

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

## A Equação de Liénard

Juliana Guimarães Cançado

Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias

Co-orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

ITAJUBÁ – MG

13 DE MAIO DE 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

## A Equação de Liénard

**Juliana Guimarães Cançado**

**Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias**

**Co-orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada

ITAJUBÁ – MG

13 DE MAIO DE 2011

*À minha mãe Angela, minha avó Hilda e meu avô Raimundo (in memoriam). Levarei sempre comigo as lições e valores que vocês me ensinaram. Por todo amor, carinho e dedicação que vocês me deram, divido com vocês os méritos desta conquista, porque ela também lhes pertence. Obrigada por tudo. Amo vocês!*

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus, por me conceder a graça de concluir mais esta jornada.

Ao meu orientador Fábio Scalco Dias, antes de mais nada pela paciência, comprometimento, dedicação, e ensinamentos, muito obrigada.

Ao Prof. Luis Fernando, meu co-orientador pelos ensinamentos, sua ajuda e interesse que contribuíram também para este trabalho.

À minha mãe, minha avó Hilda, e minha irmã por estarem sempre do meu lado, pela força, carinho e apoio para que eu pudesse concluir mais etapa da minha vida.

Ao meu avô Raimundo que apesar de não estar mais presente entre nós, sempre me encheu de orgulho com sua sabedoria. Vô tenho muitas saudades de você.

À meu namorado, Fernandes, por todo incentivo, apoio e amor.

Aos amigos que fiz no mestrado, em especial a Larissa, Rafael, P.A. e Adriano, por todos os momentos que passamos juntos.

À todos da minha família, que torceram por mim, em especial a minha tia Heloísa, que sempre me incentivou.

Aos professores da Unimontes que me apoiaram quando eu estive ausente, especialmente a Rosivaldo, Sebastião, Waldomiro e Hugo, vocês me ajudaram muito, talvez sem ajuda e o apoio de vocês eu não tivesse concluído mais esta etapa.

Aos coordenadores dos campus da Unimontes, Ana Paolla em São Francisco e Valdeir em Paracatu, pelo apoio, pela adequação dos horários e compreensão.

À todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram para que este trabalho fosse concluído.

# Resumo

Nesta dissertação estudamos as Equações de Liénard da forma

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0, \quad (1)$$

onde  $f$  e  $g$  são polinômios. A Equação de Liénard clássica é obtida tomando  $g(x) = x$  na equação diferencial (1). Na forma de um sistema, temos

$$\begin{cases} x' = y - F(x) \\ y' = -x, \end{cases} \quad (2)$$

onde  $F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$ . Mostramos neste caso que quando  $F$  tem grau 3, o sistema (2) tem no máximo um ciclo limite. Para a equação (1), onde  $f$  é um polinômio de grau  $2n+1$  ou  $2n+2$  e  $g$  é ímpar, mostramos que este sistema tem no máximo  $n$  ciclos limites de pequenas amplitudes. Apresentamos ainda condições sobre os coeficientes de  $f$  de forma a obter esses ciclos limites.

**Palavras-chave:** ciclo limite, Equação de Liénard, Coeficientes de Lyapunov.

# Abstract

In this work we study the polynomial Liénard Equations of the form

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0, \quad (3)$$

where  $f$  and  $g$  are polynomials. The classical Liénard Equation is obtained by taking  $g(x) = x$  in the differential equation (3). In the form of a system we have

$$\begin{cases} x' = y - F(x) \\ y = -x, \end{cases} \quad (4)$$

where  $F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$ . We show here that when  $F$  has degree 3, system (4) has at most one limit cycle. In equation (3) where  $f$  is a polynomial of degree  $2n + 1$  or  $2n + 2$  and  $g$  is odd we show that this equation has at most  $n$  limit cycles of small amplitude. We also present conditions on the coefficients of  $f$  to obtain these limit cycles.

**Keywords:** limit cycle, Liénard Equation, Lyapunov Constants.

# Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Índice	v
Lista de Figuras	vii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Fundamentos da Teoria Qualitativa</b>	<b>5</b>
2.1 Campo de vetores . . . . .	5
2.2 Teorema de Hartman-Grobman . . . . .	6
2.3 Variedade estável e variedade central . . . . .	8
2.4 Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	11
2.5 Transformação de Poincaré . . . . .	12
2.6 Estabilidade local segundo Lyapunov . . . . .	13
2.7 Valores focais e coeficientes de Lyapunov . . . . .	15
<b>3 Equação de Liénard</b>	<b>23</b>
3.1 Estudo da equação de Liénard em parte compacta do plano . . . . .	24
3.2 Compactificação de Poincaré . . . . .	33

3.3	Compactificação de Poincaré do sistema de Liénard . . . . .	39
3.4	Comportamento de $\Pi(X^f)$ na vizinhança do equador. . . . .	41
3.5	Equação de Liénard de grau três . . . . .	50
<b>4</b>	<b>O Número de Ciclos Limites do Sistema de Liénard</b>	<b>59</b>
4.1	Primeiro coeficiente de Lyapunov . . . . .	59
4.2	$n$ Ciclos limites para o sistema de Liénard . . . . .	62
	<b>Bibliografia</b>	<b>69</b>

# Lista de Figuras

2.1	Interpretação geométrica do Teorema de Hartman-Grobman. . . . .	7
3.1	Campo de vetores do sistema de Liénard. . . . .	26
3.2	$\gamma^+(p)$ com $p \in E_+^V$ . . . . .	26
3.3	$\gamma^+(q)$ com $q \in G(f)$ . . . . .	27
3.4	Ilustração das Proposições 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5. . . . .	28
3.5	Região $A$ . . . . .	29
3.6	Caso a) e Caso b). . . . .	31
3.7	$\gamma^-(p_-) \cap G(f) = \emptyset$ e $\gamma^-(p_+) \cap G(f) = \emptyset$ . . . . .	32
3.8	$\gamma^-(p_-) \cap G(f) = \emptyset$ e $\gamma^+(r_-) \cap G(f) = \emptyset$ . . . . .	32
3.9	Órbitas periódicas quando $d$ é par. . . . .	33
3.10	Projeção central. . . . .	35
3.11	$d$ ímpar com $a_d > 0$ e $a_d < 0$ . . . . .	42
3.12	$d$ par com $a_d > 0$ e $a_d < 0$ . . . . .	42
3.13	Região $A_k$ . . . . .	43
3.14	Fluxo na região $A_k$ . . . . .	43
3.15	Fluxo na região $B_b$ . . . . .	44
3.16	Comportamento de $\Pi(X^f)$ no infinito. . . . .	45
3.17	Regiões no infinito. . . . .	46
3.18	Estrutura das órbitas do campo $Y^2$ . . . . .	47
3.19	Espaço de fase de $Y^2$ . . . . .	48
3.20	Retrato de fase do campo $X^f$ quando $f$ é um polinômio par. . . . .	49

3.21	Campo vetorial $\Pi(X^f)$ quando $f$ tem grau três . . . . .	51
3.22	Um ciclo limite. . . . .	54
3.23	Curvas $\gamma_i$ e $\tilde{\gamma}_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ . . . . .	55
3.24	Curvas $C_1$ e $C_2$ . . . . .	57
4.1	Dois ciclos limites do sistema (4.13). . . . .	67

# Capítulo 1

## Introdução

A Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias inicia-se com Poincaré [19] em 1881. Nesta Teoria, as pesquisas sobre ciclos limites, que são órbitas periódicas isoladas, constituem uma das partes mais difíceis e interessantes. A noção de ciclo limite para campos vetoriais planares também foi introduzida por Poincaré.

No fim da década de 1920, Van der Pol [23], Liénard [14] e Andronov [1] no estudo de oscilações não lineares de fenômenos elétricos, obtiveram certas equações especiais de segunda ordem para as quais ocorriam os ciclos limites como havia idealizado Poincaré. Após tal verificação, matemáticos e físicos estudaram extensivamente a não-existência, a existência e a unicidade, entre outras propriedades de ciclos limites.

O método mais conhecido para provar a não-existência de ciclos limites em uma região simplesmente conexa é o método de Bendixson-Dulac e algumas variações deste. O conhecido Teorema de Poincaré-Bendixson nos fornece um caminho para provar a existência de ciclos limites quando temos convenientes condições satisfeitas. O problema da unicidade de um ciclo limite de um sistema é mais difícil de se obter, em geral, do que o problema da existência. Alguns critérios para a unicidade de ciclos limites são dados usando a estabilidade ou instabilidade do ciclo limite. Para a unicidade, existem métodos desenvolvidos por Poincaré, Andronov, Leontovich, Liénard, Massera, Zhang Zhifen e muitos outros (ver [24]). Mas, em geral, as condições suficientes desses métodos são muito restritivas.

Problemas mais difíceis aparecem quando um sistema planar tem mais do que um ciclo limite e quando tentamos compreender suas distribuições no plano. De fato, o problema sobre ciclos limites mais famoso é devido a Hilbert. No Congresso Internacional de Matemática de Paris em 1900, Hilbert [12] divulgou uma lista com 23 problemas. Um dos problemas que ainda se encontra sem solução é o 16° Problema, ou pelo menos a segunda parte deste, que pergunta sobre a determinação do número máximo de ciclos limites, denotado por  $H(n)$ , de um sistema polinomial de grau  $n$ , do tipo

$$\begin{cases} x' = \sum_{i+j=0}^m a_{ij} x^i y^j, \\ y' = \sum_{i+j=0}^k b_{ij} x^i y^j, \end{cases}$$

onde  $n$  é o máximo entre os graus  $m$  e  $k$ . Mais especificamente:

“Qual é o número máximo de ciclos limites de um campo vetorial polinomial de grau  $n$  e quais são suas posições relativas.”

Uma pergunta natural nesta altura é se  $H(n)$  é finito. A resposta à essa pergunta é afirmativa e veio em 1923 com Dulac [8]. No entanto, havia um erro em seus resultados e mais recentemente esta finitude foi provada por Ilyashenko [17] e Écalle [11].

Sabemos que qualquer sistema linear em  $\mathbb{R}^2$  não tem ciclo limite. Logo  $H(1) = 0$ . Pouco se sabe ainda sobre  $H(2)$ . Em 1954, o matemático russo N.N. Bautin [2] provou que qualquer sistema quadrático tem no máximo 3 ciclos limites de pequenas amplitudes, ou seja, bifurcando da origem. Por algum tempo acreditou-se que  $H(2) = 3$ , mas, em 1980, Songling [21] produziu um exemplo de sistema quadrático com quatro ciclos limites. Portanto,  $H(2) \geq 4$ . Perante todas as evidências acredita-se que  $H(2) = 4$ .

Como o 16° Problema original é, de fato, muito amplo, pode-se estudar as chamadas versões restritas deste problema. Uma destas versões diz respeito à Equação de Liénard.

Equações de Liénard polinomiais são equações diferenciais planares associadas à equação diferencial de segunda ordem

$$x' + f(x)x' + g(x) = 0, \tag{1.1}$$

onde  $f$  e  $g$  são polinômios. Parte do 13° Problema que S. Smale [20] colocou em sua lista de problemas para o século XXI é o 16° Problema de Hilbert restrito à Equação de Liénard clássica, ou seja, tomando  $g(x) = x$  na equação diferencial (1.1). Desta forma, a Equação de Liénard clássica pode ser escrita na forma de sistema dado por

$$\begin{cases} x' = y - F(x), \\ y' = -x, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde  $F(x)$  é um polinômio de grau  $n$ . Em 1977, Lins Neto, de Melo e Pugh conjecturaram em [15] que o sistema de Liénard (1.2) de grau  $n \geq 3$  teria uma cota superior para o número de ciclos limites dada por  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ , onde  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  significa o maior inteiro menor ou igual a  $\frac{n-1}{2}$ . Ainda neste artigo os autores provaram que a conjectura é verdadeira para  $n = 3$ . Em 2007, Dumortier, Panazzolo e Roussarie [10] deram um contra-exemplo desta conjectura para  $n = 7$  e mencionam que este contra-exemplo pode ser estendido para  $n \geq 7$ . Recentemente, De Maesschalck e Dumortier provaram em [9] que o sistema (1.2) de grau  $n \geq 6$  pode ter  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 2$  ciclos limites. E mais, recentemente no preprint [6], os autores provaram que para  $n = 4$  a conjectura é verdadeira, ou seja, existe no máximo um ciclo limite. Até o momento não se sabe se a conjectura é verdadeira para o caso  $n = 5$ .

Ainda em [15], os autores provaram o seguinte teorema.

**Teorema 1.1** *Seja  $N = 2n + 1$  ou  $2n + 2$ . Dado um inteiro  $k$  com  $0 \leq k \leq n$ , existe um polinômio  $F(x)$  de grau  $N$  tal que o sistema*

$$\begin{cases} x' = y - F(x), \\ y' = -x, \end{cases}$$

*tem exatamente  $k$  ciclos limites.*

Lloyd, Blows e Lynch [7] e [16], consideraram o problema similar para equações de Liénard generalizadas. Em muitos casos, eles provaram que existe uma cota superior para o número de ciclos limites de pequenas amplitudes, que podem bifurcar de uma única singularidade.

Para o estudo de cotas superiores de ciclos limites para sistema planares é necessário o entendimento do retrato de fase e o estudo do comportamento do campo no infinito.

Para campos de vetores polinomiais, isto pode ser feito utilizando a compactificação de Poincaré. A idéia é analisar o comportamento global de sistemas dinâmicos planares usando a projeção central da esfera de Poincaré sobre um plano. Este tipo de projeção central, introduzido por Poincaré, tem a vantagem de que as singularidades no infinito estão espalhadas ao longo do equador da esfera de Poincaré. Pode acontecer que estas singularidades sejam não elementares, isto é, quando algum ou ambos autovalores sejam nulos e o princípio de redução ao comportamento central não se aplica. Nestes casos, podemos usar o processo de desingularização conhecido como “blow-up” para melhor entender estas singularidades.

Nesta dissertação estudamos os ciclos limites da equação (1.2) como contribuição ao 16° Problema de Hilbert. Esta dissertação está estruturada como segue:

- Capítulo 2: Apresentamos alguns conceitos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais que serão utilizados nesta dissertação, tais como, o Teorema de Poincaré-Bendixson, Estabilidade segundo Lyapunov, Coeficientes de Lyapunov, etc.
- Capítulo 3: Estudamos o sistema (1.2) quando  $F$  tem grau 3, ou seja, o sistema dado por

$$\begin{cases} x' = y - (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x), \\ y' = -x. \end{cases}$$

Mostramos que existe no máximo 1 ciclo limite. Para controlar os ciclos limites fora de partes compactas faz-se necessário o estudo da compactificação de Poincaré do campo associado a este sistema. Esse material pode ser encontrado no artigo [15].

- Capítulo 4: Neste capítulo consideramos o sistema de Liénard

$$\begin{cases} x' = y - f(x), \\ y' = -g(x), \end{cases} \tag{1.3}$$

onde  $f$  é um polinômio de grau  $N = 2n + 1$  ou  $2n + 2$  e  $g$  é um polinômio ímpar de grau  $N$  e mostramos que este sistema possui no máximo  $n$  ciclos limites bifurcando da origem. Esse material é baseado no artigo [7].

# Capítulo 2

## Fundamentos da Teoria Qualitativa

Neste capítulo apresentaremos apenas um resumo do material necessário para o entendimento da dissertação, para um material completo sobre a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, recomendamos a leitura de [3], [5], [13] e [22].

### 2.1 Campo de vetores

Seja  $\mathcal{U}$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$ . Um **campo de vetores polinomial**  $(P, Q)$  definido em  $\mathcal{U}$  é uma aplicação que associa para cada ponto  $(x, y) \in \mathcal{U}$  um vetor  $X = (P(x, y), Q(x, y))$  em  $\mathbb{R}^2$ , onde

$$P(x, y) = \sum_{i+j=0}^n a_{ij}x^i y^j, \quad Q(x, y) = \sum_{i+j=0}^n b_{ij}x^i y^j$$

são polinômios de duas variáveis.

**Definição 2.1** *O sistema*

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

*é chamado de sistema diferencial associado ao campo de vetores  $X = (P, Q)$ , onde  $(x, y) \in \mathcal{U}$ .*

Salvo quando mencionarmos o contrário, neste trabalho  $X$  será o campo de vetores definido acima.

**Definição 2.2** Considere  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  um ponto dado, dizemos que este ponto  $(x, y)$  é um **ponto regular** de  $X$  se  $X(x, y) \neq (0, 0)$ ;  $(x, y)$  é uma **singularidade** ou **equilíbrio** de  $X$  se  $X(x, y) = (0, 0)$ .

## 2.2 Teorema de Hartman-Grobman

Nesta seção veremos que o esboço do retrato de fase é trivial numa vizinhança de um ponto regular.

**Definição 2.3** Sejam  $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  os fluxos gerados pelos campos  $X_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $X_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , respectivamente. Dizemos que  $X_1$  é **topologicamente conjugado** (resp.  **$C^r$ -conjugado**) a  $X_2$  quando existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe  $C^r$ )  $h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$  tal que  $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$ , para todo  $(t, x) \in \Omega_1$ .

O homeomorfismo  $h$  chama-se **conjugação topológica** (resp.  **$C^r$ -conjugação**) entre  $X_1$  e  $X_2$ . A relação de conjugação é uma relação de equivalência entre campos definidos em abertos de  $\mathbb{R}^2$ . Uma conjugação  $h$  entre  $X_1$  e  $X_2$  leva ponto singular em ponto singular e órbita periódica em órbita periódica (com período preservado).

**Exemplo 2.1** A função  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $h(x, y) = (x, y + \frac{x^3}{4})$  é uma  $C^r$ -conjugação entre  $X_1(x, y) = (x, -y)$  e  $X_2(x, y) = (x, -y + x^3)$ .

De fato, o fluxo de  $X_2$  é dado por

$$\varphi_2(t, (a, b)) = \left( ae^t, \left( b - \frac{a^3}{4} \right) e^{-t} + \frac{a^3}{4} e^{3t} \right),$$

onde  $t \in \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , enquanto que o fluxo de  $X_1$  é dado por

$$\varphi_1(t, (a, b)) = (ae^t, be^{-t}).$$

Então  $h(\varphi_2(t, (a, b))) = h(ae^t, be^{-t}) = (ae^t, be^{-t} + \frac{a^3}{4} e^{3t})$ .

Por outro lado,

$$\varphi_1(t, h(a, b)) = \varphi_1(t, (a, b + \frac{a^3}{4})) = (ae^t, (b + \frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{4})e^{-t} + \frac{a^3}{4} e^{3t}) = (ae^t, be^{-t} + \frac{a^3}{4} e^{3t}).$$

■

**Definição 2.4** *Sejam  $X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial e  $A \subseteq \mathbb{R}$  um aberto. Uma aplicação diferenciável  $f : A \rightarrow \mathcal{U}$  chama-se **seção transversal local** de  $X$  quando, para todo  $a \in A$ ,  $Df(a)(\mathbb{R})$  e  $X(f(a))$  geram o espaço  $\mathbb{R}^2$ .*

**Observação 2.1** *Consideremos  $\Sigma = f(A)$  munido da topologia induzida. Se  $f : A \rightarrow \Sigma$  for um homeomorfismo, é usual dizermos que  $\Sigma$  é uma **seção transversal** de  $X$ .*

**Teorema 2.1 (do Fluxo Tubular)** *Sejam  $X$  um campo vetorial polinomial e  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  um ponto regular de  $X$ . Então existe um difeomorfismo que conjuga  $X$  em uma vizinhança de  $(x_0, y_0)$  com o campo constante  $Y = (1, 0)$  restrito a uma vizinhança da origem  $(0, 0)$ .*

**Definição 2.5** *Um ponto singular  $p$  de um campo vetorial  $X : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  chama-se **hiperbólico** se todos os autovalores da matriz jacobiana de  $X$  em  $p$ ,  $DX(p)$ , tem partes reais diferentes de zero.*

**Teorema 2.2 (Hartman-Grobman).** *Sejam  $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial no aberto  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $p$  um ponto singular hiperbólico. Então, existem vizinhanças  $V$  de  $p$  em  $\mathcal{U}$  e  $W$  de  $0$  em  $\mathbb{R}^2$  tais que  $X|_V$  é topologicamente conjugado a  $DX(p)|_W$ . Veja Figura 2.1.*

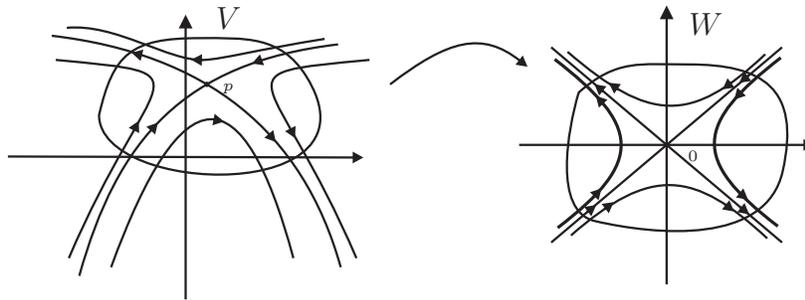


Figura 2.1: Interpretação geométrica do Teorema de Hartman-Grobman.

A demonstração deste teorema é dada em [22]. Na Figura 2.1 temos representados os retratos de fase de um campo não linear numa vizinhança de um ponto singular hiperbólico e de seu linearizado.

**Observação 2.2** *O Teorema de Hartman-Grobman afirma que se uma singularidade for hiperbólica, o sistema linearizado descreve o comportamento do sistema não-linear próximo do ponto singular, ou seja, o comportamento numa vizinhança de um ponto singular é sempre modelado pelo comportamento da parte linear.*

## 2.3 Variedade estável e variedade central

O Teorema da Variedade Estável é um dos mais importantes resultados da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Ele mostra que perto de um ponto hiperbólico  $(x_0, y_0)$ , o sistema

$$X = \begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases} \quad (2.2)$$

tem variedades estável e instável  $S$  e  $U$ , tangentes em  $(x_0, y_0)$  aos subespaços estável e instável  $E^S$  e  $E^U$  respectivamente do sistema linearizado

$$(x', y') = A(x, y), \quad (2.3)$$

onde  $A = DX(x_0, y_0)$ .

Vamos primeiramente definir subespaços estável, instável e central  $E^S$ ,  $E^U$  e  $E^C$ , respectivamente, para um sistema linear do tipo (2.3) acima.

Sejam  $w_j = u_j + iv_j$  autovetores da matriz  $A$  correspondente aos autovalores  $\lambda_j = a_j + ib_j$ , com  $j = 1, 2$ .

**Definição 2.6** *Sejam  $\lambda_j = a_j + ib_j$  e  $w_j = u_j + iv_j$  descritos como acima. Então,*

$$E^S = [\{u_j, v_j\} / a_j < 0],$$

$$E^C = [\{u_j, v_j\} / a_j = 0]$$

e

$$E^U = [\{u_j, v_j\} / a_j > 0].$$

*Isto é  $E^S$ ,  $E^C$  e  $E^U$  são os subespaços de  $\mathbb{R}^2$  gerados pelas partes reais e imaginárias dos autovetores  $w_j$  correspondentes aos autovalores  $\lambda_j$  com partes reais negativa, nula e positiva, respectivamente.*

**Teorema 2.3 (Variedade Estável).** *Sejam  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial polinomial e  $\varphi$  o fluxo do sistema associado a  $X$ . Suponhamos que  $X(0, 0) = (0, 0)$  e que  $DX(0, 0)$  tenha  $k$  autovalores com partes reais negativas e  $2-k$  autovalores com partes reais positivas. Então, existe uma variedade  $k$ -dimensional  $S$  tangente ao subespaço  $E^S$  do sistema linear (2.3) na origem tal que, para todo  $t \geq 0$ ,  $\varphi_t(S) \subset S$  e para todo  $(x, y) \in S$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, (x, y)) = (0, 0).$$

*Analogamente, existe uma variedade  $(2-k)$ -dimensional  $U$  tangente ao subespaço  $E^U$  do sistema linear (2.3) na origem tal que, para todo  $t \leq 0$ ,  $\varphi_t(U) \subset U$  e para todo  $(x, y) \in U$*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, (x, y)) = (0, 0).$$

As variedades estável e instável  $S$  e  $U$  são definidas somente em uma vizinhança da origem na prova do Teorema da Variedade Estável.  $S$  e  $U$  são, além disso, referidas como variedades estável e instável locais de (2.2) na origem ou simplesmente as variedades estável e instável da origem. Definimos as variedades estável e instável globais de (2.2) em  $(0, 0)$  deixando os pontos de  $S$  correrem o tempo no passado e aqueles de  $U$  correrem o tempo no futuro, de acordo com a próxima definição.

**Definição 2.7** *Seja  $\varphi$  o fluxo do sistema (2.2). As variedades globais estável e instável de (2.2) na origem são dadas por*

$$W^S = \bigcup_{t \leq 0} \varphi(t, S)$$

e

$$W^U = \bigcup_{t \geq 0} \varphi(t, U),$$

*respectivamente.*

Pode ser mostrado que as variedades estável e instável globais,  $W^S(0, 0)$  e  $W^U(0, 0)$ , são únicas e invariantes pelo fluxo  $\varphi$ .

Além disso,

$$\forall (x, y) \in W^S, \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, (x, y)) = 0$$

e

$$\forall (x, y) \in W^U, \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, (x, y)) = 0.$$

Vamos agora enunciar um resultado importante que estabelece a existência de uma variedade central  $W^C$  tangente a  $E^C$  na origem.

**Teorema 2.4 (Variedade Central).** *Seja  $X$  um campo vetorial polinomial. Suponhamos que  $X(0, 0) = (0, 0)$  e que  $DX(0, 0)$  tem  $k$  autovalores com partes reais negativas,  $j$  autovalores com partes reais positivas e  $m = 2 - k - j$  autovalores com partes reais nulas. Então existe uma variedade central  $m$ -dimensional  $W^C$  tangente ao subespaço central  $E^C$  do sistema (2.2) em  $(0, 0)$ , uma variedade estável  $k$ -dimensional  $W^S$  tangente ao subespaço estável  $E^S$  do sistema (2.2) em  $(0, 0)$  e uma variedade instável  $j$ -dimensional  $W^U$  tangente ao subespaço instável  $E^U$  do sistema (2.2) em  $(0, 0)$ . Além disso,  $W^C$ ,  $W^S$  e  $W^U$  são invariantes pelo fluxo  $\varphi$  do sistema (2.2).*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [3].

**Definição 2.8** *Seja  $X$  um campo tal que  $X(0) = 0$ . Dizemos que  $0$  é uma singularidade parcialmente hiperbólica quando  $\dim E^C \neq 0$  e  $\dim(E^S \oplus E^U) \neq 0$ .*

**Definição 2.9** *Seja  $W^C$  uma variedade central. Dizemos que  $W^C$  é Lyapunov estável em relação a uma singularidade, quando dada uma vizinhança  $V \subset W^C$  da singularidade, existe outra vizinhança  $W \subset W^C$  tal que  $V \subset W$ , e  $\forall p \in V \subset W^C$  temos que  $\gamma^+(p) \subset W \subset W^C$ .*

*Uma variedade central do campo  $X$  é Lyapunov instável em relação a uma singularidade, quando a variedade central com campo  $-X$  é Lyapunov estável em relação a mesma singularidade.*

**Teorema 2.5** *Seja  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo tal que  $X(0) = 0$  é uma singularidade parcialmente hiperbólica, onde  $\dim E^U = 0$ . Além disso, suponha a existência de alguma  $W^C$  Lyapunov instável em relação a  $0$ . Então, a variedade central  $W^C$  é única.*

A demonstração pode ser encontrada em [4].

## 2.4 Teorema de Poincaré-Bendixson

Nesta seção apresentaremos o Teorema de Poincaré-Bendixson que é um dos poucos resultados gerais sobre existência de órbitas periódicas de campos não lineares, classificando os possíveis conjuntos  $\omega$ -limite de uma trajetória limitada de um campo planar com um número finito de singularidades no fecho.

Sejam  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial polinomial e  $\varphi(t) = \varphi(t, (p, q))$  a trajetória de  $X$  passando pelo ponto  $(p, q)$  definida no seu intervalo maximal  $I_{(p,q)} = (\omega_-(p, q), \omega_+(p, q))$ .

Se  $\omega_+(p, q) = \infty$ , definimos o conjunto

$$\omega(p, q) = \{(p_1, q_1) \in \mathbb{R}^2; \exists (t_n) \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n, (p, q)) \rightarrow (p_1, q_1), n \rightarrow \infty\}$$

como sendo o conjunto  $\omega$ -**limite** de  $(p, q)$ .

Se  $\omega_-(p, q) = -\infty$ , definimos o conjunto

$$\alpha(p, q) = \{(p_1, q_1) \in \mathbb{R}^2; \exists (t_n), t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n, (p, q)) \rightarrow (p_1, q_1), n \rightarrow \infty\},$$

como sendo o conjunto  $\alpha$ -**limite** de  $(p, q)$ .

**Teorema 2.6 (Poincaré-Bendixson).** *Os únicos conjuntos  $\omega$ -limite ( $\alpha$ -limite) compactos, não-vazios e sem singularidades de um campo planar são as órbitas periódicas do campo.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [22].

**Corolário 2.1** *Um conjunto compacto, não-vazio e invariante por um campo planar contém pelo menos uma singularidade ou uma órbita periódica.*

O Teorema de Poincaré-Bendixson é válido somente para campos planares, não sendo válido em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$ . O ingrediente essencial para a validade do teorema é a cisão do domínio do campo em duas componentes por qualquer curva fechada simples, o que ocorre no plano. Este ingrediente é o famoso Teorema da Curva de Jordan. Se uma órbita  $\gamma \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$  de um campo é periódica, então  $\gamma$  é uma **curva de Jordan** (curva fechada simples) e, portanto, o interior e o exterior de  $\gamma$  estão sempre bem determinados pelo Teorema da Curva de Jordan.

**Definição 2.10 (Ciclo limite)** *Seja  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial polinomial. Uma órbita periódica  $\gamma$  de  $X$  é chamada de **ciclo limite** se existe uma vizinhança  $V$  de  $\gamma$  tal que  $\gamma$  é a única órbita fechada de  $X$  que intercepta  $V$ .*

Observamos que podemos definir também, em termos de  $\alpha$ -limites e  $\omega$ -limites, ciclos limites no plano como sendo as órbitas periódicas que são  $\alpha$ -limites ou  $\omega$ -limites de todas as trajetórias passando por pontos suficientemente próximos.

O conjunto  $\omega$ -limite de uma órbita periódica  $\gamma$  é o conjunto  $\omega(p, q)$ , para qualquer  $(p, q) \in \gamma$  e o conjunto  $\alpha$ -limite de uma órbita  $\gamma$  é o conjunto  $\alpha(p, q)$  para qualquer  $(p, q) \in \gamma$ . Notemos que se  $\varphi(t) = \varphi(t, (p, q))$  é a trajetória do campo vetorial polinomial  $X$  pelo ponto  $(p, q)$  e se  $\psi(t) = \psi(t, (p, q))$  é a trajetória do campo vetorial polinomial  $-X$  pelo ponto  $(p, q)$ , temos que  $\psi(t, (p, q)) = \varphi(-t, (p, q))$ . Logo, temos que

$$\omega\text{-limite de } \varphi(t) = \alpha\text{-limite de } \psi(t)$$

$$\omega\text{-limite de } \psi(t) = \alpha\text{-limite de } \varphi(t).$$

**Definição 2.11** *Os ciclos limites são do seguinte tipo:*

- a)  $\gamma$  é um ciclo limite **estável** se existir um aberto  $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$  tal que  $\gamma \subseteq \mathcal{U}_0$  e  $\omega(x) = \gamma$  para cada  $x \in \mathcal{U}_0$ ;
- b)  $\gamma$  é um ciclo limite **instável** se existir um aberto  $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$  tal que  $\gamma \subseteq \mathcal{U}_0$  e  $\alpha(x) = \gamma$  para cada  $x \in \mathcal{U}_0$ ;
- c)  $\gamma$  é um ciclo limite **semi-estável** se existir um aberto  $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$  tal que  $\gamma \subseteq \mathcal{U}_0$  e  $\omega(x) = \gamma$ , para cada  $x \in \mathcal{U}_0 \cap \text{ext } \gamma$  e  $\alpha(x) = \gamma$ , para cada  $x \in \mathcal{U}_0 \cap \text{int } \gamma$  ou então  $\omega(x) = \gamma$ , para cada  $x \in \mathcal{U}_0 \cap \text{int } \gamma$  e  $\alpha(x) = \gamma$ , para cada  $x \in \mathcal{U}_0 \cap \text{ext } \gamma$ .

## 2.5 Transformação de Poincaré

A **transformação de Poincaré** associada a uma órbita fechada  $\gamma$  de um campo vetorial polinomial planar  $X$  é um difeomorfismo  $\pi$  que descreve o comportamento do campo  $X$  em uma vizinhança de  $\gamma$ .

Sejam  $\gamma = \{\varphi(t, (p, q)), 0 \leq t \leq T\}$  uma órbita periódica de período  $T$  do campo  $X$  e  $\Sigma$  uma seção transversal a  $X$  em  $(p, q)$ .

Como o fluxo de  $X$ ,  $\varphi$ , é contínuo, para todo ponto  $(p_1, q_1) \in \Sigma$  próximo de  $(p, q)$  a trajetória  $\varphi(t, (p_1, q_1))$  está próxima à  $\gamma$ , com  $t \in I$ , com  $I$  um intervalo pré-estabelecido.

Definiremos  $\pi(p_1, q_1)$  como sendo o primeiro ponto onde esta órbita irá interceptar  $\Sigma$ . Sendo  $\Sigma_0$  o domínio de  $\pi$ , teremos que  $(p, q) \in \Sigma_0$  e  $\pi(p, q) = (p, q)$ .

Muitas propriedades de  $X$  perto de  $\gamma$  se refletem em  $\pi$ . Por exemplo, as órbitas periódicas de  $X$  próximas de  $\gamma$  correspondem aos pontos fixos de  $\pi$ , que são pontos  $(p_1, q_1) \in \Sigma_0$  para os quais  $\pi(p_1, q_1) = (p_1, q_1)$ . O comportamento assintótico das órbitas de  $X$  próximo de  $\gamma$  também é descrito por  $\pi$ .

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n(p_1, q_1) = (p, q) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, (p_1, q_1)), \gamma) = 0.$$

**Teorema 2.7** *Sejam  $X = (X_1, X_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial polinomial planar,  $\gamma$  uma órbita periódica de  $X$  de período  $T$  e  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$  a transformação de Poincaré em uma seção transversal  $\Sigma$  em  $(p, q) \in \gamma$ . Então*

$$\dot{\pi}(p, q) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt\right);$$

onde

$$\operatorname{div} X(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} X_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} X_2(x, y).$$

Em particular, se

$$\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt < 0, \quad \gamma \text{ é estável};$$

$$\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt > 0, \quad \gamma \text{ é instável}.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [22].

## 2.6 Estabilidade local segundo Lyapunov

No intuito de estudar o comportamento assintótico de uma órbita, é interessante usar o método das funções de Lyapunov.

**Definição 2.12** Dados  $X : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial e  $p \in \mathcal{U}$  uma singularidade de  $X$ , temos que:

- a)  $p$  é **estável** se dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$ , tal que  $\|x - p\| < \delta$  implica  $\|\varphi(t, x) - p\| < \varepsilon$ , para todo  $t > 0$ ;
- b)  $p$  é **instável** se não for estável;
- c)  $p$  é **assintoticamente estável** se  $p$  é estável e, além disso, existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\|x - p\| < \varepsilon$  implica  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = p$ ;
- d)  $p$  é **assintoticamente instável** se  $p$  é instável e, além disso, existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\|x - p\| < \varepsilon$  implica  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, x) = p$ .

Sejam o campo vetorial  $X$  e  $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Definimos a derivada de  $V$  na direção do campo  $X$  no ponto  $p \in \mathcal{U}$  por

$$\dot{V}(p) = \nabla V(p) \cdot X(p).$$

**Definição 2.13** Dados o campo  $X$ , a função  $V$  como acima e  $p \in \mathcal{U}$  um ponto singular de  $X$ , temos que

- a)  $V$  é **função de Lyapunov** para o campo  $X$  se  $V(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathcal{U}$ ,  $V(x) = 0$  se, e somente se,  $x = p$  e  $\dot{V} \leq 0$ , para todo  $x \in \mathcal{U}$ ;
- b)  $V$  é **função de Lyapunov estrita** para o campo  $X$  se  $V$  é função de Lyapunov e, além disso,  $\dot{V} < 0$ , para todo  $x \in \mathcal{U}$ .

**Teorema 2.8 (Critério de Lyapunov).** *Seja  $p$  é uma singularidade isolada do campo  $X$ . Se existir uma função de Lyapunov  $V$  definida em algum domínio  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$  contendo  $p$ , então  $p$  é uma **singularidade estável**. Se  $V$  for uma função de Lyapunov estrita então  $p$  será uma **singularidade assintoticamente estável**.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [22].

## 2.7 Valores focais e coeficientes de Lyapunov

Nesta seção exibiremos um método para calcular os coeficientes de Lyapunov relacionados com os sistemas de equações diferenciais definidos por campos polinomiais planares.

Sejam  $\tilde{P}$  e  $\tilde{Q}$  funções analíticas em uma vizinhança da origem, e  $(0, 0)$  um ponto singular isolado do sistema

$$\begin{cases} x' = \tilde{P}(x, y) \\ y' = \tilde{Q}(x, y). \end{cases} \quad (2.4)$$

Suponha que a linearização do campo  $(\tilde{P}, \tilde{Q})$  na origem apresente um foco ou um centro. Com mudanças adequadas de coordenadas, o sistema (2.4) pode ser escrito como

$$\begin{cases} x' = y + \lambda x + P(x, y) \\ y' = -x + \lambda y + Q(x, y), \end{cases} \quad (2.5)$$

onde  $P$  e  $Q$  são funções analíticas.

Considere a função de Lyapunov

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dot{V} = \nabla V \cdot X &= (x, y)(y + \lambda x + P, -x + \lambda y + Q), \\ &= \lambda x^2 + xP + \lambda y^2 + yQ, \\ &= \lambda(x^2 + y^2) + xP + yQ. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Desta forma o sinal de  $\dot{V}$  em uma vizinhança da origem é determinado pelo sinal de  $\lambda$ . Se  $\lambda \neq 0$  dizemos que a origem é um **foco forte**. Pelo Teorema 2.8, se  $\lambda < 0$  a origem é assintoticamente estável e se  $\lambda > 0$  a origem é instável. Quando  $\lambda = 0$  dizemos que a origem é um **foco fraco** ou um centro. Daqui para frente queremos estudar a estabilidade do equilíbrio  $(0, 0)$  quando  $\lambda = 0$ . Desta forma, o sistema (2.5) assume a forma

$$\begin{cases} x' = y + P(x, y) \\ y' = -x + Q(x, y), \end{cases} \quad (2.7)$$

com

$$P(x, y) = \sum_{k=2}^m P_k(x, y) + O(\|(x, y)\|^{m+1})$$

$$Q(x, y) = \sum_{k=2}^m Q_k(x, y) + O(\|(x, y)\|^{m+1})$$

onde

$$P_k(x, y) = \sum_{j=0}^k p_{k-j,j} x^{k-j} y^j$$

$$Q_k(x, y) = \sum_{j=0}^k q_{k-j,j} x^{k-j} y^j.$$

A notação  $O$  denota a expansão em série de Taylor, em torno da origem, iniciando-se nos termos de ordem  $m + 1$  no mínimo.

Considere a função de Lyapunov dada por

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{k=3}^{m+1} V_k(x, y) + O(\|(x, y)\|^{m+2}), \quad (2.8)$$

com

$$V_k(x, y) = \sum_{j=0}^k V_{k-j,j} x^{k-j} y^j \quad (2.9)$$

polinômios homogêneos de grau  $k$  nas variáveis  $x$  e  $y$ . Tomando a expansão em série de Taylor até os termos de ordem 3, o sistema (2.7) assume a forma

$$\begin{cases} x' = y + P_2(x, y) + P_3(x, y) + O(\|(x, y)\|^4) \\ y' = -x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + O(\|(x, y)\|^4), \end{cases} \quad (2.10)$$

com

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2, \\ P_3(x, y) &= p_{30}x^3 + p_{21}x^2y + p_{12}xy^2 + p_{03}y^3, \\ Q_2(x, y) &= q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2, \\ Q_3(x, y) &= q_{30}x^3 + q_{21}x^2y + q_{12}xy^2 + q_{03}y^3. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A função de Lyapunov (2.8) com  $m = 3$  é dada por

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y) + O(\|(x, y)\|^5), \quad (2.12)$$

com

$$\begin{aligned} V_3(x, y) &= V_{30}x^3 + V_{21}x^2y + V_{12}xy^2 + V_{03}y^3 \\ V_4(x, y) &= V_{40}x^4 + V_{31}x^3y + V_{22}x^2y^2 + V_{13}xy^3 + V_{04}y^4. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Diferenciando (2.12) ao longo das órbitas de (2.10) segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \left( R_3(x, y) + \left( y \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y) \right) \right) + \left( R_4(x, y) + \left( y \frac{\partial V_4}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial V_4}{\partial y}(x, y) \right) \right) + \\ &O(\|(x, y)\|^5), \end{aligned} \quad (2.14)$$

com

$$R_3(x, y) = xP_2(x, y) + yQ_2(x, y), \quad (2.15)$$

$$R_4(x, y) = xP_3(x, y) + yQ_3(x, y) + P_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) + Q_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y). \quad (2.16)$$

Consideremos os seguintes espaços vetoriais

$$\begin{aligned} P_n &= \left\{ p(x, y) = \sum_{j=0}^n a_{n-j,j} x^{n-j} y^j : \text{grau}(p(x, y)) < n + 1, a_{n-j,j} \in \mathbb{R} \right\}, \\ \mathbb{R}^{n+1} &= \left\{ u : u = \sum_{j=0}^n u_{n-j,j} e_{j+1}, u_{n-j,j} \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Os conjuntos  $B_P^n = \{x^n, x^{n-1}y, \dots, xy^{n-1}, y^n\}$  e  $B_{\mathbb{R}}^{n+1} = \{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}\}$  são bases para  $P_n$  e  $\mathbb{R}^{n+1}$ , respectivamente. A base  $B_{\mathbb{R}}^{n+1}$  é a canônica em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . A transformação linear de  $P_n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  tem a seguinte construção

$$\begin{aligned} S_n : P_n &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ p(x, y) = \sum_{j=0}^n a_{n-j,j} x^{n-j} y^j &\mapsto u = \sum_{j=0}^n a_{n-j,j} e_{j+1}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Considere agora a seguinte transformação linear

$$\begin{aligned} T_n : P_n &\rightarrow P_n \\ p(x, y) &\mapsto T_n(p(x, y)) = y \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial p}{\partial y}(x, y). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Tomando-se as bases  $B_P^3$  e  $B_P^4$  para  $P_3$  e  $P_4$ , respectivamente, as matrizes  $A_3$  e  $A_4$  de

$T_3$  e  $T_4$  com relação a essas bases, são respectivamente,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposição 2.1** *A transformação linear  $T_3$  é um isomorfismo. O núcleo da transformação  $T_4$  tem dimensão 1 e a imagem dimensão 4. Uma base para o núcleo é  $\{(x^2 + y^2)^2\}$ .*

**Demonstração:** O núcleo da transformação linear  $T_3$  é trivial, visto que  $\text{Det}(A_3) = 9$ . Logo,  $T_3$  é injetora. Para provar que  $T_3$  é sobrejetora, basta observar que a  $\dim(\text{Im}(T_3)) = 4$  e que  $\{T_3(x^3), T_3(x^2y), T_3(xy^2), T_3(y^3)\}$  é uma base para a imagem  $T_3$  e para  $P_3$ . Como  $T_3$  é bijetora, admite uma transformação inversa a qual é também linear, bijetora. A matriz  $A_4$  é equivalente por linhas a matriz escalonada reduzida por linhas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o  $\text{posto}(A_4) = 4$  e, conseqüentemente, o núcleo de  $T_4$  tem dimensão 1 e a imagem tem dimensão 4. De um cálculo simples  $A_4 S_4(p(x, y)) = 0$ ,  $p(x, y) \in P_4$ , segue que  $S_4^{-1}(1, 0, 2, 0, 1) = (x^2 + y^2)^2$ .

■

Resulta da Proposição 2.1 que  $V_3(x, y)$  pode ser escolhido de maneira única de forma a cancelar os termos de grau 3 de (2.14). Tal escolha é feita resolvendo-se o sistema linear

$$A_3 S_3(V_3(x, y)) = -S_3(xP_2(x, y) + yQ_2(x, y)),$$

onde

$$\begin{aligned} S_3(V_3(x, y)) &= (V_{30}, V_{21}, V_{12}, V_{03}), \\ S_3(xP_2(x, y) + yQ_2(x, y)) &= (p_{20}, p_{11} + q_{20}, p_{02} + q_{11}, q_{02}). \end{aligned}$$

Segue que

$$(V_{30}, V_{21}, V_{12}, V_{03}) = \left( -\frac{1}{3}(p_{11} + q_{20} + 2q_{02}), p_{20}, -q_{02}, \frac{1}{3}(p_{02} + 2p_{20} + q_{11}) \right).$$

A mesma metodologia não pode ser aplicada para a escolha dos coeficientes de  $V_4(x, y)$ , pois  $T_4$  não é isomorfismo. Contudo,  $V_4(x, y)$  pode ser escolhido de forma que  $\dot{V}(x, y)$  tenha um sinal bem definido. Isto pode ser feito impondo que os termos de ordem 4 de (2.14) pertençam ao núcleo de  $T_4$ . Assim, os coeficientes de  $V_4(x, y)$  podem ser obtidos através de

$$A_4 \left( S_4 \left( xP_3(x, y) + yQ_3(x, y) + P_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) + Q_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y) \right) + A_4 S_4(V_4(x, y)) \right) = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} S_4(V_4(x, y)) &= (V_{40}, V_{31}, V_{22}, V_{13}, V_{04}), \\ S_4 \left( xP_3(x, y) + yQ_3(x, y) + P_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) + Q_2 \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y) \right) &= (s_{40}, s_{31}, s_{22}, s_{13}, s_{04}), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} s_{40} &= p_{11}p_{20} + p_{30} + 2p_{20}q_{02}, \\ s_{31} &= p_{11}^2 - 2p_{20}^2 + p_{21} - p_{20}q_{11} + 2q_{20}q_{02} + p_{11}(q_{20} + 2q_{02}) + q_{30}, \\ s_{22} &= p_{12} - 2p_{20}p_{11} + p_{02}(p_{11} + 2q_{02}) + 2q_{11}q_{02} - 2p_{20}q_{20} - q_{11}q_{20} + q_{21}, \\ s_{13} &= p_{03} + p_{11}q_{02} + 2q_{02}^2 - 2p_{20}q_{11} - q_{11}^2 - p_{02}(2p_{20} + q_{11}) + q_{12}, \\ s_{04} &= -2p_{20}q_{02} - q_{11}q_{02} + q_{03}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
V_{40} &= \frac{1}{4} (2q_{02}q_{20} - q_{12} - 3p_{20}q_{11} - q_{30} - 2p_{20}^2 + p_{11}^2 + 3q_{02}p_{11} + p_{11}q_{20} - p_{21} + \\
&\quad 2q_{02}^2 - q_{11}p_{02} - q_{11}^2 - p_{03} - 2p_{20}p_{02}) + 1, \\
V_{31} &= \frac{1}{8} (5p_{30} - 7p_{20}p_{11} - 16q_{02}p_{20} - 3q_{03} - q_{21} - q_{02}q_{11} - 2p_{20}q_{20} - q_{20}q_{11} + p_{02}p_{11} + \\
&\quad 2q_{02}p_{02} - p_{12}), \\
V_{22} &= \frac{1}{2} (2q_{02}^2 - q_{11}p_{02} - 2p_{20}q_{11} - q_{11}^2 + q_{02}p_{11} - q_{12} - p_{03} - 2p_{20}p_{02}) + 2, \\
V_{13} &= \frac{1}{8} (3p_{30} - p_{20}p_{11} - 16q_{02}p_{20} - 5q_{03} + q_{21} - 7q_{02}q_{11} + 2p_{20}q_{20} - p_{02}p_{11} + \\
&\quad q_{20}q_{11} - 2q_{02}p_{02} + p_{12}), \\
V_{04} &= 1.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Com estas escolhas feitas para  $V_3(x, y)$  e  $V_4(x, y)$ , segue que

$$\dot{V}(x, y) = \eta_4(x^2 + y^2)^2 + O(\|(x, y)\|^5), \tag{2.21}$$

com

$$\eta_4 = \frac{1}{8} (3q_{03} - p_{20}p_{11} + 3p_{30} + q_{21} + q_{02}q_{11} + 2p_{20}q_{20} + q_{20}q_{11} - p_{02}p_{11} - 2q_{02}p_{02} + p_{12}). \tag{2.22}$$

A equação (2.21) determina a estabilidade da origem. De fato, a função

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y)$$

é uma função de Lyapunov em alguma vizinhança da origem. Assim, do Teorema 2.8, obtemos que se  $\eta_4 < 0$ , então a singularidade é assintoticamente estável. Se  $\eta_4 > 0$ , então a singularidade é instável. Quando  $\eta_4 = 0$  ainda não podemos determinar a estabilidade da origem.

Apresentaremos agora um processo, criado por Lyapunov, para estudar a estabilidade da origem do sistema (2.7). Na verdade é um processo puramente algébrico. A idéia desse processo é construir recursivamente funções de Lyapunov para o sistema (2.7).

Primeiramente a Proposição 2.1 é verdadeira no caso geral.

**Proposição 2.2** *Quando  $n$  é ímpar,  $T_n$  é um isomorfismo. Quando  $n$  é par,  $T_n$  possui um núcleo de dimensão 1 gerado por  $(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$ .*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [13], página 350.

Desta forma, se  $\eta_4 = 0$  na equação (2.21), podemos proceder de forma análoga ao que já fizemos para obter  $\eta_4$  e produzir uma nova série  $V$ , garantida pela Proposição 2.2, tal que o termo líder da expressão para  $\dot{V}$  é  $\eta_6(x^2 + y^2)^3$ , e assim por diante.

Em resumo,  $V$  pode ser escolhida de tal forma que

$$\dot{V} = \eta_4(x^2 + y^2)^2 + \eta_6(x^2 + y^2)^3 + \dots + \eta_{2k}(x^2 + y^2)^k + \dots$$

Apresentamos agora um teorema bastante útil sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio  $(0, 0)$ .

**Teorema 2.9** *Se  $\eta_{2k} = 0$ ,  $k = 2, \dots, N$ , mas  $\eta_{2k+2} \neq 0$ , então a estabilidade da singularidade na origem é determinada: Se  $\eta_{2k+2} < 0$ , então a singularidade é assintoticamente estável. Se  $\eta_{2k+2} > 0$ , a singularidade é instável.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [3].

As constantes  $\eta_{2k}$  são chamadas de **valores focais**. Do método exposto acima juntamente com o Teorema 2.9 temos que, se após um número finito de etapas determinarmos um valor focal não nulo, então poderemos produzir uma função de Lyapunov polinomial e assim a usarmos para determinar a estabilidade do ponto singular. Contudo, ainda não esgotamos todas as possibilidades: o que acontece se todos os valores focais forem nulos? Esta pergunta será esclarecida no teorema abaixo.

**Teorema 2.10 (Centro de Lyapunov).** *Se o campo vetorial  $X$  é analítico e  $\eta_{2k} = 0$  para  $n = 2, \dots, \infty$  então a origem é um centro. Além disto, a série que define  $V$  é convergente numa vizinhança da origem e representa uma função cujos conjuntos de nível contém as órbitas do sistema correspondente ao campo  $X$ .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [3].

Como  $\eta_{2k}$  é relevante somente quando  $\eta_{2l} = 0$  para todo  $l < k$ , tomamos  $\eta_2 = \eta_4 = \dots = \eta_{2k-2} = 0$  nas expressões de  $\eta_{2k}$ . As quantidades obtidas dessa maneira são chamadas de **coeficientes de Lyapunov**, e serão denotadas por  $L(k) = \eta_{2k+2}$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ .

Como estamos trabalhando com  $P$  e  $Q$  polinômios, segue do Teorema da Base de Hilbert que existe uma constante  $m$  tal que  $L(k) = 0$  para todo  $k$  se, e somente se,  $L(k) = 0$  se  $k \leq m$ . A base

$$B = \{L(0), L(1), L(2), \dots, L(m)\}$$

é chamada de **base focal**.

Desta forma é necessário calcular somente um número finito de coeficientes de Lyapunov. Contudo, dado um sistema qualquer, não sabemos a priori quantos coeficientes temos que calcular para termos a base focal  $B$ , com exceção de alguns casos específicos. Em geral, os cálculos dos coeficientes de Lyapunov são muito longos e complicados, exceto em alguns casos mais simples, e assim vários métodos computacionais tem sido desenvolvidos.

Usaremos esse processo no Capítulo 4 para estudar o número de ciclos limites para o sistema de Liénard (1.3).

# Capítulo 3

## Equação de Liénard

As equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que podem ser escritas como

$$x'' + \tilde{f}(x)x' + g(x) = 0 \quad (3.1)$$

são conhecidas como **equações de Liénard**. É conveniente escrever a equação (3.1) como um sistema planar. Para isso, aplicando a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = x, \\ y = x' + F(x), \end{cases}$$

na equação (3.1), obtemos o seguinte sistema planar

$$\begin{cases} x' = y - F(x), \\ y' = -g(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

onde  $F(x) = \int_0^x \tilde{f}(\xi)d\xi$ , que denotaremos por **sistema de Liénard**. Neste capítulo estudamos um caso particular do sistema (3.2) dado por

$$X^f = \begin{cases} x' = y - f(x), \\ y' = -x, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x$ , com  $d = 2n + 1$  ou  $2n + 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . O material exposto neste capítulo é baseado no artigo [15].

## 3.1 Estudo da equação de Liénard em parte compacta do plano

Nesta seção apresentaremos alguns resultados relacionados ao retrato de fase do sistema de Liénard (3.3).

Primeiramente, temos que as singularidades do sistema (3.3) são os pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que

$$\begin{cases} y - a_d x^d - a_{d-1} x^{d-1} - \dots - a_1 x = 0 \\ -x = 0. \end{cases}$$

Assim, é fácil ver que a origem  $(0, 0)$  é a única singularidade do sistema (3.3). Para analisar a estabilidade da origem, considere o sistema linearizado

$$X' = DX^f(0, 0)X = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de  $DX^f(0, 0)$  são dados pelas raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(DX^f(0, 0) - \lambda I) = \lambda^2 + a_1 \lambda + 1,$$

do qual obtemos

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4}}{2}.$$

Desta forma, se  $a_1 \neq 0$  a origem do sistema (3.3) é uma singularidade hiperbólica. Mais especificamente,  $(0, 0)$  é um foco atrator quando  $a_1 > 0$  e repulsor quando  $a_1 < 0$ . Assim segue do Teorema de Hartman-Grobman, que (3.3) é topologicamente conjugado ao sistema linearizado. Quando  $a_1 = 0$  temos que a origem é uma singularidade não hiperbólica do campo  $X^f$ .

Nosso objetivo a seguir, é dar uma descrição completa do retrato de fase da equação de Liénard (3.3). Para tal estudo, fixemos as seguintes definições.

**Definição 3.1** *Considere o sistema (3.3). Definimos os seguintes conjuntos:*

a)  $E^V = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ ,  $E_+^V = \{(0, y) \mid y > 0\}$  e  $E_-^V = \{(0, y) \mid y < 0\}$ .

b)  $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ ,  $g^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = f(x)\}$  e  $g^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y = f(x)\}$ .

c)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > f(x)\}$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y < f(x)\}$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y < f(x)\}$  e  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y > f(x)\}$ .

Vamos estudar o comportamento das trajetórias de (3.3) em cada um desses conjuntos e com isto obtermos informações sobre os seus comportamentos globais.

**Proposição 3.1** *O campo  $X^f$  é horizontal em  $E_+^V$  e  $E_-^V$ , e vertical em  $G(f)$ .*

**Demonstração:** Basta analisar o campo  $X^f$  nos respectivos conjuntos. Com isso, temos:

$$X^f(x, y) \Big|_{E_+^V \cup E_-^V} = X^f(0, y) = (y - f(0), 0) = (y, 0).$$

$$X^f(x, y) \Big|_{G(f)} = X^f(x, f(x)) = (f(x) - f(x), -x) = (0, -x).$$

■

Na região  $A$ , sabemos que  $x > 0$  e  $y > f(x)$ . Assim,  $x' = y - f(x) > 0$  e  $y' = -x < 0$  e, portanto,  $x' > 0$  e  $y' < 0$ , desta forma o campo tem direção sudeste. Fazendo os cálculos para os outros conjuntos, concluímos também que:

Em  $B$ :  $x' < 0$  e  $y' < 0$ , o campo tem direção sudoeste.

Em  $C$ :  $x' < 0$  e  $y' > 0$ , o campo tem direção noroeste.

Em  $D$ :  $x' > 0$  e  $y' > 0$ , o campo tem direção nordeste.

Do comentário acima e da Proposição 3.1, obtemos a Figura 3.1, onde as setas representam o vetor tangente às trajetórias de (3.3) em  $(x, y)$ .

■

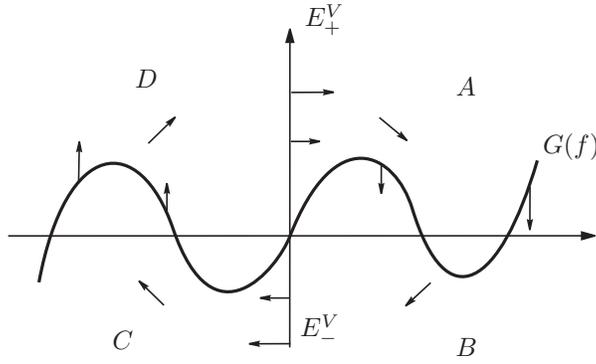


Figura 3.1: Campo de vetores do sistema de Liénard.

**Definição 3.2** *Sejam  $p \in E^V$  e  $q \in G(f)$ . Denotaremos  $\gamma^+(p)$ ,  $\gamma^+(q)$  como sendo as órbitas positivas de  $X^f$  passando pelos pontos  $p$  e  $q$ , respectivamente, e  $\gamma^-(p)$ ,  $\gamma^-(q)$  como sendo as órbitas negativas.*

**Proposição 3.2** *Seja  $p \in E_+^V$ . Considere o campo  $X^f$  com  $f(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x$ , onde  $a_d > 0$ . Então,  $\gamma^+(p) \cap G(f) \neq \emptyset$ . Ou seja, as órbitas positivas de pontos em  $E_+^V$  interceptam o gráfico de  $f$ . Veja Figura 3.2.*

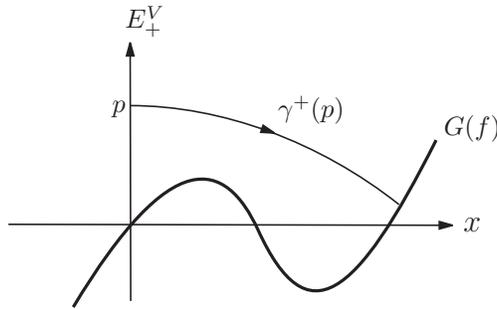


Figura 3.2:  $\gamma^+(p)$  com  $p \in E_+^V$ .

**Demonstração:** Suponha que  $\gamma^+(p) \cap G(f) = \emptyset$ , logo  $x'(t) = y(t) - f(x(t)) > 0, \forall t$ , donde  $x(t)$  é monótona crescente e, portanto, existem  $\delta$  e  $t_0 \in \mathbb{R}$  tais que  $x(t) > \delta, \forall t > t_0 > 0$ . Mas,  $y'(t) = -x(t)$  e, então,  $y'(t) < -\delta, \forall t > t_0$ . Integrando esta desigualdade, obtemos

$$y(t) - y(t_0) < -\delta(t - t_0), \forall t > t_0.$$

Logo,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\infty$ . Por outro lado, como  $a_d > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(x(t)) = +\infty$ . Temos então uma contradição, pois  $x'(t) = y(t) - f(x(t)) > 0, \forall t$ . Portanto,  $\gamma^+(p) \cap G(f) \neq \emptyset$ . ■

**Proposição 3.3** *Seja  $p \in E_-^V$ , quando  $d$  é par e  $a_d < 0$ , ou quando  $d$  é ímpar e  $a_d > 0$ . Então,  $\gamma^+(p) \cap G(f) \neq \emptyset$ .*

A demonstração é análoga à da Proposição 3.2.

**Proposição 3.4** *Seja  $q \in g^+$ , onde  $X^f$  é tal que  $d \geq 2$ . Então:*

- a)  $\gamma^+(q) \cap E_-^V \neq \emptyset$ . *Veja Figura 3.3.*
- b)  $\gamma^-(q) \cap E_+^V \neq \emptyset$ .

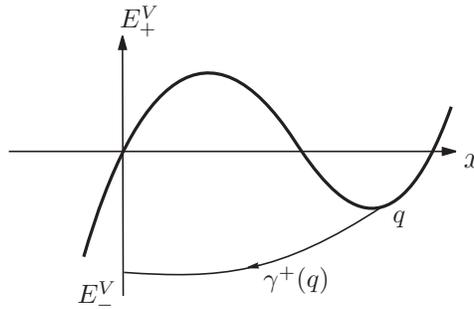


Figura 3.3:  $\gamma^+(q)$  com  $q \in G(f)$ .

**Demonstração:** a) Pela Proposição 3.1, vemos que se  $q \in g^+$ , então a solução decresce na direção de  $y$  entrando na região  $B$ . Em  $B$ , temos que  $x'(t) < 0$  e  $y'(t) < 0$  de modo que a solução vai em direção sudoeste e assim não pode voltar para  $A$ . Ficam duas possibilidades: ou a solução cruza  $E_-^V$  ou então tende a  $-\infty$  e nunca cruza  $E_-^V$ .

Suponhamos que este último caso aconteça. Seja  $(x_0, y_0)$  um ponto sobre essa solução na região  $B$ . Como  $x(t)$  nunca é zero em  $B$ , então a curva solução  $(x(t), y(t))$  situa-se em uma faixa  $S$  dada por  $0 < x \leq x_0, y \leq y_0$ , e, por hipótese, temos que  $y(t) \rightarrow -\infty$  quando  $t \rightarrow t_0$  para algum  $t_0$ . Provemos que  $t_0 = \infty$ . Para isso, note que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$y(t) - y_0 = \int_0^t y'(s) ds = \int_0^t -x(s) ds.$$

Mas,  $0 < x(s) \leq x_0$  e assim só podemos ter  $y(t) \rightarrow -\infty$  se  $t \rightarrow \infty$ .

Analisemos agora  $x(t)$  para  $0 \leq t < \infty$ . Temos que  $x' = y - f(x)$ . Como a quantidade  $f(x)$  é limitada na faixa  $S$  e  $y(t) \rightarrow -\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ , segue que

$$x(t) - x_0 = \int_0^t x'(s)ds = \int_0^t [y(s) - f(x(s))]ds \rightarrow -\infty,$$

quando  $t \rightarrow \infty$ . Mas, isso contradiz que  $x(t) > 0$ . Portanto, essa solução deve cruzar  $E_-^V$ .

b) Segue de forma análoga à parte a).

■

**Proposição 3.5** *Seja  $q \in g^-$ , onde  $X^f$  é tal que  $d \geq 2$ . Então*

a)  $\gamma^+(q) \cap E_+^V \neq \emptyset$ .

b)  $\gamma^-(q) \cap E_-^V \neq \emptyset$ .

A demonstração é análoga à da Proposição 3.4.

Na Figura 3.4 temos uma ilustração para as Proposições 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5, quando  $a_d > 0$  e  $d$  é ímpar.

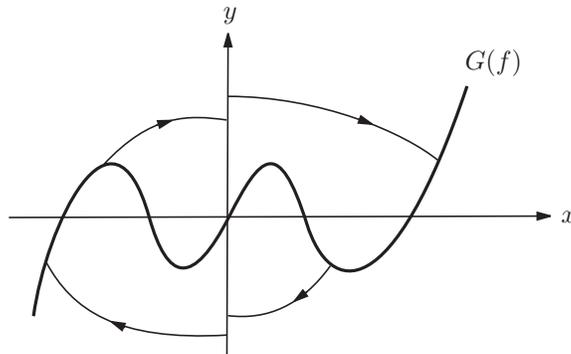


Figura 3.4: Ilustração das Proposições 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5.

**Observação 3.1** a) Supondo  $d$  ímpar e  $a_d > 0$ , podemos definir uma função,  $\psi^+ : E_+^V \rightarrow E_+^V$ , tal que  $\forall p \in E_+^V$ ,  $\psi^+(p)$  é a primeira intersecção de  $\gamma^+(p)$  com o eixo  $E_+^V$  para  $t > 0$ . Por outro lado, já que  $(0, 0)$  é a única singularidade de  $X^f$ , podemos aplicar o Teorema

de Poincaré-Bendixson e concluir que, se  $X^f$  possuir uma órbita fechada, a singularidade  $(0, 0)$  estará no interior desta órbita. Portanto, uma órbita  $\gamma(p)$ ,  $p \in E_+^V$ , do campo  $X^f$  será fechada se, e somente se,  $\psi^+(p) = p$ , isto é,  $p$  é um ponto fixo de  $\psi^+$ . Logo, o número de órbitas fechadas de  $X^f$  será igual ao número de pontos fixos de  $\psi^+$ .

b) Quando  $d$  é ímpar e  $a_d < 0$ , podemos definir a função  $\psi^-$  de maneira análoga, considerando as órbitas negativas dos pontos  $p \in E_+^V$ .

**Lema 3.1** *Sejam  $H(x) = f(x) - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $a_d > 0$  e  $d \geq 3$ . Então, existe  $a > 0$  tal que  $\forall x \geq a$  o campo  $X^f$  calculado nos pontos do gráfico de  $H$ ,  $G(H)$ , isto é,  $X^f(x, H(x))$  é transversal a  $G(H)$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  e aponta para o interior de  $A$  onde  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x \geq a, f(x) - \varepsilon \leq y \leq f(x)\}$ . Veja Figura 3.5.*

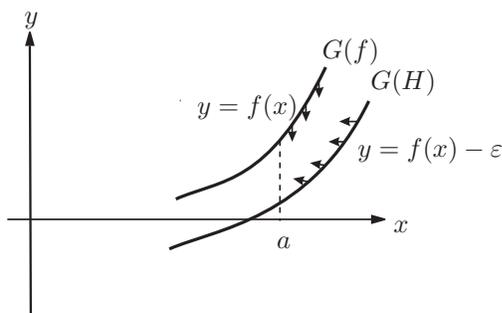


Figura 3.5: Região  $A$ .

**Demonstração:** Sendo  $\phi(x, y) = y - f(x) + \varepsilon$ , então  $\phi(x, y) = 0$  se, e somente se,  $(x, y) \in G(H)$ , isto é,  $y = f(x) - \varepsilon$ . Assim, o gráfico de  $H$  é uma curva de nível de  $\phi$ . O gradiente da curva de nível  $\phi(x, y) = 0$  estará apontando para o interior de  $A$ , pois a curva de nível é gráfico de função e

$$\nabla\phi(x, y) = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y), \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y) \right) = (-f'(x), 1)$$

o qual possui a segunda componente maior que zero.

Por outro lado,  $X^f(x, y) \Big|_{G(H)} = X^f(x, f(x) - \varepsilon) = (f(x) - \varepsilon - f(x), -x) = (-\varepsilon, -x)$ .

Calculando o produto interno destes dois vetores, teremos

$$\begin{aligned} \nabla\phi(x, y) \cdot X^f(x, f(x) - \varepsilon) &= (-f'(x), 1) \cdot (-\varepsilon, -x) \\ &= f'(x) \cdot \varepsilon - x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\nabla \phi(x, y) \cdot X^f(x, f(x) - \varepsilon)) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f'(x) \cdot \varepsilon - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon (da_d x^{d-1} + \dots + a_1) - x = \infty, \end{aligned}$$

pois  $a_d > 0$  e  $d \geq 3$ .

Logo, existe  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , tal que  $\forall x \geq a$ ,  $\nabla \phi(x, y) \cdot X^f(x, f(x) - \varepsilon) \gg 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , isto é,  $\forall x \geq a$ , o campo  $X^f(x, f(x) - \varepsilon)$  está apontando para o interior de  $A$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .

■

**Corolário 3.1** *Sejam  $\Delta_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x = y\}$ ,  $a_d > 0$  e  $d \geq 3$ . Então existe  $a > 0$  tal que  $\forall x \geq a$  o campo  $X^f$  calculado nos pontos de  $\Delta_+$  é transversal a  $\Delta_+$  e aponta para o interior de  $A$ , onde  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x \geq a, x \leq y \leq f(x)\}$ .*

**Observação 3.2** *Quando uma órbita sai de partes compactas, diremos simplesmente, que a órbita vai para o infinito.*

**Proposição 3.6** *Seja  $d$  ímpar e  $a_d > 0$ . Se  $p \in E_-^V$ , então a órbita negativa de  $p$ , ou intercepta  $E_+^V$ , isto é,  $\gamma^-(p) \cap G(f) \neq \emptyset$  ou vai para o infinito e continua abaixo do gráfico de  $f$ . Além disso, existe pelo menos um ponto  $p \in E_-^V$  tal que  $\gamma^-(p)$  vai para o infinito.*

**Demonstração:** Mostraremos que não há outra possibilidade além das citadas na tese da proposição. De fato, se  $\gamma^-(p) \cap G(f) = \emptyset$  e se  $\gamma^-(p)$  não fosse para o infinito, teríamos os casos a) ou b), conforme a Figura 3.6 .

O Caso a) é impossível, pois  $p$  não é singularidade, logo podemos aplicar o Teorema do Fluxo Tubular em  $p$  e concluir que existe  $t_0 > 0$  tal que  $x(-t_0, p) > 0$ , onde  $\gamma^-(p) = \{(x(t, p), y(t, p)), \forall t < 0\}$ . Mas, por outro lado,  $x'(t) = y(t) - f(x(t)) < 0, \forall t < 0$ , logo  $x(t)$  cresce quando  $t$  decresce para  $-\infty$ , assim é impossível que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma^-(t, p) = (0, 0)$ . Veja Figura 3.6.

O Caso b) é impossível, neste caso  $\gamma^-(p)$  não vai nem para  $(0, 0)$  nem para o infinito, logo existe um compacto  $K$  tal que  $\gamma^-(p) \subset K$ . Podemos então aplicar o Teorema de Poincaré-Bendixson e concluir que  $\alpha$ -limite de  $\gamma^-(p)$  é uma singularidade diferente de

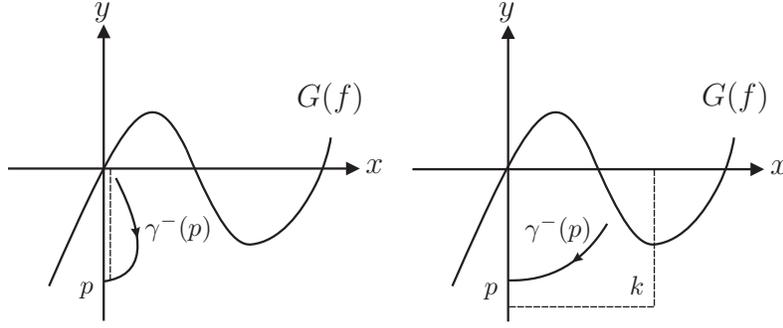


Figura 3.6: Caso a) e Caso b).

$(0, 0)$ , ou uma órbita fechada, donde, novamente pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, obtemos uma singularidade do campo  $X^f$ , diferente de  $(0, 0)$ , no interior de  $\alpha$ -limite o que é um absurdo. Veja Figura 3.6.

A segunda parte da proposição segue do Lema 3.1, desde que existe uma órbita que permanece no interior da faixa  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) - \varepsilon \leq y \leq f(x)\}$  para tempo negativo. O primeiro ponto onde esta órbita intersecta  $E_-^V$ , digamos  $p$ , tem a propriedade que  $\gamma^-(p)$  vai para o infinito.

■

A Proposição 3.6 garante a existência de pelo menos um ponto  $p \in E_-^V$  tal que  $\gamma^-(p)$  vai para o infinito. Na Seção 3.2 usaremos a Compactificação de Poincaré e o método do blowing-up para provarmos a existência de um único ponto  $p_- \in E_-^V$  cuja órbita negativa vai para o infinito assintoticamente ao gráfico de  $f$ . Quando  $a_d > 0$ ,  $d$  ímpar e  $d \geq 3$ , temos: se  $q_- > p_-$  com  $q_- \in E_-^V$ , então  $\gamma^-(q_-) \cap G(f) \neq \emptyset$  e se  $q_- < p_-$ , então  $\gamma^-(q_-)$  vai para o infinito não assintoticamente a  $G(f)$ . Veja Figura 3.7.

Similarmente existe um único ponto  $p_+ \in E_+^V$  (ver Figura 3.7), com a mesma propriedade, cuja órbita negativa vai para o infinito assintoticamente ao gráfico de  $f$  e tal que a órbita negativa através de qualquer ponto em  $E_+^V$ , abaixo de  $p_+$ , intercepta o eixo vertical negativo. Em seguida, podemos concluir que, se  $X^f$  possuir alguma órbita fechada, esta interceptará os eixos  $E_+^V$  e  $E_-^V$  em um par de pontos no intervalo  $(p_-, p_+)$ . Se  $a_d < 0$ ,  $d \geq 3$ ,  $d$  ímpar, temos resultados análogos considerando as órbitas positivas.

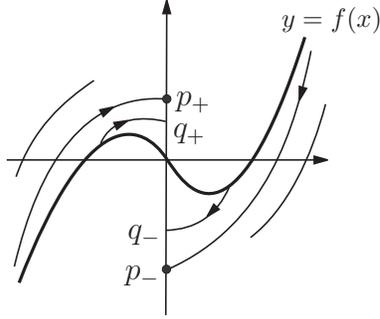


Figura 3.7:  $\gamma^-(p_-) \cap G(f) = \emptyset$  e  $\gamma^-(p_+) \cap G(f) = \emptyset$ .

Um outro caso interessante é quando  $d$  é par,  $a_d > 0$  e  $d \geq 4$ .

**Observação 3.3** *Suponha  $a_d > 0$ ,  $d \geq 4$  e  $d$  par. Neste caso, se  $p \in E_+^V$ , temos que:  $\gamma^+(p) \cap G(f) \neq \emptyset$  e  $\gamma^-(p) \cap G(f) \neq \emptyset$ .*

**Proposição 3.7** *Seja  $d$  par,  $a_d > 0$  e  $d \geq 4$ . Se  $p \in E_-^V$  então a órbita negativa de  $p$  ou intercepta  $E_+^V$ , ou vai para o infinito e permanece abaixo do gráfico de  $f$ . Além disso, existe pelo menos um ponto  $p \in E_-^V$  tal que  $\gamma^-(p)$  vai para o infinito. O mesmo é verdade para órbitas positivas.*

A demonstração é análoga à da Proposição 3.6.

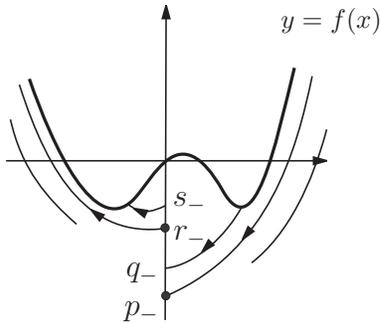


Figura 3.8:  $\gamma^-(p_-) \cap G(f) = \emptyset$  e  $\gamma^+(r_-) \cap G(f) = \emptyset$ .

Mostraremos na Seção 3.4 que existe também um único ponto  $p_- \in E_-^V$  tal que  $\gamma^-(p_-)$  vai para o infinito assintoticamente ao gráfico de  $f$ . Suponha  $q_- > p_-$ , com  $q_- \in E_-^V$

então,  $\gamma^-(q_-) \cap G(f) \neq \emptyset$ . Da mesma forma, existe outro ponto  $r_- \in E_-^V$  que é único e tal que  $\gamma^+(r_-)$  vai para o infinito assintoticamente ao gráfico de  $f$  e, novamente, se tivermos  $s_- \in E_-^V$ ,  $s_- > r_-$ , então  $\gamma^+(s_-) \cap G(f) \neq \emptyset$ . Veja Figura 3.8.

Assuma  $p_+ \neq p_-$ . Seja  $p_m$  o ponto em  $\{p_+, p_-\}$  mais próximo da origem e seja  $\tilde{p}_m \in E_+^V$  o primeiro ponto onde a órbita positiva ou negativa de  $p_m$  intercepta  $E_+^V$ . Então, qualquer órbita fechada de  $X^f$  deve interceptar  $E^V$  em um par de pontos no intervalo  $(p_m, \tilde{p}_m)$ . Além disso, podemos definir uma aplicação de Poincaré no intervalo  $(0, \tilde{p}_m)$ . Se  $p_- = p_+$ , então a aplicação de Poincaré está definida em  $E_+^V$  e as órbitas fechadas devem interceptar  $E_+^V$  acima de  $p_+$ . A Figura 3.9 ilustra as situações discutidas acima.

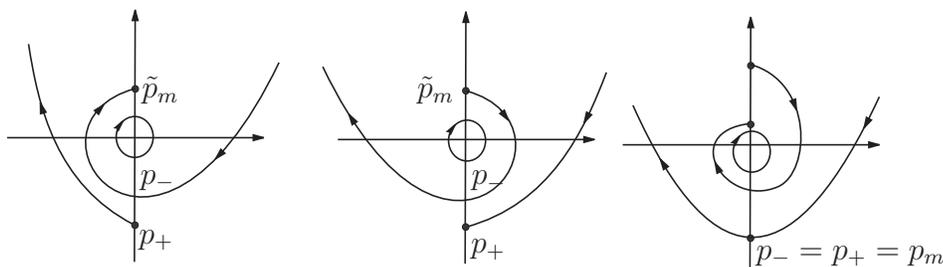


Figura 3.9: Órbitas periódicas quando  $d$  é par.

## 3.2 Compactificação de Poincaré

Nesta seção descreveremos a compactificação de Poincaré para campos polinomiais gerais. Com tal compactificação é possível fazer um estudo das órbitas de um campo polinomial perto do infinito.

**Definição 3.3** *Seja  $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  um campo vetorial polinomial. Definimos o grau de  $X$  como sendo o número  $d(X) = \max\{\text{grau } P, \text{ grau } Q\}$ .*

Considere a esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3; y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\},$$

a qual chamaremos de **Esfera de Poincaré**, e o plano

$$T_{P_N}\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 1\}$$

que é tangente a esfera  $\mathbb{S}^2$  em  $P_N = (0, 0, 1)$ .

Convencionaremos que as coordenadas  $y_i$  se referirão à esfera  $\mathbb{S}^2$  e as coordenadas  $x_i$  ao plano  $T_{P_N}\mathbb{S}^2$ .

Definiremos

$$H_+ = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2; y_3 > 0\}$$

como sendo o hemisfério norte,

$$H_- = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2; y_3 < 0\}$$

como sendo hemisfério sul e

$$\mathbb{S}^1 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2; y_3 = 0\}$$

como sendo o equador.

A compactificação de Poincaré de  $X$  consiste em fazer duas cópias do fluxo de  $X$ , uma sobre  $H_+$  e outra sobre  $H_-$ , usando a projeção central. Para isso consideremos uma reta  $L(t)$  que une a origem a um ponto do  $T_{P_N}\mathbb{S}^2$ ,

$$L(t) = (0, 0, 0) + t(x_1, x_2, 1) = t(x_1, x_2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esta reta intercepta a esfera  $\mathbb{S}^2$  em dois pontos, um no hemisfério norte e o outro no sul. Ver Figura 3.10.

Agora considerando a projeção do campo vetorial  $X$  de  $\mathbb{R}^2 \approx T_{P_N}\mathbb{S}^2$  para  $\mathbb{S}^2$  dada pelas projeções centrais, temos dois difeomorfismos

$$f^+ : T_{P_N}\mathbb{S}^2 \rightarrow H_+$$

e

$$f^- : T_{P_N}\mathbb{S}^2 \rightarrow H_-,$$

isto é,  $f^+(p)$ , (resp.  $f^-(p)$ ) é a intersecção da reta que passa pelo ponto  $p$  ligado a origem com o hemisfério norte, (resp. sul), de  $\mathbb{S}^2$ , cujas expressões são dadas por

$$f^+(x_1, x_2, 1) = \frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)}$$

e

$$f^-(x_1, x_2, 1) = -\frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)},$$

onde  $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$ .

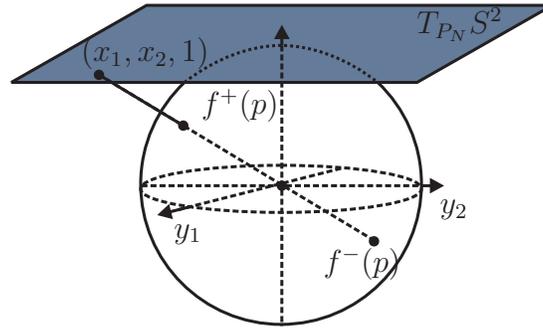


Figura 3.10: Projeção central.

Sem perda de generalidade, podemos considerar o campo  $X$  definido no plano tangente à esfera, isto é,  $X : T_{P_n} \mathbb{S}^2 \rightarrow T_{P_n} \mathbb{S}^2$ , e assim é possível definir um novo campo em  $\mathbb{S}^2$ . O campo  $\tilde{X}$  induzido em  $\mathbb{S}^2$ , a partir de  $X$ , através dos difeomorfismos  $f^+$  e  $f^-$  será dado por

$$\tilde{X}(y) = Df^+(x) \cdot X(x) \quad \text{se } y = f^+(x) \in H^+$$

e

$$\tilde{X}(y) = Df^-(x) \cdot X(x) \quad \text{se } y = f^-(x) \in H^-.$$

Destacamos que  $\tilde{X}$  é um campo vetorial em  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ , que é tangente à esfera. Para estudar o comportamento assintótico das órbitas não limitadas de  $X$  analisando  $\tilde{X}$ , é necessário estender  $\tilde{X}$  para o equador  $\mathbb{S}^1$ , obtendo assim um campo na esfera.

O estudo de  $\tilde{X}$  em uma vizinhança do equador nos dará informações sobre o comportamento do campo  $X$  no infinito. Entretanto, nem sempre é possível estender  $\tilde{X}$  ao

equador. Veremos adiante que, quando  $X$  for um campo polinomial, podemos estender  $\tilde{X}$  analiticamente ao equador. Como no nosso caso o campo  $X$  será o campo associado à equação de Liénard, sendo, portanto, polinomial, as considerações anteriores poderão ser aplicadas.

Antes de estudar a extensão de  $\tilde{X}$  ao equador, vamos escolher um sistema de coordenadas conveniente para  $\mathbb{S}^2$  e calcular a expressão de  $\tilde{X}$  nessas coordenadas.

Para  $\mathbb{S}^2$  usamos seis cartas locais dadas por

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\}$$

e

$$V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\},$$

para  $k = 1, 2, 3$ . As aplicações locais correspondentes são dadas por  $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$  e definidas como:

$$\phi_k(y) = -\psi_k(y) = \left( \frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right),$$

para  $m < n$  e  $m, n \neq k$ .

Iremos agora encontrar a expressão do campo na carta local  $(U_1, \phi_1)$ :

Seja  $y \in U_1 \cap H_+$ , então  $y = f^+(x)$ ,  $x \in T_{P_N}\mathbb{S}^2$ :

$$\begin{aligned} (\phi_1 \circ f^+)(x) &= \phi_1(f^+(x)) = \phi_1\left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)}\right) \\ &= \left(\frac{x_2}{\Delta(x)} \cdot \frac{\Delta(x)}{x_1}, \frac{1}{\Delta(x)} \cdot \frac{\Delta(x)}{x_1}\right) \\ &= \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Portanto,

$$\phi_1(x_1, x_2, 1) = (u, v),$$

onde  $u = \frac{x_2}{x_1}$  e  $v = \frac{1}{x_1}$ .

Observe que como  $y \in U_1 \cap H_+$ , então  $x_1 \neq 0$ . Como  $\tilde{X}(y) = Df^+(x) \cdot X(x)$  quando  $y = f^+(x)$  segue que

$$\begin{aligned} D\phi_1(y)\tilde{X}(y) &= D\phi_1(y) \circ Df^+(x)X(x) \\ &= D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Seja  $\tilde{X}(y)|_{U_1 \cap H_+}$  denotando o sistema de coordenadas definido como  $D\phi_1(y)\tilde{X}(y)$  e, portanto, segue da equação (3.5) que

$$\begin{aligned} \tilde{X}(y)|_{U_1 \cap H_+} &= D(\phi_1 \circ f^+)(x) \cdot X(x) = \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^2} (-x_2 P(x_1, x_2) + x_1 Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Esta é a expressão de  $\tilde{X}$  em  $U_1 \cap H_+$  nas coordenadas  $\phi_1$ . Vamos colocá-las em função de  $u$  e  $v$  para facilitar a análise. Usando que  $x_1 = \frac{1}{v}$ ,  $x_2 = \frac{u}{v}$  e substituindo em (3.6), temos

$$\tilde{X}(y)|_{U_1 \cap H_+} = \left[ -uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right].$$

Em geral,  $\tilde{X}$  não permanece limitado quando nos aproximamos de  $\mathbb{S}^1$ . Mas, se multiplicarmos o campo por um fator  $\rho(y) = y_3^{d-1}$ , onde  $d$  é o grau do campo  $X$ , a extensão se torna possível, então

$$\rho(f^+(x)) = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}},$$

onde  $z = (u, v)$ . Assim  $\rho \cdot \tilde{X}$  nas coordenadas  $(u, v)$  é dado por:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \tilde{X}(u, v) &= \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} \left( -uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right) \\ &= \frac{v^d}{\Delta(z)^{d-1}} \left( -uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -vP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Logo (3.7) é a expressão do campo em  $U_1 \setminus \mathbb{S}^1$ . Verifica-se, facilmente que se  $y \in U_1 \cap H_-$ , obtém-se a mesma expressão.

Faremos algumas considerações a respeito do que foi visto. Inicialmente observamos que os pontos do equador  $\mathbb{S}^1 \cap U_1$  são representados por  $v = 0$  nas coordenadas  $\phi_1$ . Por outro lado, estes pontos correspondem ao infinito do plano  $T_{P_N} \mathbb{S}^2$ . Observe também, que é possível fazer  $v = 0$  na expressão (3.7), resultando em

$$\rho \cdot \tilde{X}(u, 0) = \frac{1}{[\sqrt{u^2 + 1}]^{d-1}} (-ua_d + b_d, 0)$$

onde  $a_d$  e  $b_d$  são os termos de maior grau em  $P$  e  $Q$ , respectivamente. Na expressão de  $\rho.\tilde{X}(u, 0)$  temos a segunda componente do vetor igual a zero. Isto significa que o vetor  $\rho.\tilde{X}(u, 0)$  é tangente ao equador quando olhado na esfera  $\mathbb{S}^2$ . Podemos concluir então que o equador  $\mathbb{S}^1 \cap U_1$  é invariante pelo campo de  $\rho.\tilde{X}$ . Não é difícil remover o fator  $\frac{1}{\Delta(z)^{d-1}}$  de (3.7) por uma parametrização do tempo. Assim, a expressão para o campo  $\rho.\tilde{X}$  na carta local  $(U_1, \phi_1)$  é dada por

$$\begin{cases} u' = v^d \left[ -uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right], \\ v' = -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right). \end{cases} \quad (3.8)$$

Podemos calcular analogamente, a expressão do campo  $\rho.\tilde{X}$  na carta  $(U_2, \phi_2)$  que será dada por

$$\begin{cases} u' = v^d \left[ P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right], \\ v' = -v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right), \end{cases} \quad (3.9)$$

e a expressão do campo  $\rho.\tilde{X}$  na carta  $(U_3, \phi_3)$  é dada por

$$\begin{cases} u' = P(u, v), \\ v' = Q(u, v). \end{cases} \quad (3.10)$$

Por outro lado, as expressões para  $\rho.\tilde{X}$  nas cartas  $(V_1, \psi_1)$ ,  $(V_2, \psi_2)$  e  $(V_3, \psi_3)$  serão respectivamente, as mesmas expressões (3.8), (3.9) e (3.10) multiplicadas por  $(-1)^{d-1}$ . Observe que o fator  $(-1)^{d-1}$  desempenha um papel fundamental no estudo das estabilidades dos equilíbrios em  $\mathbb{S}^1$ . Assim, para conhecermos o comportamento dos pontos do infinito, basta olharmos as cartas  $(U_1, \phi_1)$  e  $(U_2, \phi_2)$ .

**Proposição 3.8** *Seja  $X$  um campo polinomial em  $\mathbb{R}^2$  de grau  $d$ . Seja  $\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\rho(y) = y_3^{d-1}$ , e seja  $\tilde{X}$  o campo induzido em  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$  através de  $f^+$  e  $f^-$  como definido acima. Então  $\rho.\tilde{X}$  pode ser estendido a um campo analítico de  $\mathbb{S}^2$  com equador invariante.*

**Demonstração:** Vimos acima que as expressões de  $\rho.\tilde{X}$  nas cartas  $(U_1, \phi_1)$ ,  $(V_1, \psi_1)$ ,  $(U_2, \phi_2)$  e  $(V_2, \psi_2)$  são dadas por (3.8) ou (3.9) onde podemos ainda multiplicar pelo fator  $(-1)^{d-1}$  quando for o caso. Vê-se que as expressões (3.8) e (3.9) são perfeitamente definidas para  $v = 0$ , isto é, no equador  $\mathbb{S}^1$  e, como tais expressões são analíticas, podemos estendê-las, analiticamente ao equador. Fazendo  $v = 0$  em (3.8) e (3.9) obtemos respectivamente:

$$\rho\tilde{X}(u, 0) = (-ua_d + b_d, 0)$$

e

$$\rho\tilde{X}(u, 0) = (a_d, 0)$$

e podemos concluir que o equador será invariante por  $\tilde{X}$ .

■

**Definição 3.4** *O campo vetorial estendido na esfera  $\mathbb{S}^2$  pelas cartas locais  $(U_k, \phi_k)$  e  $(V_k, \psi_k)$ , chama-se **Compactificação de Poincaré de  $X$**  e será indicado por  $\Pi(X)$ .*

### 3.3 Compactificação de Poincaré do sistema de Liénard

Nesta seção buscamos compreender o comportamento assintótico das órbitas do campo  $X^f$  no infinito. Considerando o sistema de Liénard, onde  $P(x, y) = y - f(x)$  e  $Q(x, y) = -x$ , a expressão do campo na carta  $(U_1, \phi_1)$ , dada em (3.8) pode ser reescrita como

$$\Pi(X^f) = \rho.\tilde{X}(u, v) = \begin{cases} u' = -v^{d-1} - u^2v^{d-1} + uv^df\left(\frac{1}{v}\right), \\ v' = -uv^d + v^{d+1}f\left(\frac{1}{v}\right), \end{cases} \quad (3.11)$$

que é a extensão do campo  $\tilde{X}$  em  $U_1$ . Aqui os pontos do equador são representados por  $v = 0$ . Os pontos do hemisfério norte são dados por  $v > 0$  e  $(0, 0)$  corresponde ao ponto  $(1, 0, 0) \in \mathbb{S}^2$ . Como já comentamos no final da Seção 3.2, o campo  $\tilde{X}$  em  $V_1$  possui a mesma expressão multiplicada por  $(-1)^{d-1}$  e que o hemisfério sul é representado pelos pontos  $v < 0$ .

A expressão (3.9) do campo na carta  $(U_2, \phi_2)$  para os sistema de Liénard pode ser reescrita como

$$\Pi(X^f) = \begin{cases} u' = v^{d-1} + u^2v^{d-1} - v^d f\left(\frac{u}{v}\right), \\ v' = uv^d, \end{cases} \quad (3.12)$$

que é a extensão de  $\tilde{X}$  em  $U_2$ . Novamente, os pontos do equador são representados por  $v = 0$ , os pontos do hemisfério norte por  $v > 0$  e finalmente  $(0, 0)$  corresponde ao ponto  $(0, 1, 0) \in \mathbb{S}^2$ . O campo  $\tilde{X}$  em  $V_2$  possui a mesma expressão do campo  $\tilde{X}$  em  $U_2$  multiplicada por  $(-1)^{d-1}$  e o hemisfério sul é representado por  $v < 0$ .

O campo  $\Pi(X^f)$  possui quatro singularidades,  $p_1 = (1, 0, 0)$  e  $p_2 = (-1, 0, 0)$  relacionadas ao sistema (3.11),  $q_1 = (0, 1, 0)$  e  $q_2 = (0, -1, 0)$  relacionadas ao sistema (3.12).

**Proposição 3.9** *As singularidades  $p_1$  e  $p_2$  são hiperbólicas.*

**Demonstração:** Do sistema (3.11) juntamente com a expressão de  $f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial u} &= -2uv^{d-1} + a_d + va_{d-1} + \dots + v^{d-2}a_2 + v^{d-1}a_1, \\ \frac{\partial u'}{\partial v} &= (d-1)(-v)^{d-2} + (d-1)(-u^2)v^{d-2} + ua_{d-1} + \dots + (d-2)uv^{d-3}a_2 + (d-1)uv^{d-2}a_1, \\ \frac{\partial v'}{\partial u} &= -v^d, \\ \frac{\partial v'}{\partial v} &= -d uv^{d-1} + a_d + 2a_{d-1}v + \dots + (d-1)v^{d-2}a_2 + dv^{d-1}a_1. \end{aligned}$$

Portanto, a linearização de  $\Pi(X^f)$  é dada por

$$D(\Pi(X^f))(0, 0) = \begin{pmatrix} a_d & 0 \\ 0 & a_d \end{pmatrix}.$$

Logo,  $p_1 = (1, 0, 0)$  é uma singularidade hiperbólica atratora se  $a_d < 0$  e repulsora se  $a_d > 0$ . No caso do ponto  $p_2 = (-1, 0, 0)$  devemos multiplicar a expressão (3.11) por  $(-1)^{d-1}$  para obtermos

$$D(\Pi(X^f))(0, 0) = (-1)^{d-1} \begin{pmatrix} a_d & 0 \\ 0 & a_d \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $p_2$  será uma singularidade hiperbólica atratora se  $(-1)^{d-1}.a_d < 0$  e repulsora se  $(-1)^{d-1}.a_d > 0$ . ■

**Proposição 3.10** *As singularidades  $q_1$  e  $q_2$  são não hiperbólicas.*

**Demonstração:** Novamente utilizando o sistema (3.12) e a expressão de  $f$ , obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial u} &= 2uv^{d-1} - da_d u^{d-1} - (d-1)u^{d-2}va_{d-1} - \dots - 2uv^{d-2}a_2 - v^{d-1}a_1, \\ \frac{\partial u'}{\partial v} &= (d-1)v^{d-2} + (d-1)u^2v^{d-2} - u^{d-1}a_{d-1} - \dots - (d-2)u^2v^{d-3}a_2 - (d-1)v^{d-2}ua_1, \\ \frac{\partial v'}{\partial u} &= v^d, \\ \frac{\partial v'}{\partial v} &= duv^{d-1}.\end{aligned}$$

Portanto, a linearização de  $\Pi(X^f)$  é dada por

$$D(\Pi(X^f))(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, no ponto  $q_2 = (0, -1, 0)$ , teremos

$$D(\Pi(X^f))(0,0) = (-1)^{d-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, as singularidades  $q_1$  e  $q_2$  são não hiperbólicas. ■

### 3.4 Comportamento de $\Pi(X^f)$ na vizinhança do equador.

**Teorema 3.1** *Sejam  $X^f$  o campo determinado pela equação de Liénard onde  $f = a_d x^d + \dots + a_1 x$ ,  $d \geq 3$  e  $\Pi(X^f)$  a compactificação de Poincaré deste campo. Então, a estrutura das órbitas de  $\Pi(X^f)$  na vizinhança do equador é dada por uma das figuras abaixo:*

*Aqui  $\Pi(X^f)$  é topologicamente conjugado a uma sela nas vizinhanças de  $q_1$  e  $q_2$ , e as separatrizes são tangentes ao equador.*

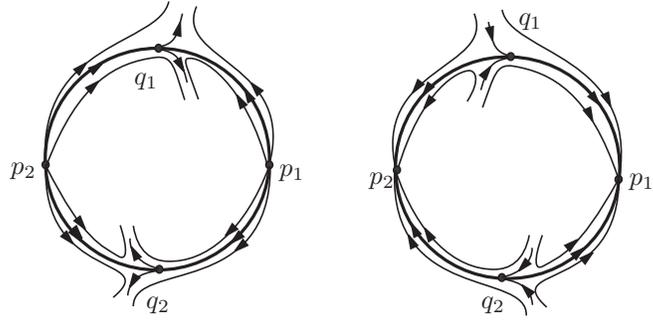


Figura 3.11:  $d$  ímpar com  $a_d > 0$  e  $a_d < 0$ .

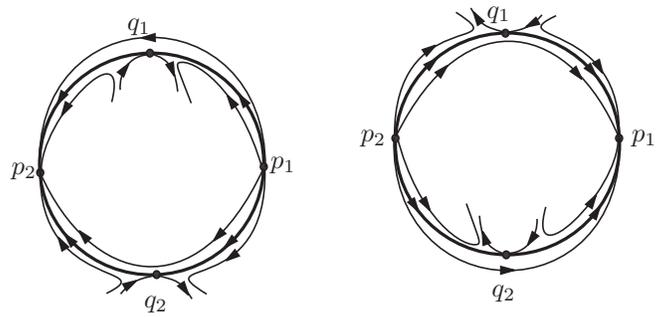


Figura 3.12:  $d$  par com  $a_d > 0$  e  $a_d < 0$ .

**Demonstração:** É suficiente estudar as singularidades  $q_1$  e  $q_2$ , uma vez que pela Proposição 3.9, as singularidades  $p_1$  e  $p_2$  são hiperbólicas. Faremos o estudo de  $q_1$  quando  $d$  é ímpar e  $a_d > 0$ . Os outros casos são análogos. Dividiremos a demonstração em 3 etapas:

a) Dados  $a, k \in \mathbb{R}$  com  $a > 0$  e  $k > 0$  considere a região

$$A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) - k \leq y \leq f(x) \text{ e } x \geq a\}.$$

Denotemos por  $A_{k,1}$  e  $A_{k,2}$  parte da fronteira de  $A_k$  contendo a curva  $y = f(x)$  e  $y = f(x) - k$  respectivamente, como na Figura 3.13.

Do Lema 3.1, podemos encontrar  $a \in \mathbb{R}$ , tal que o campo  $X^f$  seja transversal a  $A_{k,1}$  e  $A_{k,2}$ .

Além disso o campo aponta para o interior de  $A_k$ , onde  $k \geq 1$ , conforme Figura 3.14.

Por outro lado, conforme Corolário 3.1 é possível encontrar também um  $a$  suficientemente grande tal que o campo seja transversal a  $A_{k,1}$  e ao conjunto  $\Delta_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y \geq a\}$

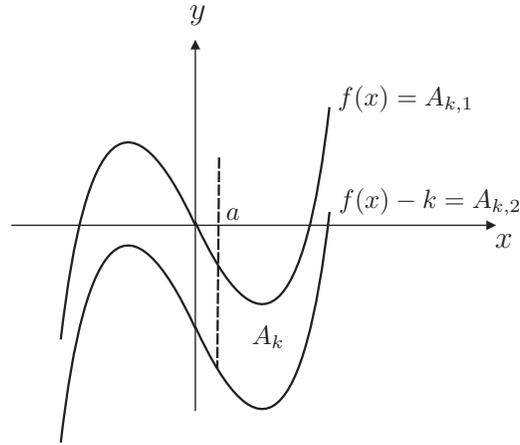


Figura 3.13: Região  $A_k$ .

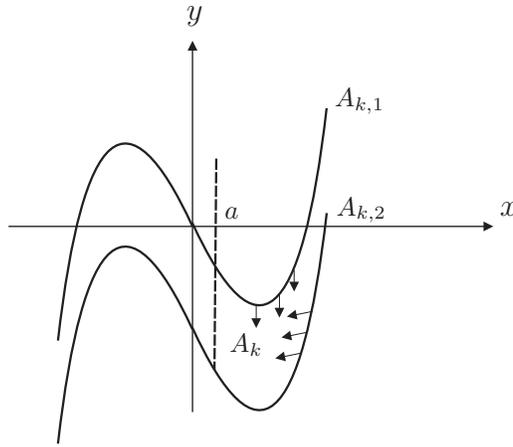


Figura 3.14: Fluxo na região  $A_k$ .

e, além disso, o campo aponta para o interior do conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \leq f(x), x \geq a\}.$$

Tendo em conta esses dois resultados, tomemos  $k = b = f(a) - a$ , onde  $a$  é como antes, ou seja, o campo  $X^f$  é transversal a  $A_{k,1}$ ,  $A_{k,2}$ ,  $\Delta_+$  e aponta para o interior da região  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \leq f(x), x \geq a\}$ .

Dado um ponto  $p \in A_{k,1} \cup A_{k,2}$  a órbita positiva de  $p$ ,  $\gamma^+(p)$  pelo campo  $X^f$  intercepta a reta  $x = a$ , pois  $\gamma^+(p)$  não pode deixar  $A_k$  através de  $A_{k,1}$  ou  $A_{k,2}$ , e como  $x(t) > 0$ , então  $y'(t) = -x(t) < 0$ . Logo,  $y(t)$  será decrescente, não sendo, portanto, possível que  $\gamma^+(p)$

vá para o infinito.

Seja agora

$$B_b = \{(x, y) | x \leq y \leq f(x) - b, x \geq a\}.$$

Podemos raciocinar de maneira análoga e concluir que dado um ponto  $q \in B_b$ , a órbita negativa de  $q$ ,  $\gamma^-(q)$ , pelo campo de  $X^f$ , deixará  $B_b$  através de  $A_{k,2}$  e passará em seguida pela reta  $x = a$ . Veja Figura 3.15.

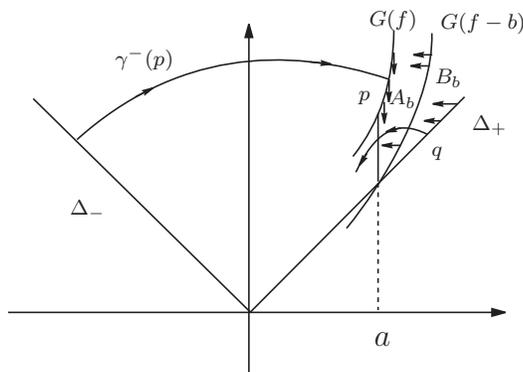


Figura 3.15: Fluxo na região  $B_b$ .

Afirmção: A órbita negativa de um ponto  $p \in A_{k,1}$  intercepta a reta

$$\Delta_- = \{(x, -x) | x \in \mathbb{R}, x < 0\}.$$

Já vimos nas Proposições 3.4 e 3.5 que se  $p \in G(f)$ , então  $\gamma^+(p) \cap E_+^V \neq \emptyset$  ou  $\gamma^+(p) \cap E_-^V \neq \emptyset$ , poderemos então considerar o campo  $-X^f$  e concluir que dado  $p \in G(f)$ , então  $\gamma^-(p) \cap E_+^V \neq \emptyset$ . Agora não é difícil ver que  $\gamma^-(p) \cap \Delta_- \neq \emptyset$ .

Seja  $\Pi(X^f)$  a compactificação de Poincaré de  $X^f$ . Então, o campo  $\Pi(X^f)$  se comportará como na Figura 3.16. Tanto  $f^+(A_{k,1})$  quanto  $f^+(A_{k,2})$  tenderão para  $q_1 = (0, 1, 0)$ . Seja  $A_b^+ = f^+(A_b)$  e  $B_b^+ = f^+(B_b)$ .

Assim as órbitas de  $\Pi(X^f)$  por um ponto qualquer no interior de  $B_b^+$  entra em  $B_b^+$  através de  $f^+(\Delta)$  e sai através da fronteira de  $A_b^+$ . Desta forma a órbita negativa de um ponto em  $A_{b,1}$  (resp. em  $A_{b,2}$ ) intercepta  $f^+(\Delta_-)$  (resp.  $f^+(\Delta)$ ). Para dar um comportamento

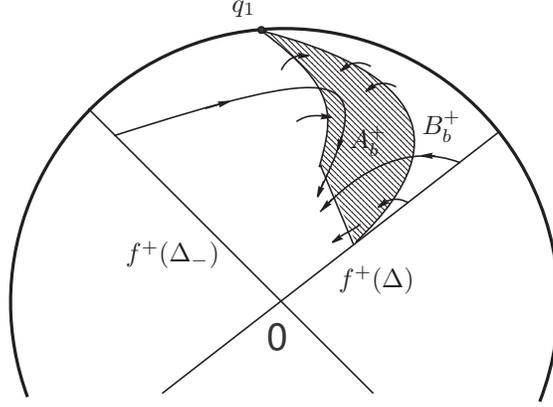


Figura 3.16: Comportamento de  $\Pi(X^f)$  no infinito.

completo das órbitas do campo  $X^f$  na vizinhança de  $q_1$ , basta provarmos que existe uma única órbita de  $X^f$  em  $A_b^+$ , cujo  $\alpha$ -limite é  $q_1$ .

b) Já sabemos que a singularidade  $q_1$  é não hiperbólica. Para estudar esta singularidade, será necessário aplicar um “blowing-up” direcional. Este método consiste, como o próprio nome diz, em “explodir” a singularidade em várias singularidades que apresentam comportamentos mais simples. Faremos dois “blowing-up” sucessivos. Veja Figura 3.17. O primeiro será determinado pela seguinte transformação: Seja

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y) = (u, uv). \end{aligned}$$

Desta forma segue que  $\varphi^{-1}(0, 0) = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$  é um difeomorfismo fora do eixo  $x = 0$ , e  $\varphi^{-1}(x, y) = (x, \frac{y}{x})$ .

Considere  $Y$  como sendo o campo na carta  $(U_2, \phi_2)$  dado em (3.12). Seja  $\tilde{Y}^1 = \varphi^{-1}Y$ . Expressando  $\tilde{Y}^1$  nas coordenadas  $(x, y)$ , temos

$$\tilde{Y}^1 = \begin{cases} x' = x^{d-1}y^{d-1} + x^{d+1}y^{d-1} - x^d y^d f\left(\frac{1}{y}\right), \\ y' = x^{d-1}y^{d+1} f\left(\frac{1}{y}\right) - x^{d-2}y^d. \end{cases}$$

Considere o campo vetorial  $Y^1 = \left(\frac{1}{x^{d-2}}\right) \tilde{Y}^1$ . Logo,

$$Y^1 = \begin{cases} x' = xy^{d-1} + x^3y^{d-1} - x^2y^d \left(\frac{1}{y}\right), \\ y' = xy^{d+1}f\left(\frac{1}{y}\right) - y^d. \end{cases} \quad (3.13)$$

Assim,  $Y^1$  tem as mesmas órbitas de  $\tilde{Y}^1$  no semi-plano  $x > 0$  e  $x < 0$ . Como  $d$  é ímpar  $x^{d-2} > 0$  se  $x > 0$  e  $x^{d-2} < 0$  se  $x < 0$ . Portanto, as órbitas de  $Y^1$  tem a mesma orientação que as órbitas de  $\tilde{Y}^1$  se  $x > 0$  e orientação oposta se  $x < 0$ .

Aplicamos agora o segundo blowing-up, o qual será determinado pela transformação:

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (u, v) &\mapsto \chi(u, v) = (uv^{d-1}, v). \end{aligned}$$

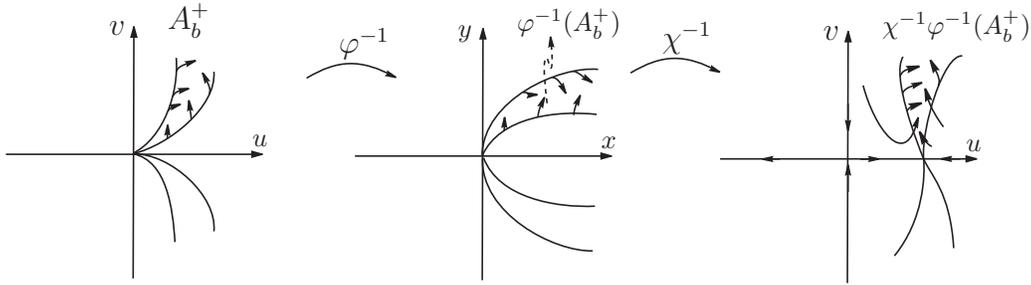


Figura 3.17: Regiões no infinito.

Observamos inicialmente que  $\chi^{-1}(0, 0) = \{(u, 0) \mid u \in \mathbb{R}\}$ . Então,  $\chi^{-1}(0, 0) = \{(u, 0) \mid u \in \mathbb{R}\}$  e  $\chi^{-1}$  é um difeomorfismo fora do eixo  $y = 0$ , dado por  $\chi^{-1}(x, y) = \left(\frac{u}{v^{d-1}}, v\right)$ .

Considere  $\tilde{Y}^2 = \chi^{-1}Y^1$ . Logo

$$\tilde{Y}^2 = \begin{cases} u' = u^3v^{3d-3} + d(-u^2v^{2d-1}f\left(\frac{1}{v}\right) + uv^{d-1} + uv^{d-1}), \\ y' = uv^2df\left(\frac{1}{v}\right) - v^d. \end{cases}$$

Seja agora  $Y^2 = \frac{1}{v^{d-1}}\tilde{Y}^2$ , logo

$$Y^2 = \begin{cases} u' = d(-u^2v^df\left(\frac{1}{v}\right) + uv^{d-1} + u) + u^3v^{3d-3}, \\ v' = -v + uv^{d+1}f\left(\frac{1}{v}\right). \end{cases}$$

O campo vetorial  $Y^2$  tem as mesmas órbitas de  $\tilde{Y}^2$  no semi-plano  $v > 0$  e  $v < 0$  e as órbitas tem a mesma orientação, desde que  $d$  seja ímpar.

c) O campo  $Y^2$  possui duas singularidades, a saber,  $(0, 0)$  e  $(\frac{1}{a_d}, 0)$ . A linearização do campo  $Y^2$  em  $(0, 0)$  é dada por

$$DY^2(0, 0) = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $(0, 0)$  é um ponto de sela. Quanto à linearização de  $Y^2$  em  $(\frac{1}{a_d}, 0)$  temos que

$$DY^2\left(\frac{1}{a_d}, 0\right) = \begin{pmatrix} -d & \frac{-da_{d-1}}{a_d^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $(\frac{1}{a_d}, 0)$  é uma singularidade parcialmente hiperbólica. Os autovalores de  $DY^2(\frac{1}{a_d}, 0)$  são  $\lambda_1 = -d$  e  $\lambda_2 = 0$  e os autovetores correspondentes são  $V_1 = (1, 0)$  e  $V_2 = (1, -\frac{a_d^2}{a_{d-1}})$ .

Temos, então, a seguinte estrutura de órbitas do campo  $Y^2$ , conforme Figura 3.18.

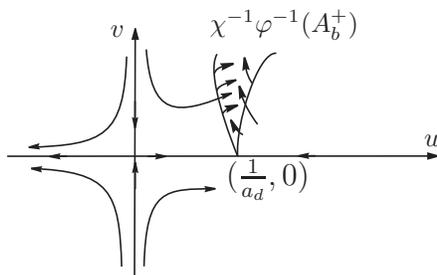


Figura 3.18: Estrutura das órbitas do campo  $Y^2$ .

Faremos agora um estudo do campo  $Y^2$  na vizinhança da singularidade  $(\frac{1}{a_d}, 0)$ . A configuração do espaço de fase de  $Y^2$  no primeiro quadrante de  $(u, v)$ ,  $u > 0$ ,  $v > 0$ , terá o mesmo comportamento do campo  $\Pi(X^f)$  no primeiro quadrante de  $(x, y)$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ , pois, os dois campos nestes domínios são os mesmos, a menos do difeomorfismo  $\chi^{-1} \circ \varphi^{-1}$ .

Portanto, o comportamento do espaço de fase de  $Y^2$  em  $\chi^{-1} \cdot \varphi^{-1}(A_b^+)$  é análogo ao comportamento do espaço de fase de  $\Pi(X^f)$  em  $A_b^+$ .

Provaremos agora que existe uma única órbita em  $\chi^{-1} \circ \varphi^{-1}(A_b^+)$  tal que o  $\alpha$ -limite desta órbita seja o ponto  $(\frac{1}{a_d}, 0)$ . Vimos que  $(\frac{1}{a_d}, 0)$  é parcialmente hiperbólica, e além disso o Teorema 2.4 garante a existência da variedade central  $W^C$ . Esta variedade central  $W^C$  é Liapunov instável em relação a  $(\frac{1}{a_d}, 0)$  devido ao fato de  $W^C$  ser invariante pelo campo  $Y^2$ , e também devido à configuração do espaço de fase deste, onde se observa que dado um arco  $C$ , como na Figura 3.19, o campo estará sempre apontando para o exterior de  $C$ .

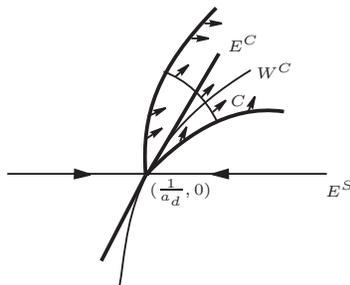


Figura 3.19: Espaço de fase de  $Y^2$ .

Portanto, pelo Teorema 2.5, a variedade central é única.  $W^C$  é uma órbita de  $Y^2$  cujo  $\alpha$ -limite é  $(\frac{1}{a_d}, 0)$ . Note que esta órbita corresponde à única órbita de  $X^f$  que vai para o infinito assintoticamente ao gráfico de  $f$ .

■

**Corolário 3.2** *Seja  $f$  um polinômio par. Se  $a_d > 0$  (resp.  $a_d < 0$ ), então existe um disco  $D$  no hemisfério norte de  $\mathbb{S}^2$ , contendo o polo norte, tal que sua fronteira é formada pelas separatrizes de  $q_1$  (resp.  $q_2$ ). Toda órbita em  $D$  é compacta, e se  $\gamma$  é uma órbita fora de  $D$ , então seu  $\alpha$ -limite é  $p_1$  (resp.  $p_2$ ) e o seu  $\omega$ -limite é  $p_2$  (resp.  $p_1$ ), conforme Figura 3.20. Em particular, a origem é um centro.*

**Demonstração:** Seja  $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\Psi(x, y) = (-x, y)$ . Considere o novo campo  $\bar{X}^f$  da forma

$$\bar{X}^f = D\Psi.X^f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y - f(x) \\ -x \end{pmatrix} = (-y + f(x), -x).$$

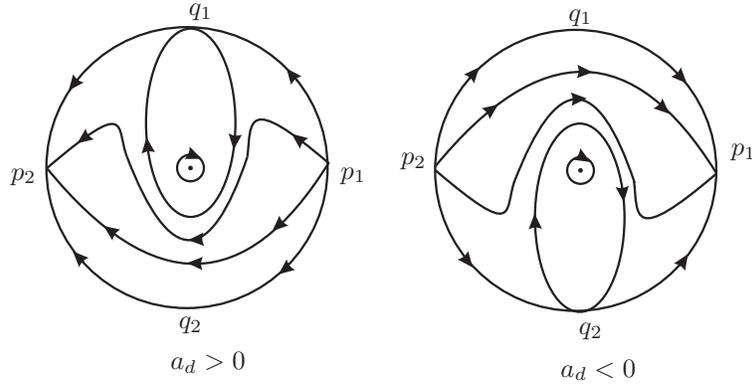


Figura 3.20: Retrato de fase do campo  $X^f$  quando  $f$  é um polinômio par.

Além disso,

$$\begin{aligned} X^f(-x, y) &= (y - f(-x), x) \\ &= (y - f(x), x). \end{aligned}$$

Logo

$$X^f(-x, y) = -\bar{X}^f(x, y).$$

O que mostra que a configuração do campo  $X^f$  é simétrica em relação ao eixo  $y$ . Neste caso, a singularidade  $(0, 0)$  é um centro.

■

**Proposição 3.11** *Seja  $f(x) = e(x) + o(x)$ , onde  $e(x)$  é um polinômio par e  $o(x)$  é um polinômio ímpar. Se  $0$  é a única raiz de  $o(x)$ , então  $X^f$  não possui órbitas fechadas.*

**Demonstração:** Considere o campo vetorial auxiliar  $Y(x, y) = (y - e(x), -x)$ . Se o coeficiente de maior grau do termo  $e(x)$  é positivo, então pelo Corolário 3.2, toda órbita de  $Y$  a menos do equilíbrio, intercepta o eixo vertical negativo em um único ponto.

Seja  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como segue: se  $p \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ , então  $V(p)$  é a intersecção da órbita de  $p$  com o eixo vertical negativo e  $V(0) = 0$ . Claramente  $V$  é  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  e  $0$  é o único mínimo de  $V$ . As curvas de nível de  $V$  são as órbitas de  $Y$ , logo  $V$  é constante ao longo das órbitas de  $Y$ . Portanto,  $V$  é uma integral primeira do campo  $Y$  e, se  $\sigma(t)$  é uma órbita do campo  $Y$ , então  $V(\sigma(t)) = \text{constante}$ , donde

$$\frac{d}{dt}V(\sigma(t)) = DV(\sigma(t)) \cdot Y(\sigma(t)) = 0.$$

Mas, isto implica que

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\sigma(t))(y - e(x)) - \frac{\partial V}{\partial y}(\sigma(t))x = 0.$$

Logo

$$\frac{\partial V}{\partial x} = xK(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = (y - e(x)) \cdot K(x, y),$$

para  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $K(x, y)$  com sinal constante no conexo  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Assim, derivando  $V$  ao longo de uma órbita de  $X^f$ , temos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \nabla V \cdot X^f \\ &= (y - f(x)) \cdot \frac{\partial V}{\partial x} - x \frac{\partial V}{\partial y} \\ &= (y - f(x)) \cdot [xK(x, y)] - x[(y - e(x)) \cdot K(x, y)] \\ &= xyK(x, y) - xf(x)K(x, y) - xyK(x, y) + xe(x)K(x, y) \\ &= -xK(x, y)[f(x) - e(x)] \\ &= -xK(x, y)o(x). \end{aligned}$$

Como  $xo(x)$  possui o mesmo sinal para qualquer  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ , então  $\dot{V}(x, y)$  possui o mesmo sinal ao longo das órbitas de  $X^f$ , e  $V(x, y) = 0$  se, e somente se,  $(x, y) = (0, 0)$ . Logo,  $V(x, y)$  ou será uma função estritamente crescente ou estritamente decrescente ao longo das órbitas de  $X^f$ . Portanto, não existem órbitas fechadas de  $X^f$ .

■

### 3.5 Equação de Liénard de grau três

Considere o campo vetorial

$$X^f(x, y) = (y - f(x), -x), \tag{3.14}$$

onde  $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$ . Utilizando os resultados das seções anteriores, mostraremos aqui que  $X^f$  tem no máximo um ciclo limite.

**Teorema 3.2** *Seja  $X^f$  o campo como em (3.14). Temos, então, as seguintes possibilidades:*

- a) Se  $a_1 \cdot a_3 > 0$ , então  $X^f$  não possui órbitas fechadas.
- b) Se  $a_1 \cdot a_3 < 0$ , então  $X^f$  possui uma única órbita fechada.
- c) Se  $a_1 = 0$  e  $a_3 \neq 0$ , então  $X^f$  não possui órbitas fechadas. A origem é um atrator fraco quando  $a_3 > 0$  e um repulsor fraco quando  $a_3 < 0$ .
- d) Se  $a_3 = 0$  e  $a_1 \neq 0$ , então  $X^f$  não possui órbitas fechadas. A origem é um atrator hiperbólico para  $a_1 > 0$  e um repulsor hiperbólico para  $a_1 < 0$ .
- e) Se  $a_1 = a_3 = 0$ , então a origem é um centro.

A estrutura de algumas possíveis órbitas do campo vetorial  $\Pi(X^f)$  é dada na Figura 3.21.

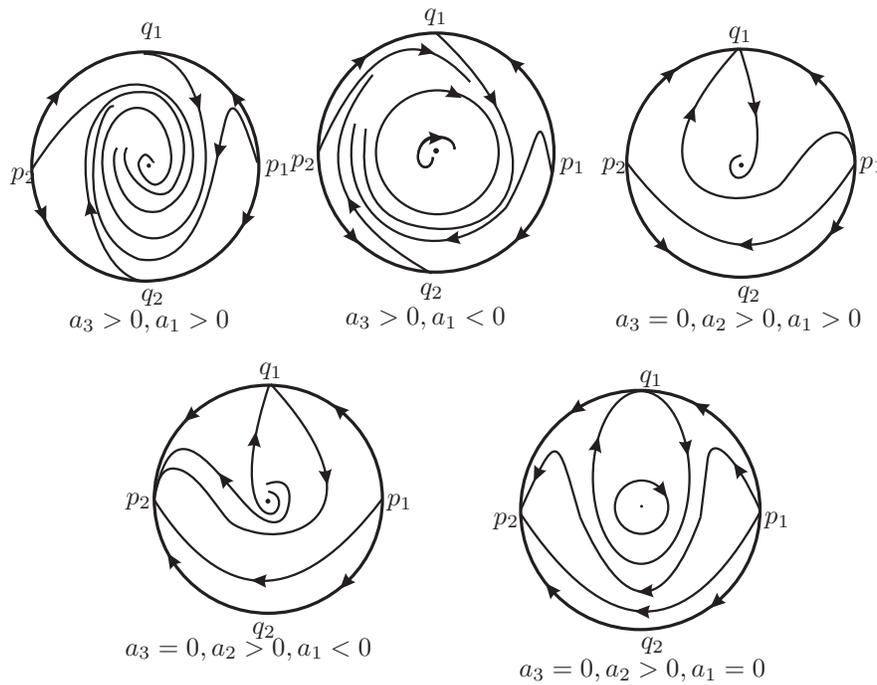


Figura 3.21: Campo vetorial  $\Pi(X^f)$  quando  $f$  tem grau três

**Observação 3.4** a) Quando  $a_3 \neq 0$  e  $a_1$  muda o sinal, temos uma bifurcação de Hopf na origem. Para mais detalhes ver, por exemplo, [13].

b) Quando  $a_1 \neq 0$  e  $a_3$  muda o sinal, temos uma bifurcação no infinito, ou seja, a órbita fechada vai para o infinito.

**Demonstração :** Vamos primeiramente demonstrar os casos mais simples.

a) Considere  $a_1 \cdot a_3 > 0$ . Sejam  $e(x) = a_2 x^2$ ,  $o(x) = a_3 x^3 + a_1 x$ . Assim  $o(x) = 0$  se, e

somente se,  $a_3x^3 = -a_1x$ , como  $a_1$  e  $a_3$  tem o mesmo sinal, então  $o(x) = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ . Logo, segue da Proposição 3.11, que  $X^f$  não possui órbitas fechadas.

c) Considere  $a_1 = 0$  e  $a_3 \neq 0$ . Sejam  $e(x) = a_2x^2$ ,  $o(x) = a_3x^3$ , logo  $o(x) = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ . Novamente, segue da Proposição 3.11, que  $X^f$  não possui órbitas fechadas.

Para a estabilidade da origem, observamos que o sistema, neste caso, é da forma

$$\begin{cases} x' = y - a_2x^2 - a_3x^3, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Este sistema é um caso particular do sistema (2.7). Desta forma, temos por (2.22), que  $L_1 = -\frac{3}{8}a_3$ . Portanto, se  $a_3 > 0$ ,  $L_1 < 0$ , ou seja, a origem é um atrator fraco e se  $a_3 < 0$ ,  $L_1 > 0$ , ou seja, a origem é um repulsor fraco.

d) Considere  $a_3 = 0$  e  $a_1 \neq 0$ . Sejam  $e(x) = a_2x^2$ ,  $o(x) = a_1x$ , então  $o(x) = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ . Portanto, pela Proposição 3.11,  $X^f$  não tem órbitas fechadas. A estabilidade neste caso segue facilmente analisando a parte linear do campo.

e) Considere  $a_1 = a_3 = 0$ . Neste caso  $f(x) = a_2x^2$  é par e o sistema é dado por

$$\begin{cases} x' = y - a_2x^2 \\ y' = -x. \end{cases}$$

Desta forma a origem é um centro, simplesmente observando o Corolário 3.2.

Finalmente a demonstração do último caso.

b) Considere  $a_1 \cdot a_3 < 0$ . Suponha  $a_3 > 0$  e  $a_1 < 0$ . O outro caso segue de forma similar.

Dividiremos a prova em três etapas a saber:

b.1) Mostraremos que toda órbita de  $X^f$  intercepta a reta  $x = \pm\sqrt{\frac{-a_1}{a_3}}$ .

b.2)  $X^f$  possui pelo menos uma e no máximo duas órbitas fechadas, sendo uma delas hiperbólica.

b.3)  $X^f$  tem exatamente uma órbita fechada.

Prova de b.1) Considere a função  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$V(x, y) = \begin{cases} e^{-2a_2y} \left( y - a_2x^2 + \frac{1}{2a_2} \right), & \text{se } a_2 \neq 0 \\ x^2 + y^2, & \text{se } a_2 = 0. \end{cases}$$

$V$  é uma integral primeira do campo  $\bar{X}(x, y) = (y - a_2x^2, -x)$ , pois se  $\sigma(t)$  é uma órbita de  $\bar{X}$ , então:

$$V(\sigma(t)) = cte \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(V\sigma(t)) = DV(\sigma(t)).\bar{X}(\sigma(t)) = 0.$$

Temos que

$$V(x, y) = e^{-2a_2y} \left( y - a_2x^2 + \frac{1}{2a_2} \right), \text{ e segue que}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = -2e^{-2a_2y}a_2x$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = -2a_2e^{-2a_2y} \left( y - a_2x^2 + \frac{1}{2a_2} \right) + e^{-2a_2y}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} DV(x, y).\bar{X}(x, y) &= \left( -2a_2e^{-2a_2y}x, -2a_2e^{-2a_2y} \left( y - a_2x^2 + \frac{1}{2a_2} \right) + e^{-2a_2y} \right) \cdot \begin{pmatrix} y - a_2x^2 \\ -x \end{pmatrix} \\ &= -2a_2e^{-2a_2y}x(y - a_2x^2) + \left[ -2a_2e^{-2a_2y} \left( y - a_2x^2 + \frac{1}{2a_2} \right) + e^{-2a_2y} \right] \cdot (-x) \\ &= -2a_2e^{-2a_2y}xy + 2a_2e^{-2a_2y}a_2x^3 + 2a_2e^{-2a_2y}xy - 2a_2e^{-2a_2y}a_2x^3 \\ &\quad + e^{-2a_2y}x - e^{-2a_2y}x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, quando consideramos o campo  $X^f$ , temos que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= DV(x, y).X^f(x, y) \\ &= -2a_2e^{-2a_2y}x(y - a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x) + \left[ -2a_2e^{-2a_2y} \left( y - a_2x^2 + \frac{1}{2a_2} \right) + e^{-2a_2y} \right] \cdot (-x) \\ &= -2a_2e^{-2a_2y}xy + 2a_2e^{-2a_2y}a_3x^4 + 2a_2e^{-2a_2y}a_2x^3 + 2a_2e^{-2a_2y}a_1x + +2a_2e^{-2a_2y}xy \\ &\quad - 2a_2e^{-2a_2y}x^3 + e^{-2a_2y}x - e^{-2a_2y}x \\ &= 2a_2e^{-2a_2y}x(a_3x^3 + a_1x) \\ &= 2a_2e^{-2a_2y}x^2(a_3x + a_1). \end{aligned}$$

Portanto,  $\dot{V}$  não muda de sinal no interior da faixa limitada pelas retas  $x = \pm\sqrt{\frac{-a_1}{a_3}}$ , e como  $\dot{V}(x, y) \neq 0, \forall x \neq 0$ , segue que  $X^f$  não possui órbitas fechadas no interior da faixa  $|x| \leq \sqrt{\frac{-a_1}{a_3}}$ , o que prova b.1).

Prova de b.2) Como estamos considerando  $a_1 < 0$ , a origem é uma singularidade repulsora. Do Teorema 3.1, juntamente com o Teorema de Poincaré-Bendixson,  $X^f$  possui no mínimo

uma órbita fechada. Veja Figura 3.22. Vamos mostrar agora que  $X^f$  possui no máximo duas órbitas fechadas.

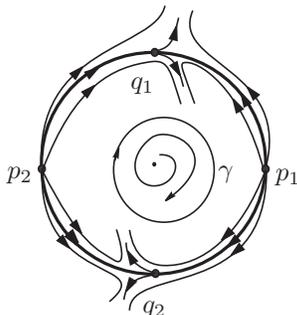


Figura 3.22: Um ciclo limite.

Seja  $\gamma$  a órbita fechada mais interna, ou seja, mais próxima da origem. Já que a origem é uma singularidade repulsora, segue que a órbita  $\gamma$  não pode ser instável. Assim, usando o Teorema 2.7, segue que

$$I = \int_{\gamma} \operatorname{div}(X^f) dt = \int_{\gamma} -(3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) dt \leq 0.$$

Suponha agora que  $\tilde{\gamma}$  seja outra órbita fechada de  $X^f$ . Então  $\gamma$  está no interior de  $\tilde{\gamma}$ . Queremos mostrar que

$$\tilde{I} = \int_{\tilde{\gamma}} \operatorname{div}(X^f) dt < I \leq 0.$$

Assim,  $\tilde{I} < 0$  e a partir desse fato, segue que cada órbita fechada que contém  $\gamma$  no interior é estável e isto implica, devido a estrutura do espaço de fase, que existem no máximo duas órbitas fechadas.

Demonstração de que  $\tilde{I} < I$ .

Observe, primeiramente, que  $\int_{\gamma} x dt = \int_{\gamma} (-y') dt = 0$ . Assim,

$$I = \int_{\gamma} \operatorname{div}(X^f) dt = \int_{\gamma} -(3a_3x^2 + a_1) dt$$

e similarmente

$$\tilde{I} = \int_{\tilde{\gamma}} \operatorname{div}(X^f) dt = \int_{\tilde{\gamma}} -(3a_3\tilde{x}^2 + a_1) dt.$$

Para compararmos  $I$  e  $\tilde{I}$  dividiremos estas integrais em quatro partes. Sejam  $p_i = (x_i, y_i)$  e  $\tilde{p}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , os pontos de interseção de  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  respectivamente, com as retas  $x = \pm\sqrt{\frac{-a_1}{3a_3}}$ , conforme a Figura 3.23.

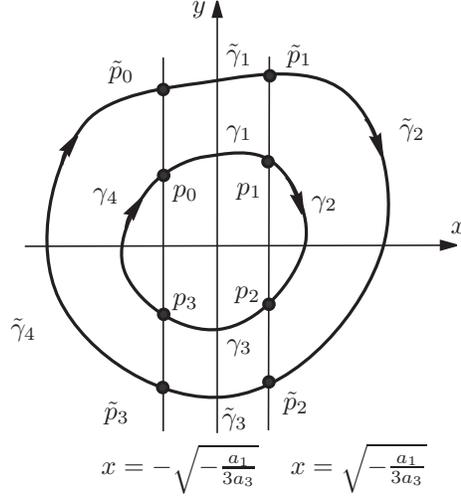


Figura 3.23: Curvas  $\gamma_i$  e  $\tilde{\gamma}_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Seja  $\gamma_i$  (resp.  $\tilde{\gamma}_i$ ),  $i = 1, 2, 3, 4$ , o arco de  $\gamma$  (resp.  $\tilde{\gamma}$ ) entre  $p_{i-1}$  e  $p_i$  (resp.  $\tilde{p}_{i-1}$  e  $\tilde{p}_i$ ), onde colocamos  $p_4 = p_0$  (resp.  $\tilde{p}_4 = \tilde{p}_0$ ).

Seja

$$I_i = \int_{\gamma_i} -(3a_3x^2 + a_1)dt$$

e

$$\tilde{I}_i = \int_{\tilde{\gamma}_i} -(3a_3\tilde{x}^2 + a_1)dt.$$

Desta forma, temos  $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$  e  $\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 + \tilde{I}_4$ . Mostraremos que  $\tilde{I}_i < I_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Considere, primeiro, as integrais  $I_1$  e  $\tilde{I}_1$ . As curvas  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  não interceptam  $G(f)$  na faixa limitada pelas retas  $x = \pm\sqrt{\frac{-a_1}{3a_3}}$ . De fato, caso  $\gamma_1$  (resp.  $\tilde{\gamma}_1$ ) interceptasse  $G(f)$  no interior da faixa  $x = \pm\sqrt{\frac{-a_1}{3a_3}}$ , teríamos que  $\gamma_1$  (resp.  $\tilde{\gamma}_1$ ) não interceptaria uma das retas  $x = \pm\sqrt{\frac{-a_1}{a_3}}$ , pois o campo  $X^f$  em  $G(f)$  é vertical e quando uma órbita cruza  $G(f)$  esta órbita volta ao eixo  $E_+^V$  ou  $E_-^V$ .

Conforme o item b.1), toda órbita de  $X^f$  intercepta as retas  $x = \pm\sqrt{\frac{-a_1}{3a_3}}$ , disso concluímos então que

$$\gamma_1 \cap G(f) = \emptyset \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}_1 \cap G(f) = \emptyset.$$

Desta forma, podemos parametrizar  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  na variável  $x$ .

Sejam  $(x, y_1(x)), (x, \tilde{y}_1(x))$  estas parametrizações. Podemos escrever

$$I_1 = \int_{\gamma_1} -(3a_3x^2 + a_1)dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{-(3a_3x^2 + a_1)}{y_1(x) - f(x)} dx$$

e

$$\tilde{I}_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{-(3a_3x^2 + a_1)}{\tilde{\gamma}_1(x) - f(x)} dx,$$

onde  $x_0 = -\sqrt{\frac{-a_1}{3a_3}}$  e  $x_1 = \sqrt{\frac{-a_1}{3a_3}}$ .

Desde que  $-(3a_3x^2 + a_1) > 0$  e  $\tilde{y}_1(x) - f(x) > y_1(x) - f(x) > 0$ , para  $x_0 < x < x_1$ , temos que

$$\frac{-(3a_3x^2 + a_1)}{\tilde{y}_1(x) - f(x)} < \frac{-(3a_3x^2 + a_1)}{y_1(x) - f(x)},$$

donde obtemos  $\tilde{I}_1 < I_1$ . De forma inteiramente análoga, podemos provar que  $\tilde{I}_3 < I_3$ .

Vamos considerar agora as integrais  $I_2$  e  $\tilde{I}_2$ . Como  $X^f$  é horizontal em  $E_+^V$  e  $E_-^V$ , pela Proposição 3.1, podemos considerar  $\gamma_2$  e  $\tilde{\gamma}_2$  parametrizadas na variável  $y$ .

Sejam  $(x_1(y), y), (\tilde{x}_1(y), y)$  tais parametrizações. Temos

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\gamma_2} -(3a_3x^2 + a_1)dt = \int_{y_1}^{y_2} \frac{-(3a_3(x_1(y))^2 + a_1)}{-x_1(y)} dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \left( 3a_3x_1(y) + \frac{a_1}{x_1(y)} \right) dy \\ &= - \int_{y_2}^{y_1} \left( 3a_3x_1(y) + \frac{a_1}{x_1(y)} \right) dy < 0, \end{aligned}$$

e similarmente

$$\tilde{I}_2 = - \int_{\tilde{y}_2}^{\tilde{y}_1} \left( 3a_3\tilde{x}_1(y) + \frac{a_1}{\tilde{x}_1(y)} \right) dy < 0$$

onde  $y_i, \tilde{y}_i, i = 1, 2$ .

Como  $\tilde{x}_1(y) > x_1(y)$  para  $y \in (y_2, y_1)$ , temos

$$3a_3\tilde{x}_1(y) + \frac{a_1}{\tilde{x}_1(y)} > 3a_3x_1(y) + \frac{a_1}{x_1(y)},$$

para  $y \in (y_2, y_1)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= - \int_{\tilde{y}_2}^{\tilde{y}_1} \left( 3a_3 \tilde{x}_1(y) + \frac{a_1}{\tilde{x}_1(y)} \right) dy \\ &< - \int_{y_2}^{y_1} \left( 3a_3 \tilde{x}_1(y) + \frac{a_1}{\tilde{x}_1(y)} \right) dy \\ &< - \int_{y_2}^{y_1} \left( 3a_3 x_1(y) + \frac{a_1}{x_1(y)} \right) dy \\ &= I_2. \end{aligned}$$

Similarmente, podemos provar que  $\tilde{I}_4 < I_4$ . Portanto, temos provado que  $\tilde{I} < I$ .

Prova de b.3) Suponha por contradição que  $X^f$  tenha duas órbitas fechadas. Seja  $\gamma$  a órbita mais próxima da origem e  $\tilde{\gamma}$  a outra órbita. Sejam  $D \subset \mathbb{R}^2$  o disco cuja fronteira é  $\gamma$  e  $A$  o anel cuja fronteira é  $\gamma \cup \tilde{\gamma}$ .

Como a origem é uma singularidade repulsora e  $\tilde{\gamma}$  é uma órbita estável, então a órbita  $\gamma$  atrai as órbitas contidas em  $D$  e repele as órbitas contidas em  $A$ . Segue que existem curvas fechadas  $C_1$  e  $C_2$ , tais que  $C_1 \subset D$  e  $C_2 \subset A$  e  $X^f$  é transversal a  $C_1$  e  $C_2$  apontando para o exterior de  $C_1$  e de  $C_2$ . Veja Figura 3.24.

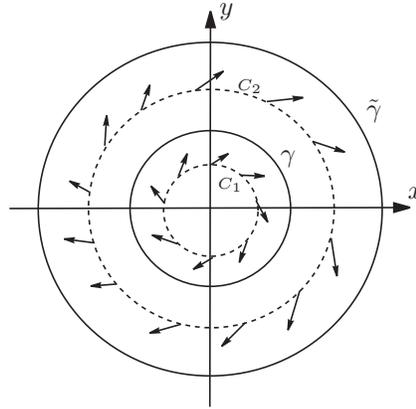


Figura 3.24: Curvas  $C_1$  e  $C_2$ .

Podemos agora perturbar  $f(x)$  por um termo  $\varepsilon x$ , onde  $\varepsilon$  é pequeno e obter um novo campo vetorial  $X^{\tilde{f}}(x, y) = (y - f(x) - \varepsilon x, -x)$  com três órbitas periódicas o que contradiz b.2). Esta perturbação pode ser obtida da seguinte forma: como  $\tilde{\gamma}$  é uma órbita hiperbólica,

existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que se  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , então  $\tilde{\gamma}$  é transformada em uma nova órbita fechada estável  $\bar{\gamma}$  de  $X^{\bar{f}}$ , que estará no exterior de  $C_2$ . O número  $\varepsilon_0$  pode ser suficientemente pequeno de tal forma que  $X^f$  continue apontando para o exterior de  $C_1$  e  $C_2$ .

Por outro lado, observamos que o vetor  $(-x, -y + f(x))$  é sempre perpendicular a  $X^f$ , sendo, portanto, perpendicular a  $\gamma$ . Assim,

$$\begin{aligned} \left( X^{\bar{f}}(x, y) \cdot (-x, -y + f(x)) \right) &= ((y - f(x) - \varepsilon x, -x) \cdot (-x, -y + f(x))) \\ &= -xy + xf(x) + \varepsilon x^2 - xf(x) + xy \\ &= \varepsilon x^2 > 0, \quad \forall x \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $X^{\bar{f}}$  aponta para o interior de  $\gamma$ , exceto nos dois pontos  $\gamma \cap \{(x, y) \mid x = 0\}$ , pois para  $x = 0$ ,  $X^{\bar{f}} = X^f$ . Pelo Teorema de Poincaré-Bendixson,  $X^{\bar{f}}$  tem pelo menos uma órbita fechada  $\gamma_1$  entre  $C_1$  e  $\gamma$  e no mínimo uma órbita fechada  $\gamma_2$  entre  $\gamma$  e  $C_2$ . Portanto,  $X^{\bar{f}}$  tem pelo menos três órbitas fechadas, o que contradiz o item b.1). Logo,  $X^f$  possui uma única órbita fechada. ■

# Capítulo 4

## O Número de Ciclos Limites do Sistema de Liénard

Neste capítulo, estudaremos ciclos limites de pequenas amplitudes do sistema

$$\begin{cases} x' = y - f(x), \\ y' = -g(x), \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $f$  é um polinômio de grau  $2n+1$  ou  $2n+2$  e  $g$  é um polinômio ímpar. Como resultado principal mostraremos que o sistema (4.1) tem no máximo  $n$  ciclos limites de pequenas amplitudes. Apresentaremos ainda condições sobre os coeficientes de  $f$  de forma a obter esses ciclos limites. O material exposto neste capítulo é baseado no artigo [7].

### 4.1 Primeiro coeficiente de Lyapunov

Iniciaremos nosso estudo com o seguinte sistema

$$X^f = \begin{cases} x' = y - f(x), \\ y' = -x, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde  $f$  é um polinômio de grau  $2n+1$  ou  $2n+2$ . Como vimos no Capítulo 3, a origem é a única singularidade para o sistema (4.2). O estudo da estabilidade segue da mesma forma que fizemos na Seção 3.1 do Capítulo 3. Assim, a origem é uma singularidade hiperbólica

para o sistema (4.2) quando  $a_1 \neq 0$ . Quando  $a_1 = 0$ , a estabilidade pode ser obtida encontrando o primeiro coeficiente de Lyapunov.

Considere uma função de Lyapunov como em (2.8). Segue da equação (2.22) que  $L(1) = -a_3$  simplesmente tomando  $p_{2,0} = -a_2$ ,  $p_{3,0} = -a_3$ ,  $q_{i,j} = 0, \forall i, j$ . Mas, como estamos interessados em calcular a base focal para o sistema (4.2), apresentaremos a demonstração do lema a seguir, a fim de dar uma ideia de como encontrarmos de modo geral os  $L(k)$  para  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Primeiramente, fixamos algumas notações. Assumiremos novamente

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y) + \dots \quad (4.3)$$

com

$$V_k(x, y) = \sum_{j=0}^k V_{k-j,j} x^{k-j} y^j.$$

**Definição 4.1** *Nesta escrita de  $V$ , dizemos que  $V_{ij}$  é par quando  $i$  for par e ímpar quando  $i$  for ímpar.*

Quando calculamos  $V$  ao longo das órbitas do sistema (4.2), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V} = \nabla V \cdot X^f &= (x + V_{3,x} + V_{4,x} + \dots + V_{k,x})(y - F(x)) - (y + V_{3,y} + V_{4,y} + \dots + V_{k,y})x \\ &= (-a_2 - V_{2,1})x^3 + (-2V_{1,2} + 3V_{3,0})x^2y + (2V_{2,1} - 3V_{0,3})xy^2 - V_{1,2}y^3 + \\ &\quad (-a_3 - 3V_{3,0}a_2 - V_{3,1})x^4 + (-2V_{1,2}a_2 + 4V_{4,0} + 2V_{2,2})x^3y + (-V_{1,2}a_2 + \\ &\quad 3V_{3,1} - 3V_{1,3})x^2y^2 + (2V_{2,2} - 4V_{0,4})xy^3 + V_{1,3}y^4 + O(\|x, y\|^5), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde os subscritos  $x$  e  $y$  denotam as derivadas parciais.

**Lema 4.1** *Considere o sistema (4.2). Então*

- a) *O primeiro coeficiente de Lyapunov em  $(0, 0)$  é dado por  $L(1) = -a_3$ .*
- b) *Se  $a_3 = 0$ , então  $V_{3,0} = V_{1,2} = V_{1,3} = V_{3,1} = 0$ .*

**Demonstração:** Considere o sistema (4.2) e  $V$  como em (4.3). Podemos escolher os coeficientes  $V_{3,0}, \dots, V_{0,3}$  tais que  $\dot{V}$  determinado em (4.4) não contenha termos cúbicos.

Para isso temos que satisfazer dois pares de equações:

$$\begin{cases} -V_{2,1} - a_2 = 0 \\ 2V_{2,1} - 3V_{0,3} = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -2V_{1,2} + 3V_{3,0} = 0 \\ V_{1,2} = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Escolhendo,  $V_{3,0} = V_{1,2} = 0$ ,  $V_{2,1} = -a_2$  e  $V_{0,3} = -\frac{2}{3}(a_2)$ . Então, temos  $V_3$  dado por

$$V_3 = -\frac{a_2}{3}x^2y - \frac{2}{3}a_2y^3.$$

Agora, temos que analisar os termos quárticos. Como observamos no Capítulo 2, Seção 2.7, não existe em geral coeficientes de  $V$  de tal forma que  $\dot{V}$  não contenha termos quárticos. Contudo, passamos agora a encontrar  $V_{4,0}, \dots, V_{0,4}$  e  $\eta_4$  tais que  $\dot{V}$  possa ser escrito na forma

$$\dot{V} = \eta_4(x^2 + y^2)^2 + O(\|x, y\|^5).$$

Para conseguir isso, temos que satisfazer cinco equações, as quais desacoplamos em dois grupos que apresentamos abaixo

$$\begin{cases} 4V_{4,0} - 2V_{2,2} = 2a_2^2 \\ 2V_{2,2} - 4V_{0,4} = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\eta_4 - V_{3,1} = a_3 \\ -2\eta_4 - 3V_{1,3} + 3V_{3,1} = 0 \\ -\eta_4 + V_{1,3} = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

No primeiro grupo de equações podemos escolher

$$V_{2,2} = V_{0,4} = 0 \quad \text{e} \quad V_{4,0} = \frac{1}{2}a_2^2,$$

enquanto que no segundo grupo de equações, tomamos

$$V_{3,1} = -\frac{1}{8}a_3 \quad \text{e} \quad \eta_4 = V_{1,3} - \frac{3}{8}a_3.$$

Com estas escolhas, temos

$$\dot{V} = -\frac{3}{8}a_3(x^2 + y^2)^2 + O(\|x, y\|^4).$$

Assim  $\eta_4 = L(1) = -a_3$  e temos a prova de a). Observamos que estamos interessados apenas no sinal de  $L(1)$ . Por isso tomamos simplesmente  $L(1) = -a_3$ . Agora é fácil ver que se  $a_3 = 0$ , temos que  $V_{3,0} = V_{1,2} = V_{2,1} = V_{0,3} = 0$  o que mostra b).

■

Como já comentamos no Capítulo 2, Seção 2.7, a estabilidade da origem é agora determinada pelo sinal de  $a_3$ . A origem é estável se  $a_3 > 0$  e instável se  $a_3 < 0$ . Se  $a_3 = 0$  (bem como  $a_1 = 0$ ) e quisermos estudar a estabilidade da origem temos que considerar os termos de ordens superiores.

## 4.2 $n$ Ciclos limites para o sistema de Liénard

Nesta seção mostraremos que  $L(j) = -a_{2j+1}$ , para  $j = 0, 1, \dots, k$  para o sistema (4.2) e como consequência obtemos uma maneira de exibirmos os  $n$  ciclos limites deste sistema. Antes de apresentarmos este resultado, daremos uma idéia da técnica usada para encontrarmos os coeficientes de Lyapunov.

**Definição 4.2** *Os termos de grau  $k$  em  $\dot{V}$  são denotados por  $D_k$ .*

Considerando a equação (4.4) para  $k \geq 3$  e fazendo os cálculos para obter  $D_k$  chegamos a

$$D_k = -a_{k-1}x^k - \sum_{j=2}^{k-1} a_{k-j}x^{k-j}V_{j+1,x} + yV_{k,x} - xV_{k,y}. \quad (4.7)$$

Como já comentamos na Seção 2.7 do Capítulo 2, para encontrarmos os coeficientes de Lyapunov, precisamos escolher  $V_{ij}$  e  $\eta_4, \eta_6, \dots$  de forma que para todo inteiro  $k$ , tenhamos

$$D_{2k+1} = 0 \text{ e } D_{2k} = \eta_{2k}(x^2 + y^2)^k.$$

Primeiramente, para assegurar que  $D_{2k+1} = 0$  é necessário resolver um conjunto de  $2(k+1)$  equações lineares para as  $2(k+1)$  variáveis  $V_{2k+1,0}, \dots, V_{0,2k+1}$ . Este conjunto de equações pode ser desacoplado em dois grupos de equações, cada um consistindo de  $k+1$  equações em  $k+1$  variáveis. Um grupo será determinado pelos  $V_{ij}$  pares e o outro grupo pelos  $V_{ij}$  ímpares, assim como foi feito no Lema 4.1 nos grupos dados por (4.5). Não é difícil ver que a matriz dos coeficientes, em ambos os casos, é triangular e não-singular. Assim os  $V_{ij}$  com  $i+j = 2k+1$  são unicamente determinados.

Quando consideramos os termos  $D_{2k}$ , existem mais dois grupos desacoplados de equações. No entanto, um grupo é composto por  $k+1$  equações em  $k$  variáveis, enquanto que o outro grupo consiste de  $k$  equações em  $k+1$  variáveis. Quando  $k=2$  estes grupos são exatamente os apresentados em (4.6). Os  $\eta_{2k}$  comparecem no primeiro grupo com os coeficientes determinados pelo triângulo de Pascal, assim este grupo pode ser resolvido unicamente. Para resolver o outro grupo, dividimos em dois casos. Para  $D_{4k}$ , tomamos  $V_{2k,2k} = 0$ , enquanto que para  $D_{4k+2}$  a equação média do grupo é dada por

$$(2k+2)V_{2k+2,2k} - (2k+2)V_{2k,2k+2} + Q = 0, \quad (4.8)$$

onde  $Q$  depende dos coeficientes  $a_{i's}$ . A equação (4.8) pode ser dividida em um par de equações do tipo

$$\begin{aligned} (2k+2)V_{2k+2,2k} + Q_1 &= 0, \\ -(2k+2)V_{2k,2k+2} + Q_2 &= 0, \end{aligned}$$

onde  $Q_1 + Q_2 = Q$  e  $Q_1, Q_2$  são escolhidos de modo que a simetria da solução resultante  $V_{ij}$  é mantida.

**Teorema 4.1** *Considere o sistema (4.2). Então,*

$$L(k) = -a_{2k+1},$$

para  $k = 0, 1, \dots, n$ . Além disso, o conjunto  $\{-a_1, -a_3, \dots, -a_{2n+1}\}$  é uma base focal.

**Demonstração:** A prova é por indução. Uma vez que o procedimento recursivo descrito acima envolve o cálculo de  $\eta_{2k}$  e, em seguida, os coeficientes de  $V_{2k}$  e  $V_{2k+1}$ , antes de prosseguir para o cálculo de  $\eta_{2k+2}$ . A indução será feita sobre a seguinte afirmação  $P_k$ :

*$L(j) = -a_{2j+1}$ , para  $j = 0, 1, \dots, k$ . Além disso, se  $a_{2j+1} = 0$ , para  $j = 0, 1, \dots, k$ , então os coeficientes ímpares de  $V_j$  com  $j \leq 2k+2$  são nulos.*

Segue do Lema 4.1 que  $P_1$  é verdadeiro. Suponhamos, então,  $P_k$  verdadeiro. Os coeficientes ímpares de  $V_{2k+3}$  são determinados em termos dos coeficientes de  $V_j$  com  $j \leq 2k+2$  pelas

seguintes equações:

$$\begin{aligned}
(2k+3)V_{2k+3,0} - 2V_{2k+1,2} &= - \sum_{j=1}^{2k+2} jV_{j,1} a_{2k+3-j}, \\
(2k+1)V_{2k+1,2} - 4V_{2k-1,4} &= - \sum_{j=1}^{2k} jV_{j,3} a_{2k+1-j}, \\
&\vdots \\
5V_{5,2k-2} - 2kV_{3,2k} &= - \sum_{j=1}^4 jV_{j,2k-1} a_{3-j}, \\
3V_{3,2k} - (2k+2)V_{1,2k+2} &= - \sum_{j=1}^2 V_{j,2k+1} a_{3-j}, \\
V_{1,2k+2} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Pela hipótese de indução,  $a_1 = a_3 = \dots = a_{2k+1} = 0$ , os coeficientes ímpares de todos os  $V_j$  com  $j \leq 2k+2$  são nulos. Desta forma o lado direito do sistema (4.9) são todos nulos. Consequentemente, os coeficientes ímpares de  $V_{2k+3}$  é nulo.

Em seguida,  $\eta_{2k+4}$  e os termos ímpares de  $V_{2k+4}$  são determinados pelas equações:

$$\begin{aligned}
-\eta_{2k+4} - V_{2k+3,1} &= \sum_{j=2}^{2k+4} jV_{j,0} a_{2k+5-j}, \\
- \binom{k+2}{1} \eta_{2k+4} + (2k+3)V_{2k+3,1} - 3V_{2k+1,3} &= \sum_{j=1}^{2k+2} jV_{j,2} a_{2k+3-j}, \\
- \binom{k+2}{2} \eta_{2k+4} + (2k+1)V_{2k+1,3} - 5V_{2k-1,5} &= \sum_{j=1}^{2k} jV_{j,4} a_{2k+1-j}, \\
&\vdots \\
- \binom{k+2}{k+1} \eta_{2k+4} + 3V_{3,2k+1} - (2k+3)V_{1,2k+3} &= \sum_{j=1}^2 jV_{j,2k+2} a_{3-j}, \\
-\eta_{2k+4} + V_{1,2k+3} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Novamente pela hipótese de indução, o lado direito da primeira equação em (4.10) é  $a_{2k+3}$ , enquanto que o lado esquerdo de todas as outras equações são nulas. Resolvendo a última

equação de (4.10) obtemos  $-\eta_{2k+4} = V_{1,2k+3}$ . Substituindo este valor nas demais equações do sistema (4.10) chegamos ao final que

$$\eta_{2k+4} = -\lambda a_{2k+3},$$

com  $\lambda > 0$ . Assim, como cada coeficiente ímpar de  $V_{2k+4}$ . Deduzimos assim, que se  $P_k$  é verdadeiro, então

$$L(k+1) = \eta_{2k+4} = -a_{2k+3},$$

e os coeficientes ímpares de  $V_{2k+4}$  são todos múltiplos de  $a_{2k+3}$ .

Estabelecendo assim a indução, e concluimos que  $L(k) = -a_{2k+1}$ , para todo  $k = 0, 1, \dots, n$ . Para completar a prova do teorema basta mostrar que a origem é um centro para (4.2) quando  $L(0) = L(1) = \dots = L(n) = 0$ . Isto segue imediatamente pela condição de simetria para um centro. De fato, se  $a_{2k+1} = 0$  para  $k = 0, 1, \dots, n$  então, o sistema (4.2) é invariante pela transformação:

$$(x, y, t) \rightarrow (-x, y, -t),$$

ou seja, o sistema (4.2) é simétrico com respeito ao eixo  $y$ . Como a origem da linearização do sistema (4.2) é um centro, concluimos que a origem do sistema não linear também é um centro.

Concluimos assim que  $\{-a_1, \dots, -a_{2n-1}\}$  é uma base focal.

■

**Teorema 4.2** *Considere o sistema (4.2). Então:*

- a) *Existem no máximo  $n$  ciclos limites de pequenas amplitudes.*
- b) *Se  $a_1, a_3, \dots, a_{2n+1}$  são escolhidos de forma que*

$$a_{2k-1}a_{2k+1} < 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{4.11}$$

e

$$|a_1| \ll |a_3| \ll \dots \ll |a_{2n+1}| \tag{4.12}$$

*então existem  $n$  ciclos limites de pequenas amplitudes.*

**Demonstração:** a) Suponhamos  $x > 0$ . Para  $(x < 0)$  os argumentos são semelhantes. Considere a órbita passando por  $(x, 0)$ . As Proposições 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 asseguram que esta órbita intercepta o eixo  $y$ . O próximo encontro desta órbita com o eixo  $x$ -positivo é dado por  $(h(x), 0)$ , sendo que  $h(x)$  está definida para todo  $x$  suficientemente pequeno e é suave. A função

$$d(x) = h(x) - x$$

está bem definida para  $x$  suficientemente pequeno e é conhecida na literatura como função separação. No livro [3], página 518, temos o seguinte resultado relacionando as derivadas da função separação com os valores focais  $\eta_{2k}$ :

$$d^{(2k-1)}(0) = (2k - 1)!2\pi\eta_{2k}.$$

Desta forma, se  $\dot{V} = \eta_{2(n+1)}(x^2 + y^2)^{n+1} + O(\|x, y\|^{2n+3})$ , então  $d(0) = d^{(1)}(0) = \dots = d^{(2n)}(0) = 0$ . Assim, pequenas perturbações nos coeficientes de  $f$ , do sistema (4.2) produz no máximo  $(2n + 1)$  zeros da função  $d$ . Como a origem continua sendo uma singularidade e um ciclo limite corresponde a um par de zeros de  $d$  (um positivo, um negativo), então no máximo  $n$  ciclos limites são gerados.

b) Suponha inicialmente que

$$a_1 = a_3 = \dots = a_{2n+1} = 0.$$

Assim do Teorema 4.1, a origem é um centro. Agora escolha  $a_{2n+1}$  não nulo. Sabemos que a origem é estável se  $a_{2n+1} > 0$  e instável se  $a_{2n+1} < 0$ . Tome  $a_{2n+1} > 0$ . O mesmo argumento funciona se  $a_{2n+1} < 0$ . Assim, podemos escrever  $\dot{V}$  da forma

$$\dot{V} = a_{2n+1}(x^2 + y^2)^{n+1} + O(\|x, y\|^{2n+3}).$$

Como a origem é estável, o fluxo aponta para o interior das curvas de nível de  $V$ , que estão contidos em uma vizinhança suficientemente pequena da origem, seja  $\Gamma$  uma destas curvas. Agora escolha  $a_{2n-1} < 0$ . A origem torna-se instável e, se  $|a_{2n-1}|$  é pequeno o suficiente, o fluxo ainda é transversal e aponta para o interior da curva de nível  $\Gamma$ . Portanto, temos criado uma região positivamente invariante a qual não contém ponto

singular. Segue do Teorema de Poincaré-Bendixson que existe um ciclo limite no interior de  $\Gamma$ . Sucessivamente escolhendo  $a_{2n-3}, \dots, a_1$  tal que cada  $a_{2k-1}$  tem o sinal oposto a  $a_{2k+1}$  e pequeno o suficiente, a estabilidade na origem é revertida  $n$  vezes, surgindo  $n$  ciclos limites de pequenas amplitudes que bifurcam da origem. A parte b) está provada. ■

**Exemplo 4.1** *O sistema*

$$\begin{cases} x' = y + x - 12x^3 + 25x^5, \\ y' = -x, \end{cases} \quad (4.13)$$

*apresenta dois ciclos limites que podem ser vistos na Figura 4.1.*

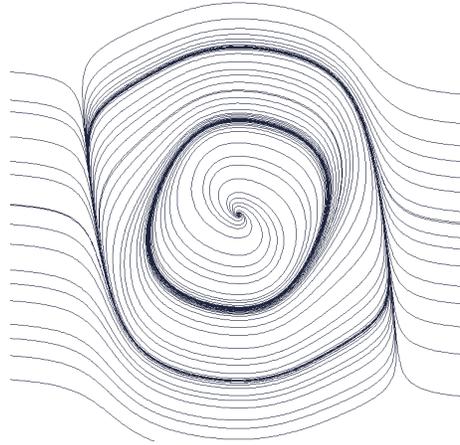


Figura 4.1: Dois ciclos limites do sistema (4.13).

A Figura 4.1 foi gerada no programa ODEinR2. Este programa pode ser obtido em [18].

Mostraremos agora que podemos estender o Teorema 4.2 para o sistema

$$\begin{cases} x' = y - (a_d x^d + \dots + a_1 x), \\ y' = b_1 x + b_3 x^3 + \dots + b_{2m+1} x^{2m+1}, \end{cases} \quad (4.14)$$

quando  $b_1 > 0$ .

**Teorema 4.3** *Considere o sistema (4.14). Então, os coeficientes de Lyapunov são dados por*

$$L(k) = -a_{2k+1}, \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

**Demonstração:** Fazendo a transformação

$$(x, y, t) \mapsto (x, \sqrt{b_1^{-1}}y, \sqrt{b_1}t),$$

podemos supor, sem perda de generalidade, que  $b_1 = 1$ . Seguiremos a prova do Teorema 4.1 passo a passo. Primeiramente, os cálculos utilizados no Lema 4.1 mantêm-se inalterados. A quantidade  $D_k$ , para  $k \geq 3$ , considerando o sistema (4.14), é dada pela soma da expressão (4.7) com

$$\sum_{j=3}^{k-1} b_j x^j V_{k+1-j,y},$$

onde adotamos por convenção que  $b_j = 0$  se  $j$  é par. Os sistemas de equações apresentadas na prova do Teorema 4.1 (para  $\eta_{2k+2}$  e os coeficientes ímpares de  $V_{2k+3}$  e  $V_{2k+4}$ ) mantêm-se inalterados. Consequentemente os coeficientes de Lyapunov são independentes dos  $b_i$ . Portanto, novamente,

$$L(k) = -a_{2k+1}, \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

■

**Teorema 4.4** *Considere o sistema (4.14). Então:*

- a) *Existem no máximo  $n$  ciclos limites de pequenas amplitudes.*
- b) *Se  $a_1, a_3, \dots, a_{2n+1}$  são escolhidos de forma que*

$$a_{2k-1}a_{2k+1} < 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

e

$$|a_1| \ll |a_3| \ll \dots \ll |a_{2n+1}|$$

*então existem  $n$  ciclos limites de pequenas amplitudes.*

A prova segue as mesmas linhas da prova do Teorema 4.2.

# Bibliografia

- [1] Andronov, A. A., *Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues*, C.R. Acad. Sci. Paris, **189** (1929), 559–561.
- [2] Bautin, N. N., *On the number of limit cycles which the variations of coefficients from an equilibrium state of the type focus or center*, Amer. Math. Soc. Translations, **100** (1954), 1–19.
- [3] Chicone, C., *Ordinary Differential Equations with Applications*, Applied Mathematical, Springer-Verlag, New York, (1999).
- [4] Dumortier, F., *Singularities of Vector Fields on the Plane*. Monografias de Matemática, **32**, IMPA, (1978), pag.41.
- [5] Dumortier, F., Llibre, J., Artés, J. C., *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer Verlag, New York, (2006).
- [6] Chengzhi, Li, Llibre, J., *Uniqueness of Limit Cycles For Liénard Differential Equations of Degree Four*, Preprint, (2011).
- [7] Blows, T. R., Lloyd, N. G., *The number of small-amplitude limit cycles of Liénard equations*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **95** (1984), 359–366.
- [8] Dulac, H., *Sur les cycles limites*, Bull. Soc. Math. France, **51** (1923), 45-188.
- [9] Dumortier, M., De Maesschalck, P., *Classical Liénard equations of degree  $n \geq 6$  can have  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 2$  limit cycles*, Journal of Differential Equations, **250** (2011), 2162–2176.

- [10] Dumortier, F., Panazzolo, D., Roussarie, R., *More limit cycles than expected in Liénard equations*, Proceedings of the American Mathematical Society, **135** (2007), 1895–1904.
- [11] Écalle, J., *Introduction aux fonctions analysable et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Actualités Mathématiques. Hermann, Paris, (1992).
- [12] Hilbert, D., *Mathematical problems*, Reprinted from Bull. Amer. Math. Soc., **8** (1902), 473–479.
- [13] Hubbard, J. H., West, B. H., *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach, Higher-Dimensional Systems* (Texts in Applied Mathematics), Springer Verlag, New York, (1991).
- [14] Liénard, A., *Etude des oscillations entretenues*. Rev. Générale de l'Electricité, **23** (1928), 335–357.
- [15] Lins Neto, A., de Melo, W., Pugh, C. *On Liénard equations*, Lectures Notes in Math., **597**, Springer, Berlin (1977), 335–357.
- [16] Lloyd, N. G., Lynch, S., *Small-amplitude limit cycles of certain Liénard systems*, Proceedings of the Royal Society London A, **418** (1988), 199–208.
- [17] Ilyashenko, Y., *Finiteness theorems for limit cycles*, American Mathematical Society, Providence, RI, (1993).
- [18] Montesinos-Amilibia, A. ODEinR2, software disponível em <http://www.uv.es/montesin>.
- [19] Poincaré, H., *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, J. Math. Pures Appl., **7** (1881), 375–422.
- [20] Smale, S., *Mathematical Problems for the Next Century*, Mathematical Intelligencer, **20** (2) (1998), 7–15.

- [21] Songling, Shi, *A Concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems*, Sci. Sinica Ser. A, **23** (1980), 153–158.
- [22] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).
- [23] Van der Pol, B., *Sur les oscillations de relaxation*. Rev. Générale de l'Électricité, **22** (1927), 489–490.
- [24] Yan-Qian Ye, Chi Y. Lo, *Theory of Limit Cycles*, Trans. Math. Monographs, AMS, Providence, RI **66**, (1986).