

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

**Estudo do Teorema de Bautin para Campos
Quadráticos no Plano**

Larissa Carvalho Vilas Boas

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Co-orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias

ITAJUBÁ, 6 DE MAIO DE 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Estudo do Teorema de Bautin para Campos Quadráticos no Plano

Larissa Carvalho Vilas Boas

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Co-orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática
Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em
Física e Matemática Aplicada

ITAJUBÁ – MG

6 DE MAIO DE 2011

*Dedico esta dissertação aos meus exemplos de vida:
Aos meus avós Dé e Geralda, sei que sentirei a forte presença de vocês no momento em
que eu receber o título de mestre, vou sentir também a sensação daquele abraço caloroso
que vocês sempre me davam, o qual é inesquecível. Saudades eternas!!!
À minha mãe Fátima e ao meu Pai Adilson.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus, àquele que me deu a vida! Obrigada, Senhor, pois em todos os momentos o Senhor esteve presente abençoando os caminhos que percorri.

“Como são felizes os que em ti encontram sua força, e os que são peregrinos de coração” Salmo 84:5.

Ao meu orientador, Prof. Luis Fernando, antes de mais nada pela paciência, pela compreensão, pelos ensinamentos e dicas de pesquisa. Seus ensinamentos e sugestões foram essenciais e acabaram por constituir-se neste trabalho. Luis Fernando, muito obrigada!

Ao Prof. Fábio, meu co-orientador por sua ajuda e interesse que contribuíram também para este trabalho.

À minha querida mãe por sempre estar comigo em todos os momentos. Obrigada mãe, sei que esses dois anos não foram fáceis, perdemos as pessoas mais incríveis de nossa vida, mas Deus nos ajudou e conseguimos ir em frente. Quero agradecer pelo carinho, pela compreensão, por todo o amor que você me deu para que eu pudesse superar isto tudo e ter a oportunidade de terminar o mestrado. Você é tudo pra mim!!! Mãe, você faz parte desta conquista.

Aos meus avós Dé e Geralda, momentos únicos eu vivi com vocês, e como eu sempre falo são momentos que eu jamais vou esquecer. Meu Dé, sempre comigo. Lembro-me que quando eu era mais nova, eu pedia a ele para sentar ao meu lado nas horas de estudo, porque assim eu estudava melhor e ele, é claro, com toda paciência e carinho ficava ao meu lado. Minha avó Geralda, sempre com aquele olhar de mãe, com aquele carinho enorme, quero agradecer por você ter sido minha segunda mãe, momentos maravilhosos eu vivi com você. Sei que agora vocês dois estão pertinho do Papai do céu mas vão estar

sempre no meu coração. Meus amores eternos!!

Aos meus queridos: pai e irmãs Moísa e Camila, obrigada pelo carinho, por sempre torcerem por mim, por toda ajuda, vocês sempre vão fazer parte da minha vida!!

A todos de minha família, por sempre torcerem por mim!

Aos meu amigos que tanto fazem falta aqui, em especial: Greice, Lilinha, às amigas fadas: Érica, Ellen, Bianca, Michele, Sílvia, Ray.

Aos meu amigos que fiz em Itajubá, em especial: Aos da Pós-Graduação: Ana, Tia Vanessa, tenho muito a agradecer vocês duas (vocês sabem do que estou falando); Rafael, Ju, P.A., Adriano e Natália, passamos muito tempo juntos, jamais vou me esquecer de vocês e posso dizer que fiz amizades eternas. P.A. muito obrigada pela ajuda e incentivo; Élcio, Sebastião, Sinval, Adhimar, Nivaldo, Carlos e Vítor, que mesmo a convivência tenha sido pouca, a amizade permanece até hoje. Às amigas de república e à Carol, pelo carinho, pela amizade, pelo incentivo!!!

Aos amigos que aqui não mencionei, mas sabem que fazem parte da minha vida, muito obrigada!!

“Amigo é coisa pra se guardar

Debaixo de sete chaves

Dentro do coração...”

Não poderia deixar de agradecer uma pessoa que entrou na minha vida no finalzinho do mestrado e se tornou muito especial pra mim, meu namorado Lucas. Obrigada pelo carinho, pelo incentivo, por todo amor!! Com você meus dias ficaram mais felizes!!!

Aos professores do ICE, em especial: ao querido Prof. Baêta, sempre me incentivando com suas palavras gentis e alegres, obrigada pelos sorrisos; à Prof. Márcia.

Aos professores da UFSJ, em especial: ao Prof. Raposo, ao Prof. Ronaldo e ao Prof Francinildo, pelo apoio, pelo incentivo.

À CAPES-REUNI pelo apoio financeiro.

À todos que direta ou indiretamente contribuíram para este sonho, meus sinceros agradecimentos.

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar o Problema Foco–Centro para sistemas de equações diferenciais definidas por campos vetoriais quadráticos planares. Resolveremos tal problema por dois métodos: o método de Frommer e o método de Bautin.

Palavras–chave: Campos quadráticos planares, problema foco–centro, Bautin, Frommer.

Abstract

The main goal of this work is the study of the Center–Focus Problem for systems defined by quadratic vector fields on the plane. We solve this problem by two approaches: The Frommer’s method and the Bautin’s method.

Keywords: Planar quadratic vector fields, center–focus problem, Bautin, Frommer.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Estrutura da dissertação	2
2 Elementos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais no Plano e o Problema Foco–Centro	5
2.1 Elementos da Teoria Qualitativa	5
2.2 O Problema Foco–Centro	7
3 Valores Focais e Coeficientes de Lyapunov	9
3.1 Multiplicidade de um foco múltiplo e valores focais	9
3.2 Cálculo do valor focal de um foco múltiplo	17
3.3 O caso de um sistema analítico	22
4 O Trabalho de Frommer	33

5	O Teorema de Bautin	49
6	Conclusões	86
	Bibliografia	87

Lista de Figuras

2.1	Interpretação geométrica do Teorema de Hartman–Grobman	7
3.1	Figura ilustrativa da definição de função sucessão.	12
4.1	Figura ilustrativa das nullclines.	42

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

O estudo de campos de vetores polinomiais planares é um estudo de grande valia. Em uma primeira leitura sobre o assunto poderíamos julgar essa abordagem restritiva, mas logo nos convencemos da complexidade dos problemas que aparecem. O que pode justificar tal afirmativa, é, por exemplo, o 16º Problema de Hilbert. O que podemos falar sobre este problema?

É um problema bastante interessante e muito famoso e que ainda não foi resolvido. Foi proposto em 1900 no Segundo Congresso Internacional de Matemática [6], pelo famoso matemático Hilbert. Este problema pede a determinação do número máximo de ciclos limites, H_n , em um sistema polinomial, como dado abaixo,

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i+j=0}^m a_{ij} x^i y^j, \\ \dot{y} = \sum_{i+j=0}^k b_{ij} x^i y^j, \end{cases} \quad (1.1)$$

em função do grau n , que é definido como sendo o máximo entre os graus m e k que aparecem em (1.1).

Dados $a = (a_{00}, a_{10}, \dots, a_{0m})$ e $b = (b_{00}, b_{10}, \dots, b_{0k})$ denotamos por (a, b) os coeficientes de (1.1). Considere $H_n(a, b)$ o número de ciclos limites de (1.1) com coeficientes

(a, b) . Um teorema devido a Dulac [4] afirma que $H_n(a, b) < \infty$. O número de Hilbert H_n é, então, igual ao $\sup H_n(a, b)$, para todo (a, b) . No entanto, foi encontrado um erro no Teorema de Dulac citado acima [7]. A finitude de $H_n(a, b)$, para (a, b) fixo, foi mais recentemente estabelecida por Ilyashenko [8] e Écalle [5]. Vale ainda mencionar que as provas destes dois últimos resultados não são de fáceis acessos. Veja comentário de Smale em [11].

Agora, como sistemas lineares em \mathbb{R}^2 não tem ciclo limite, $H_1 = 0$. Entretanto, mesmo para as classes mais simples de sistemas não lineares, como por exemplo (1.1) com $n = 2$, o número de Hilbert H_2 não está determinado. Em 1952, o matemático russo Bautin, provou que qualquer sistema polinomial quadrático planar, como dado em (1.1) com $n = 2$, tem no máximo três ciclos limites bifurcando da origem. Veja este resultado em [2]. Nesta dissertação daremos ênfase a este resultado e exibiremos com detalhes sua prova. Sendo assim, por algum tempo acreditava-se que $H_2 = 3$. No entanto, em 1980, Songling apresentou um exemplo de sistema quadrático no plano com pelo menos quatro ciclos limites, veja [12]. Portanto, $H_2 \geq 4$. Porém, ainda não temos a prova do valor exato H_2 .

Com relação aos sistemas cúbicos, tudo que podemos dizer até agora é que Maoman e outros [10] produziram um exemplo de sistema cúbico com onze ciclos limites. Posteriormente, um exemplo com doze ciclos limites [15] foi apresentado. No entanto, não entraremos em detalhes nestes casos, pois, nesta dissertação, exibiremos apenas resultados relacionados a sistemas quadráticos. Em particular, estaremos interessados no Problema Foco–Centro, que grosseiramente falando, trata de decidir se um equilíbrio de um sistema planar, cuja linearização é um centro, é um foco ou é um centro.

1.2 Estrutura da dissertação

Para uma visão completa desta dissertação, os capítulos subsequentes encontram-se assim organizados:

- Capítulo 2: Apresentaremos neste capítulo elementos da Teoria Qualitativa das

Equações Diferenciais, auxiliando-nos na compreensão do problema foco–centro que será também introduzido neste capítulo. O problema foco–centro é um dos mais importantes da Teoria Qualitativa.

- Capítulo 3: O estudo da estabilidade de um ponto de equilíbrio do tipo foco–centro gerou um grande número de trabalhos durante o século XX. Já em 1893, Lyapunov publicou um artigo onde uma solução parcial para este problema foi dada. Ele definiu as funções que determinam a estabilidade e que agora chamamos coeficientes de Lyapunov. Neste capítulo trataremos destes coeficientes de Lyapunov. A maior dificuldade com esses coeficientes é a sua alta complexidade e encontrá-los explicitamente torna-se um problema computacional.
- Capítulo 4: Neste capítulo exibiremos um número finito de condições algébricas para que um ponto de equilíbrio de um sistema quadrático seja um centro. Este resultado foi obtido pelo matemático Frommer e pode ser enunciado da seguinte forma:

Considere o sistema quadrático planar

$$\begin{cases} \dot{x} = y + b x^2 + (2c + \beta) xy + d y^2, \\ \dot{y} = -[x + a x^2 + (2b + \alpha) xy + c y^2]. \end{cases}$$

Este sistema possui um centro na origem se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:

1. $\alpha = \beta = 0$;
2. $a + c = b + d = 0$;
3. $a = c = \beta = 0$ (ou equivalentemente, $b = d = \alpha = 0$);
4. $a + c = \beta = \alpha + 5(b + d) = bd + 2d^2 + a^2 = 0, b + d \neq 0$
(ou equivalentemente, $b + d + \alpha = \beta + 5(a + c) = ac + 2a^2 + d^2 = 0, a + c \neq 0$).

- Capítulo 5: Neste capítulo exibiremos um resultado, similar ao enunciado acima, a partir dos estudos do matemático Bautin. Veremos que a partir das condições do

Teorema de Frommer chegaremos nas condições do Teorema de Bautin. É nosso principal objetivo demonstrar o Teorema de Bautin enunciado da seguinte forma:

Consideremos o sistema quadrático planar

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2, \\ \dot{y} = x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2, \end{cases}$$

com $\lambda_1 = 0$. A origem é um centro se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:

1. $\lambda_3 = \lambda_6$;
2. $\lambda_2 = \lambda_5 = 0$;
3. $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$;
4. $\lambda_5 = \lambda_4 + 5(\lambda_3 - \lambda_6) = \lambda_3\lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2 = 0$.

Veremos também que, a partir deste resultado, podemos obter um outro sobre ciclos limites. Este resultado será apresentado neste capítulo da seguinte forma:

Se um campo quadrático planar possui um ponto de equilíbrio do tipo foco-centro, então fazendo pequenas variações dos seus coeficientes o campo pode produzir não mais do que três ciclos limites em uma vizinhança deste ponto de equilíbrio. Há posições de equilíbrio em que a ordem de ciclicidade com respeito ao espaço de coeficientes (a, b) é zero, um, dois ou três.

Esta formulação também é uma contribuição do matemático Bautin e neste capítulo apresentaremos sua prova.

Capítulo 2

Elementos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais no Plano e o Problema Foco–Centro

2.1 Elementos da Teoria Qualitativa

Nesta seção apresentaremos definições e teoremas necessários para a compreensão do Problema Foco–Centro que será exposto a seguir. As definições e teoremas que apresentaremos no corrente capítulo foram baseados no livro de Kuznetsov [9].

Definição 2.1.1 *Consideremos o sistema de equações diferenciais*

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

*em que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é suave, ou seja, C^∞ e $x_0 \in \mathbb{R}^2$ um ponto de equilíbrio deste sistema. O ponto de equilíbrio x_0 é dito ser **hiperbólico** se a matriz Jacobiana $A = Df(x_0)$ possuir todos os autovalores com partes reais diferentes de zero. Se a parte real de algum autovalor for nula o equilíbrio é dito ser não-hiperbólico.*

Definição 2.1.2 *Um ponto de equilíbrio hiperbólico x_0 do sistema (2.1) é dito ser um **nó***

se a matriz Jacobiana $A = Df(x_0)$ possuir 2 autovalores reais de mesmo sinal. Se este sinal for negativo, x_0 é dito ser um **nó atrator** e se for positivo, um **nó repulsor**.

Definição 2.1.3 Um ponto de equilíbrio hiperbólico x_0 do sistema (2.1) é dito ser um **foco**, se a matriz Jacobiana $A = Df(x_0)$ possuir 2 autovalores complexos conjugados com partes reais não nulas. A estabilidade do foco é dada pelo sinal da parte real destes autovalores, se for negativa temos que x_0 é um **foco atrator**, se a parte real for positiva temos que x_0 é um **foco repulsor**.

Definição 2.1.4 Um ponto de equilíbrio x_0 do sistema (2.1) é um **foco fraco**, ou simplesmente um **foco**, se for localmente conjugado a um foco hiperbólico.

Definição 2.1.5 Um ponto de equilíbrio x_0 do sistema (2.1) é dito ser um **centro** se existir uma vizinhança V_{x_0} de x_0 totalmente preenchida por órbitas fechadas. Uma condição necessária para isso, mas não suficiente, é a seguinte: a matriz Jacobiana $A = Df(x_0)$ possuir 2 autovalores imaginários puros e não nulos.

Teorema 2.1.1 (Hartman–Grobman) Consideremos o sistema $\dot{x} = f(x)$ com f suave, ou seja, C^∞ e $x_0 \in \mathbb{R}^2$ como ponto de equilíbrio deste sistema. Consideremos também que este ponto de equilíbrio seja hiperbólico. Então, existem vizinhanças U de x_0 e W de 0 em \mathbb{R}^2 tais que $\dot{x} = f(x)$ (restrito a U) é topologicamente conjugado a $\dot{x} = Df(x_0)x$, onde $Df(x_0)$ representa a matriz Jacobiana aplicada no ponto de equilíbrio x_0 .

Uma ilustração do teorema acima pode ser vista na Figura 2.1.

A demonstração deste teorema é dada em [13].

Observação 2.1.1 O Teorema de Hartman–Grobman afirma que se um equilíbrio for hiperbólico, o sistema linearizado descreve o comportamento do sistema não-linear próximo do ponto de equilíbrio, ou seja, o comportamento numa vizinhança de um ponto de equilíbrio é sempre modelado pelo comportamento da parte linear.

Agora já estamos em condições de introduzirmos o Problema Foco–Centro de nosso interesse.

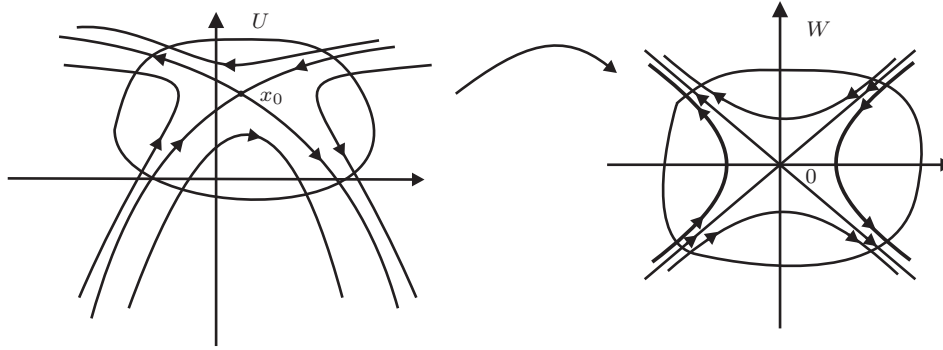


Figura 2.1: Interpretação geométrica do Teorema de Hartman–Grobman

2.2 O Problema Foco–Centro

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (2.2)$$

onde f e g são funções analíticas. Suponha que a origem $(0, 0)$ seja um ponto de equilíbrio isolado, ou seja, existe uma vizinhança contendo a origem na qual ela é o único ponto de equilíbrio. Considere o campo de vetores $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ que define (2.2). Suponha que a matriz Jacobiana $J = DF(0, 0)$ tenha autovalores complexos conjugados. (Esta última hipótese (essencial) garante que numa vizinhança suficientemente próxima da origem, as soluções de (2.2) circulam a origem.)

O Problema Foco–Centro é, sob as hipóteses anteriores, decidir se a origem é um foco (repulsor ou atrator) ou um centro.

Pelo Teorema de Hartman–Grobman, o problema foco-centro citado acima, é de fácil solução se a origem for um ponto de equilíbrio hiperbólico, ou seja, os autovalores da matriz Jacobiana $J = DF(0, 0)$ são da forma $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Neste caso, por definição, a origem é um foco atrator ($\alpha < 0$) ou um foco repulsor ($\alpha > 0$).

Considere os sistemas

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2, \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x} = y + x^3, \\ \dot{y} = -y + y^3. \end{cases}$$

Em ambos a origem é um equilíbrio não hiperbólico e os autovalores de $DF(0,0)$ tem a forma $\lambda_{1,2} = \pm i$. No primeiro caso a origem é um centro, enquanto que no segundo caso é um foco repulsor.

É de nosso interesse o Problema Foco–Centro quando os autovalores da matriz Jacobiana $J = DF(0,0)$ são da forma $\lambda_{1,2} = \pm i\beta, \beta \neq 0$. Notemos que a origem neste caso é um equilíbrio não hiperbólico e, portanto, o sistema linearizado não descreve o comportamento do sistema não–linear próximo da origem. Veremos então nos Capítulos 4 e 5 como resolver efetivamente este problema para o caso dos campos quadráticos planares.

Capítulo 3

Valores Focais e Coeficientes de Lyapunov

Neste capítulo trataremos de sistemas de equações diferenciais definidos por campos polinomiais planares e exibiremos um método para calcularmos os coeficientes de Lyapunov relacionados a estes sistemas. Os coeficientes de Lyapunov tem uma relação profunda com a teoria de estabilidade de equilíbrios de sistemas de equações diferenciais. Nossos estudos foram baseados em [1].

3.1 Multiplicidade de um foco múltiplo e valores focais

Consideremos um sistema de equações de classe C^m , $m \geq 1$,

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + \Phi(x, y), \\ \dot{y} = cx + dy + \Psi(x, y), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde Φ e Ψ são funções analíticas numa vizinhança da origem e $\Phi(0, 0) = \Psi(0, 0) = 0$. Consideremos o campo de vetores $G(x, y) = (ax + by + \Phi(x, y), cx + dy + \Psi(x, y))$ que define o sistema (3.1). É simples ver que a origem é ponto de equilíbrio do sistema (3.1). Suponhamos que a matriz Jacobiana $J = DG(0, 0)$ tenha autovalores complexos

imaginários puros da forma $\pm i\beta$, $\beta \neq 0$. Fazendo uma mudança de variáveis conveniente podemos supor que o sistema (3.1), em uma vizinhança da origem, tenha a forma canônica

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta y + \Phi(x, y), \\ \dot{y} = \beta x + \Psi(x, y). \end{cases} \quad (3.2)$$

Notemos que esta mudança de coordenadas é a que coloca a matriz Jacobiana $J = DG(0, 0)$ na forma canônica de Jordan e como se trata de uma mudança de coordenadas linear, temos que as hipóteses sobre as funções Φ e Ψ não se alteram. O sistema (3.2) é um caso particular do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y + \Phi(x, y), \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y + \Psi(x, y). \end{cases} \quad (3.3)$$

Estudaremos então o sistema (3.3) com interesse posterior em $\alpha = 0$. Escrevendo este sistema em coordenadas polares (r, θ) introduzidas pelas relações

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

obtemos

$$\begin{cases} \dot{r} = F(r, \theta) = \alpha r + (r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \Psi(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \beta + \phi(r, \theta) = \beta + \frac{\Psi}{r} \cos \theta - \frac{\Phi}{r} \sin \theta, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde $\Psi = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $\Phi = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Reduziremos o sistema (3.4) à equação

$$\frac{dr}{d\theta} = R(r, \theta) = \frac{F(r, \theta)}{\beta + \phi(r, \theta)}. \quad (3.5)$$

Lema 3.1.1 *A função*

$$R(r, \theta) = \frac{F(r, \theta)}{\beta + \phi(r, \theta)}$$

definida em (3.5) tem derivadas parciais contínuas com respeito a r até a ordem m na região $-\infty < \theta < \infty$, $0 \leq |r| < \delta$, onde δ é um número real suficientemente pequeno.

A demonstração do lema acima pode ser encontrada em [1].

Pelo Lema 3.1.1, R tem derivadas parciais contínuas com respeito a r , logo pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções (veja [13]), a equação (3.5) possui uma única solução $r = f(\theta; \theta_0, r_0)$ com condição inicial $f(\theta_0; \theta_0, r_0)$, para $-\delta < r < \delta$, onde δ é um número positivo suficientemente pequeno. Notemos que, $f(\theta; \theta_0, 0) \equiv 0$ também é uma solução.

As órbitas do sistema (3.4) coincidem com as curvas integrais da equação (3.5). Uma solução da equação (3.5) pode ser considerada como a equação de uma curva L em coordenadas polares. Notemos que se L é fechada existe somente uma curva \overline{L} do sistema (3.3) correspondente a ela. Por outro lado, se L não é fechada existe uma infinidade de curvas correspondentes a L , da forma

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t) + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Para r_0 suficientemente pequeno a solução $r = f(\theta; \theta_0, r_0)$ da equação (3.5) está definida para $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$. Consideremos

$$r_1 = f(\theta_0 + 2\pi; \theta_0, r_0) = f_{\theta_0}(r_0).$$

Fixando $\theta = \theta_0$ obtemos uma semi-reta com origem em $(0, 0)$, desta forma os pontos M_0 e M_1 são duas interseções de pontos de uma órbita do sistema (3.3) com esta semi-reta. Veja Figura 3.1. Façamos $\overline{OM_0} = r_0$ e $\overline{OM_1} = r_1$, denominamos o ponto r_1 de primeiro retorno e variando r_0 obtemos uma função que denominaremos de **função sucessão**. Veja Figura 3.1.

Para determinarmos o comportamento da solução L do sistema (3.3) que passa pelo ponto M_0 com coordenadas polares (r_0, θ_0) , $r_0 > 0$, consideremos a função

$$d_{\theta_0}(r_0) = f_{\theta_0}(r_0) - r_0.$$

Se $d_{\theta_0}(r_0) = 0$, então L é uma curva fechada. Mas, se $d_{\theta_0}(r_0) < 0$ (respectivamente $d_{\theta_0}(r_0) > 0$), L é uma espiral que tende a $(0, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$ (respectivamente $t \rightarrow -\infty$). Portanto, $(0, 0)$ é um foco estável (respectivamente instável) se, e somente se, para todo $r_0 > 0$ suficientemente pequeno, $d_{\theta_0}(r_0) < 0$ (respectivamente $d_{\theta_0}(r_0) > 0$).

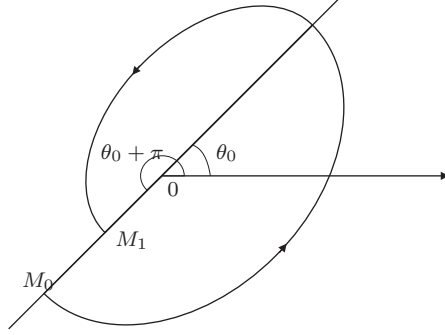


Figura 3.1: Figura ilustrativa da definição de função sucessão.

Observação 3.1.1 *Notemos que a equação (3.5) não é afetada se substituirmos r por $-r$ e θ por $\theta + \pi$. Mais precisamente, se $r = r(\theta)$ é uma solução da equação (3.5) e se $r^* = -r$ e $\theta^* = \theta + \pi$ então $dr^*/d\theta^* = R(r^*, \theta^*)$. De fato,*

$$\frac{dr^*}{d\theta^*} = -\frac{dr}{d(\theta + \pi)} = -\frac{dr}{d\theta} = -R(r, \theta) = R(r^*, \theta^*).$$

A última igualdade segue de (3.5) e (3.4) e do fato de que $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$ e $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$. Logo, se $r = r(\theta)$ é uma solução da equação (3.5) então

$$\frac{d(-r)}{d(\theta + \pi)} = R(-r, \theta + \pi) = -R(r, \theta). \quad (3.6)$$

Lema 3.1.2 *A seguinte equação se verifica*

$$d_{\theta_0}(r) = -d_{\theta_0 + \pi}(r) = -f(\theta_0 + 3\pi; \theta_0, \pi) + r.$$

Demonstração: Por definição

$$d_{\theta_0}(-r_0) = f(\theta_0 + 2\pi; \theta_0, -r_0) - (-r_0),$$

onde $r = f(\theta; \theta_0, -r_0)$ é a solução da equação (3.5) com condições iniciais $r(\theta_0) = -r_0$. A solução da equação (3.6) com condições iniciais $r^*(\theta^*) = -r(\theta_0 + \pi) = r_0$ é dada por

$$r^* = -r = f(\theta^*; \theta_0 + \pi, r_0) = f(\theta + \pi; \theta_0 + \pi, r_0).$$

Assim segue que $r = -f(\theta + \pi; \theta_0 + \pi, r_0)$. Mas, assim a condição $r^*(\theta^*) = r_0$ é equivalentemente a condição $r(\theta_0) = -r_0$ e como $-f(\theta + \pi; \theta_0 + \pi, r_0)$ também é solução da

equação (3.5), pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções, segue que

$$-f(\theta + \pi; \theta_0 + \pi, r_0) \equiv f(\theta; \theta_0, -r_0).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d_{\theta_0}(-r_0) &= f(\theta_0 + 2\pi; \theta_0, -r_0) - (-r_0) \\ &= -f(\theta_0 + 3\pi; \theta_0 + \pi, r_0) + r_0 \\ &= -[f_{\theta_0+\pi}(r_0) - r_0] = -d_{\theta_0+\pi}(r_0). \end{aligned}$$

Substituindo r_0 por r , o lema está demonstrado. ■

Lema 3.1.3 *Se existe $n_1 > 0$ tal que para todo r , $0 < r \leq n_1$, $d_{\theta_0}(r) > 0$ (respectivamente $d_{\theta_0}(r) < 0$), então existe $n_2 > 0$ tal que para todo r , $0 < |r| \leq n_2$, $d_{\theta_0}(-r) < 0$ (respectivamente $d_{\theta_0}(-r) > 0$). Portanto, para todo r , $0 < |r| \leq n$, $n = \min\{n_1, n_2\}$,*

$$d_{\theta_0}(r) d_{\theta_0}(-r) < 0.$$

Demonstração: Para fixar as idéias, consideremos o caso que para todo r , $0 < r \leq n_1$, $d_{\theta_0}(r) > 0$. Neste caso todas as soluções do sistema (3.3) são espirais que tendem para o foco $(0, 0)$ quando $t \rightarrow -\infty$. Desta forma as curvas integrais de (3.3) cruzam todas as semi-retas iniciando-se em $(0, 0)$, obtidas fixando-se θ , ou seja, para θ constante. Em particular, podemos tomar $\theta = \theta_0 + \pi$. Assim, a função sucessão $f_{\theta_0+\pi}(r) = f((\theta_0 + \pi) + 2\pi; \theta_0 + \pi, r)$ e a função $d_{\theta_0+\pi}(r) = f_{\theta_0+\pi}(r) - r$ estão definidas para todo r com $0 < r \leq n_2$, onde n_2 é algum número positivo. Como $d_{\theta_0}(r) > 0$ segue que para todo r , $0 < r \leq n_2$, $d_{\theta_0+\pi}(r) > 0$. Então, pelo Lema 3.1.2, a função $d_{\theta_0}(-r)$ está definida para todo $0 < r \leq n_2$ e é negativa, pois $d_{\theta_0}(-r) = -d_{\theta_0+\pi}(r)$. Portanto, para todo r tal que $0 < r \leq \min\{n_1, n_2\}$, temos $d_{\theta_0}(r)d_{\theta_0}(-r) < 0$. ■

Voltando à equação (3.5), temos que o seu lado direito, ou seja, $R(r, \theta)$, está definido para todo θ e para todo r com $|r| < \delta$, onde δ é um número real suficientemente pequeno.

Temos que $R(r, \theta)$ é contínua e periódica em θ com período 2π . Pelo Lema 3.1.1, segue que a equação (3.5) é continuamente derivável com respeito a r até a ordem m , logo a sua solução (veja [13]), $r = f(\theta; \theta_0, r_0)$, tem derivadas parciais contínuas com respeito a r_0 até a ordem m .

Lema 3.1.4 *As derivadas parciais*

$$\frac{\partial f}{\partial r_0}, \frac{\partial^2 f}{\partial r_0^2}, \dots, \frac{\partial^m f}{\partial r_0^m}, \quad (3.7)$$

consideradas como funções de θ , satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial r_0} \right) = \frac{\partial R(f(\theta; \theta_0, r_0), \theta)}{\partial r} \frac{\partial f(\theta; \theta_0, r_0)}{\partial r_0}, \\ \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r_0^2} \right) = \frac{\partial R(f, \theta)}{\partial r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 R(f, \theta)}{\partial r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 \\ \quad = \frac{\partial R(f, \theta)}{\partial r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + E_2(\theta; \theta_0, r_0), \\ \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r_0^3} \right) = \frac{\partial R(f, \theta)}{\partial r} \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 R(f, \theta)}{\partial r^3} \left(\frac{\partial f}{\partial r_0} \right)^3 + 3 \frac{\partial^2 R(f, \theta)}{\partial r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{\partial f}{\partial r_0} \\ \quad = \frac{\partial R(f, \theta)}{\partial r} \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} + E_3(\theta; \theta_0, r_0), \\ \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial r_0^4} \right) = \frac{\partial R(f, \theta)}{\partial r} \frac{\partial^4 f}{\partial r^4} + \frac{\partial^4 R(f, \theta)}{\partial r^4} \left(\frac{\partial f}{\partial r_0} \right)^4 \\ \quad + 6 \frac{\partial^3 R(f, \theta)}{\partial r^3} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial^2 R(f, \theta)}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r_0^2} \right)^2 + 4 \frac{\partial^2 R(f, \theta)}{\partial r^2} \frac{\partial^3}{\partial r_0^3} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \quad = \frac{\partial R(f, \theta)}{\partial r} \frac{\partial^4 f}{\partial r^4} + E_4(\theta; \theta_0, r_0), \\ \quad \vdots \\ \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial^m f}{\partial r_0^m} \right) = \frac{\partial R(f, \theta)}{\partial r} \frac{\partial^m f}{\partial r^m} + \frac{\partial^m R(f, \theta)}{\partial r^m} \left(\frac{\partial f}{\partial r_0} \right)^m + \dots + m \frac{\partial^2 R(f, \theta)}{\partial r^2} \frac{\partial^{m-1} f}{\partial r^{m-1}} \frac{\partial f}{\partial r_0} \\ \quad = \frac{\partial R(f, \theta)}{\partial r} \frac{\partial^m f}{\partial r^m} + E_m(\theta; \theta_0, r_0), \end{array} \right. \quad (3.8)$$

com as condições iniciais

$$\frac{\partial f}{\partial r_0} \Big|_{\theta=\theta_0} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r_0^2} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^m f}{\partial r_0^m} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0. \quad (3.9)$$

Demonstração: Primeiramente mostraremos que a primeira equação diferencial de (3.7) satisfaz a primeira equação do sistema (3.8).

$$\begin{aligned} \frac{df(\theta; \theta_0, r_0)}{d\theta} &= R(f(\theta; \theta_0, r_0), \theta), \\ \frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{df}{d\theta} \right) &= \frac{\partial R(f(\theta; \theta_0, r_0), \theta)}{\partial r} \frac{\partial f(\theta; \theta_0, r_0)}{\partial r_0} \end{aligned}$$

e que devido à continuidade das derivadas parciais mistas, estas independem da ordem de derivação. Assim,

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial r_0} \right) = \frac{\partial R(f(\theta; \theta_0, r_0), \theta)}{\partial r} \frac{\partial f(\theta; \theta_0, r_0)}{\partial r_0}.$$

As condições iniciais seguem diretamente da igualdade

$$f(\theta_0; \theta_0, r_0) = r_0.$$

As outras derivadas parciais seguem analogamente como feito acima. ■

No que segue, sem perda de generalidade, assumiremos que $\theta = 0$ e introduziremos respectivamente as seguintes notações $f(r_0)$ e $d(r_0)$ para as funções $f_0(r_0) = f(2\pi; 0, r_0)$ e $d_0(r_0) = f_0(r_0) - r_0$. Como $f(\theta; \theta_0, r_0)$ tem derivadas parciais contínuas com relação a r_0 até ordem m , segue que $f(r_0)$ e $d(r_0)$ são continuamente diferenciáveis até ordem m .

Definição 3.1.1 *O valor da i -ésima derivada da função $d(r_0)$ no ponto $0 = (0, 0)$, ou seja, $d^{(i)}(0)$, é chamado **i -ésimo valor focal do foco 0**.*

Como (3.3) é um sistema de classe C^m , o valor focal $d^{(i)}(0)$, $1 \leq i \leq m$, a priori existe.

Lema 3.1.5 *Se existe k tal que*

$$d'(0) = 0, \quad d''(0) = 0, \quad \dots, \quad d^{(k-1)}(0) = 0, \quad d^{(k)}(0) \neq 0, \quad (3.10)$$

então k é um número ímpar.

Demonstração: Temos que $r \equiv 0$ é uma solução da equação (3.5), portanto

$$f(0) = d(0) = 0. \quad (3.11)$$

Aplicando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange na função $d(r_0)$ obtemos, usando as relações (3.10) e (3.11),

$$d(r_0) = \frac{d^{(k)}(\eta r_0)}{k!} r_0^k, \quad (3.12)$$

onde $0 < \eta < 1$. Portanto, se k é par, devido à continuidade de $d^{(k)}(r_0)$, existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $d(r_0)$ tem o mesmo sinal para todo r tal que $0 < |r| < \delta$, ambos negativos ou positivos. Segue que para r , tal que $0 < |r| < \delta$,

$$d(r) d(-r) > 0,$$

mas isto contradiz o Lema 3.1.3, logo segue que k é ímpar. ■

Definição 3.1.2 *Se a condição (3.10) é satisfeita e $k = 2n + 1, n \geq 0$, dizemos que o foco $0 = (0, 0)$ é um **foco de multiplicidade n** .*

Vamos agora calcular o primeiro valor focal do sistema (3.3). Temos que

$$\left. \frac{\partial R(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=0} = \frac{\alpha}{\beta}$$

e como

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial r_0} \right) = \frac{\partial R(f(\theta; \theta_0, r_0), \theta)}{\partial r} \frac{\partial f(\theta; \theta_0, r_0)}{\partial r_0},$$

segue que, para $r_0 = 0$,

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial f(\theta; 0, 0)}{\partial r_0} \right) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial f(\theta; 0, 0)}{\partial r_0}. \quad (3.13)$$

Agora, $f(\theta; 0, r_0) = r_0$, logo

$$\left. \frac{\partial f(\theta; 0, 0)}{\partial r_0} \right|_{r_0=0} = 1. \quad (3.14)$$

Portanto, a solução da equação diferencial (3.13) com a condição inicial (3.14) é dada por

$$\frac{\partial f(\theta; 0, 0)}{\partial r_0} = e^{\frac{\alpha}{\beta} \theta}. \quad (3.15)$$

Se $n = 0$, então $k = 1$, $d'(0) \neq 0$ e $\alpha \neq 0$. Mas, então o foco $0 = (0, 0)$ tem matriz Jacobiana com autovalores complexos, os quais não são imaginários puros, ou seja, $0 = (0, 0)$ é um foco hiperbólico. Por outro lado, se $n > 0$, então $k \geq 3$, $d'(0) = 0$, $\alpha = 0$ e, portanto, os autovalores são imaginários puros, ou seja, o foco é múltiplo, de multiplicidade n . Notemos que um foco múltiplo nem sempre tem uma multiplicidade definida. De fato, se (3.2) é um sistema de classe m , mas não de classe $m + 1$ e $d'(0) = d''(0) = \dots = d^{(m)}(0) = 0$, a definição 3.1.2 não se aplica.

Quando $\beta > 0$, vimos que o foco é estável se, para r_0 suficientemente pequeno, $d(r_0) < 0$ e instável se $d(r_0) > 0$. Assim, por (3.12) segue que se $k = 2n + 1 \geq 1$ satisfaz as condições (3.10) e $\beta > 0$, o foco $0 = (0, 0)$ é estável quando

$$d^{(k)}(0) < 0,$$

e instável quando

$$d^{(k)}(0) > 0.$$

Para o caso em que $\beta < 0$ as conclusões são semelhantes.

3.2 Cálculo do valor focal de um foco múltiplo

Como mencionado anteriormente, é de nosso interesse trabalharmos com sistemas de equações diferenciais onde o ponto de equilíbrio seja não hiperbólico. Sendo assim, nesta seção apresentaremos o cálculo dos valores focais de um foco múltiplo.

Consideremos o sistema (3.2). Como queremos que o ponto de equilíbrio seja não hiperbólico, consideraremos para este sistema $\alpha = 0$. Segue que

$$\left. \frac{\partial R(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=0} \equiv 0, \quad \frac{\partial f(\theta; 0, r_0)}{\partial r_0} = 1. \quad (3.16)$$

Para calcularmos os valores focais, usaremos o Lema 3.1.4. Seja

$$\frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k f(\theta; 0, r_0)}{\partial r_0^k} \right|_{r_0=0} = U_k(\theta), \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k R(r, \theta)}{\partial r_0^k} \Big|_{r_0=0} = R_k(\theta), \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} E_k(\theta; 0, r_0) \Big|_{r_0=0} &= H_k \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k R(f, \theta)}{\partial r^k} \left(\frac{\partial f}{\partial r_0} \right)^2 + \dots + k \frac{\partial^2 R(f, \theta)}{\partial r^2} \frac{\partial^{k-1} f}{\partial r_0^{k-1}} \frac{\partial f}{\partial r_0} \right]_{\rho_0=0}, \end{aligned}$$

(as funções E_k estão definidas em (3.8)).

De (3.16) e (3.8) segue que $U_1(\theta) \equiv 1$, $R_1(\theta) \equiv 0$ e

$$\frac{1}{k!} E_k(\theta; 0, r_0) \Big|_{r_0=0} = H_k(\theta) = R_k(\theta) + \dots, \quad (k = 2, 3, \dots, r). \quad (3.19)$$

Os três pontos em (3.19) correspondem a uma função polinomial cujas variáveis são as funções $R_2(\theta), R_3(\theta), \dots, R_{k-1}(\theta)$ e $U_2(\theta), \dots, U_{k-1}(\theta)$.

O sistema (3.8) pode ser visto como um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Fazendo $r_0 = 0$, usando as relações

$$f(0; 0, 0) \equiv 0 \quad \text{e} \quad R(0, 0) \equiv 0$$

e as notações em (3.17), (3.18), (3.19), obteremos soluções do sistema (3.8). A primeira solução destas equações já foi obtida em (3.15).

Multipliquemos a k -ésima equação em (3.8) ($k = 2, 3, \dots, r$) por $1/k!$ e obteremos a sua solução

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial r_0^k} \Big|_{r_0=0} = U_k(\theta) = e^{\int_0^\theta R_1(\theta) d\theta} \int_0^\theta H_k(\theta) e^{-\int_0^\theta R_1(\theta) d\theta} d\theta.$$

Por (3.16) e (3.18) segue que $R_1(\theta) = 0$, portanto

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial r_0^k} \Big|_{r_0=0} = U_k(\theta) = \int_0^\theta H_k(\theta) d\theta, \quad k = 2, 3, \dots, r. \quad (3.20)$$

Por definição, os valores focais são as derivadas da função

$$d(r_0) = f(2\pi; 0, r_0) - r_0$$

no ponto $r_0 = 0$. Assim, usando (3.16) e (3.20), obtemos

$$d'(0) = 0, \quad d^{(k)}(0) = k! \int_0^{2\pi} H_k(\theta) d\theta, \quad k = 2, 3, \dots, r. \quad (3.21)$$

Iremos agora expressar os valores focais em termos do lado direito do sistema (3.3). Para isto encontraremos primeiro uma expressão para $R_k(\theta)$. Consideremos as funções Φ e Ψ definidas em (3.1). Usando a fórmula de Taylor com resto integral, obtemos que para todo $k, 2 \leq k \leq r$, as funções Φ e Ψ podem ser escritas da forma

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= P_2(x, y) + P_3(x, y) + \cdots + P_k(x, y) + P^*(x, y), \\ \Psi(x, y) &= Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \cdots + Q_k(x, y) + Q^*(x, y),\end{aligned}\tag{3.22}$$

onde $P_i(x, y)$ e $Q_i(x, y)$ são polinômios homogêneos de grau i ($i = 2, 3, \dots, m$) e

$$P^* = \sum_{\alpha=0}^k x^{k-\alpha} y^\alpha P_\alpha^*(x, y), \quad Q^* = \sum_{\alpha=0}^k x^{k-\alpha} y^\alpha Q_\alpha^*(x, y),\tag{3.23}$$

onde $P_i^*(x, y)$ e $Q_i^*(x, y)$ são funções contínuas que se anulam em $x = y = 0$.

Consideremos a função $R(r, \theta)$. Por definição

$$R(r, \theta) = \frac{\Phi(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \Psi(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta}{\beta + \frac{\Psi(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r} \cos \theta - \frac{\Phi(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta}{r}}.\tag{3.24}$$

Pelo Lema 3.1.1, $R(r, \theta)$ tem derivadas parciais contínuas até a ordem m com respeito a r e além disso $R(0, \theta) \equiv 0$, $\frac{\partial R}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$. Portanto, temos a relação análoga às relações (3.23)

$$R(r, \theta) = R_2(\theta) r^2 + \cdots + R_k(\theta) r^k + R^*(r, \theta) r^k,\tag{3.25}$$

onde $R_i(\theta)$, $i = 2, \dots, k$, é dado por (3.18) e $R^*(r, \theta)$ é uma função contínua que se anula em $r = 0$.

Inserindo as expressões de Φ e Ψ de (3.22) em (3.24), obtemos

$$R(r, \theta) = \frac{\sum_{m=2}^k r^m [P_m \cos \theta + Q_m \sin \theta] + P^* \cos \theta + Q^* \sin \theta}{\beta + \sum_{m=2}^k r^{m-1} [Q_m \cos \theta - P_m \sin \theta] + \frac{Q^* \cos \theta - P^* \sin \theta}{r}},$$

onde

$$\begin{aligned}P_m &= P_m(\cos \theta, \sin \theta), \quad Q_m = Q_m(\cos \theta, \sin \theta) \\ P_m^* &= P_m^*(r \cos \theta, r \sin \theta), \quad Q_m^* = Q_m^*(r \cos \theta, r \sin \theta).\end{aligned}$$

Escreveremos $u_m(\cos \theta, \sin \theta)$ e $v_m(\cos \theta, \sin \theta)$, respectivamente, para $P_m \cos \theta + Q_m \sin \theta$ e $Q_m \cos \theta - P_m \sin \theta$. Assim, por (3.23)

$$\begin{aligned} P^*(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + Q^*(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta &= r^k u^*(r; \cos \theta, \sin \theta), \\ Q^*(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta - P^*(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta &= r^k v^*(r; \cos \theta, \sin \theta), \end{aligned}$$

onde $u^*(r, \cos \theta)$ e $v^*(r, \cos \theta)$ são funções contínuas que se anulam em $r = 0$.

Segue de (3.25) e das expressões acima que

$$\begin{aligned} R_2(\theta)r^2 + \cdots + R_k(\theta)r^k + R^*(r, \theta)r^k \\ = \frac{\sum_{m=2}^k r^m u_m(\cos \theta, \sin \theta) + r^k u^*(r, \cos \theta, \sin \theta)}{\beta + \sum_{m=2}^k r^{m-1} v_m(\cos \theta, \sin \theta) + r^{k-1} v^*(r, \cos \theta, \sin \theta)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Multiplicando ambos os membros de (3.26) pelo denominador do lado direito, obtemos uma igualdade que é válida para todo r suficientemente pequeno, ou seja, uma identidade. Todos os coeficientes desta identidade são funções contínuas de θ , e $u^*(r, \theta)$ e $R^*(r, \theta)$ são funções contínuas tais que $u^*(0, \cos \theta, \sin \theta) = R^*(0, \theta) = 0$. Portanto, dividindo ambos os membros desta igualdade por r^2 e fazendo $r \rightarrow 0$ obtemos $u_2 = \beta R_2$. Podemos então cancelar u_2 (ou βR_2) em ambos os membros de nossa identidade, e dividindo ambos os membros por r^3 obtemos $u_3 \beta R_3 + v_2 R_2$. Prosseguindo com este raciocínio obtemos as seguintes relações

$$\begin{cases} u_2 = \beta R_2, \\ u_3 = \beta R_3 + v_2 R_2, \\ \vdots \\ u_k = \beta R_k + v_2 R_{k-1} + \cdots + v_{k-1} R_2. \end{cases}$$

Assim, temos que

$$R_m = \frac{u_m}{\beta} + W_m, \quad m = 3, 4, \dots, k,$$

onde

$$W_m = -\frac{R_2 v_{m-1} + R_3 v_{m-2} + \cdots + R_{m-1} v_2}{\beta}.$$

W_m é expresso em termos das funções $u_i(\cos \theta, \text{sen } \theta)$ e $v_i(\cos \theta, \text{sen } \theta)$ com os índices i não ultrapassando $m - 1$. Inserindo em u_i e v_i na igualdade acima, as suas expressões em termos de P_i e Q_i , obtemos

$$R_m = \frac{P_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) \cos \theta + Q_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) \text{sen } \theta}{\beta} + W_m \quad (3.27)$$

($m = 2, 3, \dots, k$), onde W_m é expresso em termos de β e das funções $P_i(\cos, \text{sen } \theta)$ e $Q_i(\cos, \text{sen } \theta)$ com índices i não ultrapassando $m - 1$.

No caso de um foco múltiplo (ou seja, para $\alpha = 0$), o primeiro valor focal é 0. Se $m \geq 2$, o segundo valor focal também é zero pelo Lema 3.1.5. Os demais valores focais $d^{(k)}(0)$ são calculados a partir de (3.21) usando a expressão (3.27) para $R_m(\theta)$.

A manipulação das expressões obtidas até aqui nos permite formular um lema muito útil. De (3.16), (3.17), (3.18) e (3.19) segue que

$$H_2(\theta) = R_2(\theta), \quad H_3(\theta) = R_3(\theta) + 3R_2(\theta)U_2(\theta).$$

Portanto, por (3.20) segue que

$$U_2(\theta) = \int_0^\theta H_2(\theta) d\theta = \int_0^\theta R_2(\theta) d\theta,$$

logo

$$U_3(\theta) = \int_0^\theta H_3(\theta) d\theta = \int_0^\theta R_3(\theta) + 3R_2(\theta) \left(\int_0^\theta R_2(\theta) d\theta \right) d\theta.$$

Continuando com este raciocínio obtemos que

$$H_m(\theta) = R_m(\theta) + \Phi_m(R_2(\theta), \dots, R_{m-1}(\theta)),$$

onde Φ_m é expressa envolvendo operações algébricas e integração, em termos das funções $R_2(\theta), \dots, R_{m-1}(\theta)$. De (3.27) e da expressão acima segue que

$$H_m(\theta) = \frac{P_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) \cos \theta + Q_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) \text{sen } \theta}{\beta} + \Phi_m^*(\theta) \quad (m = 2, 3, \dots, k),$$

onde Φ_m^* é expressa, usando operações algébricas e integração, em termos das funções $P_i(\cos \theta, \text{sen } \theta)$, $Q_i(\cos \theta, \text{sen } \theta)$ (com índices i não ultrapassando $m - 1$) e do número β .

Finalmente por (3.21) e pelas conclusões acima, segue o seguinte resultado.

Lema 3.2.1 Consideremos um sistema de equações diferenciais de classe C^m

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta y + \Phi(x, y) = P(x, y), \\ \dot{y} = \beta x + \Psi(x, y) = Q(x, y), \end{cases} \quad (3.28)$$

onde as funções Φ e Ψ são expressas pelas equações (3.22) e (3.23), com $k = 2, 3, \dots, r$.

Então o valor focal $d^{(m)}(0)$, $m = 2, 3, \dots, k$ é dado por

$$d^{(m)}(0) = m! \int_0^{2\pi} \frac{P_m(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q_m(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta}{\beta} d\theta + m! \int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\theta) d\theta. \quad (3.29)$$

3.3 O caso de um sistema analítico

Assumiremos que o sistema analítico que queremos estudar tenha um foco múltiplo na origem e está na forma canônica

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y + \Phi(x, y), \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y + \Psi(x, y), \end{cases} \quad (3.30)$$

onde $\beta > 0$, e Φ e Ψ são funções analíticas.

Notemos que o lado direito da igualdade (3.5), ou seja, a função $R(r, \theta)$ é uma função analítica em $-\infty < \theta < +\infty$, $|r| < n_0$, onde n_0 é um número positivo suficientemente pequeno. Temos que $R(0, \theta) \equiv 0$, assim pela fórmula de Taylor

$$R(r, \theta) = R_1(\theta) r + R_2(\theta) r^2 + \dots \quad (3.31)$$

Notemos também que a função $R(r, \theta)$ e, portanto, as funções $R_i, i = 1, 2, \dots$, são funções periódicas de período 2π . Segue das propriedades das funções analíticas que existe $n_1 > 0$ tal que a série acima converge para todo θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e para todo r , $|r| \leq n_1$.

A solução

$$r = f(\theta; 0, r_0)$$

da equação (3.5), ou seja,

$$\frac{dr}{d\theta} = R(r, \theta) \quad (3.32)$$

satisfazendo a condição inicial

$$f(0; 0, r_0) = r_0 \quad (3.33)$$

é uma função analítica (veja [1]). Como $R(0, \theta) \equiv 0$, segue que $f(\theta; 0, 0) \equiv 0$ é uma solução da equação (3.5). Portanto, a expansão de $f(\theta; 0, r_0)$ é dada por

$$r = f(\theta; 0, r_0) = v_1(\theta) r_0 + v_2(\theta) r_0^2 + \dots \quad (3.34)$$

É claro que existe $0 < n_2 \leq n_1$ tal que a série (3.34) converge para todo θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e para todo r , $|r| \leq n_2$. Por (3.33) e (3.34), segue que

$$v_1(0) = 1, v_2(0) = v_3(0) = \dots = 0. \quad (3.35)$$

Inserindo em (3.32) as expressões (3.34) e (3.31), correspondentes a r e R respectivamente, e igualando os coeficientes das correspondentes potências de r_0 (de acordo com a igualdade de polinômios), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais lineares nas variáveis $v_i(\theta)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{cases} v_1'(\theta) = R_1(\theta) v_1(\theta), \\ v_2'(\theta) = R_1(\theta) v_2(\theta) + R_2(\theta) v_1^2(\theta), \\ v_3'(\theta) = R_1(\theta) v_3(\theta) + 2 R_2(\theta) v_1(\theta) v_2(\theta) + R_3(\theta) v_1^3, \\ \vdots \end{cases} \quad (3.36)$$

As relações (3.35) podem ser consideradas como condições iniciais das funções $v_i(\theta)$ satisfazendo o sistema (3.36). Notemos que para $i = 1, \dots, r$, a menos da notação utilizada, os sistemas (3.36) e (3.8) são idênticos. Temos que as soluções do sistema (3.36) são dadas por

$$\begin{cases} v_1(\theta) = e^{\int_0^\theta R_1(\theta) d\theta}, \\ v_2(\theta) = e^{\int_0^\theta R_1(\theta) d\theta} \int_0^\theta R_2(\theta) v_1(\theta) d\theta, \\ v_3(\theta) = e^{\int_0^\theta R_1(\theta) d\theta} \int_0^\theta [2R_2(\theta) v_2(\theta) + R_3(\theta) v_1^2(\theta)] d\theta, \\ \vdots \end{cases} \quad (3.37)$$

Por definição, a função sucessão é $f(r_0) = f(2\pi; 0, r_0)$, assim, tomando $\theta = 2\pi$ em (3.34), obtemos

$$r = f(r) = v_1(2\pi) r_0 + v_2(2\pi) r_0^2 + \dots$$

Desta última expressão e como $d(r_0) = f(r_0) - r_0$, segue que os valores focais são dados por

$$d'(0) = v_1 - 1, \quad d^{(k)}(0) = k!v_k(2\pi) \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (3.38)$$

Da mesma forma como no caso do sistema de classe C^m , mostrado anteriormente, temos que o primeiro valor focal é dado por

$$d'(0) = e^{2\pi\frac{\alpha}{\beta}} - 1.$$

Os demais valores focais são de algum interesse somente quando a origem for um foco múltiplo, ou seja, quando $\alpha = 0$. O sistema (3.30), neste caso, será escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta y + \Phi(x, y) \\ \dot{y} = \beta x + \Psi(x, y). \end{cases}$$

Como Φ e Ψ são funções analíticas, segue que

$$\Phi(x, y) = P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots, \quad \Psi(x, y) = Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \dots, \quad (3.39)$$

onde $P_i(x, y)$ e $Q_i(x, y)$ são polinômios homogêneos de grau i ($i = 2, 3, \dots$). Por (3.4), (3.5) e (3.39), segue que

$$R(r, \theta) = \frac{\sum_{m=2}^{\infty} r^m u_m(\cos \theta, \sin \theta)}{\beta + \sum_{m=2}^{\infty} r^{m-1} v_m(\cos \theta, \sin \theta)} \quad (3.40)$$

onde

$$u_m(\cos \theta, \sin \theta) = P_m(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q_m(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta.$$

e

$$v_m(\cos \theta, \sin \theta) = Q_m(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + P_m(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta.$$

Em virtude dos resultados obtidos na seção anterior, segue que, para $\alpha = 0$,

$$R_1(\theta) = \left[\frac{\partial R(r, \theta)}{\partial r} \right]_{r=0} = 0. \quad (3.41)$$

Portanto, por (3.31) temos

$$R(r, \theta) = R_2(\theta) r^2 + R_3(\theta) r^3 + \dots .$$

Usando as expressões (3.40) e (3.37) e procedendo como na seção anterior, obtemos as seguintes relações

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 = \beta R_2, \\ u_3 = \beta R_3 + R_2 v_2, \\ u_4 = \beta R_4 + R_3 v_2 + R_2 v_3, \\ \vdots \end{array} \right.$$

logo

$$\left\{ \begin{array}{l} R_2 = \frac{u_2}{\beta}, \\ R_3 = \frac{u_3}{\beta} - \frac{R_2 v_2}{\beta}, \\ R_4 = \frac{u_4}{\beta} - \frac{R_3 v_2 + R_2 v_3}{\beta}, \\ \vdots \end{array} \right.$$

Inserindo estas expressões em (3.37), fazendo $\theta = 2\pi$ e usando (3.38) obtemos os valores focais. No caso em que estamos interessados, ou seja, de um foco múltiplo ($\alpha = 0$), o primeiro valor focal é zero. O segundo valor focal também é zero, ou seja, $d'(0) = 2v_2 = 0$ pelo Lema 3.1.5. Notemos que este fato pode ser obtido diretamente da expressão

$$d''(0) = 2v_2(2\pi) = 2 \int_0^{2\pi} R_2(\theta) d\theta,$$

pois R_2 é uma função ímpar de período 2π .

Agora, o terceiro valor focal é dado por

$$d'''(0) = 3! v_3(2\pi) = 6 \int_0^{2\pi} [2R_2(\theta)v_2(\theta) + R_3(\theta)] d\theta.$$

Expressando R_2 e R_3 em termos de polinômios P_2 , Q_2 , P_3 e Q_3 , onde

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2, \\ P_3(x, y) &= a_{30} x^3 + a_{21} x^2 y + a_{12} xy^2 + a_{03} y^3, \\ Q_2(x, y) &= b_{20} x^2 + b_{11} xy + b_{02} y^2, \\ Q_3(x, y) &= b_{30} x^3 + b_{21} x^2 y + b_{12} xy^2 + b_{03} y^3, \end{aligned} \tag{3.42}$$

obtemos, depois de extensos cálculos, a seguinte expressão para $v_3 = v_3(2\pi)$

$$v_3 = \frac{\pi}{4\beta} [3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21})] - \frac{\pi}{4\beta^2} [2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) - a_{11}(a_{02} + a_{20}) + b_{11}(b_{02} + b_{20})]. \tag{3.43}$$

De acordo com os resultados obtidos na seção anterior, segue que para $\beta > 0$, se $v_3 < 0$ o foco na origem é estável e instável se $v_3 > 0$.

A expressão (3.43) para v_3 foi obtida a partir de um sistema na forma canônica, mas também podemos expressar v_3 a partir de um sistema na forma geral

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots, \\ \dot{y} = cx + dy + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \dots, \end{cases} \tag{3.44}$$

onde P_2 , Q_2 , P_3 e Q_3 são expressos por (3.42). Como a origem é um foco múltiplo, temos que

$$a + d = 0, \Delta = ad - bc > 0.$$

Os autovalores da parte linear do sistema acima são $\pm\beta i$, onde

$$\beta = \sqrt{\Delta} = \sqrt{ad - bc}.$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$\xi = x, \quad \eta = -\frac{a}{\beta} x - \frac{b}{\beta} y$$

reduzimos o sistema (3.44) para a sua forma canônica

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\beta \eta + \bar{P}_2(\xi, \eta) + \bar{P}_3 + \dots, \\ \dot{\eta} = \beta \xi + \bar{Q}_2(\xi, \eta) + \bar{Q}_3 + \dots. \end{cases} \tag{3.45}$$

Expressando v_3 de (3.43) em termos dos coeficientes do sistema (3.45) e depois voltando para os coeficientes do sistema (3.44), obtemos

$$\begin{aligned}
v_3 &= -\frac{\pi}{4b\beta^2} \{ [ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{20}) \\
&+ c^2c^2(a_{11} + a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) \\
&- b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})] \\
&- (a^2 + bc)[3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - bb_{21})] \}.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

A equação (3.43) é um caso particular de (3.46), e pode ser obtida fazendo $a = d = 0$, $b = -\beta$ e $c = \beta$. Notemos que (3.46) fornece uma expressão, em termos dos coeficientes do sistema (3.44), para o valor focal do sistema (3.45) e não para o original (3.44). No entanto, isto não interfere na análise da estrutura topológica, pois (3.45) é obtido através de (3.44) por uma transformação linear não singular. De fato, pois $\xi = x$, $\eta = -\frac{a}{\beta}x - \frac{b}{\beta}y$ e devido as condições $a + d = 0$, $\Delta = ad - bc > 0$, segue que $b \neq 0$.

Observação 3.3.1 *Sabemos que um sistema de classe C^m , cuja a parte linear possui autovalores imaginários puros, tem um ponto de equilíbrio que pode ser um foco múltiplo ou um centro. Isto vale também para o sistema analítico. De fato, para todo r_0 suficientemente próximo da origem, $d(r_0)$ não muda de sinal, logo a origem é um foco múltiplo, ou $d(r_0) \equiv 0$ e a origem é um centro. No primeiro caso pelo menos um dos valores focais não se anula e no caso do centro todos os valores focais são nulos, ou seja,*

$$v_1 = 1, v_2 = v_3 = \dots = 0.$$

Esta condição é necessária e suficiente para que a origem seja um centro.

Mostraremos este resultado no decorrer desta seção.

Apresentaremos agora o cálculo dos coeficientes de Lyapunov usando funções de Lyapunov. Nossos estudos foram baseados em [3].

Consideremos o sistema analítico de equações diferenciais da seguinte forma

$$\dot{x} = -y + P(x, y), \quad \dot{y} = x + Q(x, y), \tag{3.47}$$

onde P e Q juntamente com as suas derivadas parciais de primeira ordem se anulam na origem. Além disto, os coeficientes da representação em série de Taylor de P e Q são considerados parâmetros. Queremos mostrar como se calcula os coeficientes de Taylor correspondente à função deslocamento para o sistema (3.47).

Primeiramente escrevendo o sistema (3.47) em coordenadas polares, obtemos um problema de valor inicial da forma

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 A(r, \theta)}{1 + r B(r, \theta)}, \quad r(0, \xi) = \xi, \quad (3.48)$$

onde ξ é visto como a coordenada da seção de Poincaré correspondente ao segmento $\{(r, \theta) : \theta = 0\}$. A solução r é analítica e é representada por uma série da forma

$$r(\theta, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} r_j(\theta) \xi^j. \quad (3.49)$$

Iremos descrever um processo, computacionalmente mais eficiente, criado por Lyapunov. Este processo é puramente algébrico. A idéia deste processo é construir recursivamente funções de Lyapunov para o sistema (3.47) que pode ser usado para determinar a estabilidade do ponto de equilíbrio na origem.

Para implementar o processo de Lyapunov, consideremos

$$P(x, y) = \sum_{j=2}^{\infty} P_j(x, y), \quad Q(x, y) = \sum_{j=2}^{\infty} Q_j(x, y) \quad (3.50)$$

onde P_j e Q_j são polinômios homogêneos de grau j para cada $j = 2, \dots$. Consideremos também uma função V representada formalmente por

$$V(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \sum_{j=3}^{\infty} V_j(x, y) \quad (3.51)$$

onde cada V_j é um polinômio homogêneo de grau j e $X(x, y) = (-y + P(x, y), x + Q(x, y))$ é o campo vetorial associado ao sistema (3.47). Para determinar a estabilidade do ponto de equilíbrio na origem para o sistema correspondente ao campo de vetores X , usaremos, por definição, a derivada de V na direção do campo vetorial X como a seguir

$$\mathcal{L}_X V(x, y) = \dot{V}(x, y) = \nabla V(x, y) \cdot X(x, y).$$

Se $V(x, y) > 0$ e $\dot{V}(x, y) \leq 0$ em alguma vizinhança da origem, então V é chamada de função de Lyapunov para o sistema (3.47) em $(x, y) = (0, 0)$.

O teorema a seguir exibe um resultado sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio na origem para o sistema (3.47).

Teorema 3.3.1 *Se V é uma função de Lyapunov em $(x, y) = (0, 0)$ para o sistema (3.47) em alguma vizinhança da origem, então o ponto de equilíbrio na origem é estável. Se, além disto, $\dot{V}(x, y) < 0$, então o ponto de equilíbrio na origem é assintoticamente estável.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [3].

A idéia de Lyapunov foi a aplicação do Teorema 3.3.1 para o sistema (3.47), sendo assim construiríamos recursivamente a função V . Iremos explicar esta construção e também mostrarmos que esta função V produz os coeficientes de Taylor da função sucessão.

Consideremos \mathcal{H}_n o espaço vetorial de todos os polinômios homogêneos de grau n nas variáveis x e y . Além disto, consideremos o campo de vetores em \mathbb{R}^2 dado por $R(x, y) = (-y, x)$, e observe que se V é uma função definida em \mathbb{R}^2 , então a derivada de V na direção do campo vetorial R pode ser vista como a ação de um operador diferencial linear definido por

$$\mathcal{L}_R = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y},$$

em V . Em particular, \mathcal{L}_R atua no espaço vetorial \mathcal{H}_n da seguinte forma:

$$(\mathcal{L}_R V)(x, y) = -y V_x(x, y) + x V_y(x, y).$$

Usando a definição da derivada de V na direção do campo vetorial X usada anteriormente obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X V(x, y) = & \left(x + \sum_{j=3}^{\infty} V_{jx}(x, y) \right) \left(-y + \sum_{j=2}^{\infty} P_j(x, y) \right) \\ & + \left(y + \sum_{j=3}^{\infty} V_{jy}(x, y) \right) \left(x + \sum_{j=2}^{\infty} Q_j(x, y) \right), \end{aligned}$$

onde os subscritos x e y denotam as derivadas parciais. Além disto, se coletarmos os termos do lado direito desta identidade de acordo com seus graus, teremos

$$\mathcal{L}_X V(x, y) = x P_2(x, y) + y Q_2(x, y) + (\mathcal{L}_R V_3)(x, y) + \mathcal{O}((x^2 + y^2)^2), \quad (3.52)$$

onde $x P_2(x, y) + y Q_2(x, y) \in \mathcal{H}_3$.

Lema 3.3.1 *Se n é um inteiro ímpar, então $\mathcal{L}_R : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$ é um isoforismo linear.*

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [3].

Pelo Lema 3.3.1 temos que existe algum $V_3 \in \mathcal{H}_n$ tal que

$$(\mathcal{L}_R V_3)(x, y) = -x P_2(x, y) - y Q_2(x, y).$$

Assim, com esta escolha de V_3 , os termos de ordem 3 na expressão para \mathcal{L} em (3.52) se anulam, e esta expressão fica da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X V(x, y) = & x P_3(x, y) + y Q_3(x, y) + V_{3x}(x, y) P_2(x, y) + V_{3y}(x, y) Q_2(x, y) \\ & + (\mathcal{L}_R V_4)(x, y) + \mathcal{O}((x^2 + y^2)^{5/2}). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Lema 3.3.2 *Se n é um número inteiro par, ou seja, $n = 2k$, então a transformação linear $\mathcal{L}_R : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$ possui um núcleo de dimensão um gerado por $(x^2 + y^2)^k \in \mathcal{H}_n$.*

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [3].

De acordo com o Lema 3.3.2 existe um polinômio homogêneo $V_4 \in \mathcal{H}_n$ tal que (3.53) tem a forma

$$\mathcal{L}_X V(x, y) = L_4(x^2 + y^2)^2 + \mathcal{O}((x^2 + y^2)^{5/2}), \quad (3.54)$$

onde L_4 é uma constante com respeito às variáveis x e y . A equação (3.54) é útil. Com efeito, se $L_4 \neq 0$, então a função

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y) \quad (3.55)$$

determina a estabilidade do ponto de equilíbrio na origem. Mais precisamente, se $L_4 < 0$, então V é uma função de Lyapunov em alguma vizinhança da origem e o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. Se $L_4 > 0$, então o ponto de equilíbrio é instável.

Observação 3.3.2 *Este resultado sobre estabilidade não exige que o campo vetorial X seja analítico. Além disto, os cálculos formais com a série V são justificados porque a função de Lyapunov (3.55), que é um requisito para a aplicação do Teorema 3.3.1, acaba por ser um polinômio.*

Notemos que, se $L_4 = 0$, então pelo mesmo procedimento utilizado para obter L_4 podemos produzir uma nova série V tal que o termo líder da expressão para \mathcal{L}_X é $L_6(x^2 + y^2)^3$, e assim por diante.

Apresentaremos agora um teorema útil sobre a estabilidade.

Teorema 3.3.2 *Se $L_{2n} = 0$, $n = 2, \dots, N$, mas $L_{2N+2} \neq 0$, então a estabilidade do ponto de equilíbrio na origem é determinada: Se $L_{2N+2} < 0$, então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. Se $L_{2N+2} > 0$, o ponto de equilíbrio é instável.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [3].

As constantes L_{2k} são chamadas de **coeficientes de Lyapunov**. Pelo Teorema 3.3.2 e pelo algoritmo para calcular estes coeficientes de Lyapunov, temos um método para construção de funções de Lyapunov para sistemas planares cujas linearizações são centros. Se após um número finito de etapas determinarmos o coeficiente de Lyapunov não nulo, então poderemos produzir uma função de Lyapunov polinomial e assim a usarmos para determinar a estabilidade do ponto de equilíbrio. Contudo, ainda não esgotamos todas as possibilidades: o que acontece se todos os coeficientes de Lyapunov forem nulos? Esta pergunta será esclarecida no teorema abaixo.

Teorema 3.3.3 (Centro de Lyapunov) *Se o campo vetorial X é analítico e $L_{2n} = 0$ para $n = 2, \dots, \infty$, então a origem é um centro. Além disto, a série que define V é convergente numa vizinhança da origem e representa uma função cujos conjuntos de nível contém as órbitas da equação diferencial correspondente ao campo X .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [3].

Agora, estabeleceremos a relação entre os valores focais calculados pela função sucessão e os coeficientes de Lyapunov calculados pela função de Lyapunov.

Lema 3.3.3 *Suponha que $\xi \rightarrow d(\xi)$ é a função sucessão para o sistema (3.47), e L_{2n} para $n \geq 2$, são os correspondentes coeficientes de Lyapunov. Se k é um inteiro positivo e $L_{2j} = 0$ para os inteiros $j = 1, \dots, k - 1$, então*

$$d^{(2k-1)}(0) = (2k - 1)! 2\pi L_{2k}.$$

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [3].

Pelo lema exibido anteriormente fica claro que podemos calcular os coeficientes de Lyapunov usando a função sucessão ou pela função de Lyapunov. Os seguintes teoremas são consequências diretas das construções feitas até aqui.

Façamos $L_{2k} = L_k^*$. Por abuso de notação usaremos apenas L_k em vez L_k^* de nos teoremas abaixo. Assim, teremos na representação dos coeficientes de Lyapunov no Teorema 3.3.4 e no Teorema 3.3.5, a seguinte relação: $L_2 \rightarrow L_0$, $L_4 \rightarrow L_1$, $L_6 \rightarrow L_2$ e $L_8 \rightarrow L_3$.

Teorema 3.3.4 *Consideremos o seguinte sistema diferencial quadrático planar*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + b x^2 + (2c + \beta) xy + d y^2, \\ \dot{y} = -[x + a x^2 + (2b + \alpha) xy + c y^2]. \end{cases}$$

Os três primeiros coeficientes de Lyapunov são dados por:

1. $L_1 = \beta (b + d) - \alpha (a + c)$,
2. $L_2 = a \alpha (b + d) (5b + \alpha + 5d)$,
3. $L_3 = a (b + d)^3 (bd + a^2 + 2d^2)$.

Teorema 3.3.5 *Consideremos o seguinte sistema diferencial quadrático planar*

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5) xy + \lambda_6 y^2, \\ \dot{y} = x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4) xy - \lambda_2 y^2. \end{cases}$$

com $\lambda_1 = 0$. Os três primeiros coeficientes de Lyapunov são dados por:

1. $L_1 = -\lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6)$,
2. $L_2 = \lambda_2 \lambda_4 (\lambda_3 - \lambda_6) (\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6)$,
3. $L_3 = -\lambda_2 \lambda_4 (\lambda_3 - \lambda_6)^2 (\lambda_3 \lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2)$.

Capítulo 4

O Trabalho de Frommer

Neste capítulo apresentaremos um dos mais importantes teoremas sobre campos quadráticos planares segundo o método proposto por Frommer. Este teorema explicita um número finito de condições para que um ponto de equilíbrio de um sistema definido por um campo quadrático planar seja um centro. Nossos estudos foram baseados em [14].

Considere o sistema quadrático da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \dot{y} = b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \end{cases} \quad (4.1)$$

satisfazendo $(a_{10} - b_{01})^2 + 4a_{01}b_{10} < 0$. É fácil verificar que a parte linear do sistema (4.1) aplicada na origem, possui autovalores imaginários puros, isto é, possui autovalores da forma $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$. Existe uma mudança linear de coordenadas de modo que (4.1) é escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega_0 y + A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2, \\ \dot{y} = -\omega_0 x + B_{20}x^2 + B_{11}xy + B_{02}y^2. \end{cases} \quad (4.2)$$

Fazendo uma reparametrização no tempo $\tau = \omega_0 t$, o sistema (4.2) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y + a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2, \\ \dot{y} = -x + a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Consideremos $a_1 = b$, $2b_1 = 2c + \beta$, $c_1 = d$, $a_2 = a$, $2b_2 = 2b + \alpha$, $c_2 = c$. Portanto, o sistema (4.3) terá a forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y + bx^2 + (2c + \beta)xy + dy^2, \\ \dot{y} = -[x + ax^2 + (2b + \alpha)xy + cy^2]. \end{cases} \quad (4.4)$$

Esta forma canônica é conhecida como a forma normal de Frommer.

Teorema 4.0.6 *Considere o sistema (4.4). Este sistema possui um centro na origem se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:*

1. $\alpha = \beta = 0$;
2. $a + c = b + d = 0$;
3. $a = c = \beta = 0$ (ou equivalentemente, $b = d = \alpha = 0$);
4. $a + c = \beta = \alpha + 5(b + d) = bd + 2d^2 + a^2 = 0$, $b + d \neq 0$
(ou equivalentemente, $b + d + \alpha = \beta + 5(a + c) = ac + 2a^2 + d^2 = 0$, $a + c \neq 0$).

O teorema acima fornece-nos condições necessárias e suficientes para que um sistema de equações diferenciais definido por campos quadráticos planares possua um equilíbrio do tipo centro.

Exibiremos agora alguns lemas que serão de extrema importância para demonstração do Teorema 4.0.6.

Quando exibimos uma integral primeira H de um sistema de equações diferenciais temos uma função não constante num aberto cujos conjuntos de níveis contém as soluções deste sistema. Se H tiver um ponto de mínimo ou máximo local, é simples vermos que as curvas de nível desta função (que contém as órbitas do campo) são curvas fechadas. Portanto, concluímos que o ponto de equilíbrio, no nosso caso a origem, é um centro. Este resultado será detalhado no Lema abaixo.

Lema 4.0.4 *Consideremos um sistema quadrático de equações diferenciais cuja parte linear aplicada no ponto de equilíbrio possua autovalores imaginários puros, isto é, possua*

autovalores da forma $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$. Se existir uma integral primeira possuindo um mínimo ou máximo local, definida em uma vizinhança do ponto de equilíbrio, então o ponto de equilíbrio é um centro.

Demonstração: Sem perda de generalidade, consideremos a origem como ponto de equilíbrio do sistema quadrático, dado por,

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 = P(x, y), \\ \dot{y} = b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 = Q(x, y), \end{cases} \quad (4.5)$$

satisfazendo $(a_{10} - b_{01})^2 + 4a_{01}b_{10} < 0$. Desta condição segue que a parte linear do sistema (4.5), aplicada na origem, possui autovalores imaginários puros. Seja H uma integral primeira de (4.5). Então $\nabla H(x, y) \cdot (P(x, y), Q(x, y)) \equiv 0$, numa vizinhança da origem. Por hipótese, temos que H possui a origem como um ponto de mínimo ou máximo local, assim as curvas de nível da função H , que contém as órbitas do campo, são curvas fechadas. Portanto, a origem é um centro. ■

Lema 4.0.5 *Suponha que $\alpha = \beta = 0$. Então a função*

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{a}{3}x^3 + bx^2y + cxy^2 + \frac{d}{3}y^3 \quad (4.6)$$

é uma integral primeira de (4.4).

Demonstração: Suponha que $\alpha = \beta = 0$. Mostraremos que $\nabla H(x, y) \cdot (P(x, y), Q(x, y)) \equiv 0$, sendo H a função definida em (4.6). Temos

$$\begin{aligned} \nabla H(x, y) &= (x + ax^2 + 2bxy + cy^2, y + bx^2 + 2cxy + dy^2), \\ P(x, y) &= y + bx^2 + 2cxy + dy^2 \quad \text{e} \quad Q(x, y) = -x - ax^2 - 2bxy - cy^2. \end{aligned}$$

Assim, $\nabla H(x, y) \cdot (P(x, y), Q(x, y))$ se escreve como

$$\begin{aligned}
& (x + ax^2 + 2bxy + cy^2)(y + bx^2 + 2cxy) + (y + bx^2 + 2cxy)(-x - ax^2 - 2bxy - cy^2) \\
&= (xy - xy) \\
&+ (ab - ab)x^4 + (2ac + 2b^2 - 2ac - 2b^2)x^3y + (ad + 4bc + bc - bc - 4bc - ad)x^2y^2 \\
&+ (2c^2 - 2c^2 - 2bd + 2bd)xy^3 + (cd - cd)y^4 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Lema 4.0.6 *A função*

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3} [\bar{c}x^3 - 3\bar{b}x^2y + (\bar{a} - \bar{b})y^3] + \mathcal{O}(4). \quad (4.7)$$

é uma integral primeira de

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \bar{b}x^2 + \bar{c}xy - \bar{b}y^2, \\ \dot{y} = -(x + \bar{a}xy). \end{cases} \quad (4.8)$$

Demonstração: Tome a mudança de variáveis

$$x = \frac{\xi}{1 + \bar{b}\eta}, \quad y = \frac{\eta}{1 + \bar{b}\eta}.$$

Assim, (4.8) tem a forma

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi [1 + (\bar{a} + 2\bar{b})\eta + \bar{b}(\bar{a} + \bar{b})\eta^2]}{\eta[1 + \bar{c}\eta - \bar{b}(\bar{a} + \bar{b})\xi^2]}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\eta}{1 + (\bar{a} + 2\bar{b})\eta + \bar{b}(\bar{a} + \bar{b})\eta^2} d\eta = \frac{-\xi}{1 + \bar{c}\xi - \bar{b}(\bar{a} + \bar{b})\xi^2} d\xi.$$

Integrando e tomando a série de Taylor da expressão acima, obtemos

$$H(\xi, \eta) = K + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - \left[\frac{2c\xi^3 + (2a + 4b)\eta^3}{6} \right] + \mathcal{O}(4)$$

Voltando para as coordenada x e y , obtemos

$$H(x, y) - K = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3} [\bar{c}x^3 - 3\bar{b}x^2y + (\bar{a} - \bar{b})y^3] + \mathcal{O}(4).$$

■

Lema 4.0.7 *A função*

$$H(x, y) = \frac{[d^2 + 2d(d^2 + 1)y + (d^2 + 1)(x - dy)^2]^3}{[d^2 + 3d(d^2 + 1)y + 3d^2(d^2 + 1)y^2 - 3d(d^2 + 1)xy + (d^2 + 1)(dy - x)^3]^2}, \quad (4.9)$$

é uma integral primeira de

$$\begin{cases} \dot{x} = y + bx^2 - 2xy + dy^2, \\ \dot{y} = -[x + x^2 - (3b + 5d)xy - y^2], \end{cases} \quad (4.10)$$

onde

$$b = -\frac{2d^2 + 1}{d}, \quad d \neq 0.$$

Demonstração: Demonstraremos que $\nabla H(x, y) \cdot (P(x, y), Q(x, y)) \equiv 0$. Primeiramente, calcularemos $\nabla H(x, y)$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) &= \frac{6 [d^2 + 2d(d^2 + 1)y + (d^2 + 1)(x - dy)^2]^2 (d^2 + 1)(x - dy)}{[d^2 + 3d(d^2 + 1)y + 3d^2(d^2 + 1)y^2 - 3d(d^2 + 1)xy + (d^2 + 1)(dy - x)^3]^2} \\ &\quad - \frac{2 [d^2 + 2d(d^2 + 1)y + (d^2 + 1)(x - dy)^2]^3 [-3d(d^2 + 1)y - 3(d^2 + 1)(dy - x)^2]}{[d^2 + 3d(d^2 + 1)y + 3d^2(d^2 + 1)y^2 - 3d(d^2 + 1)xy + (d^2 + 1)(dy - x)^3]^3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) &= \frac{3 [d^2 + 2d(d^2 + 1)y + (d^2 + 1)(x - dy)^2]^2 [2d(d^2 + 1) - 2(d^2 + 1)(x - dy)d]}{[d^2 + 3d(d^2 + 1)y + 3d^2(d^2 + 1)y^2 - 3d(d^2 + 1)xy + (d^2 + 1)(dy - x)^3]^2} \\ &\quad - \frac{2 [d^2 + 2d(d^2 + 1)y + (d^2 + 1)(x - dy)^2]^3}{[d^2 + 3d(d^2 + 1)y + 3d^2(d^2 + 1)y^2 - 3d(d^2 + 1)xy + (d^2 + 1)(dy - x)^3]^3} \\ &\quad - \frac{[3d(d^2 + 1) + 6d^2(d^2 + 1)y - 3d(d^2 + 1)x + 3(d^2 + 1)(dy - x)^2 d]}{[d^2 + 3d(d^2 + 1)y + 3d^2(d^2 + 1)y^2 - 3d(d^2 + 1)xy + (d^2 + 1)(dy - x)^3]^3}. \end{aligned}$$

Assim, para calcularmos $\nabla H(x, y) \cdot (P(x, y), Q(x, y))$, basta substituímos as expressões acima calculadas junto com $P(x, y) = y + bx^2 - 2xy + dy^2$ e $Q(x, y) = -[x + x^2 - (3b + 5d)xy - y^2]$ e veremos que

$$\nabla H(x, y) \cdot (P(x, y), Q(x, y)) \equiv 0.$$

■

Agora, demonstraremos que dadas uma das quatro condições do Teorema 4.0.6, o ponto de equilíbrio $0 = (0, 0)$ é um centro, ou seja, estas condições são suficientes para que a origem seja um centro. A recíproca do teorema demonstraremos a posteriori.

Primeiramente introduziremos alguns lemas que serão de extrema importância para a demonstração da suficiência do Teorema 4.0.6.

Lema 4.0.8 *Se $\alpha = \beta = 0$, então o sistema (4.4) possui um centro na origem.*

Demonstração: Fazendo $\alpha = \beta = 0$ no sistema (4.4) obtemos

$$\begin{cases} \dot{x} = y + bx^2 + 2cxy + dy^2, \\ \dot{y} = -(x + ax^2 + 2bxy + cy^2). \end{cases} \quad (4.11)$$

Uma integral primeira deste sistema é dada por (4.6). Pelos Lemas 4.0.4 e 4.0.5 temos que a origem é um centro de (4.4).

■

Para o próximo caso precisaremos do valor do primeiro coeficiente de Lyapunov. Pelo Teorema 3.3.4 do Capítulo 3 temos $L_1 = \beta(b + d) - \alpha(a + c)$. Notemos que estamos interessados em condições para que o sistema (4.4) possua um centro na origem. Portanto, para satisfazer tal condição teremos

$$L_1 = 0 \Leftrightarrow \beta(b + d) = \alpha(a + c). \quad (4.12)$$

Os lemas a seguir serão introduzidos de acordo com as possíveis condições para que (4.12) seja satisfeita.

Lema 4.0.9 *Se $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ e $a + c = b + d = 0$, então o sistema (4.4) possui um centro na origem.*

Demonstração: Fazendo $a + c = b + d = 0$, isto é, $a = -c$ e $b = -d$ no sistema (4.4), obtemos

$$\begin{cases} \dot{x} = y + bx^2 + (2c + \beta)xy - by^2, \\ \dot{y} = -[x + ax^2 + (2b + \alpha)xy - ay^2]. \end{cases} \quad (4.13)$$

Rotacionando os eixos de coordenadas por um ângulo φ , obteremos um novo sistema de coordenadas, onde o coeficiente $A(\varphi)$ de x^2 da equação de \dot{y} do sistema (4.13), no novo sistema é dado por

$$A(\varphi) = a \cos^3(\varphi) + (\alpha + 3b) \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) + (\beta - 3a) \cos(\varphi) \sin^2(\varphi) - b \sin^3(\varphi).$$

Queremos encontrar φ tal que $A(\varphi)$ se anule. Analisaremos o caso em que $\cos(\varphi) \neq 0$. Dividindo $A(\varphi)$ por $\cos^3(\varphi)$, obtemos

$$\frac{A(\varphi)}{\cos^3(\varphi)} = a + (\alpha + 3b) \tan(\varphi) + (\beta - 3a) \tan^2(\varphi) - b \tan^3(\varphi). \quad (4.14)$$

Fazendo $\lambda = \tan(\varphi)$ em (4.14) e igualando a zero, obtemos

$$\frac{A(\varphi)}{\cos^3(\varphi)} = -b\lambda^3 + (\beta - 3a)\lambda^2 + (\alpha + 3b)\lambda + a = 0. \quad (4.15)$$

Assim, teremos pelo menos uma raiz real satisfazendo (4.15). Portanto, sempre poderemos escolher φ tal que $A(\varphi) = 0$. Como vimos $a = -c$ no sistema dado, temos então no novo sistema de coordenadas que $A = -C$, logo $C = 0$. Desta forma o novo sistema (continuaremos a usar x e y como variáveis) será escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \bar{b}x^2 + \bar{c}xy - \bar{b}y^2, \\ \dot{y} = -(x + \bar{a}xy). \end{cases} \quad (4.16)$$

Veremos que (4.16) possui um outro ponto de equilíbrio, além da origem, dado por $\left(0, \frac{1}{\bar{b}}\right)$. Aplicando a transformação

$$x = \frac{\xi}{1 + \bar{b}\eta}, \quad y = \frac{\eta}{1 + \bar{b}\eta},$$

o sistema (4.16) terá a forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta [1 + \bar{c}\eta - \bar{b}(\bar{a} + \bar{b})\eta^2], \\ \dot{y} = -(x + \bar{a}xy). \end{cases} \quad (4.17)$$

Uma integral primeira de (4.17) é da forma

$$H(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{3}[\bar{c}\xi^3 + (\bar{a} + 2\bar{b})\eta^3].$$

Retornando para as coordenadas (x, y) , esta função se escreve como

$$H(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}[\bar{c}x^3 - 3\bar{b}x^2y + (\bar{a} - \bar{b})y^3].$$

Pelo Lemas 4.0.4 e 4.0.6 segue que a origem é um centro. ■

Lema 4.0.10 *Se $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ e $a + c = 0$, $b + d \neq 0$, então o sistema (4.4) possui um centro na origem.*

Demonstração: Visto que uma condição necessária para termos um centro é $\beta(b + d) = \alpha(a + c)$. Como por hipótese $b + d \neq 0$, deveremos ter $\beta = 0$. Suponhamos, primeiramente, que $a = c = 0$, de modo que $a = c = \beta = 0$. O sistema (4.4) nestas condições é escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = y + bx^2 + dy^2, \\ \dot{y} = -[x + (2b + \alpha)xy]. \end{cases} \quad (4.18)$$

Façamos em (4.18), $2b + \alpha = \eta$, $b = \delta$ e $d = \gamma$. Assim, segue que (4.18) tem a forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \delta x^2 + \gamma y^2, \\ \dot{y} = -(x + \eta xy). \end{cases} \quad (4.19)$$

Notemos que o campo de vetores no plano determinado por (4.19) é simétrico com relação ao eixo y . Para provarmos este caso faremos uso de *nullclines*. O sistema (4.19) possui uma reta invariante dada por

$$y = -\frac{1}{\eta}.$$

De fato, seja $F(x, y) = (y + \delta x^2 + \gamma y^2, -x - \eta xy)$. Calculando $F(x, -1/\eta)$, temos

$$F\left(x, -\frac{1}{\eta}\right) = \left(\frac{\gamma + \delta \eta^2 x^2 - \eta}{\eta^2}, 0\right).$$

Assim, temos um campo na direção horizontal, sem componente vertical. Portanto, $y = -1/\eta$ é uma reta invariante de (4.19). Consideraremos o caso em que $\eta > 0$. Para $\eta < 0$ a análise será análoga. Fazendo o estudo de *nullclines* para o sistema (4.19), obtemos,

$$\begin{cases} x - \text{nullcline}: y + \delta x^2 + \gamma y^2 = 0, \\ y - \text{nullcline}: -x(1 + \eta y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad y = -1/\eta. \end{cases} \quad (4.20)$$

Teremos que dividir em casos para mostrarmos que, de fato, o sistema (4.19) possui a origem como um centro.

Caso 1) $\gamma = 0$. Analisando esta condição em (4.20), obtemos $y = -\delta x^2$. Agora teremos que analisar para

$$i) \delta > 0 \quad \text{e} \quad ii) \delta < 0.$$

O gráfico de $y = -\delta x^2$, constituirá de uma parábola com vértice na origem e concavidade voltada para cima ou para baixo, respectivamente.

Caso 2) $\gamma \neq 0$. Como feito anteriormente analisaremos esta condição em (4.20). Assim,

$$\delta x^2 + \gamma y^2 + y = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta}{\gamma} x^2 + y^2 + \frac{1}{\gamma} y = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta}{\gamma} x^2 + \left(y + \frac{1}{2\gamma}\right)^2 = \frac{1}{4\gamma^2}.$$

Consideremos

$$i) \gamma > 0 \quad \text{e} \quad ii) \gamma < 0.$$

O gráfico da função acima será constituído de hipérbolas. Lembremos que os casos serão analisados para $\eta > 0$, como definido anteriormente.

Caso 1i.) Para este caso temos: $\gamma = 0$, $\delta > 0$ e $\eta > 0$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\delta = 1$ e $\eta = 1$.

Para estas condições, escreveremos (4.20) na seguinte forma

$$\begin{cases} x - \text{nullcline}: y = -x^2, \\ y - \text{nullcline}: x = 0 \quad \text{ou} \quad y = -1. \end{cases}$$

Analisaremos então a direção do campo para:

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = 0 \Rightarrow \text{campo tem direção horizontal,} \\ \dot{x} = y, \text{ se } y > 0 (< 0) \Rightarrow \dot{x} > 0 (< 0). \end{cases}$$

Notemos que para y sempre tomaremos valores suficientemente próximos da origem, pois caso contrário teríamos soluções se afastando da origem.

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x^2, \text{ se } x > 0 (< 0) \Rightarrow \dot{x} > 0 (> 0), \\ \dot{y} = -x, \text{ se } x > 0 (< 0) \Rightarrow \dot{y} < 0 (> 0). \end{cases}$$

$$y = -x^2 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \Rightarrow \text{campo tem direção vertical,} \\ \dot{y} = -x(1 - x^2), \text{ se } x > 0 (< 0) \Rightarrow \dot{y} > 0 (< 0). \end{cases}$$

Analisaremos também o sentido do campo acima e abaixo da parábola $y = -x^2$. A análise feita é esboçada na Figura 4.1.

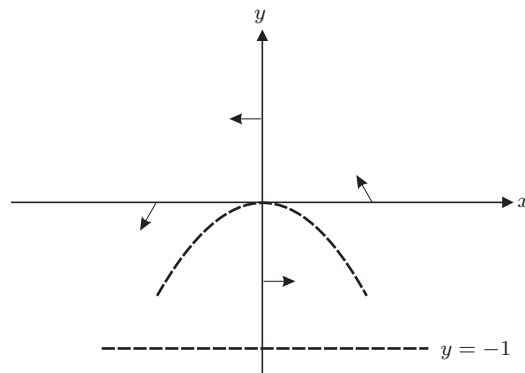


Figura 4.1: Figura ilustrativa das nullclines.

De forma análoga, analisaremos os casos *1ii)*, *2i)* e *2ii)* e concluiremos que para $a = c = \beta = 0$ temos que a origem é um centro do sistema dado inicialmente em (4.4).

Agora, suponhamos que $a = -c \neq 0$. Pelo Teorema 3.3.4 do Capítulo 3 temos que o segundo coeficiente de Lyapunov é dado por $L_2 = a \alpha (b + d) (5b + \alpha + 5d)$. Como $a = -c \neq 0$, poderemos fazer uma transformação de similaridade para termos $a = -c = 1$.

Portanto, (4.4) terá a forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y + bx^2 - 2xy + dy^2 \\ \dot{y} = -[x + x^2 + (2b + \alpha)xy - y^2], \end{cases} \quad (4.21)$$

e o segundo coeficiente de Lyapunov será dado por

$$L_2 = \alpha^2(b + d) + 5\alpha(b + d)^2. \quad (4.22)$$

Queremos condições para que o sistema (4.21) possua um centro na origem. Notemos que o sistema (4.21) é equivalente ao (4.4) com a condição $a = -c = 1$. Fazendo $L_2 = 0$, temos $\alpha = 0$ ou $\alpha = -5(b + d)$. O caso $\alpha = 0$ (já vimos que $\beta = 0$) foi discutido no Caso 1. Assim, assumiremos

$$\alpha = -5(b + d). \quad (4.23)$$

Substituindo (4.23) em (4.21), obtemos

$$\begin{cases} \dot{x} = y + bx^2 - 2xy + dy^2, \\ \dot{y} = -[x + x^2 - (3b + 5d)xy - y^2]. \end{cases} \quad (4.24)$$

Novamente pelo Teorema 3.3.4 do Capítulo 3 temos que o terceiro coeficiente de Lyapunov é dado por $L_3 = a(b + d)^3(bd + a^2 + 2d^2)$. Mas, também podemos usar aqui a transformação de similaridade para termos $a = -c = 1$. Assim, temos

$$L_3 = (b + d)^3(bd + 2d^2 + 1). \quad (4.25)$$

Como anteriormente assumimos $b + d \neq 0$. Assim, $L_3 = 0$ é equivalente a

$$bd + 2d^2 + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad b = -\frac{2d^2 + 1}{d}. \quad (4.26)$$

Aqui assumiremos $d \neq 0$, pois quando $d = 0$, para satisfazermos (4.25) temos também $b = 0$, mas já assumimos que $b + d \neq 0$.

Observação 4.0.3 *Não podemos deixar de lembrar que foi assumido anteriormente que $a = -c = 1$ para facilitar a análise. Mas, queremos condições mais gerais, desta forma*

calculando o terceiro coeficientes de Lyapunov sem assumirmos a transformação de similaridade temos $L_3 = bd + 2d^2 + a^2$ e analisando-o de tal forma que tenhamos um centro, obtemos $bd + 2d^2 + a^2 = 0$. Juntando as condições encontradas temos que

$$a + c = \beta = \alpha + 5(b + d) = bd + 2d^2 + a^2 = 0, \quad a + c \neq 0.$$

Calculamos até aqui os três primeiros coeficientes de Lyapunov para o sistema (4.21) ou equivalentemente para o sistema (4.4) na condição $a = -c = 0$ e demos condições para que estes coeficientes fossem nulos. Agora exibiremos uma integral primeira para tal sistema e assim, pelo Lema 4.0.4, concluiremos que a origem é um centro deste sistema.

Primeiramente reescreveremos (4.24) na seguinte forma diferencial

$$[x + x^2 - (3b + 5d)xy - y^2] dx + [y + bx^2 - 2xy + dy^2] dy = 0.$$

Em seguida aplicaremos a transformação

$$x = \frac{1}{2i}(\bar{x} - \bar{y}), \quad y = \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{y}).$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} \bar{y} + \left(\frac{b+d}{4} - \frac{1}{2i} \right) \bar{x}^2 + \frac{b+d}{4} \bar{x} \bar{y} - \frac{b+d}{2} \bar{y}^2 \right] d\bar{x} \\ & + \left[\frac{1}{2} \bar{x} - \frac{b+d}{2} \bar{x}^2 + \frac{b+d}{4} \bar{x} \bar{y} + \left(\frac{b+3d}{4} + \frac{1}{2i} \right) \bar{y}^2 \right] d\bar{y} = 0. \end{aligned}$$

Aplicaremos uma outra transformação dada por

$$\bar{x} = -\frac{2}{b+d} x_1, \quad \bar{y} = -\frac{2}{b+d} y_1.$$

Assim obtemos,

$$\begin{aligned} & \left[y_1 - \left(\frac{b+3d+2i}{b+d} \right) x_1^2 - x_1 y_1 + 2 y_1^2 \right] dx_1 \\ & + \left[x_1 + 2 x_1^2 - x_1 y_1 - \left(\frac{b+3d-2i}{b+d} \right) y_1^2 \right] dy_1 = 0, \end{aligned}$$

ou simplesmente

$$[y_1 + 2 y_1^2 - x_1 y_1 + \bar{a} x_1^2] dx_1 + [x_1 + 2 x_1^2 - x_1 y_1 + \bar{b} y_1^2] dy_1 = 0 \quad (4.27)$$

em que

$$\bar{a} = -\frac{b + 3d + 2i}{b + d}, \quad \bar{b} = -\frac{b + 3d - 2i}{b + d}. \quad (4.28)$$

Precisaremos da seguinte hipótese simplificadora

$$\bar{a}\bar{b} = 1. \quad (4.29)$$

Para isso, basta fazermos a multiplicação de \bar{a} e \bar{b} dados em (4.28) e substituirmos a condição (4.26) e assim conseguimos obter a condição acima.

A equação (4.27) junto com a condição (4.29) possui um fator integrante

$$[f(x_1, y_1)]^{-5/2} = [1 + 2x_1 + 2y_1 + \bar{a}x_1^2 + 2x_1y_1 + \bar{b}y_1^2]^{-5/2}$$

e uma integral primeira dada por

$$[f(x_1, y_1)]^3 = C [F(x_1, y_1)]^2,$$

onde

$$\begin{aligned} F(x_1, y_1) = & 1 + 3(x_1 + y_1) \\ & + \frac{3}{2} [(\bar{a} + 1)x_1^2 + (\bar{a} + \bar{b} + 2)x_1y_1 + (\bar{b} + 1)y_1^2] \\ & + \frac{1}{2} [\bar{a}(\bar{a} + 1)x_1^3 + 3(\bar{a} + 1)x_1^2y_1 + 3(\bar{b} + 1)x_1y_1^2 + \bar{b}(\bar{b} + 1)y_1^3]. \end{aligned}$$

Finalmente usaremos a transformação

$$x_1 = \frac{b + d}{2}(-ix - y), \quad y_1 = \frac{b + d}{2}(ix - y),$$

para retornarmos às variáveis x e y . Então uma integral primeira para o sistema (4.24) será a função

$$\begin{aligned} & [d^2 + 2d(d^2 + 1)y + (d^2 + 1)(x - dy)^2]^3 \\ & = C [d^2 + 3d(d^2 + 1)y + 3d^2(d^2 + 1)y^2 - 3d(d^2 + 1)xy + (d^2 + 1)(dy - x)^3]^2, \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$H(x, y) = \frac{[d^2 + 2d(d^2 + 1)y + (d^2 + 1)(x - dy)^2]^3}{[d^2 + 3d(d^2 + 1)y + 3d^2(d^2 + 1)y^2 - 3d(d^2 + 1)xy + (d^2 + 1)(dy - x)^3]^2}.$$

Pelos Lemas 4.0.4 e 4.0.7 a origem é um centro.

■

Lema 4.0.11 *Se $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ e $a + c \neq 0$, $b + d = 0$, então o sistema (4.4) possui um centro na origem.*

Demonstração: A demonstração deste lema é análoga ao Lema 4.0.10. Deste caso, retiramos as condições

$$b + d + \alpha + \beta + 5(a + c) = ac + 2a^2 + d^2 = 0, \quad a + c \neq 0.$$

■

Lema 4.0.12 *Se $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ e $a + c \neq 0$, $b + d \neq 0$, então o sistema (4.4) possui um centro na origem.*

Demonstração: Temos

$$a = -c \neq 0 \quad e \quad b = -d \neq 0. \quad (4.30)$$

Neste caso, rotacionaremos os eixos de coordenadas por um ângulo conveniente φ tal que

$$\tan(\varphi) = -\frac{a + c}{b + d} = -\frac{1}{K},$$

de modo que K satisfaça

$$\bar{a} = aK^3 - (3b + \alpha)K^2 + (3c + \beta)K - d = 0. \quad (4.31)$$

Fazendo esta rotação, obtemos um novo sistema de coordenadas. Primeiramente estamos interessados no coeficiente \bar{a} de x^2 (no novo sistema) que é dado por

$$b \cos^3(\varphi) + (3c + \beta) \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) - (3b + \alpha) \cos(\varphi) \sin^2(\varphi) - c \sin^3(\varphi).$$

Agora façamos

$$C(\varphi) = b \cos^3(\varphi) + (3c + \beta) \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) - (3b + \alpha) \cos(\varphi) \sin^2(\varphi) - c \sin^3(\varphi).$$

Queremos encontrar φ de modo que $C(\varphi)$ se anule. Analisaremos o caso em que $\cos(\varphi) \neq 0$. Dividindo $C(\varphi)$ por $\cos^3(\varphi)$ obtemos

$$\frac{C(\varphi)}{\cos^3(\varphi)} = -c \tan^3(\varphi) - (3b + \alpha) \tan^2(\varphi) + (3c + \beta) \tan(\varphi) + b. \quad (4.32)$$

Seja $\lambda = \tan(\varphi)$ e como queremos valores de φ de modo que $C(\varphi)$ se anule, iremos igualar a zero a equação acima. Assim, (4.32) será da forma

$$\frac{C(\varphi)}{\cos^3(\varphi)} = -c\lambda^3 - (3b + \alpha)\lambda^2 + (3c + \beta)\lambda + b = 0. \quad (4.33)$$

Mas, assumimos anteriormente $a = -c \neq 0$ e $b = -d \neq 0$. Portanto, (4.33) torna-se

$$\frac{C(\varphi)}{\cos^3(\varphi)} = a\lambda^3 - (3b + \alpha)\lambda^2 + (3c + \beta)\lambda - d = 0. \quad (4.34)$$

Assim, temos sempre uma raiz real não nula de (4.34). Logo, podemos sempre escolher φ de modo que $\bar{a} = 0$ e $\bar{c} = 0$. Tomemos $\lambda = -1/K$, substituindo em (4.34) veremos que K satisfaz (4.31). Assim, após a rotação dos eixos temos $\bar{a} = \bar{b} = \bar{\beta} = 0$, ou seja, a origem é um centro. ■

Demonstração do Teorema 4.0.6: Pelo Lema 4.0.8, temos que, se $\alpha = \beta = 0$, então o sistema (4.4) possui um centro na origem, isto mostra o item 1 do teorema. Pelo Lema 4.0.9, temos que, se $a + c = b + d = 0$ então o sistema (4.4) possui um centro na origem, isto mostra o item 2. Pelo Lema 4.0.10 temos que o item 3 do teorema, dado por $a = c = \beta = 0$ é satisfeito. Finalmente pelos Lemas 4.0.11 e 4.0.12 concluímos o item 4 do teorema.

Agora demonstraremos que a recíproca do Teorema 4.0.6 é verdadeira, isto é, se o sistema (4.4) possui um centro na origem então uma das seguintes condições é satisfeita

1. $\alpha = \beta = 0$;
2. $a + c = b + d = 0$;
3. $a = c = \beta = 0$ (ou equivalentemente, $b = d = \alpha = 0$);
4. $a + c = \beta = \alpha + 5(b + d) = bd + 2d^2 + a^2 = 0, b + d \neq 0$
(ou equivalentemente, $b + d + \alpha = \beta + 5(a + c) = ac + 2a^2 + d^2 = 0, a + c \neq 0$).

Pelo Teorema 3.3.4 do Capítulo 3, os coeficientes de Lyapunov para o sistema (4.4) são dados por

$$L_1 = \beta(b + d) - \alpha(a + c),$$

$$L_2 = a\alpha(b + d)(5b + \alpha + 5d),$$

$$L_3 = a(b + d)^3(bd + a^2 + 2d^2) = -a\alpha(b + d)^2(bd + a^2 + 2d^2).$$

De acordo com o Teorema Centro de Lyapunov 3.3.3 do Capítulo 3, temos que se para a origem ser um centro então $L_1 = L_2 = \dots = L_k = \dots = 0$. Em particular, $L_1 = L_2 = L_3 = 0$. Assim,

$$\beta(b + d) - \alpha(a + c) = 0, \quad (4.35)$$

$$a\alpha(b + d)[\alpha + 5(b + d)] = 0, \quad (4.36)$$

$$-a\alpha(b + d)^2(bd + a^2 + 2d^2) = 0. \quad (4.37)$$

De (4.36) e (4.37) podemos ter $\alpha = 0$. Tomando este valor em (4.35) teremos $\beta(b + d) = 0$, de onde podemos obter $\beta = 0$, ou seja, podemos obter $\alpha = \beta = 0$, o que mostra o item 1.

De (4.36) e (4.37) podemos ter $b + d = 0$. Substituindo este valor em (4.35) temos $\alpha(a + c) = 0$, que é satisfeito para $a + c = 0$, ou seja, podemos obter $a + c = b + d = 0$, o que mostra o item 2.

De (4.36) e (4.37) podemos ter $a = 0$. Substituindo este valor em (4.35) obtemos $\beta(b + d) - \alpha c = 0$, que é satisfeito para $c = \beta = 0$, ou seja, podemos obter $a = c = \beta = 0$, o que mostra o item 3.

De (4.36) e (4.37) podemos ter $\alpha + 5(b + d) = 0$ e $ba + a^2 + 2d^2 = 0$, respectivamente e de (4.35) podemos obter $\beta = a + c = 0$, o que mostra o item 4.

■

Capítulo 5

O Teorema de Bautin

Neste capítulo discutiremos resultados acerca de um dos mais importantes problemas da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, a saber o Foco–Centro mencionado anteriormente. Como vimos, sob condições bastante gerais, este problema é completamente entendido para o caso dos campos quadráticos planares através do Teorema de Bautin que apresentaremos neste capítulo, o qual fornece condições necessárias e suficientes para que um equilíbrio seja um centro. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [2].

Teorema 5.0.7 (Bautin) *O sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2, \\ \dot{y} = x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2, \end{cases} \quad (5.1)$$

com $\lambda_1 = 0$, tem a origem como um centro se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:

1. $\lambda_3 = \lambda_6$;
2. $\lambda_2 = \lambda_5 = 0$;
3. $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$;
4. $\lambda_5 = \lambda_4 + 5(\lambda_3 - \lambda_6) = \lambda_3 \lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2 = 0$.

Como auxílio na demonstração do Teorema 5.0.7, introduziremos agora algumas considerações preliminares. Em coordenadas polares $x = r \cos(\phi)$, $y = r \sin(\phi)$, o sistema (5.1) é dado por

$$\begin{cases} \dot{r} = r\lambda_1 - \lambda_3 r^2 \cos^3(\phi) + (3\lambda_2 + \lambda_5)r^2 \cos^2(\phi) \sin(\phi) + (2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6)r^2 \cos(\phi) \sin^2(\phi) \\ \quad - \lambda_2 \sin^3(\phi), \\ \dot{\phi} = 1 + \lambda_2 r \cos^3(\phi) + (3\lambda_3 + \lambda_4)r \cos^2(\phi) \sin(\phi) - (3\lambda_2 + \lambda_5)r \cos(\phi) \sin^2(\phi) \\ \quad - \lambda_6 r \sin^3(\phi). \end{cases}$$

Portanto, temos

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{r\lambda_1 + r^2\chi_1(\phi)}{1 + r\chi_2(\phi)}, \quad (5.2)$$

onde

$$\begin{aligned} \chi_1 &= [-\lambda_3 \cos^3(\phi) + (3\lambda_2 + \lambda_5) \cos^2(\phi) \sin(\phi) + (2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6) \cos(\phi) \sin^2(\phi) - \lambda_2 \sin^3(\phi)], \\ \chi_2 &= [\lambda_2 \cos^3(\phi) + (3\lambda_3 + \lambda_4) \cos^2(\phi) \sin(\phi) - (3\lambda_2 + \lambda_5) \cos(\phi) \sin^2(\phi) - \lambda_6 \sin^3(\phi)]. \end{aligned}$$

Expandindo o lado direito de (5.2) em potências de r , obtemos

$$\frac{dr}{d\phi} = R_1 r + R_2(\phi)r^2 + R_3(\phi)r^3 + \dots, \quad (5.3)$$

onde $R_1 = \lambda_1$ e R_k ($k \geq 2$) são polinômios em $\cos(\phi)$ e $\sin(\phi)$ nos parâmetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$. Queremos uma solução $r(\phi)$ na forma de Poincaré. Consideremos então sua expansão em séries de potências

$$r = v_1(\phi, \lambda_i)r_0 + v_2(\phi, \lambda_i)r_0^2 + v_3(\phi, \lambda_i)r_0^3 + \dots. \quad (5.4)$$

Notemos que em $\phi = 0$, temos $r = r_0$. Assim,

$$r_0 = r = v_1(0, \lambda_i) r_0 + v_2(0, \lambda_i) r_0^2 + v_3(0, \lambda_i) r_0^3 + \dots.$$

Portanto, $v_1(0, \lambda_i) = 1$ e $v_k(0, \lambda_i) = 0, k \geq 2$.

No decorrer deste capítulo usaremos a seguinte notação para os coeficientes de Lyapunov: $L_1 = v_3$, $L_2 = v_5$ e $L_3 = v_7$. Esta notação é a mesma usada no artigo que estudamos, veja [2].

Determinaremos agora um conjunto de equações para todos os coeficientes v_k . Este conjunto de equações será útil na demonstração de uns dos lemas que apresentaremos a seguir.

Substituindo (5.4) em (5.3) e em seguida comparando os coeficientes, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_1}{d\phi} = R_1 v_1, \\ \frac{dv_2}{d\phi} = R_1 v_2 + R_2 v_1^2, \\ \frac{dv_3}{d\phi} = R_1 v_3 + 2R_2 v_1 v_2 + R_3 v_1^3, \\ \frac{dv_4}{d\phi} = R_1 v_4 + R_2 (v_2^2 + 2v_1 v_3) + 3R_3 v_1^2 v_2 + R_4 v_1^4, \\ \frac{dv_5}{d\phi} = R_1 v_5 + 2R_2 (v_2 v_3 + v_1 v_4) + 3R_3 (v_1 v_2^2 + v_1^2 v_3) + 4R_4 v_1^3 v_2 + R_5 v_1^5, \\ \frac{dv_6}{d\phi} = R_1 v_6 + R_2 (2v_2 v_4 + 2v_1 v_5 + v_3^2) + R_3 (6v_1 v_2 v_3 + 3v_1^2 v_4 + v_2^3), \\ \quad + R_4 (6v_1^2 v_2^2 + 4v_1^3 v_3) + 5R_5 v_1^4 v_2 + R_6 v_1^6, \\ \frac{dv_7}{d\phi} = R_1 v_7 + 2R_2 (v_3 v_4 + v_2 v_5 + v_1 v_6) + 3R_3 (v_1 v_3^2 + v_2^2 v_3 + v_1^2 v_5 + 3v_1 v_2 v_4), \\ \quad + 4R_4 (v_1 v_2^3 + v_1^3 v_4 + 3v_1^2 v_2 v_3) + 5R_5 (2v_1^3 v_2^2 + v_1^4 v_3) + 6R_6 v_1^5 v_2 + R_7 v_1^7, \\ \vdots \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Apresentaremos agora alguns lemas de extrema importância para demonstração do Teorema 5.0.7.

Lema 5.0.13 $v_k(2\pi, \lambda_i)$ é uma função integral para todo λ_i e um polinômio homogêneo de grau $k - 1$ em $\lambda_2, \dots, \lambda_6$ quando $\lambda_1 = 0$.

Demonstração: Do conjunto de equações (5.5) e do teorema da dependência de solução com relação aos parâmetros, sabemos que $v_k(2\pi, \lambda_i)$ é uma função integral para todo λ_i . Em particular, se $\lambda_1 = 0$, então $R_1 = 0$ e R_k é um polinômio homogêneo de grau $k - 1$ em $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_6$. Ao mesmo tempo notemos que todas as equações de (5.5) são separáveis, assim $v_k(2\pi, \lambda_i)$ também é um polinômio homogêneo de grau $k - 1$ em $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_6$. ■

Lema 5.0.14

$$\begin{aligned}
v_1(2\pi, \lambda_i) &= e^{2\pi\lambda_1}, \\
v_2(2\pi, \lambda_i) &= \lambda_1\theta_2^{(1)}, \\
v_3(2\pi, \lambda_i) &= \bar{v}_3\lambda_1\theta_3^{(1)}, \\
v_4(2\pi, \lambda_i) &= \bar{v}_3\theta_4^{(3)} + \lambda_1\theta_4^{(1)}, \\
v_5(2\pi, \lambda_i) &= \bar{v}_5 + \bar{v}_3\theta_5^{(3)} + \lambda_1\theta_5^{(1)}, \\
v_6(2\pi, \lambda_i) &= \bar{v}_5\theta_6^{(5)} + \bar{v}_3\theta_6^{(3)} + \lambda_1\theta_6^{(1)}, \\
v_7(2\pi, \lambda_i) &= \bar{v}_7 + \bar{v}_5\theta_7^{(5)} + \bar{v}_3\theta_7^{(3)} + \lambda_1\theta_7^{(1)}, \\
v_k(2\pi, \lambda_i) &= \bar{v}_7\theta_k^{(5)} + \bar{v}_3\theta_1^{(3)} + \lambda_1\theta_k^{(1)}, \quad (k > 7),
\end{aligned} \tag{5.6}$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{v}_3 &= -\frac{\pi}{4}\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6), \\
\bar{v}_5 &= \frac{\pi}{24}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6), \\
\bar{v}_7 &= -\frac{25\pi}{32}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)^2(\lambda_3\lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2),
\end{aligned} \tag{5.7}$$

e $\theta_k^{(j)}$ é uma função integral de λ_i .

Demonstração: Fazendo $R_1 = \lambda_1$ na primeira equação de (5.5), temos que a solução desta equação diferencial com a condição inicial $v_1(0, \lambda_i) = 1$, será dada por $v_1(\phi, \lambda_i) = e^{\lambda_1\phi}$. Mas, queremos o valor da função sucessão quando $\phi = 2\pi$, assim

$$v_1(2\pi, \lambda_i) = e^{2\pi\lambda_1}. \tag{5.8}$$

Notemos que para $\lambda_1 = 0$,

$$v_1(2\pi, \lambda_i) = 1. \tag{5.9}$$

Pelo Lema 5.0.13, escrevemos

$$v_k(2\pi, \lambda_i) = v_k^{(0)} + \lambda_1 \theta_k^{(1)} \quad k > 1,$$

em que $v_k^{(0)}$ é um polinômio homogêneo de grau $k-1$ para todo $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_6$. Observemos que $v_k^{(0)}$ não contém λ_1 . De acordo com a condição (4) do Teorema 5.0.7, queremos que $v_k^{(0)} = 0$ quando $\lambda_5 = \lambda_4 + 5(\lambda_3 - \lambda_6) = \lambda_3\lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2 = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
v_k(2\pi, \lambda_i) &= (\lambda_3\lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2)\theta_k''' + \\
&\quad (\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6)\theta_k'' + \lambda_5\theta_k' + \lambda_1\theta_k^{(1)}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Mas, se tivermos as condições **(2)** e **(3)** do Teorema 5.0.7 também queremos ter um centro, ou seja, $v_k(2\pi, \lambda_i)$ serão todos iguais a zero para $k > 1$. Então θ_k''' e θ_k'' devem conter λ_2 e λ_4 . Representaremos assim,

$$\theta_k''' = \lambda_2 \lambda_4 \tilde{\theta}_k, \quad \theta_k'' = \lambda_2 \lambda_4 \tilde{\theta}_k^*. \quad (5.11)$$

Finalmente, usando a condição **(1)** do Teorema 5.0.7, temos

$$\tilde{\theta}_k = (\lambda_3 - \lambda_6) \theta_k^{(7)}, \quad \tilde{\theta}_k^* = (\lambda_3 - \lambda_6) \theta_k^{(5)}, \quad \theta_k' = (\lambda_3 - \lambda_6) \theta_k^{(3)}. \quad (5.12)$$

Substituindo (5.11) e (5.12) em (5.10), obtemos

$$\begin{aligned} v_k(2\pi, \lambda_i) = & (\lambda_3 \lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2) \lambda_2 \lambda_4 (\lambda_3 - \lambda_6) \theta_k^{(7)} \\ & + (\lambda_3 - \lambda_6) (\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6) \lambda_2 \lambda_4 \theta_k^{(5)} \\ & + \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6) \theta_k^{(3)} + \lambda_1 \theta_k^{(1)} \quad (k > 1). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Suponhamos $k = 2$. Pelo Lema 5.0.13 temos que quando $\lambda_1 = 0$, $v_2(2\pi, \lambda_i)$ é um polinômio de grau 1 em $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_6$. Assim, $\theta_2^{(7)} = \theta_2^{(5)} = \theta_2^{(3)} = 0$ no lado direito de (5.13)

$$\begin{aligned} v_2(2\pi, \lambda_i) &= 0 + \lambda_1 \theta_2^{(1)} \\ &= \lambda_1 \theta_2^{(1)}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Notemos que em (5.13), $\lambda_1 \neq 0$. Estamos trabalhando com equações recursivas, assim precisaremos de algumas informações para completarmos o próximo caso. Calcularemos então $v_2(\phi, \lambda_i)$. Da segunda equação de (5.5), substituindo as informações $R_1 = \lambda_1 = 0$ e $v_1(\phi, \lambda_i) = 1$, já obtidas anteriormente, obtemos

$$\begin{cases} \frac{dv_2(\phi, \lambda_i)}{d\phi} = R_2(\phi), \\ v_2(0, \lambda_i) = 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Assim,

$$v_2(\phi, \lambda_i) = \int_0^\phi R_2(s) ds. \quad (5.16)$$

Notemos que a condição inicial $v_2(0, \lambda_i) = 0$ é satisfeita. Resta sabermos como escrever $R_2(\phi)$. Quando $\lambda_1 = 0$, R_2 é um polinômio de grau 3 em $\sin(\phi)$ e $\cos(\phi)$. De (5.2) temos

$$f(r) = \frac{r\lambda_1 + r^2\chi_1(\phi)}{1 + r\chi_1^2(\phi)}.$$

Da equação determinada acima e de (5.3) acharemos $R_2(\phi)$, ou seja, o coeficiente de r^2 . Assim,

$$\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} \Big|_{r=0} = R_2(\phi). \quad (5.17)$$

Portanto, para $\lambda_1 = 0$, temos

$$R_2(\phi) = [-\lambda_3 \cos^3(\phi) + (3\lambda_2 + \lambda_5) \cos^2(\phi) \sin(\phi) + (2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6) \cos(\phi) \sin^2(\phi) - \lambda_2 \sin^3(\phi)]. \quad (5.18)$$

Agora, para $\phi = 2\pi$ calcularemos (5.16) em que $R_2(s)$ é dado em (5.18) fazendo $\phi = s$.

$$v_2(2\pi, \lambda_i) = \int_0^{2\pi} R(s) ds = 0. \quad (5.19)$$

Mas, por (5.14) temos $v_2(2\pi, \lambda_i) = \lambda_1 \theta_2^{(1)}$ assim,

$$v_2(2\pi, \lambda_i) = \lambda_1 \theta_2^{(1)}. \quad (5.20)$$

Analisaremos agora quando $k = 3$. Da mesma forma anterior, pelo Lema 5.0.13 temos que quando $\lambda_1 = 0$, $v_3(2\pi, \lambda_i)$ é um polinômio de grau 2 em $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_6$, logo $\theta_3^{(7)} = \theta_3^{(5)} = 0$ e $\theta_3^{(3)}$ é uma constante no lado direito de (5.13). Assim,

$$v_3(2\pi, \lambda_i) = \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6) \theta_3^{(3)} + \lambda_1 \theta_3^{(1)}. \quad (5.21)$$

Calcularemos $\theta_3^{(3)}$. Da terceira equação de (5.5) substituindo $R_1 = \lambda_1 = 0$ e (5.9), obtemos

$$\begin{cases} \frac{dv_3(\phi, \lambda_i)}{d\phi} = 2R_2(\phi)v_2 + R_3(\phi), \\ v_3(0, \lambda_i) = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$v_3(\phi, \lambda_i) = \int_0^\phi (2R_2(s)v_2 + R_3(s)) ds.$$

De (5.15) temos $R_2(s) = \left(\frac{dv_2(s, \lambda_i)}{ds} \right)$. Substituindo na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} v_3(\phi, \lambda_i) &= \int_0^\phi 2v_2 \left(\frac{dv_2(s, \lambda_i)}{ds} \right) + R_3(s) ds \\ &= v_2^2(\phi, \lambda_i) + \int_0^\phi R_3(s) ds. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Notemos que a condição inicial $v_3(0, \lambda_i) = 0$ é satisfeita. Agora, façamos $\phi = 2\pi$ em (5.22). Assim, (5.22) é dada por

$$v_3(2\pi, \lambda_i) = v_2^2(2\pi, \lambda_i) + \int_0^{2\pi} R_3(s) ds. \quad (5.23)$$

Mas, por (5.19) temos que (5.23) é dada por

$$v_3(2\pi, \lambda_i) = \int_0^{2\pi} R_3(s) ds.$$

De forma análoga ao cálculo de $R_2(\phi)$, para $\lambda_1 = 0$, temos

$$\begin{aligned} R_3(\phi) = & -\frac{1}{2}[-2\lambda_3 \cos^3(\phi) + 2(3\lambda_2 + \lambda_5) \cos^2(\phi) \sin(\phi) + 2(2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6) \cos(\phi) \sin^2(\phi) \\ & - 2\lambda_2 \sin^3(\phi)][\lambda_2 \cos^3(\phi) + (3\lambda_3 + \lambda_4) \cos^2(\phi) \sin(\phi) - (3\lambda_2 + \lambda_5) \cos(\phi) \sin^2(\phi) \\ & - \lambda_6 \sin^3(\phi)]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Assim,

$$v_3(2\pi, \lambda_i) = -\frac{\pi}{4} \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6). \quad (5.25)$$

Mas, de (5.21) temos

$$v_3(2\pi, \lambda_i) = \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6) \theta_3^{(3)} + \lambda_1 \theta_3^{(1)}. \quad (5.26)$$

Comparando com (5.25) temos

$$\theta_3^{(3)} = -\frac{\pi}{4}.$$

Assim,

$$v_3(2\pi, \lambda_i) = -\frac{\pi}{4} \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6) + \lambda_1 \theta_3^{(1)}.$$

Definindo $\bar{v}_3 = -\frac{\pi}{4} \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6)$, temos

$$v_3(2\pi, \lambda_i) = \bar{v}_3 + \lambda_1 \theta_3^{(1)}.$$

Quando $k = 4$, novamente pelo Lema 5.0.13 quando $\lambda_1 = 0$ temos que $v_4(2\pi, \lambda_i)$ é um polinômio de grau 3. Assim, $\theta_4^{(7)} = \theta_4^{(5)} = 0$ no lado direito de (5.13). Portanto,

$$v_4(2\pi, \lambda_i) = \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6) \theta_4^{(3)} + \lambda_1 \theta_4^{(1)} = \bar{v}_3 \theta_4^{(3)} + \lambda_1 \theta_4^{(1)},$$

em que o coeficiente de \bar{v}_3 é denotado por $\theta_4^{(3)}$. Agora, para $k = 5$, calcularemos $v_5(2\pi, \lambda_i)$. Pelo Lema 5.0.13 quando $\lambda_1 = 0$, temos que $v_5(2\pi, \lambda_i)$ é um polinômio de grau 4 em $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_6$. Assim, $\theta_5^{(7)} = 0$ e $\theta_5^{(5)}$ é uma constante no lado direito de (5.13). Portanto,

$$v_5(2\pi, \lambda_i) = (\lambda_3 - \lambda_6) (\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6) \lambda_2 \lambda_4 \theta_5^{(5)} + \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6) \theta_5^{(3)} + \lambda_1 \theta_5^{(1)}. \quad (5.27)$$

Calcularemos $\theta_5^{(5)}$. Da quinta equação de (5.5) com as condições $R_1 = \lambda_1 = 0$ e (5.9), obtemos

$$\begin{cases} \frac{dv_5(\phi, \lambda_1)}{d\phi} = 2R_2(\phi)v_2v_3 + 2R_2(\phi)v_4 + 3R_3(\phi)v_2^2 + 3R_3(\phi)v_3 \\ \quad + 4R_4(\phi)v_2 + R_5(\phi), \\ v_5(0, \lambda_i) = 0. \end{cases} \quad (5.28)$$

Temos de (5.5), com as condições $R_1 = \lambda_1 = 0$ e (5.9), que

$$\begin{cases} \frac{dv_2}{d\phi} = R_2, \\ \frac{dv_3}{d\phi} = 2v_2R_2 + R_3, \\ \frac{dv_4}{d\phi} = R_2(v_2^2 + 2v_3) + 3v_2R_3 + R_4. \end{cases}$$

Assim, escreveremos o lado direito de (5.28) como

$$R_3v_3 + 2R_4v_2 + R_5 + 4v_2^3 \left(\frac{dv_2}{d\phi} \right) + 2v_3 \left(\frac{dv_3}{d\phi} \right) + \frac{2d(v_2v_4)}{d\phi} - \frac{3d(v_3v_2^2)}{d\phi}.$$

Integraremos de 0 a 2π ambos os lados de (5.28) e tomaremos $\lambda_5 = 0$. Com as condições $\lambda_1 = \lambda_5 = 0$ temos

$$v_2(2\pi, \lambda_i) = v_3(2\pi, \lambda_i) = v_4(2\pi, \lambda_i) = 0.$$

Segue-se que

$$v_5(2\pi, \lambda_i) = \int_0^{2\pi} (R_3v_3 + 2R_4v_2 + R_5) ds.$$

De forma análoga ao cálculo de R_2 apresentando anteriormente, para $\lambda_1 = 0$, temos

$$\begin{aligned} R_5(\phi) = & -\frac{1}{2}[-2\lambda_3 \cos^3(\phi) + 2(3\lambda_2 + \lambda_5) \cos^2(\phi) \sin(\phi) + 2(2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6) \cos(\phi) \sin^2(\phi) \\ & - 2\lambda_2 \sin^3(\phi)][\lambda_2 \cos^3(\phi) + (3\lambda_3 + \lambda_4) \cos^2(\phi) \sin(\phi) - (3\lambda_2 + \lambda_5) \cos(\phi) \sin^2(\phi) \\ & - \lambda_6 \sin^3(\phi)]^3. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Assim, para $\lambda_1 = \lambda_5 = 0$, temos

$$v_5(2\pi, \lambda_i) = \frac{\pi}{24} \lambda_2 \lambda_4 (\lambda_3 - \lambda_6) (\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6). \quad (5.30)$$

Por outro lado, temos de (5.27), que

$$v_5(2\pi, \lambda_i) = (\lambda_3 - \lambda_6) (\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6) \lambda_2 \lambda_4 \theta_5^{(5)} + \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6) \theta_5^{(3)} + \lambda_1 \theta_5^{(1)}.$$

Comparando (5.30) com (5.27) concluimos que

$$\theta_5^{(5)} = \frac{\pi}{24}.$$

Assim, (5.27) para $k = 5$, é dada por

$$v_5(2\pi, \lambda_i) = \frac{\pi}{24} \lambda_2 \lambda_4 (\lambda_3 - \lambda_6) (\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6) + \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6) \theta_5^{(3)} + \lambda_1 \theta_5^{(1)}.$$

Definindo $\bar{v}_5 = \frac{\pi}{24} \lambda_2 \lambda_4 (\lambda_3 - \lambda_6) (\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6)$, temos

$$v_5(2\pi, \lambda_i) = \bar{v}_5 + \bar{v}_3 \theta_5^{(3)} + \lambda_1 \theta_5^{(1)}.$$

Notemos que em (5.27) utilizamos $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_5 \neq 0$. Para $k = 6$ calcularemos $v_6(2\pi, \lambda_i)$. Pelo Lema 5.0.13, quando $\lambda_1 = 0$, temos que $v_6(2\pi, \lambda_i)$ é um polinômio de grau 5 em $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_6$. Assim, $\theta_6^{(7)} = 0$ no lado direito de (5.13). Portanto,

$$\begin{aligned} v_6(2\pi, \lambda_i) &= (\lambda_3 - \lambda_6) (\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6) \lambda_2 \lambda_4 \theta_6^{(5)} + \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6) \theta_6^{(3)} + \lambda_1 \theta_6^{(1)} \\ &= \bar{v}_5 \theta_6^{(5)} + \bar{v}_3 \theta_6^{(3)} + \lambda_1 \theta_6^{(1)}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Quando chegamos ao cálculo de $v_6(2\pi, \lambda_i)$ já sabemos que $v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = 0$, ou seja, $\lambda_1 = \lambda_5 = \lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6 = 0$ e assim $\theta_6^{(7)} = 0$ no lado direito de (5.13). Notemos que pela teoria clássica de Lyapunov, o primeiro $v_k(2\pi, \lambda_i) \neq 0$ tem k ímpar. Agora para $k = 7$, temos pelo Lema 5.0.13 que, quando $\lambda_1 = 0$, $v_7(2\pi, \lambda_i)$ é um polinômio de grau 6 em $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_6$. Assim, temos que $\theta_7^{(7)}$ é um polinômio de grau 1 no lado direito de (5.13). Assim,

$$v_7(2\pi, \lambda_i) = \lambda_2 \lambda_4 (\lambda_3 - \lambda_6 - 2\lambda_6^2 - \lambda_2^2) (\lambda_3 - \lambda_6) \theta_7^{(7)} + \bar{v}_5 \theta_7^{(5)} + \bar{v}_3 \theta_7^{(3)} + \lambda_1 \theta_7^{(1)}. \quad (5.32)$$

De forma análoga ao cálculo de $\theta_5^{(5)}$, calcularemos $\theta_7^{(7)}$ nas condições $\lambda_1 = \lambda_5 = \lambda_4 + 5\lambda_3 - \lambda_6 = 0$. Portanto, temos que

$$\theta_7^{(7)} = -\frac{25\pi}{32}(\lambda_3 - \lambda_6).$$

Substituindo em (5.32) temos

$$v_7(2\pi, \lambda_i) = -\frac{25\pi}{32}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6 - 2\lambda_6^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3 - \lambda_6)^2 + \bar{v}_5\theta_7^{(5)} + \bar{v}_3\theta_7^{(3)} + \lambda_1\theta_7^{(1)}.$$

Definindo $\bar{v}_7 = -\frac{25\pi}{32}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6 - 2\lambda_6^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3 - \lambda_6)^2$ temos

$$v_7(2\pi, \lambda_i) = \bar{v}_7 + \bar{v}_5\theta_7^{(5)} + \bar{v}_3\theta_7^{(3)} + \lambda_1\theta_7^{(1)}.$$

Finalmente, mostraremos que a fórmula dada para $v_k(2\pi, \lambda_i)$, $k > 7$ é correta. Por (5.13) é suficiente mostrarmos que $\theta_k^{(7)}$ contém o fator $(\lambda_3 - \lambda_6)$. Notemos que $\theta_k^{(7)}$ é um polinômio homogêneo de grau $(k-6)$ em $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_6$. Para mostrarmos que esta condição é suficiente utilizaremos o fato de que é sempre possível reagrupar os termos de $v_k(2\pi, \lambda_i)$ de tal forma que $\theta_k^{(7)}$ não dependa de λ_4 ou λ_5 . De fato, suponhamos que $\theta_k^{(7)}$ contenha um termo λ_5 , o qual associaremos com $(\lambda_3 - \lambda_6)$. Desta forma incorporaremos-o em $\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6)\theta_k^{(3)}$. Agora, suponhamos que $\theta_k^{(7)}$ contenha um termo λ_4 . Expandindo $\theta_k^{(7)}$ em série de potências de $\lambda_4 + 5(\lambda_3 - \lambda_6)$ e coletando de $\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_3\lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2)\theta_k^{(7)}$ os termos que envolvem $\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_4 + 5(\lambda_3 - \lambda_6))$ e incluí-los em $\bar{v}_5\theta_k^{(5)}$. Como mencionado anteriormente, usaremos o fato de que a reagrupação tenha sido feita de modo que $\theta_k^{(7)}$ não dependa de λ_4 ou λ_5 . Agora, é suficiente mostrar que $\theta_k^{(7)}$ contém o fator $\mu = (\lambda_3 - \lambda_6)$, nas condições $\lambda_1 = \lambda_5 = \lambda_4 + 5(\lambda_3 - \lambda_6) = 0$ ou seja, quando $\lambda_1 = \bar{v}_3 = \bar{v}_5 = 0$. A partir de agora vamos usar μ quando mencionarmos o fator $(\lambda_3 - \lambda_6)$. Neste caso, ou seja, utilizando as condições $\lambda_1 = \lambda_5 = \lambda_4 + 5(\lambda_3 - \lambda_6)$, a função $v_k(2\pi, \lambda_i)$ é dada por

$$\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2)\theta_k^{(7)}. \quad (5.33)$$

Como $\lambda_4 = -5(\lambda_3 - \lambda_6)$, (5.33) é dada por

$$\begin{aligned} v_k(2\pi, \lambda_i) &= -5\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_6)^2(\lambda_3\lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2)\theta_k^{(7)} \\ &= \mu^2\Phi_k(\mu), \end{aligned} \quad (5.34)$$

em que $\Phi_k(\mu) = -5\lambda_2(\lambda_3\lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2)\theta_k^{(7)}$. Consideraremos que a função sucessão, a qual trabalharemos a seguir, seja definida no eixo x , ou seja, $\phi = 0$. Nas condições

$$\lambda_1 = \lambda_5 = \lambda_4 + 5(\lambda_3 - \lambda_6) = 0, \quad (5.35)$$

como mencionadas anteriormente, é possível expandirmos $r(2\pi) - r_0$ na forma

$$\begin{aligned} r(2\pi) - r_0 &= \mu^2 \Psi(r_0, \mu) \\ &= \mu^2 [\Psi(r_0, 0) + \mu \Psi_\mu(r_0, 0) + \dots]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Assim, o que queríamos mostrar anteriormente, que $\theta_k^{(7)}$ contém o fator μ , se reduz a mostrarmos $\Psi(r_0, 0) \equiv 0$ para todo r_0 suficientemente próximo da origem. Tomemos em (5.1) as condições feitas em (5.35). Assim, escreveremos (5.1) da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \lambda_6 x^2 + 2\lambda_2 xy + \lambda_6 y^2 - \mu^2, \\ \dot{y} = x + \lambda_2 x^2 + 2\lambda_6 xy - \lambda_2 y^2 - 3\mu xy. \end{cases} \quad (5.37)$$

Notemos que o sistema acima é da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -H_y(x, y) + \mu P(x, y), \\ \dot{y} = H_x(x, y) + \mu Q(x, y), \end{cases} \quad (5.38)$$

em que

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}\lambda_6 y^3 + \lambda_6 x^2 y + \frac{1}{3}\lambda_2 x^3 - \lambda_2 x y^2, \quad (5.39)$$

$$P(x, y) = -x^2 \quad \text{e} \quad Q(x, y) = -3xy. \quad (5.40)$$

Fazendo $(\lambda_3 - \lambda_6) = \mu = 0$ em (5.38) temos

$$\begin{cases} \dot{x} = -H_y(x, y), \\ \dot{y} = H_x(x, y). \end{cases} \quad (5.41)$$

Quando $\mu = 0$ como acima, temos um sistema Hamiltoniano e sua solução é dada por

$$H(x, y) = h. \quad (5.42)$$

A origem é um centro, pois o ponto $(0, 0)$ é um ponto de mínimo local da função H como em (5.39) e portanto, as curvas de nível desta função H , que contém as órbitas do

campo, são curvas fechadas. Na região de convergência da série (5.4) escolheremos uma curva fechada C_{h_0} dada por $H(x, y) = h_0$ da família de curvas de nível $H(x, y) = h$ e consideremos um novo sistema de coordenadas (s, h) na vizinhança de C_{h_0} dado por meio das equações

$$\begin{cases} H(x, y) - h = 0, \\ n(x, y, s) = 0, \end{cases} \quad (5.43)$$

coincidindo para $s = 0$ com o segmento positivo do eixo x . Assim, h é o parâmetro correspondente à curva da família $H(x, y) = h$ e s representa a coordenada periódica tal que

$$\frac{ds}{dt} = 1 \quad (5.44)$$

em C_{h_0} .

Observação 5.0.4 *Notemos que $H(x, y) = h$ é periódica em s .*

Escreveremos $H(x, y) = h$ parametricamente por $x = f(s, h)$, $y = g(s, h)$. Assim, o sistema (5.38), nas novas coordenadas (s, h) é dado por

$$\begin{cases} f_s(s, h)\dot{s} + f_h(s, h)\dot{h} = -H_y + \mu P, \\ g_s(s, h)\dot{s} + g_h(s, h)\dot{h} = H_x + \mu Q. \end{cases} \quad (5.45)$$

Quando $h = h_0$, encontramos as equações particulares de C_{h_0} dadas por

$$x = f(s, h_0) = \xi(s), \quad y = g(s, h_0) = \eta(s). \quad (5.46)$$

Como $H[f(s, h), g(s, h)] = h$ segue as relações

$$\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial h} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial h} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial s} = 0. \quad (5.47)$$

Usando (5.38), (5.44) e as relações

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{dh}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial g}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial g}{\partial h} \frac{dh}{dt}, \quad (5.48)$$

obtemos a equação diferencial

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\mu \left(Q \frac{\partial f}{\partial s} - P \frac{\partial g}{\partial s} \right)}{\mu \left(P \frac{\partial g}{\partial h} - Q \frac{\partial f}{\partial h} \right) - 1}. \quad (5.49)$$

De fato, substituindo (5.44) em (5.48) temos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{dh}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial h} \frac{dh}{dt}.$$

Agora façamos dy/dx . Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial h} \frac{dh}{dt}}{\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{dh}{dt}}.$$

Temos, da equação acima, que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{dh}{dt} \right) \frac{dy}{dx} = \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial h} \frac{dh}{dt}$$

que é equivalente a

$$\frac{\partial f}{\partial s} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{dy}{dx} \frac{dh}{dt} = \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial h} \frac{dh}{dt}.$$

Colocando $\frac{dh}{dt}$ em evidência na expressão acima, obtemos

$$\frac{dh}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial h} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial g}{\partial h} \right) = \frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{dy}{dx}.$$

Assim,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{dy}{dx}}{\frac{\partial f}{\partial h} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial g}{\partial h}}. \quad (5.50)$$

Mas, por (5.38) temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\partial H}{\partial x} + \mu Q}{-\frac{\partial H}{\partial y} + \mu P}. \quad (5.51)$$

Agora,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Mas, usando (5.44) na expressão acima, obtemos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{ds}. \quad (5.52)$$

Substituindo (5.51) e (5.52) em (5.50), obtemos

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\frac{\partial H}{\partial x} + \mu Q}{-\frac{\partial H}{\partial y} + \mu P} \right)}{\frac{\partial f}{\partial h} \left(\frac{\frac{\partial H}{\partial x} + \mu Q}{-\frac{\partial H}{\partial y} + \mu P} \right) - \frac{\partial g}{\partial h}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial s} \left(-\frac{\partial H}{\partial y} + \mu P \right) - \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \mu Q \right)}{\frac{\partial f}{\partial h} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \mu Q \right) - \frac{\partial g}{\partial h} \left(-\frac{\partial H}{\partial y} + \mu P \right)}$$

que é equivalente a

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial s} \right) + \mu \left(P \frac{\partial g}{\partial s} - Q \frac{\partial f}{\partial s} \right)}{\left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial h} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial h} \right) + \mu \left(Q \frac{\partial f}{\partial h} - P \frac{\partial g}{\partial h} \right)}.$$

Substituindo (5.47) na equação acima, obtemos

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\mu \left(P \frac{\partial g}{\partial s} - Q \frac{\partial f}{\partial s} \right)}{\mu \left(Q \frac{\partial f}{\partial h} - P \frac{\partial g}{\partial h} \right) + 1} = \frac{(-1)\mu \left(Q \frac{\partial f}{\partial s} - P \frac{\partial g}{\partial s} \right)}{(-1)\mu \left(P \frac{\partial g}{\partial h} - Q \frac{\partial f}{\partial h} \right) - 1} = \frac{\mu \left(Q \frac{\partial f}{\partial s} - P \frac{\partial g}{\partial s} \right)}{\mu \left(P \frac{\partial g}{\partial h} - Q \frac{\partial f}{\partial h} \right) - 1}.$$

como queríamos mostrar.

Em (5.49) seja $h = h_0 - \delta$, então

$$\frac{d\delta}{ds} = R(\delta, s, \mu). \quad (5.53)$$

Seja $\delta = \delta(s)$ a solução desta equação diferencial tal que $\delta_0 = \delta(0)$. Queremos encontrar a solução desta equação diferencial na forma de Poincaré. Assim, consideremos sua expansão em série de potências do valor inicial δ_0 e do parâmetro μ

$$\delta(s) = C_{10}(s)\delta_0 + C_{01}(s)\mu + C_{20}(s)\delta_0^2 + C_{11}(s)\delta_0\mu + C_{02}(s)\mu^2 + \dots \quad (5.54)$$

Portanto, estamos preocupados com a curva integral de (5.38), que passa pelo ponto no eixo $x(\phi = 0)$, onde $H(x, y) = h_0 + \delta_0$ intercepta o eixo x . Consideremos a distância deste ponto até a origem como o r_0 da equação (5.4). Tomando $s = \tau$ em (5.54), obtemos

$$\delta(\tau) = C_{10}(\tau)\delta_0 + C_{01}(\tau)\mu + C_{20}(\tau)\delta_0^2 + C_{11}(\tau)\delta_0\mu + C_{02}(\tau)\mu^2 + \dots \quad (5.55)$$

Agora, a curva integral que se inicia em τ_0 como definida anteriormente, intercepta o eixo x no ponto onde a curva $H(x, y) = h_0 + \delta(\tau)$ intercepta o eixo x . Consideremos a distância deste ponto até a origem como o $r(2\pi)$ da equação (5.36). Agora se $\mu = 0$, a solução (5.55) da equação diferencial (5.53) será periódica, ou seja, $\delta(\tau) = \delta(0)$. Segue-se que $C_{10}(\tau) = 1$, $C_{k0}(\delta(\tau)) = 0$, $k \geq 2$. Assim, obtemos uma vez a função sucessão no eixo x

$$\delta(\tau) = \delta_0 + C_{01}(\tau)\mu + C_{11}(\tau)\delta_0\mu + C_{02}(\tau)\mu^2 + \dots . \quad (5.56)$$

Provaremos a seguir que a condição $\Psi(r_0, 0) \equiv 0$ para todo r_0 suficientemente próximo da origem é equivalente a $C_{02} = 0$. Provando que $C_{02}(\tau) \equiv 0$ temos pela afirmação anterior que $\Psi(r_0, 0) \equiv 0$, ou seja $\theta_k^{(7)}$ contém o fator μ , como queríamos demonstrar, concluindo assim a prova do Lema 5.0.14. ■

Lema 5.0.15 $\Psi(r_0, 0) \equiv 0$ é equivalente a $C_{02}(\tau) \equiv 0$, para todo r_0 suficientemente próximo da origem.

Demonstração: Consideremos r_0^* como a abscissa do ponto de interseção da curva C_{h0} e $\phi = 0$ (eixo x). Expandindo o lado direito de (5.36) em potências de $r_0 - r_0^*$, obtemos

$$r(2\pi) - r_0 = \mu^2[\Psi(r_0^*, 0) + \Psi_{r_0^*}(r_0^*, 0)(r_0 - r_0^*) + \mu\Psi_\mu(r_0^*, 0) + \dots]. \quad (5.57)$$

Observemos que como r_0 e r_0^* são arbitrários, temos que $\Psi(r_0, 0) \equiv 0$ é equivalente a $\Psi(r_0^*, 0) \equiv 0$ para r_0 e r_0^* suficientemente próximos da origem. Notemos que $\Psi(r_0, 0) \equiv 0$ é equivalente a $C_{02} \equiv 0$ e $\Psi(r_0, 0) \equiv 0$ é equivalente a $\Psi(r_0^*, 0) \equiv 0$ para r_0 e r_0^* suficientemente próximos da origem. Então basta mostrarmos que $\Psi(r_0^*, 0) \equiv 0$ é equivalente a $C_{02} \equiv 0$. Da equação retirada da definição de $r(2\pi)$, $H(x, 0) = H(r_1, 0) = h_0 + \delta$ em que $\delta = \delta(\tau)$ e $r_1 = r(2\pi)$ e fazendo uso da equação (5.39), obtemos

$$\frac{1}{2}r_1^2 + \frac{1}{3}\lambda_2 r_1^3 = h_0 + \delta. \quad (5.58)$$

Quando $\delta(\tau) = 0$ e $r_1 = r_0^*$ temos

$$\frac{1}{2}(r_0^*)^2 + \frac{1}{3}(r_0^*)^3 = h_0. \quad (5.59)$$

Agora, da definição de r_0 temos a equação $H(x, 0) = H(r_0, 0) = h_0 + \delta_0$ e novamente fazendo uso da equação (5.39), obtemos

$$\frac{1}{2}r_0^2 + \frac{1}{3}\lambda_2 r_0^3 = h_0 + \delta_0. \quad (5.60)$$

Subtraindo (5.60) de (5.58), obtemos

$$\delta - \delta_0 = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_0^2) + \frac{1}{3}\lambda_2(r_1^3 - r_0^3). \quad (5.61)$$

Expandindo o lado direito de (5.61) em potências de $r_1 - r_0$, obtemos

$$0 + (r_0 + \lambda_2 r_0^2)(r_1 - r_0) + \frac{1}{2}(1 + 2r_0)(r_1 - r_0)^2 + \dots$$

Agora, expandindo os coeficientes da expansão acima em potências de $r_0 - r_0^*$ obtemos

$$\begin{aligned} \delta - \delta_0 &= [(r_0^* + \lambda_2(r_0^*)^2) + (1 + 2\lambda_2 r_0^*)(r_0 - r_0^*) + \lambda_2(r_0 - r_0^*)^2](r_1 - r_0) \\ &+ \left[\frac{1}{2}(1 + 2\lambda_2 r_0^*) + \lambda_2(r_0 - r_0^*)\right] (r_1 - r_0)^2 + \frac{\lambda_2}{3}(r_1 - r_0)^3. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Agora, subtraindo (5.59) de (5.60), obtemos

$$\delta_0 = \frac{1}{2} [r_0^2 - (r_0^*)^2 + \frac{1}{3} \lambda_2 (r_0^3 - (r_0^*)^3)]. \quad (5.63)$$

Expandindo o lado direito de (5.63) em potências de $r_0 - r_0^*$, obtemos

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 0 + [r_0^* + \lambda_2(r_0^*)^2] (r_0 - r_0^*) + \frac{1}{2} (1 + 2\lambda_2 r_0^*) (r_0 - r_0^*)^2 + \frac{1}{6} (2\lambda_2) (r_0 - r_0^*)^3 + \dots \\ &= [r_0^* + \lambda_2(r_0^*)^2] (r_0 - r_0^*) + \frac{1}{2} (1 + 2\lambda_2 r_0^*) (r_0 - r_0^*)^2 + \frac{1}{3} \lambda_2 (r_0 - r_0^*)^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.64)$$

Agora, substituindo as séries (5.64) e (5.57) em (5.62), obtemos

$$\begin{aligned} \delta(\tau) &= [r_0^* + \lambda_2(r_0^*)^2] (r_0 - r_0^*) + \left(\frac{1}{2} + \lambda_2 r_0^*\right) (r_0 - r_0^*)^2 + \\ &[r_0^* + \lambda_2(r_0^*)^2] \Psi(r_0^*, 0)\mu^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.65)$$

Mas, notemos que, substituindo (5.64) em (5.55) também obtemos uma expressão para $\delta(\tau)$ dada por

$$\begin{aligned} \delta(\tau) &= [r_0^* + \lambda_2(r_0^*)^2] (r_0 - r_0^*) + C_{01}(\tau)\mu + \\ &[r_0^* + \lambda_2(r_0^*)^2] C_{11}(\tau)(r_0 - r_0^*) \mu + C_{02}(\tau)\mu^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.66)$$

Assim, temos duas expressões de $\delta(\tau)$ em séries de potências de r_0^* e do parâmetro μ . Comparando o coeficiente de μ^2 em (5.65) e (5.66) temos

$$[r_0^* + \lambda_2(r_0^*)^2] \Psi(r_0^*, 0) = C_{02}(\tau).$$

Logo, para r_0^* suficientemente pequeno, $C_{02}(\tau) \equiv 0$ se, e somente se, $\Psi(r_0^*, 0) \equiv 0$ independente do valor de r_0^* , ou seja, independente da curva C_{h0} escolhida, como queríamos demonstrar. ■

Lema 5.0.16 $C_{02}(\tau)$ é dado por

$$\int_0^\tau \left[\int_0^s \left(P \frac{\partial g}{\partial s} - Q \frac{\partial f}{\partial s} \right) d\xi \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] ds.$$

Demonstração: Para calcularmos $C_{02}(\tau)$ expandiremos a função $R(\delta, s, \mu)$ dada em (5.53) nos pontos $\delta = 0$, $\mu = 0$. Assim,

$$\frac{d\delta}{ds} = R(\delta, s, \mu) = R_\mu(0, s, 0) \mu + R_{\delta\mu}(0, s, 0) \delta\mu + \frac{1}{2} R_{\mu\mu}(0, s, 0) \mu^2 + \dots \quad (5.67)$$

Substituindo (5.54) em ambos os membros de (5.67) e em seguida comparando os coeficientes como potências de δ_0 e μ , obtemos as seguintes equações diferenciais recursivas para os coeficientes $C_{ij}(s)$

$$\begin{aligned} \frac{dC_{10}(s)}{ds} &= 0, \\ \frac{dC_{01}(s)}{ds} &= R_\mu(0, s, 0), \\ \frac{dC_{20}(s)}{ds} &= 0, \\ \frac{dC_{11}(s)}{ds} &= C_{10}(s) R_{\delta\mu}(0, s, 0), \\ \frac{dC_{02}(s)}{ds} &= C_{01}(s) R_{\delta\mu}(0, s, 0) + \frac{1}{2} R_{\mu\mu}(0, s, 0), \end{aligned} \quad (5.68)$$

satisfazendo às seguintes condições iniciais $C_{10}(0) = 1$ e $C_{ij}(0), i \neq 1, j \neq 0$. Agora, encontraremos as relações que determinam os coeficientes $C_{ij}(s)$. De (5.68), obtemos

$$\begin{aligned} C_{01}(\tau) &= \int_0^\tau R_\mu(0, s, 0) ds, \\ C_{11}(\tau) &= \int_0^\tau C_{10}(s) R_{\delta\mu}(0, s, 0) ds, \\ C_{02}(\tau) &= \int_0^\tau (C_{01}(s) R_{\delta\mu}(0, s, 0) + \frac{1}{2} R_{\mu\mu}(0, s, 0)) ds. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Como $\delta = 0$ quando $h = h_0$, temos que dado que $C_{10}(0) = 1$ então $C_{10}(s) = 1$ para todo s .

Agora, para calcularmos explicitamente os outros coeficientes precisamos conhecer

$$R_\mu(0, s, 0), \quad R_{\delta\mu}(0, s, 0) \quad e \quad R_{\mu\mu}(0, s, 0).$$

Das equações (5.49) e (5.53) temos

$$R(\delta, s, \mu) = \frac{\mu(f_s Q - g_s P)}{\mu(g_h P - f_h Q) - 1}. \quad (5.70)$$

Utilizaremos a equação (5.70). Assim,

$$R_\mu(\delta, s, \mu) = \frac{[(f_s Q - g_s P) (\mu (g_h P - f_h Q) - 1) - (\mu (f_s Q - g_s P)) (g_h P - f_h Q)]}{[\mu (g_h P - f_h Q) - 1]^2}.$$

Aplicando em $\delta = 0, s = s, \mu = 0$ temos

$$R_\mu(0, s, 0) = -(f_s Q - g_s P). \quad (5.71)$$

Observemos que $\delta = 0$ corresponde a $h = h_0$ como mencionado anteriormente. Para os demais o cálculo é análogo. Assim, temos

$$\begin{aligned} R_{\delta\mu}(0, s, 0) &= \left[\frac{\partial}{\partial h} (g_s P - f_s Q) \right], \\ R_{\mu\mu}(0, s, 0) &= 2(g_s P - f_s Q)(g_h P - f_h Q). \end{aligned} \quad (5.72)$$

Agora, calcularemos os coeficientes desejados. Primeiramente substituindo (5.71) na primeira equação em (5.69) temos que

$$C_{01}(\tau) = \int_0^\tau (g_s P - f_s Q) ds. \quad (5.73)$$

Notemos que podemos substituir (5.73) em $R_{\mu\mu}(0, s, 0)$, obtemos

$$R_{\mu\mu}(0, s, 0) = 2 C_{01}(\tau) (g_h P - f_h Q).$$

Assim, (5.72) torna-se

$$\begin{aligned} R_{\delta\mu}(0, s, 0) &= \left[\frac{\partial}{\partial h} (g_s P - f_s Q) \right], \\ R_{\mu\mu}(0, s, 0) &= 2 C_{01}(\tau) (g_h P - f_h Q). \end{aligned} \tag{5.74}$$

Agora, substituindo $R_{\delta\mu}(0, s, 0)$, dada em (5.74), na segunda equação de (5.69), obtemos

$$C_{11}(\tau) = \int_0^\tau C_{10}(s) \left[\frac{\partial}{\partial h} (g_s P - f_s Q) \right] ds.$$

Mas, $C_{10}(s) = 1$ para todo s e

$$\frac{\partial}{\partial h} (g_s P - f_s Q) = -\frac{\partial}{\partial h} (f_s Q - g_s P)$$

que equivale a

$$\frac{\partial P}{\partial h} \frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial Q}{\partial h} \frac{\partial f}{\partial s} + P \frac{\partial^2 g}{\partial h \partial s} - Q \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial h}.$$

Então,

$$C_{11}(\tau) = \int_0^\tau \left(\frac{\partial P}{\partial h} \frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial Q}{\partial h} \frac{\partial f}{\partial s} + P \frac{\partial^2 g}{\partial h \partial s} - Q \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial h} \right) ds.$$

Integrando por partes, temos

$$C_{11}(\tau) = \int_0^\tau \left[\left(\frac{\partial P}{\partial h} \frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial s} \frac{\partial g}{\partial h} \right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial h} \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial Q}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial h} \right) \right] ds.$$

Quando realizamos o cálculo da integral por partes depararemos com

$$P \frac{\partial g}{\partial h} \Big|_0^\tau - Q \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_0^\tau.$$

Notemos que quando escrevemos $H(x, y) = h$ parametricamente, estamos reescrevendo uma função periódica em s de período τ assim, as funções $x = f(s, h)$ e $y = f(s, h)$ são funções periódicas em s de período τ . Portanto, temos

$$P \frac{\partial g}{\partial h} \Big|_0^\tau - Q \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_0^\tau = 0.$$

Nos resultados abaixo utilizaremos $x = f(s, h)$ e $y = g(s, h)$. Como

$$\frac{\partial P}{\partial h} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial h} = \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial h} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial h} \right) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial h} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial Q}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial h} = \frac{\partial Q}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial h} - \frac{\partial x}{\partial h} \frac{\partial y}{\partial s} \right).$$

Assim,

$$C_{11}(\tau) = \int_0^\tau \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial h} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial h} \right) \right] ds. \quad (5.75)$$

Temos,

$$\frac{\partial x}{\partial h} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial h} = \frac{\partial f}{\partial h} \frac{dy}{dt} - \frac{\partial g}{\partial h} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial h} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial h}.$$

Mas, da primeira relação de (5.47) temos

$$\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial h} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial h} = 1.$$

Portanto,

$$\frac{\partial x}{\partial h} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial h} = 1.$$

Assim, (5.75) é dada por

$$C_{11}(\tau) = \int_0^\tau \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) ds. \quad (5.76)$$

Finalmente, encontraremos a integral que define $C_{02}(\tau)$. Substituindo $R_{\mu\mu}(0, s, 0)$, dada em (5.74) na terceira equação de (5.69) temos

$$C_{02}(\tau) = \int_0^\tau \left[C_{01}(s) \frac{\partial}{\partial h} \left(P \frac{\partial g}{\partial s} - Q \frac{\partial f}{\partial s} \right) + C_{01}(\tau) \left(P \frac{\partial g}{\partial h} - Q \frac{\partial f}{\partial h} \right) \right] ds.$$

Mas, como visto anteriormente, temos

$$P \frac{\partial g}{\partial h} \Big|_0^\tau - Q \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_0^\tau = 0$$

e pelo cálculo de $C_{11}(\tau)$ concluímos que

$$\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial h} \left(P \frac{\partial g}{\partial s} - Q \frac{\partial f}{\partial s} \right) ds = \int_0^\tau \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) ds. \quad (5.77)$$

Substituindo (5.77) e $C_{01}(s) = \int_0^s \left(P \frac{\partial g}{\partial s} - Q \frac{\partial f}{\partial s} \right) d\xi$ em $C_{02}(\tau)$, obtemos

$$C_{02}(\tau) = \int_0^\tau \left[\int_0^s \left(P \frac{\partial g}{\partial s} - Q \frac{\partial f}{\partial s} \right) d\xi \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] ds. \quad (5.78)$$

■

Para facilitar agruparemos as equações dadas em (5.73), (5.76) e (5.78):

$$\begin{aligned}
 C_{01}(\tau) &= \int_0^\tau (g_s P - f_s Q) ds, \\
 C_{11}(\tau) &= \int_0^\tau \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) ds, \\
 C_{02}(\tau) &= \int_0^\tau \left[\int_0^s \left(P \frac{\partial g}{\partial s} - Q \frac{\partial f}{\partial s} \right) d\xi \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] ds.
 \end{aligned} \tag{5.79}$$

Lema 5.0.17 *Considerando os polinômios $P(x, y) \equiv 0$ e $Q(x, y) = xy$, as equações abaixo são verdadeiras*

$$\begin{aligned}
 C_{01}(\tau) &= - \int_0^\tau xy \dot{x} ds = 0, \\
 C_{11}(\tau) &= \int_0^\tau x ds = 0, \\
 C_{02}(\tau) &= - \int_0^\tau \left(x \int_0^s xy \dot{x} d\xi \right) ds = 0.
 \end{aligned}$$

Demonstração: Dados os polinômios $P(x, y) \equiv 0$, $Q(x, y) = xy$ e lembrando que $x = f(s, h)$ e $y = g(s, h)$, calculemos as equações em (5.79). Assim,

$$\begin{aligned}
 C_{01}(\tau) &= - \int_0^\tau xy \dot{x} ds, \\
 C_{11}(\tau) &= \int_0^\tau x ds, \\
 C_{02}(\tau) &= - \int_0^\tau \left(x \int_0^s xy \dot{x} d\xi \right) ds.
 \end{aligned}$$

Novamente utilizando os polinômios dados, o sistema (5.38) é escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \lambda_6 x^2 + 2\lambda_2 xy + \lambda_6 y^2, \\ \dot{y} = x + \lambda_2 x^2 + 2\lambda_6 xy - \lambda_2 y^2 + \lambda_3 xy - \lambda_6 xy. \end{cases}$$

Se $\lambda_3 = \lambda_6$, então o sistema acima corresponde ao sistema inicial (5.1). Portanto, a origem é um centro. Como a origem é um centro, os coeficientes $C_{ij}(\tau)$ são todos iguais a zero (menos $i = 1, j = 0$), para todo τ . Assim,

$$\begin{aligned}
 C_{01}(\tau) &= - \int_0^\tau xy \dot{x} ds = 0, \\
 C_{11}(\tau) &= \int_0^\tau x ds = 0, \\
 C_{02}(\tau) &= - \int_0^\tau \left(x \int_0^s xy \dot{x} d\xi \right) ds = 0.
 \end{aligned}$$

■

Lema 5.0.18 *Considerando os polinômios $P(x, y) = xy$ e $Q(x, y) \equiv 0$, as equações abaixo são verdadeiras*

$$\begin{aligned} C_{01}(\tau) &= \int_0^\tau xy\dot{y} \, ds = 0, \\ C_{11}(\tau) &= \int_0^\tau y \, ds = 0, \\ C_{02}(\tau) &= - \int_0^\tau \left(y \int_0^s xy\dot{y} \, d\xi \right) ds = 0. \end{aligned}$$

Demonstração: Dados os polinômios $P(x, y) \equiv 0$, $Q(x, y) = xy$ e lembrando que $x = f(s, h)$ e $y = g(s, h)$, calculemos as equações em (5.79). Assim,

$$\begin{aligned} C_{01}(\tau) &= \int_0^\tau xy\dot{y} \, ds, \\ C_{11}(\tau) &= \int_0^\tau y \, ds, \\ C_{02}(\tau) &= - \int_0^\tau \left(y \int_0^s xy\dot{y} \, d\xi \right) ds. \end{aligned}$$

Novamente utilizando os polinômios dados, o sistema (5.38) é escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \lambda_6 x^2 + 2\lambda_2 xy + \lambda_6 y^2 + \lambda_3 xy - \lambda_6 xy, \\ \dot{y} = x + \lambda_2 x^2 + 2\lambda_6 xy - \lambda_2 y^2. \end{cases}$$

Se $\lambda_3 = \lambda_6$, então o sistema acima corresponde ao sistema inicial (5.1). Portanto, neste caso a origem é um centro. Como a origem é um centro, os coeficientes $C_{ij}(\tau)$ são todos iguais a zero (menos $i = 1, j = 0$), para todo τ . Assim,

$$\begin{aligned} C_{01}(\tau) &= \int_0^\tau xy\dot{y} \, ds = 0, \\ C_{11}(\tau) &= \int_0^\tau y \, ds = 0, \\ C_{02}(\tau) &= - \int_0^\tau \left(y \int_0^s xy\dot{y} \, d\xi \right) ds = 0. \end{aligned} \tag{5.80}$$

■

Lema 5.0.19 *Considerando os polinômios $P(x, y) = -x^2$ e $Q(x, y) = 2xy$, a equação abaixo é verdadeira*

$$C_{01}(\tau) = \int_0^\tau (-x^2\dot{y} - 2xy\dot{x}) \, ds = 0.$$

Demonstração: Dados os polinômios $P(x, y) = -x^2$, $Q(x, y) = 2xy$ e lembrando que $x = f(s, h)$ e $y = g(s, h)$, calculemos as equações em (5.79). Assim,

$$\begin{aligned} C_{01}(\tau) &= \int_0^\tau (-x^2 \dot{y} - 2xy \dot{x}) ds, \\ C_{11}(\tau) &= \int_0^\tau (-2x + 2y) ds, \\ C_{02}(\tau) &= \int_0^\tau [-2x + 2x \int_0^s (-x^2 \dot{y} - 2xy \dot{x}) d\xi] ds. \end{aligned} \tag{5.81}$$

Novamente utilizando os polinômios dados, o sistema (5.38) é escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \lambda_6 x^2 + 2\lambda_2 xy + \lambda_6 y^2 - \lambda_3 x^2 + \lambda_6 x^2, \\ \dot{y} = x + \lambda_2 x^2 + 2\lambda_6 xy - \lambda_2 y^2 + 2\lambda_3 - 2\lambda_6 xy. \end{cases}$$

Se $\lambda_5 = \lambda_4 = 0$ em (5.1), o sistema acima corresponde ao (5.1). Portanto, neste caso a origem é um centro. Como a origem é um centro, os coeficientes $C_{ij}(\tau)$ são todos iguais a zero (menos $i = 1, j = 0$), para todo τ . Notemos que da segunda e terceira equações de (5.80) não estabelecemos relação alguma, por isso podemos desconsiderá-las, restando apenas,

$$C_{01}(\tau) = \int_0^\tau (-x^2 \dot{y} - 2xy \dot{x}) ds = 0.$$

■

Notemos que pelo Lema 5.0.17 e Lema 5.0.18 temos

$$\int_0^\tau -x^2 \dot{y} = 0. \tag{5.82}$$

Lema 5.0.20 *As seguintes equações são verdadeiras*

$$\int_0^\tau \dot{y} ds = \int_0^\tau \dot{x} ds = \int_0^\tau x^2 \dot{x} ds = \int_0^\tau x \dot{x} ds = \int_0^\tau y \dot{y} ds = \int_0^\tau (\dot{x}y + x\dot{y}) ds = 0.$$

Demonstração: Temos que as funções $x(s) = f(s, h)$ e $y(s) = f(s, h)$ são periódicas com período τ . Portanto, as expressões acima sempre se anulam.

■

Lema 5.0.21 $C_{02}(\tau) \equiv 0$.

Demonstração: Lembremos que estamos trabalhando com o sistema (5.38). Calculemos então $C_{02}(\tau)$ utilizando a terceira equação de (5.79). Assim,

$$\begin{aligned} C_{02}(\tau) &= \int_0^\tau [-2x - 3x \int_0^s (-x^2 \dot{y} + 3xy \dot{x} d\xi) ds] \\ &= -5 \int_0^\tau [x \int_0^s (-x^2 \dot{y} + 3xy \dot{x} d\xi) ds]. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Pelo Lema 5.0.17 temos $-\int_0^\tau xy \dot{x} ds = 0$. Substituindo em (5.83), temos

$$C_{02}(\tau) = 5 \int_0^\tau \left(x \int_0^s x^2 \dot{y} d\xi \right) ds. \quad (5.84)$$

Agora, integrando por partes $\int_0^s x^2 \dot{y} d\xi$, temos

$$\int_0^s x^2 \dot{y} d\xi = x^2 y \Big|_0^s - 2 \int_0^s xy \dot{x} d\xi.$$

Substituindo em (5.84), temos

$$C_{02}(\tau) = 5 \int_0^\tau x^3 y ds - 5x^2(0) y(0) \int_0^\tau x ds - 10 \int_0^\tau \left(x \int_0^s xy \dot{x} d\xi \right) ds. \quad (5.85)$$

Pelo Lema 5.0.17, temos que o segundo e o terceiro termo da expressão (5.85) se anulam.

Assim,

$$C_{02}(\tau) = 5 \int_0^\tau x^3 y ds. \quad (5.86)$$

Agora é suficiente mostrar que $\int_0^\tau x^3 y ds = 0$. Lembremos que todas as integrais são avaliadas ao longo da curva C_{h_0} em que

$$\begin{cases} \dot{x} = -H_y(x, y), \\ \dot{y} = H_x(x, y), \end{cases} \quad (5.87)$$

e $H(x, y)$ é dada em (5.39), como mencionado anteriormente no sistema (5.41). Utilizando o sistema (5.87), obtemos

$$\int_0^\tau x^2 \dot{y} ds = \int_0^\tau x^2 (x + \lambda_2 x^2 + 2\lambda_6 xy - \lambda_2 y^2) ds \stackrel{(5.82)}{=} 0 \quad \text{e} \quad (5.88)$$

$$\int_0^\tau x^2 \dot{x} ds = \int_0^\tau x^2 (-y - \lambda_6 x^2 + 2\lambda_2 xy + \lambda_6 y^2) ds \stackrel{(5.0.20)}{=} 0. \quad (5.89)$$

Multiplicando o lado direito de (5.88) por λ_6 e o lado direito de (5.89) por λ_2 , obtemos respectivamente

$$\int_0^\tau (\lambda_6 x^3 + \lambda_2 \lambda_6 x^4 + 2\lambda_6^2 x^3 y - \lambda_2 \lambda_6 x^2 y^2) ds = 0, \quad (5.90)$$

$$\int_0^\tau (-\lambda_2 x^2 y - \lambda_2 \lambda_6 x^4 + 2\lambda_2^2 x^3 y + \lambda_2 \lambda_6 x^2 y^2) ds = 0. \quad (5.91)$$

Somando (5.90) e (5.91), temos

$$2(\lambda_6^2 + \lambda_2^2) \int_0^\tau x^3 y ds + \lambda_6 \int_0^\tau x^3 ds - \lambda_2 \int_0^\tau x^2 y ds = 0. \quad (5.92)$$

Ainda utilizando o sistema (5.87), temos

$$\int_0^\tau \dot{x} ds = - \int_0^\tau y ds - \lambda_6 \int_0^\tau x^2 ds + 2\lambda_2 \int_0^\tau xy ds + \lambda_6 \int_0^\tau y^2 ds = 0. \quad (5.93)$$

Pelo Lema 5.39 temos $\int_0^\tau y ds = 0$. Assim, (5.93) é dada por

$$\int_0^\tau \dot{x} ds = \lambda_6 \int_0^\tau (y^2 - x^2) ds + 2\lambda_2 \int_0^\tau xy ds = 0. \quad (5.94)$$

Temos também,

$$\int_0^\tau \dot{y} ds = \int_0^\tau x ds + \lambda_2 \int_0^\tau x^2 ds + 2\lambda_6 \int_0^\tau xy ds - \lambda_2 \int_0^\tau y^2 ds = 0. \quad (5.95)$$

Pelo Lema 5.0.17 temos $\int_0^\tau x ds = 0$. Assim, (5.95) é dada por

$$\int_0^\tau \dot{y} ds = \lambda_2 \int_0^\tau (x^2 - y^2) ds + 2\lambda_6 \int_0^\tau xy ds = 0. \quad (5.96)$$

Agora, multiplicando o lado direito de (5.94) por λ_2 e (5.96) por λ_6 , obtemos respectivamente

$$\lambda_2 \lambda_6 \int_0^\tau (y^2 - x^2) ds + 2\lambda_2^2 \int_0^\tau xy ds = 0, \quad (5.97)$$

$$\lambda_2 \lambda_6 \int_0^\tau (x^2 - y^2) ds + 2\lambda_6^2 \int_0^\tau xy ds = 0. \quad (5.98)$$

Somando (5.97) e (5.98), temos

$$2(\lambda_2^2 + \lambda_6^2) \int_0^\tau xy ds = 0. \quad (5.99)$$

Temos dois casos a considerar: $\lambda_2^2 + \lambda_6^2 = 0$ ou $\lambda_2^2 + \lambda_6^2 \neq 0$. Se $\lambda_2^2 + \lambda_6^2 = 0$, então $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_6 = 0$. Assim, teríamos a origem como um centro e, portanto, $C_{02}(\tau) = 0$. Consideremos então $\lambda_2^2 + \lambda_6^2 \neq 0$. Assim,

$$\int_0^\tau xy ds = 0. \quad (5.100)$$

Agora, substituindo (5.100) no lado direito de (5.94), obtemos

$$\lambda_6 \int_0^\tau (y^2 - x^2) ds = -\lambda_6 \int_0^\tau (x^2 - y^2) ds = 0. \quad (5.101)$$

Além disso, utilizando o sistema (5.87) temos também

$$\int_0^\tau x \dot{x} ds = -\lambda_6 \int_0^\tau x^3 ds + \lambda_6 \int_0^\tau xy^2 ds + 2\lambda_2 \int_0^\tau x^2y ds \stackrel{(5.0.20)}{=} 0, \quad (5.102)$$

$$\int_0^\tau y \dot{y} ds = \lambda_2 \int_0^\tau y^3 ds + \lambda_2 \int_0^\tau x^2y ds + 2\lambda_6 \int_0^\tau xy^2 ds \stackrel{(5.0.20)}{=} 0, \quad (5.103)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\tau (\dot{x}y + x\dot{y}) ds &= -\lambda_6 \int_0^\tau x^2y ds + 2\lambda_2 \int_0^\tau xy^2 ds + \lambda_6 \int_0^\tau y^3 ds \\ &\quad + \lambda_2 \int_0^\tau x^3 ds + 2\lambda_6 \int_0^\tau x^2y ds - \lambda_2 \int_0^\tau xy^2 ds, \\ \int_0^\tau (\dot{x}y + x\dot{y}) ds &= \lambda_2 \int_0^\tau x^3 ds + \lambda_2 \int_0^\tau xy^2 ds + \lambda_6 \int_0^\tau x^2y ds + \lambda_6 \int_0^\tau y^3 ds = 0. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Queremos eliminar $\int_0^\tau xy^2 ds$ e $\int_0^\tau y^3 ds$. Assim, multiplicando o lado direito de (5.102) por $(-\lambda_2)$ e (5.104) por λ_6 , obtemos, respectivamente

$$\lambda_2 \lambda_6 \int_0^\tau x^3 ds - \lambda_2 \lambda_6 \int_0^\tau xy^2 ds = -2\lambda_2^2 \int_0^\tau x^2y ds = 0, \quad (5.105)$$

$$\lambda_6^2 \int_0^\tau x^2y ds + \lambda_2 \lambda_6 \int_0^\tau xy^2 ds + \lambda_6^2 \int_0^\tau y^3 ds + \lambda_2 \lambda_6 \int_0^\tau x^3 ds = 0. \quad (5.106)$$

Somando (5.105) e (5.106), temos

$$2\lambda_2 \lambda_6 \int_0^\tau x^3 ds + \lambda_6^2 \int_0^\tau y^3 ds + (\lambda_6^2 - 2\lambda_2^2) \int_0^\tau x^2y ds = 0. \quad (5.107)$$

Agora, multiplicando (5.103) por λ_6^2 e (5.107) por λ_2 , temos, respectivamente

$$\lambda_2 \lambda_6^2 \int_0^\tau x^2y ds - \lambda_2 \lambda_6^2 \int_0^\tau y^3 ds + 2\lambda_6^3 \lambda_2 \lambda_6^2 \int_0^\tau xy^2 ds = 0, \quad (5.108)$$

$$2\lambda_2^2 \lambda_6 \int_0^\tau x^3 ds + \lambda_2 \lambda_6^2 \int_0^\tau y^3 ds + \lambda_2 (\lambda_6^2 - 2\lambda_2^2) \int_0^\tau x^2y ds = 0. \quad (5.109)$$

Somando (5.108) e (5.109), temos

$$2\lambda_2^2 \lambda_6 \int_0^\tau x^3 ds + 2\lambda_6^3 \int_0^\tau xy^2 ds + 2\lambda_2 (\lambda_6^2 - \lambda_2^2) \int_0^\tau x^2y ds = 0. \quad (5.110)$$

De (5.102), temos

$$\lambda_6 \int_0^\tau xy^2 ds = \lambda_6 \int_0^\tau x^3 ds - 2\lambda_2 \int_0^\tau x^2y ds = 0. \quad (5.111)$$

Multiplicando ambos os lados de (5.111) por $2\lambda_6^2$, obtemos

$$2\lambda_6^3 \int_0^\tau xy^2 ds = 2\lambda_6^3 \int_0^\tau x^3 ds - 4\lambda_2 \lambda_6^2 \int_0^\tau x^2y ds = 0. \quad (5.112)$$

Substituindo (5.112) na equação (5.110), temos

$$\begin{aligned} & \lambda_6 (2\lambda_2^2 + 2\lambda_6^2) \int_0^\tau x^3 ds - 2\lambda_2^3 - 2\lambda_2 \lambda_6^2 \int_0^\tau x^2y ds \\ & = \lambda_6 (2\lambda_2^2 + 2\lambda_6^2) \int_0^\tau x^4 ds - \lambda_2 (2\lambda_2^2 + 2\lambda_6^2) \int_0^\tau x^2y ds = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, colocando $2(\lambda_2^2 + \lambda_6^2)$ em evidência na equação acima, obtemos

$$2(\lambda_2^2 + \lambda_6^2) \left[\lambda_6 \int_0^\tau x^3 ds - \lambda_2 \int_0^\tau x^2y ds \right] = 0. \quad (5.113)$$

Como mencionado anteriormente, λ_2 e λ_6 não são zeros simultaneamente, temos

$$\lambda_6 \int_0^\tau x^3 ds - \lambda_2 \int_0^\tau x^2y ds = 0.$$

Substituindo a equação acima em (5.92), temos

$$2(\lambda_6^2 + \lambda_2^2) \int_0^\tau x^3y ds = 0. \quad (5.114)$$

Temos que λ_2 e λ_6 não são zeros simultaneamente, assim $\int_0^\tau x^3y ds = 0$. Portanto, voltando na equação (5.86) afirmamos que

$$C_{02}(\tau) = 5 \int_0^\tau x^3y ds = 0,$$

como queríamos demonstrar. ■

Demonstração do Teorema 5.0.7: Pelos Lemas 5.0.13, 5.0.14, 5.0.15, 5.0.16, 5.0.17, 5.0.18, 5.0.19, 5.0.20 e 5.0.21, o sistema (5.1) possui um centro na origem. Notemos que para cada lema foi usado um item do teorema.

Agora, demonstraremos que a recíproca do Teorema 5.0.7 é verdadeira, isto é, se o sistema (5.1) possui um centro na origem, então uma das seguintes condições é satisfeita

1. $\lambda_3 = \lambda_6$;
2. $\lambda_2 = \lambda_5 = 0$;
3. $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$;
4. $\lambda_5 = \lambda_4 + 5(\lambda_3 - \lambda_6) = \lambda_3\lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2 = 0$.

De acordo com o Teorema Centro de Lyapunov 3.3.3 do Capítulo 3, temos que se a origem é um centro então $L_1 = L_2 = \dots = L_k = 0$. Em particular, $L_1 = L_2 = L_3 = 0$. Pelo Teorema 3.3.5 do Capítulo 3, os coeficientes de Lyapunov para o sistema (5.1) são dados por

$$\begin{aligned} L_1 &= -\lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6), \\ L_2 &= \lambda_2 \lambda_4 (\lambda_3 - \lambda_6) (\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6), \\ L_3 &= -\lambda_2 \lambda_4 (\lambda_3 - \lambda_6)^2 (\lambda_3 \lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2). \end{aligned}$$

De $L_1 = L_2 = L_3 = 0$, podemos obter $\lambda_3 - \lambda_6 = 0$, que é equivalente a $\lambda_3 = \lambda_6$, o que mostra o item 1. De $L_1 = 0$, podemos obter $\lambda_5 = 0$. De $L_2 = L_3 = 0$, podemos obter $\lambda_2 = 0$, o que nos dá $\lambda_2 = \lambda_5 = 0$, que mostra o item 2. De $L_2 = L_3 = 0$, podemos obter ainda $\lambda_4 = 0$, de onde temos $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$, que mostra o item 3. De $L_1 = 0$, podemos obter $\lambda_5 = 0$. De λ_2 e $\lambda_3 = 0$, podemos obter $\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6 = 0$ e $\lambda_3 \lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2 = 0$, o que mostra o item 4.

■

Definição 5.0.1 *Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais*

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} = b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{cases} \quad (5.115)$$

satisfazendo as condições $a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} > 0$ e $a_{10} + b_{01} = 0$. O ponto de equilíbrio $(0, 0)$ possui ciclicidade de ordem m , $m \geq 0$, com relação a um ponto P do espaço de coeficientes (a_{ik}, b_{ik}) ; $1 \leq i + k \leq 2$, se:

a. *É possível encontramos números $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que numa ε_0 -vizinhança do ponto P não exista nenhum ponto de modo que o sistema (5.115) possua mais do que m ciclos*

limites numa δ_0 -vizinhança da origem no plano xy ;

b. Para quaisquer escolhas de números positivos $\varepsilon < \varepsilon_0$ e $\delta < \delta_0$, é sempre possível encontrar um ponto numa ε -vizinhança do ponto P de modo que o sistema (5.115) possua m ciclos limites numa δ -vizinhança da origem.

Apresentaremos agora um resultado sobre a ordem de ciclicidade para equilíbrios de sistemas quadráticos. Este resultado também é uma contribuição do matemático Bautin.

Teorema 5.0.8 *Se um campo quadrático planar possui um ponto de equilíbrio do tipo foco ou centro, então fazendo pequenas variações dos seus coeficientes o campo pode produzir não mais do que três ciclos limites em uma vizinhança deste ponto. Há posições de equilíbrio em que a ordem de ciclicidade com respeito ao espaço de coeficientes (a_{ik}, b_{ik}) é zero, um, dois ou três.*

Introduziremos a seguir algumas considerações preliminares necessárias para a demonstração deste teorema.

Consideremos a função (5.4) e façamos $\phi = 2\pi$. Assim,

$$r(2\pi) = v_1(2\pi, \lambda_i) r_0 + v_2(2\pi, \lambda_i) r_0^2 + v_3(2\pi, \lambda_i) r_0^3 + \dots \quad (5.116)$$

Faremos algumas modificações para reagruparmos de forma conveniente os termos desta série.

Subtraindo r_0 em ambos os membros de (5.116), teremos uma função sucessão da seguinte forma

$$\begin{aligned} r(2\pi) - r_0 &= r_0[(v_1(2\pi, \lambda_i) - 1) + v_2(2\pi, \lambda_i) r_0 + v_3(2\pi, \lambda_i) r_0^2 + v_4(2\pi, \lambda_i) r_0^3 \\ &\quad + v_5(2\pi, \lambda_i) r_0^4 \dots]. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Os zeros isolados positivos da função sucessão $r(2\pi) - r_0$ correspondem aos ciclos limites.

Pelo Lema 5.0.13 e da equação (5.117), obtemos

$$\begin{aligned} r(2\pi) - r_0 &= r_0[(e^{2\pi\lambda_1} - 1) + (\lambda_1 \theta_2^{(1)}) r_0 + (\bar{v}_3 + \lambda_1 \theta_3^{(1)}) r_0^2 \\ &\quad + (\bar{v}_3 \theta_4^{(3)} + \lambda_1 \theta_4^{(1)}) r_0^3 + (\bar{v}_5 + \bar{v}_3 \theta_5^{(3)} + \lambda_1 \theta_5^{(1)}) r_0^4 \\ &\quad + (\bar{v}_5 \theta_6^{(5)} + \bar{v}_3 \theta_6^{(3)} + \lambda_1 \theta_6^{(1)}) r_0^5 + (\bar{v}_7 + \bar{v}_5 \theta_7^{(5)} + \bar{v}_3 \theta_7^{(3)} + \lambda_1 \theta_7^{(1)}) r_0^6 \\ &\quad + (\bar{v}_7 \theta_8^{(7)} + \bar{v}_5 \theta_8^{(5)} + \bar{v}_3 \theta_8^{(3)} + \lambda_1 \theta_8^{(1)}) r_0^7 + \dots]. \end{aligned}$$

Agora, colocando os termos $(\bar{v}_3 r_0^2)$, $(\bar{v}_5 r_0^4)$ e $(\bar{v}_7 r_0^6)$ em evidência na expressão acima, temos

$$\begin{aligned}
r(2\pi) - r_0 = & r_0 \{ (e^{2\pi\lambda_1} - 1) \\
& + (\lambda_1 \theta_2^{(1)}) r_0 + (\lambda_1 \theta_3^{(1)}) r_0^2 + (\lambda_1 \theta_4^{(1)}) r_0^3 + (\lambda_1 \theta_5^{(1)}) r_0^4 + (\lambda_1 \theta_7^{(1)}) r_0^6 \\
& + \bar{v}_3 r_0^2 [1 + r_0(\theta_4^{(3)} + r_0 \theta_5^{(3)} + r_0^2 \theta_6^{(3)} + r_0^3 \theta_7^{(3)} + \dots)] \\
& + \bar{v}_5 r_0^4 [1 + r_0(\theta_6^{(5)} + r_0 \theta_7^{(5)} + \dots)] \\
& + \bar{v}_7 r_0^6 [1 + r_0(\theta_8^{(7)} + \dots)] \}.
\end{aligned} \tag{5.118}$$

Definiremos

$$\begin{aligned}
f_3(r_0, \lambda_i) &= \theta_3^{(4)} + r_0 \theta_5^{(3)} + r_0^2 \theta_6^{(3)} + r_0^3 \theta_7^{(3)} + \dots, \\
f_5(r_0, \lambda_i) &= \theta_6^{(5)} + r_0 \theta_7^{(5)} + \dots, \\
f_7(r_0, \lambda_i) &= \theta_8^{(7)} + \dots.
\end{aligned} \tag{5.119}$$

Substituindo (5.119) em (5.118), obtemos

$$\begin{aligned}
r(2\pi) - r_0 = & r_0 \{ (e^{2\pi\lambda_1} - 1) \\
& + (\lambda_1 \theta_2^{(1)}) r_0 + (\lambda_1 \theta_3^{(1)}) r_0^2 + (\lambda_1 \theta_4^{(1)}) r_0^3 + (\lambda_1 \theta_5^{(1)}) r_0^4 + (\lambda_1 \theta_7^{(1)}) r_0^6 \\
& + v_3 r_0^2 [1 + r_0 f_3(r_0, \lambda_i)] \\
& + v_5 r_0^4 [1 + r_0 f_5(r_0, \lambda_i)] \\
& + v_7 r_0^6 [1 + r_0 f_7(r_0, \lambda_i)] \}.
\end{aligned}$$

Agora, colocando o termo $(\lambda_1 r_0)$ em evidência, segue-se que

$$\begin{aligned}
r(2\pi) - r_0 = & r_0 \{ (e^{2\pi\lambda_1} - 1) \\
& + (\lambda_1 r_0) [\theta_2^{(1)} + \theta_3^{(1)} r_0 + \theta_4^{(1)} r_0^2 + \theta_5^{(1)} r_0^3 + \dots] \\
& + v_3 r_0^2 [1 + r_0 f_3(r_0, \lambda_i)] \\
& + v_5 r_0^4 [1 + r_0 f_5(r_0, \lambda_i)] \\
& + v_7 r_0^6 [1 + r_0 f_7(r_0, \lambda_i)] \}.
\end{aligned} \tag{5.120}$$

Definiremos também

$$\overline{f}_1(r_0, \lambda_i) = \theta_2^{(1)} + \theta_3^{(1)} r_0 + \theta_4^{(1)} r_0^2 + \dots. \tag{5.121}$$

Assim, (5.120) é dada por

$$\begin{aligned}
r(2\pi) - r_0 = & r_0 \{ (e^{2\pi\lambda_1} - 1) + \lambda_1 r_0 \overline{f_1}(r_0, \lambda_i) \\
& + v_3 r_0^2 [1 + r_0 f_3(r_0, \lambda_i)] \\
& + v_5 r_0^4 [1 + r_0 f_5(r_0, \lambda_i)] \\
& + v_7 r_0^6 [1 + r_0 f_7(r_0, \lambda_i)] \}.
\end{aligned} \tag{5.122}$$

Agora, tomando o desenvolvimento de Taylor de $e^{2\pi\lambda_1}$, temos

$$\begin{aligned}
e^{2\pi\lambda_1} &= 1 + (2\pi \lambda_1) + \frac{(2\pi \lambda_1)^2}{2!} + \dots, \\
e^{2\pi\lambda_1} - 1 &= (2\pi \lambda_1) + \frac{(2\pi \lambda_1)^2}{2!} + \dots.
\end{aligned}$$

Substituindo em (5.122), obtemos

$$\begin{aligned}
r(2\pi) - r_0 = & r_0 \{ [(2\pi \lambda_1) + \frac{(2\pi \lambda_1)^2}{2!} + \dots] + \lambda_1 r_0 \overline{f_1}(r_0, \lambda_i) \\
& + v_3 r_0^2 [1 + r_0 f_3(r_0, \lambda_i)] \\
& + v_5 r_0^4 [1 + r_0 f_5(r_0, \lambda_i)] \\
& + v_7 r_0^6 [1 + r_0 f_7(r_0, \lambda_i)] \}.
\end{aligned} \tag{5.123}$$

Agora, colocando $(2\pi \lambda_1)$ em evidência e fazendo $\phi_1(\lambda_1) = \frac{2\pi \lambda_1}{2!}$, obtemos

$$\begin{aligned}
r(2\pi) - r_0 = & r_0 \{ 2\pi \lambda_1 [1 + \phi_1 + r_0 \frac{\overline{f_1}(r_0, \lambda_i)}{2\pi}] \\
& + v_3 r_0^2 [1 + r_0 f_3(r_0, \lambda_i)] \\
& + v_5 r_0^4 [1 + r_0 f_5(r_0, \lambda_i)] \\
& + v_7 r_0^6 [1 + r_0 f_7(r_0, \lambda_i)] \}.
\end{aligned}$$

Finalmente, fazendo $f_1(r_0, \lambda_i) = \frac{\overline{f_1}(r_0, \lambda_i)}{2\pi}$ na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
r(2\pi) - r_0 = & r_0 \{ 2\pi \lambda_1 [1 + \phi_1 + r_0 f_1(r_0, \lambda_i)] \\
& + v_3 r_0^2 [1 + r_0 f_3(r_0, \lambda_i)] \\
& + v_5 r_0^4 [1 + r_0 f_5(r_0, \lambda_i)] \\
& + v_7 r_0^6 [1 + r_0 f_7(r_0, \lambda_i)] \},
\end{aligned}$$

ou simplesmente

$$r(2\pi) - r_0 = r_0 \left(2\pi\lambda_1 f_1^* + \bar{v}_3 f_3^* r_0^2 + \bar{v}_5 f_5^* r_0^4 + \bar{v}_7 f_7^* r_0^6 \right), \quad (5.124)$$

em que

$$\begin{aligned} f_1^* &= [1 + \phi_1 + r_0 f_1(r_0, \lambda_i)], \\ f_3^* &= [1 + r_0 f_3(r_0, \lambda_i)], \\ f_5^* &= [1 + r_0 f_5(r_0, \lambda_i)], \\ f_7^* &= [1 + r_0 f_7(r_0, \lambda_i)]. \end{aligned}$$

As funções f_j^* ($j = 1, 3, 5, 7$) são séries de potências em r_0 cujos coeficientes são funções integrais dos parâmetros λ_i . Estas séries convergem em uma vizinhança $|\lambda_i - \lambda_i^*| < \varepsilon$ para um ponto arbitrário λ_i^* do espaço de coeficientes para todo r_0 suficientemente pequeno. Assim, as funções f_j^* , $j = 1, 3, 5, 7$ não se anulam em uma vizinhança da origem do espaço de coeficientes.

Demonstração do Teorema 5.0.8: Consideremos o sistema quadrático planar como dado em (5.1)

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2, \\ \dot{y} = x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2. \end{cases} \quad (5.125)$$

Agora mostraremos que a função sucessão $r(2\pi) - r_0$ dada em (5.124) possui no máximo três zeros positivos em uma vizinhança da origem. Consideraremos dois casos: **Caso i.** O ponto de equilíbrio é do tipo centro e **Caso ii.** O ponto de equilíbrio é do tipo foco.

Caso i. O ponto de equilíbrio é do tipo centro.

Neste caso, sejam todos os $v_k(2\pi, \lambda_i) = 0$ no ponto λ_i^* em questão. Assim, o sistema de equações diferenciais (5.1) tem um ponto de equilíbrio na origem do tipo centro. É possível escolhermos ε_1 e δ_1 , com $\varepsilon_1 < \varepsilon$, tais que para $|\lambda_i - \lambda_i^*| < \varepsilon_1$ e $0 < r(2\pi) \leq \delta_1$, tenhamos $f_j^* \geq \frac{1}{2}$, $j = 1, 3, 5, 7$. Em $0 < r(2\pi) \leq \delta_1$, reescreveremos a função sucessão dada em (5.124). Queremos dividir esta função sucessão pela função $f_1^* = [1 + \phi_1 r_0 f_1(r_0, \lambda_i)]$. Como f_1^* não se anula em uma vizinhança de λ_i^* , a divisão da função sucessão $r(2\pi) - r_0$ pela função f_1^* não altera o número de zeros positivos da função sucessão. Assim, temos

$$r(2\pi) - r_0 = r_0 f_1^* \left(2\pi\lambda_1 + r_0^2 \bar{v}_3 \frac{f_3^*}{f_1^*} + r_0^4 \bar{v}_5 \frac{f_5^*}{f_1^*} + r_0^6 \bar{v}_7 \frac{f_7^*}{f_1^*} \right). \quad (5.126)$$

Para r_0 suficientemente pequeno, expandiremos cada f_j^*/f_1^* em séries de potências de r_0 e λ_1 , com coeficientes que são funções integrais nos parâmetros restantes, como dado a seguir

$$\frac{f_j^*}{f_1^*} = 1 + \lambda_1 \phi_{21}^{(j)} + r_0 f_{21}^{(j)} = f_j^{**}, j = 3, 5, 7.$$

Da mesma maneira, escolheremos ε_2 e δ_2 tais que para todo λ_i em uma ε_2 -vizinhança do ponto λ_i^* e para $0 < r(2\pi) \leq \delta_2$, tenhamos $f_j^{**} \geq \frac{1}{2}, j = 3, 5, 7$. Assim, vemos que as funções f_j^{**} não se anulam em uma vizinhança de λ_i^* . Os zeros positivos da função (5.126), para $0 < r(2\pi) \leq \delta_2$, vão coincidir com os zeros da função a seguir

$$\Psi_0 = 2\pi\lambda_1 + \bar{v}_3 f_3^{**} r_0^2 + \bar{v}_5 f_5^{**} r_0^4 + \bar{v}_7 f_7^{**} r_0^6. \quad (5.127)$$

Notemos que o lado direito de (5.127) é igual ao que está em parênteses em (5.126). Agora, calculando $\frac{\partial \Psi_0}{\partial r_0}$, obtemos

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial r_0} = 2\bar{v}_3 f_3^{**} r_0 + 4\bar{v}_5 f_5^{**} r_0^3 + 6\bar{v}_7 f_7^{**} r_0^5, \quad (5.128)$$

em que

$$\begin{aligned} f_3^{**} &= 1 + \lambda_1 \phi_{21}^{(3)} + r_0 f_{21}^{(3)}, \\ f_5^{**} &= 1 + \lambda_1 \phi_{21}^{(5)} + r_0 f_{21}^{(5)}, \\ f_7^{**} &= 1 + \lambda_1 \phi_{21}^{(7)} + r_0 f_{21}^{(7)}. \end{aligned}$$

Notemos que, para $0 < r(2\pi) \leq \delta_2$, o número de zeros da função $r(2\pi) - r_0$ dada em (5.117), ou equivalentemente, da função (5.127), não podem exceder por mais que uma unidade o número de zeros positivos da função $\Psi_1 = \frac{\partial \Psi_0}{\partial r_0}$ dada por

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= 2\bar{v}_3(1 + \lambda_1 \phi_{21}^{(3)} + r_0 f_{21}^{(3)}) + 4\bar{v}_5(1 + \lambda_1 \phi_{21}^{(5)} + r_0 f_{21}^{(5)}) r_0^2 + \\ &6\bar{v}_7(1 + \lambda_1 \phi_{21}^{(7)} + r_0 f_{21}^{(7)}) r_0^4. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Agora, dividiremos (5.129) por $f_3^{**} = 1 + \lambda_1 \phi_{21}^{(3)} + r_0 f_{21}^{(3)}$ e definiremos a razão

$$\frac{1 + \lambda_1 \phi_{21}^{(j)} + r_0 f_{21}^{(j)}}{1 + \lambda_1 \phi_{21}^{(3)} + r_0 f_{21}^{(3)}} = 1 + \lambda_1 \phi_{31}^{(j)} + r_0 f_{31}^{(j)} = f_j^{***}, j = 5, 7.$$

Para todo λ_i em uma ε_3 -vizinhança do ponto λ_i^* e para $0 < r(2\pi) \leq \delta_3$, temos $f_j^{***} \geq \frac{1}{2}$. Então, os zeros positivos da função (5.129), para $0 < r(2\pi) \leq \delta_3$, vão coincidir com os zeros positivos da função

$$\Psi_2 = 2\bar{v}_3 + 4\bar{v}_5 f_5^{***} r_0^2 + 6\bar{v}_7 f_7^{***} r_0^4 \quad (5.130)$$

em que

$$\begin{aligned} f_5^{***} &= 1 + \lambda_1 \phi_{31}^{(5)} + r_0 f_{31}^{(5)}, \\ f_7^{***} &= 1 + \lambda_1 \phi_{31}^{(7)} + r_0 f_{31}^{(7)}. \end{aligned}$$

Agora, fazendo $\frac{\partial \Psi_2}{\partial r_0}$, obtemos

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial r_0} = 8\bar{v}_5(1 + \lambda_1 \phi_{31}^{(5)} + r_0 f_{31}^{(5)}) r_0 + 24\bar{v}_7(1 + \lambda_1 \phi_{31}^{(7)} + r_0 f_{31}^{(7)}) r_0^3. \quad (5.131)$$

Assim, o número de zeros da função (5.130) não pode exceder em mais que uma unidade o número de zeros positivos da função

$$\Psi_3 = \frac{\partial \Psi_2}{\partial r_0} = 8\bar{v}_5(1 + \lambda_1 \phi_{31}^{(5)} + r_0 f_{31}^{(5)}) + 24\bar{v}_7(1 + \lambda_1 \phi_{31}^{(7)} + r_0 f_{31}^{(7)}) r_0^2. \quad (5.132)$$

Aplicando este processo mais uma vez, obtemos

$$\Psi_4 = 48\bar{v}_7(1 + \lambda_1 f_{41}^{(7)} + r_0 f_{41}^{(7)}). \quad (5.133)$$

O número de zeros positivos da função (5.132) para $0 < r(2\pi) \leq \delta_4$ e todo λ_i^* em uma ε_4 -vizinhança do ponto λ_i não pode exceder o número de zeros da função (5.133) em mais que uma unidade. Assim, o número de zeros positivos da função $r(2\pi) - r_0$ dada em (5.117) não pode exceder o número de zeros positivos da função (5.133) em mais que três. Portanto, existe ε_5 e δ_5 tais que para $0 < r(2\pi) \leq \delta_5$ e todo λ_i em uma ε_5 -vizinhança de λ_i^* tal que a função Ψ_4 não tem nenhum zero. Logo, para todo λ_i em uma ε_0 -vizinhança de λ_i^* e para $0 < r(2\pi) \leq \delta_0$ em que ε_0 e δ_0 são o menor dos números ε_k e δ_k , $k = 1, 2, 3, 4, 5$, a função $r(2\pi) - r_0$ dada em (5.117) não possui mais do que três zeros positivos.

Caso *ii*. O ponto de equilíbrio é do tipo foco.

Neste caso queremos que o sistema de equações diferenciais (5.1) tenha um ponto de equilíbrio na origem do tipo foco. Assim, tomaremos os $v_k(2\pi, \lambda_i)$ com pelo menos um

diferente de zero, no ponto λ_i^* , em questão. Suponhamos que $v_3(2\pi, \lambda_i)$ seja o primeiro coeficiente não nulo da função sucessão $r(2\pi) - r_0$. Assim, teremos $\lambda_1^* = 0$ e $v_3(2\pi, \lambda_i) \neq 0$. Portanto, representaremos a função sucessão $r(2\pi) - r_0$ dada em (5.124) como,

$$r(2\pi) - r_0 = r_0(2\pi, \lambda_1) f_1^* + \bar{v}_3 f_3^* r_0^2 \quad (5.134)$$

em que

$$f_1^* = 1 + \phi_1 + r_0 f_1(r_0, \lambda_i),$$

$$f_3^* = 1 + r_0 f_3(r_0, \lambda_i).$$

Assim, encontraremos uma ε_1 -vizinhança do ponto λ_i^* tal que nesta vizinhança $\bar{v}_3 \neq 0$. Além disso, escolheremos ε_2 e δ_2 tal que para $0 < r(2\pi) \leq \delta_2$ e para todo λ_i em uma ε_2 -vizinhança do ponto λ_i^* , mantém-se as condições

$$1 + \lambda_1 \phi_1 + r_0 f_1 \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 1 + r_0 f_3(r_0, \lambda_i) \geq \frac{1}{2}.$$

Como anteriormente, no caso onde o ponto de equilíbrio era um centro, temos que $f_1^* = 1 + \phi_1 + r_0 f_1(r_0, \lambda_i)$ não se anula em uma vizinhança de λ_i^* . Então representaremos a função sucessão (5.134) da seguinte forma

$$r(2\pi) - r_0 = r_0 f_1^* \left(2\pi \lambda_1 + \bar{v}_3 \frac{f_3^*}{f_1^*} \right) r_0^2. \quad (5.135)$$

Como no outro caso, para r_0 suficientemente pequeno, expandiremos f_3^*/f_1^* em série de potências em r_0 e λ_1 como dado a seguir

$$\frac{f_3^*}{f_1^*} = 1 + \lambda_1 \phi_{21}^{(3)} + r_0 f_{21}^{(3)}.$$

Para $0 < r(2\pi) - r_0 \leq \delta_2$ os zeros positivos da função sucessão (5.135) coincidem com os zeros positivos de

$$\Psi = [2\pi \lambda_1 + \bar{v}_3(1 + \lambda_1 \phi_{21}^{(3)} + r_0 f_{21}^{(3)}) r_0^2].$$

Fazendo, $\frac{\partial \Psi_0}{\partial r_0}$, obtemos

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial r_0} = 2(\bar{v}_3 + \lambda_1 \phi_{**} + r_0 f_{**}) r_0. \quad (5.136)$$

Para $0 < r(2\pi) \leq \delta_2$, os zeros positivos da função (5.134) não podem exceder em mais que uma unidade o número de zeros positivos da função (5.136). Continuando este processo

exatamente como antes, segue-se que podemos escolher ε_0 e δ_0 de modo que, para $0 < r(2\pi) \leq \delta_0$. e todo λ_i em uma ε_0 -vizinhança, não exista mais de um zero da função sucessão $r(2\pi) - r_0$.

Analogamente, se tomássemos $v_5(2\pi, \lambda_i)$ como o primeiro coeficiente não nulo da função sucessão $r(2\pi) - r_0$, seria possível encontrar ε_0 e δ_0 de modo que para $0 < r(2\pi) \leq \delta_0$ e todo λ_i em uma ε_0 -vizinhança do ponto λ_i^* não exista mais de dois zeros da função sucessão $0 < r(2\pi) \leq \delta_0$. E para $v_7(2\pi, \lambda_i)$ sendo o primeiro coeficiente não nulo teríamos que para $0 < r(2\pi) \leq \delta_0$ e todo λ_i em uma ε_0 -vizinhança do ponto λ_i^* não existiria mais de três zeros da função sucessão $r(2\pi) - r_0$.

Agora mostraremos a outra parte do Teorema 5.0.8, ou seja, mostraremos que para o sistema dado, a ordem de ciclicidade do ponto de equilíbrio do tipo foco ou centro é zero, um, dois, ou três.

Consideremos novamente a função sucessão dada em (5.117) e que $v_7(2\pi, \lambda_i)$ seja o primeiro coeficiente não nulo dessa função sucessão. Suponhamos que $v_7(2\pi, \lambda_i) > 0$. Para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$ e $\delta < \delta_0$, as condições $f_j \geq \frac{1}{2}$, $j = 1, 3, 5, 7$ são satisfeitas para todo λ_i em uma ε -vizinhança do ponto λ_i^* para $0 < r(2\pi) \leq \delta_0$. Como estamos considerando que $v_7(2\pi, \lambda_i)$ é o primeiro coeficiente não nulo, temos as seguintes condições $\lambda_1 = \lambda_5 = \lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6 = 0$, ou seja, $v_1 = 1, v_2 = v_3 = \dots = v_6 = 0$. Assim, a condição $r(2\pi) - r_0 > 0$ é satisfeita para o ponto λ_i^* em questão e para $0 < r(2\pi) \leq \delta_0$.

Notemos que primeiramente fixamos $v_7(2\pi, \lambda_i) > 0$. Consideraremos $(\delta_0^{(1)}, \delta_0^{(2)})$ um intervalo contido em $(\frac{1}{2}\delta, \delta)$. Fazendo uma pequena variação em λ_4 numa ε -vizinhança de modo que \bar{v}_5 se torne negativo e ao mesmo tempo tão pequeno, que para todo $r(2\pi)$ satisfazendo a condição $\delta_0^{(1)} < r(2\pi) < \delta_0^{(2)}$ mantém o sinal da função sucessão positiva. Tomando $r(2\pi)$ suficientemente pequeno, o sinal da função sucessão $r(2\pi) - r_0$ coincide com o sinal de \bar{v}_5 (\bar{v}_3 não depende de λ_4). Assim, existe pelo menos **um zero** de $r(2\pi) - r_0$ em $(0, \delta)$. Consideraremos $r(2\pi) = r'(2\pi)$ um desses zeros.

Agora, faremos uma pequena variação em λ_5 e deixaremos fixos os coeficientes restantes. Como antes, esta variação é feita numa ε -vizinhança do ponto λ_i^* de modo que \bar{v}_3 se torne

positivo e tão pequeno tal que, *i*) para todo $r(2\pi)$ satisfazendo $\delta_1^{(1)} < r(2\pi) < \delta_1^{(2)}$, em que $(\delta_1^{(1)}, \delta_1^{(2)})$ é um certo intervalo contido em $(\delta_0^{(1)}, \delta_0^{(2)})$, mantém-se $r(2\pi) - r_0 < 0$, *ii*) para todo $r(2\pi)$ satisfazendo $\delta_2^{(1)} < \delta < \delta_2^{(2)}$, em que $(\delta_2^{(1)}, \lambda_2^{(2)})$ é um intervalo contido em $(0, r_1')$, mantém-se $r(2\pi) - r_0 < 0$ (\bar{v}_5 e \bar{v}_7 não dependem de λ_5).

Tomando $r(2\pi)$ suficientemente pequeno o sinal da função sucessão $r(2\pi) - r_0$ coincide com o sinal de \bar{v}_3 . Portanto, deve existir pelo menos **dois zeros** de $r(2\pi) - r_0$ no intervalo $(0, \delta)$. Seja $r(2\pi) = r''(2\pi)$ um desses zeros.

Agora, fazendo uma pequena variação em λ_1 (tornando-se negativo) de forma que, *i*) para todo $r(2\pi)$ satisfazendo a condição $\delta_3^{(1)} < r(2\pi) < \delta_3^{(2)}$, em que $(\delta_3^{(1)}, \delta_3^{(2)})$ é algum intervalo contido em $(\delta_0^{(1)}, \delta_0^{(2)})$, mantém-se $r(2\pi) - r_0 > 0$, *ii*) para $r(2\pi)$ satisfazendo a condição $\delta_4^{(1)} < r(2\pi) < \delta_4^{(2)}$, em que $(\delta_4^{(1)}, \delta_4^{(2)})$ é algum intervalo contido em $(\delta_1^{(1)}, \delta_1^{(2)})$, mantém-se $r(2\pi) - r_0 < 0$, *iii*) para $r(2\pi)$ satisfazendo a condição $\delta_5^{(1)} < r(2\pi) < \delta_5^{(2)}$, em que $(\delta_5^{(1)}, \delta_5^{(2)})$ é algum intervalo contido em $(0, r'')$, mantém-se $r(2\pi) - r_0 > 0$.

Para $r(2\pi)$ suficientemente pequeno, o sinal da função sucessão $r(2\pi) - r_0$ coincide com o sinal de λ_1 . Logo, deve existir pelo menos **três zeros** de $r(2\pi) - r_0$ no intervalo $(0, \delta)$.

Analogamente, para pontos λ_i^* do espaço de coeficientes, se considerarmos o primeiro coeficiente não nulo da função $r(2\pi) - r_0$ como sendo $v_3(2\pi, \lambda_i)$ é possível mostrar que existe uma δ -vizinhança da origem que possua **três ciclos limites**. Agora, se considerarmos $v_5(2\pi, \lambda_i)$ como sendo o primeiro coeficiente não nulo da função $r(2\pi) - r_0$ teríamos **um ciclo limite**. Para pontos do espaço de coeficientes em que $\lambda_1 \neq 0$, a origem (nosso ponto de equilíbrio) tem **ciclicidade de ordem zero**. Isto completa a prova do teorema.

Capítulo 6

Conclusões

Nesta dissertação exibimos uma solução para o Problema Foco–Centro para os sistemas de equações diferenciais definidos por campos polinomiais quadráticos planares. Tal resultado foi estabelecido por dois métodos: o método de Frommer e o método de Bautin.

Como sugestões para trabalhos futuros podemos citar:

1. Estudar o Problema Foco–Centro para sistemas cúbicos de equações diferenciais no plano;
2. Estudar a extensão do Problema Foco–Centro para sistemas quadráticos em \mathbb{R}^3 .

Bibliografia

- [1] ANDRONOV, A.A., LEONTOVICH, E.A., GORDAN, I.I., MAIER, A.G., *Theory of Bifurcation of Dynamical Systems on a Plane*, John Willey & Sons, New York, (1973).
- [2] BAUTIN, N.N., *On the number of limit cycles which the variations of coefficients from an equilibrium state of the type focus or center*, Amer. Math. Soc. Translations, **100** (1954), 1–19.
- [3] CHICONE, C., *Ordinary Differential Equations with Applications*, Applied Mathematical, Springer-Verlag, New York, (1999).
- [4] DULAC, H., *Sur les cycles limites*, Bull. Soc. Math, France, **51** (1923),45–188.
- [5] ÉCALLE, J., *Introduction aux fonctions analysable et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, (French), Hermann, Paris, (1992).
- [6] HILBERT, D., *Mathematical problems*, Reprinted from Bull. Amer. Math. Soc., **8** (1902), 473–479.
- [7] ILYASHENKO, Y. *Dulac’s memoir “On limit cycles” and related questions of the local theory of differential equations*, (Russian), Uspekhi Mat. Nauk, **40** (1985), 41–78.
- [8] ILYASHENKO, Y. *Finiteness theorems for limit cycles*, American Mathematical Society, Providence, RI, (1993).
- [9] KUZNETSOV, Y.A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Applied Math. Sciences, v. 112, Springer-Verlag, Berlin, (1995).

- [10] MAOMAN, H., TONGHUA, Z., HONG, Z., *On the number and distribution of limit cycles in a cubic system*, *Internacional Journal of Bifurcation and Chaos*, **14** (2004), 4285–4292.
- [11] SMALE, S., *Mathematical problems for the next century*, *Math. Intelligencer*, **20** (1998), 7–15.
- [12] SONGLING, S., *A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems*, *Sci. Sinica*, **23** (1980), 153–158.
- [13] SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias Projeto Euclides*, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).
- [14] QUIAN-YE, Y., *Theory of Limit Cycles*, Translation of Mathematical Monographs, v. 66, American Math. Society Translations, Providence, RI, (1986).
- [15] YU, P., HAN, M., *Twelve limit cycles in a cubic case of the 16th Hilbert problem*, *Internacional Journal of Bifurcation and Chaos*, **15** (2005), 2191–2205.