Isto significa que compensar um sistema de fase não-monótona como um de fase monótona levará a um valor de  $K_P$  subestimado e a um valor de  $K_I$  superestimado. Também é válido lembrar que, em geral, valores muito grandes de  $K_I$  tendem a deixar a resposta em malha fechada mais oscilatória (Ziegler and Nichols, 1943), (Philips and Harbor, 1999), (Ogata, 2009). Esta é uma das razões pela qual compensar sistemas de fase não-monótona como sistemas de fase monótona deve ser evitado, principalmente em presença de ação integral.

#### 4.2 Controlador PD

Se  $T_I$  for feito igual ao infinito nas equações (6a) e (6b), é possível chegar a:

$$K_P = \frac{1}{|G(j\omega_u)| \sqrt{1 + \Omega^2 \tan^2 \varphi}} \quad (9a)$$

$$T_D = \frac{\tan \varphi}{\omega_m} \quad (9b)$$

ou:

$$K_D = K_P T_D = \frac{\omega_u^{-1}}{|G(j\omega_u)| \sqrt{1 + \frac{1}{\Omega^2} \cot^2 \varphi}} \quad (9c)$$

Note que quanto maior for a razão  $\Omega$ , menor será o ganho  $K_P$  e maior será o ganho  $K_D$ . Isto significa que compensar um sistema de fase não-monótona como um de fase monótona levará a um valor de  $K_P$  superestimado e a um valor de  $K_D$  subestimado. Note também que os ganhos  $K_P$  em ambas as compensações PI e PD serão exatamente os mesmos se o sistema apresentar fase monótona dentro da banda passante.

## 5 Resultados

Considere o objeto de estudo na seção II com as seguintes especificações em malha aberta: margem de fase crítica de  $45^\circ$  e frequência de cruzamento de ganho de 30-rad/s (uma década acima da frequência natural). Estas especificações irão levar a um desempenho esperado em malha fechada para a resposta ao degrau igual a: *overshoot* de aproximadamente 20% e tempo de acomodação de aproximadamente 0.3-s (Philips and Harbor, 1999), (Ogata, 2009). De forma a se considerar o desempenho esperado, assume-se que o sistema em malha fechada possa ser aproximado a um sistema de segunda-ordem padrão.

Como pode ser visto na Fig. 2, a planta de processo apresenta uma fase não-monótona dentro da banda passante especificada. Todavia, é possível inferir que um compensador PI é adequado para dar ao sistema de controle em realimentação negativa o comportamento de um passa-baixas na resposta em frequência em malha aberta. Sendo assim, serão feitos o projeto de um compensador PI utilizando-se a compensação monótona apresentada por Philips and Harbor (1999) e paralelamente o projeto de um compensador PI utilizando-se a técnica proposta neste artigo, e ambos os resultados serão comparados. Os ganhos calculados são listados na Tabela 1 para a compensação monótona e não-monótona, respectivamente.

Note que os ganhos da Tabela 1 confirmam a expectativa de que a compensação monótona irá apresentar um ganho  $K_P$  menor e um ganho  $K_I$  maior que a compensação não-monótona.

Tabela 1: Compensação Monótona vs Compensação Não-Monótona

Parâmetro	Monótona	Não-Monótona
$K_P$	23.14	29.09
$K_I$	533.59	73.50
$T_I$	0.043	0.396

Os diagramas de Bode para a compensação monótona (linha tracejada) e para a compensação não-monótona (linha sólida) são mostrados na Fig. 3.

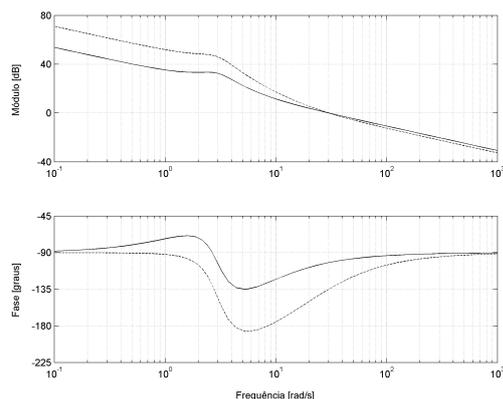


Figura 3: Diagramas de Bode para a compensação monótona (linha tracejada) e para a compensação não-monótona (linha sólida).

Observe que a banda passante é a mesma para ambas as compensações, como pode ser visto na Fig. 3. Entretanto, a compensação não-monótona assegura uma margem de fase de pelo menos  $45^\circ$  (a margem de fase crítica  $\phi_m$ ) para todas as frequências que estão dentro da banda passante, enquanto que a compensação monótona garante a margem de fase especificada somente para a frequência de cruzamento de ganho. Lembre-se que somente frequências dentro da banda passante são capazes de gerar ação de controle.

Dessa maneira, não há margem de fase garantida dentro da banda passante para a compensação monótona, embora ambos os sistemas sejam estáveis de acordo com o critério de Routh-Hurwitz (Philips and Harbor, 1999), (Ogata, 2009). Além disso, se o tempo de ação integral  $T_I$  é mantido fixo em 0.043, a faixa de valores de ganho  $K_P$  entre 0.28 e 2.18 pode levar o sistema monotonamente compensado à instabilidade. Tal faixa de ganhos foi encontrada através do critério de Routh-Hurwitz. Contudo, não há ganho  $K_P$  real e positivo capaz de levar o sistema não-monotonamente compensado à instabilidade para um tempo de ação integral  $T_I$  igual a 0.396.

Uma vez que a compensação monótona pode levar a dois ganhos em malha aberta que cruzam o limite de estabilidade de  $-180^\circ$ , sua estabilidade

não deve ser avaliada pelo critério de estabilidade de Bode (Skogestad and Postlethwaite, 2005). Por isso, será utilizado o diagrama de Nyquist para analisar a estabilidade de ambas as compensações. Os diagramas de Nyquist para a compensação monótona (linha tracejada) e para a compensação não-monótona (linha sólida) são mostrados na Fig. 4.

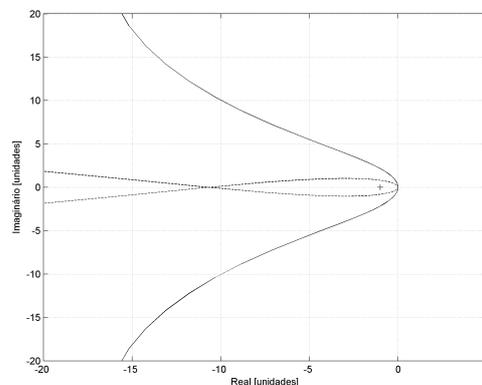


Figura 4: Diagramas de Nyquist para a compensação monótona (linha tracejada) e para a compensação não-monótona (linha sólida).

Logo, aplicando o critério de estabilidade de Nyquist para ambas as compensações, pode ser concluído que a compensação monótona não garante nenhuma margem de estabilidade, uma vez que há uma circulação em torno do ponto crítico  $-1$ . Pode ser visto também que o mesmo não ocorre para a compensação não-monótona, uma vez que não há circulação alguma em torno do ponto crítico  $-1$ . Finalmente, a resposta ao degrau unitário para a compensação monótona (linha tracejada) e para a compensação não-monótona (linha sólida) é mostrada na Fig. 5.

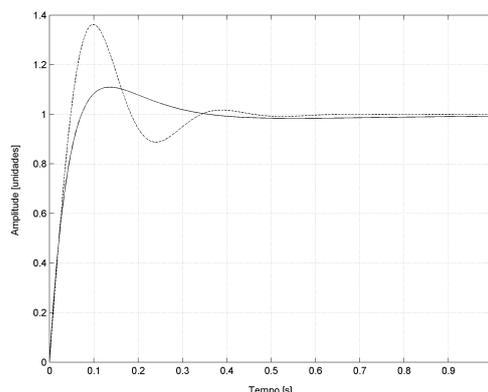


Figura 5: Resposta ao degrau unitário para a compensação monótona (linha tracejada) e para a compensação não-monótona (linha sólida).

Como pode ser visto na Fig. 5, as frequências naturais estão bem próximas em ambas as

compensações, uma vez que a banda passante é a mesma nos dois casos. Todavia, o *overshoot* na compensação não-monótona é consideravelmente menor do que na compensação monótona, uma vez que há uma margem de fase mínima assegurada para o sistema não-monotonamente compensado dentro da banda passante. Sendo assim, a curva de linha sólida se assemelha mais a uma resposta esperada de um sistema de segunda ordem padrão (*overshoot* de aproximadamente 20.5% e tempo de acomodação 0.3-s) que a curva de linha tracejada. Este resultado é uma das principais melhorias que o método proposto oferece quando comparado àquele mostrado por Philips and Harbor (1999).

## 6 Conclusão

Neste artigo uma técnica aprimorada de sintonia de controladores PID no domínio da frequência para sistemas de fase não-monotonamente decrescente através de especificações de frequência de cruzamento de ganho e de margem de fase foi apresentada. Embora seja possível desenvolver este trabalho similarmente para compensadores de atraso e avanço de fase, este não foi feito no presente artigo.

O método proposto oferece algumas melhorias desejáveis que não são obtidas quando da utilização das equações de compensação monótona providas por Philips and Harbor (1999), como uma margem de fase mínima (crítica) garantida, que dará ao sistema em malha fechada um melhor desempenho. Se o sistema apresenta fase monótona dentro da banda passante, as equações de projeto apresentadas aqui convergem para aquelas dadas por Philips and Harbor (1999).

Além disso, o método aqui proposto poderia ser utilizado em melhorias de algoritmos de adaptação, como escalonamento de ganho, integradores *anti-windup*, entre outros (Åström and Hägglund, 2005). Finalmente, os mesmos resultados podem ser obtidos aplicando-se a técnica proposta anteriormente para sistemas contínuos a um sistema discretizado através de uma transformação bilinear (Yeung et al., 1995), (Xu et al., 2001).

## Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à CAPES e à FAPEMIG pelo suporte financeiro.

## Referências

- Åström, K. J. and Hägglund, T. (2005). *Advanced PID Control*, Research T. Park, NC: ISA.
- Choi, J. and Lee, S. (2009). Antiwindup strategy for PI-type speed controller, *IEEE Trans. on Industrial Electronics* **56**(6): 2039–2046.
- Cominos, P. and Munro, N. (2002). PID controllers: Recent tuning methods and design to specification, *IEE Control Theory and Applications* **149**(1): 46–53.
- Cong, S. and Liang, Y. (2009). PID-like neural network nonlinear adaptive control for uncertain multivariable motion control systems, *IEEE Trans. on Industrial Electronics* **56**(10): 3872–3879.
- Hamamci, S. (2007). An algorithm for stabilization of fractional-order time delay systems using fractional-order PID controllers, *IEEE Trans. on Automatic Control* **52**(10): 1964–1969.
- Han, J. (2006). From PID to active disturbance rejection control, *IEEE Trans. on Industrial Electronics* **16**(3): 91–102.
- Mitchell, J. R. (1977). Comments on ‘Bode compensator design’, *IEEE Trans. on Automatic Control* **AC-22**(5): 869–870.
- Ogata, K. (2009). *Modern Control Engineering*, Prentice Hall.
- Panagopoulos, H., Åström, K. J. and Hägglund, T. (2002). Design of PID controllers based on constrained optimisation, *IEE Control Theory and Applications* **149**(1): 32–40.
- Philips, C. L. and Harbor, R. D. (1999). *Feedback Control Systems*, Prentice Hall.
- Sekara, T. and Matausek, M. (2009). Optimization of PID controller based on maximization of the proportional gain under constraints on robustness and sensitivity to measurement noise, *IEEE Trans. on Automatic Control* **54**(1): 184–189.
- Skogestad, S. and Postlethwaite, I. (2005). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, Wiley.
- Wakeland, W. R. (1976). Bode compensator design, *IEEE Trans. on Automatic Control* **AC-21**(5): 771–773.
- Wang, C., Chen, Y. and Luo, Y. (2009). An analytical design of fractional order proportional integral and [proportional integral] controllers for robust velocity servo, *Proc. 4th IEEE International Conference on Industrial Electronics and Applications*.
- Xu, H., Datta, A. and Bhattacharyya, S. P. (2001). Computation of all stabilizing PID gains for digital control systems, *IEEE Trans. on Automatic Control* **46**(4): 647–652.
- Yeung, K. S., Chaid, K. Q. and Dinh, T. X. (1995). Bode design charts for continuous-time and discrete-time compensators, *IEEE Trans. on Automatic Control* **38**(2): 252–257.
- Zhao, Z., Zhang, J. and Hou, M. (2009). An adaptive IMC-PID control scheme based on neural network, *Proc. 4th IEEE International Conference on Industrial Electronics and Applications*.
- Ziegler, J. G. and Nichols, N. B. (1943). Process lags in automatic control circuits, *Trans. of the American Society of Mechanical Engineers* **65**: 433–444.