

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATERIAIS PARA
ENGENHARIA**

**MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE
MATERIAIS COMPÓSITOS ESTRUTURAIS
INCORPORANDO MATERIAL VISCOELÁSTICO PARA
O CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÃO E RUÍDO**

Adriana Amaro Diacenco

Itajubá, março de 2010.

D536m

Diacenco, Adriana Amaro

Modelagem por elementos finitos de materiais compósitos estruturais incorporando material viscoelástico para o controle passivo de vibração e ruído / Adriana Amaro Diacenco. -- Itajubá, (MG) : [s.n.], 2010.

69 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Edmilson Otoni Côrrea.

Coorientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Elementos finitos. 2. Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior. I. Côrrea, Edmilson Otoni, orient. II. Lima, Antônio Marcos Gonçalves de, coorient. III. Universidade Federal de Itajubá. IV. Título.

ADRIANA AMARO DIACENCO

**MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE MATERIAIS
COMPÓSITOS ESTRUTURAIS INCORPORANDO MATERIAL
VISCOELÁSTICO PARA O CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÃO
E RUÍDO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Materiais para Engenharia da Universidade Federal de Itajubá, como requisitos para obtenção do título **MESTRE EM MATERIAIS PARA ENGENHARIA**

Área de Concentração: Polímeros e Semicondutores.

Orientador: Edmilson Otoni Côrrea

Co-orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima

**ITAJUBÁ – MG
2010**

Dedico esta Dissertação à minha mãe e meu avô por terem sempre me ajudado e apoiado em todos os momentos de minha vida e aos meus orientadores que estiveram sempre presentes no desenvolvimento deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos orientadores, Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima pela orientação imprescindível para o desenvolvimento do trabalho, pela oportunidade, incentivo, dedicação e amizade durante o desenvolvimento desta Dissertação e ao Prof. Dr. Edmilson Otoni Côrrea pelas oportunidades a mim conferidas, pela amizade, ajuda e disponibilidade em me atender quando foi preciso e, por ter me apresentado ao prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima que depositou sua confiança neste trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro. Aos programas de Pós-graduação em Materiais para Engenharia e Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Itajubá.

DIACENCO, A. A. **Modelagem por elementos finitos de materiais compósitos estruturais incorporando material viscoelástico para o controle passivo de vibração e ruído.** 2010. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá, MG.

RESUMO

Este trabalho é dedicado à modelagem por elementos finitos de estruturas compostas laminadas incorporando materiais viscoelásticos para o controle passivo de vibrações e ruídos. Neste contexto, foi estudada a dependência da capacidade de amortecimento dos materiais viscoelásticos com relação à frequência de excitação e temperatura e à incorporação do amortecimento viscoelástico em modelos de elementos finitos de sistemas estruturais. Para a modelagem de estruturas compostas laminadas foi empregada a Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior combinada com um elemento de placa plana retangular do tipo Serendipity contendo oito nós e onze graus de liberdade por nó. O amortecimento viscoelástico é representado pelo modelo do módulo complexo associado ao conceito de fator de deslocamento e frequência reduzida de acordo com o Princípio da Superposição Frequência-Temperatura. Além disso, foi implementado um método de redução de sistemas amortecidos viscoelasticamente via utilização de uma base de redução constante (independente da frequência e da temperatura) com o objetivo de reduzir o tempo computacional requerido para o cálculo das respostas dinâmicas dos sistemas amortecidos. Para avaliar a influência dos parâmetros de projeto nas respostas dinâmicas, é apresentada uma formulação baseada em derivadas de primeira ordem para a análise de sensibilidade das funções de resposta em frequência em relação a um conjunto de parâmetros de projeto pré-definidos e que foram fatorados das matrizes elementares de elementos finitos via procedimento de parametrização do modelo. Toda a modelagem matemática foi implementada computacionalmente utilizando o ambiente de programação MATLAB[®], e os resultados obtidos permitiram não só avaliar o desempenho dos materiais viscoelásticos em termos da atenuação dos níveis de vibração, mas também, ilustrar os procedimentos de modelagem e incorporação do amortecimento viscoelástico em modelos de elementos finitos de estruturas compostas.

Palavras Chave: Elementos finitos. Materiais compósitos estruturais. Material viscoelástico. Controle passivo de vibração e ruídos. Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior.

DIACENCO, A. A. **Finite Element Modeling of Composite Laminated Structures Incorporating Viscoelastic Materials for the Passive Control of Vibration and Noise.** 2010. M. Sc. Thesis, Federal University of Itajubá, MG.

ABSTRACT

This work is dedicated to the finite element modeling procedures of composite laminated structures incorporating viscoelastic materials for the passive control of vibrations and noises. In this context, the frequency- and temperature-dependence of the viscoelastic behavior and the incorporation of the viscoelastic damping into finite element models of structural systems have been studied. In order to model composite laminated structures, the Higher-order Shear Deformation Theory combined with a rectangular Serendipity element composed by eight nodes and eleven degrees of freedom per node have been used. The viscoelastic damping is represented by the complex modulus approach associated with the concept of shift factor and reduced frequency according to the Frequency-Temperature Superposition Principle. Moreover, a condensation strategy of the viscoelastic systems by using a constant basis of reduction (frequency- and temperature-independent) has been developed with the aim of reducing the time consuming required to compute the dynamic responses of damped systems. In order to evaluate the influence of the design parameters on the dynamic responses, the first-order derivatives for the sensitivity analysis of the frequency responses functions with respect to the design variables that have been factored-out of the elementary finite element matrices by the parameterization process have been investigated. The mathematical modeling has been implemented by using the commercial available software MATLAB[®], and the numerical results obtained enables us to evaluate the performance of the viscoelastic materials in reducing the vibration levels on the amplitudes resonance picks, and to illustrate the modeling procedures and incorporation of the viscoelastic damping into finite element models of composite laminated plates systems.

Keywords: Finite element. Composite materials, viscoelastic materials, passive vibration control, higher-order shear deformation theory.

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS LATINOS

\bar{E} :	módulo de elasticidade longitudinal
\bar{G} :	módulo de cisalhamento
$F(\sigma_0, t)$:	função fluência
$R(\varepsilon_0, t)$:	função de relaxação
$G(t)$:	função módulo
$H(s)$:	função de dissipação
$G'(\omega)$:	módulo de armazenamento
$G''(\omega)$:	módulo de perda
M :	matriz de massa
K :	matriz de rigidez global
K_e :	matriz de rigidez da subestrutura elástica
$K_v(\omega, T)$:	matriz de rigidez da subestrutura viscoelástica
$Q(\omega)$:	vetor de deslocamento
$F(\omega)$:	vetor das forças externas
$Y(\omega)$:	vetor das respostas
$Z(\omega, T)$:	matriz da rigidez dinâmica complexa
$H(\omega, T)$:	matriz de flexibilidade dinâmica
$D_b(z)$:	operador diferencial associado às deformações de flexão-membrana
$D_s(z)$:	operador diferencial associado às deformações de cisalhamento
$C_b^{(k)}(\theta_k)$:	matriz ortotrópica associada à flexão
$C_s^{(k)}(\theta_k)$:	matriz ortotrópica associada ao cisalhamento

SÍMBOLOS GREGOS

$\sigma(t)$:	tensão
$\varepsilon(t)$:	deformação
μ :	viscosidade
$\nu(s)$:	coeficiente de Poisson
$\eta(\omega)$:	fator de perda
ω_r :	frequência reduzida
α_T :	fator de deslocamento
λ_i :	autovalores
ε_b :	deformação de flexão-membrana
ε_s :	Deformação de cisalhamento
(ξ, η) :	coordenadas locais
ρ	densidade de massa

LISTA DE ABREVIACÕES

CLT	Teoria Clássica dos Laminados
FSDT	Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem
HSDT	Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior
MEF	Método dos Elementos Finitos
FRFs	Funções de Resposta em Frequência
g.d.l's	graus de liberdade
CCA	comportamento conservativo associado
SCA	sistema conservativo associado

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2	MATERIAIS COMPÓSITOS	6
	2.1. Introdução aos materiais compósitos	6
	2.2. Classificação dos materiais compósitos	10
	2.2.1. Compósitos particulados	10
	2.2.2. Compósitos reforçados com fibras	11
	2.2.3. Compósitos estruturais	11
CAPÍTULO 3	CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS	14
	3.1. Viscoelasticidade linear	14
	3.2. Módulo Complexo	17
	3.3. Influência da Frequência e Temperatura nas propriedades dos materiais viscoelásticos	17
	3.4. Princípio da Superposição Frequência-Temperatura	20
	3.5. Representação do módulo complexo	22
	3.6. Incorporação do comportamento viscoelástico em modelos de elementos finitos	24
	3.7. Métodos de redução de modelos aplicados a sistemas tratados viscoelasticamente	26
CAPÍTULO 4	MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE COMPÓSITOS ESTRUTURAIS	30
	4.1. Introdução	30
	4.2. Formulação por elementos finitos de placas compostas laminadas	33
	4.3. Parametrização das matrizes elementares	36
	4.4. Placas compostas sanduíches contendo camadas viscoelásticas	40
	4.5. Emprego das diferenças finitas para a análise de sensibilidade paramétrica das respostas dinâmicas	42

4.5.1. Sensibilidade das FRFs com relação aos parâmetros Estruturais	43
4.5.2. Sensibilidade das FRFs com relação a temperatura	44
CAPÍTULO 5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	45
5.1. Placa composta laminada com amortecimento inerente	45
5.2. Placa composta laminada contendo amortecimento viscoelástico	47
5.3. Efeito da temperatura no comportamento dinâmico da placa composta sanduíche	48
5.4. Análise de sensibilidade da placa composta laminada contendo amortecimento inerente	49
5.5. Análise de sensibilidade de uma estrutura composta sanduíche	53
5.6. Cálculo das FRFs do sistema perturbado utilizando os valores de sensibilidade	55
CAPÍTULO 6 CONCLUSÕES GERAIS E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE	57
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	60
ANEXO A ELEMENTO SERENDIPITY	66
ANEXO B OPERADORES DIFERENCIAIS	68

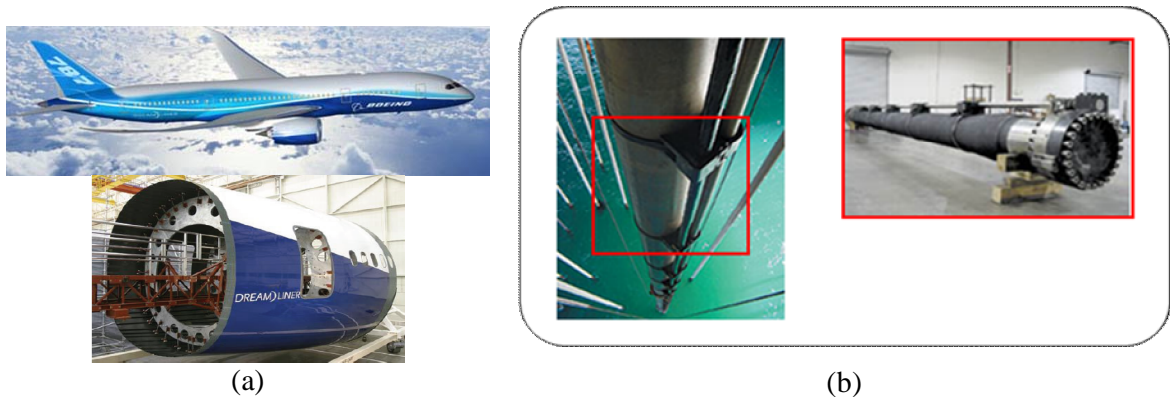
CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Materiais compósitos têm sido utilizados cada vez mais em substituição aos materiais convencionais como, por exemplo, os materiais metálicos, os cerâmicos, e os polímeros. Isso se deve às propriedades superiores e/ou específicas desses materiais, dentre as quais, pode-se citar a sua relação resistência/peso muito superior quando comparado aos materiais metálicos tradicionais como aço e alumínio (Callister Jr., 2002; Faria, 2006).

As inúmeras possibilidades de combinações dos componentes bem como o desenvolvimento de novos materiais e de novas tecnologias de fabricação, têm contribuído para o aumento crescente do emprego dos materiais compósitos. Como consequência natural de aplicações cada vez mais numerosas, pode-se notar um crescente avanço nas pesquisas voltadas para a modelagem matemática e simulações numérico-computacionais do comportamento dinâmico de materiais compósitos. Confeccionados de acordo com as necessidades mecânicas de projeto, os materiais compósitos são a solução mais adequada quando se necessita de estruturas mais leves e resistentes, ou combinações de propriedades mecânicas difíceis de serem obtidas nos materiais convencionais (Pinheiro et al., 2006).

A aplicação de materiais compósitos em diversos ramos da engenharia tem crescido significativamente nos últimos anos, destacando-se as aplicações nas indústrias aeroespaciais, automobilística, civil, petrolífera, dentre outras. Na indústria aeronáutica, os materiais compósitos têm sido utilizados na fabricação de partes de fuselagens de aviões comerciais como, por exemplo, do *Boeing 787*, que tem 50% de sua estrutura em materiais compósitos, como ilustrado na Figura 1.1(a). Já na indústria petrolífera, como ilustrado na Figura 1.1(b), os materiais compósitos são empregados na fabricação de *risers*, por serem mais leves, mais resistentes à fadiga e à corrosão em relação ao aço.



Figuras 1.1 – (a) Boeing 787 e sua fuselagem; (b) *Riser* fabricado em material compósito.

Existem diferentes classificações para os materiais compósitos disponíveis na literatura. Eles podem ser classificados de acordo com a morfologia da fase dispersa em compósitos reforçados com partículas, compósitos reforçados com fibras e compósitos estruturais (Reddy, 1997). De acordo com Callister Jr. (2002), existem ainda pelo menos duas subclasses para cada uma das classificações anteriores. Nesta dissertação, é de interesse particular o estudo dos compósitos estruturais, sendo os mais comuns, os compósitos estruturais do tipo laminados e do tipo sanduíches (Mendonça, 2005).

No estado atual de desenvolvimento tecnológico, os materiais compósitos estruturais estão sendo cada vez mais integrados em diversos produtos de alta tecnologia, notadamente nos setores aeroespacial e automobilístico. Neste tipo de aplicação, as estruturas compostas laminadas e/ou sanduíches estão frequentemente expostas a perturbações estáticas e dinâmicas que afetam significativamente as características mecânicas e de resposta (como resposta estática podem-se citar as deformações e distribuições de tensões, e como dinâmica, podem-se citar as funções de resposta em frequência e modos de vibração) de tais estruturas. Além disso, ocorre um comprometimento da integridade estrutural dessas estruturas podendo levá-las ao colapso. Neste contexto, um aspecto importante a ser investigado, e que tem mobilizado um grande número de pesquisadores em todo o mundo, é o procedimento de modelagem numérico-computacional de estruturas compostas laminadas do tipo sanduíche combinados com técnicas passivas de atenuação de vibrações e ruídos (Berthelot, 2006; Faria et al., 2008; de Lima et al., 2009).

Em meio às inúmeras técnicas empregadas para o controle de vibração e ruído em sistemas mecânicos, as chamadas técnicas de controle passivo têm sido incorporadas em muitos sistemas

industriais devido às inúmeras vantagens quando comparadas com as técnicas de controle ativo, como por exemplo, baixo custo efetivo e de fácil manutenção e aplicação (de Lima, 2007). Além disso, tais técnicas não necessitam de nenhuma fonte de energia externa, fato que garante inerente estabilidade ao sistema e as tornam mais bem adaptadas a aplicações em sistemas industriais de grande porte. Tipicamente, o controle passivo de vibrações pode ser obtido com a utilização de materiais viscoelásticos, que são capazes de absorver a energia vibratória do sistema e dissipá-la sob a forma de calor. Os materiais viscoelásticos podem ser aplicados sob a forma de tratamentos superficiais e/ou dispositivos discretos como apoios viscoelásticos translacionais e juntas rotacionais, como ilustrado na Figura 1.2.

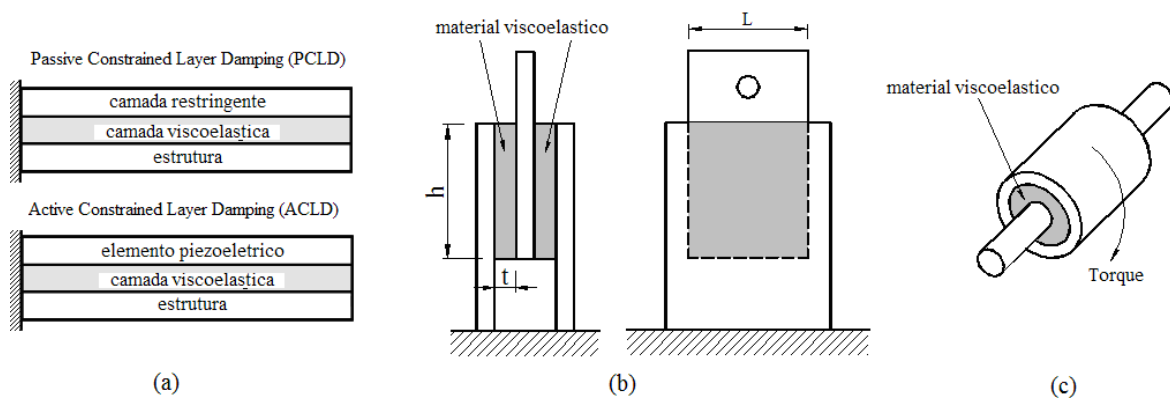


Figura 1.2 – Tipos de tratamentos viscoelásticos: tratamento superficial por camada restrita passiva e ativa (a), e por apoios translacionais (b) e juntas rotacionais (c).

Em aplicações nas quais os carregamentos dinâmicos estão envolvidos, o interesse em atenuar os níveis de vibração e ruído torna-se um fator de extrema importância, visto que, a não resolução deste problema, pode comprometer a integridade da estrutura. Além disso, as respostas dinâmicas de sistemas estruturais podem ser sensíveis a certos parâmetros de projeto que devem ser considerados durante a fase de concepção inicial do projeto de estruturas complexas de engenharia. Nestes casos, realiza-se uma análise de sensibilidade paramétrica das respostas dinâmicas na tentativa de avaliar a influência de um ou mais parâmetros de projeto no comportamento dinâmico dos sistemas mecânicos. Para os compósitos estruturais do tipo laminados, os parâmetros de projeto que foram considerados nas respostas dinâmicas do sistema são: as espessuras das camadas e as orientações das fibras. Para os compósitos estruturais do tipo sanduíche incorporando um núcleo viscoelástico, a temperatura torna-se um parâmetro de projeto significativo, uma vez que as propriedades dos materiais viscoelásticos dependem fortemente da temperatura e da frequência de excitação (Nashif et al., 1985).

É bem conhecido o fato de que materiais compósitos reforçados com fibras apresentam mecanismos de amortecimento inerente associados ao comportamento viscoelástico das matrizes poliméricas e também a outros mecanismos de dissipação interna. Mas tal mecanismo pode ser insuficiente, dependendo das necessidades de projeto de cada caso, requerendo a utilização de tratamentos viscoelásticos internos, como por exemplo, a aplicação de um núcleo viscoelástico entre as camadas de materiais compósitos, possibilitando o aumento do amortecimento. No contexto do controle passivo de vibrações e ruído, poucos trabalhos têm sido propostos com o intuito de representar matematicamente o comportamento dinâmico de materiais compósitos com amortecimento viscoelástico, o que motiva o trabalho proposto nesta dissertação.

As dificuldades econômicas e práticas, associadas à avaliação do comportamento estrutural de sistemas dinâmicos de interesse industrial, têm motivado o desenvolvimento e o uso de métodos de simulação numérica. Dentre esses, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem-se mostrado o mais adequado, principalmente em virtude de suas características vantajosas de flexibilidade de modelagem e relativa facilidade de implementação numérico-computacional de problemas complexos de engenharia (Sias, 2004; de Lima et al., 2009).

No que diz respeito à modelagem de estruturas compostas laminadas, na literatura, pode ser encontrada uma grande diversidade de teorias utilizadas na formulação de elementos finitos de materiais compósitos, cada uma delas apresentando características favoráveis e desfavoráveis, notadamente em relação à precisão, domínio de aplicação, e esforço computacional envolvido na sua implementação (Reddy, 1997; de Lima et al., 2009). A principal diferença entre elas é a ordem das funções polinomiais escolhidas para aproximar as variáveis de campo mecânicas e aplicabilidade.

Dentre as várias teorias que foram desenvolvidas para a modelagem de estruturas compostas laminadas, a Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior (*Higher-order Shear Deformation Theory – HSDT*) proposta por Lo et al. (1977) foi escolhida no presente estudo, uma vez que aproxima as variáveis mecânicas por uma função polinomial de terceira ordem e seus resultados se aproximam bem dos resultados obtidos através do emprego da Teoria da Elasticidade Tridimensional (Reddy, 1997). Apesar de apresentar um maior número de graus-de-liberdade (g.d.l.'s) quando comparada a outras teorias, as principais vantagens da HSDT são: (i) pode ser usada para a modelagem de placas finas e espessas; (ii) descreve o efeito das deformações cisalhantes transversais e normal; (iii) não requer o uso de um fator de correção para as deformações cisalhantes.

Com base no que foi exposto acima, o principal objetivo deste trabalho é a implementação numérico-computacional utilizando o método dos elementos finitos para placas compostas do tipo

laminadas e sanduíches incorporando materiais viscoelásticos para o controle passivo de vibração e ruído. É dada ênfase às técnicas de redução de modelos viscoelásticos no domínio frequencial para a redução do custo computacional envolvido no cálculo das funções de resposta em frequência.

Além deste capítulo introdutório, esta dissertação está estruturada em cinco capítulos cujo conteúdo é organizado da seguinte forma:

O Capítulo 2 apresenta um resumo geral sobre os principais tópicos inerentes aos materiais compósitos no contexto desta dissertação, tais como: constituição dos materiais compósitos, algumas de suas aplicações, e classificação dos mesmos em termos da morfologia dos agentes de reforço.

No Capítulo 3 é apresentado um resumo geral sobre a viscoelasticidade linear, e sobre os modelos matemáticos utilizados para representar este tipo de amortecimento. Neste trabalho de dissertação, há o interesse pela viscoelasticidade linear aplicada aos materiais homogêneos isotrópicos, para a introdução do módulo complexo. Finalmente, a utilização do módulo complexo combinado com modelos de elementos finitos de sistemas dinâmicos é discutida, onde é apresentada uma técnica de redução de modelos viscoelásticos via utilização de uma base de redução independente da frequência.

O Capítulo 4 é dedicado à modelagem de elementos finitos de elementos estruturais do tipo placas retangulares laminadas e sanduíches, baseada em de Lima et al. (2010), bem como o processo de parametrização do modelo de elementos finitos, onde são colocados em evidência os parâmetros de projeto que definem o espaço de concepção. A parametrização é uma etapa essencial da modelagem por elementos finitos facilitando a introdução das incertezas e/ou modificações paramétricas e o cálculo das sensibilidades paramétricas que são freqüentemente utilizadas nos processos de otimização e/ou de ajuste de modelos.

Para verificar a metodologia proposta, foram realizadas simulações numéricas utilizando estruturas simples como placas planas laminadas com amortecimento inerente e placas laminadas do tipo sanduíches contendo camadas viscoelásticas.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões gerais, bem como as perspectivas de continuidade de trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

MATERIAIS COMPÓSITOS

Neste capítulo são apresentados os principais conceitos relacionados aos materiais compósitos no contexto deste trabalho. Também é feita uma abordagem sobre a constituição dos materiais compósitos, bem como de algumas de suas aplicações e classificação em termos da morfologia de seus agentes de reforço. Aspectos mais específicos sobre a teoria dos materiais compósitos como processos de fabricação e comportamento mecânico podem ser encontrados em Callister Jr. (2002), Mendonça (2005) e Reddy (1997).

2.1. Introdução aos materiais compósitos

Desde a antiguidade até os dias atuais, a procura de novos materiais com propriedades específicas para atender determinados requisitos de projeto tem despertado o interesse de pesquisadores de todo o mundo. Os Hebreus já utilizavam palhas cortadas na fabricação de tijolos de argila (Tapia, 1998), sendo estes, considerados como materiais compósitos, visto que a argila é responsável pela resistência mecânica à compressão e as fibras pela diminuição do peso e aumento da resistência à tração (Faria, 2006).

Um material compósito é um conjunto de dois ou mais materiais diferentes, combinados em escala macroscópica para funcionarem como uma única unidade, visando obter um conjunto de propriedades que nenhum dos componentes individualmente apresenta (Mendonça, 2005). Como consequência desta composição, os materiais compósitos são heterogêneos e, na maioria das vezes, apresentam comportamento mecânico anisotrópico. Neste contexto, aspectos relacionados ao comportamento mecânico podem ser facilmente manipulados no projeto de um material compósito, como por exemplo, a resistência estática, resistência à fadiga, rigidez, resistência à corrosão, resistência à abrasão e redução de peso, sendo essas, algumas das principais vantagens dos materiais compósitos em relação aos materiais convencionais como aço e alumínio. Isto tem motivado o uso em grande escala dos materiais compósitos, principalmente a partir da primeira metade do século XX sendo bastante empregados nas indústrias aeroespacial, naval, automobilística, petrolífera e eletrônica (Callister Jr., 2002).

A partir da década de 60, os materiais compósitos de alto desempenho foram introduzidos de maneira definitiva na indústria aeroespacial. O desenvolvimento das fibras de carbono, boro, e quartzo ofereceram aos projetistas a oportunidade de flexibilizar os projetos estruturais na tentativa de atender às necessidades de desempenho em vôo de aeronaves e veículos espaciais. Ao mesmo tempo, os compósitos carbono/carbono (compósitos de Carbono Reforçados com Fibras de Carbono - CRFC) e tecidos de fibras de quartzo foram desenvolvidos e submetidos a severas condições térmicas e de erosão, em cones dianteiros de foguetes, em partes externas de veículos submetidos à reentrada na atmosfera terrestre e em aviões supersônicos. Além disso, os avanços obtidos com os materiais compósitos criaram novas oportunidades para estruturas de alto desempenho e com baixo peso, favorecendo o desenvolvimento de sistemas estratégicos, como na área de mísseis, foguetes e aeronaves de geometrias complexas (Rezende e Botelho, 2000).

A empresa Boeing lançou em 2007 o modelo 787 (ver Fig. 1.1(a), Capítulo 1), o *Dreamliner*, cuja estrutura primária, incluindo fuselagem e asas, é 50% feita em material compósito. Dentre as vantagens enumeradas pela Boeing estão a redução de 20% no consumo de combustível e o ganho de velocidade quando se compara o modelo 787 com aviões de porte similar. Também houve benefícios para processo de produção: para manufaturar uma seção da fuselagem, a empresa eliminou 1,5 mil folhas de alumínio ao usar o compósito.

A Fig. 2.1 mostra um histograma representativo do aumento significativo da utilização de materiais compósitos na indústria aeronáutica (Gay et al., 2002).

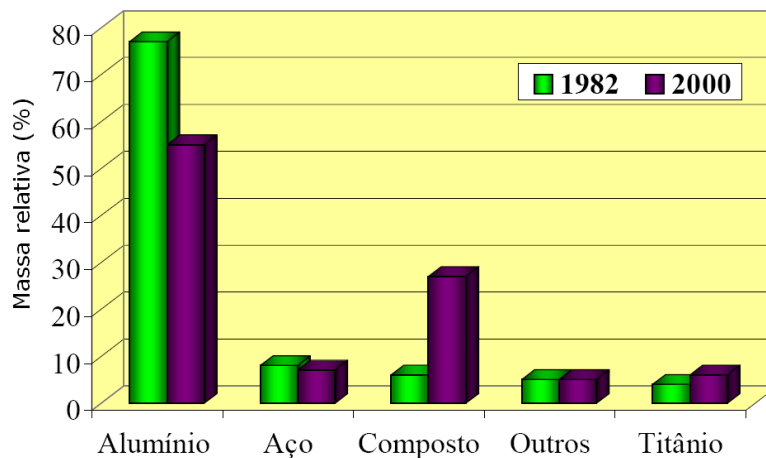


Figura 2.1 – Evolução da massa relativa dos principais materiais utilizados na indústria aeronáutica (adaptado de Gay et al., 2002).

A utilização dos materiais compósitos dentro da indústria automobilística é bem mais recente do que na área aeronáutica. Inicialmente, eram produzidos somente pára-choques e tetos de automóveis. Atualmente, o material compósito é utilizado para a fabricação de cárters de óleo, colunas de direção, árvores de transmissão, molas laminadas, painéis, etc. Uma das grandes vantagens advindas com a utilização dos materiais compósitos no meio automobilístico é, além da redução do peso, a facilidade em confeccionar peças com superfícies complexas (Pereira, 1999).

Na indústria petrolífera, os materiais compósitos são utilizados na fabricação de *risers* como ilustrado na Fig.1.1(b) que são estruturas responsáveis pelo transporte de petróleo do poço submarino até a plataforma *offshore*. Os *risers* fabricados em material compósito apresentam vantagens sobre os convencionais em aço porque são mais leves e mais resistentes à fadiga e à corrosão, além de serem bons isolantes térmicos (Sousa et al., 2007).

Segundo Mendonça (2005), uma das primeiras hipóteses utilizadas na teoria de materiais compósitos é que eles se comportam de forma elástica e linear – são duas definições distintas. O comportamento elástico significa que, se o corpo for carregado, após o descarregamento ele retornará completamente às suas formas e dimensões originais, sem apresentar nenhuma deformação residual. O comportamento linear pode ser entendido como uma proporcionalidade entre o carregamento e a resposta. O comportamento do material compósito pode ser também estudado em termos da micromecânica, envolvendo as interações microscópicas entre os elementos constituintes da lâmina (matriz e reforços) como ilustrado na Fig. 2.2. Este estudo possibilita a obtenção das propriedades médias de cada lâmina, tais como módulo de elasticidade e densidade que são obtidos a partir das frações volumétricas das fibras e da matriz, através de um procedimento denominado de regra da mistura. Já a macromecânica estuda o comportamento da lâmina como um todo e, nesta abordagem, a lâmina é considerada um corpo homogêneo embora anisotrópico, com propriedades mecânicas globais supostas conhecidas e determinadas previamente quer pelas formulações da micromecânica quer por técnicas experimentais (Mendonça, 2005; Faria, 2006). A título de exemplo do estudo da macromecânica básica de estruturas compostas laminadas, pode-se citar o trabalho realizado por Pinheiro et al. (2006) em que um aplicativo computacional foi desenvolvido com o objetivo de facilitar o trabalho dos projetistas de estruturas laminadas compostas no processo de escolha das melhores opções durante a sua montagem.

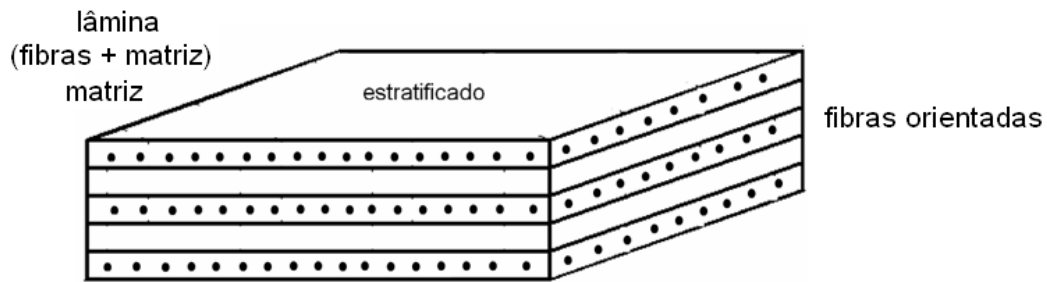


Figura 2.2 – Estratificado laminado.

Muitos materiais compósitos são constituídos por apenas duas fases; uma é chamada de matriz, que é contínua e envolve a outra fase, chamada frequentemente de fase dispersa. As propriedades dos compostos são uma função das propriedades das fases constituintes, das suas quantidades relativas e da geometria da fase dispersa. A distribuição e interação destas duas fases determinam as propriedades finais da estrutura composta (Callister Jr., 2002). A fase matriz pode ser feita a partir de metais, polímeros ou cerâmicas. Em geral, os metais e os polímeros são mais utilizados na constituição da matriz, uma vez que é desejável alguma ductilidade. A matriz possui várias funções, a saber: (a) interligar as fibras; (b) atuar como meio transmissor e distribuidor das tensões externas aplicadas para as fibras; (c) proteger as fibras individuais contra danos superficiais, como resultado de abrasão mecânica ou de reações químicas com o ambiente.

Tecnologicamente, os materiais compósitos mais importantes são aqueles em que a fase dispersa encontra-se na forma de uma fibra, pois apresentam elevados limites de resistência à tração. As fibras podem ser feitas de materiais policristalinos ou amorfo, dentre os tipos mais comuns de fibras podem-se citar as fibras de vidro, de aramida (*Kevlar*), de carbono e de carvão de silício (Callister Jr., 2002).

2.2. Classificação dos materiais compósitos

Os materiais compósitos são classificados em termos da morfologia de seus agentes de reforço, sendo que, com esta classificação tem-se os compósitos particulados, os compósitos reforçados com fibras e os compósitos estruturais, conforme ilustrado na Fig. 2.3.

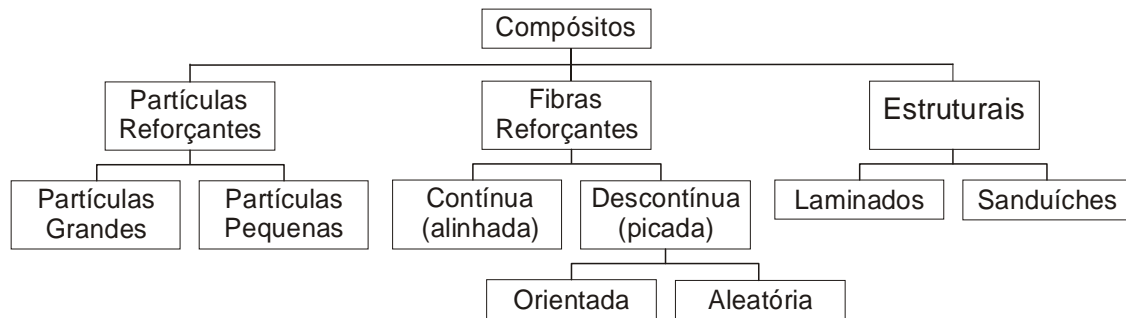


Figura 2.3 – Esquema de classificação dos materiais compósitos (adaptado de Tita (1999)).

2.2.1. Compósitos Particulados

Os compósitos reforçados com partículas podem ser de dois tipos: os compósitos reforçados com partículas grandes, e os compósitos reforçados por dispersão. A Fig. 2.4 ilustra um material compósito particulado. A distinção entre essas subclassificações está baseada no mecanismo de reforço ou aumento de resistência, onde a fase particulada é mais dura e mais rígida do que a matriz.

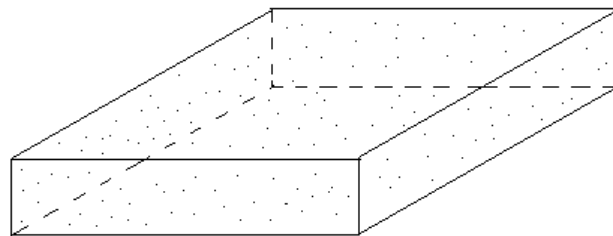


Figura 2.4 – Compósito particulado

Os compósitos reforçados com partículas grandes não podem ser tratados do ponto de vista atômico ou molecular, sendo que, para tais materiais, é empregada a teoria da mecânica do contínuo. Um exemplo de compósito com partículas grandes é o concreto, que é composto por cimento (matriz) e areia e brita (elementos particulados). Pode-se citar ainda o cermeto que é largamente utilizado como ferramenta de corte para aços endurecidos, sendo o mais comum, constituído por partículas extremamente duras de uma cerâmica refratária à base de carbeto, tal como o carbeto de tungstênio (WC) ou carbeto de titânio (TiC), envolvidas em uma matriz de metal como o cobalto ou níquel.

No caso dos compósitos que têm sua resistência aumentada por dispersão, as partículas são, em geral, muito menores, com diâmetro entre 0,01 e 0,1 μm . As interações partícula-matriz que

levam ao aumento da resistência ocorrem a nível atômico ou molecular. Uma vantagem do efeito do reforço por dispersão é que o aumento da resistência é mantido a temperaturas elevadas e por longos períodos de tempo.

Um estudo realizado pelos pesquisadores Mendonça, Piratelli-Filho e Levy Neto (2003), trata da possível aplicação de materiais compósitos particulados em bases de máquinas ferramentas e em máquinas de medição por coordenadas, como tornos e retificadoras. Estes compósitos têm substituído gradativamente o ferro fundido, sendo que suas maiores vantagens são os baixos coeficientes de expansão térmica, menor peso, e suas excelentes características de amortecimento de vibrações. Mesmo apresentando algumas desvantagens em relação ao ferro fundido como absorção de umidade, dilatação térmica lenta, e módulo de elasticidade menor, estes compósitos estão sendo utilizados por alguns fabricantes de máquinas ferramentas.

2.2.2. Compósitos reforçados com fibras

As características mecânicas de um compósito reforçado com fibras não dependem somente das propriedades da fibra, mas também do arranjo ou orientação das mesmas umas em relação às outras, a concentração delas, e sua distribuição pela matriz. Neste sentido, têm-se dois tipos de fibras: as fibras contínuas e as fibras descontínuas ou curtas como ilustrado na Fig. 2.5.

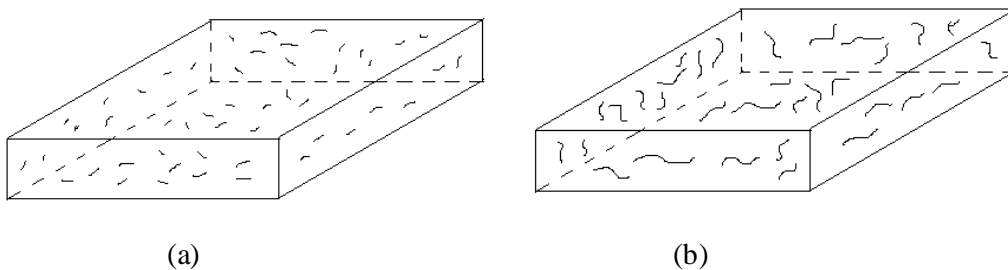


Figura 2.5 – (a) compósitos com fibras curtas; (b) compósitos com fibras longas.

É importante destacar que embora a eficiência de reforço seja menor para as fibras descontínuas do que para as fibras contínuas, os compósitos com fibras descontínuas estão se tornando cada vez mais importantes no mercado comercial.

As fibras ainda podem ser definidas como sendo unidirecionais, quando orientadas segundo uma mesma direção; bidimensionais, com as fibras orientadas segundo duas direções ortogonais

(tecidos), ou com as fibras orientadas aleatoriamente (esteiras), e tridimensionais, quando as fibras são orientadas no espaço tridimensional (tecidos multidimensionais).

Uma das grandes áreas de aplicação de compósitos fibrosos é a construção civil onde são usados diversos tipos de fibras, desde as naturais como celulose, amianto, sisal e juta, como as artificiais: plástico (polipropileno, nylon, poliéster), vidro e aço (Faria, 2006).

2.2.3. *Compósitos Estruturais*

Um compósito estrutural é composto tanto por materiais homogêneos como por materiais compósitos cujas propriedades dependem não somente das propriedades dos materiais constituintes, mas também do projeto geométrico dos vários elementos estruturais (Callister Jr., 2002). Existem dois tipos básicos de compósito estrutural: compósito estrutural laminar (também chamado de laminado) e compósito estrutural do tipo sanduíche. Os compósitos estruturais laminados são constituídos por um empilhamento de camadas (lâminas) ligadas entre si, com as fibras orientadas em diferentes direções como ilustrado na Fig. 2.6. Um laminado típico é constituído por várias lâminas, frequentemente idênticas, variando suas orientações para melhor atender os requisitos de projeto ou fabricação.

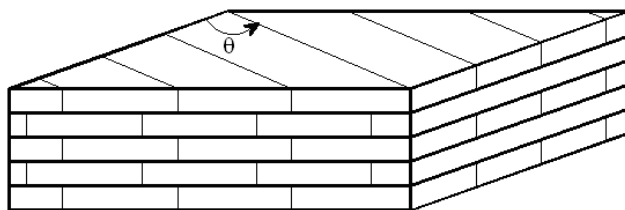


Figura 2.6 – Compósito estrutural do tipo laminado (onde θ é a orientação das fibras)

As várias combinações de orientações, espessuras e materiais de cada lâmina que compõe o laminado fazem com que o comportamento deste material possua características diferentes das observadas em cada lâmina individual. Uma abordagem extremamente interessante, neste contexto de estudo, é a análise macromecânica de um laminado, na qual é possível realizar a modelagem do comportamento dinâmico da estrutura laminada, supondo-se conhecidas as propriedades mecânicas e o comportamento individual de cada lâmina.

Os compósitos estruturais do tipo sanduíches, como mostrado na Fig. 2.7 são formados por lâminas fibrosas mais resistentes e um núcleo constituído de um material menos denso, que

proporciona certo grau de rigidez contra o cisalhamento ao longo dos planos perpendiculares às faces e também resiste às deformações perpendiculares ao plano da face (Callister Jr., 2002).

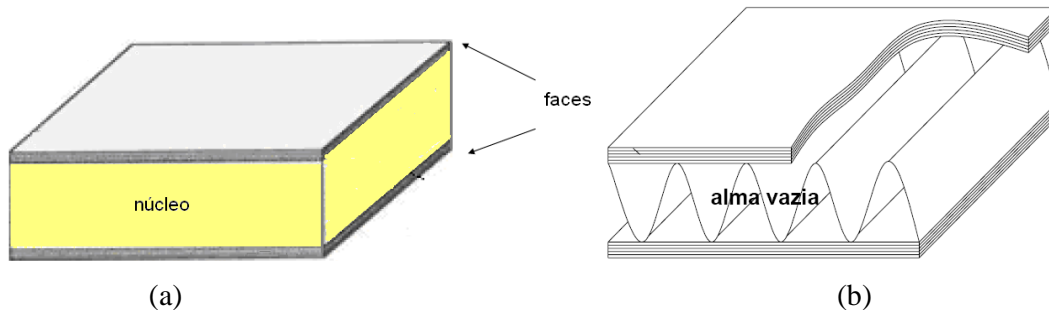


Figura 2.7 – Estrutura sanduíche de alma plena (a) e de alma vazada do tipo ondulada (b) (adaptado de Faria, 2006).

O núcleo de um material compósito do tipo sanduíche é comumente chamado de alma ou recheio. Existem dois tipos de almas: cheias e vazadas (ou vazias). Os materiais mais utilizados para almas cheias são madeiras celulares, diversas espumas celulares, resinas carregadas de microesferas vazias de vidro denominadas espumas sintéticas, plásticos, etc. Os principais materiais utilizados nas almas vazadas, essencialmente na forma de colméia de abelhas (alvéolos hexagonais) e perfis são: ligas metálicas leves, papel Kraft (com ou sem resina), papel poliamida, etc. (Faria, 2006).

É importante salientar que, como as estruturas de engenharia estão sujeitas a perturbações estáticas e/ou dinâmicas que causam vibrações e ruído, os materiais compósitos do tipo sanduíche contendo um núcleo viscoelástico constitui-se numa alternativa bastante viável para aumentar o amortecimento das estruturas laminadas do tipo sanduíche (de Lima et al, 2009).

CAPÍTULO 3

CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DOS MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Neste capítulo são apresentados os principais fundamentos da teoria da viscoelasticidade linear, bem como a definição do módulo complexo para os materiais viscoelásticos. Também é apresentado um método de redução de modelos bem adaptado ao caso de sistemas amortecidos viscoelasticamente, baseado na utilização de uma base de redução constante.

3.1. Viscoelasticidade Linear

Viscoelasticidade é uma propriedade exibida por materiais viscoelásticos, caracterizada pela combinação de um comportamento elástico e um fluxo viscoso que, segundo Persoz (1987), pode ser entendida como sendo a combinação de dois tipos de comportamento, a saber:

- o comportamento de um sólido linear elástico, para o qual a tensão é instantaneamente proporcional à deformação, e independente da taxa de deformação. Este comportamento é regido pela Lei de Hooke, que para os casos de solicitação axial (tração e compressão) e de cisalhamento, escreve-se respectivamente, sob as seguintes formas:

$$\sigma(t) = \bar{E}\varepsilon(t) \quad (3.1)$$

$$\tau(t) = \bar{G}\gamma(t) \quad (3.2)$$

onde \bar{E} e \bar{G} designam, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young e o módulo de cisalhamento do material.

- o comportamento de um fluido viscoso Newtoniano, para o qual a tensão é proporcional à taxa de deformação cisalhante, sendo independente da deformação, de acordo com

a seguinte equação constitutiva:

$$\tau(t) = \mu(t)\dot{\gamma}(t) \quad (3.3)$$

onde μ é a constante definida como a viscosidade do fluido.

O termo viscoelasticidade está associado à variável tempo, em resposta a uma tensão ou deformação constante aplicada. De acordo com isto a resposta dos materiais viscoelásticos pode ser dividida em dois tipos de funções que descrevem a evolução no tempo de materiais viscoelásticos, a saber: a função de fluência, $F(\sigma_0, t)$, que descreve a evolução da deformação exibida pelo material quando submetidos a uma tensão constante, σ_0 , conforme representado na Fig. 3.1(a); a função de relaxação, $R(\varepsilon_0, t)$, que representa a evolução da tensão suportada pelo material quando submetido a uma deformação constante, ε_0 , de acordo com a Fig. 3.1(b).

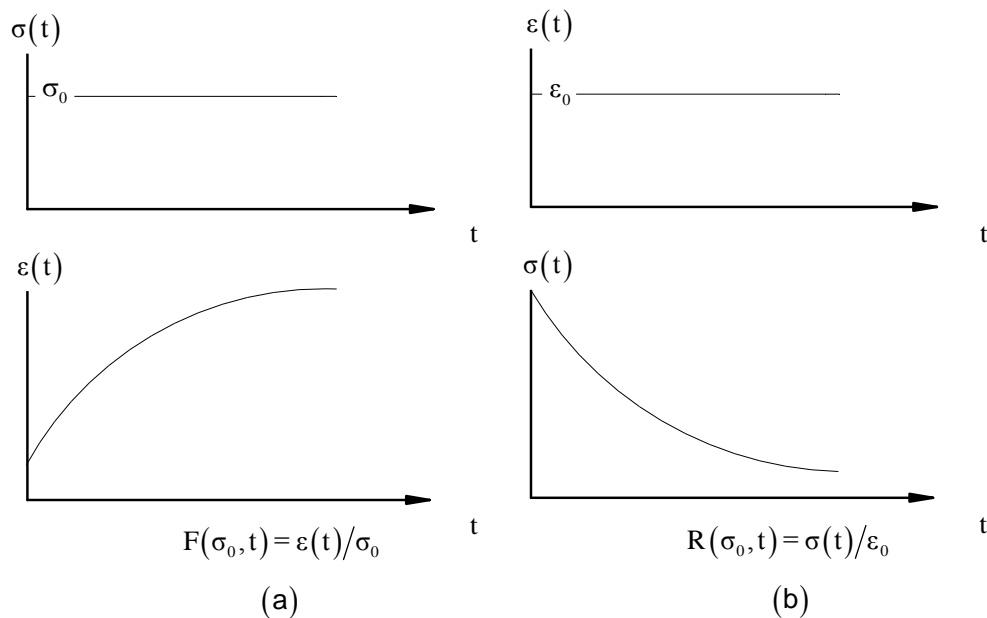


Figura 3.1 – Funções de fluência (a); e relaxação (b) de um material viscoelástico (adaptado de Lima, 2007).

Pelo fato das funções de fluência e relaxação serem dependentes do tempo, resulta que elas são funções da história do carregamento, isto é, elas dependem de todos os estados de tensão (ou de deformação) anteriores. Além disso, de acordo com o Princípio da Superposição de Boltzmann (Nashif et al., 1985), onde a contribuição de cada efeito de tensão (ou deformação) é independente,

sendo a resposta final a soma de todos os efeitos, resulta que o comportamento viscoelástico é representado por uma integral de convolução (Christensen, 1982), e para o caso de solitação uniaxial tem-se que a relação tensão-deformação pode ser expressa da seguinte forma:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) d\varepsilon(\tau) \quad (3.4)$$

onde $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$ designam, respectivamente, as componentes de tensão e de deformação (normais ou de cisalhamento); $G(t)$ é denominada *função módulo* do material viscoelástico. A expressão (3.4) pode ser aplicada ao caso de estados multiaxiais de tensão-deformação pela substituição das grandezas escalares por grandezas tensoriais. É importante ressaltar que para o caso de um material elástico linear, $G(t)$ é constante. Além disso, visto que um material não apresenta deformação para valores de tempo negativos ($\varepsilon(t) = 0$ no intervalo $[-\infty < t < 0]$), a Eq. (3.4) fica da seguinte forma:

$$\sigma(t) = G(t)\varepsilon(0) + \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

e definindo $G(t) = G_r + h(t)$, a equação (3.5) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma(t) = G_r \varepsilon(t) + h(t)\varepsilon(0) + \int_0^t h(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}(\tau) d\tau \quad (3.6)$$

A equação (3.6) pode ainda ser expressa no domínio de Laplace como segue:

$$\sigma(s) = G_r \varepsilon(s) + sh(s)\varepsilon(s) = [G_r + H(s)]\varepsilon(s) \quad (3.7)$$

ou ainda sob a forma:

$$\sigma(s) = G(s)\varepsilon(s) \quad (3.8)$$

onde:

- s : variável complexa de Laplace.
- G_r : *módulo estático* ou *módulo a baixa frequência*.
- $H(s) = sh(s)$; $G(s) = G_r + H(s)$

O termo $H(s)\varepsilon(s)$ em (3.7) representa o comportamento dissipativo do material viscoelástico e $G_r\varepsilon(s)$ representa a elasticidade do material viscoelástico. A função $H(s)$ é frequentemente denominada de *função de dissipação*.

3.2. Módulo Complexo

Para os materiais isotrópicos e homogêneos, as propriedades complexas são completamente descritas por um módulo $G(s)$ e um coeficiente de Poisson $\nu(s)$ complexo. A medida separada de $\nu(s)$ pode, entretanto, gerar problemas experimentais significativos. Na prática, identifica-se o módulo de Young $E(s)$, ou o módulo de cisalhamento $G(s)$, e supõe-se um coeficiente de Poisson constante. Pouco se conhece sobre as variações reais de $\nu(s)$ com relação à frequência de excitação. Pode-se principalmente afirmar que ele diminui com o aumento da frequência (Lima, 2007). Neste contexto, a Eq. (3.8) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma(\omega) = G(\omega)\varepsilon(\omega) \tag{3.9}$$

onde $G(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega) = G'(\omega)[1 + i\eta(\omega)]$ é o módulo complexo do material. $G'(\omega)$ e $G''(\omega)$ são, respectivamente, os módulos de armazenamento e de perda do material, e $\eta(\omega) = G''(\omega)/G'(\omega)$ é o fator de perda do material (capacidade de amortecimento do material viscoelástico). Do ponto de vista prático, podem-se resolver os problemas de viscoelasticidade linear como casos particulares de elasticidade onde as propriedades dos materiais são complexas e dependem da frequência de excitação. Este procedimento é conhecido como Princípio da Equivalência Elástico-Viscoelástico (PEEV) (Nashif, 1985).

3.3. Influência da frequência e temperatura nas propriedades dos materiais viscoelásticos

As propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos variam fortemente com as condições ambientais e operacionais às quais estão sujeitos, dentre as quais, as que mais influenciam são temperatura e frequência de excitação (de Lima et al., 2006). Por exemplo, as variações de temperatura em materiais viscoelásticos, além de introduzirem tensões térmicas provocam mudanças nas propriedades destes materiais.

De acordo com a temperatura, os materiais viscoelásticos podem apresentar quatro regiões distintas de comportamento, conforme ilustrado na Fig. 3.2: região vítrea (I), região de transição (II), região de borracha (III) e região de fluxo (ou de fluido) (IV).

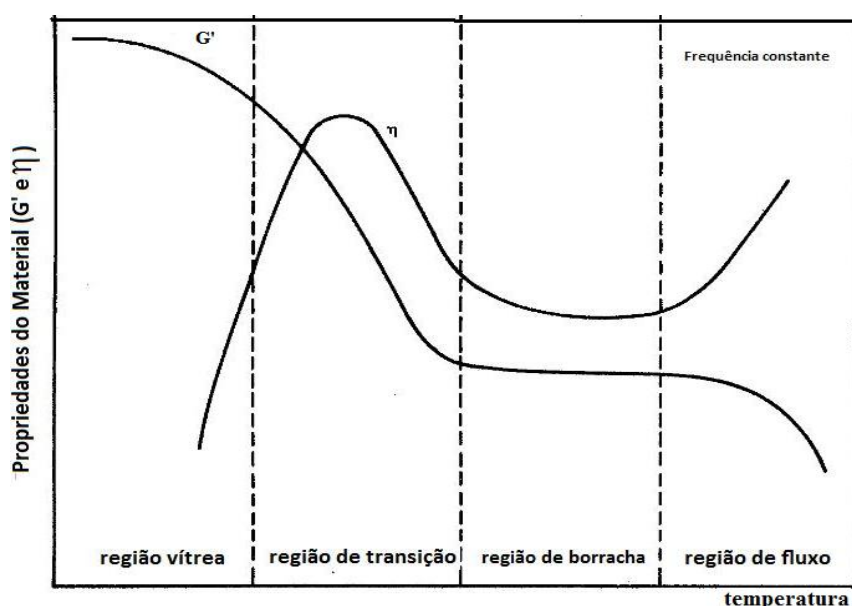


Figura 3.2 – Variação de G' e η com a temperatura (adaptado de Nashif *et al.* (1985)).

Na região I, o material possui o máximo valor para o módulo de armazenamento e apresenta baixos valores para o fator de perda, que aumenta com a elevação de temperatura. Na região (II) o módulo de armazenamento decresce de forma muito rápida com o aumento da temperatura, enquanto o fator de perda atinge seu máximo. Na região (III), observa-se que o módulo de armazenamento e o fator de perda variam muito pouco com a temperatura. A região (IV) apresenta um comportamento instável, e é a região de fluido do material.

O comportamento ilustrado pela Fig. 3.2 é típico dos materiais viscoelásticos lineares, mas

existem diferentes materiais que possuem propriedades específicas, apresentando diferentes faixas de valores para o módulo de armazenamento e fator de perda em cada região, conforme apresentado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Valores típicos para G' , η e ν .

Regiões	$G' [N/m^2]$	η	ν
Vítrea	$> 10^{11}$	$< 10^{-2}$ ou $< 10^{-3}$	$\nu = 0,33$ (E = 2,67G)
Transição	10^3 a 10^{11}	1 a 2	$0,33 < \nu < 0,5$
Borracha	$< 10^3$	0,1 a 0,2	$\nu = 0,5$ (E = 3G)

Apesar de a segunda região ser caracterizada por um fator de perda máximo, fato que garante um amortecimento eficiente, a terceira região demonstra-se bastante atrativa, visto que o módulo de armazenamento e o fator de perda variam muito pouco com a temperatura, apresentando também resultados satisfatórios com relação à capacidade de amortecimento.

A Fig. 3.3 apresenta uma variação das propriedades do material em uma larga banda de frequências (da ordem de 10 décadas), sendo mantido fixo o valor da temperatura, que se encontra na região de transição.

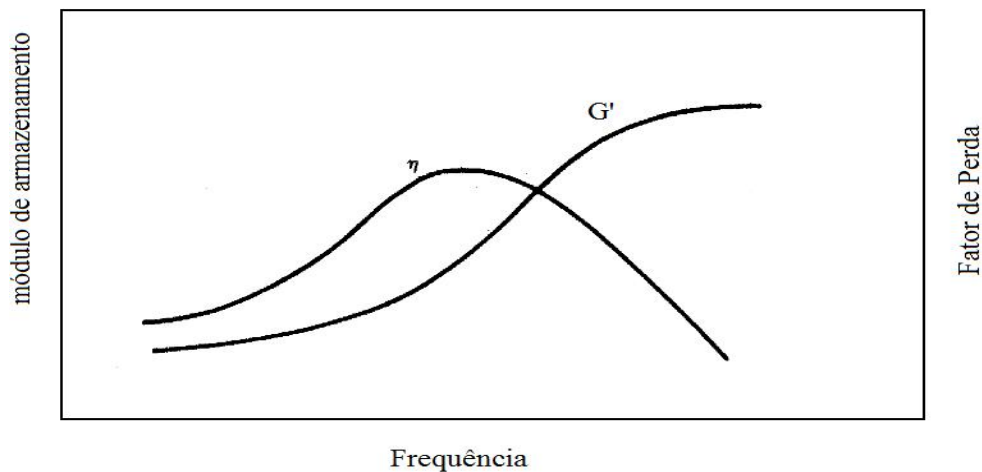


Figura 3.3 – Variação de G' e η com a frequência (adaptado de Nashif *et al.* (1985)).

Observa-se das Figs. 3.2 e 3.3 que a influência exercida pela frequência é qualitativamente o inverso do efeito da temperatura, mas em escala menor, ou seja, a variação na frequência de algumas décadas reflete a mesma influência de alguns graus na temperatura.

3.4. Princípio da Superposição Frequência-Temperatura (PSFT)

A relação inversa entre os efeitos da frequência e da temperatura conduz ao Princípio da Superposição Frequência-Temperatura (PSFT), segundo o qual, se deslocamentos em frequência das curvas mostradas na Fig. 3.4 são aplicados para diferentes temperaturas, elas tendem a se superporem, e a descreverem uma única curva, utilizando-se um fator de deslocamento apropriado, dependente da temperatura (Nashif, 1985). Esta propriedade pode ser expressa pelas relações:

$$G(\omega, T) = G(\omega_r, T_0) = G(\alpha_T \omega, T_0) \quad (3.10)$$

$$\eta_G(\omega, T) = \eta_G(\omega_r, T_0) = \eta_G(\alpha_T \omega, T_0) \quad (3.11)$$

onde T indica um valor arbitrário da temperatura, T_0 é uma temperatura de referência, $\omega_r = \alpha_T(T)\omega$ representa a frequência reduzida, ω é a frequência de excitação, e $\alpha_T(T)$ representa o fator de deslocamento como função da temperatura. A Fig. 3.4 ilustra o PSFT, demonstrando que para valores arbitrários do módulo e do fator de perda para diferentes temperaturas, T_{-1} , T_0 , T_1 , se deslocamentos horizontais ao longo do eixo das frequências são aplicados para cada uma das curvas, todas elas podem ser combinadas em uma única curva, chamada comumente de Curva Mestre.

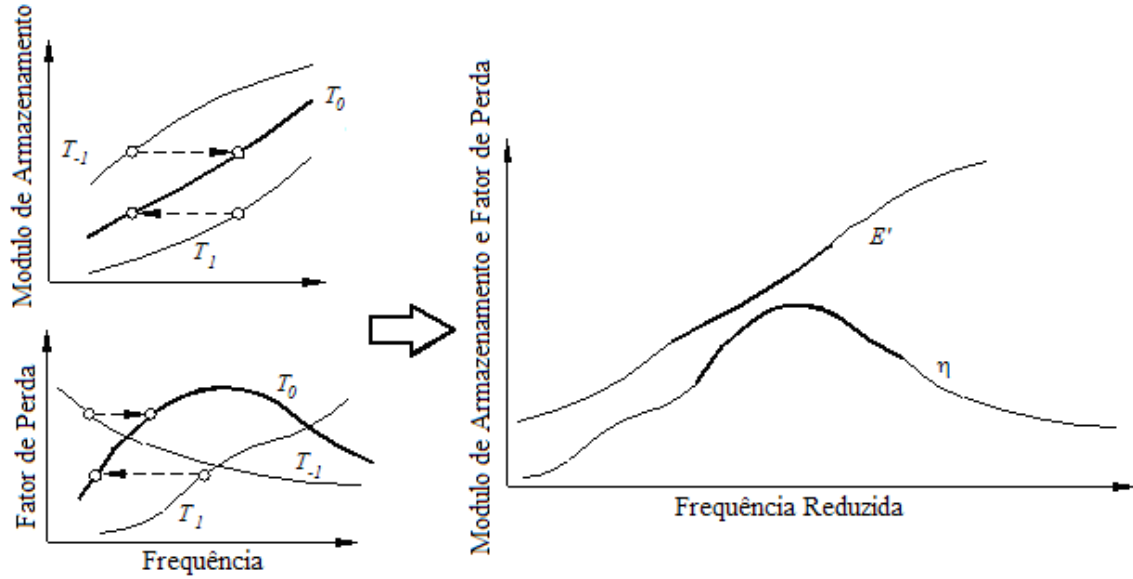


Figura 3.4 – Ilustração do Princípio da Superposição Frequência-Temperatura – PSFT

As funções $G(\omega_r)$ e $\alpha_T(T)$ podem ser obtidas de ensaios experimentais para materiais viscoelásticos específicos (Nashif et al., 1985). Drake e Soovere (1984) sugerem expressões analíticas para o módulo complexo e o fator de deslocamento para vários materiais viscoelásticos comercialmente disponíveis. As Eqs. (3.12.a) e (3.12.b) representam o módulo complexo e o fator de deslocamento como função da frequência reduzida e da temperatura no intervalo $210 \leq T \leq 360K$ e $1,0 \leq \omega \leq 1,0 \times 10^6 Hz$, para o material viscoelástico ISD112 da 3M™ como fornecido pelos autores. O material ISD112 é um tipo de material viscoelástico fornecido na forma de adesivos.

$$G(\omega_r) = B_1 + B_2 / (1 + B_5 (i\omega_r / B_3)^{-B_6} + (i\omega_r / B_3)^{-B_4}) \quad (3.12.a)$$

$$\log(\alpha_T) = a \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) + 2.303 \left(\frac{2a}{T_0} - b \right) \log \left(\frac{T}{T_0} \right) + \left(\frac{b}{T_0} - \frac{a}{T_0^2} - S_{AZ} \right) (T - T_0) \quad (3.12.b)$$

onde:

$$B_1 = 0.4307MPa; B_2 = 1200MPa; B_3 = 1543000; B_4 = 0.6847; B_5 = 3.241; B_6 = 0.18$$

$$T_0 = 290K; T_L = 210K; T_H = 360K; S_{AZ} = 0.05956K^{-1}; S_{AL} = 0.1474K^{-1}; S_{AH} = 0.009725K^{-1}$$

$$C_A = (1/T_L - 1/T_0)^2; C_B = (1/T_L - 1/T_0); C_C = (S_{AL} - S_{AZ}); D_A = (1/T_H - 1/T_0)^2; D_B = (1/T_H - 1/T_0)$$

$$D_C = (S_{AH} - S_{AZ}); D_E = (D_B C_A - D_A C_B); a = (D_B C_C - C_B D_C) / D_E; b = (D_C C_A - C_C D_A) / D_E$$

A Fig. 3.5 descreve as curvas padrão (nomogramas) que representam as variações do módulo de armazenamento e do fator de deslocamento como função da frequência reduzida, como obtido da Eq. (3.12.a), e a curva do fator de perda com função da temperatura obtida através da Eq. (3.12.b).

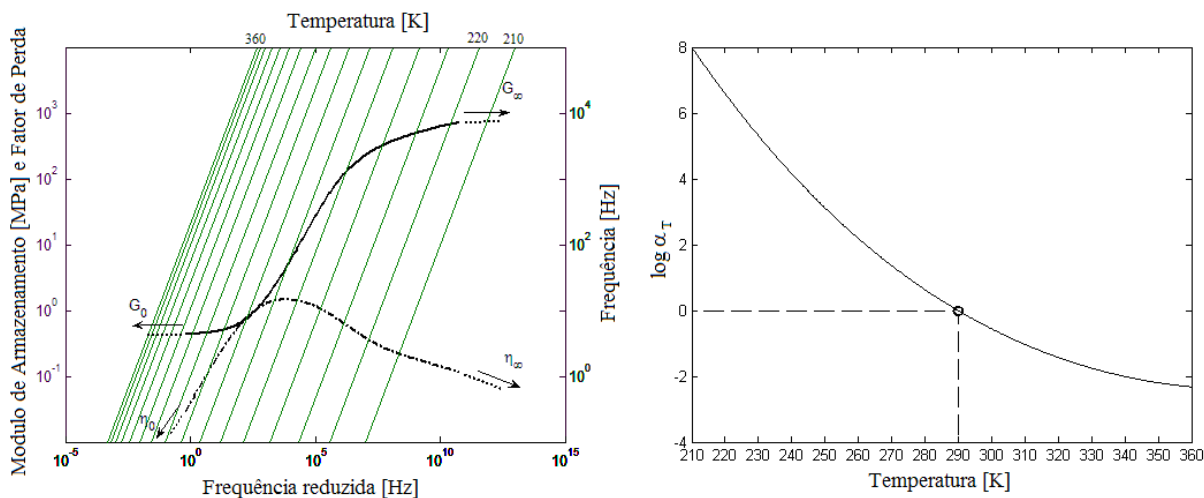


Figura 3.5 – Nomograma representando as propriedades do material viscoelástico ISD112 (adaptado de de Lima, 2007).

É importante destacar que o uso das variáveis reduzidas é válido, se e somente se (Nashif et al., 1985): (a) o material viscoelástico possui comportamento linear; (b) os mesmos valores de α_T permitem superpor todas as propriedades viscoelásticas (módulo de armazenamento, módulo de perda e fator de perda); (c) a estrutura interna do material não é modificada durante as modificações de temperatura. Além disso, na utilização das variáveis reduzidas supõe-se que a temperatura interna do material viscoelástico não é alterada durante a realização dos ensaios dinâmicos, negligenciando-se o fenômeno de auto-aquecimento dos materiais viscoelásticos (Lima, 2007).

3.5. Representação do Módulo Complexo

Existem diferentes formas de representação do módulo complexo, denominadas formas paramétricas e não paramétricas. A representação paramétrica do módulo complexo é a aproximação do comportamento dos materiais viscoelásticos através de modelos analíticos compostos por um número de parâmetros a serem identificados. Neste caso, podem-se utilizar

modelos reológicos ou modelos incorporados a modelos de elementos finitos para representar o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos.

Os modelos reológicos consistem na associação (em série ou em paralelo) de elementos simples do tipo molas e amortecedores viscosos. Na literatura, existem diversos modelos reológicos, dentre os quais pode-se destacar os modelos de Kelvin-Voigt, de Maxwell, de Zener (ou modelo padrão) (Bert, 1973; de Lima et al., 2003b). Além destes, existe o modelo Padrão Generalizado que fornece melhores aproximações para o comportamento de materiais viscoelásticos reais em relação à frequência de excitação (Wang, 2001). Entretanto, a grande desvantagem é que tais modelos apresentam dificuldade para representar as respostas temporais de sistemas amortecidos. Neste caso, a resposta da estrutura deve ser obtida primeiramente no domínio da frequência, passando em seguida ao domínio do tempo via transformada inversa de Fourier, o que pode conduzir a respostas não-causais, e complicações de natureza teórica (Nashif et al., 1985; de Lima, 2006).

Para contornar estes problemas, vários autores propuseram modelos viscoelásticos baseados na utilização de derivadas fracionárias e de variáveis internas não físicas, na tentativa de representar o comportamento viscoelástico diretamente no domínio do tempo e, ao mesmo tempo, para serem combinados com modelos de elementos finitos. A título de exemplo, pode-se citar o Modelo das Derivadas Fracionárias (Bagley e Torvik, 1983), o modelo desenvolvido por Golla e Hughes e adaptado por MacTAVish e Hughes, conhecido por modelo GHM (Golla et al., 1985), e o modelo baseado nos Campos de Deslocamento Anelásticos (Lesieutre e Bianchini, 1995), que constituem representações matemáticas do módulo complexo bem adaptadas para serem utilizadas em combinação com modelos de elementos finitos. A utilização de formas paramétricas para caracterizar as propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos exige que certo número de parâmetros associado a cada modelo seja identificado por um processo de ajuste de curvas entre os dados experimentais de materiais viscoelásticos fornecidos por fabricantes ou através de ensaios experimentais de vibração com controle rigoroso de temperatura (Nashif et al., 1985) e as curvas analíticas previstas pelos modelos.

Outra forma de representação do módulo complexo são as formas não-paramétricas, onde pode-se utilizar leis tabuladas obtidas de medidas experimentais fornecidas pelos fabricantes. A forma tabulada consiste em um certo número de ensaios dinâmicos que permite identificar o módulo de armazenamento $G'(\omega)$ e o fator de perda $\eta(\omega)$ de um material viscoelástico para um certo número de pontos frequenciais numa banda estreita. Se as medidas são feitas para várias temperaturas, pode-se utilizar o princípio de superposição frequência-temperatura ilustrado na Seção 3.4 que permite gerar um nomograma em frequência reduzida (como o representado na Fig.

3.5). Dispõe-se, portanto, de uma representação sob a forma de tabela (lei tabulada) do módulo complexo em frequência reduzida, ω_r , e igualmente do fator de deslocamento α_T para várias temperaturas T . Neste caso, para conhecer o módulo complexo em um ponto de funcionamento arbitrário (ω, T) , deve-se interpolar ou extrapolar os valores experimentais do fator de deslocamento para encontrar a frequência reduzida, após isto, interpola-se ou extrapola-se o módulo sobre a curva mestre (de Lima, 2003).

A vantagem de uma representação não paramétrica é de permitir a representação do comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos fortemente dependentes da frequência e da temperatura, para uma larga faixa de valores desses fatores. Além disso, a utilização direta dos dados dispensa as etapas da escolha da representação e do processo de identificação dos parâmetros para as formas paramétricas do módulo complexo (de Lima, 2007).

3.6. Incorporação do comportamento viscoelástico em modelos de elementos finitos

Para possibilitar a modelagem de estruturas reais amortecidas com materiais viscoelásticos é necessário a combinação dos modelos que representam o módulo complexo com modelos de elementos finitos. Primeiramente, escolhe-se o modelo para representar o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos em função da frequência de excitação e temperatura, e então, estuda-se o procedimento de incorporação de tais modelos em modelos de elementos finitos das estruturas.

Considere o seguinte modelo de elementos finitos de uma estrutura qualquer tratada com material viscoelástico representado pela equação do movimento no domínio da frequência (sem a presença de amortecimento viscoso), composta por N graus-de-liberdade:

$$\left[\mathbf{K}(\omega, T) - \omega^2 \mathbf{M} \right] \mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (3.13.a)$$

$$\mathbf{F}(\omega) = \mathbf{b}\mathbf{U}(\omega), \mathbf{Y}(\omega) = \mathbf{c}\mathbf{Q}(\omega) \quad (3.13.b)$$

onde $\mathbf{M}, \mathbf{K}(\omega, T) \in R^{N \times N}$ representam, respectivamente, a matriz de massa (simétrica e definida-positiva) e a matriz de rigidez (simétrica e definida não-negativa). $\mathbf{Q}(\omega) \in R^N$ e $\mathbf{F}(\omega) \in R^N$ representam, respectivamente, o vetor de deslocamento e o vetor de forças externas. $\mathbf{Y}(\omega) \in R^c$ é o vetor de respostas, e $\mathbf{U}(\omega) \in R^f$ é o vetor reduzido de forças externas. As matrizes $\mathbf{b} \in R^{N \times f}$ e

$c \in R^{cxN}$ são as matrizes que permitem escolher, entre os graus-de-liberdade do modelo de elementos finitos, os graus de liberdade onde são aplicados as forças de excitação, e os graus de liberdade onde são calculadas as respostas do sistema, respectivamente.

Supondo que estrutura é composta por elementos elásticos e viscoelásticos, a matriz de rigidez global da estrutura pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\mathbf{K}(\omega, T) = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v(\omega, T) \quad (3.14)$$

onde \mathbf{K}_e representa a matriz de rigidez correspondente à subestrutura puramente elástica, e $\mathbf{K}_v(\omega, T)$ é a matriz de rigidez da subestrutura viscoelástica. A introdução da dependência em frequência do material viscoelástico pode ser feita através do Princípio da Equivalência Elástico-Viscoelástico (PEEV), segundo o qual, num primeiro momento, para uma temperatura dada, a matriz $\mathbf{K}_v(\omega, T)$ pode ser gerada para elementos específicos (barras, vigas, placas, etc.) supondo-se que o módulo de Young $E(\omega, T)$ e/ou módulo de cisalhamento $G(\omega, T)$ (segundo o estado de tensão-deformação adotado) são independentes da frequência. Em seguida, após a construção da matriz global de elementos finitos, a dependência em frequência dos módulos é representada segundo um modelo viscoelástico particular adotado: seja o módulo complexo, seja através dos modelos do tipo GHM, Modelo das Derivadas Fracionárias ou o Modelo dos Campos de Deslocamento Anelásticos (de Lima et al., 2003). Supondo-se que o coeficiente de Poisson é independente da frequência, $E(\omega, T)$ torna-se proporcional a $G(\omega, T)$ segundo a relação $G(\omega, T) = E(\omega, T)/2(1 + \nu)$. Portanto, um dos módulos pode ser fatorado da matriz de rigidez da subestrutura viscoelástica sob a seguinte forma:

$$\mathbf{K}_v(\omega, T) = G(\omega, T)\bar{\mathbf{K}}_v \quad (3.15)$$

Combinando-se as expressões (3.13) e (3.14) obtém-se a seguinte expressão para a matriz de rigidez dinâmica complexa:

$$\mathbf{Z}(\omega, T) = \mathbf{K}_e + G(\omega, T)\bar{\mathbf{K}}_v - \omega^2 \mathbf{M} \quad (3.16)$$

Uma vez definida a rigidez complexa, a etapa seguinte consiste em resolver o sistema no domínio frequencial, o que pode ser feito através da construção da matriz de flexibilidade dinâmica

ou matriz de Funções de Resposta em Frequência (FRF):

$$\mathbf{H}(\omega, T) = \mathbf{cZ}(\omega, T)^{-1} \mathbf{b} \quad (3.17)$$

O uso para a aproximação do módulo complexo, combinado com os conceitos de fator de deslocamento e frequência reduzida, justificado pelo Princípio da Equivalência Frequência-Temperatura tem mostrado estratégias adequadas para representar a dependência das características viscoelásticas com respeito à frequência e temperatura em modelos de elementos finitos de placas compostas incorporando material viscoelástico (de Lima et al., 2009). Neste sentido, será utilizado neste trabalho esta técnica para representar o comportamento dinâmico das camadas viscoelásticas inseridas entre as placas compostas laminadas.

Outro aspecto importante que deve ser destacado é que, como neste trabalho tem interesse em respostas dinâmicas no domínio frequencial, a expressão (3.17) pode, em princípio, ser diretamente empregada para o cálculo das respostas harmônicas de sistemas viscoelásticos. Entretanto, tal procedimento pode ser inexplorável em termos do alto custo numérico para o caso de modelos de elementos finitos de estruturas complexas de interesse industrial. E neste caso, métodos de redução de modelos, ou ainda métodos de aproximação de funções através de metamodelagem (de Lima et al., 2006), são requeridos.

3.7. Métodos de redução de modelos aplicados a sistemas tratados viscoelasticamente

O objetivo da redução de modelos é sempre construir uma base de redução que seja capaz de representar as mesmas respostas dinâmicas dos modelos nominais. Neste aspecto, dispor de uma base de redução capaz de representar as respostas dinâmicas de sistemas contendo amortecimento viscoelástico é primordial nos processos iterativos como ajuste de modelos e/ou otimização onde são requeridas inúmeras avaliações das funções exatas, resultando um alto custo computacional (Masson et al, 2003).

A partir da expressão (3.17), pode-se imaginar que para os modelos de elementos finitos de sistemas industriais de grande escala amortecidos viscoelasticamente, não é prático (do ponto de vista do custo numérico) utilizar diretamente o modelo completo, pois, ele conduz a um tempo de cálculo proibitivo em virtude da inversão da matriz de rigidez dinâmica complexa para cada passo de frequência. Neste caso, utilizam-se aproximações de respostas, buscando-se a solução num subespaço isto é, a aproximação modal, que consiste do projeto das equações do movimento do

sistema amortecido numa base de redução \mathbf{T} , com o objetivo de diminuir o número de graus de liberdade do sistema e, portanto, acelerar a resolução numérica do problema, através da hipótese de que as respostas exatas, representadas pela expressão (3.13.a), podem ser aproximadas por soluções dentro de um subespaço reduzido da seguinte forma:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}\mathbf{Q}_r \quad (3.18)$$

onde a matriz $\mathbf{T} \in C^{N \times NR}$ é a base de redução, ou base de Ritz, e $\mathbf{Q}_r \in C^{NR}$ com $NR \ll N$ (NR representa os modos retidos na base).

Considerando-se as expressões (3.13.a) e (3.18), a função de transferência (3.17) pode ser aproximada como:

$$\mathbf{H}_r(\omega, T) = \mathbf{c}\mathbf{Z}_r(\omega, T)^{-1}\mathbf{b} \quad (3.19)$$

onde $\mathbf{Z}_r(\omega, T) = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_e \mathbf{T} + G(\omega, T) \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_v \mathbf{T} - \omega^2 \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}$ representa a matriz de rigidez reduzida.

A matriz de rigidez dinâmica reduzida pode ser calculada e invertida para cada passo de frequência de uma maneira direta, utilizando-se algoritmos numéricos eficientes. Entretanto, para sistemas amortecidos viscoelasticamente, a escolha da base de redução não é simples, nem sistemática, em função da dependência da matriz de rigidez do material com relação à frequência de excitação e à temperatura. Neste caso, a base de redução deve levar em conta as variações da frequência e da temperatura. Para resolver este problema, três soluções são possíveis, a saber: (a) pode-se negligenciar esta dependência, admitindo-se que a matriz de rigidez é independente da frequência e da temperatura. Para isto, é preciso escolher um modelo de partida para se calcular a base de redução que será independente da frequência e da temperatura, que deve ser em seguida, enriquecida com vetores residuais estáticos para levar em conta os efeitos viscoelásticos (Balmès et al, 2002a ; 2002b); (b) pode-se utilizar uma base de redução composta por modos próprios complexos, obtidos pela resolução do problema de autovalores não linear (Daya et Poitier-Ferry, 2001 ; Daya et al, 2002). Entretanto, vários autores demonstram que a obtenção numérica desses autovalores pode conduzir a um tempo de cálculo proibitivo para os sistemas complexos tratados (Plouin et Balmès, 1998 ; 1999); (c) pode-se igualmente utilizar um método iterativo que permita a reatualização da base de redução em função da frequência, quando esta for necessária (Kergourlay et al, 2000).

Neste trabalho de dissertação, a base de redução será fixa e a determinação da resposta dinâmica amortecida é obtida utilizando-se a técnica de aproximação padrão de Ritz-Galerkin. Para isto, é necessária a adoção de um ponto de partida para a determinação da base de redução independente da frequência. Balmès e Germès (2002b) demonstram que a rigidez tangente é um ponto de partida conveniente, tendo a vantagem de ser real e fácil de ser invertida. Isto caracteriza o comportamento conservativo associado (CCA) do material viscoelástico, para o qual $\mathbf{K}_v(0) = G_0 \bar{\mathbf{K}}_v$. Caracteriza-se portanto o Sistema Conservativo Associado no qual o amortecimento viscoelástico é eliminado. O CCA pode ser obtido através das propriedades assintóticas do ajuste de curvas para cada material viscoelástico, como mostrado na Fig. 3.5, Seção 3.4.

De uma maneira geral, a medida das características viscoelásticas a uma temperatura fixa fornece o módulo de armazenamento e o fator de perda, no qual a variação em frequência assemelha-se geralmente à forma ilustrada na Fig. 3.5 para o material viscoelástico 3M ISD112. Nas regiões de altas e baixas frequências não medidas, as curvas do módulo de armazenamento e do fator de perda podem ser prolongadas por assíntotas. A extrapolação em baixa frequência fornece uma assíntota real G_0 e $\eta_0 = 0$ e para as altas frequências, obtém-se uma assíntota complexa G_∞ e η_∞ (Crandall, 1970). Neste caso, a matriz de rigidez elástica tangente pode ser obtida como segue:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_e + G_0 \bar{\mathbf{K}}_v \quad (3.20)$$

A base de redução nominal contendo os primeiros modos mantidos do sistema amortecido por materiais viscoelásticos pode ser obtida através da seguinte resolução do problema de autovalores:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_0 - \lambda_i \mathbf{M}) \phi_i &= 0 & i = 1, \dots, N \\ \phi_0 &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_{NR}] & \mathbf{A}_0 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{NR}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

A base de redução ϕ_0 contém somente os modos próprios do sistema tratado considerando-se o comportamento SCA. Para enriquecer esta base, Balmès e Germès (2002b) propuseram a utilização de resíduos estáticos baseados nos deslocamentos associados ao carregamento imposto, que pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{b} \quad (3.22)$$

Este procedimento é chamado de correção estática de primeira ordem, que é completada através do cálculo da resposta estática dos carregamentos produzidos pela parte imaginária da matriz de rigidez dinâmica completa, que pode ser obtida através da expressão (3.13.a):

$$\mathbf{R}_\Delta^o = \mathbf{K}_0^{-1} \bar{\mathbf{K}}_v \phi_0 \quad (3.23)$$

Esses resíduos são associados aos efeitos viscoelásticos (forças viscoelásticas) do sistema nominal amortecido, traduzido pelo amortecimento. Desta forma, a base de redução nominal enriquecida pode ser expressa como segue:

$$\mathbf{T}_o = [\phi_0 \quad \mathbf{R} \quad \mathbf{R}_\Delta^o] \quad (3.24)$$

A base de redução (3.24) será utilizada para reduzir os modelos de elementos finitos de estruturas compostas laminadas do tipo sanduíches contendo amortecimento viscoelástico. Deve-se destacar que apesar da base de redução (3.24) fornecer bons resultados com uma razoável precisão, ela não é necessariamente robusta para considerar pequenas modificações paramétricas, o que procura-se obter durante a utilização dos procedimentos de condensação de modelos durante os processos iterativos de otimização e/ou de ajuste de modelos. de Lima et al. (2009) aborda aspectos relativos à robustez de bases de condensação de modelos aplicados a sistemas amortecidos viscoelasticamente.

CAPÍTULO 4

MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE COMPÓSITOS ESTRUTURAIS

Este capítulo é dedicado à modelagem por elementos finitos de estruturas compostas laminadas utilizando-se a teoria da deformação cisalhante de ordem superior. Ênfase é dada à parametrização do modelo de elementos finitos da estrutura composta, onde os parâmetros de projeto como espessura de camadas, direções das fibras, e temperatura (para o caso de laminados sanduíches incorporando camadas viscoelásticas) são fatorados das matrizes elementares de massa e rigidez. É apresentada também neste capítulo, uma análise de sensibilidade paramétrica para avaliar a influência dos parâmetros de projeto nas respostas dinâmicas do sistema.

4.1. Introdução

Na maioria das vezes, as dificuldades impostas à realização de ensaios experimentais com estruturas complexas de engenharia como fuselagens de aeronaves e *risers*, fazem com que os métodos numéricos sejam a melhor opção em muitas das aplicações práticas. O que se tenta é simular a realidade, e neste sentido, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma ferramenta numérica que vem se destacando nos últimos anos na modelagem de diversos sistemas de engenharia por apresentarem diversas vantagens como possibilidade de executar vários tipos de análises e obtenção de soluções possíveis. O MEF está consolidado como uma ferramenta universal para a análise estrutural e existem inúmeros softwares comerciais que se baseiam nesta ferramenta numérica (por exemplo, NASTRAN e ANSYS). Além da análise estrutural, o MEF pode ser usado em problemas de transferência de calor, mecânica dos fluidos, problemas de interação fluido-estrutura, e mecânica da fratura.

O Método de Elementos Finitos consiste na discretização de sistemas contínuos, ou seja, na divisão do domínio (sistema) em subdomínios denominados elementos finitos de geometria simples (por exemplo, triângulos e/ou retângulos para a análise bidimensional). Tais elementos são

conectados aos elementos vizinhos por pontos denominados pontos nodais ou simplesmente nós. Dentro de cada elemento os valores dos campos de deslocamentos nos nós são calculados através de funções de aproximação (funções de interpolação polinomiais). Logo, as incógnitas do problema passam a ser os valores dos deslocamentos nos nós, estas incógnitas são conhecidas como graus-de-liberdade elementares. Com isto, é possível realizar a montagem das matrizes dos elementos de forma a construir as matrizes e vetores globais, de acordo com as condições de compatibilidade e equilíbrio nos nós compartilhados por elementos vizinhos. Por último, são impostas as condições de contorno necessárias a resolução do sistema de equações.

No MEF, o campo de deslocamentos mecânicos de um determinado modelo é aproximado através de uma série polinomial ao longo da espessura, e para o caso das estruturas compostas laminadas, existem diversas teorias utilizadas que são classificadas de acordo com a ordem desta série polinomial, como por exemplo, a Teoria Clássica dos Laminados (CLT), a Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT), e a Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior (HSDT) (Reddy, 1997). Estas teorias pertencem a uma classe chamada de Teorias das Camadas Equivalentes Únicas, pois nelas, o número de graus de liberdade independe do número de camadas de um compósito estrutural laminado.

A Teoria Clássica dos Laminados considera apenas três graus de liberdade por nó, u_0 , v_0 e w_0 , o que é computacionalmente uma vantagem. Nesta teoria, consideram-se as hipóteses de Kirchhoff, segundo as quais uma linha reta e perpendicular à superfície de referência, permanece reta e perpendicular a esse plano e não se alonga na direção da espessura. Resulta destas hipóteses que a CLT negligencia os efeitos das deformações cisalhantes transversais (γ_{xz} , γ_{yz} , ϵ_{zz}). Esta teoria, no entanto requer uma continuidade dos campos de deslocamentos pertencentes ao espaço C^1 , ou seja, funções com primeiras derivadas contínuas. No âmbito das soluções analíticas este fato não é restritivo, mas formulações de elementos finitos baseadas em aproximações no espaço C^1 são geralmente mais complexas do que as pertencentes ao espaço C^0 , que requerem apenas funções contínuas (Faria, 2006).

A Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem considera cinco graus de liberdade e requer funções pertencentes ao espaço C^0 , prevendo o comportamento de estruturas mais espessas do que a Teoria Clássica e são baseadas nas teorias de placas de Mindlin-Reissner, na qual as seções planas normais permanecem planas com relação à superfície média, mas não necessariamente normais durante e após a flexão (tal rotação da seção origina deformação de cisalhamento transversal, na direção da espessura). A Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem assume que a deformação cisalhante transversal varia linearmente ao longo da

espessura do laminado, mas para que haja concordância com os casos reais, ela requer a introdução de uma constante de correção para as deformações de cisalhamento transversais. Tal constante de correção não é necessária para a Teoria da Deformação Cisalhante de Terceira Ordem, uma vez que assume uma distribuição parabólica ao longo da espessura do laminado.

A HSDT é baseada nas mesmas suposições da teoria clássica e de primeira ordem, exceto por não considerar que o segmento inicialmente plano e normal à superfície indeformada permaneça plano e normal à superfície deformada, expandindo os deslocamentos numa função cúbica da coordenada da espessura. Além disso, não apresenta travamento por cisalhamento (*shear locking*) na modelagem de placas finas, isto é, não conduz a uma rigidez excessiva (como ocorre na FSDT) e conduz a distribuições de tensões e deformações cisalhantes transversais e normais ao longo da espessura bem próximas das obtidas pela Teoria da Elasticidade Tridimensional (Mendonça, 2005).

A Fig. 4.1 ilustra a cinemática da deformação das diferentes teorias, onde u é o deslocamento na direção x , w representa o deslocamento transversal, e $\partial w_0 / \partial x$ é a rotação em torno do eixo y . A Fig. 4.1(a) representa uma superfície de referência contendo uma linha reta e perpendicular à superfície média indeformada. Na Fig. 4.1(b) nota-se que a superfície de referência permanece reta e perpendicular à superfície média e não se alonga na direção da espessura, conforme ocorre com a CLT. A Fig. 4.1(c) ilustra a FSDT onde o deslocamento transversal é constante ao longo da espessura do laminado, e em (d) tem-se que a linha reta e normal ao plano de referência (antes da deformação), permanece reta, mas não necessariamente normal após a deformação.

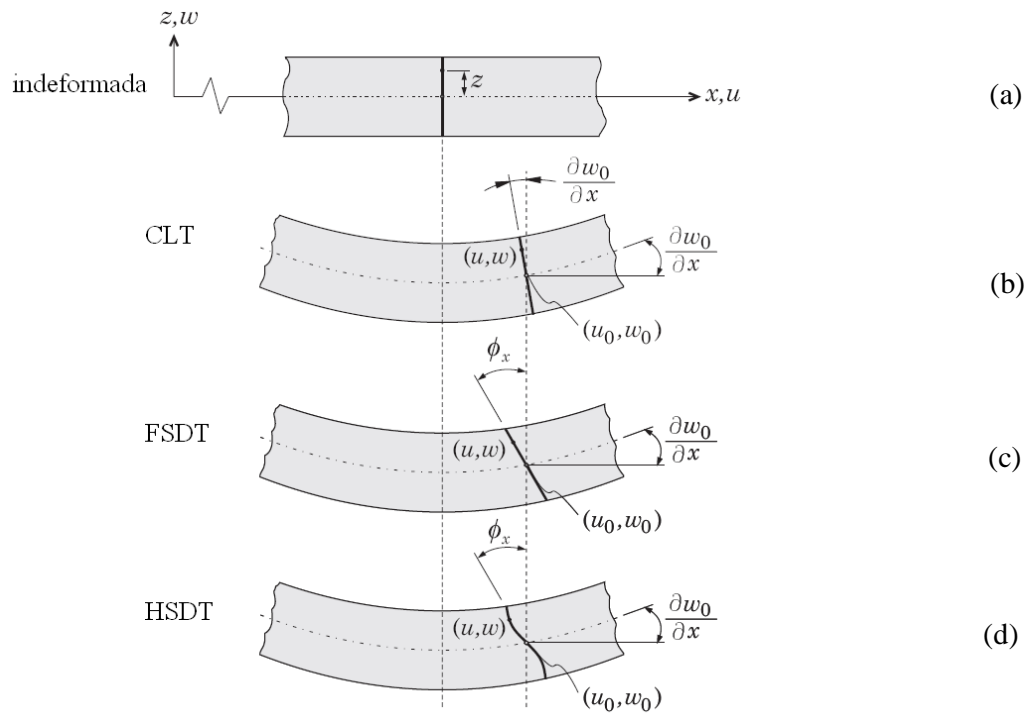


Figura 4.1 – Cinemática da deformação: (a) superfície média indeformada, (b) CLT, (c)FSDT, (d) HSDT.

Além destas teorias, existem também as chamadas Teorias das Camadas Equivalentes Discretas onde o número de graus de liberdade depende do número de camadas ao longo da espessura do compósito. Estas teorias englobam as Teorias das Camadas Independentes, também conhecidas como Teoria Zig-Zag e a Teoria das Camadas Dependentes.

4.2. Formulação por elementos finitos de placas compostas laminadas

A Fig. 4.2 representa as componentes de um elemento de placa composta laminada contendo oito nós e onze graus-de-liberdade por nó, onde z_k , h_k e θ_k indicam, respectivamente, a coordenada da espessura, a espessura e o ângulo de orientação da k -ésima camada.

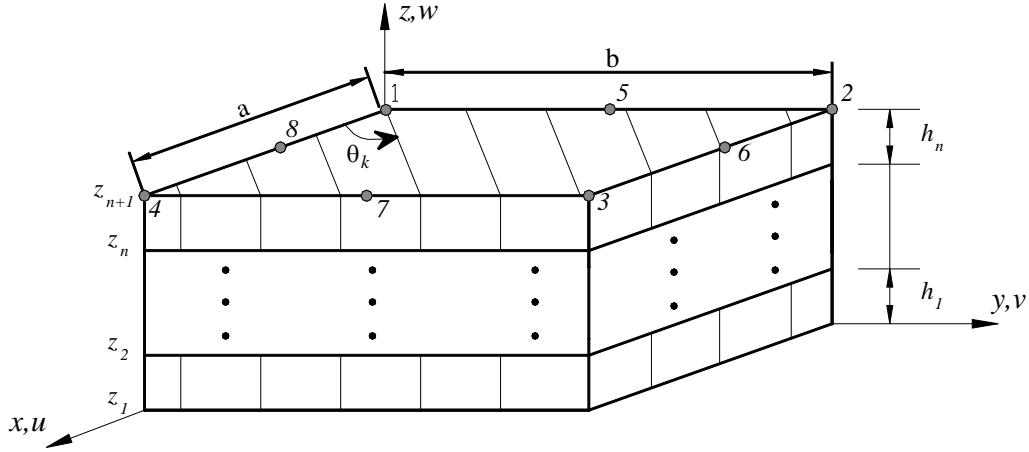


Figura 4.2 – Principais componentes de um elemento de placa composta laminada.

De acordo com a teoria HSDT, os deslocamentos em um ponto arbitrário do elemento são expressos da seguinte forma:

$$U(x, y, z, t) = A(z)u(x, y, t) \quad (4.1)$$

Na Eq. (4.1), tem-se:

$$U(x, y, z, t) = [u(x, y, z, t) \ v(x, y, z, t) \ w(x, y, z, t)]^T \quad (4.2.a)$$

$$A(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 & z^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 & z^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.b)$$

$$u(x, y, t) = [u_0(x, y, t) \ v_0(x, y, t) \ w_0(x, y, t) \ \psi_x(x, y, t) \ \psi_y(x, y, t) \ \psi_z(x, y, t) \ \dots \ \zeta_x(x, y, t) \ \zeta_y(x, y, t) \ \zeta_z(x, y, t) \ \Phi_x(x, y, t) \ \Phi_y(x, y, t)]^T \quad (4.2.c)$$

onde $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, e $w(x, y, z, t)$ denotam, respectivamente, os deslocamentos nas direções x , y e z . (u_0, v_0, w_0) e (ψ_x, ψ_y, ψ_z) são, respectivamente, os deslocamentos do plano médio e as rotações da seção transversal nas direções x , y e z . Os termos ζ_x , ζ_y , ζ_z , Φ_x e Φ_y , podem ser vistos como rotações de alta ordem, não possuindo uma interpretação geométrica clara

(Chee 2001; Mendonça 2005). Da Eq. (4.1), pode ser visto que a aproximação do deslocamento na direção da espessura z é feita separadamente em um procedimento similar ao de separação de variáveis.

As relações deslocamentos-deformações usuais são usadas e as deformações resultantes são separadas em deformações de flexão e de cisalhamento, $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_s$, respectivamente, como segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b(x, y, z, t) = [\mathbf{D}_0 + z\mathbf{D}_1 + z^2\mathbf{D}_2 + z^3\mathbf{D}_3] \mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{D}_b(z)\mathbf{u}(x, y, t) \quad (4.3.a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x, y, z, t) = [\mathbf{D}_4 + z\mathbf{D}_5 + z^2\mathbf{D}_6] \mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{D}_s(z)\mathbf{u}(x, y, t) \quad (4.3.b)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_b(x, y, z, t) = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{xy}]^T$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x, y, z, t) = [\gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T$. $\varepsilon_{xx} = \partial u / \partial x$, $\varepsilon_{yy} = \partial v / \partial y$, $\varepsilon_{zz} = \partial w / \partial z$, $\gamma_{xy} = (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)$, $\gamma_{yz} = (\partial v / \partial z + \partial w / \partial y)$ e $\gamma_{zx} = (\partial u / \partial z + \partial w / \partial x)$. As matrizes \mathbf{D}_i ($i = 0, \dots, 6$) são compostas por operadores diferenciais que aparecem nas relações deslocamentos-deformações, como detalhado por de Lima et al. (2006).

A discretização das variáveis de deslocamentos é feita utilizando-se funções de interpolação, e para um elemento retangular de placa composta por 8 nós, as 11 variáveis mecânicas descritas no vetor $\mathbf{u}(x, y, t)$ estão relacionadas com os correspondentes 88 valores nodais através da seguinte relação:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, t) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{u}(t) \quad (4.4)$$

Onde:

$\mathbf{u}(t) = [\mathbf{u}_1^T(t) \ \mathbf{u}_2^T(t) \ \dots \ \mathbf{u}_8^T(t)]^T$ e $\mathbf{u}_i(t) = [u_i \ v_i \ w_i \ \psi_{xi} \ \psi_{yi} \ \psi_{zi} \ \zeta_{xi} \ \zeta_{yi} \ \zeta_{zi} \ \Phi_{xi} \ \Phi_{yi}]^T$ ($i = 1$ a 8). $\mathbf{N}(\xi, \eta)$ de dimensão 11×88 , é a matriz formada pelas funções de interpolação do elemento padrão de 8 nós da família *Serendipity* formulada em coordenadas locais (ξ, η) , $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$, como detalhado no Anexo A, e ilustrado na Fig. 4.3.

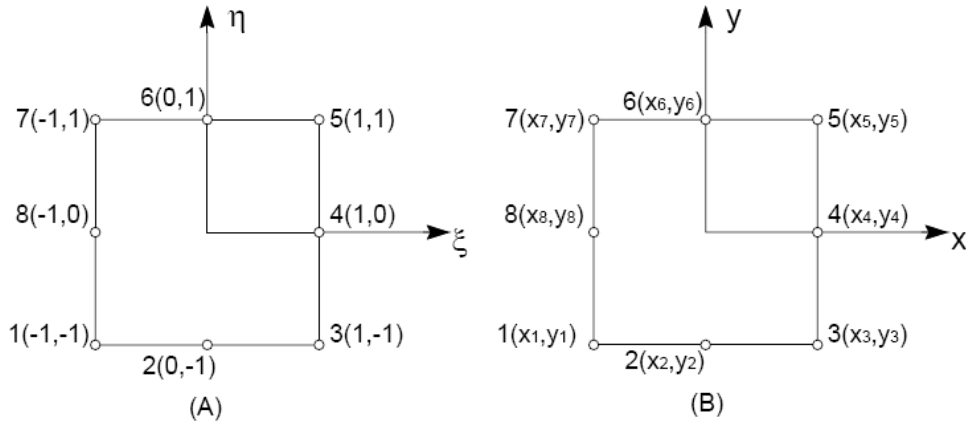


Figura 4.3 – Elemento da família *Serendipity* empregado na formulação por elementos finitos de placas compostas laminadas: (a) coordenadas locais, (b) coordenadas globais.

Pela associação das Eqs. (4.1) e (4.4), os campos de deslocamentos e deformações podem ser obtidos em termos dos valores nodais da seguinte forma:

$$U(x, y, z, t) = A(z)N(\xi, \eta)u(t) \quad (4.5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b(x, y, z, t) = \mathbf{D}_b(z)N(\xi, \eta)u(t) = \mathbf{B}_b(\xi, \eta, z)u(t) \quad (4.6.a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x, y, z, t) = \mathbf{D}_s(z)N(\xi, \eta)u(t) = \mathbf{B}_s(\xi, \eta, z)u(t) \quad (4.6.b)$$

onde as matrizes $\mathbf{D}_b(z)$ e $\mathbf{D}_s(z)$ compostas por operadores diferenciais estão descritas no Anexo B.

Usando as interpolações dos campos de deslocamentos e deformações, as expressões das energias cinéticas e deformação podem ser formuladas, respectivamente, como segue:

$$\mathbf{K}_E(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T(t) \mathbf{M}^{(e)} \dot{\mathbf{u}}(t) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{S}_E(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}(t) \quad (4.8)$$

onde:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \rho_k \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{A}^T(z) \mathbf{A}(z) \mathbf{N}(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi dz \quad (4.9.a)$$

é a matriz de massa elementar, e $\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_b^{(e)} + \mathbf{K}_s^{(e)}$ é a matriz de rigidez elementar, na qual as componentes de flexão e cisalhamento são expressas, respectivamente, como:

$$\mathbf{K}_b^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \mathbf{B}_b^T(\xi, \eta, z) \mathbf{C}_b^{(k)}(\theta_k) \mathbf{B}_b(\xi, \eta, z) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi dz \quad (4.9.b)$$

$$\mathbf{K}_s^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \mathbf{B}_s^T(\xi, \eta, z) \mathbf{C}_s^{(k)}(\theta_k) \mathbf{B}_s(\xi, \eta, z) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi dz \quad (4.9.c)$$

Nas Eqs. (4.9) $\det(\mathbf{J})$ indica o determinante do Jacobiano da transformação das variáveis físicas (x, y) para as variáveis naturais (ξ, η) , e as matrizes $\mathbf{C}_b^{(k)}(\theta_k)$ e $\mathbf{C}_s^{(k)}(\theta_k)$ representam, respectivamente, as matrizes elásticas ortotrópicas associadas à flexão e ao cisalhamento da k -ésima camada, as quais são construídas de acordo com a teoria CLT como segue:

$$\mathbf{C}_b^{(k)}(\theta_k) = \mathbf{T}_b(\theta_k) \bar{\mathbf{C}}_b^{(k)} \mathbf{T}_b^T(\theta_k) \quad (4.10.a)$$

$$\mathbf{C}_s^{(k)}(\theta_k) = \mathbf{T}_s(\theta_k) \bar{\mathbf{C}}_s^{(k)} \mathbf{T}_s^T(\theta_k) \quad (4.10.b)$$

onde $\bar{\mathbf{C}}_b^{(k)}$ e $\bar{\mathbf{C}}_s^{(k)}$ são, respectivamente, as matrizes de propriedades elásticas de flexão e cisalhamento da k -ésima camada, associada ao eixo ortotrópico principal, e $\mathbf{T}_b(\theta_k)$ e $\mathbf{T}_s(\theta_k)$ são as matrizes de rotação associadas.

Das matrizes elementares calculadas para cada elemento da malha de elementos finitos, as equações globais do movimento são construídas levando-se em conta a conectividade dos nós, usando procedimentos padrões de montagem por elementos finitos (Huebner et al., 1982). Após a montagem, as equações globais do movimento no domínio do tempo são escritas como segue:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (4.11)$$

onde $\mathbf{M} = \bigcup_{e=1}^{nelem} \mathbf{M}^{(e)}$ e $\mathbf{K} = \bigcup_{e=1}^{nelem} \mathbf{K}^{(e)}$ são as matrizes globais de massa e rigidez. O símbolo \bigcup indica a montagem de matrizes, e $\mathbf{q}(t)$ é o vetor dos graus de liberdade globais. $\mathbf{f}(t)$ é o vetor dos carregamentos externos.

As equações do movimento no domínio do tempo (4.11) podem ser usadas para a realização de várias análises dinâmicas tais como o cálculo de respostas temporais, autovalores e autovetores, e respostas em frequência.

4.3. Parametrização das matrizes elementares de massa e rigidez

Neste ponto, é importante considerar que, no contexto do presente estudo as sensibilidades são calculadas com relação a um conjunto de parâmetros físicos ou geométricos da estrutura composta laminada que controla o comportamento dinâmico do sistema. Portanto, com o objetivo de calcular as derivadas de primeira ordem das matrizes envolvidas no cálculo da sensibilidade, torna-se interessante a parametrização do modelo de elementos finitos, o qual é entendido como o processo de fatoração dos parâmetros de projeto das matrizes de massa e rigidez. Este procedimento permite calcular não somente as sensibilidades das respostas, mas também a introdução de modificações estruturais, o qual permite um ganho significativo de custo computacional em processos iterativos de otimização e/ou ajuste de modelos. Em geral, parâmetros geométricos das camadas elásticas, tais como espessuras de camadas e orientações de fibras, e parâmetros físicos das camadas viscoelásticas, tais como temperatura, intervêm de forma complicada nas matrizes estruturais. Após algumas manipulações matemáticas, esses parâmetros podem ser fatorados das matrizes de massa e rigidez, da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \sum_{\beta} (\mathbf{p}_m)^{\beta} {}_{\beta} \mathbf{M}^{(e)}, \quad \mathbf{K}^{(e)} = \sum_{\alpha} (\mathbf{p}_s)^{\alpha} {}_{\alpha} \mathbf{K}^{(e)} \quad (4.12)$$

onde \mathbf{p}_m e \mathbf{p}_s são os vetores contendo os parâmetros fatorados de massa e rigidez das camadas para o elemento finito (e) . ${}_{\beta} \mathbf{M}^{(e)}$ e ${}_{\alpha} \mathbf{K}^{(e)}$ são as matrizes das quais os parâmetros de ordem exponencial β e α foram fatorados. Definindo-se, a orientação θ_k das fibras da k -ésima camada,

onde $s_k = \sin \theta_k$ e $c_k = \cos \theta_k$, pode ser fatorada das matrizes de transformação $\mathbf{T}_b(\theta_k)$ e $\mathbf{T}_s(\theta_k)$ como segue:

$$\mathbf{T}_b(\theta_k) = c_k^2 \mathbf{T}_{b_1} + \mathbf{T}_{b_2} + s_k c_k \mathbf{T}_{b_3} \quad (4.13.a)$$

$$\mathbf{T}_s(\theta_k) = c_k \mathbf{T}_{s_1} + s_k \mathbf{T}_{s_2} \quad (4.13.b)$$

$$\text{onde } \mathbf{T}_{b_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_{b_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_{b_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_{s_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{s_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Através da consideração das Eqs. (4.10) e (4.13), as matrizes $\mathbf{C}_b^{(k)}(\theta_k)$ e $\mathbf{C}_s^{(k)}(\theta_k)$ podem ser escritas da seguinte forma:

$$\mathbf{C}_b^{(k)}(\theta_k) = c_k^4 \bar{\mathbf{C}}_{b_1}^{(k)} + c_k^2 \bar{\mathbf{C}}_{b_2}^{(k)} + s_k c_k^3 \bar{\mathbf{C}}_{b_3}^{(k)} + \bar{\mathbf{C}}_{b_4}^{(k)} + s_k c_k \bar{\mathbf{C}}_{b_5}^{(k)} + s_k^2 c_k^2 \bar{\mathbf{C}}_{b_6}^{(k)} \quad (4.14.a)$$

$$\mathbf{C}_s^{(k)}(\theta_k) = c_k^2 \bar{\mathbf{C}}_{s_1}^{(k)} + s_k c_k \bar{\mathbf{C}}_{s_2}^{(k)} + s_k^2 \bar{\mathbf{C}}_{s_3}^{(k)} \quad (4.14.b)$$

$$\text{onde } \bar{\mathbf{C}}_{b_1}^{(k)} = \mathbf{T}_{b_1} \bar{\mathbf{C}}_b^{(k)} \mathbf{T}_{b_1}^T, \quad \bar{\mathbf{C}}_{b_2}^{(k)} = \mathbf{T}_{b_1} \bar{\mathbf{C}}_b^{(k)} \mathbf{T}_{b_2}^T + \mathbf{T}_{b_2} \bar{\mathbf{C}}_b^{(k)} \mathbf{T}_{b_1}^T, \quad \bar{\mathbf{C}}_{b_3}^{(k)} = \mathbf{T}_{b_1} \bar{\mathbf{C}}_b^{(k)} \mathbf{T}_{b_3}^T + \mathbf{T}_{b_3} \bar{\mathbf{C}}_b^{(k)} \mathbf{T}_{b_1}^T, \\ \bar{\mathbf{C}}_{b_4}^{(k)} = \mathbf{T}_{b_2} \bar{\mathbf{C}}_b^{(k)} \mathbf{T}_{b_2}^T, \quad \bar{\mathbf{C}}_{b_5}^{(k)} = \mathbf{T}_{b_2} \bar{\mathbf{C}}_b^{(k)} \mathbf{T}_{b_3}^T + \mathbf{T}_{b_3} \bar{\mathbf{C}}_b^{(k)} \mathbf{T}_{b_2}^T, \quad \bar{\mathbf{C}}_{b_6}^{(k)} = \mathbf{T}_{b_3} \bar{\mathbf{C}}_b^{(k)} \mathbf{T}_{b_3}^T, \quad \bar{\mathbf{C}}_{s_1}^{(k)} = \mathbf{T}_{s_1} \bar{\mathbf{C}}_s^{(k)} \mathbf{T}_{s_1}^T, \\ \bar{\mathbf{C}}_{s_2}^{(k)} = \mathbf{T}_{s_1} \bar{\mathbf{C}}_s^{(k)} \mathbf{T}_{s_2}^T + \mathbf{T}_{s_2} \bar{\mathbf{C}}_s^{(k)} \mathbf{T}_{s_1}^T, \text{ e } \bar{\mathbf{C}}_{s_3}^{(k)} = \mathbf{T}_{s_2} \bar{\mathbf{C}}_s^{(k)} \mathbf{T}_{s_2}^T.$$

As equações (4.9), (4.12) e (4.14) podem ser combinadas para fornecerem as matrizes de massa e rigidez nos quais os parâmetros h_k , s_k e c_k são fatorados:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^7 t_k^i \rho_k \mathbf{M}_i^{(k)} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{K}_b^{(e)} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^7 t_k^i \left[c_k^4 \mathbf{K}_{b_i}^{(k)} + c_k^2 \mathbf{K}_{b_i}^{(k)} + s_k c_k^3 \mathbf{K}_{b_i}^{(k)} + \mathbf{K}_{b_i}^{(k)} + s_k c_k \mathbf{K}_{b_i}^{(k)} + s_k^2 c_k^2 \mathbf{K}_{b_i}^{(k)} \right]$$

(4.16)

$$\mathbf{K}_s^{(e)} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^5 t_k^i \left[c_k^2 \mathbf{K}_{s_i}^{(k)} + s_k c_k \mathbf{K}_{s_i}^{(k)} + s_k^2 \mathbf{K}_{s_i}^{(k)} \right] \quad (4.17)$$

onde $t_k^i = [k^i - (k-1)^i] h_k^i$. $\mathbf{M}_i^{(k)}$, ($j=1, \dots, 6$) e ${}_j \mathbf{K}_{s_j}^{(k)}$ ($j=1, \dots, 3$) são definidas como segue:

$$\mathbf{M}_i^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{A}}_i \mathbf{N}) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (4.18)$$

$${}_j \mathbf{K}_{b_j}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{B}_0^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_0) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (4.19.a)$$

$${}_j \mathbf{K}_{b_2}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{B}_0^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_0) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (4.19.b)$$

$${}_j \mathbf{K}_{b_3}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{B}_0^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_0) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (4.19.c)$$

$${}_j \mathbf{K}_{b_4}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{B}_0^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_1^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_0) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (4.19.d)$$

$${}_j \mathbf{K}_{b_5}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{B}_1^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_2^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_1) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (4.19.e)$$

$${}_j \mathbf{K}_{b_6}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{B}_2^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_3^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_2) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (4.19.f)$$

$${}_j \mathbf{K}_{b_7}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{B}_3^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j}^{(k)} \mathbf{B}_3) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (4.19.g)$$

$${}_j \mathbf{K}_{s_1}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{B}_4^T \bar{\mathbf{C}}_{s_j}^{(k)} \mathbf{B}_4) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (4.20.a)$$

$${}_j \mathbf{K}_{s_2}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_4^T \bar{\mathbf{C}}_{s_j}^{(k)} \mathbf{B}_5 + \mathbf{B}_5^T \bar{\mathbf{C}}_{s_j}^{(k)} \mathbf{B}_4 \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (4.20.b)$$

$${}_j \mathbf{K}_{s_3}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_4^T \bar{\mathbf{C}}_{s_j}^{(k)} \mathbf{B}_6 + \mathbf{B}_5^T \bar{\mathbf{C}}_{s_j}^{(k)} \mathbf{B}_5 + \mathbf{B}_6^T \bar{\mathbf{C}}_{s_j}^{(k)} \mathbf{B}_4 \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (4.20.c)$$

$${}_j \mathbf{K}_{s_4}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_5^T \bar{\mathbf{C}}_{s_j}^{(k)} \mathbf{B}_6 + \mathbf{B}_6^T \bar{\mathbf{C}}_{s_j}^{(k)} \mathbf{B}_5 \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (4.20.d)$$

$${}_j \mathbf{K}_{s_5}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_6^T \bar{\mathbf{C}}_{s_j}^{(k)} \mathbf{B}_6 \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (4.20.e)$$

onde $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\xi, \eta)$ e $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\xi, \eta)$. $\bar{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0$, $\bar{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_0$, $\bar{\mathbf{A}}_6 = \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3^T \mathbf{A}_2$, $\bar{\mathbf{A}}_3 = \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_0$, $\bar{\mathbf{A}}_4 = \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_3^T \mathbf{A}_0$, $\bar{\mathbf{A}}_7 = \mathbf{A}_3^T \mathbf{A}_3$, $\bar{\mathbf{A}}_5 = \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3^T \mathbf{A}_1$. As matrizes \mathbf{A}_i ($i = 0, \dots, 3$) são as matrizes nas quais o parâmetro z^i é fatorado, de acordo com a definição (4.2.b).

4.4. Placas compostas sanduíches contendo camadas viscoelásticas.

A teoria apresentada na seção anterior pode ser facilmente adaptada para o caso de placas sanduíches contendo ambas as camadas compostas unidirecionais e camadas viscoelásticas isotrópicas. Nesse caso, as leis constitutivas devem ser convenientemente consideradas para o comportamento viscoelástico. É importante destacar que, como já comentado anteriormente, as camadas de fibras unidirecionais podem também exibir comportamento viscoelástico associado ao comportamento inerente das matrizes poliméricas.

De acordo com o Princípio da Correspondência Elástico-Viscoelástico descrito na Seção 3.2, a derivação do modelo de elementos finitos considerando o comportamento viscoelástico pode ser descrito em duas fases distintas: primeiro, as matrizes elementares e globais são obtidas considerando-se comportamento elástico puro (o módulo do material é independente da frequência e da temperatura). Este procedimento foi considerado na seção precedente. Então, o módulo do material é modificado para levar em conta o comportamento viscoelástico (de acordo com modelo

do módulo complexo como definido pela Eq. (3.9)). É importante destacar que esta aproximação fornece matrizes de elementos finitos dependentes da frequência e da temperatura, as quais são expressas, após uma adaptação das Eqs. (4.9.b) e (4.9.c), da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_b^{(v)}(\omega, T) = \sum_{k=1}^v \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \mathbf{B}_b^T(\xi, \eta, z) \mathbf{C}_b^{(k)}(\omega, T) \mathbf{B}_b(\xi, \eta, z) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi dz \quad (4.21.a)$$

$$\mathbf{K}_s^{(v)}(\omega, T) = \sum_{k=1}^v \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \mathbf{B}_s^T(\xi, \eta, z) \mathbf{C}_s^{(k)}(\omega, T) \mathbf{B}_s(\xi, \eta, z) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi dz \quad (4.21.b)$$

Com o objetivo de calcular as sensibilidades com relação às propriedades do material da camada viscoelástica, um dos módulos pode ser fatorado das matrizes que representam as contribuições nas matrizes de rigidez da placa composta sanduíche, como segue:

$$\mathbf{K}_b^{(v)} = G(\omega, T) \sum_{k=1}^v \sum_{i=1}^7 t_k^i \bar{\mathbf{K}}_{b_i}^{(k)} \quad (4.22.a)$$

$$\mathbf{K}_s^{(v)} = G(\omega, T) \sum_{k=1}^v \sum_{i=1}^5 t_k^i \bar{\mathbf{K}}_{s_i}^{(k)} \quad (4.22.b)$$

onde $\bar{\mathbf{K}}_{b_i}^{(k)}$ e $\bar{\mathbf{K}}_{s_i}^{(k)}$ são matrizes independentes da frequência e temperatura, definidas da mesma maneira que as matrizes descritas nas Eqs. (4.19) e (4.20). As matrizes $\bar{\mathbf{K}}_{b_i}^{(k)}$ e $\bar{\mathbf{K}}_{s_i}^{(k)}$ são combinadas com as matrizes de rigidez fatoradas representadas pelas Eqs. (4.19) e (4.20) para fornecerem a matriz de rigidez global definida pela Eq. (3.14):

$$\mathbf{K}(\omega, T) = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v(\omega, T) = \mathbf{K}_e + G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}_v \quad (4.23)$$

Negligenciando os efeitos de outros tipos de amortecimento, pode-se chegar à definição da expressão para a matriz de rigidez dinâmica complexa de acordo com a definição (3.16).

4.5. Emprego das diferenças finitas para a análise de sensibilidade paramétrica das respostas dinâmicas.

As matrizes globais de elementos finitos descritas na Eq. (3.17) estabelecem uma dependência da resposta do sistema com relação a um conjunto de parâmetros de projeto. Tal dependência funcional pode ser expressa, em geral, da seguinte forma (de Lima et al., 2006):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[\mathbf{M}(\mathbf{p}), \mathbf{K}(\mathbf{p})] \quad (4.24)$$

onde \mathbf{r} e \mathbf{p} designam vetores da resposta estrutural e parâmetros de projeto, respectivamente.

A sensibilidade da resposta com relação a um dado parâmetro p_i , avaliado para um dado conjunto de valores de parâmetros de projeto \mathbf{p}^0 é definida como uma derivada parcial da resposta em relação ao parâmetro, da seguinte forma:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_i} \right|_{\mathbf{p}^0} = \lim_{\Delta p_i \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mathbf{r}[\mathbf{M}(p_i^0 + \Delta p_i), \mathbf{K}(p_i^0 + \Delta p_i)]}{\Delta p_i} - \frac{\mathbf{r}[\mathbf{M}(p_i^0), \mathbf{K}(p_i^0)]}{\Delta p_i} \right\} \quad (4.25)$$

onde Δp_i é uma variação arbitrária, tendendo a zero, aplicada ao valor corrente do parâmetro p_i^0 , enquanto todos os outros parâmetros são mantidos inalterados. A sensibilidade da resposta com relação a p_i pode ser numericamente estimada por diferenças finitas através do cálculo sucessivo das respostas correspondentes a $p_i = p_i^0$ e $p_i = p_i^0 + \Delta p_i$, como segue:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_i} \right|_{\mathbf{p}^0} \approx \left\{ \frac{\mathbf{r}[\mathbf{M}(p_i^0 + \Delta p_i), \mathbf{K}(p_i^0 + \Delta p_i)]}{\Delta p_i} - \frac{\mathbf{r}[\mathbf{M}(p_i^0), \mathbf{K}(p_i^0)]}{\Delta p_i} \right\} \quad (4.26)$$

Tal procedimento é reconhecido como sendo ineficiente do ponto de vista computacional. De fato, para modelos de elementos finitos de estruturas compostas por um grande número de graus de liberdade, o tempo requerido na avaliação da expressão (4.26), especialmente dentro do contexto iterativo de otimização e/ou ajuste de modelos, pode se tornar proibitivo. Além disso, a precisão da sensibilidade estimada depende da escolha do incremento paramétrico Δp_i , o qual

deve ser pequeno quando comparado com o parâmetro p_i . Em contra partida, instabilidades numéricas podem ocorrer à medida que Δp_i se aproxima de zero.

Outra estratégia, considerada mais precisa e eficiente em termos do custo computacional, consiste no cálculo das derivadas analíticas das respostas estruturais com relação aos parâmetros de projeto. Este procedimento é considerado na próxima seção.

4.5.1. Sensibilidade das FRFs com relação aos parâmetros estruturais.

A análise de sensibilidade será efetuada para a matriz complexa de FRFs de uma placa composta sanduíche incorporando camadas viscoelásticas como definido pela Eq. (3.17). A sensibilidade com relação a um dado parâmetro estrutural, para um dado conjunto de valores de parâmetros de projeto que forma o vetor \mathbf{p}^0 , pode ser calculada pela derivação da seguinte expressão $\mathbf{H}(\omega, T, \mathbf{p})\mathbf{H}^{-1}(\omega, T, \mathbf{p}) = \mathbf{I}$ em relação ao parâmetro p_i da seguinte forma:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}(\omega, T, \mathbf{p})}{\partial p_i} \right|_{(\omega, T^0, \mathbf{p}^0)} = -\mathbf{H}(\omega, T^0, \mathbf{p}^0) \left[\frac{\partial \mathbf{K}(\omega, T^0, \mathbf{p}^0)}{\partial p_i} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{p}^0)}{\partial p_i} \right] \mathbf{H}(\omega, T^0, \mathbf{p}^0) \quad (4.27)$$

É importante notar que quando o parâmetro p_i aparece de forma explícita nas matrizes \mathbf{M} e/ou $\mathbf{K}(\omega, T)$, o cálculo das derivadas dessas matrizes com relação a tal parâmetro geralmente resulta em matrizes esparsas. Esta é uma das principais vantagens do processo de parametrização apresentado na Seção 4.3. Entretanto, o cálculo das derivadas parciais associado com o esquema de parametrização requer que todos os parâmetros de projeto sejam independentes uns dos outros, o qual é o caso dos parâmetros de projeto considerados neste trabalho. Do contrário, a dependência entre os parâmetros de projeto pode ser considerada através da diferenciação em cadeia, conhecidas as relações funcionais entre as variáveis independentes, como é o caso da temperatura do material viscoelástico.

4.5.2. Sensibilidade das FRFs com relação à temperatura do material viscoelástico.

O cálculo das derivadas das FRFs com relação à temperatura do material viscoelástico requer um procedimento particular, como detalhado primeiramente por de Lima et al. (2006), uma

vez que tal parâmetro não aparece de forma explícita nas matrizes de rigidez viscoelásticas. Atualmente, a influência da temperatura é introduzida nas equações do movimento através da aproximação do módulo complexo como detalhado na Seção 3.6, associado ao conceito de fator de deslocamento (de acordo com as definições (3.10) e (3.11)).

Combinando-se as expressões (3.17) e (4.27) com a Eq. (3.10), a sensibilidade da matriz de FRF com relação à temperatura, para um dado conjunto de parâmetros \mathbf{p}^0 e temperatura T^0 , é avaliada como segue:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}(\omega, T, \mathbf{p})}{\partial T} \right|_{(\omega, T^0, \mathbf{p}^0)} = -\mathbf{H}(\omega_r, T^0, \mathbf{p}^0) \left[\frac{\partial G(\omega_r, T^0)}{\partial T} \bar{\mathbf{K}}_v(\mathbf{p}^0) \right] \mathbf{H}(\omega_r, T^0, \mathbf{p}^0) \quad (4.28)$$

Partindo da Eq. (3.10), e assumindo que as relações funcionais (3.12) são avaliadas para o material viscoelástico de interesse, a derivada do módulo $G(\omega, T)$ descrita na Eq. (4.28) pode ser calculada da forma:

$$\frac{\partial G(\omega_r, T^0)}{\partial T} = \frac{\partial G}{\partial \omega_r} \frac{\partial \omega_r}{\partial T} = \frac{\partial G}{\partial \omega_r} \frac{\partial \alpha_T}{\partial T} \omega \quad (4.29)$$

CAPÍTULO 5

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo são apresentadas simulações numéricas com o objetivo de validar os procedimentos de modelagem e implementação computacional de estruturas compostas laminadas contendo amortecimento viscoelástico, utilizando o ambiente de programação Matlab[®].

5.1. Placa composta laminada contendo amortecimento inerente

Nesta primeira aplicação considera-se uma placa plana composta laminada, conforme ilustrado na Figura 5.1(a), onde $L_x = L_y = 0.16$ m, composta por cinco camadas unidirecionais de mesma espessura e igual a $h/5$, onde $h = L_x/128$. A Figura 5.1(b) ilustra a discretização do modelo de elementos finitos composto por 64 elementos de placa plana laminada e 225 nós. São consideradas as seguintes condições de contorno para o problema: $u_0 = w_0 = \psi_z = \zeta_x = \zeta_z = 0$ em $y = 0$ e $y = a$, e $u_0 = w_0 = \psi_z = \zeta_y = \zeta_z = 0$ em $x = 0$ e $x = b$ (Correia, 2000). As orientações das fibras de cada camada são adotadas arbitrariamente como $(45^\circ/0^\circ/45^\circ/0^\circ/45^\circ)$, e as propriedades elásticas de cada camada são: $\bar{E}_1 = 172,4GPa$, $\bar{E}_2 = \bar{E}_3 = 6,89GPa$, $\bar{G}_{12} = \bar{G}_{13} = 3,45GPa$, $\bar{G}_{23} = 1,38GPa$, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,25$, $\nu_{23} = 0,30$, $\rho = 1566kg/m^3$ é a densidade do material.

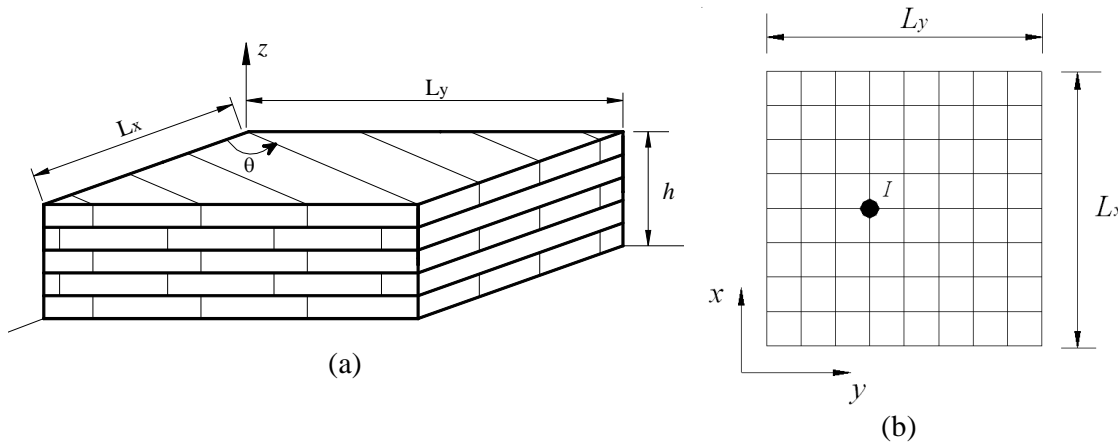


Figura 5.1 – Geometria da placa composta (a) e a discretização por EFs (b).

É assumido que o material compósito apresenta amortecimento inerente, representado pelos módulos complexos e independentes da frequência e temperatura da seguinte forma:

$$E_{mn} = \bar{E}_{mn}(1 + i\eta_{mn}), \quad G_{mn} = \bar{G}_{mn}(1 + i\eta_{mn}) \quad (5.1)$$

onde $\eta_{mn} = 0.001$ é adotado como fator de perda para todos os módulos.

Os cálculos consistem em obter as FRFs pontuais $\mathbf{H}_H(\omega, \mathbf{p})$ associadas ao deslocamento transversal do ponto I , escolhido arbitrariamente, e indicado na Fig. 5.1(b). \mathbf{p} indica o vetor contendo os parâmetros de projeto. Além disso, as FRFs foram computadas com um modelo reduzido utilizando-se a seguinte base de redução constante: $\mathbf{T}_1 = [\boldsymbol{\phi}_0 \quad \mathbf{R}]$ (15 autovalores $\boldsymbol{\phi}_0$, mais um vetor residual \mathbf{R} calculado de acordo com a Eq. (3.22)).

A Figura 5.2 ilustra as amplitudes da função de resposta em frequência da estrutura composta laminada contendo amortecimento inerente, mostrando as quatro primeiras frequências naturais da placa. Na mesma figura são mostradas as amplitudes da FRF da estrutura sem considerar o efeito do amortecimento. Nota-se que a consideração do amortecimento inerente da estrutura é bastante relevante em termos da atenuação dos níveis de vibração correspondentes aos picos de ressonância.

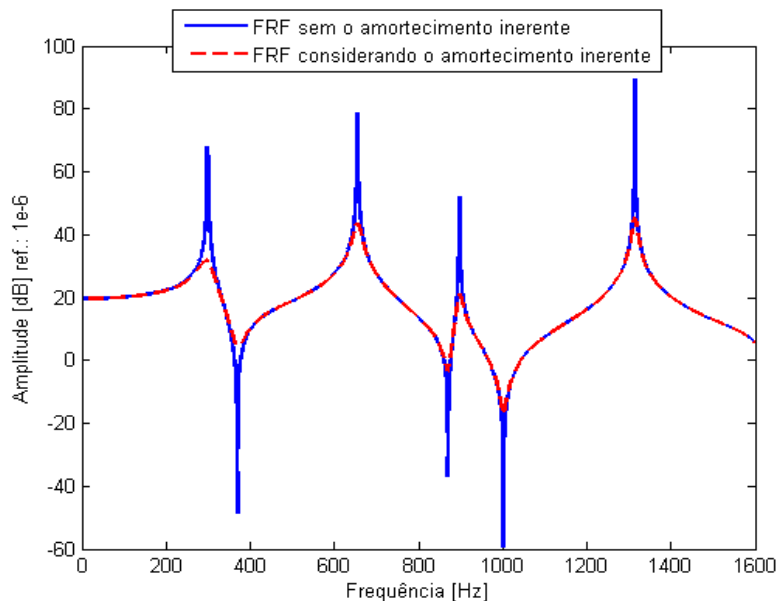


Figura 5.2 – FRFs da placa composta laminada com e sem amortecimento inerente.

5.2. Placa composta laminada contendo amortecimento viscoelástico

Na segunda aplicação numérica tem-se uma placa composta laminada do tipo sanduíche, formada por quatro camadas de material compósito e um núcleo de material viscoelástico do tipo 3M ISD112[®] (densidade $\rho = 950 \text{ kg/m}^3$), conforme ilustra a Figura 5.3, cuja expressão do módulo complexo é definida pela Eq. (3.12).

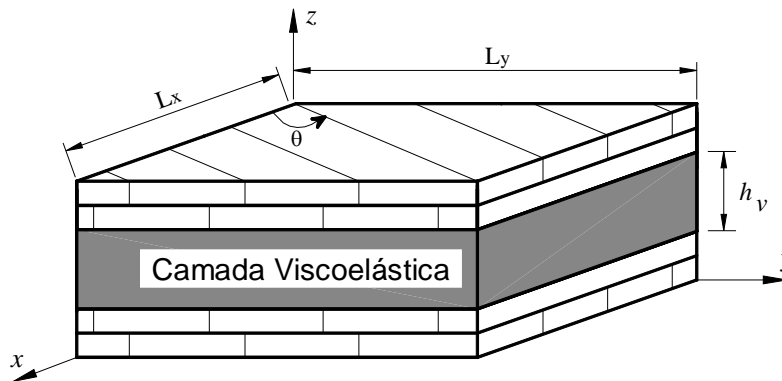


Figura 5.3 – Ilustração de uma placa sanduíche com núcleo viscoelástico.

A discretização por elementos finitos, as características geométricas e as condições de contorno da placa composta sanduíche são as mesmas utilizadas no exemplo da seção anterior. Para este caso, a espessura da camada viscoelástica é adotada como sendo $h_v = L_x/128$, e a temperatura do material viscoelástico é 25°C . Além disso, tem-se o interesse em verificar a base de redução constante para estruturas amortecidas viscoelasticamente conforme descrito na Seção 3.7, através do uso de uma base de redução composta por resíduos estáticos associados aos esforços externos e as forças viscoelásticas. O cálculo consiste na obtenção das FRFs pontuais associadas ao ponto *I* indicado na Figura 5.1(b). Para verificar a redução direta, serão utilizadas três bases de redução, a saber: $T_1 = [\phi_0]$ (60 autovetores); $T_2 = [\phi_0 \quad R]$ (60 autovetores, mais um vetor residual calculado de acordo com Eq. (3.22)); $T_3 = [\phi_0 \quad R \quad R_v^0]$ (60 autovetores, um vetor residual calculado pela (3.22), 54 vetores residuais computados de acordo com a definição (3.23)). Os

resíduos \mathbf{R}_v^0 foram calculados considerando-se os maiores valores singulares, tal que $\sigma_1/\sigma_i \leq 1 \times 10^5$, onde $i = 1$ a 60 é adotada.

As Figuras 5.4(a), (b) e (c) ilustram as amplitudes das FRFs computadas para as três bases de redução, comparadas com as amplitudes das FRFs utilizando-se uma base de referência formada por um grande número de autovetores (100) e vetores residuais (100). Pode-se notar que a precisão e representatividade do modelo reduzido são continuamente aumentadas após o enriquecimento sucessivo da base de redução pela inclusão dos vetores residuais que levam em conta os esforços externos e os efeitos do amortecimento viscoelástico, para formarem as bases \mathbf{T}_2 e \mathbf{T}_3 .

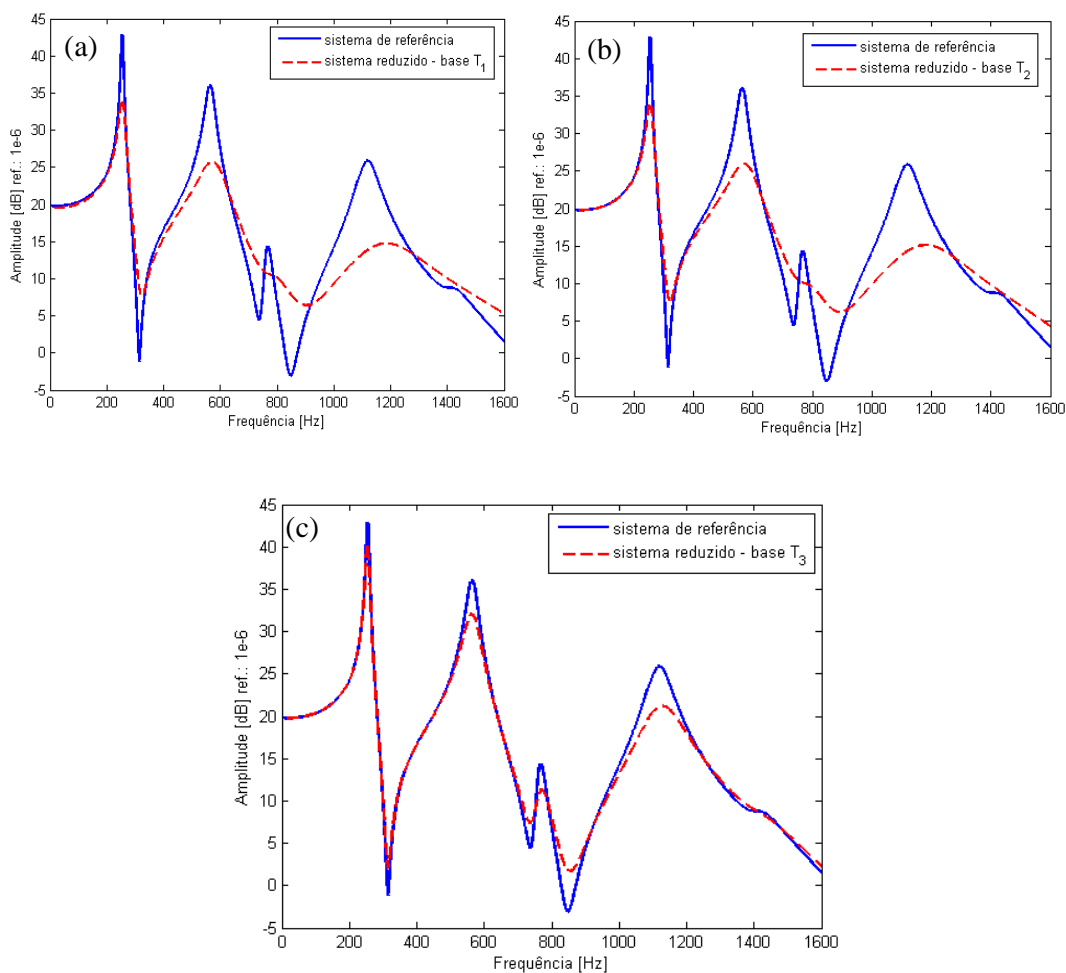


Figura 5.4 – Amplitudes das FRFs dos sistemas de referência e reduzido, utilizando-se as bases de redução \mathbf{T}_1 (a), \mathbf{T}_2 (b) and \mathbf{T}_3 (c).

5.3. Efeito da Temperatura no comportamento dinâmico da placa composta sanduíche

Nesta aplicação será avaliada a influência da temperatura sobre o comportamento dinâmico da placa composta laminada contendo amortecimento viscoelástico. Para isto, será utilizada a mesma placa composta sanduíche da seção anterior, incluindo as características geométricas e condições de contorno. Foram escolhidas temperaturas de trabalho dentro do intervalo de 20°C a 35°C com variações de 5°C. A Figura 5.5 compara as amplitudes das FRFs da placa composta sanduíche para quatro valores diferentes de temperatura do material viscoelástico. Pode-se notar que um aumento no valor da temperatura do material viscoelástico leva a uma perda de eficiência do material em termos da atenuação dos níveis de vibração da placa composta, demonstrando que o efeito da temperatura sobre as propriedades dinâmicas do material viscoelástico torna-se bastante significativo, visto que sua não consideração pode resultar a uma perda significativa da performance do material em termos da capacidade de amortecimento.

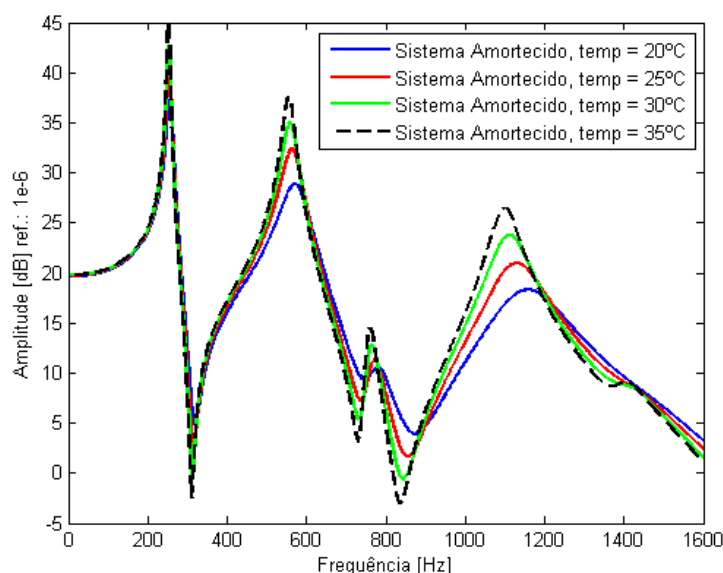


Figura 5.5 – FRFs da placa composta sanduíche para diferentes valores de temperatura.

5.4. Análise de sensibilidade da placa composta contendo amortecimento inerente

Nesta seção, ênfase é dada ao cálculo das sensibilidades das FRFs da placa composta laminada incorporando amortecimento inerente descrita na Seção 5.1. As partes real e imaginária das funções de sensibilidade complexa calculadas de acordo com a definição (4.27) são mostradas nas Figuras 5.5 a 5.13, no qual são comparadas com as correspondentes calculadas por diferenças

finitas (de acordo com a Eq. (4.26)) utilizando variações sucessivas dos parâmetros de projeto, correspondentes a 1%, 5% e 10% dos valores nominais, respectivamente. Nas mesmas figuras, as partes real e imaginária das FRFs $\mathbf{H}_{II}(\omega, \mathbf{p})$, multiplicadas por um fator de escala conveniente, são mostradas. Para permitir comparações, as funções de sensibilidade foram normalizadas como segue:

$$S^N(\omega, p_i) = \frac{\partial \mathbf{H}_{II}(\omega, p_i)}{\partial p_i} \bigg|_{(\omega, p^0)} \frac{p_0}{\mathbf{H}_{II}(\omega, p_0)} \quad (5.2)$$

As Figuras 5.5 a 5.13 permitem avaliar a precisão das derivadas de primeira ordem as quais são comparáveis com as estimações por diferenças finitas quando variações pequenas são aplicadas para o cálculo destas últimas. Como esperado, a proximidade dos resultados é menos satisfatória para grandes variações nos parâmetros uma vez que a precisão da estimação por diferenças finitas diminui com o aumento da perturbação.

O uso imediato das funções de sensibilidade é a comparação qualitativa do grau de influência dos diferentes parâmetros de projeto sobre as respostas dinâmicas: quanto maior a amplitude da função de sensibilidade com relação a um dado parâmetro de projeto, maior a influência deste parâmetro sobre as respostas dinâmicas. Entretanto, cumpre-se destacar que esta avaliação é estritamente válida para pequenas variações nos parâmetros de projeto, uma vez que, dependendo do caso, as derivadas de primeira ordem podem não fornecer boas aproximações das variações por diferenças finitas.

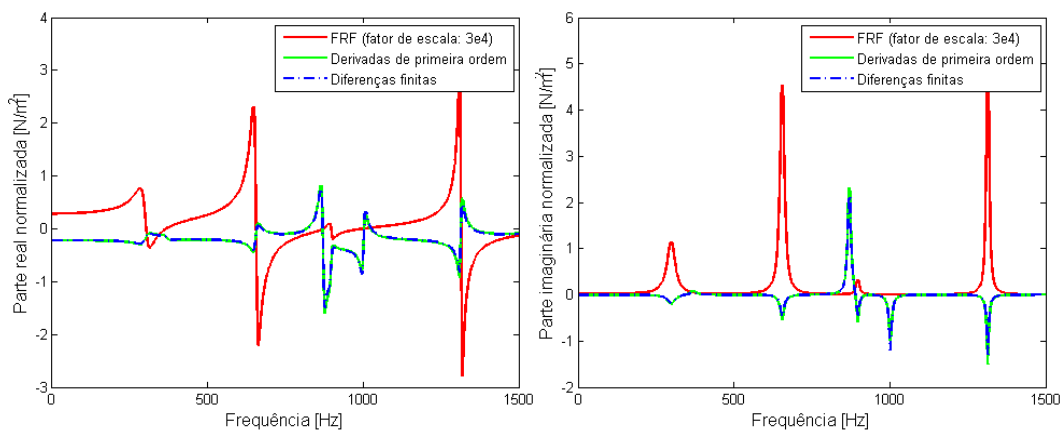


Figura 5.5 – Sensibilidades da FRF $\mathbf{H}_{II}(\omega, \mathbf{p})$ com relação h_1 comparada com as estimativas por diferenças finitas obtidas para $\Delta h_1/h_1 = 1\%$

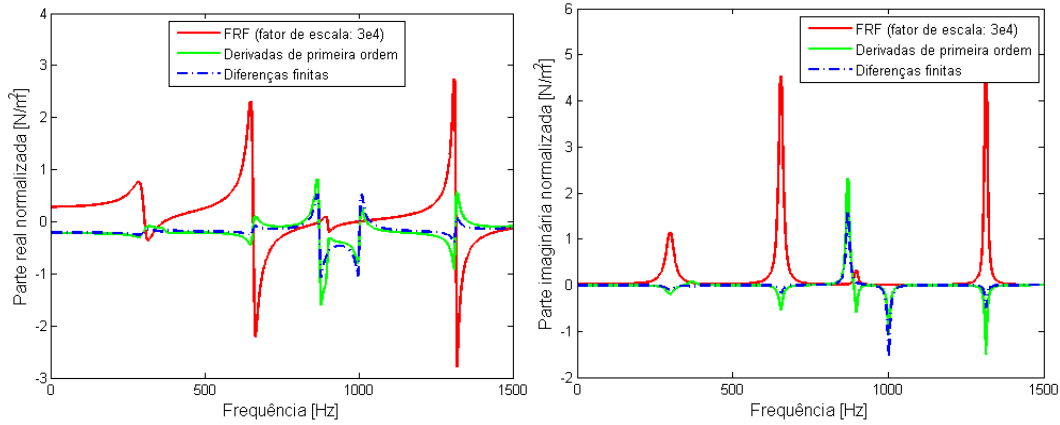


Figura 5.6 – Sensibilidades da FRF $H_{II}(\omega, \mathbf{p})$ com relação h_1 comparada com as estimativas por diferenças finitas obtidas para $\Delta h_1/h_1 = 5\%$

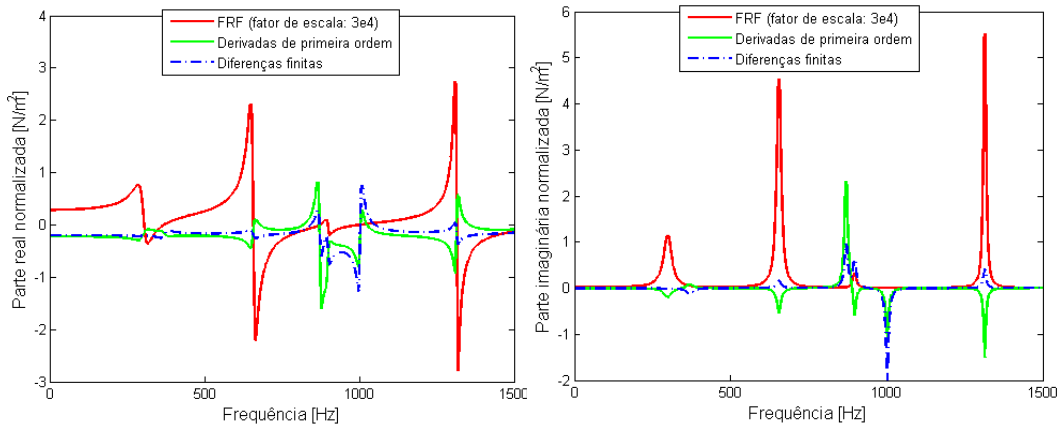


Figura 5.7 – Sensibilidades da FRF $H_{II}(\omega, \mathbf{p})$ com relação h_1 comparada com as estimativas por diferenças finitas obtidas para $\Delta h_1/h_1 = 10\%$

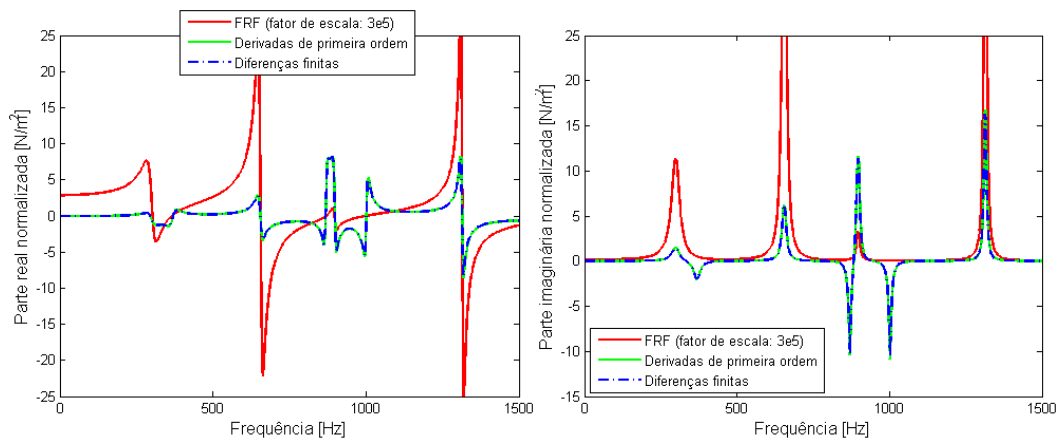


Figura 5.8 – Sensibilidades da FRF $H_{II}(\omega, \mathbf{p})$ com relação h_3 comparada com as estimativas por diferenças finitas obtidas para $\Delta h_3/h_3 = 1\%$.

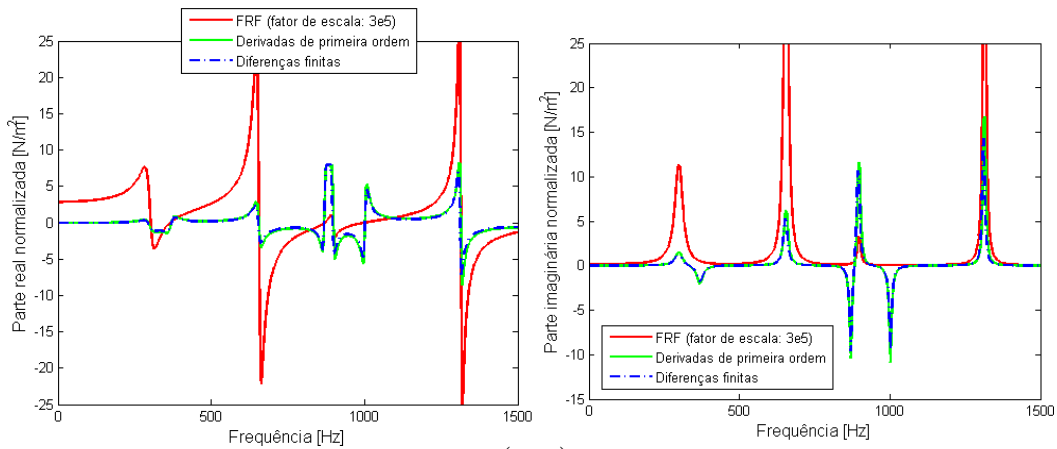


Figura 5.9 – Sensibilidades da FRF $H_{II}(\omega, p)$ com relação h_3 comparada com as estimativas por diferenças finitas obtidas para $\Delta h_3/h_3 = 5\%$.

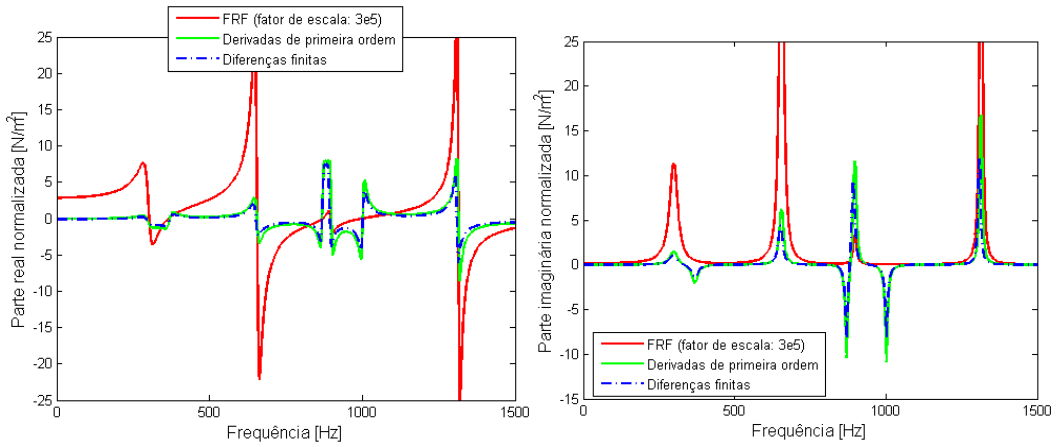


Figura 5.10 – Sensibilidades da FRF $H_{II}(\omega, p)$ com relação h_3 comparada com as estimativas por diferenças finitas obtidas para $\Delta h_3/h_3 = 10\%$.

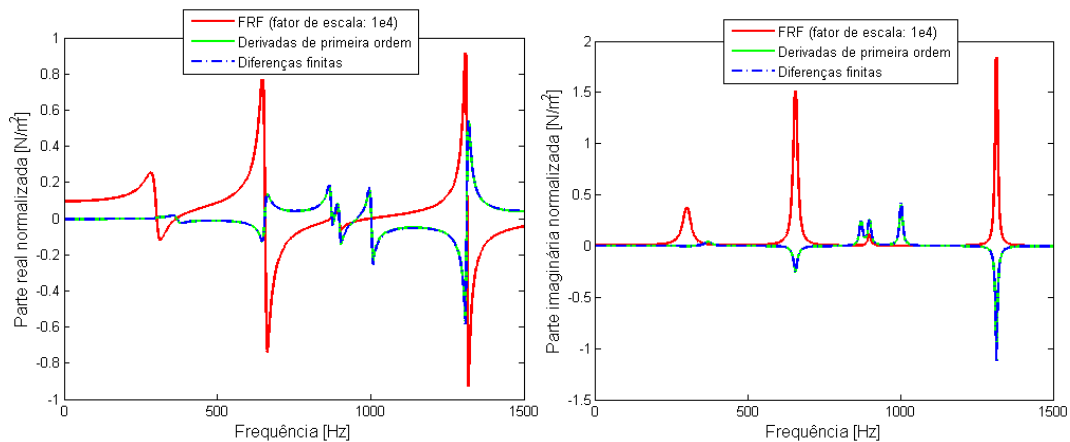


Figura 5.11 – Sensibilidades da FRF $H_{II}(\omega, p)$ com relação θ_3 comparada com as estimativas por diferenças finitas obtidas para $\Delta \theta_3/\theta_3 = 1\%$

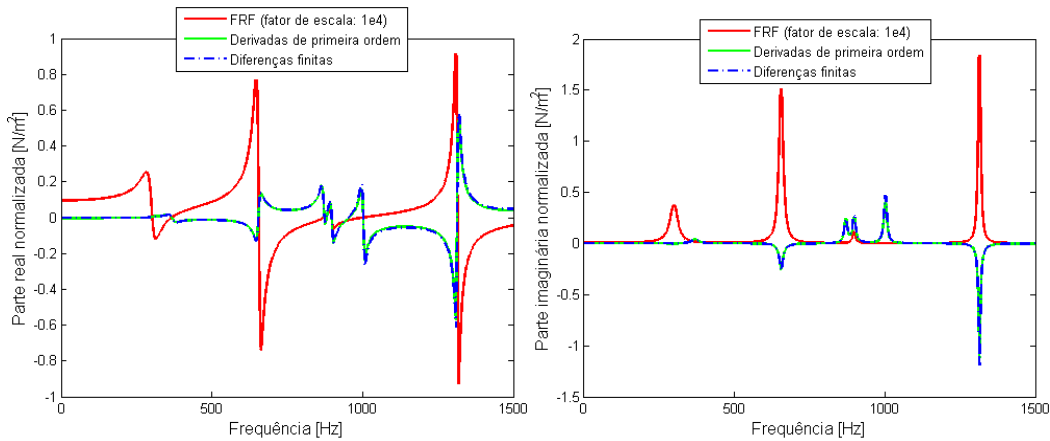


Figura 5.12 – Sensibilidades da FRF $H_{II}(\omega, \mathbf{p})$ com relação θ_3 comparada com as estimativas por diferenças finitas obtidas para $\Delta\theta_3/\theta_3 = 5\%$.

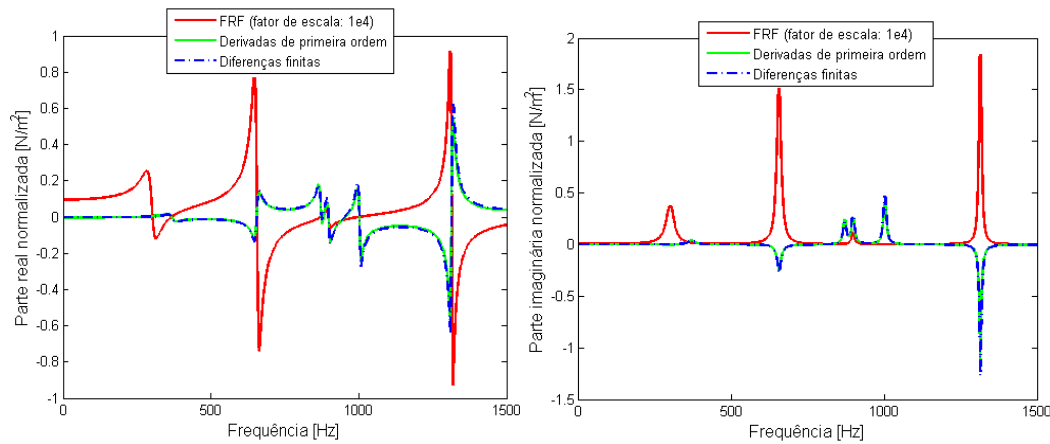


Figura 5.13 – Sensibilidades da FRF $H_{II}(\omega, \mathbf{p})$ com relação θ_3 comparada com as estimativas por diferenças finitas obtidas para $\Delta\theta_3/\theta_3 = 10\%$.

Para efeito de validação numérica da análise de sensibilidade para a placa composta contendo amortecimento inerente, as funções de sensibilidade obtidas nas Figuras 5.5 a 5.13 são comparadas com as funções de sensibilidade apresentadas por de Lima et al. (2010).

5.5. Análise de sensibilidade de uma estrutura composta sanduíche

Nesta seção é considerada a mesma placa composta sanduíche retangular ilustrada na Figura 5.3, Seção 5.2 cuja expressão do módulo complexo é dada pela Eq. (3.12), incluindo a discretização por elementos finitos, as características geométricas e as condições de contorno. Entretanto, a espessura do núcleo viscoelástico é $h_v = L_x/128$. Para o cálculo das derivadas da

FRF $H_{II}(\omega, T, \mathbf{p})$ com relação à temperatura do material viscoelástico, de acordo com a definição (4.28), as derivadas indicadas na Eq. (4.29) foram calculadas derivando as Eqs. (3.12) com relação ω , e T (de Lima et al., 2006).

As Figuras 5.14 a 5.16 representam as partes real e imaginária normalizadas das funções de sensibilidade da FRF $H_{II}(\omega, T, \mathbf{p})$ com relação à temperatura, avaliada para um valor nominal da temperatura de 25°C. As funções de sensibilidade são comparadas com as correspondentes calculadas por diferenças finitas, usando variações de 1%, 5% e 10%, respectivamente, sobre o valor nominal da temperatura. Nas mesmas figuras, as partes real e imaginária das FRFs, multiplicadas por um fator de escala conveniente, são apresentadas.

Os resultados apresentados nas Figuras 5.14 a 5.16 demonstram uma boa precisão das derivadas da resposta quando comparadas com as correspondentes calculadas via método das diferenças finitas. Além disso, é possível avaliar o grau de influência das variações aplicadas na temperatura dentro da banda de frequência de interesse, e a influência dessas variações no cálculo das funções de sensibilidade via aproximação por diferenças finitas. Em particular, para variações de 5% e 10% aplicadas no valor nominal da temperatura, pode-se notar uma concordância razoável, o que sugere o cálculo das funções de sensibilidade utilizando aproximações de segunda ordem.

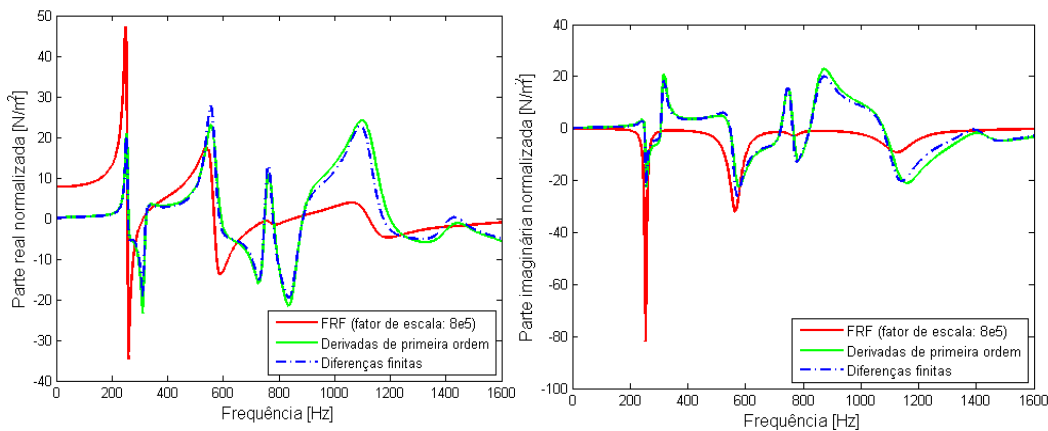


Figura 5.14 – Sensibilidades da FRF $H_{II}(\omega, T, \mathbf{p})$ com relação à temperatura de 25°C – para uma variação de $\Delta T/T = 1\%$.

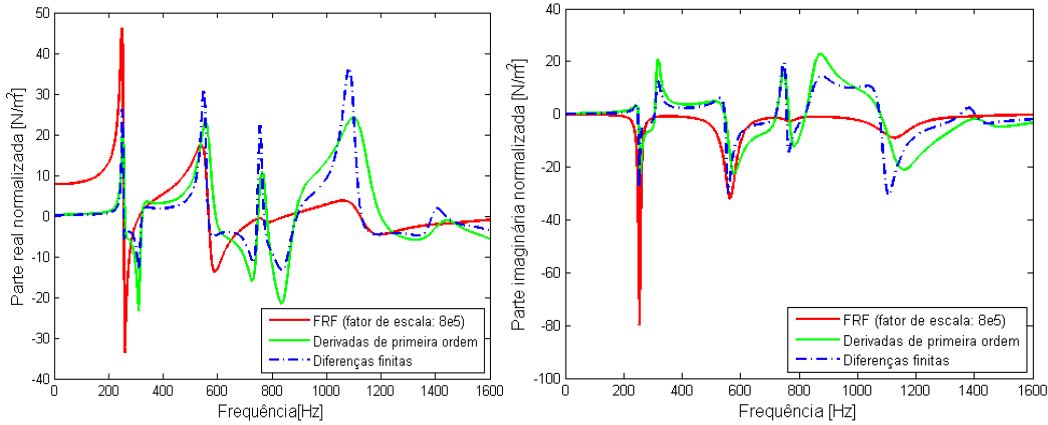


Figura 5.15 – Sensibilidades da FRF $H_{II}(\omega, T, \mathbf{p})$ com relação à temperatura de 25°C – para uma variação de $\Delta T/T = 5\%$.

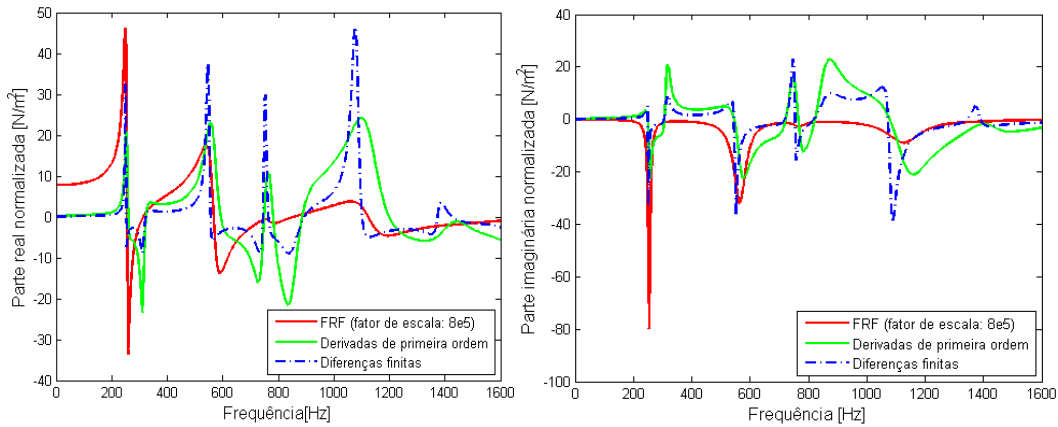


Figura 5.16 – Sensibilidades da FRF $H_{II}(\omega, T, \mathbf{p})$ com relação à temperatura de 25°C – para uma variação de $\Delta T/T = 10\%$.

5.6. Cálculo das FRFs do sistema perturbado utilizando os valores de sensibilidade

Como uma demonstração complementar da utilidade das derivadas de primeira ordem na análise de sistemas dinâmicos modificados, as FRFs $H_{II}(\omega, T, \mathbf{p})$ da estrutura composta foram calculadas de duas formas diferentes, a saber: na primeira, dado um conjunto de valores nominais das variáveis de projeto (espessuras das camadas, orientações das fibras e temperatura do material viscoelástico), variações foram aplicadas voluntariamente a esses valores (8% para a espessura h_1 e orientação θ_3 , e 3% e 8% para a temperatura). As FRFs exatas do sistema perturbado foram calculadas usando o modelo de EFs modificado. Na segunda forma, as FRFs do sistema perturbado foram estimadas a partir das FRFs do sistema nominal utilizando os valores de sensibilidade

calculados pelas derivadas de primeira ordem com relação às variáveis de projeto, da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_{II}(\omega, T, \mathbf{p}^0 + \Delta\mathbf{p}) \cong \mathbf{H}_{II}(\omega, T, \mathbf{p}^0) + \left. \frac{\partial \mathbf{H}_{II}(\omega, T, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{(\mathbf{p}=\mathbf{p}^0)} \quad (5.3.a)$$

$$\mathbf{H}_{II}(\omega, T^0 + \Delta T, \mathbf{p}) \cong \mathbf{H}_{II}(\omega, T^0, \mathbf{p}) + \left. \frac{\partial \mathbf{H}_{II}(\omega, T, \mathbf{p})}{\partial T} \right|_{(T=T^0)} \quad (5.3.b)$$

Como pode ser visto pelas Figuras 5.17 e 5.18, as FRFs exatas da estrutura modificada são comparáveis com as aproximações de primeira ordem. Entretanto, a precisão é menos satisfatória para as variações dadas nas temperaturas, podendo-se concluir que as aproximações baseadas em derivadas de primeira ordem não são precisas o bastante para representar as mudanças no comportamento dinâmico do sistema amortecido viscoelasticamente associadas a grandes variações na temperatura do material viscoelástico. Neste caso, os resultados podem ser melhorados através do uso de expansões em série de Taylor de segunda ordem, o qual requer o cálculo das derivadas de primeira e segunda ordem.

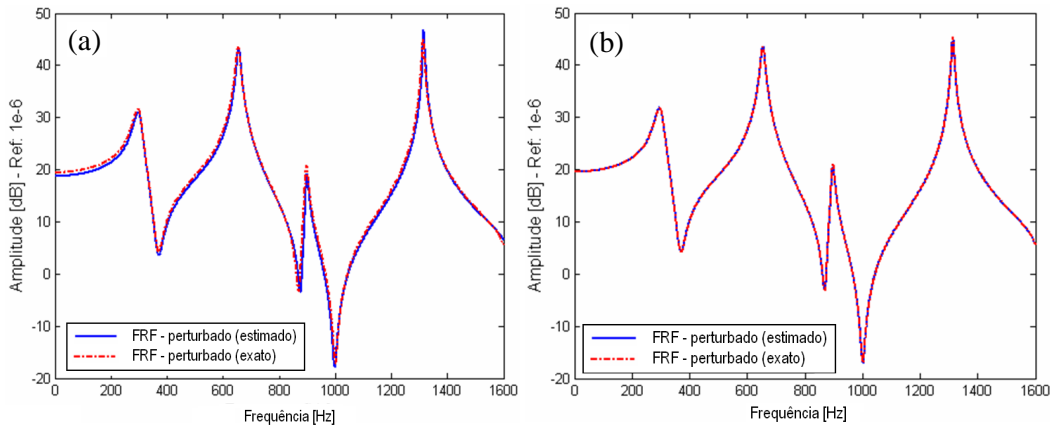


Figura 5.17 – FRFs $\mathbf{H}_{II}(\omega, \mathbf{p})$ exata e aproximada do sistema perturbado de acordo com variações em h_1 (a) e θ_3 (b).

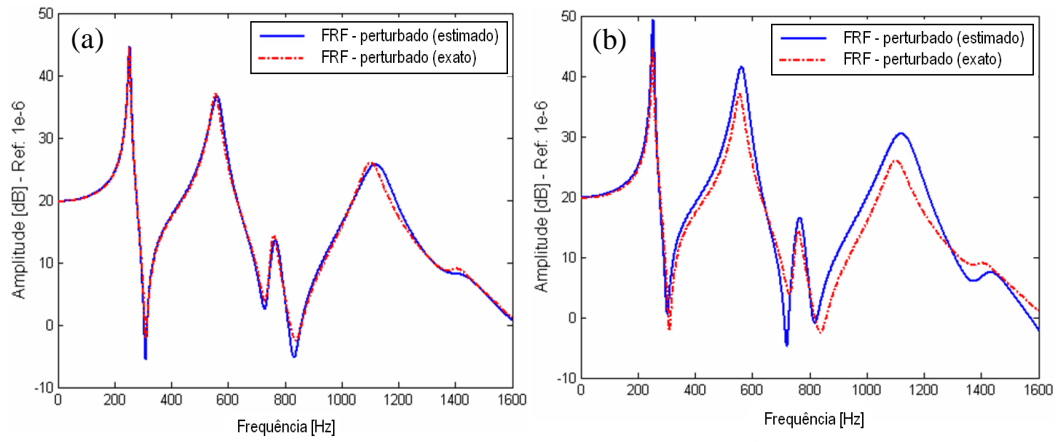


Figura 5.18 – FRFs $H_{II}(\omega, T, p)$ exata e aproximada do sistema perturbado de acordo com variações de 3% (a) e 8% (b) aplicadas no valor da temperatura

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES GERAIS E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE

Foi realizado um estudo das técnicas de modelagem numérico-computacional de estruturas compostas laminadas incorporando tratamentos viscoelásticos superficiais, para fins de atenuação de vibrações. Em particular, foi utilizada a Teoria da Deformação de Ordem Superior a qual foi implementada em elemento Serendipity de placa retangular contendo oito nós e onze graus de liberdade por nó. Para representar o comportamento dinâmico do material viscoelástico em função da frequência de excitação e temperatura, foi utilizado o modelo do módulo complexo, o qual foi combinado com modelos de elementos finitos de sistemas estruturais laminados do tipo placas planas laminadas.

Um aspecto particularmente importante focado é o da parametrização durante o procedimento de modelagem com o objetivo de facilitar a introdução das modificações paramétricas e o cálculo das sensibilidades. Além disto, foi discutido um método de redução de modelos aplicados a sistemas tratados viscoelasticamente, a partir do qual foi construída uma base de redução independente da frequência de excitação e da temperatura para representar as respostas dinâmicas dos modelos nominais, com o objetivo de diminuir os custos computacionais envolvidos na geração das funções de respostas em frequência.

As inúmeras simulações numéricas realizadas permitiram avaliar o desempenho dos procedimentos de modelagem desenvolvidos como uma ferramenta de análise e projeto de estruturas compostas laminadas contendo amortecimento passivo do tipo viscoelástico e evidenciar importantes aspectos do comportamento dinâmico dos mesmos em termos da atenuação dos níveis de vibração e ruído. Neste sentido, pode-se enunciar as seguintes conclusões específicas:

1^a) Os procedimentos de modelagem desenvolvidos mostraram-se eficientes para caracterizar o comportamento dinâmico dos sistemas compostos laminados analisados, notadamente para representar a dependência das características dinâmicas dos materiais viscoelásticos em relação à frequência.

2ª) A aproximação do módulo complexo combinado com os conceitos de fator de deslocamento e frequência reduzida mostrou-se eficiente para a caracterização do comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos incorporados em modelos de elementos finitos de estruturas compostas laminadas.

3ª) O uso de tratamentos viscoelásticos superficiais em estruturas compostas laminadas é uma eficiente estratégia de controle passivo de vibrações. Contudo, o grau de eficiência depende do tipo de material viscoelástico utilizado, no que diz respeito à dependência de suas propriedades em relação à temperatura e à frequência, e da banda de frequência de interesse e temperatura de trabalho.

4ª) A parametrização do modelo de elementos finitos viscoelásticos laminados demonstrou-se ser uma técnica bastante útil, uma vez que todos os parâmetros de projeto aparecem fora das matrizes elementares de cada camada e para cada efeito (membrana, flexão e cisalhamento), permitindo, em seguida, a introdução rápida e simples das incertezas nos parâmetros geométricos/físicos mais influentes, e o cálculo da sensibilidade paramétrica. Além disso, uma vez tendo o modelo parametrizado, a metodologia de condensação proposta é aplicada.

Sugestões para trabalhos futuros

A realização do trabalho de pesquisa aqui reportado permitiu identificar alguns importantes tópicos a serem investigados no futuro:

- extensão dos procedimentos de modelagem de outros tipos de elementos estruturais laminados como cascas e sólidos tridimensionais, permitindo a modelagem de estruturas mais complexas, tais como estruturas automotivas e aeroespaciais.
- implementação de procedimentos numéricos eficientes, especialmente adaptados à resolução das equações de movimento de sistemas com amortecimento viscoelástico, para realização de análise modal e análise de respostas em frequência no contexto de procedimentos iterativos de otimização e/ou ajuste de modelos.

- desenvolvimento de procedimentos de ajuste de modelos de elementos finitos a partir de respostas experimentais, especialmente adaptadas a estruturas compostas laminadas dotadas de amortecimento viscoelástico.
- desenvolvimento de metodologia de projeto ótimo-robusto, visando obter configurações otimizadas de posicionamento e geometria dos dispositivos viscoelásticos com vistas à máxima atenuação de vibrações, satisfazendo, ao mesmo tempo, restrições de projeto.
- extensão da modelagem determinística desenvolvido ao caso estocástico através da implementação dos elementos finitos estocásticos viscoelásticos. Em particular, o acoplamento deste com o método de condensação e os métodos de perturbação modal. Sua extensão às estruturas compostas laminadas incorporando material viscoelástico no qual os modelos de elementos finitos são compostos por um número elevado de graus de liberdade é igualmente uma via de pesquisa em curso de investigação. Este trabalho faz atualmente objeto de colaboração entre UNIFEI-UFU-UFC.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balmès, E., Babillot, A., 2002a, **Analysis and Design Tools for Structures Damped by Viscoelastic Materials**. International Modal Analysis Conference (IMAC).

Balmès, E., Germès, S., 2002b, **Tools for Viscoelastic Damping Treatment Design: Application to an Automotive Floor Panel**, Proceedings of the 28th International Seminar on Modal Analysis (ISMA), Leuven, Belgium.

Bagley, R. L., 1983, **A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity**, Journal of Rheology, Vol. 27, No. 3, pp. 201-210.

Berthelot, J. M. **Matériaux Composites: Comportement Mécanique et Analyse des Structures**. Paris: Masson, 1992.

Bert, C. W., 1973, **Material Damping: An Introductory Review of Mathematical Models, Measures and Experimental Techniques**, Journal of Sound and Vibration, Vol. 29, No. 2, pp. 129-153.

Callister, Jr., W.D. **Ciência e Engenharia de Materiais: Uma introdução**. Editora LTC, 5 Ed., Rio de Janeiro, RJ, 2002. ISBN: 85216-1288-5.

Chee, C.; Tong, L.; Steven, G. P. **Static Shape Control of Composite Plates Using a Curvature-displacement Based Algorithm**. International Journal of Solid and Structures, v. 38, p. 6381-6403, 2001.

Correia, V. M. F, Gomes; M. A. A., Suleman, A.; Soares, C. M. M.; Soares, C. A. M. **Modelling and Design of Adaptive Composite Structures**. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. v. 185, p. 325-346, 2000.

Christensen RM. **Theory of Viscoelasticity: an introduction**. 2nd ed. New York: Academic Press, Inc.; 1982.

Crandall, S. H.; **The Role of Damping in Vibration Theory**, Journal of Sound and Vibration, Vol. 11(1), pp. 3-18, 1970.

Daya, E. M. and Poitier-Ferry, M., 2001, **A Numerical Method for Nonlinear Eigenvalue Problems. Applications to vibrations of viscoelastic structures.** Computers & Structures, Vol. 79, pp. 533-541.

Daya, E. M., Azrar, L., Poitier-Ferry, M., 2002, **Modélisation des Vibrations Non Linéaires des Structures Sandwich Viscoélastiques**, 7ème Journée d'Analyse Numérique/Optimisation, Maroc.

de Lima, A. M. G. **Procedimentos de Modelagem Numérica e Avaliação Experimental de Elementos Viscoelásticos Aplicados ao Controle Passivo de Vibrações Mecânicas.** 2003. Dissertação (Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia.

de Lima, A.M.G., Stoppa, M.H., Rade, D.A., 2003b, **Finite Element Modeling of Structures Incorporating Viscoelastic Materials**, Proceedings of IMACXXI - Conference and Exposition on Structural Dynamics, Orlando, EUA.

de Lima, A.M.G., Ait Brik, B., Bouhaddi, N., Rade, D.A., 2006c, **Multi-objective Optimization of Viscoelastically Damped Systems Combining Robust Condensation and Metamodels.** Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Structures Technology, Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

de Lima, A.M.G. **Modélisation et Optimisation Robuste de l'amortissement Viscoélastique de Systèmes Mécaniques.** 2007. Tese de Doutorado – Université de Franche-Comté.

de Lima, A.M.G.; Diacenco, A. A.; Côrrea, E. O. . **Finite Element Modeling of Composite Sandwich Plates with Viscoelastic Layers.** In: 20th International Congress of Mechanical Engineering (COBEM), 2009, Gramado, RS.

de Lima, A.M.G. ; Faria, A. W. ; Rade, D. A. . **Sensitivity Analysis of Frequency Response Functions of Composite Sandwich Plates Containing Viscoelastic Layers.** Composite Structures, v. 92, p. 364-376, 2010.

Drake ML, Soovere J. **A Design Guide for Damping of Aerospace Structures. In: Vibration Damping Workshop Proceedings**, AFWAL-TR-84-3064, Air Force Wright Aeronautical Laboratories, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, VV- 1-VV-10; 1984.

Faria, A.W. **Modelagem por Elementos Finitos de Placas Compostas dotadas de Sensores e Atuadores Piezoelétricos: implementação computacional e avaliação numérica**. 2006. 152f. Dissertação (Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia.

Faria, A. W. ; Lima, A.M.G. ; Rade, R. S. L. ; Rade, D. A. . **Avaliação Numérica por Elementos Finitos do Amortecimento em Materiais Compostos Laminados**. In: V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2008, Salvador. Anais do V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica.

Garcia, O. A. **Elementos Finitos Generalizados na Análise Estática de Placas e Cascas**. 2003. 176f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.

Gay, D.; Hoa, S.V.; Tsai, S.W. **Composites Materials: design and applications**, 4 ed., CRC Press, Paris, FR, ISBN: 1-58716-084-6, 2002.

Golla, D. F. and Hughes, P. C., 1985, **Dynamics of Viscoelastic Structures - A time domain finite element formulation**, Journal of Applied Mechanics, Vol. 52., No. 4, pp. 897-906.

Huebner KH, Thornton EA. **The Finite Element Method for Engineers**. New York: John Wiley & Sons; 1982.

Khare, R. K., Kant, T., Garg, A. K. **Closed-Form Thermo-Mechanical Solutions of Higher-Order Theories of Cross-Ply Laminated Shallow Shells**. Journal of Composite Structures. v. 59, n. 313-340, 2003.

Kergourlay, G., Balmès, E., Clouteau, D., 2000, **Interface Model Reduction for Efficient FEM/BEM Coupling**, International Seminar on Modal Analysis, Leuven.

Lesieutre, G. A. and Bianchini, E., 1995, **Time Domain Modeling of Linear Viscoelasticity Using Anelastic Displacement Fields**, Journal of Vibration and Acoustic, Vol. 117, No. 4, pp. 424-430.

Lo, K. H; Christensen, R. M.; WU, E. M. **A High Order Theory of Plate Deformation - Part 1: Homogeneous Plates**. Journal of Applied Mechanics. v. 44, p. 663-668, 1977.

Masson, G., Bouhaddi, N., Cogan, S., Laurant, M., 2003, **Component Mode Synthesis Method Adapted to Optimization of Structural Dynamics Behaviour**, Proceedings of the International Modal Analysis Conference, XXI IMAC, Hyatt Orlando, Florida, CD-ROM.

Mendonça, P. T. R. **Materiais Compostos & Estruturas - Sanduíche: Projeto e Análise** 1.ed. Manole, 2005.

Mendonça, R. M. L. ; Piratelli Filho, Antônio ; Levy Neto, Flaminio . **Compósitos Particulados para Aplicações em Engenharia de Precisão: obtenção e propriedades mecânicas**. In: 2 Congresso Brasileiro de Engenharia de Fabricação, 2003, Uberlândia-MG. Anais do 2º Congresso Brasileiro de Engenharia de Fabricação, 2003.

Nashif AD, Jones DIG, Henderson JP. **Vibration Damping**. New York: John Wiley & Sons; 1985.

Pereira, J. C., 1999, “**Curso de Projeto Estrutural com Materiais Compósitos**”.

Persoz, B., 1987, “**Introduction a L’Étude de La Rhéologie**”, Dunod.

Pinheiro, M. A. S. ; Beckhauser, G. N. ; Menezes, M. R. . **Aplicativo Voltado para a Macromecânica Básica das Estruturas Laminadas de Material Compósito**. Boletim SBMAC (Rio de Janeiro), Rio de Janeiro, v. VII, p. 209-222, 2006.

Plouin, A. S. and Balmès, E., 1998, **Pseudo-modal representation of large models with viscoelastic behavior**. International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 1440-1446.

Plouin, A. S. and Balmès, E., 1999, **A test validated model of plates with constrained viscoelastic methods and experimental validations**. International Modal Analysis Conference, pp. 384-390.

Reddy, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis**. 2.ed. Florida: CRC Press, 1997.

Rezende, M.C., Botelho, E.C. **O uso de compósitos estruturais na indústria aeroespacial**, Polímeros. Ciência e Tecnologia, vol. 10, n.º 2000.

Sadek, E. A. **Some Serendipity Finite Elements for the Analysis of Laminated Plates**. Journal of Computers and Structures. v. 69, p. 37-51, 1998.

Sias, D.F. **Programa Computacional para Análise Dinâmica de Estruturas Laminadas incluindo Amortecimento**. 2004. Dissertação (Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Sousa, S. R. M. de ; Pina Filho, A. C. de ; Dutra, M. S. **Estudo de Falhas em Risers Fabricados em Material Compósito**. In: IV Congresso Brasileiro de P & D em Petróleo e Gás, 2007, Campinas - SP. PDPETRO, 2007.

Soriano, H. L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. Editora USP, 1 Ed., São Paulo, SP, 2003. v. 1500. 604 p.

Tapia, L. G. S. **Análise de Placas Laminadas de Materiais Compostos pelo Método dos Elementos Finitos**. 1998. Dissertação (Engenharia Cível) – Universidade Estadual de Campinas.

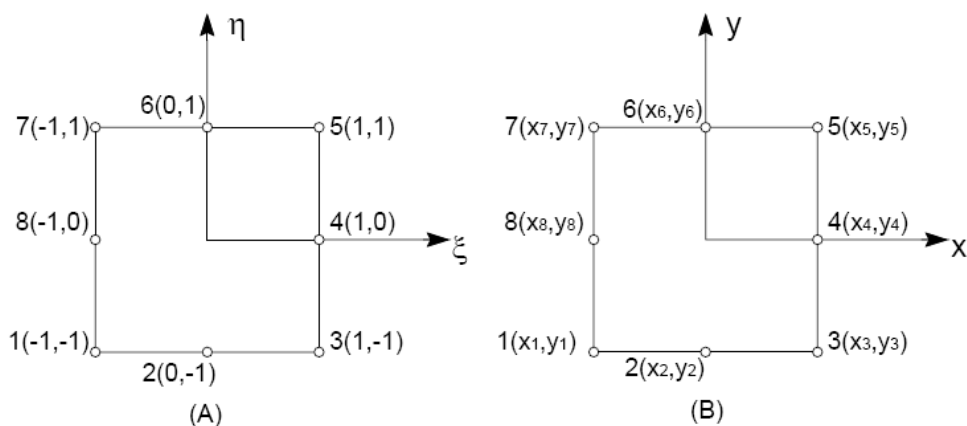
Tita, V. **Análise Dinâmica Teórica e Experimental de Vigas Fabricadas a Partir de Materiais Compósitos Poliméricos Reforçados**. 1999. 134f. Dissertação de Mestrado - Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.

Wang, G., 2001, **Analyses of Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Cores**, Ph. D. Thesis, Faculty of the Graduate School of The University of Maryland, College Park.

ANEXO A

Elemento Serendipity

As variáveis mecânicas apresentadas no Capítulo 4 na Eq. (4.1) são convertidas para sua formulação em elementos finitos usando funções de forma apropriadas. O elemento Serendipity é um elemento retangular de placa que apresenta três nós por aresta, perfazendo um total de oito nós, conforme ilustra a Fig. A1 (Reddy, 1997). Existem relações entre as coordenadas globais e locais das pelas Eqs. (A1) e (A2).



$$\xi = \frac{2x - x_8 - x_4}{x_8 - x_4}$$

$$x = \frac{1}{2}[\xi(x_8 - x_4) + x_4 + x_8] \quad (A1)$$

$$\eta = \frac{2y - y_6 - y_2}{y_6 - y_2}$$

$$y = \frac{1}{2}[\eta(y_6 - y_2) + y_6 + y_2] \quad (A2)$$

As funções de forma, que relaciona os deslocamentos em um ponto qualquer com os deslocamentos nos pontos nodais, da família Serendipity são apresentadas na Eq. (A3).

$$\begin{aligned}
N_1(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \\
N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\xi)(1-\eta) \\
N_3(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\xi)(1-\xi+\eta) \\
N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta) \\
N_5(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi+\eta) \\
N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\xi)(1+\eta) \\
N_7(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) \\
N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

A matriz quadrada da Eq. (A.3) é a matriz jacobiana que relaciona a derivada das funções de forma Eq (A.2) com relação às coordenadas globais com a derivada das funções de forma com relação às coordenadas locais é expressa por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (x_8 - x_4) & 0 \\ 0 & (y_6 - y_2) \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

O Jacobiano é definido como o determinante da matriz Jacobiana e é expresso por:

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{(y_6 - y_2)(x_8 - x_4)}{4} \tag{A.5}$$

ANEXO B

Operadores diferenciais

As matrizes D_i ($i = 0, \dots, 6$) que aparecem no Capítulo 4 nas relações (4.3.a) e (4.3.b) são formadas por operadores diferenciais e são separadas em matrizes associadas às deformações de flexão-membrana D_i ($i = 0, \dots, 3$) e de cisalhamento D_i ($i = 4, \dots, 6$) da seguinte forma:

$$D_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B1})$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B2})$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B3})$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{B4})$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B5})$$

$$D_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B6})$$

$$D_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B7})$$