

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Fatores de Intensidade de Tensão Elásticos em
Modos II e III para Entalhes em V e Hiperbólicos**

Autor: **Valesca Donizeti de Oliveira**

Orientador: **Prof. Dr. José Celio Dias**

Itajubá, Fevereiro de 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Fatores de Intensidade de Tensão Elásticos em Modos II e III para Entalhes em V e Hiperbólicos

Autor: Valesca Donizeti de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. José Celio Dias

Curso: Mestrado em Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Projeto e Fabricação

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Itajubá, Fevereiro de 2010

M.G. – Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Fatores de Intensidade de Tensão Elásticos em Modos II e III para Entalhes em V e Hiperbólicos

Autor: Valesca Donizeti de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. José Celio Dias

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Antonio Reis P. Baptista - EEL/USP

Prof. Dr. Marcos Theiss Neves - IEM/UNIFEI

Prof. Dr. José Celio Dias - IEM/UNIFEI

Dedicatória

*À Deus, minha família
e aos meus amigos.*

Agradecimentos

Os meus primeiros agradecimentos vão para ao meu orientador o Professor Doutor José Celio Dias, pela competência, por toda disponibilidade e ajuda ao longo do desenvolvimento desta dissertação.

Gostaria de agradecer à minha família por todo o apoio, motivação e inspiração, que foram importantes para a realização deste trabalho.

A todos os que diretamente e indiretamente estiveram envolvidos nesta pesquisa, em especial Janaína da Cunha Vaz, Lucilene Pereira Maduro e Maria Fernanda Xavier Pinto Medeiros.

Agradeço à Unifei, pela disponibilidade das melhores condições para a realização deste trabalho, nomeadamente, o acesso aos laboratórios e pelo intercâmbio com a Biblioteca da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Por fim agradeço também ao Instituto de Engenharia Mecânica da Unifei pelas facilidades concedidas para a realização desta dissertação, através dos professores, funcionários e aos amigos desse instituto, pelo convívio profissional.

“Qualquer coisa que esteja fazendo, por menor que seja, é um passo à frente em seu progresso.”

Resumo

OLIVEIRA, D. V. (2009), *Fatores de Intensidade de Tensão Elásticos em Modos II e III para Entalhes em V e Hiperbólicos*, Itajubá, 145p. Dissertação (Mestrado em Projeto e Fabricação) - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Apresenta-se um estudo da teoria dos entalhes em geometrias U, V e hiperbólica, abordando os conceitos e fundamentos sobre a teoria da elasticidade aplicada à mecânica linear da fratura. Assim, dois modos geométricos são avaliados pelos fatores intensidade de tensão elásticos-entalhes, ou seja, a magnitude das tensões ao redor do entalhe em regime elástico. O primeiro modo geométrico caracterizado pelo cisalhamento plano, modo II, é avaliado experimentalmente em vigas com duplo entalhe em V. Lâminas de compósitos reforçados com tecido de fibras de vidro/epóxi são utilizadas com objetivo de descrever as tensões ao longo do plano bisetor do entalhe em V com ângulo de abertura de 90°. Entalhes hiperbólicos são também avaliados em modos II e III. O cisalhamento antiplano caracteriza modo III e está associado aos efeitos da torção. Eixos com entalhes em V e hiperbólicos são avaliados com coordenadas curvilíneas. O fator intensidade de tensão em entalhes em V em eixos é estimado a partir do fator de concentração de tensão, enquanto entalhe hiperbólico é uma alternativa para caracterizar o fator intensidade de tensão em trincas em modo III. Busca-se avaliar a influência do ângulo de abertura em entalhes em V e a geometria hiperbólica em modos II e III.

Palavras-chave

Entalhe, Fator Intensidade de Tensão, Modo Geométrico de Falha.

Abstract

OLIVEIRA, D. V. (2009), *Elastic Stress Intensity in V and Hyperbolic Notch under Mode II and III*, Itajubá, 145p. MSc. Dissertation - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 145p.

It is introducing a study of theory of hyperbolic, V and U notches approaching the concepts and features of elasticity theory on the linear fracture mechanics. Furthermore, two modes loading are available by elastic notch stress intensity factor, ie, the magnitude of the stress around the notch in elastic field. The first mode of failure characterized by plane shear, mode II, is evaluated by the V-notched beam test. Composites reinforced epoxy-reinforced glass fiber textiles are used in order to describe the stress along the plane bisector of V-notch opening angle of 90 degrees. Also, hyperbolic notches are available in modes II and III fracture. The shear mode characterized by antiplano, mode III fracture, is associated with the effects of torsion. Shafts in V-notched and hyperbolic notches are evaluated with curvilinear coordinates. The stress intensity factor for sharp V-shaped notches in shafts under antiplane shear is estimated from the stress factor of concentration, while hyperbolic notch is an alternative to characterize the stress intensity factor of cracks in mode III fracture. Furthermore, to evaluate the effects of the notch-opening angle of V-notched and hyperbolic geometry in modes II and III fracture.

Keywords

Notch, Stress Intensity Factor, Mode loading.

SUMÁRIO

SUMÁRIO	I
LISTA DE FIGURAS	IV
LISTA DE TABELAS	VII
SIMBOLOGIA	VIII
LETRAS LATINAS	VIII
LETRAS GREGAS	XI
SOBRESCRITOS	XIII
SUBSCRITOS	XIII
SIGLAS	XIV
CAPÍTULO 1	1
INTRODUÇÃO	1
1.1 Estado da Arte	1
1.2 Motivação do Trabalho	4
1.3 Objetivo da Pesquisa	5
1.4 Conteúdo	6
CAPÍTULO 2	7
TEORIA DA ELASTICIDADE	7
2.1 Tensão	8
2.1.1 Tensão Plana e Deformação Plana	10
2.1.2 Tensão Principais	11
2.1.3 Equações Diferenciais de Equilíbrio	13
2.1.4 Equações de Compatibilidade	14
2.2 Função Tensão	16
2.2.1 Função Tensão Airy	16

	II
2.2.2 Função Tensão Complexa-----	17
2.3 Modos Geométricos -----	20
2.3.1 Técnicas Principais -----	21
2.4 Fator Intensidade de Tensão-----	27
CAPÍTULO 3 _____	30
ENTALHES _____	30
3.1 Configuração Básica-----	30
3.2 Comportamento dos Entalhes -----	35
3.3 Entalhes para o Modo I e II-----	37
CAPÍTULO 4 _____	41
PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO PARA OS MODOS I E II _____	41
4.1 Configuração Básica-----	41
4.2 Modo I-----	46
4.3 Modo II-----	48
4.4 Comportamento dos Parâmetros -----	50
4.5 Fator Intensidade de Tensão-----	59
4.6 Teste de Iosipescu-----	63
4.6.1 Distribuição de Tensão-----	70
4.7 Entalhe Hiperbólico em Chapas-----	79
4.7.1 Sistema de Coordenadas Elípticas -----	80
4.7.2 Distribuição de Tensão -----	82
CAPÍTULO 5 _____	92
DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO PARA O MODO III _____	92
5.1 Configuração Básica -----	92
5.2 Sistema de Coordenada Hiperbólica -----	95
5.2.1 Potencial Complexo para Transformações Hiperbólicas -----	96
5.3 Transformação Hiperbólica-Parabólica -----	100
5.3.1 Sistema de Tensões de Cisalhamento em Coordenadas Polares -----	102
5.3.2 Coeficiente Assintótico -----	103
5.3.3 Fator Intensidade de Tensão -----	107
CAPÍTULO 6 _____	119
CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS _____	119
6.1 Conclusões-----	119

6.2 Contribuições -----	121
6.3 Perspectivas Futuras -----	122
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS _____	124
APÊNDICE A _____	130
FUNÇÕES _____	130
A.1 Funções Harmônica -----	130
A.2 Função Holomorfa -----	132
APÊNDICE B _____	133
FUNÇÃO TENSÃO DE WILLIAMS _____	133
APÊNDICE C _____	136
FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO EM EIXOS _____	136
C.1 Função Tensão -----	136
C.2 Coordenadas Elipsoidais -----	138
C.3 Momento Torsional -----	139

Lista de Figuras

Figura 1 – Tensões generalizadas atuando em um corpo deformável. -----	8
Figura 2 – a) Tensões em 3D e b) Tensões em 2D. -----	13
Figura 3 – Modos geométricos: a) Modo I, b) Modo II e c) Modo III. -----	20
Figura 4 – Corpo de prova DCB. -----	22
Figura 5 – Corpo de prova Arcan. -----	23
Figura 6 – a) Corpo de prova ENF; b) Corpo de prova 4ENF. -----	24
Figura 7 – Corpo de prova MMB. -----	25
Figura 8 – Corpo de prova SCB. -----	25
Figura 9 – Corpo de prova disco brasileiro. -----	26
Figura 10 – a) Corpo de prova FDT; b) Corpo de prova SECBD. -----	26
Figura 11 – Corpo de prova ECT. -----	27
Figura 12 – Principais técnicas para o fator intensidade de tensão. -----	29
Figura 13 – a) Projeção dos elementos $h_y dv$ e $h_u du$; b) Representação de coordenadas. -----	31
Figura 14 – Entalhe curvilíneo genérico de Neuber. -----	33
Figura 15 – O comportamento dos entalhes. -----	36
Figura 16 – Sistema polar de referência. -----	38
Figura 17 – Transformação bidimensional das tensões σ_{uv} e τ_{uv} . -----	42
Figura 18 – Coeficiente assintótico para o modo I. -----	52
Figura 19 – Parâmetro χ_b para o modo I. -----	52
Figura 20 – Expoente μ para o modo I. -----	53
Figura 21 – Parâmetro χ_c para o modo I. -----	53
Figura 22 – Parâmetro χ_d para o modo I. -----	54
Figura 23 – Coeficiente assintótico para o modo II. -----	55
Figura 24 – Parâmetro χ_b para o modo II. -----	55

Figura 25 – Expoente μ para o modo II. -----	56
Figura 26 – Parâmetro χ_d para o modo II. -----	56
Figura 27 – Parâmetro χ_c para o modo II. -----	57
Figura 28 – Todos os parâmetros para o modo I. -----	58
Figura 29 – Todos os parâmetros para o modo II. -----	58
Figura 30 – As tensões principais em $2\alpha = 90^\circ$ em modo I. -----	60
Figura 31 – A relação entre as tensões σ_{rr} e σ_{\max} para $2\alpha = 90^\circ$ e $\rho = 0,65[mm]$ em modo I. ---	61
Figura 32 – A relação entre as tensões $\sigma_{\theta\theta}$ e σ_{\max} para $2\alpha = 90^\circ$ e $\rho = 0,65[mm]$ em modo I. ---	61
Figura 33 – A relação entre as tensões $\tau_{r\theta}$ e σ_{\max} para $2\alpha = 90^\circ$ e $\rho = 0,65[mm]$ em modo I ----	62
Figura 34 – Tensões principais para trincas em modo I com $r = 3\rho$. -----	62
Figura 35 – Disposição e nomenclatura utilizada no conjunto de amostras. -----	64
Figura 36 – Geometria das amostras. -----	64
Figura 37 – Força em função do deslocamento para a amostra de referência radial. -----	65
Figura 38 – Deformação para amostra de referência radial. -----	66
Figura 39 – Força em função do deslocamento para a amostra de referência tangencial. ----	66
Figura 40 – Deformação para a amostra de referência tangencial. -----	67
Figura 41 – Faces laterais da amostra de referência radial. -----	69
Figura 42 – Faces de apoio da amostra de referência radial. -----	69
Figura 43 – Faces laterais da amostra de referência tangencial. -----	69
Figura 44 – Faces de apoio da amostra de referência tangencial. -----	70
Figura 45 – Razão entre os fatores intensidade de tensão para o modo II para $2\alpha=90^\circ$. -----	72
Figura 46 – Tensão $\sigma_{\theta\theta}$ na vizinhança do entalhe da amostra de referência tangencial. -----	73
Figura 47 – Tensão σ_{rr} na vizinhança do entalhe da amostra de referência tangencial. -----	73
Figura 48 – Tensão $\tau_{r\theta}$ na vizinhança do entalhe da amostra de referência tangencial. -----	74
Figura 49 – Tensão $\sigma_{\theta\theta}$ na vizinhança do entalhe da amostra de referência radial. -----	74
Figura 50 – Tensão σ_{rr} na vizinhança do entalhe da amostra de referência radial. -----	75
Figura 51 – Tensão $\tau_{r\theta}$ na vizinhança do entalhe da amostra de referência radial. -----	75
Figura 52 – Tensões principais para amostra de referência tangencial. -----	76
Figura 53 – Tensões principais para amostra de referência radial. -----	76
Figura 54 – Razão entre os fatores intensidade de tensão para o modo II. -----	77
Figura 55 – Tensão de cisalhamento em função do ângulo de orientação. -----	78
Figura 56 – Entalhe externo hiperbólico em placas. -----	82

Figura 57 – Tensão de cisalhamento na vizinhança do entalhe hiperbólico para $\frac{d}{\rho} = 9,46$.	90
Figura 58 – Tensão normal na vizinhança do entalhe hiperbólico para $\frac{d}{\rho} = 9,46$.	90
Figura 59 – Tensões máximas na vizinhança do entalhe hiperbólico em placas.	91
Figura 60 – Sólido assimétrico com entalhe curvilíneo genérico.	93
Figura 61 – Sistema de referência para tensões em coordenadas curvilínea.	94
Figura 62 – Fator de concentração em cisalhamento uniforme em antiplano.	100
Figura 63 – Sistema de coordenadas cartesianas em sistema de coordenadas polares.	102
Figura 64 – Funções para os coeficientes assintóticos do modo III.	104
Figura 65 – Coeficientes assintótico para o modo III.	105
Figura 66 – Fator intensidade de tensão para eixos de alumínio e aço.	112
Figura 67 – Comparação entre fatores de concentração de tensão em eixos.	113
Figura 68 – Influência do entalhe na capacidade de carga do eixo $d/a_p = 15$.	116
Figura 69 – Influência do entalhe na capacidade de carga do eixo $d/a_p = 10$.	117
Figura 70 – Autovalores para o modo I.	135
Figura 71 – Autovalores para o modo II.	135
Figura 72 – Elemento infinitesimal em eixo com entalhe externo hiperbólico.	140
Figura 73 – Eixo com entalhe externo hiperbólico submetido à torção.	141
Figura 74 – Tensão na vizinhança do entalhe hiperbólico em eixos para $\frac{d}{\rho} = 9,46$.	144
Figura 75 – Fator de concentração de tensão em eixos com entalhe hiperbólico.	145

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Parâmetros para distribuição de tensão para o modo I.-----	50
Tabela 2 - Parâmetros para distribuição de tensão para o modo II.-----	51
Tabela 3 - Valores experimentais para forças, deformações e tensões de cisalhamento. -----	67
Tabela 4 - Valores estimados para tensões de cisalhamento para amostras com $2\alpha=90^\circ$. -----	78
Tabela 5 - Dimensões das amostras em modos I/III. -----	114
Tabela 6 - Propriedades mecânicas das amostras em modos I/III. -----	114
Tabela 7 - Integridade estrutural das amostras em modos I/III. -----	115
Tabela 8 - Fatores intensidade de tensão \bar{K}_{III} e \bar{K}_{III}^v com relação $d/a_p = 15$.-----	117
Tabela 9 - Fatores intensidade de tensão \bar{K}_{III} e \bar{K}_{III}^v com relação $d/a_p = 10$.-----	118

Simbologia

Letras Latinas

a	comprimento da trinca	mm
a_1, a_2	constantes integrantes das funções potenciais	
a_p	profundidade do entalhe	mm
A	área da seção transversal	mm ²
A_1, A_2	constantes de funções da distribuição tensão para o modo III	
A_3	constante complexa	
b	termo canônico	
b_1, b_2	constantes integrantes das funções potenciais das funções I e II	
B	função real	
c	constante complexa das funções potenciais para o modo III	
c_1, c_2	constantes integrantes das funções potenciais para os modos I e II	
C	parâmetro que contem as constantes integrantes das funções potenciais	
d	distância a partir da extremidade do entalhe hiperbólico até a origem do sistema de coordenadas	mm
d_1, d_2	constantes integrantes das funções potenciais para os modos I e II	
dA_j	componentes do vetor área perpendicular a área do elemento	mm ²
dF_i	componentes do vetor força	N
D	constante complexa	
E	módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young	Pa
$f(a/w)$	Parâmetro que relaciona geometria e condições de carregamento	

$f_{\theta\theta}, f_{rr}, f_{r\theta}$	funções angulares da distribuição de tensão para os modos I e II	
$f(Z)$	função de variável complexa Z	
$f_{ij}(\theta, \alpha)$	função angular da distribuição de tensão para os modos I e II em função de θ e 2α	
F	força	N
$g_{\theta\theta}, g_{rr}, g_{r\theta}$	funções angulares da distribuição de tensão para os modos I e II	
$g_{ij}(\theta, \alpha)$	função angular da distribuição de tensão para os modos I e II em função de θ e 2α	
G	módulo de elasticidade no cisalhamento	Pa
G_c	energia de fratura coesiva	J
h	módulo da transformação ou fator de escala da função retangular de Z em coordenadas curvilíneas.	
h_u, h_v, h_w	fator de escala das coordenadas u, v e w	
H	distância entre as extremidades de dois entalhes em V	mm
H_1, H_2	constantes da função tensão de entalhes hiperbólicos em modo II	
I_1, I_2, I_3	invariantes de tensão	
k_t	fator concentração de tensão	
K	fator intensidade de tensão	MPam ^{1-λ}
K_{tc}	fator tenacidade do material	MPam ^{0,5}
K_I^u	fator intensidade de tensão para amostras com entalhe em U	MPam ^{0,5}
K_I^v	fator intensidade de tensão para amostras com entalhe em V	MPam ^{1-λ}
K_{II}^v	fator intensidade de tensão para amostras com entalhe em V em modo II	MPam ^{1-λ}
$K_{II,\rho}^v$	fator intensidade de tensão para amostras com entalhe em V em modo II cujo raio de curvatura é relevante	MPam ^{1-λ}
\bar{K}_{III}	razão entre fator intensidade de tensão de trincas em modo III pela tensão nominal	mm ^{0,5}
$\bar{K}_{III,\rho}^v$	razão entre fator intensidade de tensão de entalhes em V em modo III cujo raio de curvatura é relevante pela tensão nominal	mm ^{1-λ}
l	largura dos corpos de prova	mm
L	comprimento do ponto de aplicação de carga	mm
m	termo canônico	
M_t	momento torsional	N.m

p	valor de referência para uma tensão nominal	Pa
P	função harmônica	
q	severidade do entalhe	
Q	força cortante	N
r	coordenada polar	mm
r_0	distância da origem do sistema de coordenada polar à ponta do entalhe	mm
r_3	variável auxiliar fator de concentração de eixos com entalhes em V submetidos à torção	mm
R	raio de eixos e discos	mm
s	parâmetro auxiliar do fator de concentração de tensão em eixos com entalhes em V submetidos à torção	
S	função harmônica conjugada	
t	espessura da amostra	mm
T	constante da função tensão de eixos submetidos à torção com entalhes hiperbólicos	
u, v, w	coordenadas curvilíneas	
u_i	componentes de deslocamentos na direção x, y e z	mm
x, y, z	coordenadas retangulares	
x_0	distância da origem do sistema de coordenada retangular à ponta do entalhe	mm
X, Y, V	componentes de uma força de massa por unidade de volume	N/m ³
W	deslocamento na direção z	mm
W_1, W_2, W_3, W_4	constantes da função tensão de Williams	
Z	variável complexa em coordenadas retangulares	
\bar{Z}	variável complexa conjugada em coordenadas retangulares	

Letras Gregas

2α	ângulo de abertura do entalhe	graus
β	função real	
ε	deformação	
ε_m	deformação mensurável	
ε_{nom}	deformação nominal ou de engenharia	
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	deformações nas direções x,y e z	
λ_M	coeficiente assintótico para os modos geométricos das trincas	
ξ, η	coordenadas curvilíneas ortogonais	
ζ	variável complexa em coordenadas curvilíneas	
γ	ângulo suplementar ao ângulo de abertura do entalhe	rad
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	deformações angulares em coordenadas retangulares	
ℓ_{ch}	comprimento característico	mm
ϑ	constante de Neuber em função do coeficiente de Poisson	
ρ	raio de curvatura do entalhe ou parâmetro de Neuber	mm
σ	tensão normal	Pa
σ_{ij}	tensões generalizadas	Pa
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	tensões principais	Pa
σ_f	tensão de falha	Pa
σ_{max}	tensão normal máxima	Pa
$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$	tensões normais radial e tangencial em coordenadas polares	Pa
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	componentes normais de tensão paralela aos eixos x, y, z	Pa
σ_{UTS}	tensão de ruptura experimental	Pa
σ_{uu}, σ_{vv}	componentes normais de tensão em coordenadas curvilíneas	Pa
τ	tensão cisalhante	Pa

$\tau_{R,45^\circ}$	tensão cisalhante de sentido de carga radial com ângulo 45°	Pa
$\tau_{T,45^\circ}$	tensão cisalhante de sentido de carga tangencial com ângulo 45°	Pa
τ_{\max}	tensão cisalhante máxima	Pa
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	componentes cisalhantes de tensão em coordenadas retangulares	Pa
$\tau_{r\theta}$	tensão cisalhante em coordenadas polares	Pa
τ_{uv}	tensão cisalhante em coordenadas curvilíneas	Pa
ϕ	função tensão	
$\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$	funções harmônicas	
φ	ângulo entre as direções curvilíneas u e v	rad
φ/q	ângulo entre a direção principal entre os sistemas polar e curvilíneo para o modo III	rad
θ/q	ângulo entre a direção principal entre os sistemas polar e curvilíneo para os modos I e II	rad
θ	coordenada polar	rad
μ_1, μ_2	expoente integrante dos potenciais complexos para os modos I e II	
ν	coeficiente de Poisson	
$\psi(Z), \chi(Z)$	potencial complexo	
χ_1, χ_2	constantes auxiliares	
$\chi_{b1}, \chi_{c1}, \chi_{d1}$	coeficientes da distribuição de tensão modo I na vizinhança do entalhe	
$\chi_{b2}, \chi_{c2}, \chi_{d2}$	coeficientes da distribuição de tensão modo II na vizinhança do entalhe	
Δ	diferença entre duas medidas para uma mesma grandeza	
Δa	acréscimo do comprimento da trinca	mm
ΔG_{Cd}	variação da energia de deformação	J
ω	coordenada curvilínea complexa	
ϖ_2	variável auxiliar da distribuição de tensão de entalhes em V em modo II	

∇ operador matemático laplaciano

Sobrescritos

U relativo ao entalhe de geometria U

V relativo ao entalhe de geometria V

Subscritos

I relativo ao modo geométrico I

II relativo ao modo geométrico II

III relativo ao modo geométrico III

max valor máximo

nom valor nominal

R sentido radial da aplicação da carga

T sentido tangencial da aplicação da carga

ρ relativo a presença do raio de curvatura de entalhes em V

Siglas

CLS	Crack Lap Shear	
CSCBD	Central Straight-through Cracked Brazilian Disk in Diametral Compression / Disco brasileiro com entalhe reto central submetido à compressão diametral	
DCB	Double Cantilever Beam / Viga prismática em ruptura com balanço duplo	
ECT	Edge Crack Torsion / Torção em viga com trinca na borda	
ENF	End Notched Flexure / Viga prismática com entalhes em flexão em três pontos.	
4ENF	End Notched Flexure / Viga prismática com entalhes em flexão em quatro pontos.	
FDT	Flattened Disk Test / Disco brasileiro aplainado	
IEM	Instituto de Engenharia Mecânica	
MFEL	Mecânica da Fratura Elástica Linear	
MFF	Mecânica da Fratura Finita	
MMB	Mixed Mode Bending / Ensaio de flexão em modo misto	
NSIF	Notch Stress Intensity Factor / Fator intensidade de tensão em entalhes	MPam ^{1-λ}
PMMA	Polimetil-metacrilato	
PVC	Cloreto de polivinila	
SCB	Split Cantilever Beam	
SECBD	Single Edge Crack Brazilian Disk in Diametral Compression / Disco brasileiro com estria submetido à compressão diametral	
UTS	Ultimate Tensile Strength / Máxima tensão de ruptura experimental	Pa

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 REVISÃO DA LITERATURA

O critério convencional de falhas não é adequado para explicar as falhas em estruturas e componentes que ocorrem por tensões menores que à tensão admissível. A tensão real dos materiais é muitíssimo menor que a tensão teórica com magnitude aproximadamente duas vezes a ordem de grandeza. A verificação da relação entre as tensões reais e teóricas ocorreu no trabalho experimental de Griffith (1921 apud Callister Jr, 2002), em fibras de vidro.

A consequência de Griffith (1921 apud Callister Jr, 2002) foi a instituição da mecânica da fratura. O maior objetivo do estudo da mecânica da fratura é o comportamento das estruturas na presença inicial de defeitos, quando assume-se a existência da trinca. Embora, os pioneiros sejam Leonardo da Vinci e Galileo Galilei ao determinar o carregamento máximo de um arame de ferro.

Macroscopicamente a fratura pode ser classificada com frágil ou dúctil. A fratura frágil é associada à baixa energia e condições instáveis para os carregamentos em locais onde a fratura tem alta velocidade de propagação. A fratura dúctil é associada a grandes deformações de altas taxas de dissipação de energia e baixas velocidades de propagação. Estes modos são caracterizados pelos processos de fabricação e as solicitações que as estruturas estão submetidas (Callister, 2002).

Os principais modos de falhas são por fadiga, fluência, corrosão, instabilidade plástica, deformação plástica, trinca por tensão de corrosão, fratura frágil e catastrófica. O fenômeno da fratura em sólidos é complicado e depende de vários parâmetros, incluindo efeitos macroscópicos e microscópicos. Os fenômenos microscópicos ocorrem pela composição dos materiais e nucleação.

A mecânica linear da fratura introduzida pelo balanço energético de Griffith (1921, apud Callister Jr, 2002) aprimorado por Irwin (1957 apud Gdoutos, 1993) através do critério fator de intensidade de tensão. Quando este critério assume um valor crítico é denominado fator tenacidade à fratura, tornando uma propriedade mecânica dos sólidos. O uso de funções potências complexas por Muskhelishvili (1953 apud Meguid, 1989) e Westergaard (1939 apud Meguid, 1989) para descrever as funções tensão possibilitou o trabalho de Williams (1952 apud Barber, 1992) nas proximidades da ponta da trinca. A mecânica não linear da fratura utiliza integrais invariantes para caracterizar o estado de tensão e deformação. As principais publicações sobre o uso das integrais invariantes são Eftis et al. (1972), Sih et al. (1968), Cherepanov (1979) e Rice (1968).

Neuber (1958) propôs uma análise na distribuição de tensão ao longo dos diferentes entalhes em diversos sólidos. A descrição das principais solicitações em sólidos homogêneos, isotrópicos e com entalhes são descritos por funções bi-harmônicas e complexas. O principal parâmetro da mecânica linear da fratura, o fator intensidade de tensão é também descrito pelas funções complexas de Neuber. O parâmetro denominado por raio de curvatura do entalhe, ρ é referência geométrica do entalhe para determinar a distribuição de tensão nas diferentes solicitações.

Segundo Lazzarin, Zappalorto e Yates (2006) o estudo analítico da distribuição de tensão em entalhes semi-elíptico em eixos simétricos submetidos à torção possui várias aplicações. A formulação de Westergaard (1939 apud Callister Jr, 2002) é utilizada em problemas do valor de contorno em sistema de coordenadas elípticas, de maneira que, a utilização de outros sistemas de coordenadas curvilíneos é possível para entalhes de geometrias distintas.

Eixos simétricos submetidos à torção e tensões de cisalhamento uniforme podem caracterizar estudos do terceiro modo geométrico de trincas. A distribuição de tensão elástica ao redor de entalhes em eixos simétricos é formulada em sistemas de coordenadas curvilíneas, tais como, parabólica e hiperbólica. As transformações no sistema de coordenadas são utilizadas em funções complexas potenciais na obtenção do fator de concentração de tensão no entalhe para este modo (Zappalorto et al., 2008).

A tradicional solução de Neuber para descrever a tensão normal ao longo da bissetriz do ângulo de abertura do entalhe em V foi modificada por Filippi et al. (2002) em tensão cisalhante no antiplano. A correção na formulação do conceito de Neuber é adição de um fator de suporte microestrutural a partir do raio fictício para os principais critérios de falha, tais como, Rankine, Von Misses e Beltrami (Berto et al., 2008).

Os detalhes do campo linear elástico na vizinhança dos entalhes U e V em placas planas, a partir da solução matemática de Williams (1952 apud Barber, 1992), Westergaard (1939 apud Meguid, 1989), Irwin (1957 apud Gdoutos, 1993) e Creager e Paris (1967) de equações universais são feitos dos arranjos de funções potenciais complexas específicas para as diferentes condições de contorno. Filippi et al. (2002) desenvolveram os principais termos da distribuição de tensão para os modos I e II em placas com entalhes, a partir de diferentes raios e ângulos de abertura.

Por Lazzarin e Filippi (2006) a generalização do fator de intensidade de tensão para os entalhes em V para os modos I e II é proporcional ao limite dos componentes da tensão situados a uma distância $(1-\lambda)$, onde λ é o coeficiente assintótico da solução do problema de autovalor proposto por Williams (1952 apud Barber, 1992). Quando o grau de singularidade é constante, a generalização é obtida através do uso de funções potenciais complexas.

A análise do crescimento de trinca por fadiga é essencial para o conhecimento do aumento da distribuição de tensão em placas finitas para entalhes simétricos U e V, bem como entalhes laterais semicirculares. O crescimento da trinca é determinado pelo expoente λ pela tensão obtida experimentalmente (Lazzarin et al., 1998).

O estudo experimental de Strandberg (2002) em materiais frágeis, como o aço ferramenta AISI 01, em entalhes V através de métodos padronizados de tenacidade da fratura dos critérios da tensão associados ao ângulo de abertura do raio e do raio próximo da extremidade do entalhe.

Critérios de falhas linear elástico em materiais frágeis ou quase-frágeis são experimentalmente testados em amostras com entalhes U. Cerâmicas e PMMA a temperatura de -60°C foram os materiais submetidos à ruptura com diferentes raios de abertura para os entalhes. Os critérios tensão principal, máxima tensão circunferencial, energia de deformação crítica, energia de deformação principal, defeitos intrínsecos do material e aumento finito da extensão da trinca estão relacionados ao fator de intensidade de tensão e fator de tenacidade à fratura de amostras com entalhes em U (Gómez, Guinea e Elices, 2006).

Uma solução analítica para o campo tensão na vizinhança de trincas, entalhes, cantos vivos, em placas planas submetidos em carregamentos é feita pela formulação de funções

potenciais Muskhelishvili (1953 apud Meguid, 1989). A expressão do componente da tensão circunferencial é importante na análise de fadiga ao longo do eixo de simetria x , enquanto a tensão radial não é relevante ao estimular o tempo de vida (Atzori et al., 1997).

O critério de falhas elástico de Leguillon para reentrâncias em materiais frágeis para o modo I pode ser estendido para a combinação de modos I e II. O critério é válido para a condição de carregamento crítico e ângulo de propagação de trincas em amostras de PMMA e MACOR com entalhes em V submetidos aos modos I e II. Este critério de falha requer o conhecimento de dois parâmetros do material, como, o fator intensidade de tensão crítica, K_{Ic} e máxima tensão através da validação experimental (Yosibash, Priel e Leguillon, 2006).

A modificação da tradicional balanço de energia de Griffith por Taylor, Cornetti et al. (2004) usada pela Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) através da introdução da constante do comprimento característico. Esta modificação poderá ser aplicada em entalhes e pequenas trincas. A integração da taxa de energia de deformação torna possível o cálculo do comprimento da trinca, desde que, o fator de intensidade de tensão esteja incluso.

1.2 MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

A Mecânica da Fratura é aplicada na mecânica estrutural para descrever o comportamento de trincas, furos, cantos vivos, ranhuras, entalhes e etc em componentes e estruturas para as diferentes solicitações.

Embora o conceito fundamental da Mecânica da fratura-integridade estrutural só ocorreu na década de 1970, com a proliferação na forma de relatórios, conferência e inúmeros livros. A mecânica da fratura passa a garantir a integridade estrutural não prevista pelo critério de falha tradicional, que muitas vezes não descreve satisfatoriamente a falha ocorrida em elementos estruturais.

Indubitavelmente, passos largos têm ocorrido no campo de mecânica da fratura com resultado de novos critérios de falhas. Basicamente, ela tem como objetivo:

- O grau de segurança que as estruturas possuem em oposição à presença de falhas;
- As condições necessárias para o surgimento e propagação de trincas;
- A vida residual em componentes sujeitos ao carregamento dinâmico.

A MFEL é fundamentada na aplicação da teoria da elasticidade a corpos contendo trincas ou defeitos. As hipóteses usadas na elasticidade são também inerentes na teoria da MFEL, que são pequenos deslocamentos e linearidade geral entre tensões e deformações.

Os princípios da MFEL são usados para a relação entre a magnitude e a distribuição de tensão nas vizinhanças da ponta da trinca para:

- Tensões remotas aplicadas ao componente;
- Comprimento e forma da trinca;
- Propriedade do material do componente.

Algumas tentativas têm sido feitas para descrever o comportamento de pequenas trincas que emanam de entalhes.

1.3 OBJETIVO DA PESQUISA

Através desse trabalho espera-se uma melhor compreensão dos modos de falhas em sólidos. Avaliar um dos principais parâmetros da mecânica da fratura elástica linear, o fator intensidade de tensão, em estruturas com entalhes em V para os três modos geométricos de falhas pela presença e ausência de um raio de curvatura na extremidade do entalhe. Este parâmetro define a magnitude das tensões ao redor da extremidade do entalhe e assim contribui para a integridade de estruturas e componentes. Estimar o fator intensidade de tensão de trincas para entalhes para os modos II e III. Os modos geométricos II e III são avaliados com maiores detalhes em entalhes hiperbólicos. Enquanto, os entalhes em V são discutidos a partir do teste Iosipescu em compósitos de vidro/epoxi.

1.4 CONTEÚDO

Os principais esclarecimentos da teoria da elasticidade ocorrem no capítulo 2. O principal objetivo da teoria da elasticidade é descrever a distribuição de tensão para as diferentes solicitações em diversos sólidos. Em especial, a mecânica linear da fratura utiliza desta teoria a sua formulação para os fenômenos referentes à trinca. Os modos geométricos de carregamento a que envolvem os deslocamentos diferentes de trinca podem ser combinados, de maneira que o principal objetivo é obter o parâmetro principal o fator intensidade de tensão. A configuração geométrica da superfície da trinca através dos três modos geométricos é estendida para os diferentes tipos de entalhes. O modo I é o carregamento dominante na maioria das aplicações de engenharia e o mais simples, trata-se do modo de tração. Enquanto os modos II e III são caracterizados pelo cisalhamento puro e de rasgamento, respectivamente.

A formulação de potenciais complexos na geometria de entalhes foi proposto por Neuber em 1958. Os principais parâmetros geométricos como raio de curvatura e ângulo de abertura são descritos para qualquer função harmônica influenciados pela presença do parâmetro geométrico raio de curvatura.

Todos os parâmetros necessários para a descrição da distribuição de tensão para os modos geométricos I e II são relatados no capítulo 4. Assim como, uma avaliação gráfica dos mesmos. A obtenção do principal parâmetro das distribuições para estes dois modos é detalhada no apêndice B, pela solução proposta por Williams (1952 apud Barber, 1992). O fator intensidade de tensão para o segundo modo geométrico é avaliado por procedimentos experimentais por meio do teste de Iosipescu em lâminas de vidro/epóxi de Souza em 2006. Este fator intensidade de tensão é função da tensão de cisalhamento ao longo do plano bisetor do entalhe.

O apêndice A demonstra que o conceito de uma função harmônica e holomorfa em funções reais são estendidos para funções complexas.

O capítulo 5 é dedicado à análise do terceiro modo geométrico para sólidos homogêneos, anisotrópicos e com entalhes curvilíneos. Diferentes funções complexas descrevem um modelo matemático para o fator intensidade de tensão em diferentes solicitações. Em continuidade, avalia-se os entalhes hiperbólicos em eixos devido à torção. Maiores detalhes do fator de concentração para eixos com duplo entalhe hiperbólico pelo uso de coordenadas elipsoidais por Neuber (1958) é discutido no apêndice C.

Por fim, o capítulo 6 apresenta algumas discussões sobre os entalhes nos principais modos geométricos. E também, sugestões são apresentadas para futuros trabalhos.

Capítulo 2

TEORIA DA ELASTICIDADE

Neste capítulo introduzem-se alguns conceitos básicos sobre a teoria da elasticidade e sua aplicação na mecânica linear da fratura. Os modos geométricos de trinca também são apresentados neste capítulo.

Muitos engenheiros deparam-se com problemas do interesse da resistência dos materiais. A resistência dos materiais difere-se da elasticidade em várias suposições plausíveis e substanciais sobre o processo de análise da deformação em sólidos. Um típico exemplo é a consideração que seções planas permanecem planas em vigas curvas esbeltas. A elasticidade faz com que as suposições sejam uma tentativa rigorosa e direta dos primeiros princípios, como a lei de Newton de movimento, geometria euclidiana e lei de Hooke. O objetivo da elasticidade é o interesse pela determinação das tensões e deslocamentos nos sólidos quando sujeitos aos carregamentos mecânicos ou térmicos, ou quando estes sólidos retornam a condição inicial pela remoção dos carregamentos. Tais fundamentos são válidos para a toda mecânica da fratura linear elástica (Barber, 1992).

2.1 TENSÃO

A tensão é um tensor de segunda ordem com nove componentes, mas pode ser totalmente descrito com seis componentes, devido à simetria e ausência de momentos. Em N dimensões, o tensor tensão σ_{ij} é definido por:

$$dF_i = \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} dA_j \quad (2.1)$$

Quando dF_i são os componentes resultantes do vetor força atuantes em uma pequena área dA . O vetor dA_j é perpendicular à área do elemento visualizado nas superfícies e com comprimento igual à área dos elementos. Na mecânica elementar, os subscritos x , y e z são denotados freqüentemente por 1, 2 e 3, respectivamente. A Figura 1 ilustra um elemento tetraedro de um corpo deformável sob ação de tensões generalizadas. As forças que atuam sobre o tetraedro podem, portanto, ser determinadas multiplicando-se as componentes de tensão pelas áreas das faces.

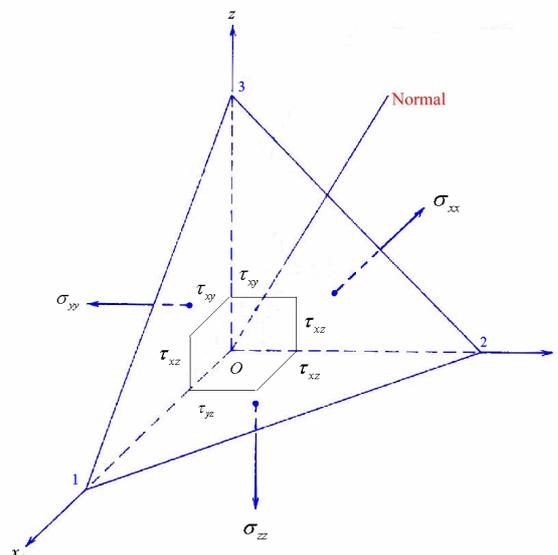


Figura 1 – Tensões generalizadas atuando em um corpo deformável.

Os componentes do tensor tensão σ_{ij} dependem da orientação do plano que passa através dos pontos considerados em relação aos pontos observados. Entretanto, todo tensor é invariante a escolha dos pontos observados. Em sistemas unidimensionais com carregamentos uniaxiais, a tensão é simplesmente igual à força dividida pela área transversal ou simplesmente

denominada por pressão. Os casos bidimensionais e tridimensionais são mais complexos. Em casos de três dimensões, a força interna atuante em uma pequena área dA do plano que passa através de um ponto qualquer pode ser resolvido em três componentes, uma normal ao plano designado por σ e os dois componentes paralelos ao plano designado por τ . Caso a área dA seja finita, então estes componentes são tensões médias. Em geral, a tensão varia de ponto a ponto e também com campo do tensor.

Para os objetos unidimensionais, o tensor tensão é composto somente por um componente. A simples definição de tensão, $\sigma = F/A$, quando A é área inicial da seção transversal a priori com aplicação do carregamento, isto é, a tensão nominal ou tensão de engenharia. Entretanto, a tensão verdadeira é uma definição alternativa com a substituição da área inicial com a área instantânea. Em aplicações de engenharia, a área inicial é sempre conhecida e os cálculos para a tensão nominal é geralmente fácil. Experimentalmente em pequenas deformações, a redução da área transversal e deslocamentos entre a tensão verdadeira e nominal são significantes. A mudança da área seção transversal poderá assumir valor constante.

Em problemas unidimensionais, a conversão entre a tensão verdadeira e tensão nominal é:

$$\sigma_{ver} = (1 + \epsilon_{nom})(\sigma_{nom}) \quad (2.2)$$

A tensão última é uma propriedade do material e é usualmente determinada em testes de tração. O cálculo do carregamento poderá causar fratura. A tensão de compressão é uma propriedade similar para carregamentos axiais.

Cauchy (1815 apud Meguid, 1989) enunciou o princípio de que, dentro de um corpo, as forças que impõe um volume fechado sobre o restante do material devem estar em equilíbrio com as demais forças restantes do corpo. Essa intuição fornece uma maneira para a caracterização e cálculos complicados dos padrões das tensões. Para ser exato, a tensão em um ponto pode ser determinada considerando um pequeno elemento do corpo de área dA sobre ação da força ΔF . Um elemento infinitesimal pequeno, o vetor σ é definido pelo limite:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (2.3)$$

Sendo um tensor, a tensão tem dois componentes direcionais: uma para a força e um para plano de orientação; destas três dimensões pode ser que duas forças dentro do plano de área A , o componente cisalhante e uma força perpendicular à área A , o componente normal. Portanto, a tensão de cisalhamento pode ser decomposta em duas forças ortogonais dentro do plano. Isso dá origem aos três componentes da tensão total atuantes no plano. Por exemplo, em um plano ortogonal ao eixo x , pode haver uma força normal aplicada na direção x e uma combinação de componentes de forças nos planos y e z .

As considerações acima podem ser generalizadas para três dimensões. Entretanto, isto é muito complicado, uma vez que cada carregamento de cisalhamento produz tensões cisalhantes em uma orientação e tensão normal em outras orientações, e vice-versa. Frequentemente, apenas alguns componentes de tensão são significantes, dependendo o material em questão.

2.1.1 Tensão Plana e Deformação Plana

O problema de deformação plana pode ser definido como aquele em que as tensões e deformações não variam na direção perpendicular ao plano xy . A maior restrição pode ser imposta pela condição de $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$, uma vez que a espessura é suficientemente pequena quando comparada com as outras dimensões do sólido. O problema da tensão plana pode ser tomado como aquele em que a tensão na direção z é a mesma para todos os pontos do plano xy . Entretanto, esta tensão pode ser reduzida à condição nula pela suposição adequada da tensão uniforme de σ_{xx} .

Se uma chapa fina é carregada por forças aplicadas no contorno, paralelas ao plano da chapa e distribuídas uniformemente ao longo da espessura, as componentes de tensão σ_{xx} , τ_{xz} e τ_{yz} são nulas em ambas as faces da chapa, e pode-se admitir, em princípio, que são nulas também no interior da chapa. O estado de tensão é então especificado somente por σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} , e é denominado estado plano de tensão (Timoshenko et al., 1970).

2.1.2 Tensões Principais

Augustin Louis Cauchy (1815 apud Meguid, 1989) demonstrou que, num determinado ponto, é possível localizar dois planos ortogonais em que a tensão de cisalhamento desaparece. Estes planos em que as forças atuam como normais são chamados tensões principais. Eles são os autovalores do tensor tensão e são ortogonais, porque o tensor tensão é simétrico. Autovalores são invariantes no que diz respeito à escolha da base e são as raízes do teorema Cayley-Hamilton (embora o termo "invariante" é usualmente representado por (I1, I2, I3)). O círculo de Mohr é um método gráfico de extrair as tensões principais em duas dimensões em tensão plana. O valor máximo e mínimo da tensão principal são os possíveis valores máximo e mínimo da tensão normal. A máxima tensão principal controla a fratura frágil.

O tensor tensão definido por Cauchy (1815 apud Meguid, 1989) em duas dimensões é:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Então, as tensões principais σ_1 e σ_2 são:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \tau_{\max} \quad (2.5)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.6)$$

Engenheiros utilizam o círculo de Mohr para encontrar os planos de máxima tensão normal e tensão de cisalhamento, bem como as tensões em planos conhecidos. Por exemplo, se o material é frágil, o engenheiro tem a possibilidade do uso do círculo de Mohr para encontrar o componente máximo de tensão normal (tração ou compressão) e a máxima tensão de cisalhamento.

O tensor tensão definido por Cauchy (1815 apud Meguid, 1989) em três dimensões é:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Em equilíbrio, $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ e $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, também a matriz é efetivamente simétrica. Caso não haja equilíbrio, outros métodos de descrição geral devem ser usados em tornar a matriz simétrica antes da efetuação dos cálculos.

A equação característica tridimensional da tensão principal resulta da solução não trivial no problema de autovalores, desde que o determinante seja nulo.

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.8)$$

A equação característica resultante do determinante é:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (2.9)$$

As três raízes da equação (2.9) são as tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 . Quando as raízes são encontradas podem mostrar que as três invariantes podem ser expressas em termos da tensão principal.

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.10)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \quad (2.11)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (2.12)$$

2.1.3 Equações Diferenciais de Equilíbrio

O estado de tensão varia de ponto a ponto nas diferentes aplicações na análise estrutural. As tensões que atuam em um elemento cúbico infinitesimal são representadas nas Figuras 2a e 2b.

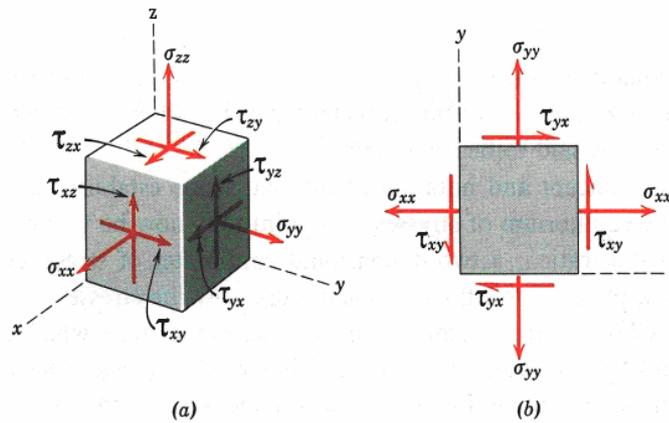


Figura 2 – a) Tensões em 3D e b) Tensões em 2D.

Uma vez que o corpo como um todo deve estar em equilíbrio, o elemento em consideração deve também estar em equilíbrio sob a ação das tensões que agem em sua face. Ao combinar uma fatoração com o termo em comum, o equilíbrio ao longo das direções x, y e z é reduzido em:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Ou simplesmente:

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j + X_i = 0 \quad (2.14)$$

As condições de equilíbrio podem ser obtidas a partir da condição do conjunto de forças sobre um elemento infinitesimal de volume quase nulo. Seja um cubo infinitesimal alinhado

com os eixos x , y e z com lado em (x) e o lado o oposto ao $(x + dx)$ e com faces de cada área dA . Considerar apenas as faces do cubo que são perpendiculares ao eixo x . O vetor área para a próxima face é $[-dA, 0, 0]$ e para a face mais distante é $[dA, 0, 0]$. O conjunto de tensão força nas duas faces opostas é

$$dF_i = \sigma_{ii}([x_1 + dx, y, z])dA - \sigma_{ii}([x, y, z])dA \approx \partial_1 \sigma_{ii} dV \quad (2.15)$$

Um cálculo semelhante pode ser conduzido para os outros pares de faces. A soma de todas as forças tensão sobre o cubo infinitesimal será então representada pela seguinte expressão:

$$dF_i = \partial_j \sigma_{ji} dV \quad (2.16)$$

Uma vez que o conjunto de forças em um o cubo deve ser igual a zero, de maneira que estas forças devem ser contrabalançadas com a força por unidade de volume sobre o cubo (por exemplo, devido à força peso, forças eletromagnéticas, etc.), que produz as condições de equilíbrio descrito anteriormente.

O equilíbrio exige também que o momento resultante sobre o cubo de material deve ser zero. Tomando o momento das forças acima de qualquer ponto assinalado, segue-se que para o equilíbrio na ausência do corpo momentos.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.17)$$

O tensor tensão é simétrico e, em seguida, os índices podem ser escritos em qualquer ordem.

2.1.4 Equações de Compatibilidade

As equações de compatibilidade surgem da equação diferencial dos componentes de deformação normal ou longitudinal e da distorção. As componentes de deslocamentos são escritas coletivamente por u_i , de maneira que, as relações deformações-deslocamento também são expressas em notação indicial.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.18)$$

Em problemas bidimensionais, a soma da segunda derivada ε_{xx} em relação a y e ε_{yy} em relação a x é igual à segunda derivada de γ_{xy} em relação x e y.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.19)$$

Esta é a condição de compatibilidade ou continuidade para problemas em duas dimensões, expressas em termos de deformação. As equações de compatibilidade tridimensionais são derivadas de maneira similar.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Para o caso de forças de volume constantes, a equação de compatibilidade é válida para ambos os casos de estado plano de tensão e de deformação. Logo, a distribuição de tensões é a mesma nestes dois casos, desde que as condições de contorno e as forças externas sejam as mesmas para chapas e cilindros sem furos (Timoshenko et al., 1970).

2.2 FUNÇÃO TENSÃO

Em problemas gerais de elasticidade é possível encontrar a função tensão ϕ que satisfaça as equações de equilíbrio, a condição de compatibilidade e as condições de contorno para o problema em questão. Em especial destacam a formulação de Airy (1863 apud Meguid,1989) e os potenciais complexos de Muskhelishvili (1953 apud Meguid, 1989).

2.2.1 Função Tensão Airy

Considere um problema bidimensionais ausente de forças externa com as seguintes equações de equilíbrio.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

A equação de compatibilidade para problemas bidimensionais:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (2.23)$$

Seja ϕ uma função de tensão, de maneira que, estabeleça as expressões para as tensões principais.

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad e \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2.24)$$

Várias soluções das equações de equilíbrio (2.22) são obtidas. A verdadeira solução do problema é aquela que também satisfaz a equação de compatibilidade (2.23).

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = 0 \quad (2.25)$$

A substituição das tensões em termos da função de tensão nas equações de equilíbrio e compatibilidade deve satisfazer a seguinte equação:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.26)$$

Expressando a equação em função do operador matemático laplaciano, pela derivação total da função.

$$\nabla(\nabla^2 \phi) = \nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (2.27)$$

As equações de equilíbrio ou juntamente com as condições de contorno e uma das equações de compatibilidade fornecem um sistema de equações que usualmente é suficiente para a completa determinação distribuição de tensões em problemas bidimensionais.

2.2.2 Função Tensão Complexa

O uso da função de Airy (1863 apud Meguid, 1989) é limitado para descrever as deferentes condições de contorno. A função complexa de tensão de Muskhelishvili (1953 apud Meguid, 1989) é o aprimoramento do conceito existente para a função de tensão e escrita em duas funções complexas $\psi(Z)$ e $\chi(Z)$. A função de tensão complexa é concisa para os problemas mais gerais e permite solução para problemas de trincas, entalhes e cantos vivos (Meguid, 1989).

Seja $f(Z)$ uma função analítica composta por funções de x e y . As operações de igualdade, adição, subtração, multiplicação e divisão entre números complexos representam operações sobre pares de números reais. O uso de (i) é simplesmente uma conveniência.

Seja:

$$Z = x + iy \quad (2.28)$$

Qualquer função de tensão pode ser formada por meio de duas funções harmônicas conjugadas $P(x, y)$ e $S(x, y)$. A função $P(x, y)$ é uma função harmônica, de modo que terá uma função harmônica conjugada $S(x, y)$. Conseqüentemente, $P(x, y) + S(x, y)$ é uma função analítica de Z .

$$f(Z) = P(x, y) + iS(x, y) \quad (2.29)$$

Ou simplesmente,

$$f(Z) = P + iS \quad (2.30)$$

Sejam as derivadas parciais:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(Z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial S}{\partial x} = f'(Z) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(Z) = \frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial S}{\partial y} = if'(Z) \end{cases} \quad (2.31)$$

E mesmo,

$$i \frac{\partial f(Z)}{\partial x} = \frac{\partial f(Z)}{\partial y} \quad (2.32)$$

A equação (2.32) permite obter a seguinte identidade:

$$i \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial S}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial S}{\partial y} \right) \quad (2.33)$$

Igualando os termos reais e imaginários, encontram-se as relações:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial S}{\partial x} \quad (2.34)$$

As expressões acima são conhecidas por equações de Cauchy (1815 apud Meguid, 1989) e Riemann (1851 apud Meguid, 1989). A generalização das expressões para tensões e

deslocamentos é feita em termos de potenciais complexos $\psi(Z)$ e $\chi(Z)$. Seja $f(Z)$ e $f(\bar{Z})$ funções complexas por pares de funções reais B e β . O conjugado da função $f(Z)$ é uma função harmônica.

$$\begin{cases} f(Z) = B + i\beta \\ f(\bar{Z}) = B - i\beta \end{cases} \quad (2.35)$$

É evidente que $f(Z)$ e $f(\bar{Z})$ são escritas como:

$$f(\bar{Z}) + f(Z) = 2B \quad (2.36)$$

A função de tensão é escrita como:

$$\begin{cases} \phi = \text{Re}[\bar{Z}\psi(Z) + \chi(Z)] \\ 2\phi = \bar{Z}\psi(Z) + \chi(Z) + Z\bar{\psi}(\bar{Z}) + \bar{\chi}(\bar{Z}) \end{cases} \quad (2.37)$$

As derivadas parciais da função tensão em relação as coordenadas cartesianas x e y .

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} = \bar{Z}\psi'(Z) + \psi(Z) + \chi'(Z) + Z\bar{\psi}'(\bar{Z}) + \bar{\psi}(\bar{Z}) + \bar{\chi}'(\bar{Z}) \\ 2 \frac{\partial \phi}{\partial y} = i[\bar{Z}\psi'(Z) - \psi(Z) + \chi'(Z) - Z\bar{\psi}'(\bar{Z}) + \bar{\psi}(\bar{Z}) - \bar{\chi}'(\bar{Z})] \end{cases} \quad (2.38)$$

A combinação das derivadas parciais resulta a seguinte relação:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} = \psi(Z) + Z\bar{\psi}'(\bar{Z}) + \bar{\chi}'(\bar{Z}) \quad (2.39)$$

As tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} são obtidas pelas derivadas de segunda ordem das expressões da função de tensão pela equação (2.38). A combinação da diferenciação de segunda ordem em relação a x e em relação a y tem-se

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \psi'(Z) + Z\bar{\psi}'(\bar{Z}) + \bar{\psi}'(\bar{Z}) + \bar{\chi}''(\bar{Z}) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - i \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\psi'(Z) + Z\bar{\psi}'(\bar{Z}) - \bar{\psi}'(\bar{Z}) + \bar{\chi}''(\bar{Z}) \end{cases} \quad (2.40)$$

A subtração e a adição das expressões acima, resultam nas conhecidas equações de Muskhelishvili (1953 apud Meguid, 1989) em termos de potencial complexo para função de tensão de Airy (1863 apud Meguid, 1989).

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2\psi'(Z) + 2\bar{\psi}'(\bar{Z}) = 4\text{Re}[\psi'(Z)] \quad (2.41)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - 2i\tau_{xy} = 2[\bar{Z}\psi'(Z) + \chi''(Z)] \quad (2.42)$$

2.3 MODOS GEOMÉTRICOS

Seja uma trinca plana extensa em sua espessura conforme mostrado na Figura 3. A trinca situa-se frontalmente ao eixo z no plano xz. A origem do sistema Oxyz encontra-se no ponto médio do comprimento frontal da trinca. Os três modos básicos ou geométricos de deformação são indicados pelos deslocamentos presentes na superfície da trinca do local do elemento que a contém. A direção das setas indica os deslocamentos na superfície da trinca.

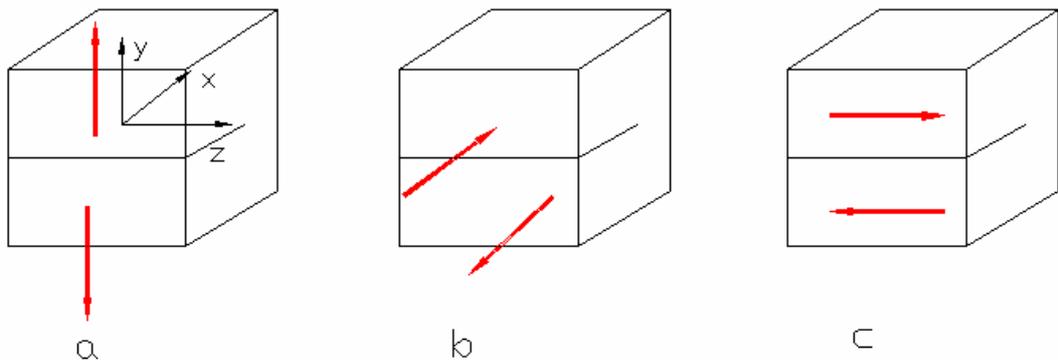


Figura 3 – Modos geométricos: a) Modo I, b) Modo II e c) Modo III.

A superposição dos três modos é suficiente para descrever a maioria dos casos gerais do deslocamento da superfície da trinca. O modo I ou modo geométrico de tração é caracterizado pelo deslocamento simétrico em relação ao plano xz e xy , e os demais deslocamentos nas direções x e z são nulos. O modo II ou cisalhamento plano é caracterizado pelo deslocamento na direção x tangencial da trinca simétrico ao plano xy e simétricas ao escorregamento em relação ao plano xz . Também os deslocamentos na direção x e z são nulos. O modo III ou cisalhamento antiplano é caracterizado pelo deslocamento tangencial na direção z . Os deslocamentos na direção x e y são nulos (Gdoutos, 1993).

Os problemas de trinca em condições de deformação plana são aproximados para o comprimento frontal muito menor que a espessura. A generalização do estado plano é realizada em placas com superfícies com trações livres e a espessura muito menor que o comprimento da trinca.

2.3.1 Principais Técnicas

Diferentes ensaios são utilizados para caracterizar os modos geométricos. A maioria dos ensaios em materiais frágeis recebe a designação pela escolha do corpo de prova. Destacam-se o ensaio Arcan, pois é possível avaliar os modos I e II separadamente ou combinados para materiais isotrópicos. Em avaliação separada destacam-se DCB ou “Double Cantilever Beam” para o modo I. Enquanto, o modo II é destacado pelo teste ENF ou “End Notched Flexure”, CLS ou “Crack Lap Shear” e DCB. Para o modo III destacam-se ECT ou “Edge Crack Torsion”, SCB ou “Split Cantilever Beam” entre outros. Estes métodos são aplicados aos compósitos laminados unidirecionais. Tais métodos destinam-se pela taxa de liberação de energia na frente da trinca.

Os corpos de provas de espessura t e largura l , contendo uma trinca de comprimento a , sujeita a uma carga F perpendicular à trinca constitui a configuração básica dos principais testes dos materiais frágeis pela mecânica da fratura elástica linear. Os módulos de elasticidade transversal e longitudinal são essências para descrever a taxa de liberação crítica de energia de deformação nas diferentes sollicitações.

O teste DCB é usado para obter a taxa de liberação crítica de energia de deformação no modo I de compósitos. A amostra é então carregada pelo equipamento e separada em dois feixes em uma determinada taxa, esta carga crescente, resulta um aumento da deformação das vigas. Em certa carga crítica, a trinca começa a se propagar, resultando em uma ligeira queda

na carga (devido ao aumento comprimento). Neste ponto, as vigas são impedidas de se deslocarem à parte, mantendo assim a deformação constante. A queda da carga (devido ao aumento do comprimento da trinca) e o comprimento da trinca são seguidos cuidadosamente. Após a estabilização da trinca, a amostra é consecutivamente descarregada e depois carregada. Idealmente, o comprimento do dispositivo deve permanecerá o mesmo durante estes dois ciclos, se não houver propagação de trincas. Este procedimento geral é repetido várias vezes, levando à clivagem total da amostra. A Figura 4 ilustra o teste de tração para amostras DCB.

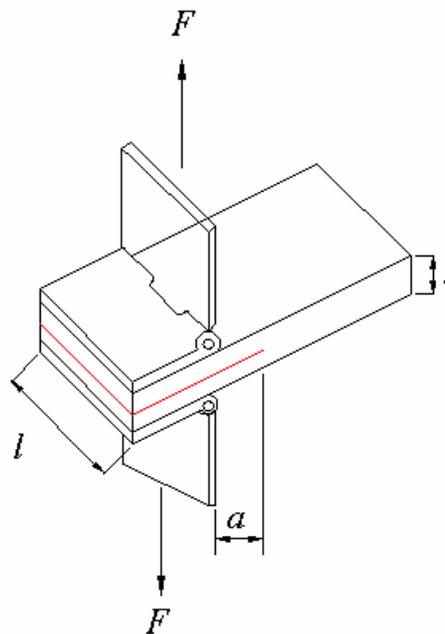


Figura 4 – Corpo de prova DCB.

Um teste de cisalhamento é baseado no fato da força isolante transmitida através da seção entre as duas superfícies produzidas próximas a tensão cisalhante uniforme ao longo da seção. Os principais testes baseados nesta configuração são os ensaios Arcan e o Iosipescu (Isaac e Ishai, 1994).

O ensaio de Arcan foi originalmente proposto para a caracterização do comportamento ao cisalhamento de plásticos por Goldenberg et al. (1958). Estes utilizaram um corpo de prova com a forma em S, dotado de um entalhe cuja forma e a orientação conduzem a um estado de cisalhamento puro na seção transversal do corpo de prova. Mais tarde, o corpo de prova em S foi substituído por corpos de prova “butterfly” ou borboleta colada em garras metálicas, tendo esta solução sido aplicada ao estudo do comportamento ao cisalhamento de compósitos unidirecionais (Oliveira, 2004).

A deformação linear devido ao cisalhamento no centro do corpo de prova é resultado da diferença das deformações mensuradas por um sensor com uma orientação de um ângulo 45° no centro do entalhe.

A configuração básica para o ensaio Arcan é alterada para realização de teste biaxiais, ou seja, avaliação das sollicitações de cisalhamento juntamente com a tração ou compressão dos materiais testados. De maneira que, os modos I e II são avaliados separadamente ou de maneira mista, por meio de um ângulo de carregamento de 0° a 90° . Quando este ângulo assume o valor mínimo a única sollicitação é para o modo I, enquanto o valor máximo representa a sollicitação para o modo II e os ângulos intermediários representam os modos combinados, ilustrado na Figura 5.

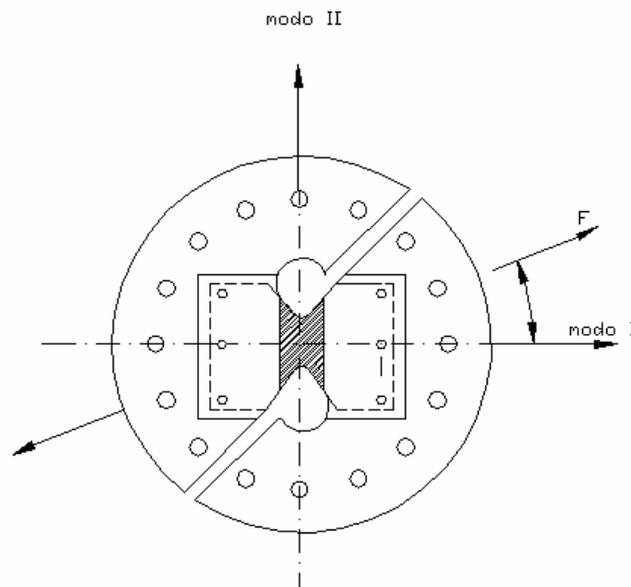


Figura 5 – Corpo de prova Arcan.

Liechti e Hung (1999) usaram o método dos elementos finitos em testes Arcan no campo linear elástico em compósitos unidirecionais. Em particular, estudaram a influência do raio de curvatura do entalhe, do ângulo do entalhe e da orientação das fibras. Tem-se recentemente assistido o interesse crescente por este ensaio para a caracterização do comportamento ao cisalhamento de diferentes materiais, como metálicos, compósitos unidirecionais, espumas metálicas e em estrutura biomecânica como osso.

Sutton et al. (2000) recorreram ao ensaio Arcan para estudar o surgimento e propagação de trincas em modo misto I/II em folhas de liga de alumínio Al 2024-T3 e um aço inoxidável, levando em conta o comportamento plástico desses materiais, e em especial, para a liga de alumínio a sua anisotropia resultante da laminação.

Russell e Street (1982) desenvolveram uma metodologia de tratamento de resultados para o ensaio ENF baseada na teoria de vigas elementar, desprezando a deformação devida ao esforço de corte e a singularidade existente na extremidade da trinca. O teste ENF é usado para obter a taxa de liberação crítica de energia de deformação no modo II em materiais ortotrópicos. O teste ENF consiste em duas vigas coladas de um lado e carregadas por uma força sobre o outro lado. Como não é permitida a abertura normal, este dispositivo permite testar em condições essencialmente modo II. Este ensaio considera os efeitos do atrito entre as faces da trinca e propagação instável da mesma, quando assumir pequenos comprimentos. Este tipo de teste apresenta duas configurações com três pontos ou quatro pontos de aplicação de carga. Designa-se por ENF e 4ENF como a configuração normal com três e quatro pontos de aplicação de carga, respectivamente. A principal vantagem do teste 4ENF sobre ENF é reduzir os efeitos do atrito entre as faces da trinca. As Figuras 6a e 6b ilustram as configurações para teste ENF e 4ENF, respectivamente.

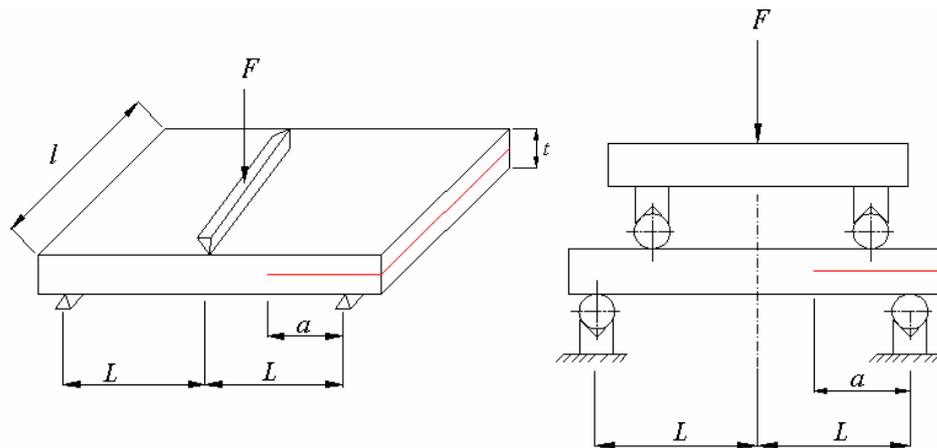


Figura 6 – a) Corpo de prova ENF; b) corpo de prova 4ENF.

O teste MMB pode identificar-se como uma combinação dos ensaios DCB e ENF, de maneira que, o teste MMB é teste de modo misto (Modo I + Modo II). A Figura 7 ilustra a configuração. Denomina-se por MMB como “Mixed Mode Bending” ou por ensaio de flexão em modo misto.

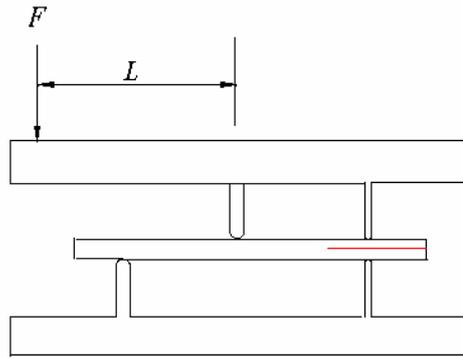


Figura 7 – Corpo de prova MMB.

Diferentes configurações são utilizadas para avaliação do terceiro modo III em materiais frágeis e dúcteis. Basicamente o corpo de prova é colado em lâminas de compósitos entre duas barras alumínio conforme ilustrado na Figura 8. Estas barras são carregadas na direção paralela ao plano da trinca e normal ao eixo da viga. Para o caso do teste para o corpo de prova tipo DCB em modo I, através de carregamentos pontuais repentinos pela extensão da trinca, causando algumas trincas de comprimento indeterminado correspondendo ao carregamento crítico.

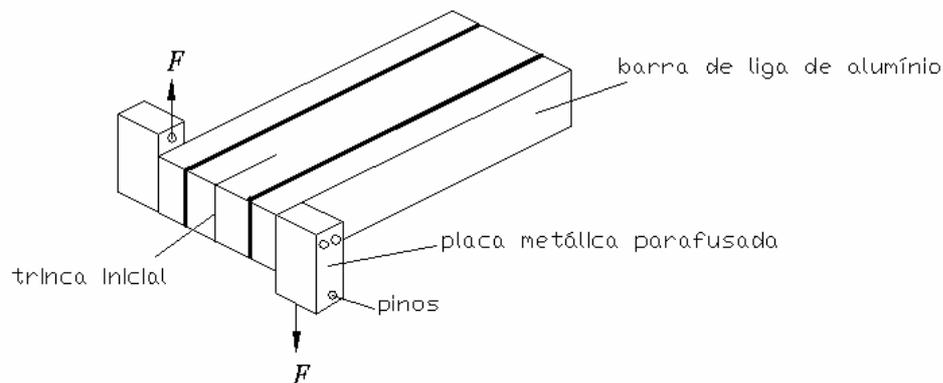


Figura 8 – Corpo de prova SCB.

O teste designado por “Brazilian Disk” é esquematizado na Figura 9. O corpo de prova tem a forma de um disco submetido à compressão através de seu diâmetro. Trata-se de um ensaio simples e estável, utilizando o deslocamento diametral, perpendicular ao eixo do carregamento. A propagação de trincas inicia-se quando a máxima carga é atingida, de maneira que, o processo de fratura do corpo de prova também é iniciado. O comprimento da trinca é determinado pelos ciclos de carregamento e descarregamento. Outras variações do

método brasileiro surgiram como FDT ou “Flattened Brazilian Disk Test”, CSCBD ou “Central Straigh-through Cracked Brazilian Disk”, SECBD ou “Single Edge Crack Brazilian Disk in Diametral Compression” e outros (Alvarez, 2004).

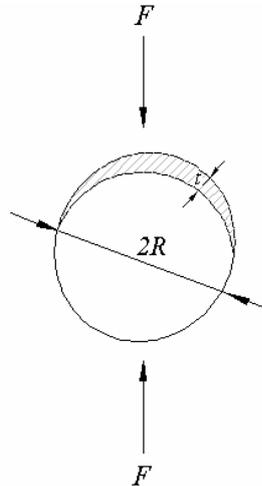


Figura 9 – Corpo de prova disco brasileiro.

Testes SECBD foi proposto por Szendi-Horvath (1980-1982) com objetivo de determinar a tenacidade à fratura de materiais frágeis. A trinca é iniciada pela tensão de tração transversal resultante da compressão diametral. Shetty et al. (1986) mediram o modo II e o modo misto I/II orientando a trinca com um determinado ângulo em relação à carga diametral de também materiais frágeis. Testes de FDT proposto por Wang e Xing (1999) consistem em realizar no disco do ensaio brasileiro dois aplainamentos paralelos de igual largura sem necessidade de realizar qualquer tipo de entalhe, facilitando o carregamento no disco.

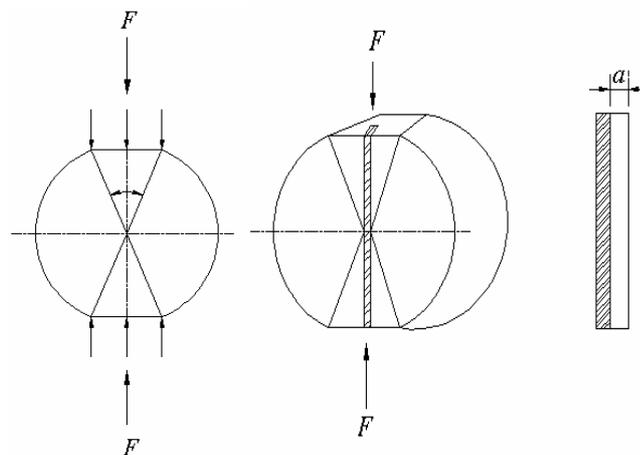


Figura 10 – a) Corpo de prova FDT; b) Corpo de prova SECBD.

Lee (1993) apresentou o corpo de prova ECT para determinar a taxa de liberação crítica de energia de deformação para materiais frágeis em cisalhamento antiplano. Este ensaio apresenta melhores resultados em comparação com o ensaio SCB em relação ao modo II. O ensaio original ECT original consiste de um quadro de carga através do qual o corpo de prova foi posicionado entre os três pinos de apoio, e a carga foi aplicada através de um quarto pino. Durante este teste ECT, a carga é aplicada no centro do feixe de carga, na direção indicada na Figura 11.

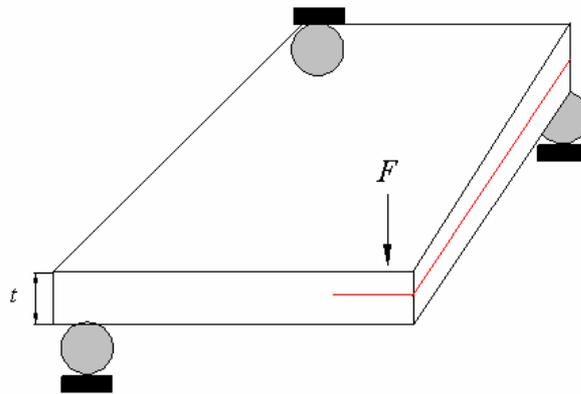


Figura 11 – Corpo de prova ECT.

2.4 FATOR INTENSIDADE DE TENSÃO

A eventual modificação da teoria de Griffith (1921 apud Callister Jr, 2002) resulta os termos chamados de fator intensidade de tensão e tenacidade à fratura. Os fatores intensidade de tensão e tenacidade à fratura substituem a taxa de energia de deformação. O fator intensidade de tensão e tenacidade à fratura de deformação plana estão inter-relacionados no mesmo sentido que o relacionamento entre tensão de escoamento e resistência ao escoamento.

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.43)$$

A equação (2.44) representa a tenacidade à fratura em tensão plana, enquanto a equação (2.45) representa o mesmo fator K_c em deformação plana.

$$K_c = \sqrt{EG_c} \quad (2.44)$$

$$K_c = \sqrt{\frac{EG_c}{1-\nu^2}} \quad (2.45)$$

Representa-se K como o fator intensidade de tensão, K_c é a tenacidade à fratura, ν é o coeficiente de Poisson e G_c é a taxa de energia de deformação pelo crescimento de trinca. Isto é importante para o reconhecimento para os diferentes valores do parâmetro K_c em deformação plana e tensão plana.

O fator intensidade de tensão, K , é fundamental para avaliar o comportamento da distribuição de tensão próximo à ponta da trinca. O fator intensidade de tensão depende da geometria e condições de carregamento assumem a seguinte expressão geral em função destes parâmetros. Representa-se por $f(a/w)$ o parâmetro que relaciona a geometria e condições de carregamento.

$$K_M = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f(a/w), \quad M = I, II, III \quad (2.46)$$

A fratura ocorre quando $K \geq K_c$. Para o caso especial de deformação plana, K_c torna-se K_{IC} e é uma propriedade mecânica do material.

A escolha do método para determinar K depende do tempo de avaliação, custo e a frequência. A solução exata é limitada e possivelmente determinada. Para estes casos o uso de métodos numéricos torna-se necessário. O uso de técnicas experimentais é limitado para materiais específicos.

A Figura 12 ilustra as principais técnicas para o fator intensidade de tensão. Métodos analíticos são utilizados para descrever o comportamento do fator intensidade de tensão para entalhes hiperbólicos e em V em cisalhamento plano e antiplano nos capítulos 4 e 5. O uso de funções complexas e o fator de concentração de tensão são as técnicas analíticas avaliar estes entalhes em modos II e III.

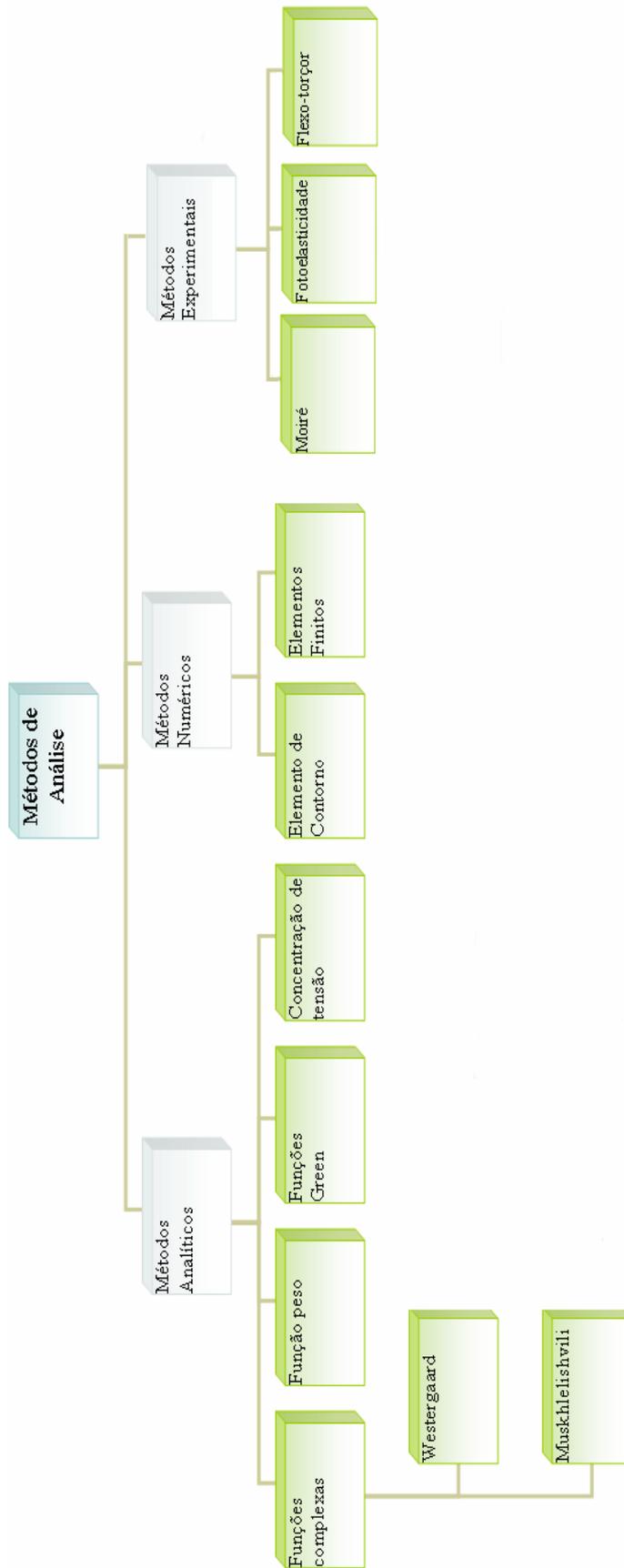


Figura 12 – Principais técnicas para o fator intensidade de tensão.

Capítulo 3

ENTALHES

Neste capítulo apresenta-se a introdução da formulação do entalhe pela MFEL, sendo base para os capítulos posteriores. Definir o campo de atuação de trincas e entalhes é importante para obtenção da distribuição de tensão para os mesmos em diferentes solicitações.

3.1 CONFIGURAÇÃO BÁSICA

Antigamente, entalhe referia-se como o resultado do trabalho de talhar ou cortar madeira ou mármore. Estendendo este conceito pela engenharia, define-se entalhe como um termo genérico e refere-se a qualquer contorno geométrico que interrompa um fluxo de força. Neste contexto, destacam-se ranhuras, chanfros, furos, mudanças abruptas na seção transversal ou qualquer interrupção em contornos lisos. As geometrias mais comuns dos entalhes são circunferenciais, U e V. As geometrias circunferenciais que destacam são elipse, hipérbole, parabólicos e circulares.

Neuber (1958) é a referência para a avaliação da distribuição da tensão na vizinhança dos entalhes. Os principais parâmetros geométricos dos entalhes são o raio de curvatura ρ , a profundidade a_p e ângulo de abertura 2α . Neuber (1958) definiu a seguinte relação para o

raio de curvatura ρ , quando φ é o ângulo da curva tangente em direção fixa e ∂s é o contorno (elemento linha) da curva que descreve a geometria do entalhe.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \quad (3.1)$$

Seja o mesmo ângulo φ formado pela distância entre a direção u e o eixo x e ao mesmo tempo é tangente em linhas de v constante. Também este designa a distância entre a direção v com o eixo y e tangente para linhas de u constante. Tem-se h como o módulo da transformação da relação entre função escalar de uma função complexa cartesiana em uma função complexa curvilínea. Fisicamente h é a distância linear entre as coordenadas de linhas sucessivas e o novo sistema por unidade de comprimento do plano x - y . Designa os índices subscritos u e v pelas respectivas distâncias entre os eixos x e y (Dugdale, 1968).

A Figura 13b representa de maneira genérica os sistemas de coordenadas cartesianas e curvilíneas.

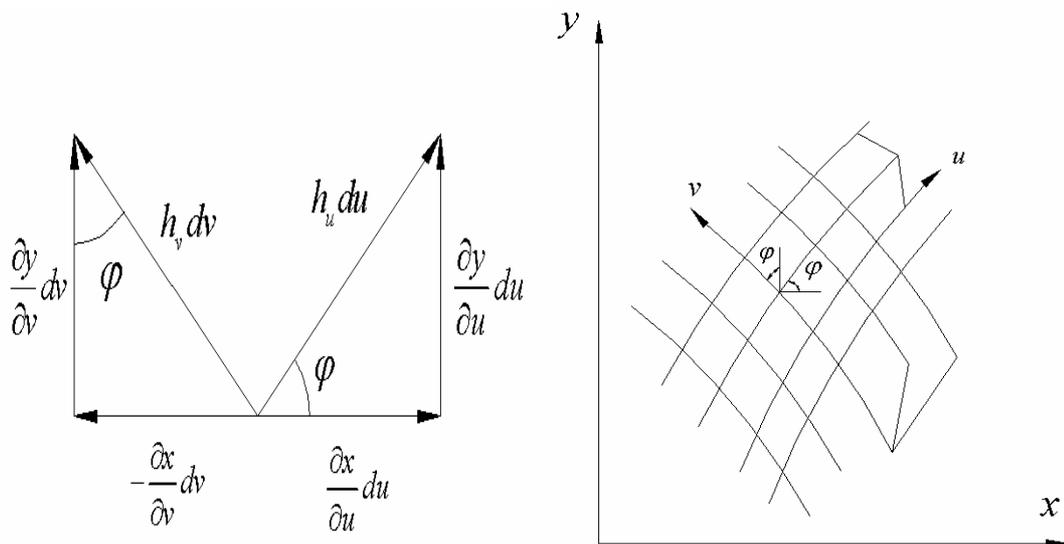


Figura 13– a) Projeção dos elementos $h_v dv$ e $h_u du$; b) Representação de coordenadas.

Por meio da Figura 13a, facilmente estabelece relações trigonométricas fundamentais. Tais relações resultam de linhas de coordenadas curvilíneas u e v constantes no plano x - y , resultando as projeções ortogonais.

$$\cos \varphi = \frac{1}{h_u} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{h_v} \frac{\partial y}{\partial v} \quad (3.2)$$

$$\text{sen } \varphi = -\frac{1}{h_v} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial y}{\partial u} \quad (3.3)$$

A obtenção das derivadas parciais das funções cartesianas em coordenadas curvilíneas ocorre por meio das equações (3.2) e (3.3).

$$\frac{\partial x}{\partial u} = h_u \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = h_u \text{sen } \varphi \quad (3.4a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -h_v \text{sen } \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = h_v \cos \varphi \quad (3.4b)$$

A equação fundamental da trigonometria é aplicada duas vezes e determina expressões para h_u e h_v .

$$\text{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 = 1 \quad (3.5a)$$

$$\text{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \left(-\frac{1}{h_v} \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{1}{h_v} \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 = 1 \quad (3.5b)$$

Logo,

$$h_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2} \quad (3.6)$$

$$h_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2} \quad (3.7)$$

Os módulos de transformação h_u e h_v tornam simultaneamente iguais, quando $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ implicar em:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \pm \frac{\partial y}{\partial v} \quad (3.8a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \pm \frac{\partial y}{\partial v} \quad (3.8b)$$

Quando tais condições são satisfeitas, os índices u e v são omitidos. De maneira que, o módulo de transformação h é relação à função complexa cartesiana em uma função complexa curvilínea.

$$h_u = h_v = h \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_u} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left| \frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial h_v}{\partial u} \right|_{\substack{v=v_0 \\ u=u_0}} = \left| \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\substack{v=v_0 \\ u=u_0}} \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{h_v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left| \frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} \right|_{\substack{v=v_0 \\ u=0}} = \left| \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial v} \right|_{\substack{v=v_0 \\ u=0}} \quad (3.11)$$

O raio de curvatura do entalhe é resultado das diferentes condições de contorno e quando uma das coordenadas curvilíneas é constante. De maneira que, o raio de curvatura do entalhe pode ser expresso quando a coordenada u é constante ou v é constante. A configuração geométrica desenvolvida por Neuber (1958) é apresentada na Figura 14.

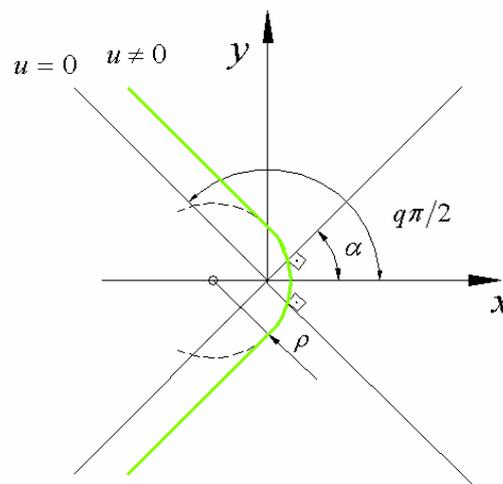


Figura 14 – Entalhe curvilíneo genérico de Neuber.

Outro parâmetro significativo é designado como severidade do entalhe. Este por sua vez, é o ângulo suplementar do ângulo de abertura 2α em radianos conforme a Figura 14. Este parâmetro reflete o comportamento da mecânica da fratura pela geometria do entalhe. Como a severidade assume os valores $q=2$ o contorno representa uma trinca, enquanto, $q=1$ representa à ausência do entalhe.

$$q = \frac{2\pi - 2\alpha}{\pi} = \frac{2\gamma}{\pi} \quad (3.12)$$

Posteriormente, Lazzarin et al. (1996) descrevem esta configuração para as tensões em coordenadas polares. A variável complexa ω é escrita pelas as coordenadas curvilíneas u e v , de maneira que, é possível expressar em coordenadas cartesianas x e y por meio desta relação. Tal relação é fundamental para expressar as diferentes funções complexas na descrição da distribuição de tensão na vizinhança do entalhe, como por exemplo, a função $F(Z)$ da equação (3.14).

$$\omega = u + iv = f(x + iy) \quad (3.13)$$

$$F(Z) = \omega^q = (u + iv)^q \quad (3.14)$$

O perfil torna-se simétrico pela simultaneidade de $y=0$ e $v=0$ e pela simetria do eixo x . Resultando as seguintes relações para a coordenada curvilínea u e o módulo de transformação h .

$$x = u^q \Rightarrow u = x^{\frac{1}{q}} \quad (3.15)$$

$$h = \frac{\partial x}{\partial u} = qu^{q-1} \quad (3.16)$$

Esta condição pela equação (3.16) resultará em uma expressão para a distância r_0 entre a origem do sistema de coordenadas e a ponta do entalhe que depende do ângulo de abertura do entalhe 2α , o raio de curvatura ρ . O parâmetro definido por Neuber (1958), o raio de

curvatura ρ , é especificado para um ponto geométrico fixo $u = u_0$ e pela severidade do entalhe q .

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial u} \right)_{u=u_0} = \frac{q-1}{q} u_0^{-q} = \frac{q-1}{qx_0} = \frac{q-1}{qr_0} \quad (3.17)$$

3.2 COMPORTAMENTO DOS ENTALHES

A resistência de sólidos com entalhes, normalmente não são avaliados através MFEL, mas introduzindo modificações na MFEL podem-se avaliar as resistências quando se trata de entalhes de geometria U e V. Uma modificação é a introdução de uma constante do material, designada por comprimento característico ℓ_{ch} , a partir do trabalho desenvolvido por Griffith (1921 apud Callister Jr, 2002) e Irwin (1957 apud Gdoutos, 1993).

Aplicando o conceito da mecânica frágil desenvolvida por Griffith (1921 apud Callister, 2002) e Irwin (1957 apud Gdoutos, 1993), qual é à base da mecânica da fratura linear elástica, a variação da energia da deformação do acréscimo no tamanho da trinca não infinitesimal Δa pela unidade de espessura.

$$\Delta G_{cd} = \int_a^{a+\Delta a} \frac{\sigma^2 \pi a}{E} da = \frac{\sigma^2 \pi}{2E} (2a\Delta a + \Delta a^2) \quad (3.28)$$

A substituição da variação de energia de deformação pelo conceito do fator de intensidade de tensão e pela densidade de energia crítica introduzida por Griffith G_c . Resultará na expressão para a tensão de falha, σ_f :

$$\sigma_f = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi \left(a + \frac{\Delta a}{2} \right)}} = \sqrt{\frac{G_c E'}{\pi \left(a + \frac{\Delta a}{2} \right)}} \quad (3.19)$$

Aqui E' assume o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young E em condição de tensão plana e $E/(1-\nu)$ em deformação plana. O coeficiente de Poisson é designado por ν . A tenacidade à fratura é o mais popular parâmetro de fratura, normalmente, utilizado para calcular a confiabilidade estrutural.

Também, ao considerar que $a \rightarrow 0$ a tensão de fratura poderá assumir um valor inferior ao previsto pela MFEL de valor não constante. Esta tensão poderá alcançar ou não a tensão de resistência para uma amostra ausente de trinca, a qual corresponde à tensão última determinada por ensaios experimentais, também denominada de tensão UTS (“ultimate tensile strength”). A partir dessas considerações tem-se:

$$\sigma_{UTS} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi(\Delta a/2)}} \quad (3.20)$$

$$\ell_{ch} = \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_{UTS}} \right)^2 \quad (3.21)$$

Nota-se que o comprimento de trinca decresce a tensão de fratura e esta tensão tende para o valor UTS, no caso de solicitação lenta e gradual. No caso de solicitação cíclica o valor da tensão limite de resistência à fadiga (“endurance stress”), o comprimento característico assume a condição $\ell_{ch} = \pi(\Delta a/2)$, ou seja, Δa tem o mesmo significado que ℓ_{ch} . Este procedimento de cálculo foi chamado de mecânica de fratura finita - MFF por Taylor et al. (2005).

A fronteira entre as categorias é mostrada esquematicamente na Figura 15. Na região A encontram-se os entalhes designados como “blunt notches”, a região B as trincas que emanam de entalhes e C encontram-se os pequenos entalhes.

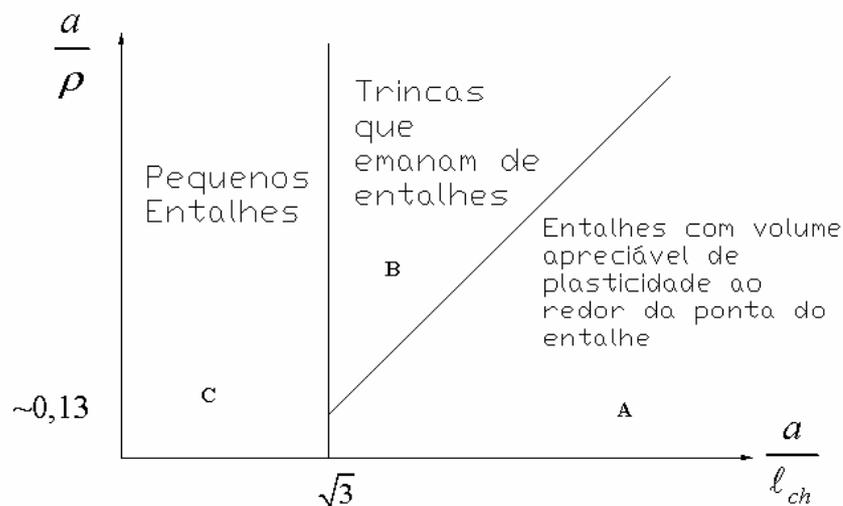


Figura 15 – O comportamento dos entalhes.

A fronteira entre os chamados entalhes de pequena dimensão e trincas que emanam de entalhes ocorre aproximadamente para $a/\ell_{ch}=3$, valor não preciso e pode ser afetado, por exemplo, o valor de a pode ser efetivamente aumentado sem que ocorra propagação de trinca. Para um entalhe semicircular o fator de concentração de tensão é da ordem de três e a razão $a/\ell_{ch}=9$. Estes valores situam-se na região de trincas que emanam de entalhes. Para valores de a/ρ como valor menor ou igual a 0,13 e a/ℓ_{ch} com valor superior três, encontram-se entalhes denominados “blunt notches”.

Ao considerar o comportamento linear elástico e entalhes - V em amostras feitas de aço, alumínio, PMMA (polimetil-metacrilato) e PVC (cloreto de polivinila), Gómez et al. (2003) avaliaram um fator denominado NSIF (“notch stress intensity factor”) designado por K_I^V . O fator K_I^V para entalhe em V, quando escrito na forma K_I^U considera-se o entalhe em U. Ao considerar entalhes em V, diferentes valores do ângulo e o raio na raiz do entalhe sob carregamento lento e gradual devem ser analisados. Recentes estudos em amostras de Duralumínio e PMMA foram conduzidos por Carpinteri (1987); Seweryn (1994); Seweryn et al. (1997); Dunn et al. (1997). Amostras de aços submetidas em testes de fadiga com aplicação em elementos estruturais e uniões soldadas foram conduzidas por Lazzarin et al. (2001); Lazzarin et al. (2003 – 2004); Livieri et al. (2005). Resultado teórico-experimental para Alumina (7% “zirconia”) foi exaustivamente estudado por Yosibash et al. (2004).

3.3 ENTALHES PARA OS MODOS GEOMÉTRICOS I E II

Os entalhes elípticos ou semi-elípticos, circulares ou semicirculares induzem os entalhes em U sejam definidos a partir de entalhes em V, e o método estende-se também aos componentes fragilizados pelos diferentes tipos de entalhes (Filippi et al., 2003).

A configuração básica a partir de Neuber (1958), conforme a Figura 14 de um entalhe semiplano infinito (u,v) é agora substituído pela configuração em coordenadas polares. O sistema de referência polar para os parâmetros das tensões está expresso na Figura 16. Os parâmetros r_0 , ρ e q são os mesmos obtidos anteriormente nas equações (3.17) e (3.12).

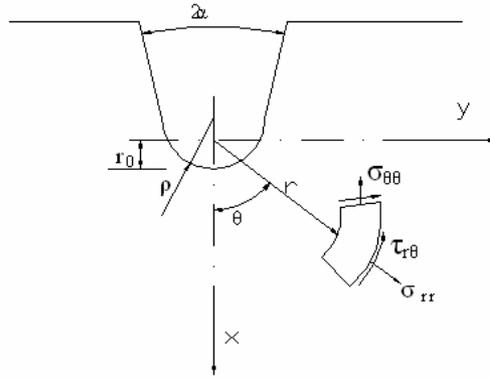


Figura 16 – Sistema polar de referência.

A expressão genérica da distribuição de tensão para este tipo de entalhe em coordenadas polares é:

$$\sigma_{ij}^I = C \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1-\lambda} \left[f_{ij}(\theta, \alpha) + \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\mu-\lambda} g_{ij}(\theta, \alpha) \right] \quad (3.22)$$

Os parâmetros r_0 , r , α e θ são parâmetros geométricos conforme Figura 16, enquanto σ_{\max} é mensurado por ensaios mecânicos. Por sua vez, o parâmetro C é obtido por todos os parâmetros que compõem as funções angulares f_{ij} e g_{ij} para cada modo geométrico. Reescrevendo esta equação pela substituição dos índices i e j pelas coordenadas polares r e θ , resultarão as tensões:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(M)} = \left[C \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1-\lambda} \right]^{(M)} \left[\begin{Bmatrix} f_{\theta\theta} \\ f_{rr} \\ f_{r\theta} \end{Bmatrix} + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\mu-\lambda} \begin{Bmatrix} g_{\theta\theta} \\ g_{rr} \\ g_{r\theta} \end{Bmatrix} \right]^{(M)} \quad (3.23)$$

A distinção entre os modos I e II é designada pelos sobrescritos de todos os parâmetros envolvidos na distribuição da tensão. O sobrescrito em parenteses (M) designa a expressão genérica para os modos geométricos I e II em algarismo romano respectivamente. As funções angulares f_{ij} e g_{ij} para cada modo geométrico têm seus parâmetros subscrito por números cardinais 1 e 2, respectivamente para os modos I e II.

As funções angulares f_{ij} e g_{ij} são dadas para o modo I por:

$$\begin{Bmatrix} f_{\theta\theta} \\ f_{rr} \\ f_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(I)} = \left[\begin{Bmatrix} (1+\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta \\ (3-\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta \\ (1-\lambda_1)\sin(1-\lambda_1)\theta \end{Bmatrix} + \chi_{b1}(1-\lambda_1) \begin{Bmatrix} \cos(1+\lambda_1)\theta \\ -\cos(1+\lambda_1)\theta \\ \sin(1+\lambda_1)\theta \end{Bmatrix} \right]^{(I)} \quad (3.24a)$$

$$\begin{Bmatrix} g_{\theta\theta} \\ g_{r\theta} \\ g_{\theta\theta} \end{Bmatrix}^{(I)} = \frac{q}{4(q-1)} \left(\chi_{c1} \begin{Bmatrix} (1+\mu_1)\cos(1-\mu_1)\theta \\ (3-\mu_1)\cos(1-\mu_1)\theta \\ (1-\mu_1)\sin(1-\mu_1)\theta \end{Bmatrix} + \chi_{d1} \begin{Bmatrix} \cos(1+\mu_1)\theta \\ -\cos(1+\mu_1)\theta \\ \sin(1+\mu_1)\theta \end{Bmatrix} \right)^{(I)} \quad (3.24b)$$

As funções angulares f_{ij} e g_{ij} são dadas para o modo II por:

$$\begin{Bmatrix} f_{\theta\theta} \\ f_{rr} \\ f_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(II)} = \left[\begin{Bmatrix} (1+\lambda_2)\sin(1-\lambda_2)\theta \\ (3-\lambda_2)\sin(1-\lambda_2)\theta \\ (1-\lambda_2)\cos(1-\lambda_2)\theta \end{Bmatrix} + \chi_{b2}(1+\lambda_2) \begin{Bmatrix} \sin(1+\lambda_2)\theta \\ -\sin(1+\lambda_2)\theta \\ \cos(1+\lambda_2)\theta \end{Bmatrix} \right]^{(II)} \quad (3.25a)$$

$$\begin{Bmatrix} g_{\theta\theta} \\ g_{r\theta} \\ g_{\theta\theta} \end{Bmatrix}^{(II)} = \frac{1}{4(\mu_2-1)} \left(\chi_{d2} \begin{Bmatrix} (1+\mu_2)\sin(1-\mu_2)\theta \\ (3-\mu_2)\sin(1-\mu_2)\theta \\ (1-\mu_2)\sin(1-\mu_2)\theta \end{Bmatrix} + \chi_{c2} \begin{Bmatrix} -\sin(1+\mu_2)\theta \\ \sin(1+\mu_2)\theta \\ -\cos(1+\mu_2)\theta \end{Bmatrix} \right)^{(II)} \quad (3.25b)$$

Em condição de deformação plana, f_{ij} e g_{ij} , são relacionados pela expressão através do coeficiente de Poisson:

$$f_{zz}(\theta)^{(M)} = \nu [f_{\theta\theta}(\theta) + f_{rr}(\theta)]^{(M)} \quad (3.26)$$

A substituição do parâmetro C e das funções angulares f_{ij} e g_{ij} para cada modo geométrico corresponde à expressão de Filippi et al. (2002). Este parâmetro C é função do fator de intensidade de tensão para o modo em questão, através das constantes a_1 e a_2 e dos coeficientes assintóticos λ_1 e λ_2 para os respectivos modos I e II.

Distribuição de tensão para o modo I:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(I)} = \lambda_1 r^{\lambda_1-1} a_1 \left[\begin{Bmatrix} (1+\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta \\ (3-\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta \\ (1-\lambda_1)\sin(1-\lambda_1)\theta \end{Bmatrix} + \chi_{b1}(1-\lambda_1) \begin{Bmatrix} \cos(1+\lambda_1)\theta \\ -\cos(1+\lambda_1)\theta \\ \sin(1+\lambda_1)\theta \end{Bmatrix} \right. \\ \left. + \frac{q}{4(q-1)} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1-\lambda_1} \left(\chi_{c1} \begin{Bmatrix} (1+\mu_1)\cos(1-\mu_1)\theta \\ (3-\mu_1)\cos(1-\mu_1)\theta \\ (1-\mu_1)\sin(1-\mu_1)\theta \end{Bmatrix} + \chi_{d1} \begin{Bmatrix} \cos(1+\mu_1)\theta \\ -\cos(1+\mu_1)\theta \\ \sin(1+\mu_1)\theta \end{Bmatrix} \right) \right] \quad (3.27)$$

Distribuição de tensão para o modo II:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(II)} = \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (1+\lambda_2) \operatorname{sen}(1-\lambda_2)\theta \\ (3-\lambda_2) \operatorname{sen}(1-\lambda_2)\theta \\ (1-\lambda_2) \cos(1-\lambda_2)\theta \end{array} \right\} + \chi_{b2} (1+\lambda_2) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(1+\lambda_2)\theta \\ -\operatorname{sen}(1+\lambda_2)\theta \\ \cos(1+\lambda_2)\theta \end{array} \right\} \\ + \frac{1}{4(\mu_2-1)} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\mu_2-\lambda_2} \left(\chi_{d2} \left\{ \begin{array}{l} (1+\mu_2) \operatorname{sen}(1-\mu_2)\theta \\ (3-\mu_2) \operatorname{sen}(1-\mu_2)\theta \\ (1-\mu_2) \operatorname{sen}(1-\mu_2)\theta \end{array} \right\} + \chi_{c2} \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{sen}(1+\mu_2)\theta \\ \operatorname{sen}(1+\mu_2)\theta \\ -\cos(1+\mu_2)\theta \end{array} \right\} \right) \end{array} \right] \quad (3.28)$$

Os parâmetros que compõem as funções angulares f_{ij} e g_{ij} são apresentados e avaliados para os modos geométricos I e II com maiores detalhes no quarto capítulo. A avaliação de entalhes no terceiro modo geométrico ocorre de maneira separada dos demais modos no capítulo 5.

Capítulo 4

PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO PARA OS MODOS GEOMÉTRICOS I E II

Neste capítulo os principais parâmetros que compõem a distribuição de tensão para os modos geométricos I e II são demonstrados. Estes parâmetros são importantes para a obtenção do principal parâmetro da MFEL, o fator de intensidade de tensão para estes modos I e II. O segundo modo geométrico é também detalhado por procedimentos experimentais e teóricos.

4.1 CONFIGURAÇÃO BÁSICA

A distribuição de tensão em torno de entalhes em modos geométricos I e II é resultado da análise do potencial complexo. O método de Muskhelishvili (1953 apud Meguid, 1989) é aprimorado por Lazzarin et al. (1996) para placas com entalhes curvilíneos simétricos. As funções potenciais analíticas para tensão-deformação plana são $\chi(Z)$ e $\psi(Z)$.

$$\chi(Z) = (a_1 + ia_2)Z^\lambda + (d_1 + id_2)Z^\mu \qquad \psi(Z) = (b_1 + ib_2)Z^\lambda + (c_1 + ic_2)Z^\mu \qquad (4.1)$$

Os expoentes λ e μ são reais e $\lambda > \mu$. O expoente λ é designado por coeficiente assintótico subscrito dos índices I e II para os respectivos modos geométricos. Os coeficientes assintóticos λ_1 e λ_2 são determinados por Williams (1952 apud Barber, 1992). A distribuição de tensão na vizinhança do entalhe ocorre pelo o uso de coordenadas polares e curvilíneas.

As relações entre as σ_{uu} , σ_{vv} e τ_{uv} com as tensões σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ e $\tau_{r\theta}$ são feitas pela análise de um pequeno elemento prismático triangular. O ângulo entre as direções principais do sistema polar com o sistema curvilíneo é $(-\theta/q)$. Seja a representação do sistema de coordenadas polares e curvilíneas expressa na Figura 17 para as tensões σ_{uu} e τ_{uv} . A representação da tensão σ_v é análoga à Figura 17, mas pela substituição $(-\theta/q)$ por $(-\theta/q) + (\pi/2)$. Outra representação para a mudança de sistema de coordenadas é feita pelo o tensor tensão e dos cosenos diretores pela imposição do sistema local de rotação.

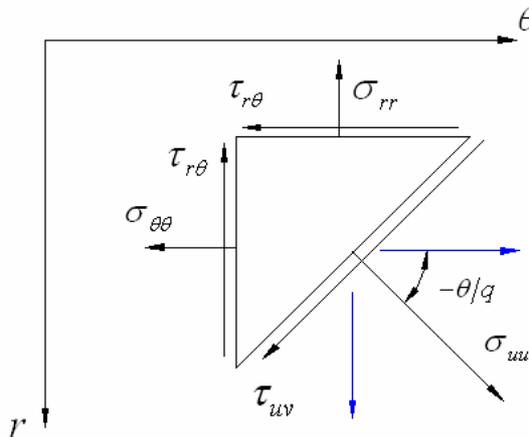


Figura 17 – Transformação bidimensional das tensões σ_{uu} e τ_{uv} .

$$\begin{bmatrix} \sigma_{uu} & \tau_{uv} \\ \tau_{uv} & \sigma_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta/q) & \sin(-\theta/q) \\ -\sin(-\theta/q) & \cos(-\theta/q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\theta/q) & -\sin(-\theta/q) \\ \sin(-\theta/q) & \cos(-\theta/q) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

As formas mais generalizadas são:

$$\tau_{uv} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \frac{2\theta}{q} + \tau_{r\theta} \cos \frac{2\theta}{q} \quad (4.3)$$

$$\sigma_{vv} = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \cos \frac{2\theta}{q} + \tau_{r\theta} \sin \frac{2\theta}{q} \quad (4.4)$$

$$\sigma_{uu} = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \cos \frac{2\theta}{q} - \tau_{r\theta} \operatorname{sen} \frac{2\theta}{q} \quad (4.5)$$

Conhecidas as expressões para σ_{uu} , σ_{vv} e τ_{uv} em coordenadas polares. É necessário determinar as tensões σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ e $\tau_{r\theta}$ em termos dos potenciais complexos. A função tensão complexa de Muskhelishvili (1953 apud Meguid, 1989) aborda a possibilidade de escrever a função tensão de Airy (1863 apud Meguid, 1989) ser escrita em termos de duas funções complexas. Através das duas equações encontram-se as expressões para as tensões σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ e $\tau_{r\theta}$.

$$\sigma_{rr} + i\tau_{r\theta} = \phi'(Z) + \overline{\phi'(Z)} - \overline{Z\phi''(Z)} - \overline{ZZ^{-1}\psi'(Z)} \quad (4.6)$$

$$\sigma_{\theta\theta} - i\tau_{r\theta} = \phi'(Z) + \overline{\phi'(Z)} + \overline{Z\phi''(Z)} + \overline{ZZ^{-1}\psi'(Z)} \quad (4.7)$$

A separação de termos reais e imaginários das expressões (4.6) e (4.7) resultam nas tensões σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ e $\tau_{r\theta}$. As tensões são escritas de maneira ampla, devido à decomposição das constantes a, b, c, e d em termos reais e imaginários. A decomposição das constantes complexas em termos reais e imaginários é feita pela distinção dos índices 1 e 2 para os respectivos termos.

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda r^{\lambda-1} [a_1(1+\lambda)\cos(1-\lambda)\theta + b_1\cos(1+\lambda)\theta + a_2(1+\lambda)\operatorname{sen}(1-\lambda)\theta - b_2\operatorname{sen}(1+\lambda)\theta] + \mu r^{\mu-1} [d_1(1+\mu)\cos(1-\mu)\theta + c_1\cos(1+\mu)\theta + d_2(1+\mu)\operatorname{sen}(1-\mu)\theta - c_2\operatorname{sen}(1+\mu)\theta] \quad (4.8)$$

$$\sigma_{rr} = \lambda r^{\lambda-1} [a_1(3-\lambda)\cos(1-\lambda)\theta - b_1\cos(1+\lambda)\theta + a_2(3-\lambda)\operatorname{sen}(1-\lambda)\theta + b_2\operatorname{sen}(1+\lambda)\theta] + \mu r^{\mu-1} [d_1(3-\mu)\cos(1-\mu)\theta - c_1\cos(1+\mu)\theta + d_2(3-\mu)\operatorname{sen}(1-\mu)\theta + c_2\operatorname{sen}(1+\mu)\theta] \quad (4.9)$$

$$\tau_{r\theta} = \lambda r^{\lambda-1} [a_1(1-\lambda)\operatorname{sen}(1-\lambda)\theta + b_1\operatorname{sen}(1+\lambda)\theta - a_2(1-\lambda)\cos(1-\lambda)\theta + b_2\cos(1+\lambda)\theta] + \mu r^{\mu-1} [d_1(1-\mu)\operatorname{sen}(1-\mu)\theta + c_1\operatorname{sen}(1+\mu)\theta - d_2(1-\mu)\cos(1-\mu)\theta + c_2\cos(1+\mu)\theta] \quad (4.10)$$

As tensões polares obtidas em função dos mesmos parâmetros das funções potenciais complexas são essenciais para determinar as mesmas tensões em coordenadas curvilíneas. As

condições de contorno são requeridas para determinar os quatros parâmetros em função dos expoentes λ e μ .

$$\begin{aligned} \sigma_{uu} = & \lambda r^{\lambda-1} [a_1 (\lambda-1) \cos((1-\lambda)\theta - 2\theta/q) + b_1 \cos((1+\lambda)\theta + 2\theta/q) + 2a_1 \cos(1-\lambda)\theta] + \\ & \lambda r^{\lambda-1} [2a_2 \sin(1-\lambda)\theta + a_2 (\lambda-1) \sin((1-\lambda)\theta - 2\theta/q) - b_2 \cos((1+\lambda)\theta + 2\theta/q)] + \\ & \mu r^{\mu-1} [d_1 (\mu-1) \cos((1-\mu)\theta - 2\theta/q) + c_1 \cos((1+\mu)\theta + 2\theta/q) + 2d_1 \cos(1-\mu)\theta] + \\ & \mu r^{\mu-1} [d_2 (\mu-1) \sin((1-\mu)\theta - 2\theta/q) - c_2 \cos((1+\mu)\theta + 2\theta/q) + 2d_2 \sin(1-\mu)\theta] \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{vv} = & \lambda r^{\lambda-1} [a_1 (1-\lambda) \cos((1-\lambda)\theta - 2\theta/q) + b_1 \cos((1+\lambda)\theta + 2\theta/q) + 2a_2 \sin(1-\lambda)\theta] + \\ & \lambda r^{\lambda-1} [a_2 (1-\lambda) \sin((1-\lambda)\theta + 2\theta/q) - b_2 \sin((1+\lambda)\theta - 2\theta/q) + 2a_1 \cos(1-\lambda)\theta] + \\ & \mu r^{\mu-1} [d_1 (1-\mu) \cos((1-\mu)\theta - 2\theta/q) + c_1 \cos((1+\mu)\theta + 2\theta/q) + 2d_1 \cos(1-\mu)\theta] + \\ & \mu r^{\mu-1} [d_2 (1-\mu) \sin((1-\mu)\theta + 2\theta/q) - c_2 \sin((1+\mu)\theta - 2\theta/q) + 2d_2 \sin(1-\mu)\theta] \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{uv} = & \lambda r^{\lambda-1} [-a_1 (\lambda-1) \sin((1-\lambda)\theta - 2\theta/q) + b_1 \sin((1+\lambda)\theta - 2\theta/q)] + \\ & \lambda r^{\lambda-1} [a_2 (\lambda-1) \cos((1-\lambda)\theta - 2\theta/q) + b_2 \cos((1+\lambda)\theta - 2\theta/q)] + \\ & \mu r^{\mu-1} [-d_1 (\mu-1) \sin((1-\mu)\theta - 2\theta/q) + c_1 \sin((1+\mu)\theta - 2\theta/q)] + \\ & \mu r^{\mu-1} [d_2 (\mu-1) \cos((1-\mu)\theta - 2\theta/q) + c_2 \cos((1+\mu)\theta - 2\theta/q)] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Por meio da transformação de coordenadas cartesianas em coordenadas curvilíneas pela a equação (3.14) resulta a seguinte relação para as coordenadas u e v em coordenadas polares r e θ .

$$x + iy = (u + iv)^{\frac{1}{q}} = (re^{i\theta})^{\frac{1}{q}} = r^{1/q} \left(\cos \frac{\theta}{q} + i \sin \frac{\theta}{q} \right) \quad (4.14)$$

Seja a condição de contorno $(\sigma_{uu})_{u=u_0, v=0} = (\tau_{uv})_{u=u_0, v=0} = 0$ que resulta da condição de tração livre na superfície do entalhe. As tensões τ_{uv} e σ_u são escritas pelas tensões σ_{rr} e $\tau_{r\theta}$ em substituição das condições de contorno de $u = u_0$ e $v = 0$ em $r = r_0$ e $\theta = 0^\circ$, respectivamente.

$$(\sigma_{uu})_{u=u_0, v=0} = (\sigma_{rr})_{r=r_0, \theta=0} = 0 \quad (4.15)$$

$$(\sigma_{uu})_{u=u_0, v=0} = (\sigma_{rr})_{r=r_0, \theta=0} = 0 \quad (4.16)$$

Por meio da diferenciação das equações (4.15) e (4.16) estabelece duas novas condições de contorno. Outras duas novas condições de contorno resultam do limite das tensões τ_{uv} e σ_{uu} em $u = u_0$ e $v \gg v_0$ que resultará em $r \rightarrow \infty$ e $\theta = \pm q\pi/2$ em coordenadas polares.

$$\left(\frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v}\right)_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = \left(\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{q} \sigma_{\theta\theta}\right)_{\substack{r=r_0 \\ \theta=0}} \quad (4.17)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{uu}}{\partial v}\right)_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{2}{q} \tau_{r\theta}\right)_{\substack{r=r_0 \\ \theta=0}} \quad (4.18)$$

$$(\sigma_{uu})_{\substack{u=u_0 \\ v \ll -v_0}} + (\sigma_{uu})_{\substack{u=u_0 \\ v \gg -v_0}} = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow -q\pi/2}} (r^{1-\mu} \sigma_{\theta\theta}) + \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow +q\pi/2}} (r^{1-\mu} \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (4.19)$$

$$(\tau_{uv})_{\substack{u=u_0 \\ v \ll -v_0}} - (\tau_{uv})_{\substack{u=u_0 \\ v \gg -v_0}} = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow +q\pi/2}} (r^{1-\mu} \tau_{r\theta}) - \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow -q\pi/2}} (r^{1-\mu} \tau_{r\theta}) = 0 \quad (4.20)$$

$$(\sigma_{uu})_{\substack{u=u_0 \\ v \gg v_0}} = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow -q\pi/2}} (r^{1-\lambda} \sigma_{\theta\theta}) = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow +q\pi/2}} (r^{1-\lambda} \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (4.21)$$

$$(\tau_{uv})_{\substack{u=u_0 \\ v \gg u_0}} = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow -q\pi/2}} (r^{1-\lambda} \tau_{r\theta}) = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow +q\pi/2}} (r^{1-\lambda} \tau_{r\theta}) = 0 \quad (4.22)$$

Os parâmetros dos modos I e II são obtidos pela solução das condições de contorno. Os parâmetros dos modos geométricos são obtidos pelas constantes a, b, c e d subscrito pelos índices 1 e 2 para os respectivos modos. As expressões para as constantes a_1 , b_1 , c_1 e d_1 surgem das equações (4.15), (4.17), (4.19) e (4.20). Consequentemente, as constantes a_2 , b_2 , c_2 e d_2 resultam das equações (4.16), (4.18), (4.21) e (4.22).

O coeficiente assintótico λ e o coeficiente μ são reescritos em função dos índices 1 e 2, pois facilita a distinção de todos os parâmetros envolvidos na distribuição da tensão. O coeficiente μ é também obtido por estas condições de contorno.

4.2 MODO I

Sejam os resultados das equações (4.15), (4.17) e (4.20) que determinam as constantes e o coeficiente μ para o modo de tração. As equações são multiplicadas pelo fator $1/a_1$ para facilitar a obtenção destes parâmetros.

$$(\sigma_{uu})_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = (\sigma_{rr})_{\substack{r=r_0 \\ \theta=0}} = \lambda r_0^{\lambda-1} \left[(3-\lambda) - \frac{b_1}{a_1} \right] + \mu r_0^{\mu-1} \left[\frac{d_1}{a_1} (3-\mu) - \frac{c_1}{a_1} \right] = 0 \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} \right)_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = 0 = & \lambda_1 r_0^{\lambda_1-1} [(\lambda_1 - 1)^2 + \frac{b_1}{a_1} (1 + \lambda_1)] + \frac{\lambda_1 r_0^{\lambda_1-1}}{q} [(1 + \lambda) + \frac{b_1}{a_1}] + \\ & \mu_1 r_0^{\mu_1-1} \left[\frac{d_1}{a_1} (1 - \mu_1)^2 + \frac{c_1}{a_1} (1 + \mu_1) \right] - \frac{\mu_1 r_0^{\mu_1-1}}{q} \left[\frac{d_1}{a_1} (1 + \mu_1) + \frac{c_1}{a_1} \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} \right)_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = 0 = & \lambda_1 r_0^{\lambda_1-1} [(\lambda_1 - 1)^2 + \frac{b_1}{a_1} (1 + \lambda_1)] - \frac{\lambda_1 r_0^{\lambda_1-1}}{q} [(1 + \lambda) + \frac{b_1}{a_1}] + \\ & \mu_1 r_0^{\mu_1-1} \left[\frac{d_1}{a_1} (1 - \mu_1)^2 + \frac{c_1}{a_1} (1 + \mu_1) \right] - \frac{\mu_1 r_0^{\mu_1-1}}{q} \left[\frac{d_1}{a_1} (1 + \mu_1) + \frac{c_1}{a_1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} (\tau_{uv})_{\substack{u=u_0 \\ v \ll -v_0}} - (\tau_{uv})_{\substack{u=u_0 \\ v \gg -v_0}} = 0 = & 2\lambda_1 r^{\lambda_1 - \mu_1} [a_1 (1 - \lambda_1) \operatorname{sen}((1 - \lambda_1) q\pi/2) + b_1 \operatorname{sen}((1 + \lambda_1) q\pi/2)] + \\ & 2\mu_1 [d_1 (1 - \mu_1) \operatorname{sen}((1 - \mu_1) q\pi/2) + c_1 \operatorname{sen}((1 + \mu_1) q\pi/2)] \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} (\tau_{uv})_{\substack{u=u_0 \\ v \ll -v_0}} - (\tau_{uv})_{\substack{u=u_0 \\ v \gg -v_0}} = 0 = & 2\lambda_1 r^{\lambda_1 - \mu_1} [a_1 (1 - \lambda_1) \operatorname{sen}((1 - \lambda_1) q\pi/2) + b_1 \operatorname{sen}((1 + \lambda_1) q\pi/2)] + \\ & 2\mu_1 [d_1 (1 - \mu_1) \operatorname{sen}((1 - \mu_1) q\pi/2) + c_1 \operatorname{sen}((1 + \mu_1) q\pi/2)] \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{uu})_{\substack{u=u_0 \\ v \ll -v_0}} + (\sigma_{uu})_{\substack{u=u_0 \\ v \gg -v_0}} = 0 = & 2\lambda_1 r^{\lambda_1 - \mu_1} [a_1 (1 - \lambda_1) \cos((1 - \lambda_1) q\pi/2) + b_1 \cos((1 + \lambda_1) q\pi/2)] + \\ & 2\mu_1 [d_1 (1 + \mu_1) \cos((1 - \mu_1) q\pi/2) + c_1 \cos((1 + \mu_1) q\pi/2)] \end{aligned} \quad (4.28)$$

Devido às condições nulas para as igualdades acima, todos os termos que envolvem $r^{1-\lambda_1}$ e $r^{1-\mu_1}$ e por consequência $r = r_0$ não são nulos, de maneira que, os termos multiplicados

por eles são nulos. Logo, é possível estabelecer uma primeira relação em função do coeficiente assintótico.

$$b_1 = -a_1(1-\lambda_1) \frac{\text{sen}((1-\lambda_1)q\pi/2)}{\text{sen}((1+\lambda_1)q\pi/2)} = a_1(1-\lambda_1)\chi_{b_1} \quad (4.29)$$

Um novo parâmetro é desenvolvido a partir do ângulo de abertura e seu respectivo coeficiente assintótico.

$$\chi_{b_1} = -\frac{\text{sen}((1-\lambda_1)q\pi/2)}{\text{sen}((1+\lambda_1)q\pi/2)} \quad (4.30)$$

Outra relação é facilmente estabelecida em função do coeficiente μ_1 através da equação (4.23) e pelo novo parâmetro χ_{b_1} .

$$c_1 = -\frac{\lambda_1}{\mu_1} r_0^{\lambda_1-1} a_1 ((3-\lambda_1) - (1-\lambda_1)\chi_{b_1}) + d_1(3-\lambda_1) \quad (4.31)$$

A substituição das novas relações de b_1 e c_1 em função do parâmetro χ_{b_1} na equação (4.25) estabelece a equação do coeficiente μ_1 .

$$\mu_1 = \frac{1}{q} \left\{ \frac{\left[\frac{(1-\lambda_1)^2 - \frac{(1+\lambda_1)}{q}}{q} \right] + \chi_{b_1}(1-\lambda_1) \left[\frac{(1+\lambda_1) - \frac{1}{q}}{q} \right]}{(3-\lambda_1) - \chi_{b_1}(1-\lambda_1)} \right\}^{-1} \quad (4.32)$$

Reagrupando os termos μ_1 e λ_1 na equação (4.24) e criando variáveis auxiliares como χ_1 , χ_{c_1} e χ_{d_1} . As novas variáveis são expressas pelo parâmetro χ_{b_1} , coeficiente assintótico λ_1 e expoente μ_1 .

$$\chi_{c_1} = \left[(1-\mu_1)^2 - \frac{1}{q}(1+\mu_1) \right] [(3-\lambda_1) - \chi_{b_1}(1-\lambda_1)] - (3-\lambda_1)\chi_1 \quad (4.33)$$

$$\chi_{d1} = \left[\frac{1-q(1+\mu_1)}{q} \right] [(3-\lambda_1) - \chi_{b1}(1-\lambda_1)] - \chi_1 \quad (4.34)$$

$$\chi_1 = (1-\lambda_1)^2 + \chi_{b1}(1-\lambda_1^2) - \frac{1}{q}(1+\lambda_1) - \frac{1}{q}\chi_{b1}(1+\lambda_1) \quad (4.35)$$

As novas variáveis facilitam escrever as constantes c_1 e d_1 de maneira compacta em função de todos os parâmetros envolvidos.

$$c_1 = \frac{q\lambda_1 r_0^{\lambda_1 - \mu_1}}{4\mu_1(q-1)} \chi_{c1} a_1 \quad (4.36)$$

$$d_1 = \frac{q\lambda_1 r_0^{\lambda_1 - \mu_1}}{4\mu_1(q-1)} \chi_{d1} a_1 \quad (4.37)$$

4.3 MODO II

As constantes a_2 , b_2 , c_2 e d_2 são obtidas de maneira semelhante as constantes para o modo I, ou seja, trata-se de problema de solução simétrica. As equações principais são obtidas pelas condições de contorno.

$$(\tau_{uv})_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = (\tau_{r\theta})_{\substack{r=u_0^q \\ \theta=0}} = \lambda r_0^{\lambda-1} [-a_2(1-\lambda) + b_2] + \mu r_0^{\mu-1} [-d_2(1-\mu) - c_2] = 0 \quad (4.38)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{uu}}{\partial v} \right)_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = 0 = \lambda r_0^{\lambda-1} \left[a_2(3-\lambda)(1-\lambda) + b_2(1+\lambda) - \frac{2}{q} [-a_2(1-\lambda) + b_2] \right] + \mu r_0^{\mu-1} \left[d_2(3-\mu)(1-\mu) + c_2(1+\lambda) - \frac{2}{q} [-d_2(1+\mu) + c_2] \right] \quad (4.39)$$

$$(\sigma_{uu})_{\substack{u=u_0 \\ v \gg v_0}} = 0 = \lambda_2 [a_2(1+\lambda_2) \text{sen}((1-\lambda_2)q\pi/2) - b_2 \cos((1+\lambda_2)q\pi/2)] + \mu_2 r^{\mu_2 - \lambda_2} [d_2(1+\mu_2) \text{sen}((1-\mu_2)q\pi/2) - c_2 \text{sen}((1+\mu_2)q\pi/2)] \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} (\tau_{uv})_{\substack{u=u_0 \\ v \gg u_0}} = 0 = \lambda_2 r^{\lambda_2 - \mu_2} [-a_2 (1 - \lambda_2) \cos((1 - \lambda_2) q\pi/2) + b_2 \cos((1 + \lambda_2) q\pi/2)] + \\ \mu_2 [-d_2 (1 + \mu_2) \cos((1 - \mu_2) q\pi/2) + c_2 \cos((1 + \mu_2) q\pi/2)] \end{aligned} \quad (4.41)$$

Estabelece um novo parâmetro χ_{b_2} em função da constante b_2 .

$$b_2 = -a_2 (1 + \lambda_2) \frac{\text{sen}((1 - \lambda_2) q\pi/2)}{\text{sen}((1 + \lambda_2) q\pi/2)} = -a_2 (1 + \lambda_2) \chi_{b_2} \quad (4.42)$$

Um novo parâmetro é desenvolvido a partir do ângulo de abertura e seu respectivo coeficiente assintótico.

$$\chi_{b_2} = -\frac{\text{sen}((1 - \lambda_2) q\pi/2)}{\text{sen}((1 + \lambda_2) q\pi/2)} \quad (4.43)$$

Novas variáveis auxiliares χ_2 , χ_{c_2} e χ_{d_2} são criadas para obter as constantes c_2 e d_2 . A variável χ_2 é desenvolvida de maneira que os parâmetros χ_{c_2} e χ_{d_2} sejam expressos de maneira compacta.

$$\chi_{c_2} = (\mu_2 - 1) \left[\frac{q(\mu_2 - 3) - 2}{q} \right] [(\lambda_2 - 1) - \chi_{b_2} (1 + \lambda_2)] + (1 - \mu_2) \chi_2 \quad (4.44)$$

$$\chi_{d_2} = -\left[\frac{q(1 + \mu_2) - 2}{q} \right] [(\lambda_2 - 1) - \chi_{b_2} (1 + \lambda_2)] + \chi_2 \quad (4.45)$$

$$\chi_2 = (3 - \lambda_2)(1 - \lambda_2) - \chi_{b_2} (1 + \lambda_2)^2 + \frac{2}{q}(1 - \lambda_2) + \frac{2}{q} \chi_{b_2} (1 + \lambda_2) \quad (4.46)$$

As novas variáveis facilitam escrever as constantes c_2 e d_2 de maneira compacta em função de todos os parâmetros envolvidos.

$$c_2 = \frac{\lambda_2 r_0^{\lambda_2 - \mu_2}}{4\mu_2 (\mu_2 - 1)} \chi_{c_2} a_2 \quad (4.47a)$$

$$d_2 = \frac{\lambda_2 r_0^{\lambda_2 \mu_2}}{4\mu_2(\mu_2 - 1)} \chi_{d_2} a_2 \quad (4.47b)$$

O expoente μ_2 é obtido maneira implícita na equação a seguir:

$$\left\{ \left[\frac{q(1+\mu_2)-2}{q} \right] [\lambda_2 - 1 - \chi_{b_2}(1+\lambda_2) - \varepsilon_2] \right\} (1-\mu_2) \cos\left(\frac{q\pi}{2}(1-\mu_2)\right) + \left\{ \left[\frac{q(-3+\mu_2)-2}{q} \right] [\mu_2 - 1] [\lambda_2 - 1 - \chi_{b_2}(1+\lambda_2) + (1-\mu_2)\varepsilon_2] \right\} \cos\left(\frac{q\pi}{2}(1+\mu_2)\right) d_2 = 0 \quad (4.48)$$

4.4 COMPORTAMENTO DOS PARÂMETROS

Os principais parâmetros da distribuição da tensão para os modos I e II são apresentados na Tabela 1 e Tabela 2. Os ângulos notáveis da abertura do entalhe 2α são as referências para a construção das tabelas em função da severidade do entalhe q . O parâmetro geométrico q é função do ângulo 2α conforme a equação (3.12).

Tabela 1 - Parâmetros para distribuição de tensão para o modo I.

2α	q	λ_1	μ_1	χ_{b_1}	χ_{c_1}	χ_{d_1}
0°	2	0,5	-0,5	4	1	0,7850
30°	1,8333	0,5014	-0,4561	3,7907	1,034	0,6917
45°	1,7500	0,5050	-0,4319	3,5721	1,014	0,6692
60°	1,6667	0,5122	-0,4057	3,2832	0,970	0,6620
90°	1,5000	0,5448	-0,3449	2,5057	0,810	0,7049
120°	1,3334	0,6157	-0,2678	1,5150	0,570	0,8779
135°	1,2500	0,6736	-0,2198	0,9933	0,432	1,0717
150°	1,167	0,7520	-0,1624	0,5137	0,288	1,4417

Tabela 2 - Parâmetros para distribuição de tensão para o modo II.

2α	q	λ_2	μ_2	χ_{b2}	χ_{c2}	χ_{d2}
0°	2	0,5	-0,5	1	-12	0
30°	1,8333	0,5982	-0,4465	0,9212	-11,3503	-0,3506
45°	1,7500	0,6597	-0,4118	0,8140	-10,1876	-0,4510
60°	1,6667	0,7309	-0,3731	0,6584	-8,3946	-0,4788
90°	1,5000	0,9085	-0,2882	0,2189	-2,9382	-0,2436
120°	1,3334	1,1489	-0,1980	-0,3139	2,5604	0,5133
135°	1,2500	1,3021	-0,1514	-0,5695	8,7371	1,1362
150°	1,167	1,4858	-0,1034	-0,7869	12,9161	1,9376

Todos os parâmetros e expoentes apresentados na Tabela 1 podem ser expressos graficamente pelas equações (4.23) a (4.26) através das relações do mesmo com o ângulo de abertura 2α . Inicialmente, todos os parâmetros são relacionados com coeficiente assintótico λ e a severidade do entalhe q . Os parâmetros χ_b , χ_c e χ_d não tem significado quando o ângulo de abertura é π radianos.

As Figuras 18 e 19 mostram que χ_b tem o mesmo comportamento que o coeficiente assintótico λ_1 , com escalas diferentes para o mesmo ângulo de abertura. Juntamente, o parâmetro χ_b e o coeficiente λ são importantes para determinar os parâmetros χ_c e χ_d e o expoente μ .

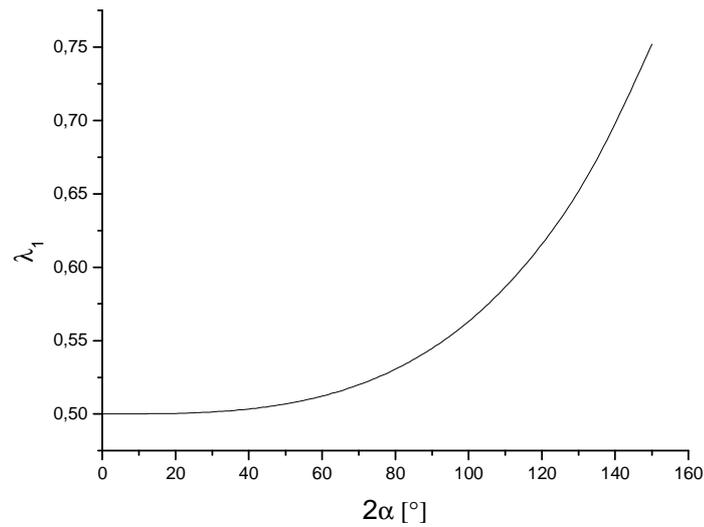


Figura 18 – Coeficiente assintótico para o modo I.

O coeficiente assintótico é o autovalor positivo decorrente da solução das equações (B.5) e (B.6) para os respectivos modos I e II em diferentes ângulos de abertura. Os limites para λ_1 são 0,5 para $2\alpha = 0$ e $2\alpha = \pi$ radianos. Quando λ_1 é igual a 0,5, um caso particular estudado pela Mecânica da Fratura Elástica Linear ocorre, o entalhe é tratado como uma simples trinca.

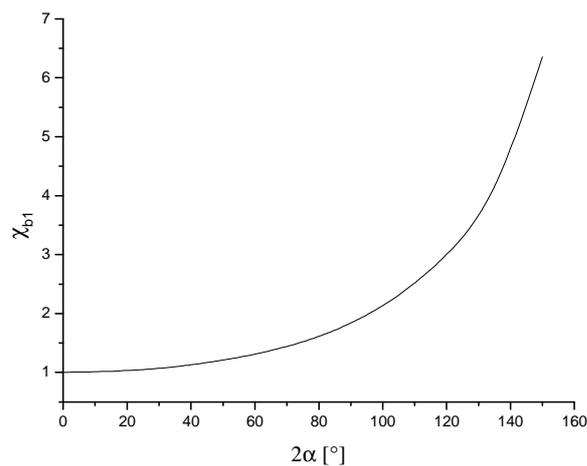


Figura 19 – Parâmetro χ_b para o modo I.

O expoente μ é relevante, ou seja, quando a presença de um raio de curvatura no entalhe em V é também relevante. Isto ocorre quando o raio de curvatura é diferente de zero.

Caso contrário, o segundo termo da equação (3.22) não tem significado, ou seja, desprezam-se as funções $g_{ij}(\theta, \alpha)$. Figura 20 representa o comportamento deste expoente μ em função do ângulo de abertura. Os limites de μ_1 são -0,5 para $2\alpha = 0^\circ$ e 0 para $2\alpha = \pi$ radianos.

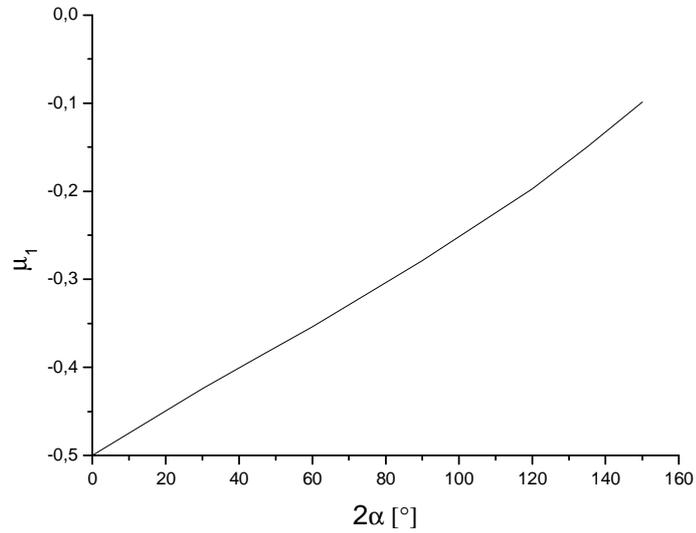


Figura 20 – Expoente μ para o modo I.

As Figuras 21 e 22 mostram o comportamento dos coeficientes χ_c e χ_d para o primeiro modo geométrico, respectivamente.

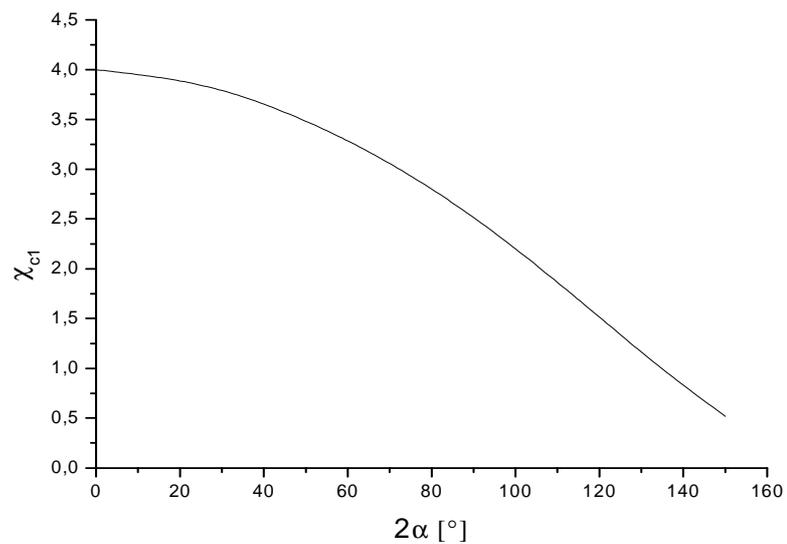


Figura 21 – Parâmetro χ_c para o modo I.

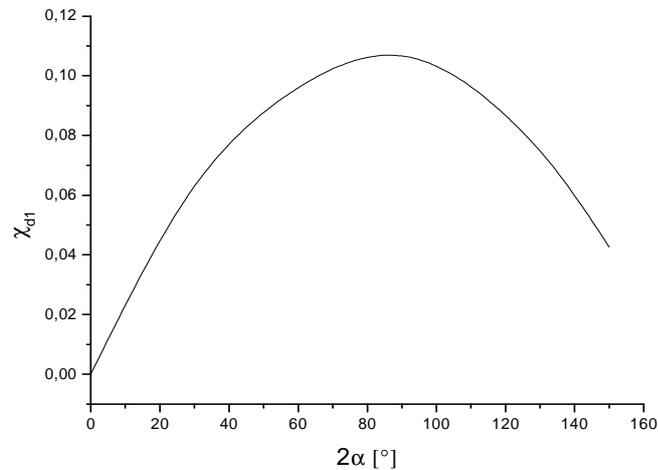


Figura 22 – Parâmetro χ_d para o modo I.

Pelas Equações (4.33) e (4.34) os coeficientes χ_{c1} e χ_{d1} apresentam o termo χ_1 , que influencia diretamente os valores dos mesmos. O parâmetro χ_{d1} é o único que apresenta o comportamento parabólico e tem um valor máximo diferente de $2\alpha = \pi$ radianos e $2\alpha = 0$ radiano. O máximo valor ocorre em $2\alpha = \pi/2$ radianos.

O parâmetro χ_{b1} , o expoente μ_1 e coeficiente λ_1 apresentam mínimo em $2\alpha = 0$ e máximo em $2\alpha = \pi$ radianos. Enquanto, o parâmetro χ_{c1} apresenta condição inversa para o mínimo e máximo valor para os ângulos de abertura. A Figura 28 indica que o coeficiente λ_1 , o expoente μ_1 e parâmetro χ_{d1} apresentam valores próximos, enquanto o parâmetro χ_{c1} apresenta as maiores diferenças.

Diferentemente do modo I, o coeficiente assintótico do modo II assume valores maiores que 1, devido às trincas por cisalhamento plano. A determinação do mesmo ocorre através de problemas de autovalores. A diferença entre os modos I e II para o coeficiente assintótico é sinal positivo e negativo respectivamente na equação característica. Os valores máximos e mínimos ocorrem respectivamente em $2\alpha = 0$ e $2\alpha = \pi$ radianos. A Figura 23 ilustra este comportamento do coeficiente assintótico para o segundo modo geométrico.

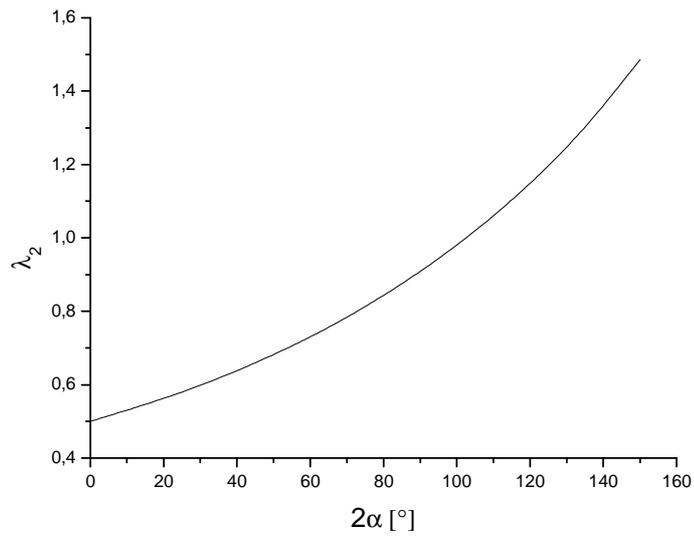


Figura 23 – Coeficiente assintótico para o modo II.

Em consequência do coeficiente assintótico λ_2 , os parâmetros χ_{b2} e μ_2 são obtidos. Os comportamentos destes parâmetros estão representados nas Figuras 24 e 25.

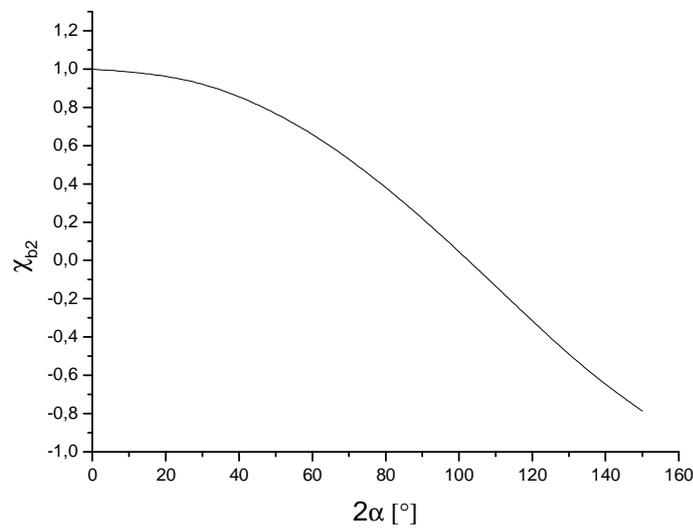


Figura 24 – Parâmetro χ_b para o modo II.

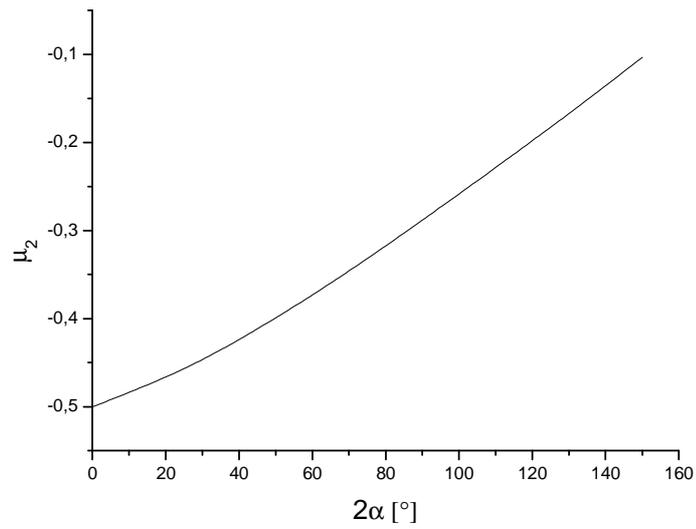


Figura 25 – Expoente μ para o modo II.

De maneira análoga ao modo I, os coeficientes χ_{d2} e χ_{c2} possuem significado quando o raio de curvatura do entalhe em V é diferente de zero. Estes coeficientes estão representados nas Figuras 26 e 27, respectivamente.

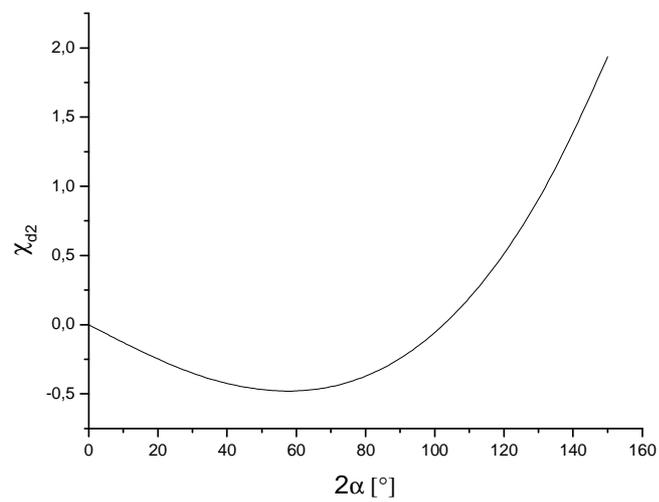


Figura 26 – Parâmetro χ_d para o modo II.

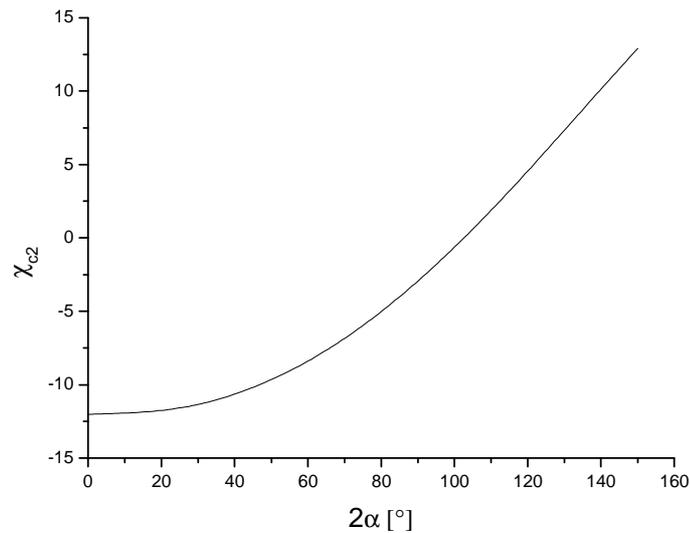


Figura 27 – Parâmetro χ_c para o modo II.

Os parâmetros χ_{d2} e χ_{c2} apresentam valores negativos para os mesmos pontos, enquanto o parâmetro χ_{b2} apresenta comportamento contrário. Aproximadamente em $2\alpha = 100^\circ$ ocorre à mudança deste comportamento para estes três parâmetros. O parâmetro χ_b tem comportamento diferente quando comparado com modos I e II. Os parâmetros χ_{b2} e χ_{c1} apresentam semelhanças gráficas, pois apresentam o mínimo e máximo em $2\alpha = \pi$ e $2\alpha = 0$ radianos, respectivamente, de maneira que, os parâmetros mencionados têm uma relação decrescente com o ângulo de abertura, a mesma relação com o coeficiente assintótico e a severidade do entalhe.

As Figuras 28 e 29 representam o comportamento dos coeficientes que compõem a função de distribuição de tensão em entalhes em V nos modos I e II, respectivamente. Exceto o coeficiente χ_{b1} não é representado na Figura 28 em virtude dos valores relativamente alto quando comparado com os demais coeficientes.

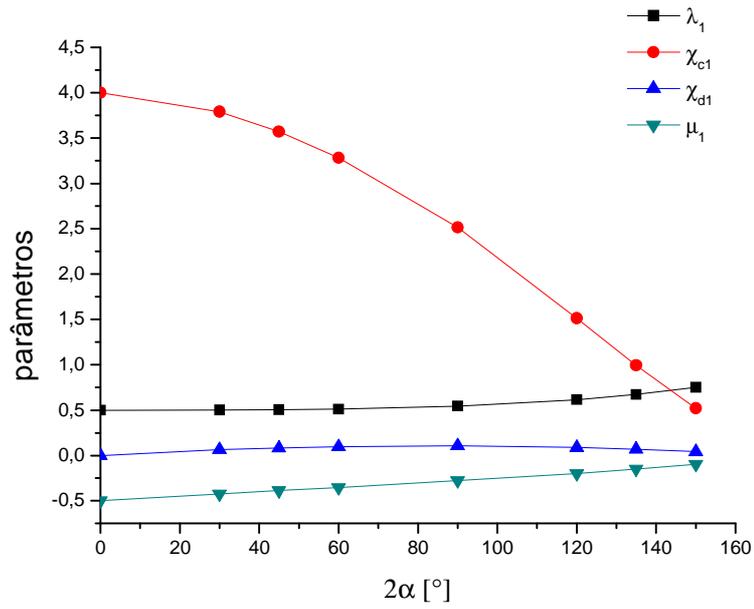


Figura 28 – Todos os parâmetros para o modo I.

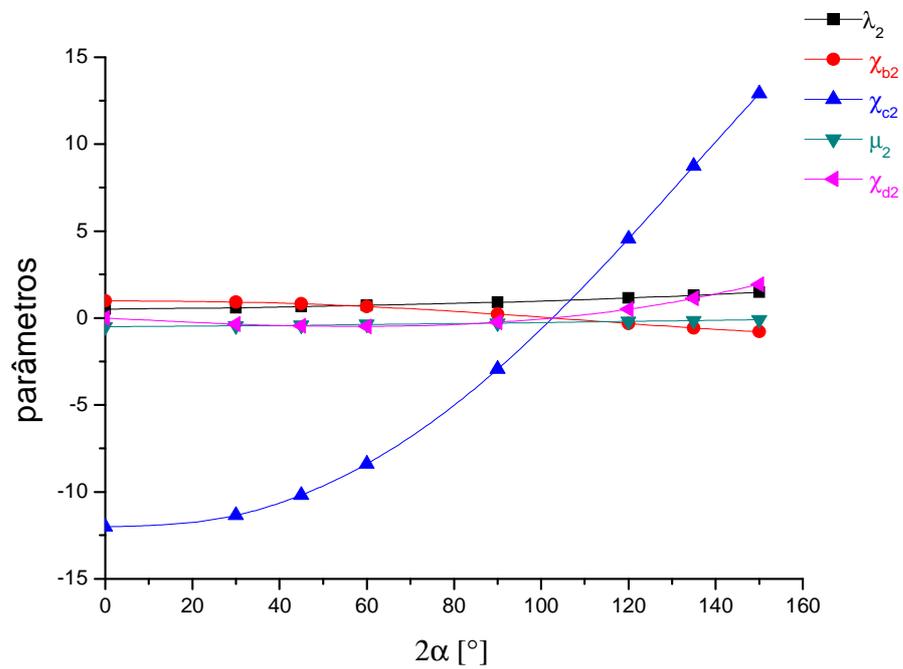


Figura 29 – Todos os parâmetros para o modo II.

4.5 FATOR INTENSIDADE DE TENSÃO

As constantes a_I e a_{II} compõem as funções angulares da distribuição de tensão e os fatores de intensidade de tensão para estes modos. Gross e Mendelson (1972) definiram os fatores intensidade de tensão para os modos I e II, a partir da definição clássica para os mesmos.

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{\theta\theta})_{\theta=0} r^{1-\lambda_1} \quad (4.49)$$

$$K_{II} = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\tau_{r\theta})_{\theta=0} r^{1-\lambda_2} \quad (4.50)$$

Os fatores K_I e K_{II} descrevem o campo de tensão são somente para $r \rightarrow 0$, mas também para todo volume finito ao redor a ponta da trinca. Quando a constante a_I deve ser determinada pela conveniência da distância a partir da extremidade da trinca quando os campos de tensão ao redor e no entalhe são praticamente coincidentes.

As expressões para os fatores intensidade de tensão para os modos I e II resultam da substituição das tensões $\sigma_{\theta\theta}$ e $\tau_{r\theta}$ das equações (3.27) e (3.28) respectivamente.

$$K_I = \lambda_1 \sqrt{2\pi} [1 + \lambda_1 + \chi_{b1} (1 - \lambda_1)] a_1 \quad (4.51)$$

$$K_{II} = -\lambda_2 \sqrt{2\pi} [(1 - \lambda_2) + \chi_{b2} (1 - \lambda_2)] a_2 \quad (4.52)$$

As constantes a_I e a_{II} são obtidas a partir do fator intensidade de tensão K_I e K_{II} , dos coeficientes assintóticos λ_1 e λ_2 , e dos parâmetros χ_{b1} e χ_{b2} (Atzori et al., 2001).

A constante a_I também pode ser obtida quando $\sigma_{\theta\theta}$ para a condição $\theta = 0^\circ$ assume o valor máximo para esta condição, ou seja, a tensão $(\sigma_{\theta\theta})_{\theta=0} = \sigma_{\max}$.

$$a_I = \frac{\sigma_{\max}}{\lambda_1 r_0^{\lambda_1 - 1} \left[(1 - \lambda_1) + \chi_{b1} (1 - \lambda_1) + [(1 + \mu_1) \chi_{d1} + \chi_{c1}] \left\{ \frac{q}{4(q-1)} \right\} \right]} \quad (4.53)$$

Enquanto, a constante a_2 não é possível determinar de maneira análoga com a constante a_1 pela tensão presente na ponta do entalhe. A constante a_2 é determinada de maneira experimental, quando a tensão $\tau_{r\theta}$ é determinada indiretamente pelo teste Iosipescu, onde deseja-se obter o módulo de cisalhamento, e também pela expressão do fator intensidade de tensão K_{II} . Os maiores detalhes são descritos no sexto capítulo.

Ao considerar uma finita com um entalhe curvilíneo de ângulo de abertura $2\alpha = 90^\circ$ e para um ponto geométrico definido para $r = 3\rho$ em modo I. As tensões σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ e $\tau_{r\theta}$ são expressas em função do quociente das mesmas com a tensão máxima σ_{\max} . Todos os parâmetros que compõem as tensões estão presentes na Tabela 1 juntamente com constante a_1 pela expressão (4.53). A Figura 30 ilustra o comportamento das tensões σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ e $\tau_{r\theta}$ em função da tensão máxima σ_{\max} e ponto geométrico $r = 3\rho$ de entalhes em V de ângulo reto.

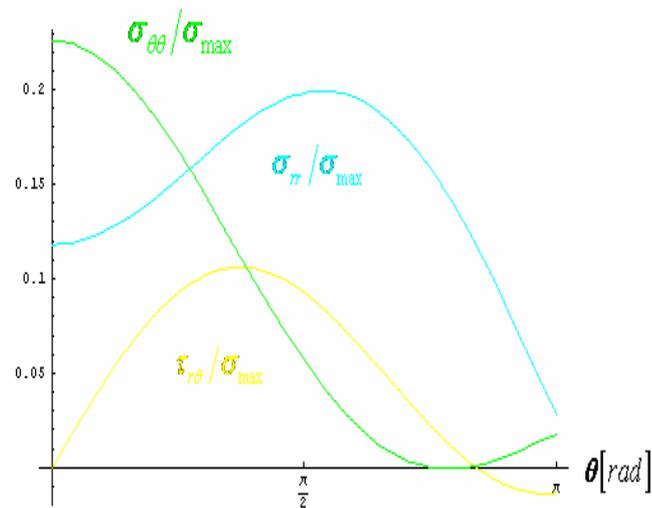


Figura 30 – As tensões principais em $2\alpha = 90^\circ$ em modo I.

Gráficos tridimensionais são obtidos quando não há um valor específico para r , ou seja, não é definido o ponto geométrico para as tensões principais. Estabeleceu a mesma relação $r = 3\rho$ para o ponto geométrico r . A Figura 31 representa a razão entre as tensões σ_{rr} e máxima tensão normal para placas com entalhes em V de ângulo reto e com um raio curvatura igual $0,65$ milímetros em modo de tração.

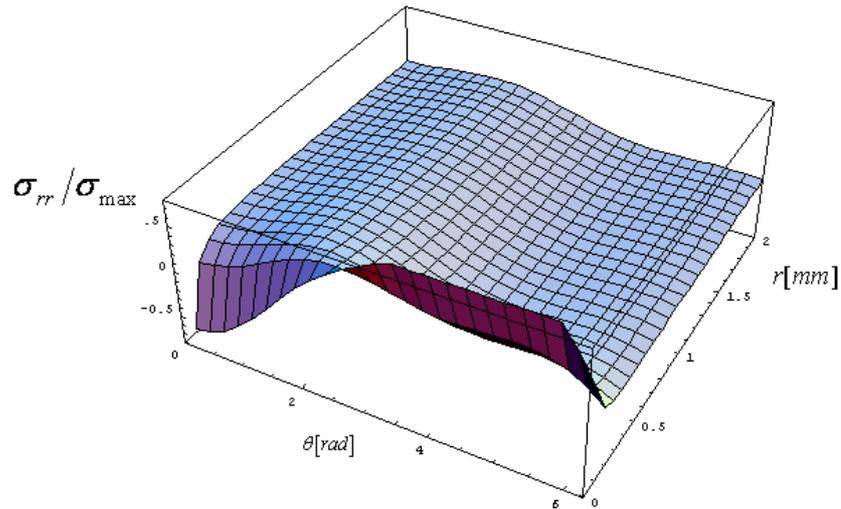


Figura 31 – A relação entre as tensões σ_{rr} e σ_{\max} para $2\alpha = 90^\circ$ e $\rho = 0,65[mm]$ em modo I.

A Figura 32 representa a razão entre as tensões $\sigma_{\theta\theta}$ e máxima tensão normal para placas com entalhes em V de ângulo reto e de raio curvatura igual 0,65 milímetros em modo de tração.

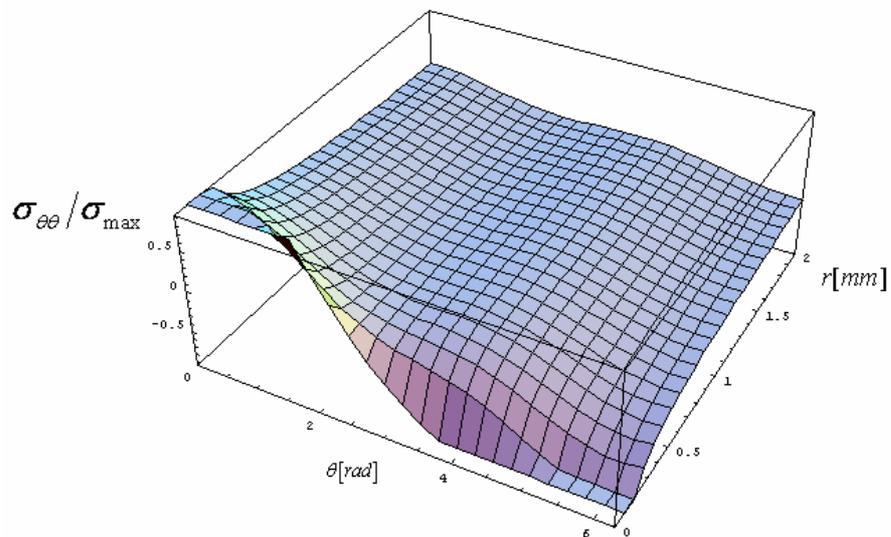


Figura 32 – A relação entre as tensões $\sigma_{\theta\theta}$ e σ_{\max} para $2\alpha = 90^\circ$ e $\rho = 0,65[mm]$ em modo I.

A Figura 33 representa a razão entre as tensões $\tau_{r\theta}$ e máxima tensão normal para placas com entalhes em V de ângulo reto e de raio curvatura igual 0,65 milímetros em modo de tração.

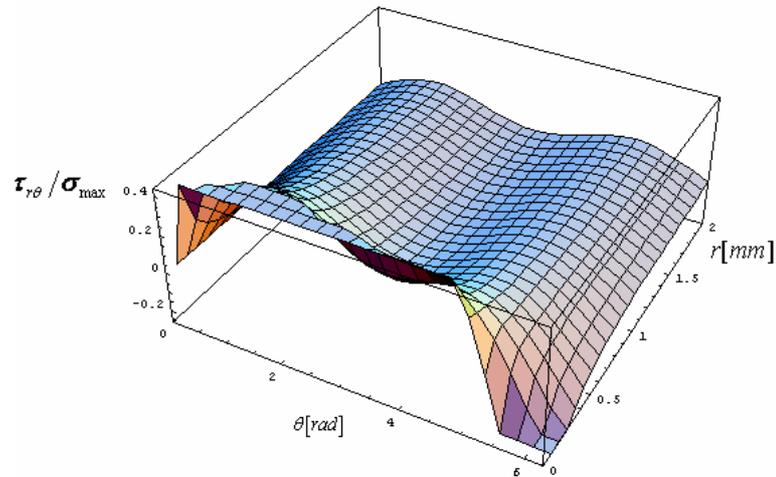


Figura 33 – A relação entre as tensões $\tau_{r\theta}$ e σ_{max} para $2\alpha = 90^\circ$ e $\rho = 0,65[mm]$ em modo I.

A mesma distribuição descrita no terceiro capítulo para entalhes em V é válida para descrever o comportamento de trincas em modo I pela teoria da elasticidade. Por analogia, o mesmo ponto geométrico $r = 3\rho$. Ou seja, a tensão $\sigma_{\theta\theta}$ apresenta o máximo em $\theta = 0$ e nula em $\theta = \pi/2$ radianos. Enquanto, a tensão σ_{rr} apresenta comportamento contrário para os pontos de máximo e de mínimo. A tensão de cisalhamento $\tau_{r\theta}$ é nula em $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ e $\theta = \pi$ radianos, enquanto o valor máximo ocorre em $\theta = \pi/4$ radianos. A Figura 34 ilustra o comportamento das tensões principais de entalhes em V tratados como trinca devido ao cisalhamento plano.

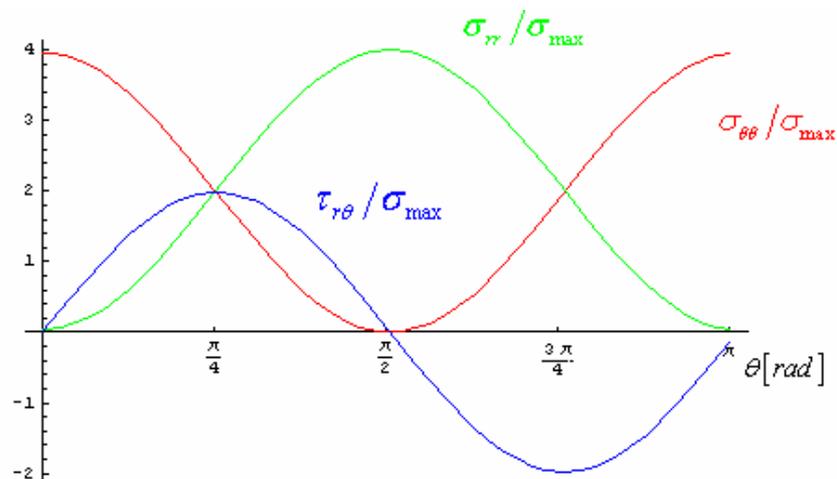


Figura 34 – Tensões principais para trincas em modo I com $r = 3\rho$.

A presença do entalhe altera os limites de máximo e mínimo para as tensões principais em trincas. A Figura 30 ilustra tal mudança no comportamento das tensões principais.

4.6 TESTE DE IOSIPESCU

O teste de Iosipescu pode ser utilizado como uma ferramenta no controle de qualidade após o processamento de compósitos. O teste é realizado em condição do regime elástico e em condições de ruptura para avaliar a resistência ao cisalhamento. A distribuição de tensão em entalhes em compósito laminado reforçado com tecido de fibras de vidro/epóxi sob a ação do cisalhamento plano caracteriza o segundo modo geométrico.

Ao realizar teste de cisalhamento nestas lâminas de compósitos é recomendável utilizar o sistema de referência radial (*R*) e tangencial (*T*) como esquematizado na Figura 29. Para o compósito a referência longitudinal será adotada na direção de empilhamento das camadas. Por exemplo, a tensão de cisalhamento é designada como: $\tau_{T,45^\circ}$ ou $\tau_{R,45^\circ}$. Isto é, a tensão de cisalhamento vem acompanhada de dois índices subscritos *T* ou *R*, seguido do ângulo de retirada da amostra na lâmina, marcado a partir da orientação do urdume. O primeiro índice indica o sentido da aplicação da carga que causa o cisalhamento na amostra (Souza, 2006).

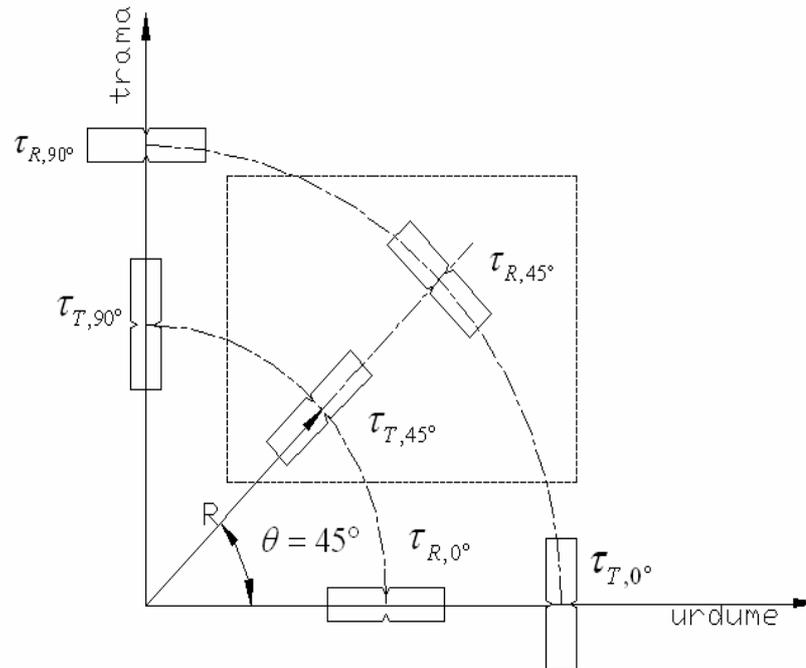


Figura 35 – Disposição e nomenclatura utilizada no conjunto de amostras. (Souza, 2006)

A geometria da amostra apresenta-se na Figura 36. Alguns parâmetros geométricos são definidos como a profundidade do entalhe, o ângulo de abertura ($2\alpha = 90^\circ$) e distância a partir da extremidade do entalhe ($0 \leq y \leq H/2$). De maneira que, as amostras de referência radial e tangencial têm perfil simétrico em relação ao sistema cartesiano e também geometria semelhante. Os compósitos utilizados neste trabalho foram laminados em 8 camadas, mantendo o urdume a 0° , resultando em uma espessura nominal de 5 mm (Souza, 2006).

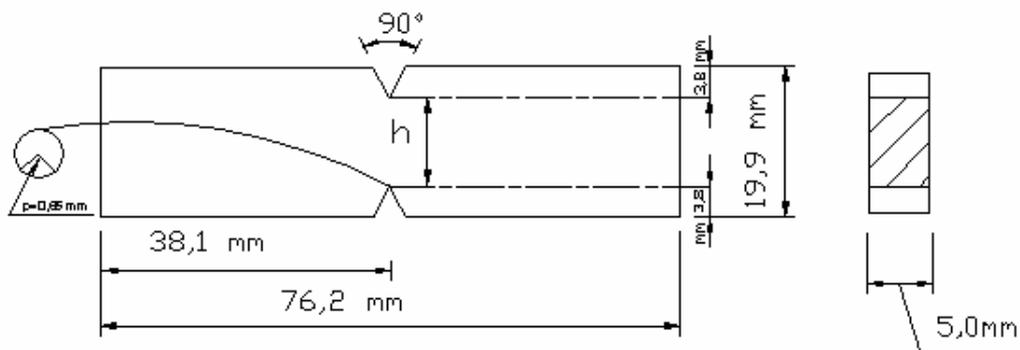


Figura 36 – Geometria das amostras. (Souza, 2006)

Ensaio realizados por Souza (2006) mostraram que o valor máximo da tensão de cisalhamento ocorreu nas amostras com ângulos de 45° , esse fato se deve a vários fatores

relacionados a cada amostra como, orientação das fibras, resistência de cada compósito, fabricação, tamanho da amostra, etc. Ou seja, as propriedades mecânicas estão relacionadas ao grau de anisotropia do material. No momento, as discussões estão voltadas para as amostras de referência radial e tangencial, por uma vez que as tensões de cisalhamento sofreram um acréscimo de tensões combinadas provocadas por torção e tensões residuais. Estas amostras encontram em destaque na Figura 35 pelo retângulo tracejado.

As respostas da força em função do deslocamento para as amostras $\tau_{R,45^\circ}$ e $\tau_{T,45^\circ}$ (de referência radial e tangencial, respectivamente) mostram que possivelmente ocorreu com o aumento da carga aplicada uma propagação de trincas e isso causou uma instabilidade na resposta (pontos indicados pelas setas). A partir do gráfico apresentado na Figura 31, pode-se notar que para a carga aplicada de 4140N ocorre a primeira instabilidade na resposta da amostra de referência radial. Esta instabilidade é devido à presença de tensões residuais na lâmina, a qual se manifestou provocando curvatura nas amostras após o corte. Como resultado desta curvatura impediu que as faces de apoios da amostra no dispositivo de teste permanecessem paralelas após o corte. Utilizando a resposta apresentada na Figura 31, a deformação específica correspondente é da ordem de 2546,2 $\mu\epsilon$. A tensão de cisalhamento, nesta condição, é de 68,84 MPa.

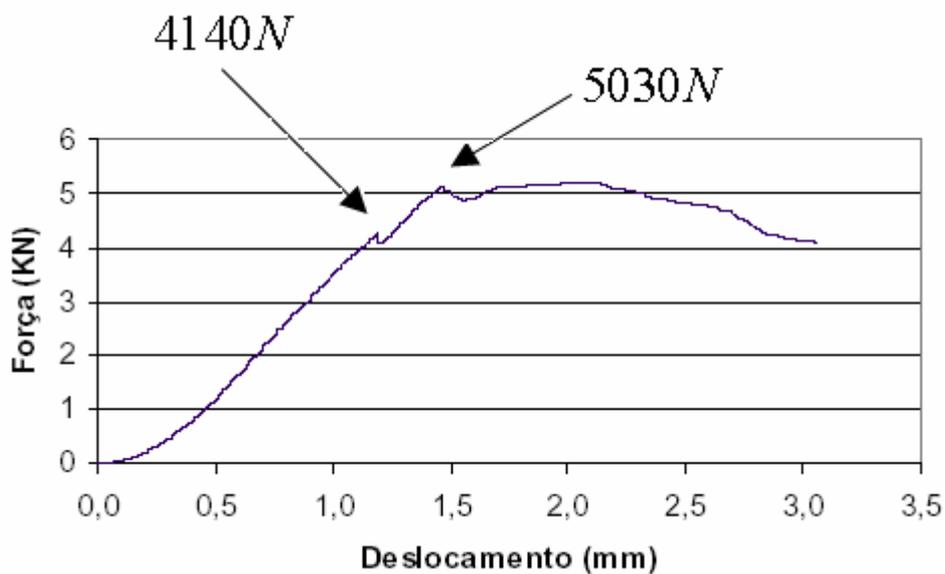


Figura 37 – Força em função do deslocamento para a amostra de referência radial. (Souza, 2006)

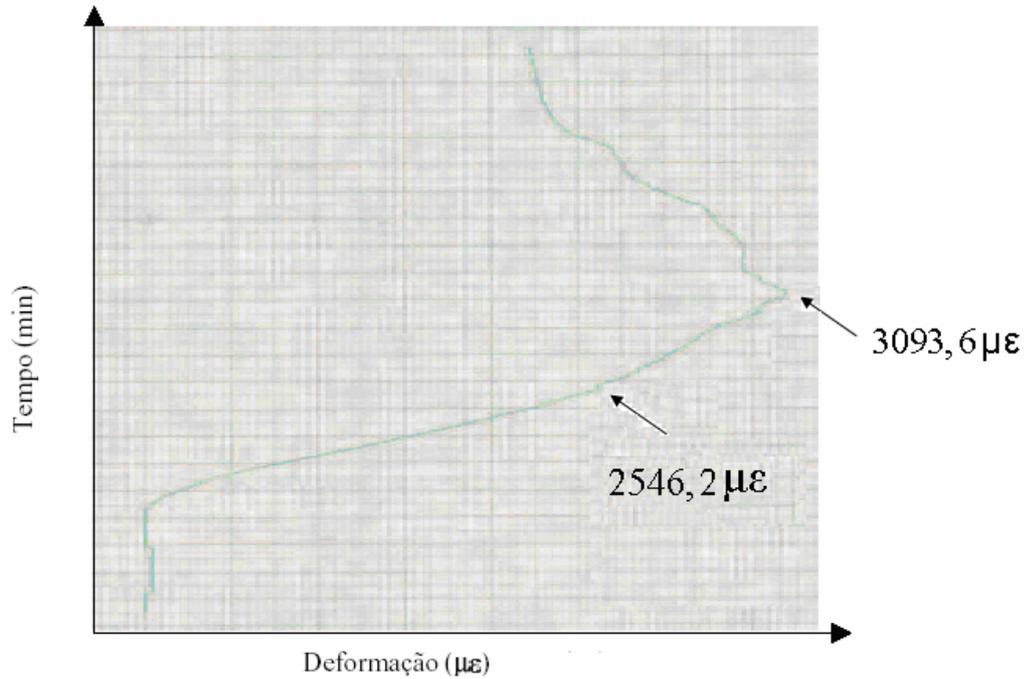


Figura 38 – Deformação para a amostra de referência radial. (Souza, 2006)

A partir do gráfico, apresentado na Figura 37, pode-se notar que para a carga aplicada de 5070N ocorre a primeira instabilidade na resposta da amostra de referência tangencial, a qual levou a amostra a falha. Utilizando a resposta apresentada na Figura 38 correspondente deformação é da ordem de 3501,4 $\mu\epsilon$. A tensão de cisalhamento nesta condição é de 84,21 MPa.

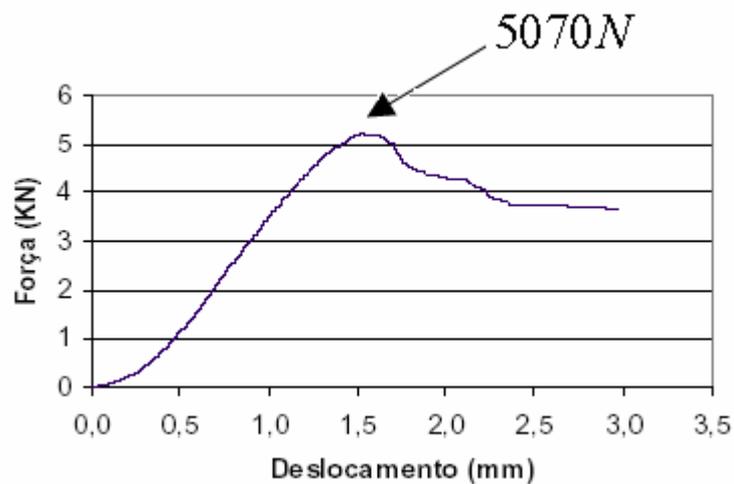


Figura 39 – Força em função do deslocamento para a amostra de referência tangencial.

(Souza, 2006)

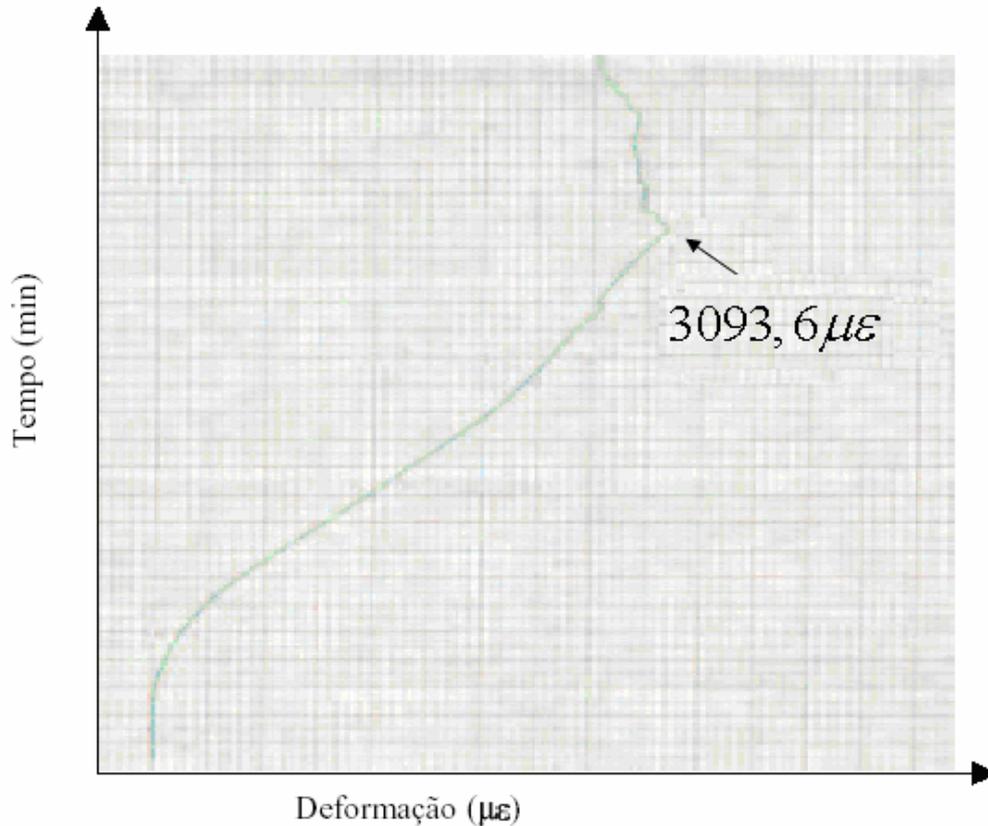


Figura 40 – Deformação para a amostra de referência tangencial. (Souza, 2006)

Os valores das forças e deformações para os cálculos das tensões de cisalhamento para a região analisada na lâmina, são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Valores experimentais para forças, deformações e tensões de cisalhamento. (Souza, 2006)

Amostra de referência	¹ Força, N	² ϵ_m , $\mu\epsilon$	³ τ , MPa
radial	5030	3093,6	83,65
tangencial	5070	3501,4	84,56

¹Força obtida do gráfico força em função do deslocamento – Teste Iosipescu;

² Deformação obtida do gráfico tempo em função da deformação;

³Tensão de cisalhamento obtida das equações:

$$\tau_{R,45^\circ} = \frac{\epsilon_m - 2,3795}{36,952} \quad (4.54)$$

$$\tau_{T,45^\circ} = \frac{\varepsilon_m - 1,5843}{41,56} \quad (4.55)$$

As amostras de referência radial e tangencial ambas apresentaram comportamentos proporcionais na região elástica, entretanto, com o aumento da carga aplicada, em condição não elástica, ocorreu o aparecimento de microtrincas o que levou a falha das amostras por tensão de tração com o aparecimento de trincas grandes e visíveis. Portanto, a carga aplicada foi reduzindo gradativamente em consequência da perda da integridade estrutural das mesmas. Para as amostras de referência radial e tangencial, o crescimento das trincas ocorreu aproximadamente ao redor do ângulo de 45° da direção da carga aplicada (região do entalhe – seta, *i*), nos pontos de apoios das amostras, como indicado pelas setas *ii* nas Figuras 41 e 43. Observa-se, ainda, a ocorrência de tensões elevadas de esmagamento na amostra de referência radial de ambos os lados do entalhe e na região em que atua a reação de apoio próximo ao entalhe. Também, pode-se observar que, dependendo da face considerada neste estudo, o aparecimento de trinca na raiz do entalhe pode afetar a posição da tensão de esmagamento. Este fato mostra que no compósito havia tensões residuais originadas durante o corte, responsáveis pelo aparecimento de uma curvatura na amostra de referência radial. Este fato não ocorreu para a amostra de referência tangencial. Com o aumento da carga aplicada observa-se a presença de propagação de trincas ao redor da raiz dos entalhes e pontos de reações de cargas nas amostras na região de fixação das mesmas no prendedor móvel do dispositivo de ensaio. Dois fatores contribuíram para esta ocorrência, possivelmente poderia ter ocorrido um crescimento de trincas, entre uma população de microtrincas ou deslocamentos das camadas nas amostras, como indicadas pelas setas *iii* conforme as Figuras 42 e 44.

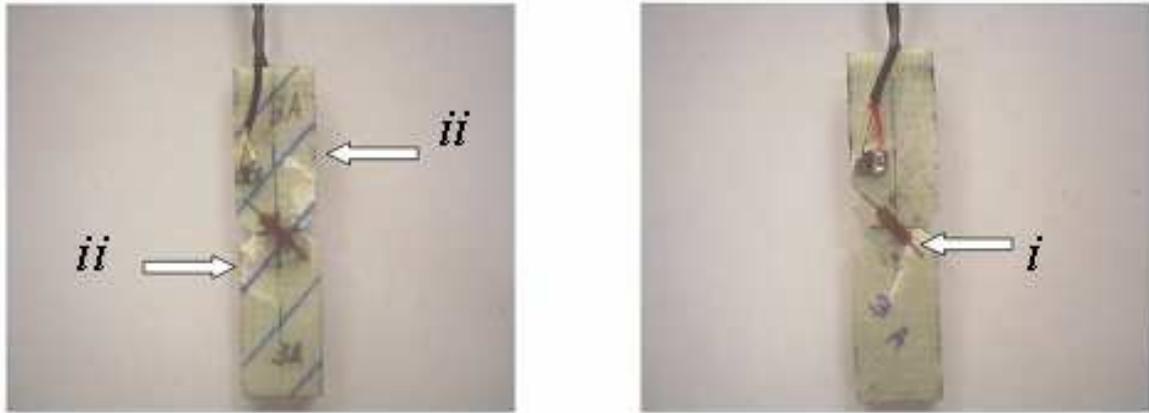


Figura 41 – Faces laterais da amostra de referência radial. (Souza, 2006)



Figura 42 – Faces de apoio da amostra de referência radial. (Souza, 2006)

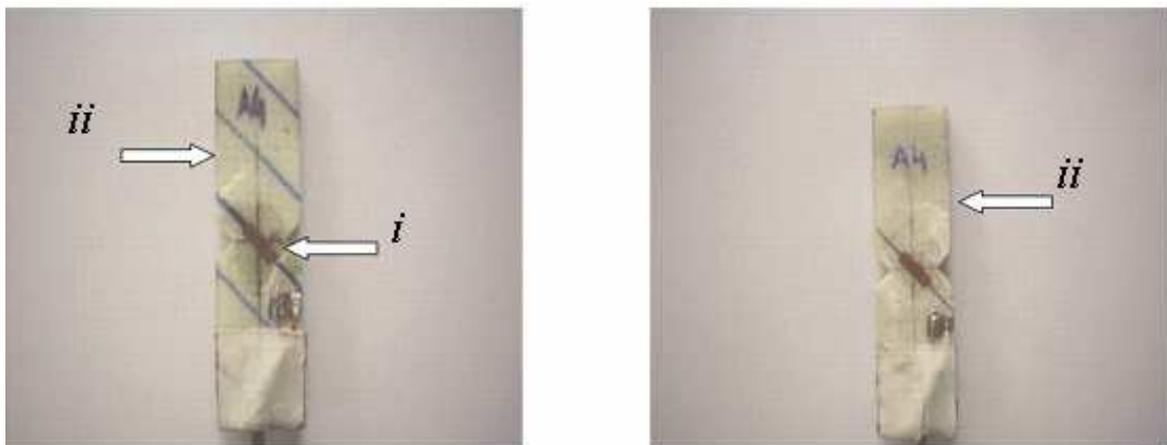


Figura 43 – Faces laterais da amostra de referência tangencial. (Souza, 2006)

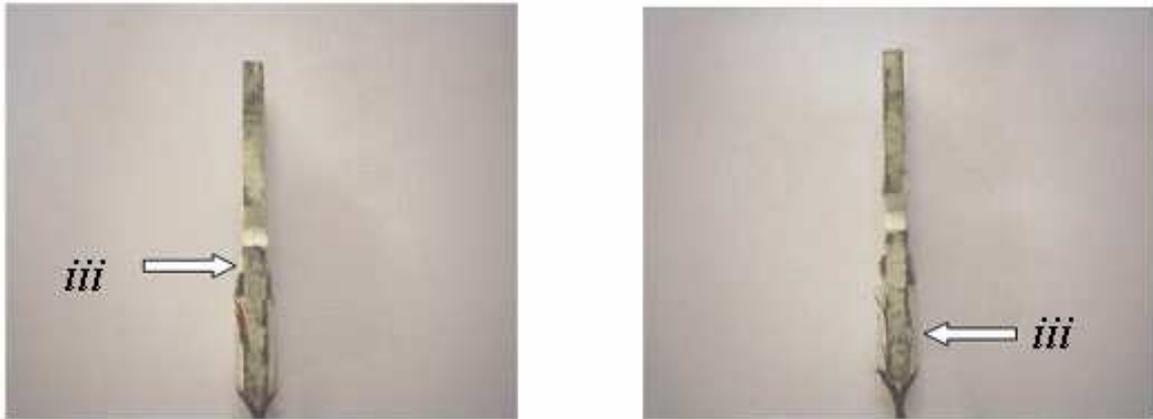


Figura 44 – Faces de apoio da amostra de referência tangencial. (Souza, 2006)

4.6.1 Distribuição de Tensão

A distribuição de tensão para o segundo modo geométrico descrita anteriormente no terceiro capítulo é avaliada para dados experimentais através das amostras de referência radial e tangencial. Pela condição de contorno, a geometria das amostras, resulta a distribuição de tensão para um ângulo de abertura $2\alpha = 90^\circ$. Todos os parâmetros desta distribuição presentes na tabela 2 são substituídos na equação (3.28).

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{matrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \tau_{r\theta} \end{matrix} \right\}_{2\alpha=90^\circ} & \stackrel{(ii)}{=} \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 \left[\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} 1,9085 \text{sen}(0,0915\theta) \\ 2,0915 \text{sen}(0,0915\theta) \\ 1,0915 \text{cos}(0,0915\theta) \end{matrix} \right\} + 0,4177706 \left\{ \begin{matrix} \text{sen}(1,9085\theta) \\ -\text{sen}(1,9085\theta) \\ \text{cos}(1,9085\theta) \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right] + \\
 & \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 \left[-\frac{1}{5,1528} \left(\frac{3r}{\rho} \right)^{-1,1967} \left\{ \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} -0,17339 \text{sen}(1,2882\theta) \\ -0,80100 \text{sen}(1,2882\theta) \\ -0,31380 \text{cos}(1,2882\theta) \end{matrix} \right\} + 2,9382 \left\{ \begin{matrix} \text{sen}(1,2882\theta) \\ -\text{sen}(1,2882\theta) \\ \text{cos}(1,2882\theta) \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right\} \right] \quad (4.56)
 \end{aligned}$$

Analisando a distribuição no plano bissetor do entalhe, quando $\theta = 0^\circ$, implica na existência de única tensão $\tau_{r,\theta}$, de maneira generalizada a tensão de cisalhamento e para quaisquer ângulos de abertura e raio de curvatura.

$$(\tau_{r\theta})_{\theta=0^\circ} = \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 \left[\{(1-\lambda_2) + \chi_{b2}(1+\lambda_2)\} + \left\{ \frac{1}{4(\mu_2-1)} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\mu_2-\lambda_2} (\chi_{d2}(1-\mu_2) - \chi_{c2}) \right\} \right] \quad (4.57)$$

Reescrevendo a equação (4.56) pela definição de r_0 a partir da equação (3.17) e também pela simplificação do acréscimo de um novo termo ϖ_2 .

$$(\tau_{r\theta})_{\theta=0^\circ} = \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 [1 - \lambda_2 + \chi_{b2}(1 + \lambda_2)] \left[1 + \varpi_2 \left(\frac{qr}{(q-1)\rho} \right)^{\mu_2-\lambda_2} \right] \quad (4.58)$$

Onde,

$$\varpi_2 = \frac{1}{4(\mu_2-1)} \left[\frac{\chi_{d2}(1-\mu_2) - \chi_{c2}}{1 - \lambda_2 + \chi_{b2}(1 + \lambda_2)} \right]$$

Uma simplificação na equação (4.57) ocorre, quando o raio de curvatura médio $\rho \rightarrow 0$, pois este novo termo ϖ_2 será nulo.

$$(\tau_{r\theta})_{\theta=0^\circ} = \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 [(1-\lambda_2) + \chi_{b2}(1+\lambda_2)] \quad (4.59)$$

A generalização para o fator intensidade de tensão para o modo II está associada à presença do raio de curvatura, de maneira que existem duas formulações possíveis analíticas. Designa-se por K_{II}^V e $K_{II,\rho}^V$ o fator intensidade de tensão em segundo modo geométrico devido à ausência do raio de curvatura médio ρ e a presença do mesmo, respectivamente.

$$K_{II}^V = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\lambda_2} [(\tau_{r\theta})_{\theta=0^\circ}] \quad (4.60)$$

$$K_{II,\rho}^V = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow r_0} r^{1-\lambda_2} [(\tau_{r\theta})_{\theta=0^\circ}] \quad (4.61)$$

$$K_{II}^V = -\lambda_2 \sqrt{2\pi} [1 - \lambda_2 + \chi_{b2}(1 + \lambda_2)] a_2 \quad (4.62)$$

Estas expressões possibilitam determinar a constante a_2 , fundamental para descrever o comportamento das tensões σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ e $\tau_{r\theta}$. Reagrupando as equações (4.62) e (4.58) resultará a expressão generalizada para constante a_2 .

$$a_2 = \frac{K_{II,\rho}^V}{-\lambda_2 \sqrt{2\pi} [1 - \lambda_2 + \chi_{b2} (1 + \lambda_2)]} \quad (4.63)$$

A razão entre $K_{II,\rho}^V / K_{II}^V$ é estabelecida para $2\alpha = 90^\circ$ independente da tensão de cisalhamento no plano bisetor. A representação desta razão entre os fatores intensidade de tensão ocorre na Figura 45.

$$\frac{K_{II,\rho}^V}{K_{II}^V} = \frac{0,5692065}{0,5692065 + 0,081682352r^{-1,1967}} \quad (4.64)$$

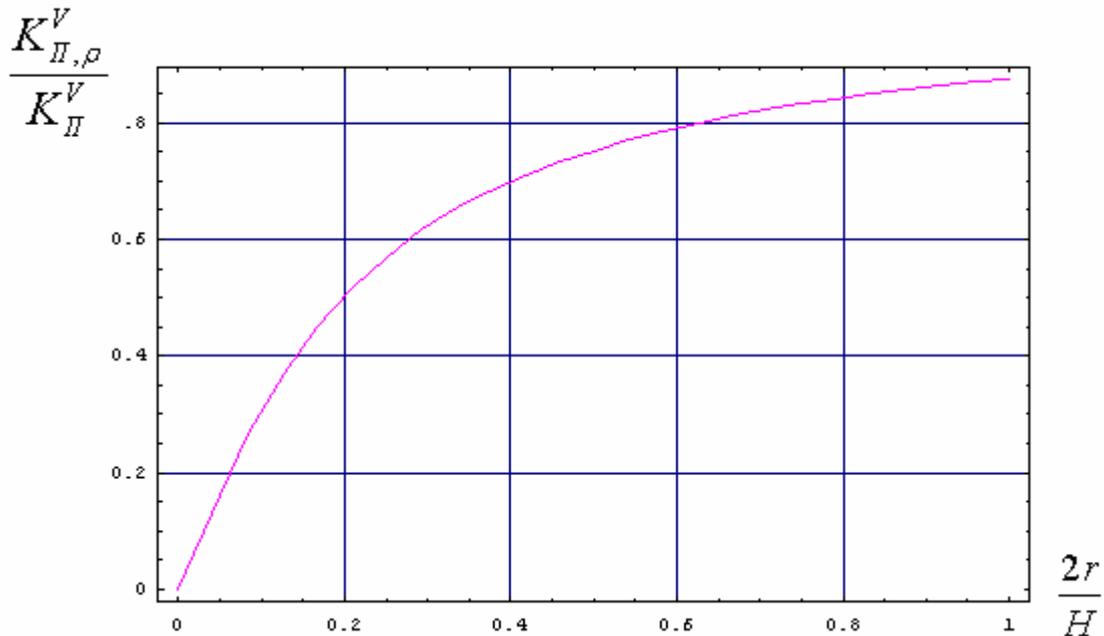


Figura 45 – Razão entre os fatores intensidade de tensão para modo II para $2\alpha=90^\circ$.

As tensões cisalhantes das amostras de referência radial e tangencial apresentadas na Tabela 3 são tensões calculadas no plano bisetor, e juntamente a substituição de todos os parâmetros referentes ao ângulo $2\alpha=90^\circ$ compõe a expressão de $K_{II,\rho}^V$ para estas amostras, de maneira que, é possível estabelecer a distribuição de tensão para as amostras de referência radial e tangencial, desde que seja estabelecida uma distância $r = H/2$ a partir da extremidade

do entalhe. A tensão normal $\sigma_{\theta\theta}$ em função da coordenada polar θ e distância $r = 6,15\text{ mm}$ para a amostra de referência radial é representada pela Figura 46.

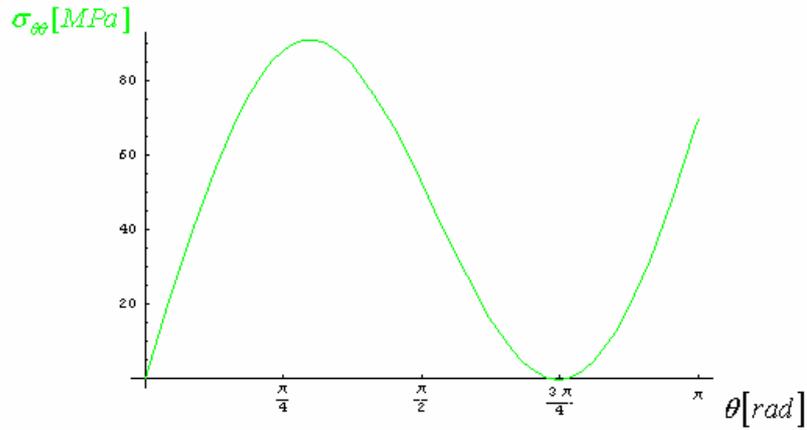


Figura 46 – Tensão $\sigma_{\theta\theta}$ na vizinhança do entalhe da amostra de referência radial.

As tensões normais σ_{rr} e $\tau_{r\theta}$ da amostra de referência radial são representadas pelas Figuras 47 e 48, respectivamente. Estas tensões são em função da coordenada polar θ e distância $r = 6,15\text{ mm}$.

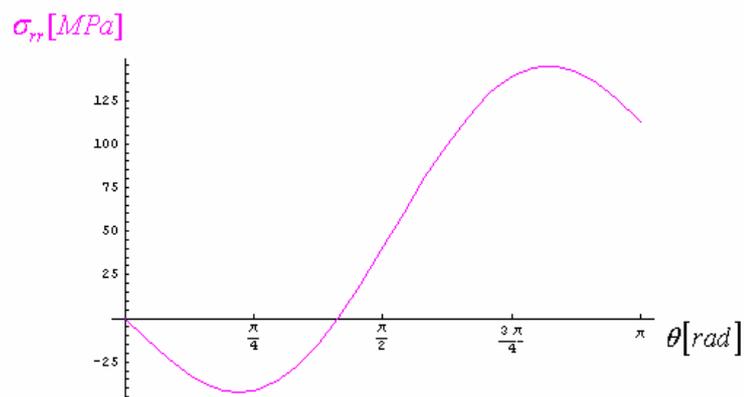


Figura 47 – Tensão σ_{rr} na vizinhança do entalhe da amostra de referência radial.

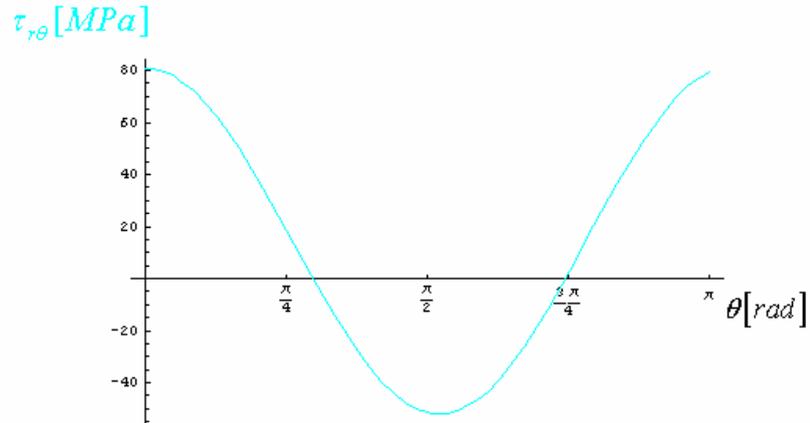


Figura 48 – Tensão $\tau_{r\theta}$ na vizinhança do entalhe da amostra de referência de radial.

Por analogia, determina-se a distribuição das tensões σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ e $\tau_{r\theta}$ da amostra de referência tangencial. A tensão normal $\sigma_{\theta\theta}$ em função da coordenada polar θ e distância $r = 6,15\text{ mm}$ para a amostra de referência tangencial é representada pela Figura 49.

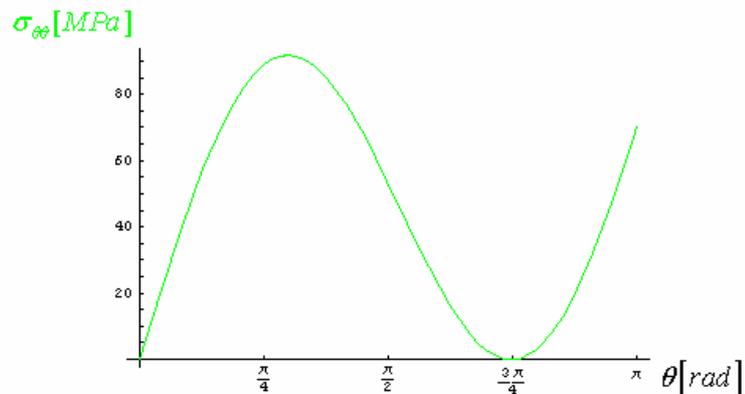


Figura 49 – Tensão $\sigma_{\theta\theta}$ na vizinhança do entalhe da amostra de referência tangencial.

As tensões normais σ_{rr} e $\tau_{r\theta}$ da amostra de referência tangencial são representadas pelas Figuras 50 e 51, respectivamente. Estas tensões são em função da coordenada polar θ e a distância $r = 6,15\text{ mm}$.

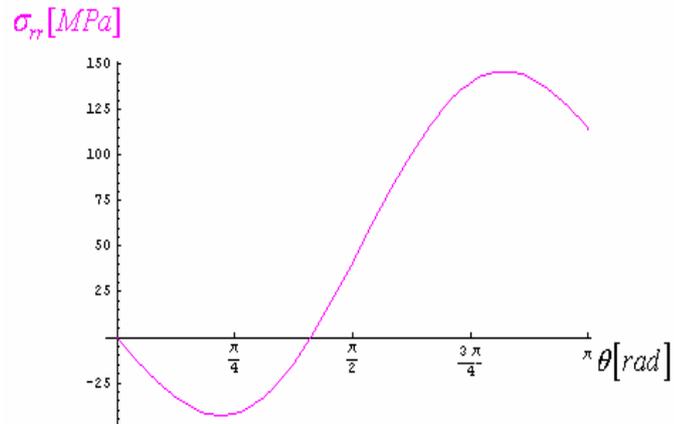


Figura 50 – Tensão σ_{rr} na vizinhança do entalhe da amostra de referência tangencial.

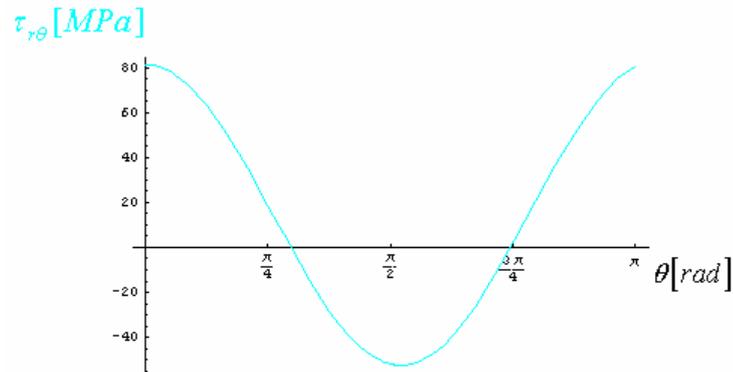


Figura 51 – Tensão $\tau_{r\theta}$ na vizinhança do entalhe da amostra de referência tangencial.

Para uma melhor avaliação da distribuição de tensão para as amostras de referência radial e tangencial, o mais indicado é expressar graficamente as três tensões principais σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ e $\tau_{r\theta}$ simultaneamente. As Figuras 52 e 53 representam o comportamento das tensões principais para amostras de referência radial e tangencial, respectivamente.

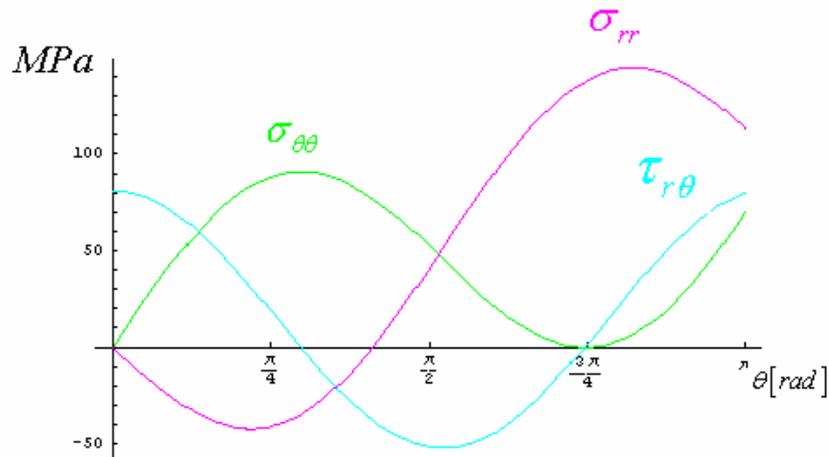


Figura 52 – Tensões principais para amostra de referência radial.

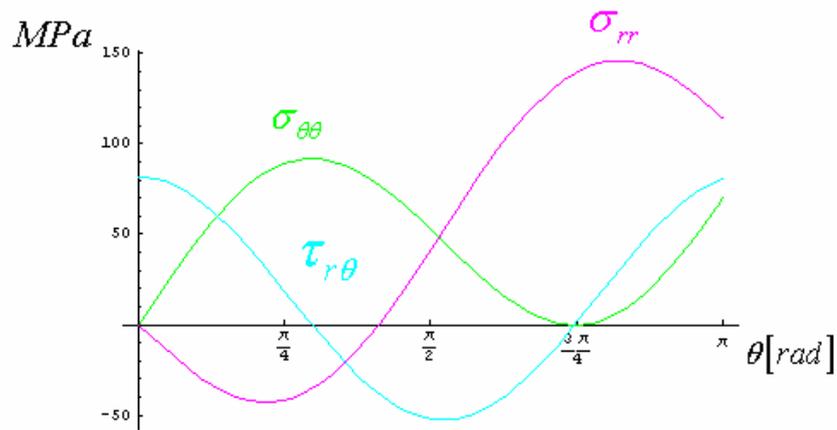


Figura 53 – Tensões principais para amostra de referência tangencial.

O mesmo procedimento é válido para diferentes ângulos de abertura. As máximas tensões de cisalhamento são estimadas pela curva de tendência do ensaio de Souza (2006). A generalização da razão entre os fatores intensidade de tensão $K_{II,\rho}^V/K_{II}^V$ é expressa em termos dos parâmetros da distribuição da tensão. Desde que, a tensão de cisalhamento seja a tensão no plano bissetor.

$$\frac{K_{II,\rho}^V}{K_{II}^V} = \frac{[1 - \lambda_2 + \chi_{b_2}(1 - \lambda_2)]}{\left[[1 - \lambda_2 + \chi_{b_2}(1 - \lambda_2)] + \frac{1}{4(\mu_2 - 1)} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{(\mu_2 - \lambda_2)} [\chi_{d_2}(1 - \mu_2) + \chi_{c_2}] \right]} \quad (4.65)$$

Apresenta-se a razão dos fatores intensidade de tensão para os ângulos notáveis 30° , 45° , 60° e 90° , a partir da equação (4.65) e dos parâmetros da distribuição de tensão para o segundo modo pela Tabela 2 para uma distância estabelecida $r = H/2$ a partir da extremidade do entalhe. A Figura 54 ilustra o comportamento da razão $K_{II,\rho}^V / K_{II}^V$ para alguns ângulos notáveis.

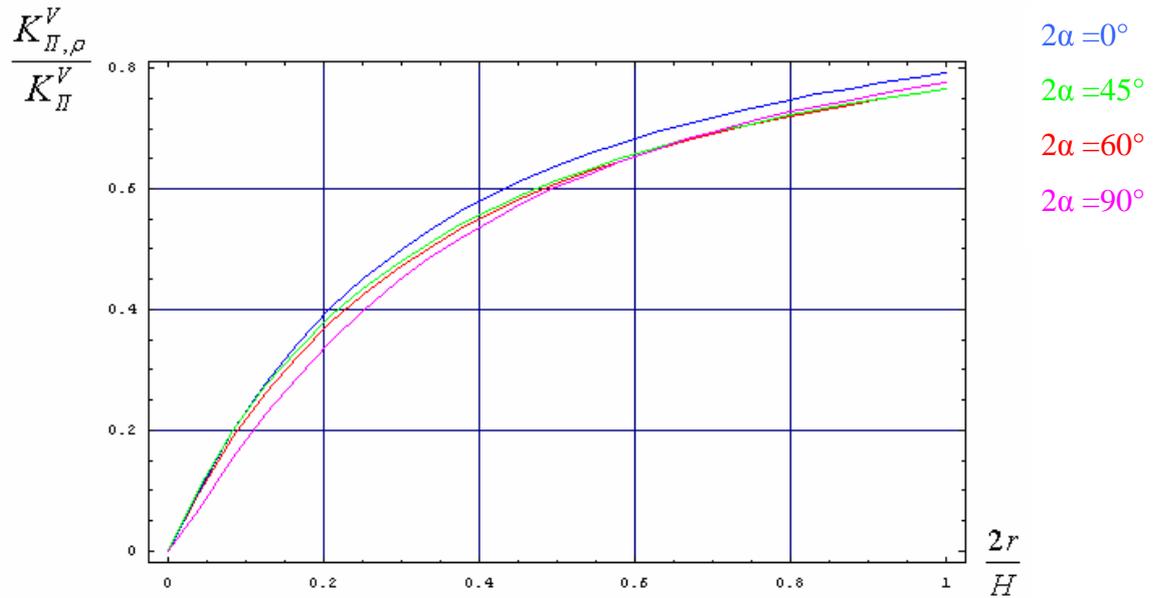


Figura 54 – Razão entre os fatores intensidade de tensão para modo II.

A Tensão de cisalhamento em função do ângulo de orientação das fibras está apresentada na Figura 55. O máximo valor da tensão de cisalhamento ocorre nas amostras com ângulo de 45° e os valores mínimos para a tensão de cisalhamento ocorrem para ângulos 0° e 90° . A Tabela 4 também apresenta os valores para a razão entre fatores intensidade de tensão para a condição $r = H/2$ e pela ausência e presença do raio de curvatura para um ângulo de abertura $2\alpha = 90^\circ$.

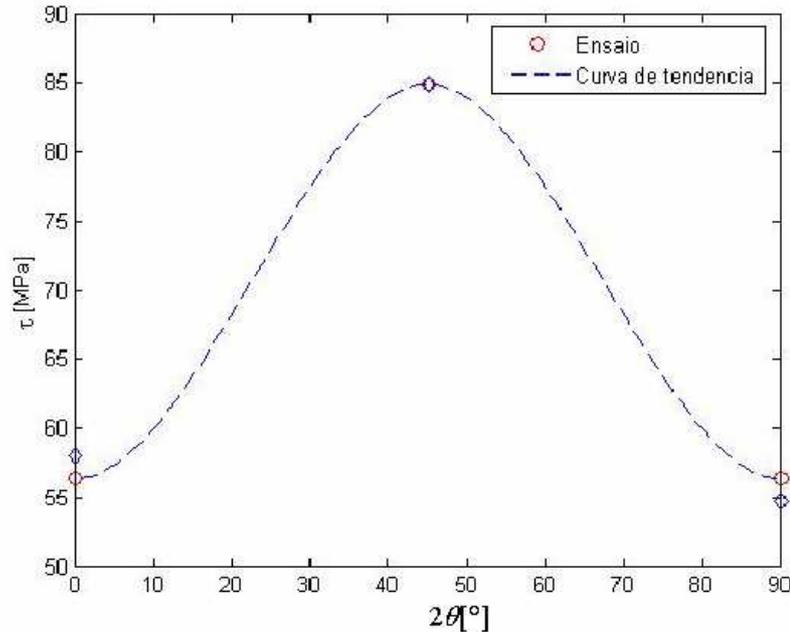


Figura 55 – Tensão de cisalhamento em função do ângulo de orientação. (Souza, 2006)

Tabela 4 – Valores estimados para tensões de cisalhamento para amostras com $2\alpha=90^\circ$.

2θ	τ [MPa]	$K_{II,\rho}^V / K_{II}^V$ ($2r/H=1$)	$K_{II,\rho}^V$ [MPa m ^{0,0915}]
0°	58,05	0,776356	8,05417
30°	77,27	0,776356	10,72086
45°	84,89	0,776356	11,73232
60°	78,18	0,776356	10,84712
90°	54,70	0,776356	7,58938

O fator intensidade de tensão pela presença de um raio de curvatura designado por $K_{II,\rho}^V$ é determinado pela razão $K_{II,\rho}^V / K_{II}^V$. A determinação da constante a_2 pela substituição dos parâmetros da distribuição de tensão e do valor da tensão de cisalhamento na equação (4.63) possibilitará calcular o valor do fator K_{II}^V , através da equação (4.62).

4.7 ENTALHE HIPERBÓLICO EM CHAPAS

Neuber (1958) estabelece uma formulação genérica para a função tensão. Esta formulação atende as diferentes configurações geométricas dos entalhes. A expressão geral para as funções tensão é composta por quatro funções harmônicas. Esta função é a resolução de problemas de sólidos de revolução gerados por hipérbolas e elipses devido à tração, flexão, torção ou força cortante transversal ao eixo.

$$\phi = \phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3 \quad (4.66)$$

Para o caso, de tensão plana, as funções ϕ_3 e ϕ_2 são nulas. A função ϕ_3 é nula, pois a função torna-se independente de z , enquanto a função ϕ_2 é dependente de x e y . Logo a função tensão resultará:

$$\phi = \phi_0 + x\phi_1 \quad (4.67)$$

As coordenadas curvilíneas u e v são referências para o uso de funções harmônicas complexas na distribuição de tensão em sólidos homogêneos pela presença de entalhes. De maneira que, as coordenadas cartesianas x e y são funções destas coordenadas $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$. Neuber (1958) estabelece as tensões normais e de cisalhamento em coordenadas curvilíneas u e v em função dos módulos de transformação h_u e h_v para uma específica função de tensão. Como apresentado no capítulo 3, os módulos h_u e h_v são idênticos e simplesmente designados por h . O módulo de transformação depende da escolha apropriada do sistema de coordenadas como elíptico, hiperbólico, parabólico ou combinação destes sistemas.

Sejam as expressões genéricas para as tensões σ_{vv} , σ_{uu} e τ_{uv} independente do sistema de coordenada curvilíneo.

$$\sigma_{uu} = \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{h_v} \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) + \frac{1}{h_u^2} \frac{1}{h_v} \frac{\partial h_v}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial u} \quad (4.68)$$

$$\sigma_{uv} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) + \frac{1}{h_v^2} \frac{1}{h_u} \frac{\partial h_u}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial v} \quad (4.69)$$

$$\tau_{uv} = \frac{1}{h_u^2} \frac{1}{h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h_v} \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) \quad (4.70)$$

As derivadas parciais da função de tensão em relação as coordenadas cartesianas x e y são importantes condições de contorno. De maneira genérica estabelecem-se as seguintes expressões para as derivadas parciais.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{h_v^2} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{1}{h_u^2} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial u} \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{h_v^2} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{1}{h_u^2} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial u} \quad (4.72)$$

4.7.1 Sistema de Coordenadas Elípticas

O conceito sobre coordenadas elípticas é estendido para coordenadas hiperbólicas. As coordenadas elípticas são classificadas como coordenadas curvilíneas. As derivadas parciais das coordenadas cartesianas x e y em relação as coordenadas curvilíneas u e v determinam os módulos de transformação ou fatores de escala h_u e h_v para este sistema de coordenadas.

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u} = \cosh u \cos v \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\partial x}{\partial v} = -\operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \quad (4.75)$$

As equações (3.6) e (3.7) designam os módulos de transformação h_u e h_v , respectivamente. A substituição das equações (4.73) e (4.75) na equação (3.6) resulta a expressão para h_u , enquanto a substituição das equações (4.73) e (4.74) na equação (3.7) resulta a expressão para h_v .

$$h_u = \sqrt{\cosh^2 u \cos^2 v + \sinh^2 u \sin^2 v} = \sqrt{\cosh^2 u \cos^2 v + \sinh^2 u (1 - \cos^2 v)} \quad (4.76)$$

$$h_v = \sqrt{\cosh^2 u \cos^2 v + \sinh^2 u \sin^2 v} = \sqrt{\cosh^2 u \cos^2 v + \sinh^2 u (1 - \cos^2 v)} \quad (4.77)$$

Facilmente, comprova-se que os módulos h_u e h_v são idênticos e estabelece um módulo de transformação único. A relação fundamental da trigonometria hiperbólica simplifica a expressão para h .

$$h = h_v = h_u = \sqrt{\sinh^2 u + \cos^2 v (\cosh^2 u - \sinh^2 u)} = \sqrt{\sinh^2 u + \cos^2 v} \quad (4.78)$$

As derivadas parciais da função de tensão em relação as coordenadas cartesianas x e y para um novo sistema de coordenadas elípticas. A substituição das derivadas parciais das coordenadas cartesianas pelo sistema de coordenadas nas equações (4.71) e (4.72) resultam as derivadas parciais $\partial\phi/\partial x$ e $\partial\phi/\partial y$, respectivamente.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{h^2} \left[\cosh u \cos v \frac{\partial\phi}{\partial u} - \sinh u \sin v \frac{\partial\phi}{\partial v} \right] \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{1}{h^2} \left[\sinh u \sin v \frac{\partial\phi}{\partial u} - \cosh u \cos v \frac{\partial\phi}{\partial v} \right] \quad (4.80)$$

A escolha da função de tensão depende da solicitação e da geometria do sólido homogêneo.

4.7.2 Distribuição de Tensão

Neuber (1958) estabeleceu a seguinte função de tensão ϕ para uma barra de largura l , espessura t com um entalhe hiperbólico como mostrado na Figura 56. O tratamento mais apropriado é o uso de coordenadas elípticas. Todas as considerações anteriores são válidas para a obtenção do campo de tensões.

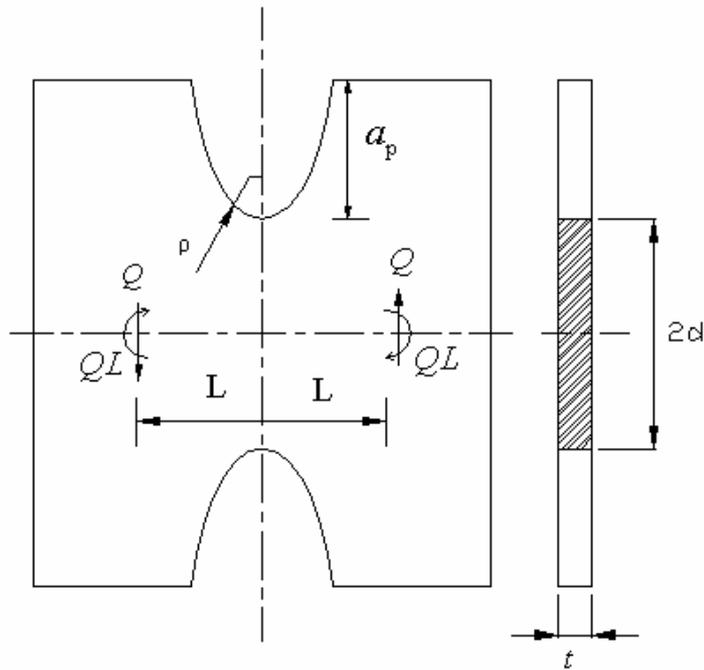


Figura 56 – Entalhe externo hiperbólico em placas.

$$\phi_0 = H_1 \operatorname{senhu} \operatorname{sen} v \quad (4.81)$$

$$\phi_1 = H_2 v \quad (4.82)$$

As constantes reais H_1 e H_2 serão determinadas a partir das condições de contorno. Finalmente, a composição da função de tensão ϕ é feita pelas duas funções harmônicas ϕ_0 e ϕ_1 conforme a equação (4.67).

$$\phi = H_1 \operatorname{senhu} \operatorname{sen} v + H_2 v \operatorname{senhu} \cos v = \operatorname{senhu} (H_1 \operatorname{sen} v + H_2 v \cos v) \quad (4.83)$$

A distribuição de tensão é objetivo desta análise, para isto as diferentes derivadas parciais são necessárias para descrever as tensões σ_{vv} , σ_{uu} e τ_{uv} . Inicialmente, determina-se a derivada parcial da função de tensão em relação as coordenadas u e v , em seguida as derivadas parciais em relação as coordenadas cartesianas x e y .

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = H_1 \operatorname{senhu} \cos v + H_2 \operatorname{senhu} (\cos v - v \operatorname{sen} v) \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \operatorname{cosh} u (H_1 \operatorname{sen} v + H_2 v \cos v) \quad (4.85)$$

A substituição das derivadas parciais da função de tensão em relação as coordenadas u e v na equações (4.79) e (4.80) resultam as expressões para as derivadas parciais da função de tensão em relação ao sistema cartesiano em termos de u e v .

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{[\operatorname{cosh} u \cos v (\operatorname{senhu} (H_1 \cos v + H_2 (\cos v - v \operatorname{sen} v))) - \operatorname{senhu} \operatorname{sen} v (\operatorname{cosh} u (H_1 \operatorname{sen} v + H_2 v \cos v))]}{h^2} \quad (4.86)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{[\operatorname{cosh}^2 u \cos v (H_1 \operatorname{sen} v \cos v + H_2 v \cos^2 v) - \operatorname{senh}^2 u (H_1 \operatorname{sen} v \cos v + H_2 \operatorname{sen} v \cos v - H_2 v \operatorname{sen}^2 v)]}{h^2} \quad (4.87)$$

Ou simplesmente,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{h^2} [\operatorname{senhu} \operatorname{cosh} u (H_1 + H_2 \cos^2 v)] \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{h^2} [\operatorname{cosh}^2 u \cos v (H_1 \operatorname{sen} v + H_2 v \cos v) - \operatorname{senh}^2 u \operatorname{sen} v (H_1 \cos v + H_2 \cos v - H_2 v \operatorname{sen} v)] \quad (4.89)$$

As condições de contorno são a tensão nominal de cisalhamento devido ao esforço cortante, a própria força cortante Q e condições geométricas da placa. A extremidade da placa que contém o entalhe possui a derivada parcial $\partial \phi / \partial y$ nula. Esta condição resulta uma expressão para a constante H_1 em termos da constante H_2 e de um valor constante de $v = v_0$.

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{v=v_0} = \frac{1}{h^2} [\operatorname{senhu} \cosh u (H_1 + H_2 \cos^2 v_0)] = 0 \quad (4.90)$$

Isto resulta:

$$H_1 = -H_2 \cos^2 v_0 \quad (4.91)$$

A tensão nominal de cisalhamento serve de comparação para obter a constante H_2 . Define-se a tensão nominal de cisalhamento pela razão força cortante Q pela região sem entalhe. O comprimento d é determinado pela relação entre a coordenada cartesiana y em relação as condições de contorno em coordenadas elípticas $v = v_0$ e $u = 0$.

$$\tau_{nom} = \frac{Q}{2td} = p \quad (4.92)$$

$$d = y \Big|_{\substack{u=0 \\ v=v_0}} = \operatorname{sen} v_0 \quad (4.93)$$

Outra condição de contorno é a força cortante Q uniformemente distribuída e distribuída sobre a espessura t . Esta mesma força cortante uniformemente distribuída pode ser calculada pela seguinte equação (4.94). A força que atua sobre o arco ∂s , arco este descrito no terceiro capítulo, exercida pelo material situado à esquerda sobre o material da direita é representado por Y . Pela teoria elementar da elasticidade:

$$-\frac{Q}{t} = Y = \int_{+v_0}^{-v_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} dy = \int_{+v_0}^{-v_0} d \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_{+v_0} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_{-v_0} \quad (4.94)$$

O resultado desta integral é dividido em duas partes:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_{+v_0} = \frac{[\cosh u^2 \cos v_0 (H_1 \operatorname{sen} v_0 + H_2 v_0 \cos v_0) - \operatorname{sen} u^2 \operatorname{sen} v_0 ((H_1 + H_2) \cos v_0 - H_2 v_0 \operatorname{sen} v_0)]}{h^2} \quad (4.95)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_{-v_0} = \frac{[\cosh^2 u \cos v_0 (-H_1 \operatorname{sen} v_0 - H_2 v_0 \cos v_0) + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v_0 ((H_1 + H_2) \cos v_0 - H_2 v_0 \operatorname{sen} v_0)]}{h^2} \quad (4.96)$$

Realizando a subtração dos termos acima, resulta a expressão genérica para a força cortante distribuída em termos das constantes H_1 e H_2 , do módulo de transformação h para um valor constante $v = v_0$.

$$-\frac{Q}{t} = \frac{1}{h^2} \left[2 \cosh^2 u \cos v_0 (H_1 \operatorname{sen} v_0 + H_2 v_0 \cos v_0) - 2 \operatorname{senh}^2 u \operatorname{sen} v_0 ((H_1 + H_2) \cos v_0 - H_2 v_0 \operatorname{sen} v_0) \right] \quad (4.97)$$

A substituição da constante H_1 pela equação (4.91) na expressão genérica da força cortante Q resulta:

$$-\frac{Q}{t} = \frac{1}{h^2} \left[\cosh^2 u \cos^2 v_0 (2H_2 v_0 - 2H_2 v_0 \cos v_0 \operatorname{sen} v_0) - \operatorname{senh}^2 u \operatorname{sen}^2 v_0 (2H_2 v_0 - 2H_2 v_0 \cos v_0 \operatorname{sen} v_0) \right] \quad (4.98)$$

A substituição do módulo de transformação h pela equação (4.78) resulta uma nova expressão para a força cortante distribuída Q/t .

$$-\frac{Q}{t} = \frac{2H_2 v_0 - 2H_2 \cos v_0 \operatorname{sen} v_0}{\cos^2 v_0 + \operatorname{senh}^2 u} \left[\cosh^2 u \cos^2 v_0 + \operatorname{senh}^2 u \operatorname{sen}^2 v_0 \right] \quad (4.99)$$

Por fim, a relação fundamental da trigonometria hiperbólica contribui para simplificar a expressão da força cortante distribuída Q/t .

$$\frac{Q}{t} = -2H_2 (v_0 - \cos v_0 \operatorname{sen} v_0) \quad (4.100)$$

A substituição da distância d na equação (4.92) resulta uma nova expressão para a tensão média de cisalhamento. Esta nova expressão é comparada com a equação da força cortante Q/t , e por conseqüência, expressão da constante H_2 é determinada por:

$$H_2 = -p \frac{\operatorname{sen} v_0}{v_0 - \operatorname{sen} v_0 \cos v_0} \quad (4.101)$$

Enquanto, o raio de curvatura do entalhe ρ é obtido pela equação (3.11) em conseqüência da condição de contorno $v = v_0$ e $u = 0$. A substituição de um novo módulo de

transformação h nesta expressão resulta uma relação do parâmetro geométrico ρ de coordenadas cartesianas em função de coordenadas elípticas.

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial v} \right|_{\substack{v=v_0 \\ u=0}} = \left| \frac{1}{(\sinh^2 u + \cos^2 v)} \frac{-\cos v \operatorname{sen} v}{\sqrt{\sinh^2 u + \cos^2 v}} \right|_{\substack{v=v_0 \\ u=0}} = \frac{\operatorname{sen} v_0}{\cos^2 v_0} \quad (4.102)$$

Facilmente, a relação entre o comprimento d e o raio de curvatura ρ é estabelecida pelas equações (4.101) e (4.93).

$$\frac{d}{\rho} = \frac{\operatorname{sen} v_0}{\cos^2 v_0} \operatorname{sen} v_0 = \tan^2 v_0 \quad (4.103)$$

A partir das equações (4.78), (4.84) e (4.85) as tensões σ_{uu} e σ_{vv} , τ_{uv} são obtidas conforme as equações (4.68), (4.69) e (4.70), respectivamente. Resultando as seguintes expressões em função da constante H_2 , do módulo de transformação h e das coordenadas u e v .

$$\sigma_{uu} = \frac{H_2}{h^2} \operatorname{sen} h u \operatorname{sen} v \left(\frac{\cos^2 v - \cos^2 v_0}{h^2} - 2 \right) \quad (4.104)$$

$$\sigma_{vv} = \frac{H_2}{h^4} \operatorname{sen} h u \operatorname{sen} v (\cos^2 v_0 - \cos^2 v) \quad (4.105)$$

$$\tau_{uv} = \frac{H_2}{h^4} \cosh u \cos v (\cos^2 v_0 - \cos^2 v) \quad (4.106)$$

A máxima tensão normal ocorre para a condição $v = v_0$ em σ_{uu} , enquanto a máxima tensão de cisalhamento ocorre para $u = 0$ em τ_{uv} . A substituição da constante H_2 e das condições de contorno nas equações (4.104) e (4.106) resultam as novas expressões para as tensões σ_{uu} e τ_{uv} .

$$(\sigma_{uu})_{v=v_0} = 2 \left(\frac{\operatorname{sen}^2 v_0}{v_0 - \operatorname{sen} v_0 \cos v_0} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} h u}{\sinh^2 u + \cos^2 v_0} \right) p \quad (4.107)$$

$$(\tau_{uv})_{u=0} = -\left(\frac{\operatorname{sen}v_0}{v_0 - \operatorname{sen}v_0 \cos v_0}\right)\left(\frac{\cos^2 v_0 - \cos^2 v}{\cos^3 v}\right)p \quad (4.108)$$

Os termos dependentes da coordenada u desaparecem na condição extrema, ou seja, o diferencial $\partial(\sigma_{uu})_{v=v_0}/\partial u$ é nulo. De maneira análoga, os termos dependentes da coordenada v desaparecem quando $\partial(\tau_{uv})_{x=0}/\partial v$ também é nulo.

$$\frac{\partial(\sigma_{uu})_{v=v_0}}{\partial u} = -2H_2 \frac{\operatorname{sen}v_0}{(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 v_0)^2} \left[(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 v_0) \cosh u - 2\operatorname{sen}^2 u \cosh u \right] = 0 \quad (4.109)$$

$$\frac{\partial(\tau_{uv})_{x=0}}{\partial v} = -H_2 \frac{\operatorname{sen}v_0}{(v_0 - \operatorname{sen}v_0 \cos v_0)} \left[2\cos^3 v \operatorname{sen}v \cos v + 3(\cos^2 v_0 - \cos^2 v) \cos^2 v \operatorname{sen}v \right] = 0 \quad (4.110)$$

Em decorrência das condições acima, conclui que:

$$\operatorname{sen}^2 u = \cos^2 v_0 \Rightarrow \operatorname{sen}u = \pm \cos v_0 \quad (4.111)$$

$$\cos^2 v = 3\cos^2 v_0 \Rightarrow \cos v = \pm\sqrt{3} \cos v_0 \quad (4.112)$$

Em conseqüência, as coordenadas cartesianas x e y são escritas em função da relação geométrica d/ρ , através das equações (4.111) e (4.112), respectivamente.

$$(x)_{v=v_0} = \operatorname{sen}u \cos v_0 = \cos^2 v_0 = \frac{d}{\operatorname{sen}v_0} \cos^2 v_0 = d \frac{1}{\tan v_0} \cos v_0 = \frac{d}{\sqrt{\frac{d}{\rho} \left(\frac{d}{\rho} + 1 \right)}} \quad (4.113)$$

$$(y)_{u=0} = \cosh u \operatorname{sen}v = \operatorname{sen}v_0 = \sqrt{1 - 3\cos^2 v_0} = \frac{d}{\operatorname{sen}v_0} \sqrt{\operatorname{sen}^2 v_0 - 2\cos^2 v_0} = d \sqrt{\frac{d/\rho - 2}{d/\rho}} \quad (4.114)$$

Em conseqüência, desta relação d/ρ as máximas tensões normal e cisalhamento são obtidas em função de parâmetros geométricos, eliminando o uso de coordenadas elípticas para este tipo de configuração. Para isto, é necessário determinar as outras funções trigonométricas em função desta relação.

$$\frac{d}{\rho} = \tan^2 v_0 = \frac{\text{sen}^2 v_0}{\cos^2 v_0} = \frac{1 - \cos^2 v_0}{\cos^2 v_0} \Rightarrow \cos v_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{d}{\rho} + 1}} \quad (4.115)$$

$$\sqrt{\frac{d}{\rho}} = \tan v_0 = \frac{\text{sen} v_0}{\cos v_0} \Rightarrow \text{sen} v_0 = \frac{\sqrt{\frac{d}{\rho}}}{\sqrt{\frac{d}{\rho} + 1}} \quad (4.116)$$

As relações máximas da tensão normal e cisalhamento para um valor arbitrário de tensão remota p dependem somente dos parâmetros d e ρ . As substituições de todos os termos expressos em coordenadas curvilíneas por termos expressos pela relação d/ρ determinam tais relações.

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = -H_2 \tan v_0 = \frac{\frac{d}{\rho} \left(\sqrt{\frac{d}{\rho} + 1} \right)}{\left(\frac{d}{\rho} + 1 \right) \arctan \sqrt{\frac{d}{\rho} - \sqrt{\frac{d}{\rho}}}} \quad (4.117)$$

$$\frac{\tau_{\max}}{p} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{B}{\cos v_0} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{9} \left(\frac{d}{\rho} + 1 \right) \sqrt{\frac{d}{\rho}}}{\left(\frac{d}{\rho} + 1 \right) \arctan \sqrt{\frac{d}{\rho} - \sqrt{\frac{d}{\rho}}}} \quad (4.118)$$

Como exemplo, deseja-se obter a distribuição de tensão na vizinhança do entalhe hiperbólico cuja relação geométrica d/ρ é igual 9,46. A partir da equação (4.103) determina-se v_0 pela função trigonométrica inversa e esta condição implica em valores numéricos para as constantes H_1 e H_2 em função de uma tensão de cisalhamento remota p . Enquanto, o módulo de transformação é função da coordenada u .

$$H_2 = -\frac{\text{sen}(1,25647)}{1,25647 - \text{sen}(1,25647) \cos(1,25647)} p = -0,988112 p \quad (4.119)$$

$$H_1 = -\cos^2(1,25647) H_2 = 0,0944519 p \quad (4.120)$$

$$h = \frac{1}{\sinh^2 u + 0,0955882} \quad (4.121)$$

A substituição destes parâmetros nas equações (4.104), (4.105) e (4.106) determina a distribuição de tensão. A tensão de cisalhamento apresenta um perfil parabólico na ausência de entalhes, isto pela teoria da elasticidade para barras retangulares sob ação de uma força cortante Q . O cisalhamento máximo na flexão é 50% maior que o cisalhamento simples. Esta tensão é representada por uma parábola tracejada e possui valor máximo no centro da barra. Enquanto a tensão de cisalhamento τ_{uv} tem o valor máximo na extremidade do entalhe.

Como aplicação desta teoria é considerar a geometria das amostras avaliadas pelo teste de Iosipescu. A geometria das amostras do item anterior em questão apresenta entalhes em V com um ângulo de abertura de 90° . Hipoteticamente desconsidera-se o entalhe em V por um entalhe hiperbólico. De maneira que, a relação entre a profundidade do entalhe e o raio de curvatura assuma o valor de 9,46.

Os valores mais expressivos para as tensões de cisalhamento em função de uma tensão de cisalhamento remota p são representados pelos pontos A, B, C e D. Independentemente de um valor específico de d/ρ , o ponto B será sempre $1,5p$, pois este valor é fixo pela teoria da elasticidade. Os demais pontos assumem valores diversos para uma específica relação entre d e ρ . Para este caso, o valor mínimo para tensão τ_{uv} expresso pelo ponto A assume o valor de $0,895p$, enquanto o valor máximo para a mesma tensão expresso pelo ponto D assume o valor $1,233p$. O ponto C representa a situação em que tensão τ_{uv} é igual a tensão de cisalhamento devido a força cortante previsto pela teoria elasticidade. O valor estimado para o ponto C assume o valor de $1,08p$. Este comportamento é observado através da Figura 57.

As tensões normais σ_{uu} e σ_{vv} apresentam comportamento diferente quando comparado com a tensão de cisalhamento τ_{uv} . A condição de contorno $v = v_0$ resulta em ausência da tensão σ_{vv} conforme a equação (4.105). De maneira que, a única tensão normal presente σ_{uu} tem um perfil simétrico em relação ao sistema de origem e assume um valor máximo $3,202p$ para o exemplo em questão. Isto é observado pela Figura 58.

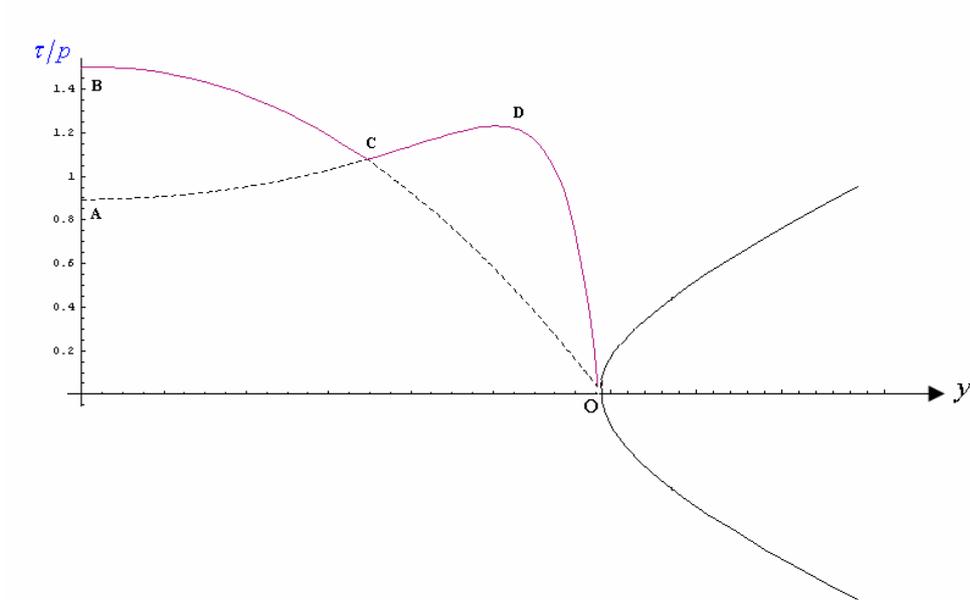


Figura 57 – Tensão de cisalhamento na vizinhança do entalhe hiperbólico em placas para

$$\frac{d}{\rho} = 9,46 .$$

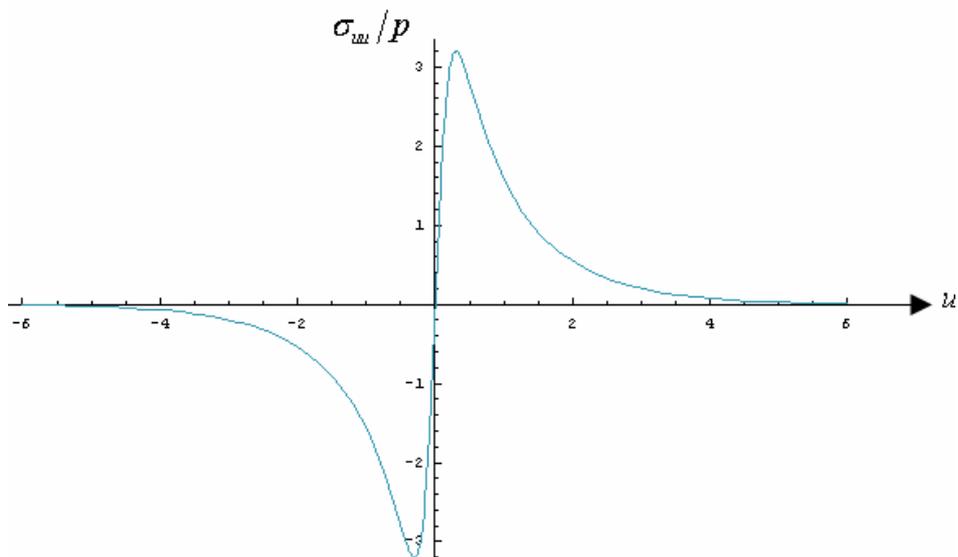


Figura 58–Tensão normal na vizinhança do entalhe hiperbólico em placas para $\frac{d}{\rho} = 9,46$.

Genericamente, as máximas tensões normal e de cisalhamento são expressas pelas equações (4.117) e (4.118) respectivamente. E também, as mesmas tensões são expressas graficamente pela Figura 59. Facilmente, verifica-se que as máximas tensões para a relação $d/\rho = 9,46$ são as mesmas apresentadas em gráficos específicos.

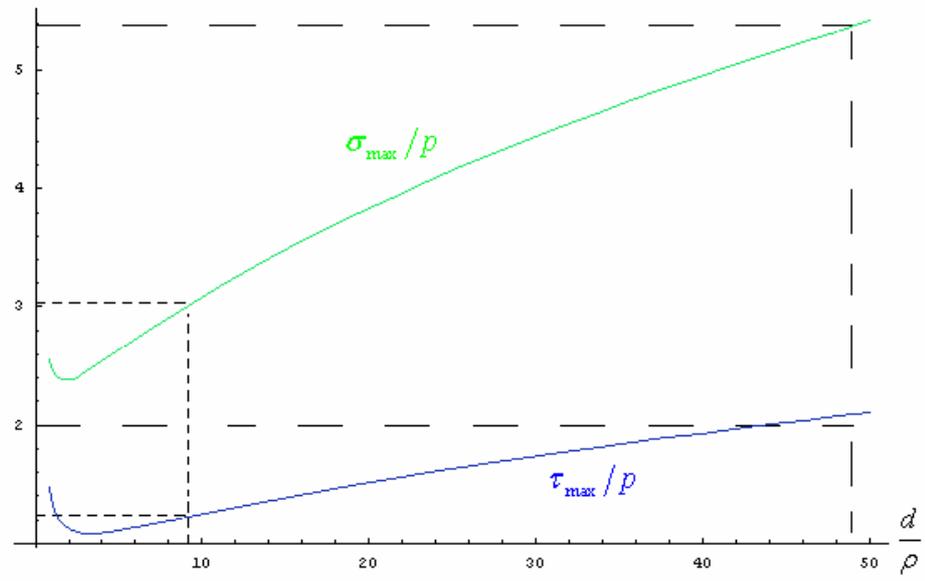
τ_{\max}/p ou σ_{\max}/p


Figura 59 – Tensões máximas na vizinhança do entalhe hiperbólico em placas.

Capítulo 5

DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO PARA O MODO III

Neste capítulo aborda-se o estudo da distribuição de tensão em entalhes em sólidos homogêneos, isotrópico sob a ação do cisalhamento em antiplano. A avaliação do terceiro modo III é feita neste capítulo, pois o comportamento das tensões principais difere dos demais modos geométricos.

5.1 FORMULAÇÃO BÁSICA

Seja um sólido assisimétrico homogêneo e anisotrópico e com entalhe circular genérico. Considere que este sólido esteja submetido à tensão cisalhante τ e deslocamento W na direção normal ao plano do entalhe. Os componentes do tensor de deformação são nulos, exceto os componentes dos planos xz e yz . A avaliação da distribuição de tensão pelo uso de funções potenciais complexas é feita pela representação do problema conforme Figura 60. A formulação é feita através de funções complexas em dois sistemas de coordenadas distintos.

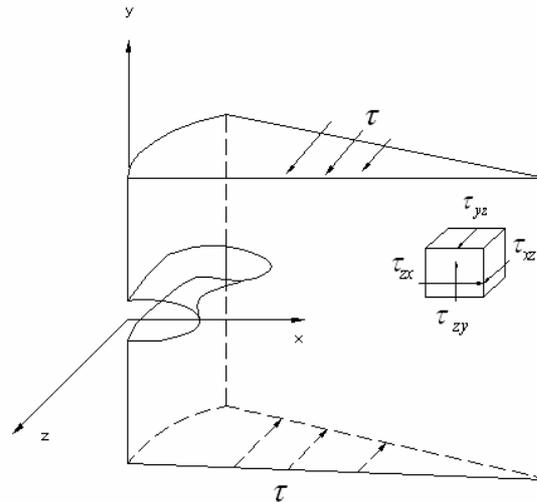


Figura 60 – Sólido assimétrico com entalhe curvilíneo genérico. (Zappalorto et al., 2008)

A relação entre a função potencial $F(Z)$, quando $Z = x + iy$, e o deslocamento W é expressa em termos do módulo de cisalhamento G . Os componentes da deformação nos planos xz e yz são obtidos pelas derivadas parciais do deslocamento em detrimento das tensões cisalhantes (Timoshenko et al., 1970).

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} \quad e \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} \quad (5.1)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad e \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad (5.2)$$

O deslocamento W na direção z é:

$$W = \frac{\text{Re}\{F(Z)\}}{G} \quad (5.3)$$

O deslocamento W satisfaz a equação de Laplace e pela ausência de forças externas. A condição de equilíbrio na direção z resulta em:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (5.4)$$

Reescrevendo a equação (5.3) em termos do conjugado da função potencial $F(Z)$ é válida para a seguinte relação:

$$F(Z) + \bar{F}(\bar{Z}) = 2GW \quad (5.5)$$

A função $F(Z)$ é obtida pelas relevantes condições de contorno. As condições de contorno dependem da característica do carregamento e da geometria do entalhe. A maneira mais conveniente é tratar em coordenadas curvilíneas devido à geometria circular do entalhe. A função $F(Z)$, uma função harmônica e holomorfa é uma função escrita em termos de potenciais complexos. Os esclarecimentos sob função harmônica e função holomorfa estão no apêndice B.

$$\begin{Bmatrix} F'(Z) \\ F'(Z)e^{i\varphi} \end{Bmatrix} = [1 \quad -i] \begin{bmatrix} \tau_{zx}/G & \tau_{xz}/G \\ \tau_{zy}/G & \tau_{z\varphi}/G \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

O ângulo entre a direção principal no sistema coordenadas polar e curvilíneas é (φ/q) . As coordenadas curvilíneas (u, v) e as tensões são representadas pelos sistemas da Figura 61.

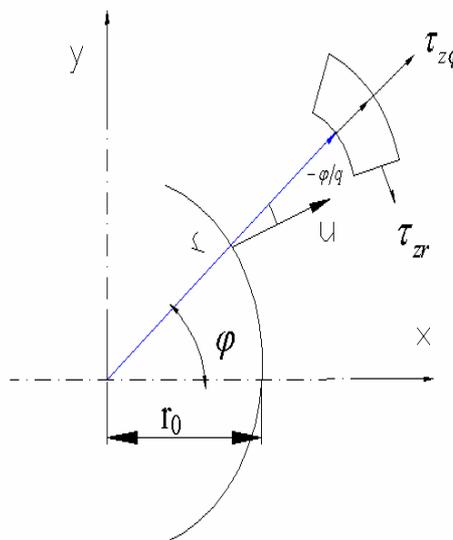


Figura 61 – Sistema de referência para tensões em coordenadas curvilínea.

Reescrevendo a equação (4.14) pela substituição do ângulo $(-\theta/q)$ pelo (φ/q) em termos das coordenadas curvilíneas. O raio de curvatura ρ é o mesmo apresentado no capítulo 3 na equação (3.17).

$$\begin{cases} u \\ v \end{cases} = r^{1/q} \begin{cases} \cos \varphi/q \\ \text{sen } \varphi/q \end{cases} \quad (5.7)$$

5.2 SISTEMA DE COORDENADA HIPERBÓLICA

Cada ponto do plano xy é caracterizado por valores definidos por coordenadas curvilíneas ξ e η , que designam a parte real e imaginária da função $F(Z)$. A função $F(Z)$ satisfaz as equações de Cauchy (1815 apud Meguid, 1989) e Riemann (1851 apud Meguid, 1989) (Timoshenko et al., 1970).

$$F(Z) = c \cosh \zeta \quad (5.8)$$

Designa-se por c a constante real que compõe a função $F(Z)$. A variável complexa ζ é decomposta através das coordenadas ξ e η . A transformação das coordenadas curvilíneas em coordenadas cartesianas da função pela equação, resulta em:

$$x + iy = c \cos \zeta \quad (5.9)$$

$$x + iy = c \cosh(\xi + i\eta) = c[\cosh \xi \cos \eta + i \text{senh } \xi \text{ sen } \eta] \quad (5.10)$$

Logo,

$$x = c \cosh \xi \cos \eta \quad (5.11a)$$

$$y = c \text{senh } \xi \text{ sen } \eta \quad (5.11b)$$

A eliminação das coordenadas ξ e η resultará em equações que representam hipérbole e elipse, respectivamente. As eliminações ocorrem através de equações fundamentais de funções hiperbólicas. O principal interesse é a eliminação de ξ das coordenadas x e y através da seguinte relação hiperbólica:

$$\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1 \quad (5.12)$$

Para diferentes valores de η , resulta a equação de uma família de hipérbolas, cujos focos são os mesmos que a elipse gerada pela eliminação de η .

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1 \quad (5.13)$$

Para valores constantes de $\eta = \eta_0$, podem-se escrever as equações canônicas da hipérbole:

$$m = c \cos \eta_0 \quad (5.14a)$$

$$b = c \sin \eta_0 \quad (5.14b)$$

5.2.1 Potencial Complexo para Transformações Hiperbólicas

A generalização de expressões para as tensões e deslocamentos ocorre pela a escolha adequada para o potencial complexo. A escolha mais simples é o potencial $F(Z)$. A diferenciação do potencial $F(Z)$ estabelece os componentes das tensões cisalhantes no plano z .

$$F(Z) = A_3 \cosh \zeta \quad (5.15)$$

Quando A_3 é um coeficiente complexo decomposto em $A_3 = A_1 + iA_2$. A variável complexa ζ é a mesma variável de transformação da equação (5.9).

$$F'(Z) = \frac{\partial F(Z)}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial Z} = \frac{A_1 + iA_2}{\sinh \zeta} = \tau_{zx} - i\tau_{zy} \quad (5.16)$$

Determinando a expressão para co-secante hiperbólica para substituir na equação (5.16).

$$\frac{1}{\sinh \zeta} = \frac{1}{\frac{e^{\xi+i\eta} - e^{-\xi-i\eta}}{2}} = \frac{2 \cos \eta \sinh \xi - 2i \operatorname{sen} \eta \cosh \xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \quad (5.17)$$

A substituição da expressão $\sinh^{-1} \zeta$ no potencial complexo $F(Z)$ permite a determinação das tensões τ_{zx} e τ_{zy} em função das variáveis ξ e η e das constantes A_1 e A_2 pela separação de termos reais e imaginários.

$$F'(Z) = \frac{(2A_1 \cos \eta \sinh \xi + 2A_2 \operatorname{sen} \eta \cosh \xi) + i(2A_2 \cos \eta \sinh \xi + 2A_1 \operatorname{sen} \eta \cosh \xi)}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \quad (5.18)$$

Logo, as tensões τ_{zx} e τ_{zy} são:

$$\tau_{zx} = \frac{(2A_1 \cos \eta \sinh \xi + 2A_2 \operatorname{sen} \eta \cosh \xi)}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \quad (5.19a)$$

$$\tau_{zy} = \frac{(2A_2 \cos \eta \sinh \xi + 2A_1 \operatorname{sen} \eta \cosh \xi)}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \quad (5.19b)$$

A constante A_1 é determinado pela imposição da condição de contorno no entalhe quando $\eta = \eta_0$ e $\xi \rightarrow 0$ implica que τ_{zy} é nula.

$$A_2 = A_1 \tan \eta_0 \quad (5.20)$$

$$\tau_{zx} = 2A_1 \left[\frac{\cos \eta \sinh \xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} + \frac{(\operatorname{sen} \eta \cos \xi) \operatorname{sen} \eta_0}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \eta_0} \right] \quad (5.21a)$$

$$\tau_{zx} = A_1 \frac{2 \cos \eta \sinh \xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \quad (5.21b)$$

A condição de $\text{sencosh} \xi \tan \eta_0 \ll \cos \eta \sinh \xi$ resulta:

$$\tau_{zy} = 2A_1 \frac{\text{sen} \eta \cosh \xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \quad (5.22)$$

Para $\xi = 0$ ocorre simplificações nas equações (5.10), de maneira que, resultam apenas relações trigonométricas. As relações resultantes são expressas pela coordenada cartesiana x e a distância focal c , pois a coordenada cartesiana y é nula para esta condição.

$$\cos \eta = \frac{x}{c} \quad (5.23a)$$

$$\text{sen} \eta = \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} \quad (5.23b)$$

$$\cos 2\eta = \cos^2 \eta - \text{sen}^2 \eta = 2 \frac{x^2}{c^2} - 1 \quad (5.23c)$$

A tensão máxima cisalhante na extremidade do entalhe é escrita pelo parâmetro geométrico de Neuber (1958), através do raio de curvatura $\rho = b^2/m$. A distância focal c é também expressa por este parâmetro.

$$\tau_{\max} = \frac{c A_1}{\sqrt{c^2 - m^2}} \quad (5.24)$$

$$c = \sqrt{m^2 + b^2} = b \sqrt{\frac{m}{\rho} + 1} \quad (5.25)$$

O coeficiente A_I é escrito pela tensão de cisalhante remota τ_{nom} , parâmetros geométricos (b e c) e pelo fator de concentração de tensão k_t . O fator de concentração de tensão depende das condições da geometria e do carregamento.

$$A_I = \tau_{nom} \frac{b}{c} k_t = \frac{\tau_{nom} k_t}{\sqrt{1 + \frac{m}{\rho}}} \quad (5.26)$$

As tensões cisalhantes em função do parâmetro de Neuber (1958) e pelo fator de concentração de tensão.

$$\tau_{zy} = \tau_{nom} \frac{2k_t}{\sqrt{1 + \frac{m}{\rho}}} \frac{\text{sen} \eta \cosh \xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \quad (5.27)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{nom} \frac{2k_t}{\sqrt{1 + \frac{m}{\rho}}} \frac{\cos \eta \text{senh} \xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \quad (5.28)$$

Pelas tensões cisalhantes τ_{zx} e τ_{zy} é possível obter as deformações angulares associada ao módulo de elasticidade ao cisalhamento G , característica para cada material.

$$\gamma_{zy} = \tau_{nom} \frac{2k_t}{G \sqrt{1 + \frac{m}{\rho}}} \frac{\text{sen} \eta \cosh \xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \quad (5.29)$$

$$\gamma_{zx} = \tau_{nom} \frac{2k_t}{G \sqrt{1 + \frac{m}{\rho}}} \frac{\cos \eta \text{senh} \xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \quad (5.30)$$

O fator de concentração de tensão para entalhes circulares em cisalhamento uniforme antiplano proposto por Neuber (1958) é:

$$K_t = \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{m}{\rho}\right)^{3/2}}{\left(1 + \frac{m}{\rho}\right) \arcsen \left(\frac{\sqrt{m/\rho}}{\sqrt{1 + \frac{m}{\rho}}} \right) - \sqrt{\frac{m}{\rho}}} \quad (5.31)$$

A representação gráfica do fator de concentração de tensão entalhes circulares em cisalhamento uniforme antiplano, através da equação (5.31) encontra-se na Figura 62.

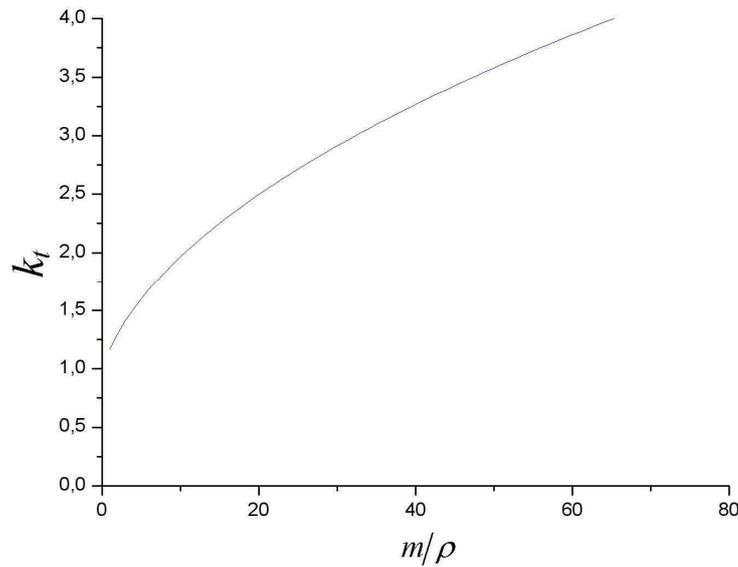


Figura 62 – Fator de concentração em cisalhamento uniforme em antiplano.

5.3 TRANSFORMAÇÃO HIPERBÓLICA-PARABÓLICA

A função tensão $F(Z)$ assume outra expressão matemática complexa. A transformação hiperbólico-parabólica facilita a determinação do coeficiente assintótico para o modo geométrico III. De maneira similar, a diferenciação do potencial complexo da equação (2.29) é válida para qualquer função holomorfa. A função expressa na equação (5.32) satisfaz esta condição, de maneira que, determina as tensões cisalhantes.

$$F(Z) = A_3 Z = A_3 w^q = (A_1 + iA_2)(u + iv)^q \quad (5.32)$$

$$F'(Z) = \frac{\partial F(Z)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} = (A_1 + iA_2) \frac{1}{q(u+iv)^{q-1}} \quad (5.33)$$

Multiplicando toda a equação (5.33) por $(u-iv)^{q-1}$ é possível simplificar a mesma. A equação fundamental trigonométrica em (2.8) é utilizada para reescrever o resultado desta operação em termos de r . Aplicando a definição da equação de Moivre (1725 apud Barber, 1992), ou seja, escrever a potência de número complexo em forma trigonométrica de seno e co-seno elimina-se as coordenadas (u, v) .

$$F'(Z) = \frac{(A_1 + iA_2)(u+iv)^{q-1}}{q(u+iv)^{q-1}} \frac{(u-iv)^{q-1}}{q(u-iv)^{q-1}} = \frac{(A_1 + iA_2)(u+iv)^{q-1}}{q(u^2+v^2)^{q-1}} \quad (5.34)$$

O potencial complexo $F'(Z)$ escrita de forma trigonométrica

$$F'(Z) = \frac{(A_1 + iA_2)r^{(q-1/q)} [\cos \varphi/q - i \operatorname{sen} \varphi/q]^{q-1}}{qr^{2\left(\frac{q-1}{q}\right)}} = \frac{(A_1 + iA_2) [\cos \varphi/q - i \operatorname{sen} \varphi/q]^{q-1} (A_1 + iA_2)}{qr^{\left(\frac{q-1}{q}\right)} qr^{\frac{q-1}{q}}} \quad (5.35)$$

O potencial complexo $F'(Z)$ escrita pela equação de Moivre (1725 apud Barber, 1992):

$$F'(Z) = \frac{(A_1 + iA_2)}{qr^{\frac{q-1}{q}}} \left[\cos \left(\frac{q-1}{q} \right) \varphi - i \operatorname{sen} \left(\frac{q-1}{q} \right) \varphi \right] \quad (5.36)$$

O potencial $F'(Z)$ é organizado em termos reais e imaginários. A separação dos termos permite identificar as tensões τ_{zx} e τ_{zy} .

$$F'(Z) = \frac{1}{qr^{\frac{q-1}{q}}} \left\{ \left[A_1 \cos \left(\frac{q-1}{q} \right) \varphi + A_2 \operatorname{sen} \left(\frac{q-1}{q} \right) \varphi \right] + i \left[A_2 \cos \left(\frac{q-1}{q} \right) \varphi - A_1 \operatorname{sen} \left(\frac{q-1}{q} \right) \varphi \right] \right\} \quad (5.37)$$

$$\tau_{zx} = \frac{1}{qr^{\frac{q-1}{q}}} \left[A_1 \cos \left(\frac{q-1}{q} \right) \varphi + A_2 \operatorname{sen} \left(\frac{q-1}{q} \right) \varphi \right] \quad (5.38)$$

$$\tau_{zy} = \frac{-1}{qr^{\frac{q-1}{q}}} \left[-A_2 \cos\left(\frac{q-1}{q}\right)\varphi + A_1 \text{sen}\left(\frac{q-1}{q}\right)\varphi \right] \quad (5.39)$$

5.3.1 Sistema de Tensões de Cisalhamento em Coordenadas Polares

A mudança do sistema cartesiano para o sistema de coordenada polar é representada pela Figura 63. A transformação ocorre por meio de tensores. A convenção de sinais é representada pelo o sentido da decomposição das tensões τ_{zx} e τ_{zy} .

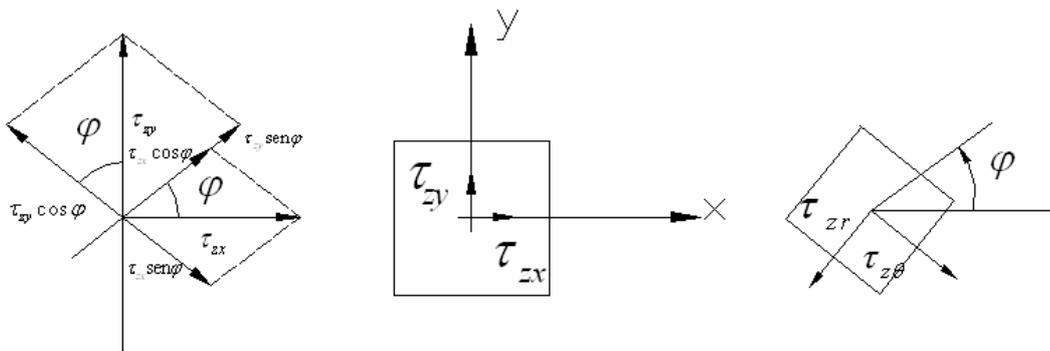


Figura 63 – Transformação do sistema de coordenadas cartesianas em sistema de coordenadas polares.

Tensor tensão é dado por:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{zr} \\ \tau_{z\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \text{sen} \varphi \\ -\text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

As tensões τ_{zr} e $\tau_{z\phi}$ são escritas pelo tensor tensão e pelas tensões τ_{zx} e τ_{zy} , respectivamente. As tensões τ_{zr} e $\tau_{z\phi}$ são obtidas a partir das equações (5.38) e (5.39).

$$\begin{Bmatrix} \tau_{zr} \\ \tau_{z\phi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{qr^{\frac{q-1}{q}}} \left[A_1 \begin{Bmatrix} \cos((q-1)/q) \\ \text{sen}((q-1)/q) \end{Bmatrix} + A_2 \begin{Bmatrix} \text{sen}((q-1)/q) \\ -\cos((q-1)/q) \end{Bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \cos \varphi & \text{sen} \varphi \\ -\text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

5.3.2 Coeficiente Assintótico

Uma nova função $F(Z)$ é escrita a partir da equação (5.32), de maneira que, a função seja expressa em termos do coeficiente assintótico λ_3 . Esta nova equação assemelha com o primeiro termos do potencial $\psi(Z)$ a distribuição de tensão para os modos I e II. Esta função é coincidente com o primeiro potencial para a solução (Lazzarin et al., 1998).

$$F(Z) = A_3 Z^\lambda = (A_1 + iA_2) Z^\lambda \quad (5.42)$$

As tensões polares τ_{zr} e $\tau_{z\varphi}$, as tensões retangulares τ_{zx} e τ_{zy} são determinadas pela condição $e^{i\varphi} F'(Z)$ e $F'(Z)$ para esta função. A distinção das tensões nestas expressões ocorre pela separação dos termos reais e imaginários.

$$\begin{cases} F'(Z) \\ e^{i\varphi} F'(Z) \end{cases} = [1-i] \begin{bmatrix} \tau_{zx} & \tau_{zr} \\ \tau_{zy} & \tau_{r\varphi} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

As expressões são apresentadas a seguir, de maneira que, as tensões τ_{zr} , $\tau_{z\varphi}$, τ_{zx} e τ_{zy} sejam determinadas pela separação de termos reais e imaginários.

$$F'(Z) = A_3 Z^\lambda = \lambda(A_1 + iA_2) r^{\lambda-1} \quad (5.44)$$

$$F'(Z)e^{i\varphi} = e^{i\varphi} (A_1 + iA_2) \lambda r^{\lambda-1} e^{i(\lambda-1)\varphi} = \lambda r^{\lambda-1} [(A_1 \cos \lambda\varphi - A_2 \sin \lambda\varphi) + i(A_1 \sin \lambda\varphi + A_2 \cos \lambda\varphi)] Z^\lambda \quad (5.45)$$

As tensões de interesse são τ_{zr} e $\tau_{z\varphi}$, pois as tensões retangulares não fornecem facilmente para determinar o coeficiente assintótico em virtude do cisalhamento uniforme no antiplano. De maneira que, é feita a substituição de λ por λ_3 .

$$\tau_{zr} = \text{Re}\{e^{i\varphi} F'(Z)\} = \lambda r^{\lambda-1} (A_1 \cos \lambda\varphi - A_2 \sin \lambda\varphi) \quad (5.46)$$

$$\tau_{z\varphi} = -\text{Im}\{e^{i\varphi} F'(Z)\} = \lambda r^{\lambda-1} (-A_1 \sin \lambda\varphi - A_2 \cos \lambda\varphi) \quad (5.47)$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen}\lambda_3\gamma & \cos\lambda_3\gamma \\ -\operatorname{sen}\lambda_3\gamma & \cos\lambda_3\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.48)$$

O sistema de equações trigonométricas é resultado das condições de contorno de $\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \varphi \rightarrow \pm\gamma}} (r^{1-\lambda_3} \tau_{z\varphi}) = 0$. A equação característica do sistema é representada pelo gráfico abaixo, de maneira que, as raízes são os autovalores do problema. Esta equação é obtida pelo determinante da matriz dos coeficientes.

$$f(\lambda_3) = \operatorname{sen}(2\lambda_3\gamma) = 2\operatorname{sen}\lambda_3\gamma \cos\lambda_3\gamma = 0 \quad (5.49)$$

A Figura 64 representa todos os autovalores do modo III para alguns ângulos notáveis. O comportamento destas funções é avaliado para os diferentes ângulos de abertura. A avaliação é feita em função dos ângulos notáveis 0° , 30° , 60° , 90° e 135° .

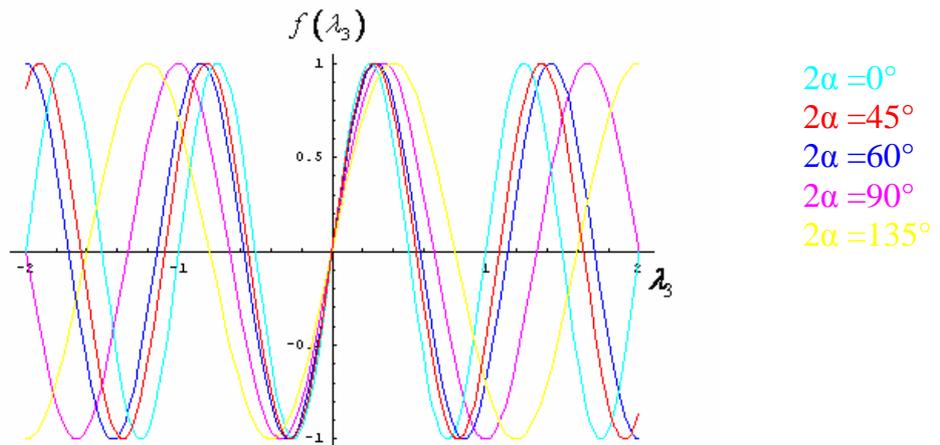


Figura 64 – Funções para os coeficientes assintóticos do modo III.

Pela análise do gráfico existe um número infinito de soluções. A solução de interesse é o menor valor positivo para λ_3 . Outra forma mais simples de obter o coeficiente assintótico é pela equação expressa pelo parâmetro geométrico q , pois o parâmetro γ é conhecido de acordo com a equação (3.12). A Figura 65 é o comportamento do coeficiente assintótico λ_3 para diferentes ângulos de abertura.

$$\pi q = 2\pi - 2\alpha = 2\gamma \Rightarrow \lambda_3 = \frac{\pi}{2\gamma} = \frac{1}{q} \quad (5.50)$$

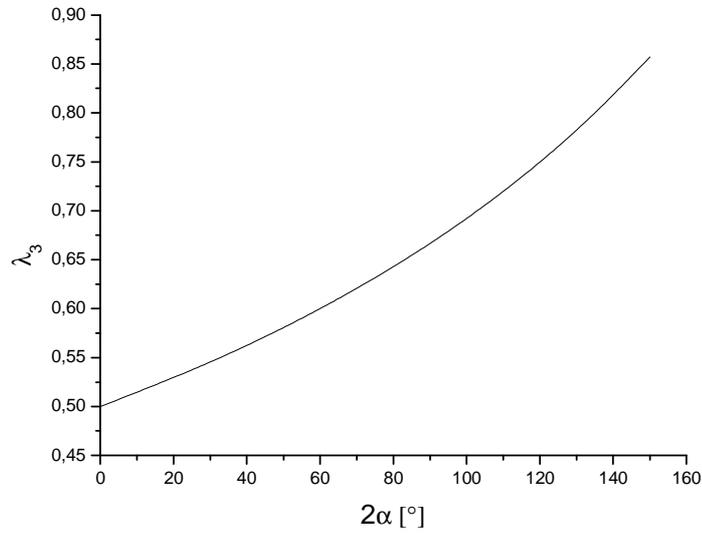


Figura 65 – Coeficientes assintóticos para o modo III.

Finalmente, as tensões τ_{zr} e $\tau_{z\varphi}$ são proporcionais ao fator $r^{1-\lambda_3}$.

$$\begin{Bmatrix} \tau_{zr} \\ \tau_{z\varphi} \end{Bmatrix} = -\lambda_3 r^{\lambda_3-1} \left[A_1 \begin{Bmatrix} -\cos \lambda_3 \gamma \\ \text{sen} \lambda_3 \gamma \end{Bmatrix} + A_2 \begin{Bmatrix} \text{sen} \lambda_3 \gamma \\ \cos \lambda_3 \gamma \end{Bmatrix} \right] \quad (5.51)$$

Pela condição de $r \rightarrow \infty$ tem-se o limite, de maneira que, a constante A_1 é escrita em termos da constante A_2 .

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1-\lambda_3} \tau_{z\varphi} = 0 \Rightarrow -\lambda_3 r^{\lambda_3-1} [A_1 \text{sen} \lambda_3 \gamma + A_2 \cos \lambda_3 \gamma] = 0 \quad (5.52)$$

$$A_1 = -A_2 \frac{\cos \lambda_3 \gamma}{\text{sen} \lambda_3 \gamma} = -A_2 \cotan \lambda_3 \gamma \quad (5.53)$$

A imposição que $\lambda_3 = \pi/2\gamma$ resultará em A_1 como uma constante nula. Finalmente, as tensões τ_{zr} e $\tau_{z\varphi}$ são escritas pela constante A_2 .

$$\begin{Bmatrix} \tau_{zr} \\ \tau_{z\varphi} \end{Bmatrix} = -\lambda_3 r^{\lambda_3-1} A_2 \begin{Bmatrix} \text{sen} \lambda \gamma \\ \cos \lambda \gamma \end{Bmatrix} \quad (5.54)$$

As tensões τ_{zr} e $\tau_{z\varphi}$ são escritas pelo fator de intensidade de tensão aplicado para entalhes submetidos a cisalhamento uniforme em antiplano, $K_{III\rho}$. A forma familiar do fator intensidade de tensão para o modo III (K_{III}) é expandida para o caso de entalhes.

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{z\varphi}(r, \varphi = 0) \sqrt{2\pi r} \quad (5.55)$$

$$K_{III\rho} = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow r_0} [r^{1-\lambda_3} \tau_{z\varphi}(r, \varphi = 0)] \quad (5.56)$$

A tensão $\tau_{z\varphi}$ é escrita pelo fator $K_{III\rho}$, de maneira que, finalmente a constante A_2 é obtida para a condição de cisalhamento uniforme em antiplano para o potencial complexo $F(Z) = A_3 Z$.

$$\tau_{z\varphi} = -\lambda_3 r^{\lambda_3-1} A_2 = K_{III\rho} / (\sqrt{2\pi} r^{1-\lambda_3}) \quad (5.57a)$$

$$A_2 = -\frac{K_{III\rho}}{\sqrt{2\pi} \lambda_3} \quad (5.57b)$$

A substituição da constante A_2 na equação (5.47) resulta uma expressão geral para as tensões τ_{zr} e $\tau_{z\varphi}$.

$$\begin{cases} \tau_{zr}(r, \varphi) \\ \tau_{z\varphi}(r, \varphi) \end{cases} = \frac{K_{III\rho} r^{\lambda_3-1}}{\sqrt{2\pi} \lambda_3} \begin{cases} \text{sen } \lambda_3 \varphi \\ \text{cos } \lambda_3 \varphi \end{cases} \quad (5.58)$$

Uma vez determinado as tensões τ_{zx} e τ_{zy} , as deformações angulares são obtidas diretamente da definição clássica da resistência dos materiais.

$$\begin{cases} \gamma_{zr}(r, \varphi) \\ \gamma_{z\varphi}(r, \varphi) \end{cases} = \frac{K_{III\rho} r^{\lambda_3-1}}{G \sqrt{2\pi} \lambda_3} \begin{cases} \text{sen } \lambda_3 \varphi \\ \text{cos } \lambda_3 \varphi \end{cases} \quad (5.59)$$

O deslocamento W na direção z pela equação (5.3) é substituído por outra expressão em função do fator de intensidade de tensão, coeficiente assintótico λ_3 e de parâmetros geométricos.

$$W = \frac{K_{III\rho}}{G\lambda_3\sqrt{2\pi}} r^{\lambda_3-1} \text{sen}\lambda_3\varphi \quad (5.60)$$

5.3.3 Fator Intensidade de Tensão

Soluções analíticas para o fator intensidade de tensão devido à torção em entalhes $K_{III\rho}$ é função da presença de um raio de curvatura ρ e ângulo de abertura 2α para uma máxima tensão de cisalhamento τ_{\max} . A seguinte expressão para $K_{III\rho}$ é consequência da equação (5.56).

$$K_{III\rho} = \tau_{\max} \sqrt{2\pi} r_0^{1-\lambda_3} \quad (5.61)$$

A constante A_2 poderá ser escrita em substituição da generalização do fator intensidade de tensão, e assim, expressar as tensões τ_{zr} e $\tau_{z\varphi}$ em função da máxima tensão de cisalhamento.

$$\begin{cases} \tau_{zr}(r, \varphi) \\ \tau_{z\varphi}(r, \varphi) \end{cases} = \tau_{\max} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_3-1} \begin{cases} \text{sen}\lambda_3\varphi \\ \text{cos}\lambda_3\varphi \end{cases} \quad (5.62)$$

A estimativa para o fator de concentração de tensão, k_t para eixos sob torção com entalhes parabólicos resulta pela sua própria definição. A razão entre a tensão de cisalhamento nominal e pela máxima tensão de cisalhamento define o fator de concentração de tensão. Avaliando a condição de equilíbrio ao longo do plano bissetor resulta a seguinte igualdade entre as tensões.

$$\int_A \tau(x) x dA = \int_A \tau_{\text{bissetor}} x dA \quad (5.63)$$

A tensão de cisalhamento ao longo do plano bissetor ocorre pela condição $\varphi = 0^\circ$, isto implica que, o único componente da tensão para esta condição é $\tau_{z\varphi}$ conforme a equação (5.62).

$$\int_A \tau(x) x dA = \int_A \tau_{z\varphi} \Big|_{y=0} x dA \quad (5.64)$$

Esta integração é restrita em coordenadas polares, tomando o centro do eixo como origem deste sistema. O parâmetro geométrico d é o mesmo apresentado nas Figuras 50 e 73, distância da extremidade do entalhe até o sistema de coordenadas.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^d \tau(x) x^2 dx d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^d \tau_{z\varphi} \Big|_{y=0} x^2 dx d\theta \quad (5.65)$$

A tensão $\tau_{z\varphi}$ deverá ser corrigida pela introdução $((d+r_0-x)/d)$ pelo decréscimo linear da tensão nominal de cisalhamento. De maneira que, a equação (5.65) é reescrita com estas condições. A tensão $\tau_{z\varphi}$ é expressa pela máxima tensão de cisalhamento, a partir da generalização do fator de intensidade de tensão $K_{III\rho}$. Enquanto, a tensão $\tau(x)$ é substituída pela tensão nominal.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^d \tau_N \frac{x}{R} x^2 dx d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^d \tau_{\max} \left(\frac{x}{r_0} \right)^{\lambda_3-1} \left(1 - \frac{x-r_0}{R} \right) x^2 dx d\theta \quad (5.66)$$

Uma nova variável auxiliar é introduzida para simplificar a expressão (5.66). Designa-se como r_3 esta nova variável e assume a condição $r_3 = d + r_0 - x$. Esta nova condição implica em reescrever a condição de equilíbrio conforme a equação (5.63).

$$\int_0^{2\pi} \int_0^d \tau_N \frac{r_3^3}{d} dr_3 d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^d \tau_{\max} \left(\frac{d+r_0-r_3}{r_0} \right)^{\lambda_3-1} \frac{r_3^3}{d} dr_3 d\theta \quad (5.67)$$

A simplificação do resultado desta igualdade de integrais duplas é feita pela separação das mesmas. Facilmente reduz uma integral dupla por outra integral simples para ambos os termos desta igualdade. Esta redução ocorre resolução da integral externa através do ângulo de rotação no limites de 0 e 2π radianos.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^d \tau_{\max} \left(\frac{d+r_0-r_3}{r_0} \right)^{\lambda_3-1} \frac{r_3^3}{d} dr_3 d\theta = \frac{\tau_{\max}}{d} \left[\int_0^d \left(\frac{x}{r_0} \right)^{\lambda_3-1} x^3 dx \right] \theta \Big|_0^{2\pi} \quad (5.68)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^d \tau_N \frac{r_3^3}{d} dr_3 d\theta = \frac{\tau_N}{d} \theta \Big|_0^{2\pi} \int_0^d r_3^3 dr_3 = \frac{\tau_N}{d} \frac{R^4}{4} \theta \Big|_0^{2\pi} \quad (5.69)$$

O fator de concentração é facilmente estabelecido pela igualdade das equações (5.68) e (5.69), pois o resultado desta igualdade é a razão entre as tensões τ_{nom} e τ_{max} . A maior dificuldade é obter o resultado do denominador. O uso do software MATHEMATICA 5.0 possibilitou encontrar o resultado desta integral definida analítica.

$$k_t = \frac{\tau_{nom}}{\tau_{max}} = \frac{\frac{d^4}{4}}{\int_0^d \left(\frac{d+r_0-r_3}{r_0} \right)^{\lambda_3-1} r_3^3 dr_3} \quad (5.70)$$

O resultado é apresentado em partes, pois a expressão é extensa. O resultado contém quatro partes apresentadas a seguir.

$$k_t = \frac{R^3}{4 \sum_{i=1}^4 P_i} \quad (5.71)$$

$$P_1 = \frac{4(d+r_0)^4 \left(\frac{d+r_0}{r_0} \right)^{\lambda_3-1}}{d \left(24 + 50(\lambda_3-1) + 35(\lambda_3-1)^2 + 10(\lambda_3-1)^3 + (\lambda_3-1)^4 \right)} \quad (5.72a)$$

$$P_2 = \frac{-6r_0 \left(r_0^3 + dr_0^2 (4 + (\lambda_3-1)) \right)}{d \left(24 + 50(\lambda_3-1) + 35(\lambda_3-1)^2 + 10(\lambda_3-1)^3 + (\lambda_3-1)^4 \right)} \quad (5.72b)$$

$$P_3 = \frac{3d^2 r_0 \left(12 + 7(\lambda_3-1) + (\lambda_3-1)^2 \right)}{d \left(24 + 50(\lambda_3-1) + 35(\lambda_3-1)^2 + 10(\lambda_3-1)^3 + (\lambda_3-1)^4 \right)} \quad (5.73c)$$

$$P_4 = \frac{d^3 \left(24 + 26(\lambda_3-1) + 9(\lambda_3-1)^2 + (\lambda_3-1)^3 \right)}{d \left(24 + 50(\lambda_3-1) + 35(\lambda_3-1)^2 + 10(\lambda_3-1)^3 + (\lambda_3-1)^4 \right)} \quad (5.74d)$$

Uma maneira de simplificação para o fator de concentração de tensão é adotar a seguinte relação $s = (\lambda_3 - 1)$ nos termos que compõem o somatório. Assim, estabelece uma expressão reduzida para K_t em função dos parâmetros s , d e r_0 .

$$k_t = \frac{d^3}{4 \left[\frac{6(d+r_0)^4 \left(\frac{d+r_0}{r_0} \right)^s - 6r_0^3 (r_0 + R(4+s)) + 3d^2 r_0 (12 + 7s + s^2) + d^3 (24 + 26s + 9s^2 + s^3)}{d(24 + 50s + 35s^2 + 10s^3 + s^4)} \right]} \quad (5.75)$$

O fator intensidade de tensão para entalhes em V é estimado pela máxima tensão de cisalhamento em entalhes hiperbólicos. Em conseqüência, a equação (5.61) determina a expressão para este fator de intensidade $K_{III\rho}^V$. Como a máxima tensão de cisalhamento é função do fator de concentração k_t para uma específica tensão nominal.

$$K_{III\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \tau_{\max} \sqrt{2\pi} r_0^{1-\lambda_3} = \sqrt{2\pi} \tau_{nom} \lim_{\rho \rightarrow 0} k_t r_0^{1-\lambda_3} \quad (5.76)$$

O limite do fator de concentração k_t é essencial para determinar o fator intensidade de tensão. A distância r_0 é o único parâmetro em função do raio de curvatura ρ , logo a condição $\rho \rightarrow 0$ é substituída por $r_0 \rightarrow 0$.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} k_t r_0^{1-\lambda_3} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{d^3}{4 \sum_{i=1}^4 P_i} r_0^{1-\lambda_3} \quad (5.77)$$

O limite é efetuado em quatro etapas, conforme a equação (5.71). E também, pela substituição de todos os termos que envolvam o coeficiente assintótico λ_3 pela relação de s .

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} p_1 r_0^{-s} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{d(24 + 50s + 35s^2 + 10s^3 + s^4)}{4(d+r_0)^4 \left(\frac{d+r_0}{r_0} \right)^s} r_0^{-s} = \frac{d(24 + 50s + 35s^2 + 10s^3 + s^4)}{4} \frac{1}{6d^s} \quad (5.78a)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} p_2 r_0^{-s} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{d(24 + 50s + 35s^2 + 10s^3 + s^4)}{4 \left(-6r_0(r_0^3 + dr_0^2(4+s))(d+r_0)^4 \left(\frac{d+r_0}{r_0} \right)^s \right)} r_0^{-s} = 0 \quad (5.78b)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} p_3 r_0^{-s} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{d(24 + 50s + 35s^2 + 10s^3 + s^4)}{4(3d^2 r_0(12 + 7(s) + (s)^2))} r_0^{-s} = 0 \quad (5.78c)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} p_4 r_0^{-s} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{d(24 + 50s + 35s^2 + 10s^3 + s^4)}{4(d^3(24 + 26(s) + 9(s)^2 + (s)^3))} r_0^{-s} = 0 \quad (5.78d)$$

Por fim, efetuando a soma dos quatro limites acima, o limite definido pela equação (5.77) resulta em:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} k_r r_0^{1-\lambda_3} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{(24 + 50s + 35s^2 + 10s^3 + s^4)}{24} d^{1-\lambda_3} \quad (5.79)$$

Facilmente, o fator intensidade de tensão em eixos com entalhes em V em modo III é determinado. A substituição da equação (5.79) na equação (5.76) resulta a expressão para o mesmo.

$$K_{III\rho}^V = \sqrt{2\pi} \frac{(24 + 50s + 35s^2 + 10s^3 + s^4)}{24} d^{1-\lambda_3} \tau_{nom} \quad (5.80)$$

Uma classificação de entalhes em rasos e profundos em eixos é feita pela relação entre a distância d e a profundidade do entalhe a_p . A razão d/a_p entre os valores 1 a 20 classifica os entalhes como rasos, enquanto valores superiores determinam entalhes profundos. O fator de concentração de tensão e fator de intensidade de tensão podem ser divididos em função desta classificação (Zappalorto et al., 2009).

Uma modificação na equação do fator intensidade de tensão $K_{III\rho}^V$ é feita, de maneira que, seja possível estabelecer este parâmetro da MFEL através da relação d/a_p para um específico ângulo de abertura em eixos com entalhes em V. A modificação consiste em multiplicar e dividir toda a expressão por a_p^{-s} .

$$K_{III\rho}^V = \sqrt{2\pi} \frac{(24 + 50s + 35s^2 + 10s^3 + s^4)}{24} d^{-s} \tau_{nom} \left[\frac{a_p^{-s}}{a_p^{-s}} \right] \quad (5.81a)$$

$$K_{III\rho}^V = \left[\sqrt{2\pi} \frac{(24 + 50s + 35s^2 + 10s^3 + s^4)}{24} \right] \left(\frac{d}{a_p} \right)^{-s} a_p^{-s} \tau_{nom} \quad (5.81b)$$

Estabelecendo uma razão entre o fator intensidade de tensão $K_{III\rho}^V$ e a tensão nominal τ_{nom} , através de um novo parâmetro $\bar{K}_{III\rho}^V$. Este novo parâmetro é válido para pequenas relações d/a_p , logo é válido somente para entalhes rasos pela modificação da equação (5.80).

$$\bar{K}_{III\rho}^V = \frac{K_{III\rho}^V}{\tau_{nom}} = \left[\sqrt{2\pi} \frac{(24 + 50s + 35s^2 + 10s^3 + s^4)}{24} \right] \left(\frac{d}{a_p} \right)^{-s} a_p^{-s} \quad (5.82)$$

A Figura 66 representa a relação entre o fator intensidade de tensão e a tensão nominal para um ângulo de abertura 60° de um entalhe em V. Para exemplificar esta relação adotaram-se as profundidades 4,83mm e 1,27mm.

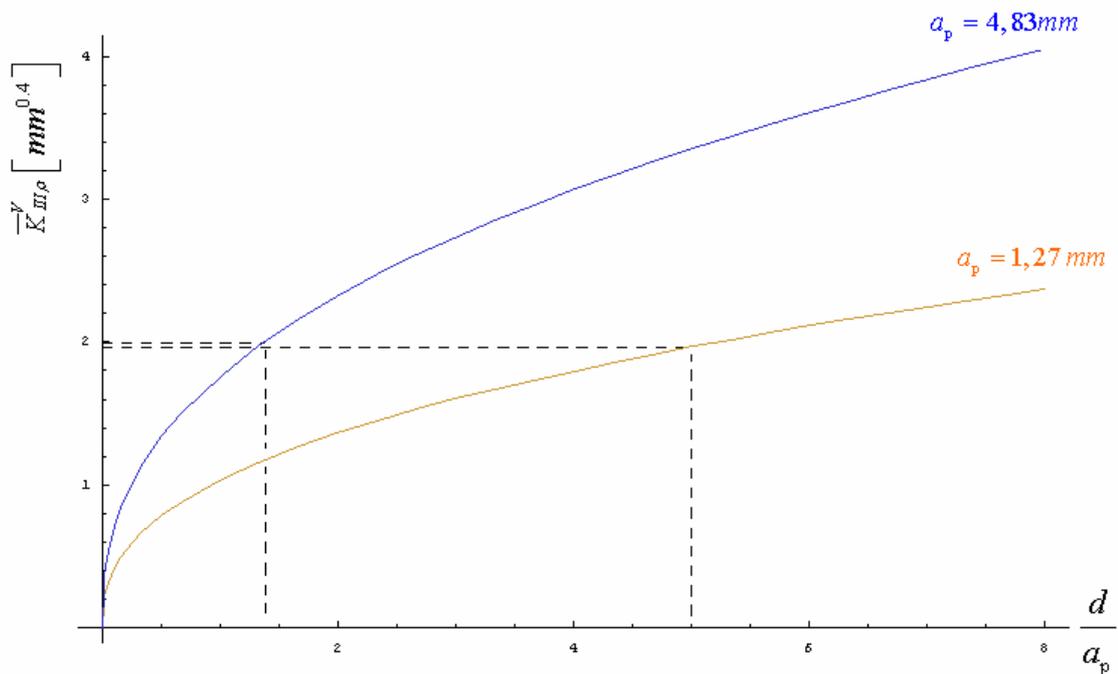


Figura 66 – Fator de intensidade de tensão para eixos devido à torção.

O fator de concentração de tensão para eixos com entalhes hiperbólicos por Lazzarin et al. (2008) apresenta o mesmo comportamento proposto por Neuber (1958). Esta modificação permite calcular o fator de intensidade de tensão para trincas a partir dos entalhes hiperbólicos. Para isto, o raio de curvatura implica na condição $\rho \rightarrow 0$. Maiores detalhes do fator de concentração para eixos segundo Neuber é apresentado no apêndice C.

$$k_{lazzarin} = \frac{\tau_{nom}}{\tau_{max}} = \frac{3}{4} \frac{\left(\frac{d}{\rho}\right)^2}{2\left(\frac{d}{\rho}+1\right)\left(\sqrt{\frac{d}{\rho}+1}-1\right)-\frac{d}{\rho}} \quad (5.83)$$

Facilmente, verifica-se que as duas formulações para o fator de concentração de tensão em eixos com duplo entalhe hiperbólico sob torção são semelhantes. Tal semelhança é observada pela a Figura 67.

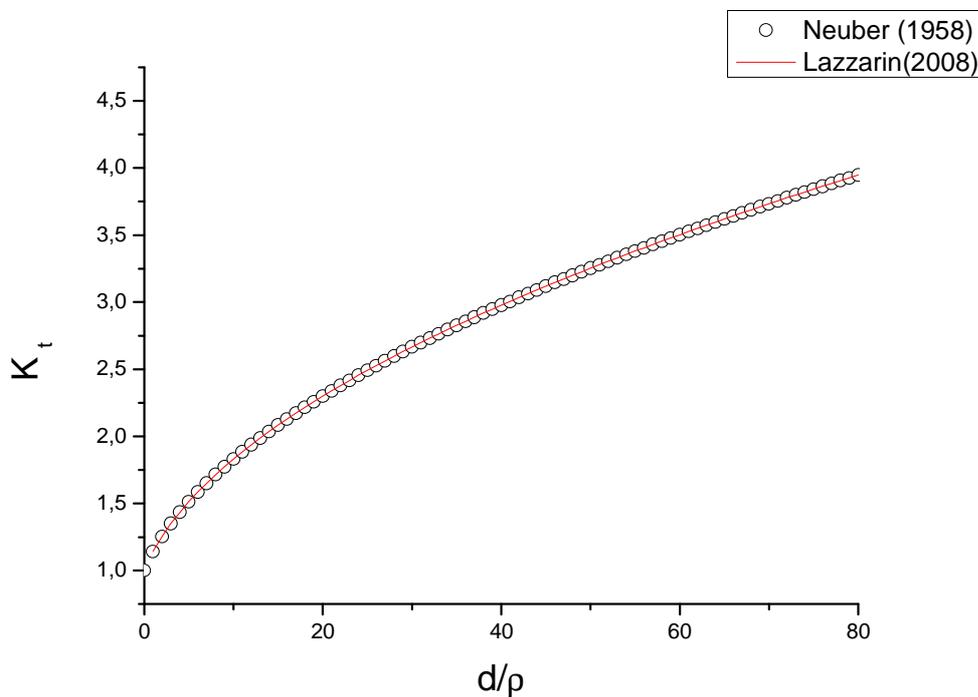


Figura 67 – Comparação entre os fatores de concentração de tensão em eixos.

A substituição da condição $\rho \rightarrow 0$ implica em uma nova equação para o fator intensidade de tensão para trincas K_{III} . Em consequência da generalização do fator de

concentração de tensão pela equação (5.61) em decorrência desta condição. Todos os parâmetros são modificados por esta condição.

$$K_{III} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \tau_{\max} \sqrt{\pi \rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} k_t \tau_{nom} \sqrt{\pi \rho} \quad (5.84)$$

Analogamente, o fator intensidade de tensão é função do limite do fator de concentração de tensão conforme a equação (5.76).

$$K_{III} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \tau_{nom} \left(\frac{3}{4} \frac{\left(\frac{d}{\rho}\right)^2}{2\left(\frac{d}{\rho} + 1\right)\left(\sqrt{\frac{d}{\rho} + 1} - 1\right) - \frac{d}{\rho}} \right) \sqrt{\pi \rho} = \frac{3}{8} \tau_{nom} \sqrt{\pi d} \quad (5.85)$$

Shu et al. (2004) avaliou eixos de ligas de alumínio Al 7050 e ferro SAE 4340 sob ação de modos combinados I/III. As Tabelas 5 e 6 apresentam os parâmetros geométricos destes eixos com duplo entalhe em V, conforme a Figura 67 apresentado no apêndice C.

Tabela 5 - Dimensões das amostras em modos I/III. (Shu et al., 2004)

Material	Al 7050	SAE 4340
Profundidade do entalhe, a_p	1,270 mm	4,830 mm
Distância, d	6,350 mm	6,600 mm
Raio de curvatura, ρ	0,152 mm	0,152 mm
Relação, d/a_p	5	1,37
Ângulo de abertura 2α	60°	60°

Tabela 6 – Propriedades mecânicas das amostras em modos I/III. (Shu et al., 2004)

Material	Al 7050	SAE 4340
Torque, M_t	84 Nm	—
Tensão de escoamento, $\sigma_{0.2}$	379,21 MPa	1475,00 MPa
Tenacidade à fratura, K_{IIIc}	9,643 MPam ^{0,5}	68,235 MPam ^{0,5}

Em virtude das equações (5.85) e (C.21) é possível determinar a tensão de cisalhamento nominal. Estes valores são apresentados na Tabela 7. A equação (C.21) é definição clássica para a tensão de cisalhamento devido à torção, enquanto a equação (5.85) é uma estimativa para esta tensão a partir do fator intensidade de tensão K_{III} . Como é desconhecido o torque para o eixo de aço, não é possível a comparação entre as duas tensões nominais. Para o eixo de alumínio observa-se uma diferença de 12,85% entre a definição clássica e a estimativa. A Tabela 7 ilustra os valores para as tensões de cisalhamento, assim como os parâmetros fator intensidade de tensão $\overline{K}_{m\rho}^v$ e fator de concentração de tensão k_t para as duas amostras analisadas.

Tabela 7 – Integridade estrutural das amostras em modos I/III.

Material	Al 7050	SAE 4340
Tensão nominal clássica	208,85 MPa	—
Tensão nominal estimada	182,2 MPa	1263,6 MPa
Fator de concentração de tensão - k_t	2,73557	2,77076
Fator intensidade de tensão - $\overline{K}_{m\rho}^v$	1,96578 m ^{0,4}	1,99845 m ^{0,4}

Representando graficamente o fator intensidade de tensão $\overline{K}_{m\rho}^v$ para estas amostras, observa-se que os valores encontrados são menores que o fator tenacidade à fratura K_{IIIc} , através da Figura 66. O fator de concentração k_t é determinado com estas condições, através da equação (5.75). Em ambos os casos, os valores para o fator intensidade e de concentração de tensão são próximos para as duas amostras para um mesmo raio de curvatura e ângulo de abertura.

Outras formulações são feitas, quando o parâmetro d assume valores finitos. Várias modelagens são avaliadas para aproximar de valores experimentais com valores teóricos.

A influência do ângulo de abertura de entalhes em V para o fator intensidade de tensão $\overline{K}_{m\rho}^v$ é feita para eixos com diâmetros diferentes, mas com a mesma relação d/a_p . As Figuras 68 e 69 ilustram este comportamento para as razões 15 e 10, respectivamente. A região demarcada por uma elipse indica os pontos não confiáveis. A exclusão desta região mostra que o fator $\overline{K}_{m\rho}^v$ é inversamente proporcional aos ângulos de abertura dos entalhes rasos de geometria em V em eixos. Um entalhe raso é aquele cuja profundidade é pouco relevante em relação a largura de chapas e eixos. Uma análise pontual, através do método de elementos

finitos foi realizada por Zappalorto et al. (2009) em eixos com duplos entalhes em V com ângulos de abertura 60° , 90° e 135° para profundidades de 4 mm e 10 mm. Estes pontos representam o fator $\bar{K}_{III\rho}^V$ nas condições acima, e também, são apresentados nas Figuras 68 e 69. A presença de poucos pontos não estabelece uma comparação efetiva com os resultados da equação (5.82). Embora, os ângulos de abertura 90° e 135° apresentaram bons resultados quando comparados. Os pontos demarcados pela linha sólida são obtidos a partir da equação (5.82) indicam entalhes com ângulo de abertura no intervalo de $7,5^\circ$ e 135° . Entretanto, os pontos assinalados sobre o eixo y indicam trincas obtidas a partir da equação (5.85). Os demais pontos são obtidos por elementos finitos.

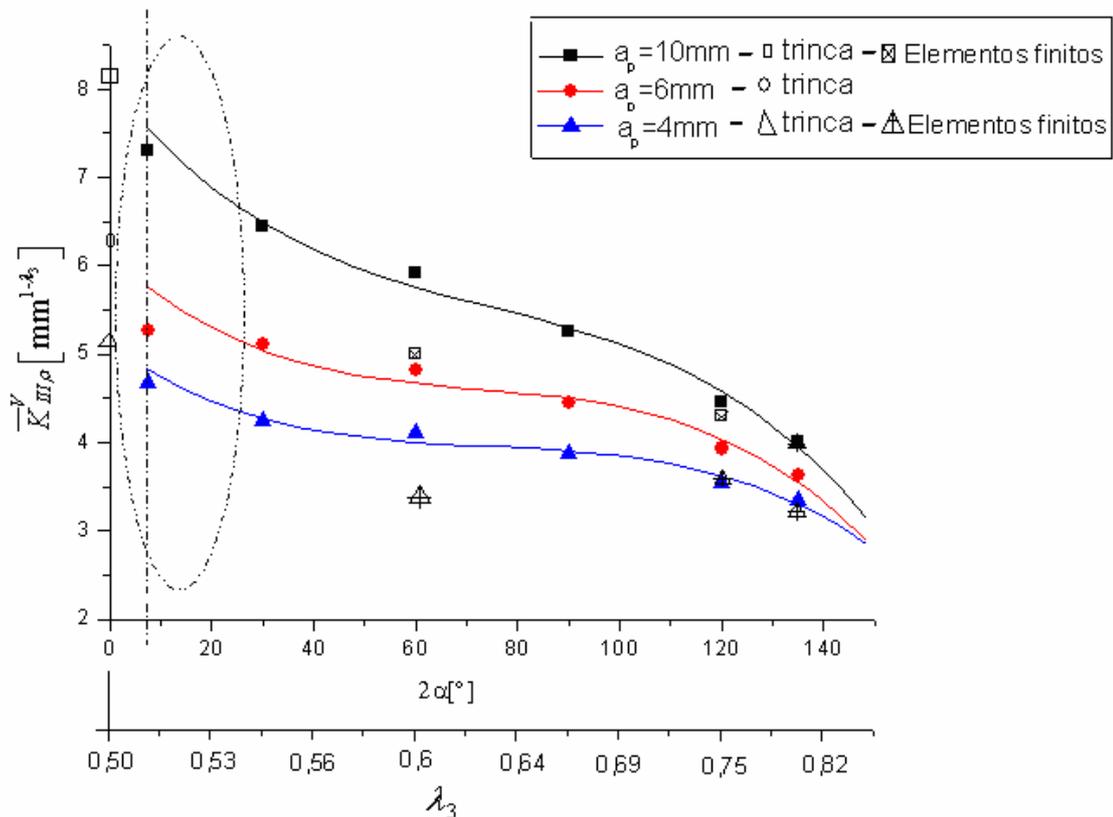


Figura 68 – Influência do entalhe na capacidade de carga do eixo para $d/a_p = 15$.

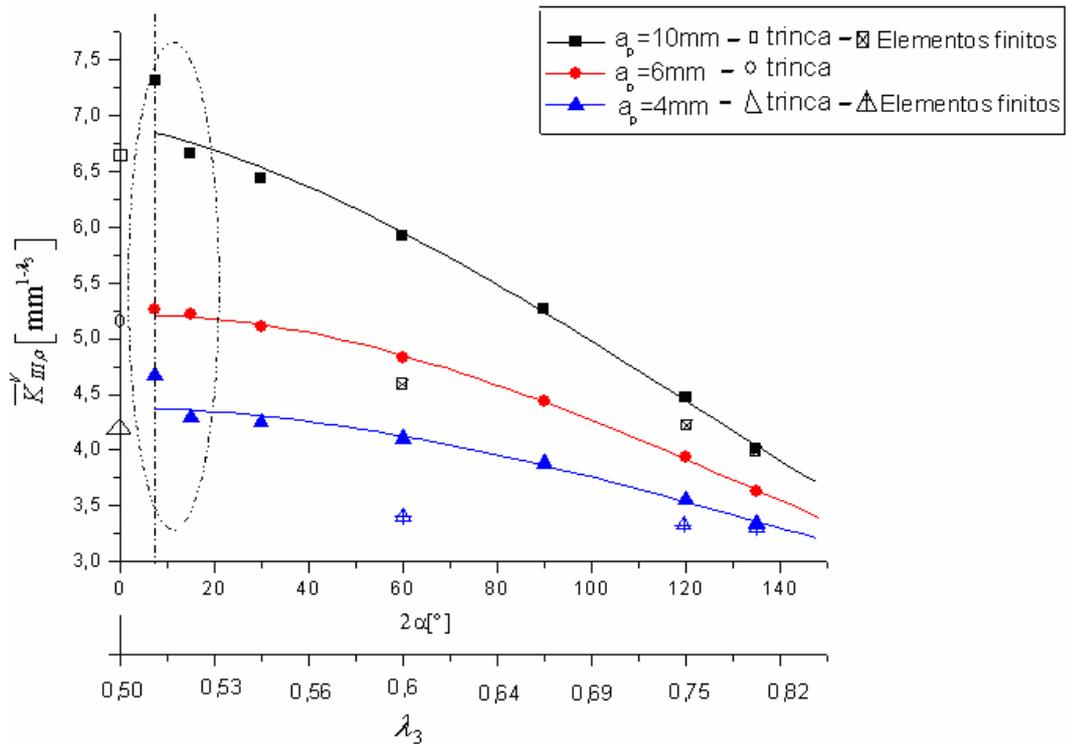


Figura 69 – Influência do entalhe na capacidade de carga do eixo para $d/a_p = 10$.

O fator intensidade de tensão de trincas em modo III é estimado pela equação (5.85), enquanto entalhes em V são estimados pela equação (5.82). Como observado nas Figuras 68 e 69, a região demarcada por uma elipse indica pontos não confiáveis. As Tabelas 8 e 9 compararam os valores entre trincas e entalhes com ângulo de abertura $7,5^\circ$ para as relações $d/a_p = 15$ e $d/a_p = 10$, respectivamente. Estas tabelas exemplificam este comportamento.

Tabela 8 – Fatores intensidade de tensão \bar{K}_{III} e $\bar{K}_{III\rho}^V$ com relação $d/a_p = 15$.

a_p [mm]	d/a_p	\bar{K}_{III} (trincas)	$\bar{K}_{III\rho}^V$ entalhe com $2\alpha = 7,5^\circ$
4	15	8,14051 [mm ^{0,5000}]	8,91866 [mm ^{0,4979}]
6	15	6,30562 [mm ^{0,5000}]	6,42176 [mm ^{0,4979}]
10	15	5,14851 [mm ^{0,5000}]	5,69591 [mm ^{0,4979}]

Tabela 9 – Fatores intensidade de tensão \bar{K}_{III} e $\bar{K}_{III\rho}^V$ com relação $d/a_p = 10$.

a_p [mm]	d/a_p	\bar{K}_{III} (trincas)	$\bar{K}_{III\rho}^V$ entalhe com $2\alpha = 7,5^\circ$
4	10	6,64670 [mm ^{0,5000}]	7,31353 [mm ^{0,4979}]
6	10	5,14851 [mm ^{0,5000}]	5,26601 [mm ^{0,4979}]
10	10	4,20374 [mm ^{0,5000}]	4,67079 [mm ^{0,4979}]

Capítulo 6

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

6.1 CONCLUSÕES

A influência dos campos assintóticos de tensões na integridade estrutural é completamente descrita por soluções de problemas de autovalores. Os coeficientes assintóticos para os modos de falhas I e II são autovalores das equações características da solução de Williams (1952 apud Barber, 1992). Enquanto, o terceiro modo geométrico de falhas apresenta seu coeficiente assintótico pela solução da equação (5.49). Os modos geométricos I e II assemelham quanto à solução dos coeficientes assintóticos e dos parâmetros que descrevem a distribuição de tensão para estes modos.

Independente dos modos geométricos avaliados, o coeficiente assintótico apresenta como o valor mínimo em 0,5 para um ângulo de abertura $2\alpha = 0^\circ$, isto porque, trata-se de um caso particular estudado pela Mecânica da Fratura Linear Elástica, o entalhe é avaliado como uma simples trinca. Os coeficientes assintóticos assumem o menor valor positivo, pois os demais autovalores resultam distribuições de tensões sem significado físico.

O parâmetro da mecânica da fratura, o fator intensidade de tensão K , dos principais modos geométricos em entalhes em V é modificado pela presença de um raio de curvatura na

extremidade do entalhe. É possível estabelecer uma razão entre os fatores intensidade de tensão, através dos parâmetros de distribuição de tensão para o respectivo ângulo de abertura, independente da tensão principal ao longo do plano bisetor para os modos I e II.

O teste de Iosipescu é uma alternativa para estimar o fator intensidade de tensão para entalhes em V devido ao cisalhamento puro. Assim, amostras de compósito laminado reforçado com tecido de fibra de vidro com uma orientação de 45° em relação as fibras são avaliadas. Em conseqüência, resultam as tensões principais $(\tau_{r\theta})_{\theta=0^\circ}$ no plano bisetor para uma distância específica a partir da extremidade do entalhe. A distância específica para este caso é $r = 6,15\text{mm}$. Esta tensão $(\tau_{r\theta})_{\theta=0^\circ}$ é essencial para avaliar numericamente o fator de intensidade de tensão $K_{II,\rho}^V$.

A presença de um raio de curvatura diferente de zero implica na razão $K_{II,\rho}^V/K_{II,\rho}$ menor que 1 para qualquer distância r . Esta razão assume o valor máximo ao longo do plano bisetor para uma distância ao centro do sistema de coordenadas.

Na lâmina analisada, a tensão de cisalhamento mínima ocorre para os ângulos de orientação das fibras 0° e 90° em compósitos. Enquanto o valor máximo ocorre para um ângulo de orientação 45° . Este comportamento é semelhante para o fator intensidade de tensão $K_{II,\rho}^V$. De maneira que, o valor máximo é aproximadamente 1,55 do valor mínimo tanto para tensão de cisalhamento quanto para o fator $K_{II,\rho}^V$.

O campo de tensão na proximidade do entalhe em V apresenta o comportamento semelhante aos modos I e II. Entretanto, os valores característicos para os máximos e mínimos para tensões $\tau_{r\theta}$, σ_{rr} e $\sigma_{\theta\theta}$ não são os mesmos proposto pela teoria da elasticidade. Isto ocorre, porque o entalhe não é uma trinca, mas as tensões principais apresentam o mesmo comportamento, mas deslocado para direita, ou seja, assume ângulos maiores com os valores de referência. Por exemplo, as amostras avaliadas pelo teste de Iosipescu apresentam o valor mínimo da tensão $\tau_{r\theta}$ em $\theta = 53,58^\circ$ ao invés de 45° . A tensão normal $\sigma_{\theta\theta}$ apresenta o valor máximo em $\theta = 39,48^\circ$ ao invés de 45° . Por fim, a outra tensão normal σ_{rr} apresenta como zero de função em $\theta = 53,52^\circ$ ao invés de 45° . As Figuras 46 a 53 ilustram este comportamento.

O fator intensidade de tensão é estimado pelo fator de concentração de tensão. Uma vez que, o fator de concentração de tensão é relação entre as tensões máximas e nominais para um determinado sólido para uma específica sollicitação. Assim, o fator de intensidade para eixos com entalhes em V submetido ao cisalhamento antiplanar é estimado por este fator de concentração de tensão. Como a tensão nominal é um valor numérico fixo e obtido experimentalmente, toda a avaliação analítica para o fator intensidade de tensão é feita a partir do fator de concentração de tensão.

Independente da profundidade do entalhe, o fator intensidade de tensão \bar{K}_{III}^V é o mesmo para eixos de distância d e com ângulo de abertura específico. Quanto maior o ângulo de abertura de entalhes rasos de geometria em V em eixos menor será o fator intensidade de tensão. Eixos com ângulos pequenos são pontos não confiáveis, pois o entalhe se aproxima do comportamento de uma trinca.

Como esperado, o fator intensidade de tensão em entalhes em V para os modos II e III são menores que os fatores intensidade de tensão em trincas, isto são observados pelas Figuras 54 e 69 para os modos II e III, respectivamente. Assim, foi possível avaliar o principal parâmetro da MFEL em entalhes em V para os modos II e III. Enquanto, entalhes hiperbólicos são avaliados em função do fator de concentração de tensão.

6.2 CONTRIBUIÇÕES

A maior contribuição é uma avaliação dos entalhes pela MFEL. Esta avaliação destina-se à distribuição de tensão no campo elástico nos principais modos geométricos, através dos parâmetros geométricos e pelo fator intensidade de tensão para o respectivo modo geométrico.

Outra contribuição é o uso de sistemas de coordenadas não tradicionais, como coordenadas curvilíneas, através de potenciais complexos. Os principais parâmetros que compõem a distribuição de tensão são obtidos pela análise de funções complexas.

Uma abordagem pelos diferentes tipos de entalhes nas diversas solicitações. Os entalhes são avaliados como trincas pela presença de um raio de curvatura, pelo principal parâmetro da mecânica da fratura.

Estimar o fator intensidade de tensão a partir do fator de concentração de tensão para o terceiro modo geométrico, e assim, simplificar a determinação do mesmo. Também estimar o fator intensidade de tensão para o mesmo modo geométrico em trincas a partir de em eixos com entalhes hiperbólicos.

6.3 PERSPECTIVAS FUTURAS

Avaliar a distribuição de tensão em carregamentos dinâmicos, de maneira que, seja possível determinar o fator tenacidade à fratura e o comportamento dos principais parâmetros da mecânica da fratura. Estender a aplicação de conceitos da mecânica da fratura no campo elasto-plástico, como avaliar os principais critérios de trincas em entalhes.

Avaliar as diferentes entalhes em modos geométricos combinados, ou seja, a superposição de um modo geométrico sobre o outro, de maneira que, é possível descrever a maioria das solicitações em estruturas e componentes. Os fatores intensidade de tensão para condições de carregamento complexo do mesmo modo podem ser determinados pela superposição de resultados mais simples.

Verificar o comportamento de materiais dúcteis e frágeis nas condições descritas acima. Assim como, avaliar a influência da temperatura, corrosão e outros meios físicos que alteram a distribuição de tensão na vizinhança de entalhes e trincas.

Avaliação morfológica através do microscópio eletrônico de varredura e óptico dos materiais utilizados submetidos aos procedimentos experimentais adequados para análise dos modos de falhas combinados e individuais. Avaliar qualitativamente as falhas e entalhes por meio de fractografias.

O método numérico elementos finitos é uma ferramenta de otimização de componentes e estruturas. Avaliar a distribuição de tensão e o fator intensidade de tensão para os três modos de falhas por esta ferramenta computacional e numérica.

A avaliação dos modos geométricos I, II e III e a combinação destes modos por meio de procedimentos experimentais, como ensaios Arcan, Iosipescu e flexo-torçor. Os testes fornecem as tensões principais, de maneira que seja possível descrever o campo de tensões para a vizinhança dos entalhes.

Uma melhor avaliação da região de valores não confiáveis para a razão entre o fator intensidade de tensão em eixos com entalhes em V pela tensão de cisalhamento nominal. Avaliar o comportamento dos pequenos ângulos de abertura dos entalhes em V para eixos submetidos à torção.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVAREZ P. H. I. (2004), Ensaio não Convencionais para Determinação da Tenacidade à Fratura em Rochas: Análise e Comparação, Tese de Mestrado em Geotecnia, Universidade de São Paulo, USP, 204 p.

ATZORI B., LAZZARIN P., TOVO R. (1997), “Stress distributions for V- shaped notches under tensile and bending loads”, *Fatigue Fracture Engineering material Structure*, vol. 20, pp. 1083-1092.

BARBER J. R. (1992), *Elasticity*, Klumer Academic Publishers, Dordrecht, 293 p.

BERTO F., LAZZARIN P., RADAJ D. (2008), “Fictitious notch rounding concept applied to sharp V- notches: Evaluation of the microstructural support factor for different failure hypotheses. Part I: Basic stress equations”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, pp. 3060-3072.

BERTO F., LAZZARIN P., RADAJ D. (2008), “Fictitious notch rounding concept applied to sharp V- notches: Evaluation of the microstructural support factor for different failure hypotheses. Part II: Microstrutural support analysis”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, pp. 3060-3072.

CALLISTER JR., W. D. (2002), *Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução*, LTC, 5 ed., Rio de Janeiro, 589 p.

- CARPINTERI A. (1987)**, “Stress singularity and generalized fracture toughness at the vertex of re-entrant corners”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 26, pp. 143-155.
- CHEREPANOV G. P. (1979)**, *Mechanics of Brittle Fracture*, McGraw-Hill, New York, 939p.
- CREAGER M., PARIS P. C. (1967)**, “Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking”, *International Journal of Fracture Mechanics*, vol. 3, pp. 247-252.
- DUNN M.L, SUWITO W., CUNNINGHAM S. (1997)**, “Stress intensities at notch singularities”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 57, pp. 417-430.
- DUGDALE D. S. (1968)**, *Elements of Elasticity*, Pergamon Press, 1ed., London, 144 p.
- EFTIS J., LIEBOWITZ H. (1972)**, “On the modified westergaard, equations for certain plane crack problems”, *Journal of Fracture Mechanics*, vol. 8, pp. 383-392.
- FILIPPI S., LAZZARIN P., TOVO R. (2002)**, “Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, pp.4543-4565.
- FILIPPI S., LAZZARIN P., (2005)**, “Distributions of elastic principal stress due to notches in finite size plates and rounded bars uniaxially loaded”, *International Journal of Fatigue*, vol. 26, pp.377-391.
- GDOUTOS E. E. (1993)**, *Fracture Mechanics: An Introduction*, Klumer Academic Publishers, Dordrecht, 307 p.
- GOLDENBERG N., ARCAN M., NICOLAU E. (1958)**, “On the most suitable specimen shape for testing shear strength of plastics Failure for linear elastic materials with U-notches”, *ASTM STP* , vol. 247, pp. 115-121.
- GÓMEZ F. J., GUINEA G. V., ELICES M. (2006)**, “Failure for linear elastic materials with U-notches”, *International Journal of Fracture*, vol. 141, pp. 99-111.

- GÓMEZ F. J., ELICES M., PIANAS J. (2005)**, “The cohesive crack concept: application to PMMA at -60°C”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, pp. 1268-1185.
- GROSS R., MENDELSON A. (1972)**, “Plane elastostatic analysis of v-notched plates”, *International Journal of Fracture Mechanics*, vol. 8, pp. 267-276.
- ISSAC M. D., ORI I.(1994)**, *Engineering Mechanics of Composite Materials*, Oxford University Press,1 ed., New York, 395 p .
- KHASHABA, U. A. (2003)**, “In-plane shear properties of cross-ply composite laminates with different off-axis angles”, *Composite Structures*, vol.65, pp.167-177.
- LAN W., DENG X., SUTTON A. M., CHENG C. S. (2006)**, “Study of Slant fracture in ductile materials”, *International Journal of Fracture*, vol. 141, pp. 469-496.
- LAZZARIN P., BERTO F. (2005)**, “Some expressions for the strain energy in a finite volume surrounding the root of blunt V-notches”, *International Journal of Fracture*, vol. 135, pp. 161-185.
- LAZZARIN P., FILIPPI S. (2006)**, “A generalized stress intensity factor to be applied to rounded V-shaped notches”, *International Journal of Fracture*, vol. 43, pp. 2461-2478.
- LAZZARIN P., LASSEN T., LIVIERI P. (2003)**, “A notch stress intensity approach applied to fatigue life predictions of welded joints with different local toe geometry”, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 26, pp. 49-58.
- LAZZARIN P., LASSEN T., LIVIERI P. (2004)**, “A notch stress intensity approach applied to predict the fatigue behaviour of T butt welds between tube and flange when subjected to in-phase bending and torsion loading”, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 27, pp. 127-141.
- LAZZARIN P., TOVO R. (1996)**, “A unified approach to the evaluation of linear elastic fields in the neighbourhood of cracks and notches”, *International Journal of Fracture*, vol. 78, pp. 3-19.

- LAZZARIN P., TOVO R., FILIPPI S. (1998)**, “Elastic stress distributions in size plates with edge notches”, *International Journal of Fracture*, vol. 91, pp. 269-282.
- LAZZARIN P., ZAMBARDI R. (2001)**, “A finite volume energy based approach to predict the static and fatigue behaviour of components with sharp V-shaped”, *International Journal of Fracture*, vol. 112, pp. 275-298.
- LAZZARIN P., ZAPPALORTO M., YATES J.R. (2006)**, “Analytical study of stress distributions due to semi-elliptic notches in shafts under torsion loading”, *International Journal of Engineering Science*, vol. 45, pp. 308-328.
- LEE S. M. (1993)**, “An edge crack torsion method for mode III delamination fracture testing”, *Journal of Composites Technology and Research*, vol. 15, pp. 193-201.
- LIECHTI K. M., HUNG S. C. (1999)**, “Finite element analysis of the Arcan specimen for fibber reinforced composites under pure shear and biaxial loading”, *Journal of Composite Materials*, vol. 33, pp. 1288-1317.
- LIVIERI P., LAZZARIN P. (2005)**, “Fatigue strength of steel and aluminium welded joints based on generalised stress intensity factors and local strain energy values”, *International Journal of Fracture*, vol. 133, pp. 247-278.
- MATHEMATICA 5.0, WOLFRAM RESEARCH (2003).
- MATVIENKO Y. G., MOROZOV E. M. (2004)**, “Calculation of the energy J-integral for bodies with notches and cracks”, *International Journal of Fracture*, vol. 125, pp. 249-261.
- MEGUID S. A. (1989)**, *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier Science Publishers LTDA, New York, 396 p.
- NEUBER H. (1958)**, *Kerbspannungslehre*, Springer-Verlag, 2 ed., Berlin, 226 p.
- OLIVEIRA Q. M. J. (2004)**, *Aplicação do Ensaio de Arcan na Determinação ao Corte na Madeira de Pinus Pinaster AIT*, Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Trós-os-Montes e Alto Douro Vila Real, UTAD, 190 p.

- RICE J. R., TRACEY D. M. (1969)**, “On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 17, pp. 201-217.
- RUSSEL A. J., STREET K. N. (1982)**, “Factors affecting the interlaminar fracture energy of graphite/epoxy laminates”, *Progress in Science and Engineering of Composite: Proceedings of ICCM-IV*, pp. 279-286.
- SHETTY D. K., ROSENFELD A. R., DUCKWORTH W. H. (1986)**, “Mixed-mode fracture of ceramic in diametral compression”, *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 69, pp. 437-443.
- SEWERYN A. (1994)**, “Brittle fracture criterion for structures with sharp notches”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 47, pp. 673-681.
- SEWERYN A., POSKROBKO S., MRÓZ Z. (1997)**, “Brittle fracture in plane elements with sharp notches under mixed-mode loading”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 123, pp. 535-543.
- SIH G. C., LIEBOWITZ H. (1968)**, *Mathematical Theorie of Brittle Fracture*, Academic Press, 2 ed., New York.
- SHU L., CHAO J. Y., ZHU X. (2004)**, “Tensile–shear transition in mode I/III fracture”, *Journal International of Solids and Structures*, vol. 41, pp. 6147-6172.
- SOUZA B. E. (2006)**, *Resistência ao Cisalhamento Iosipescu do Cómposito Laminado Reforçado com Tecido de Fibra de Vidro/Epoxi*, Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, UNIFEI, 91 p.
- STRANDBERG M. (2002)**, “Fracture at V-notches with contained plasticity”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 69, pp. 403-415.
- SUTTON M. A., DENG X., MA F., NEWMAN J. C., JAMES M. (2000)**, “Development and application of crack tip opening displacement-based mixed mode fracture criterion”, *International Journal Solids Structures*, vol. 37, pp. 3591-3618.

- SZENDI-HORVATH G. (1980)**, “Fracture toughness determination of Brittle materials using small specimens”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 13, pp. 955-961.
- SZENDI-HORVATH G. (1980)**, “Fracture toughness determination of Brittle materials using small specimens”, *The Australian Journal of Mining Technology and Research*, vol. 2, pp. 51-57.
- TAYLOR D., CORNETTI P., PUGNO N. (2005)**, “The fracture mechanics of finite crack extension”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, pp. 101-1038.
- TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. (1970)**, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, Tokyo, 541 p .
- TSUJI K., IWASE K., ANDO K. (1999)**, “An investigation into the location of crack initiation sites in alumina, polycarbonate and mild steel”, *Fatigue Fracture Engineering material Structure*, vol. 22, pp. 509-51.
- WANG Q. Z., XING L. (1999)**, “Determination of fracture toughness K_{IC} by using the flattened brazilian disk specimen rocks. Bearing pressures and cracks”, *J Engineering Fracture Mechanics*, vol. 64, pp. 193-201.
- YOSIBASH Z., BUSSIBA A., GILAD I. (2004)**, “Failure criteria for brittle elastic materials”, *International Journal of Fracture*, vol. 125, pp. 307-333.
- YOSIBASH Z., PRIEL E., LEGUILLON D. (2006)**, “A failure criterion for brittle elastic under mixed-mode loading”, *International Journal of Fracture* , vol. 141, pp. 291-312.
- ZAPPALORTO M., LAZZARIN P., BERTO F. (2009)**, “Elastic notch stress intensity factors for sharply V-notched rounded bars under torsion”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 76, pp. 439-453.
- ZAPPALORTO M., LAZZARIN P., YATES J.R. (2008)**, “Elastic stress distributions for hyperbolic and parabolic notches in round shaft under torsion and uniform antiplane shear loadings”, *International Journal of Solids and Structures* ,vol. 45, pp. 4879-4901.

Apêndice A

FUNÇÕES

A.1 FUNÇÃO HARMÔNICA

Seja uma função contínua e duplamente diferenciável $f:U \rightarrow \mathbf{R}$ (onde U é um subconjunto de \mathbf{R}^n) que satisfaz a equação de Laplace de maneira não trivial. Funções harmônicas são chamadas funções potenciais com aplicações na matemática, física e engenharia. A equação de Laplace é uma equação diferencial parcial, cujo nome honra seu criador, Pierre Simon Laplace. Trata-se de uma equação diferencial de alta relevância em modelar problemas de mecânica dos fluidos, eletromagnetismo, entre outras.

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Em todo espaço U . Isto é, frequentemente escrito através do operador Laplaciano.

$$\nabla^2 f = 0 \quad (\text{A.2})$$

As funções complexas são compostas por um par de funções analíticas $u(x, y)$ e $v(x, y)$ no domínio U . Ambas as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são harmônicas no mesmo domínio U e designam com parte real e imaginária, respectivamente, da mesma função complexa.

$$f(Z) = u(x, y) + v(x, y)i \quad (\text{A.3})$$

Seja $f(z)$ uma função analítica, então todas as derivadas parciais de $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas. As funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfazem as equações Cauchy (1815 apud Meguid, 1989) e Riemann (1851 apud Meguid, 1989) para esta função analítica $f(Z)$.

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y) \quad (\text{A.4})$$

As derivadas parciais em relação a x e y das funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são todas contínuas.

$$\frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial x} \quad \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial v_x(x, y)}{\partial x} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial y} \quad \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v_x(x, y)}{\partial y} \quad (\text{A.6})$$

As derivadas parciais são todas contínuas, por isso usa-se um teorema a partir do cálculo de funções reais que afirma que a mistura de derivadas parciais são iguais.

$$\frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial x} \quad \frac{\partial v_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial x} \quad (\text{A.7})$$

Combinando todos esses resultados, temos as seguintes equações:

$$\frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_x(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial v_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial u_y(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Portanto ambos $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são funções harmônicas sobre o domínio U .

A.2 FUNÇÃO HOLOMORFA

A designação holomorfa para uma função, em alguns casos, é frequentemente semelhante ao termo função analítica. Entretanto, o termo função analítica possui vários significados. Funções holomorfas são do interesse da análise complexa. Seja uma função complexa c contínua e diferenciável em $f: U \rightarrow \mathbf{C}$, desde que U seja um subconjunto aberto de \mathbf{C} .

$$y_m = f'(Z_0) = \lim_{Z \rightarrow Z_0} \frac{f(Z) - f(Z_0)}{Z - Z_0} \quad (\text{A.10})$$

A função é dita holomorfa quando o limite existir para todo $Z_0 \in U$. O resultado do limite é uma sequência de números complexos que aproximam de Z_0 de mesmo valor de $f'(Z_0)$. Seja f a mesma função descrita como harmônica. A função f é diferenciável em z_0 se e só se f é diferenciável em (x_0, y_0) em \mathbf{R}^2 , e u e v satisfazem em (x_0, y_0) as chamadas condições de Cauchy (1815 apud Meguid, 1989) e Riemann (1851 apud Meguid, 1989). Se $f = u + iv$ é holomorfa em U e u e v são de classe \mathbf{C}^2 em U , então u e v são funções harmônicas.

Apêndice B

FUNÇÃO DE TENSÃO DE WILLIAMS

Williams (1952 apud Barber, 1992) desenvolveu um método que avalia a natureza do campo de tensão próximo ao entalhe pela singularidade expressa em coordenadas polares. O campo de tensão é escrito pela série expandida de r .

$$\phi = r^{n+2} f(\theta) \quad (\text{B.1})$$

A singularidade na distribuição de tensão é associada com geometrias descontínuas ou pelas condições de contorno. Por exemplo, cantos vivos ou carregamentos concentrados. O método de Williams é aplicado em outras discontinuidades na elasticidade e outras disciplinas da mecânica, como por exemplo, compósitos de diferentes materiais, campos assintóticos em problemas de interface (contato) com sem atrito.

A função tensão desenvolvida por Williams considera um plano semi-inifinito. A função bi-harmônica $f(\theta)$ é regida por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (n+2)^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + n^2 \right) f = 0 \quad (\text{B.2})$$

Para os casos de n diferente de dois e zero, a solução que define a função de tensão ϕ , apresenta-se da seguinte maneira:

$$\phi = r^{n+2} (W_1 \cos(n+2)\theta + W_2 \sin(n+2)\theta + W_3 \cos n\theta + W_4 \sin n\theta) \quad (\text{B.3})$$

A substituição de n por $(\lambda-1)$ na equação (B.2) é conhecida como a função de tensão de Williams. As soluções não triviais das quatro equações homogêneas para as quatro constantes W_1 , W_2 , W_3 e W_4 resultam no autovalor do expoente λ .

$$\phi = r^{(\lambda+1)} (W_1 \cos(\lambda+1)\theta + W_2 \sin(\lambda+1)\theta + W_3 \cos(\lambda+1)\theta + W_4 \sin(\lambda+1)\theta) \quad (\text{B.4})$$

Autovalores simétricos surgem pela eliminação das constantes W_1 e W_4 da equação (B.4), enquanto a eliminação das constantes W_2 e W_3 resulta em autovalores anti-simétricos. O autovalor simétrico caracteriza o coeficiente assintótico na distribuição de tensão para o modo geométrico I, enquanto o autovalor anti-simétrico resulta no coeficiente assintótico para o modo II.

As funções $f(\lambda_1)$ e $f(\lambda_2)$ são funções senodais para a obtenção dos os coeficientes assintóticos λ_1 e λ_2 respectivamente. As funções são específicas para cada ângulo de abertura do entalhe 2α e os respectivos coeficientes assintóticos para os modos geométricos I e II são as menores raízes positivas destas funções. Sejam as funções obtidas pela eliminação das constantes de Williams para a função tensão.

$$f(\lambda_1) = \text{sen } 2\alpha\lambda_1 + \lambda_1 \text{ sen } 2\alpha \quad (\text{B.5})$$

$$f(\lambda_2) = \text{sen } 2\alpha\lambda_2 - \lambda_2 \text{ sen } 2\alpha \quad (\text{B.6})$$

O comportamento destas funções é avaliado para os diferentes ângulos de abertura. A avaliação é feita em função dos ângulos notáveis 0° , 30° , 60° , 90° e 135° . Trata-se de uma translação das funções quando $2\alpha = 0^\circ$ para ambos os casos. A Figura 70 representa todos os autovalores do modo I para alguns ângulos notáveis. A Figura 71 representa todos os autovalores do modo II para alguns ângulos notáveis.

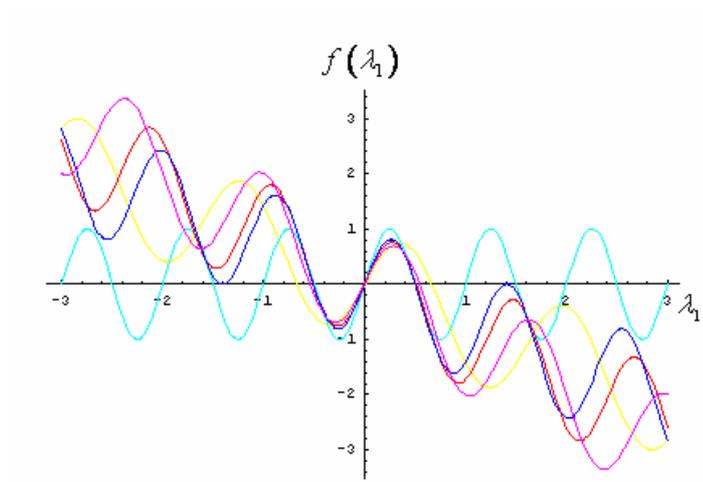


Figura 70 – Autovalores para o modo I.

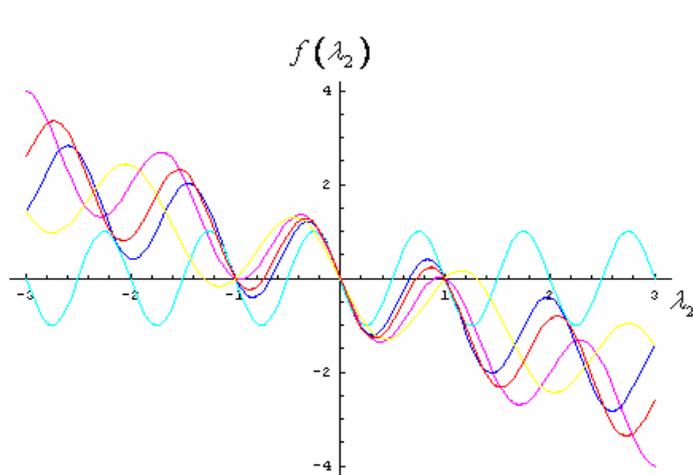


Figura 71 – Autovalores para o modo II.

Apêndice C

FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO EM EIXOS

O fator de concentração de tensão em entalhes hiperbólicos devido à torção é proposto por Neuber (1958) em sólidos de revolução. Ele modifica o tradicional tratamento de coordenada elípticas em entalhes hiperbólicos para coordenadas elipsoidais. Estas coordenadas são um sistema tridimensional a partir de coordenadas elípticas.

C.1 Função Tensão

Neuber (1958) define uma constante ϑ a partir de características do material que constitui os diferentes sólidos. Esta constante é função coeficiente de Poisson e parte integrante das expressões das tensões normais.

$$\vartheta = 2(1 - \nu) \tag{C.1}$$

Outros parâmetros são definidos por Neuber (1985) a partir de uma função de tensão ϕ . O operador laplaciano da função de tensão ϕ em coordenadas cartesianas x , y e z é definido em função das quatro funções harmônicas.

$$\nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad (\text{C.2})$$

$$\nabla\phi = \nabla\phi_0 + x\nabla\phi_1 + 2\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + y\nabla\phi_2 + 2\frac{\partial\phi_2}{\partial y} + z\nabla\phi_3 + 2\frac{\partial\phi_3}{\partial z} \quad (\text{C.3})$$

Com a condição que todos operadores laplacianos das funções harmônicas são nulos, ou seja, $\nabla\phi_0 = \nabla\phi_1 = \nabla\phi_2 = \nabla\phi_3 = 0$ implica em:

$$\nabla\phi = 2\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi_2}{\partial y} + \frac{\partial\phi_3}{\partial z}\right) \quad (\text{C.4})$$

Assim, as tensões normais σ_{uu} , σ_{vv} e σ_{ww} são determinadas em função da constante ϑ , operador laplaciano, fator de escala além das derivadas parciais das funções harmônicas para as respectivas coordenadas u , v e w .

$$\sigma_{uu} = -\frac{1}{h_u^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} + \frac{2\vartheta}{h_u^2} \left[\frac{\partial\phi_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\phi_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial\phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} \right] + \left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right) \nabla\phi \quad (\text{C.5a})$$

$$\sigma_{vv} = -\frac{1}{h_v^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} + \frac{2\vartheta}{h_v^2} \left[\frac{\partial\phi_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial\phi_3}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial v} \right] + \left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right) \nabla\phi \quad (\text{C.5b})$$

$$\sigma_{ww} = -\frac{1}{h_w^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial w^2} + \frac{2\vartheta}{h_w^2} \left[\frac{\partial\phi_1}{\partial w} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial\phi_2}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial\phi_3}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial w} \right] + \left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right) \nabla\phi \quad (\text{C.5c})$$

Enquanto que as tensões de cisalhamentos τ_{uv} , τ_{vw} e τ_{uw} não dependem do operador laplaciano da função de tensão ϕ .

$$\tau_{uv} = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} + \frac{\vartheta}{h_u h_v} \left[\frac{\partial\phi_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\phi_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial\phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial\phi_3}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right] \quad (\text{C.6a})$$

$$\tau_{uv} = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} + \frac{\vartheta}{h_u h_v} \left[\frac{\partial\phi_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\phi_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial\phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial\phi_3}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right] \quad (\text{C.6b})$$

$$\tau_{uv} = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\nu}{h_u h_w} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial \phi_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial \phi_3}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right] \quad (\text{C.6c})$$

Assim, para qualquer sistema de coordenadas estabelece as tensões normais e de cisalhamentos.

C.2 Coordenadas Elipsoidais

No sistema de coordenadas cilíndricas um ponto qualquer é representado por (r, w, x) , onde (r, w) representa um ponto em coordenadas polares e x é a terceira coordenada usual do sistema cartesiano. Este conceito de coordenadas cilíndricas é estendido aos diferentes tipos de coordenadas curvilíneas.

$$x = x \quad (\text{C.7a})$$

$$y = r \cos w \quad (\text{C.7b})$$

$$z = r \sin w \quad (\text{C.7c})$$

As coordenadas elipsoidais surgem da substituição da coordenada r por $r = \cosh u \operatorname{sen} v$ nas expressões das coordenadas cartesianas x , y e z . Coordenadas elipsoidais são um sistema tridimensional de coordenadas ortogonais generalizadas por um sistema de coordenadas bidimensional elíptica.

$$x = \operatorname{sen} u \cos v \quad (\text{C.8a})$$

$$y = \cosh u \operatorname{sen} v \cos w \quad (\text{C.8b})$$

$$z = \cosh u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w \quad (\text{C.8c})$$

Este novo sistema de coordenadas estabelece os fatores de escala ou módulo de transformação da relação entre a função escalar de uma função cartesiana em uma função

curvilínea. Logo os fatores de escala para as coordenadas curvilíneas u , v e w são h_u , h_v e h_w , respectivamente.

$$h_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} = \sqrt{\cosh^2 u \cos^2 v + \sinh^2 u \sin^2 v \cos^2 w + \sinh^2 u \sin^2 v \cos^2 w} \quad (\text{C.9a})$$

$$h_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} = \sqrt{\sinh^2 u \sin^2 v + \cosh^2 u \cos^2 v \sin^2 w + \cosh^2 u \cos^2 v \cos^2 w} \quad (\text{C.9b})$$

$$h_w = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2} = \sqrt{0 + \cosh^2 u \sin^2 v \sin^2 w + \cosh^2 u \sin^2 v \cos^2 w} = \cosh u \sin v \quad (\text{C.9c})$$

$$h_u = h_v = \sqrt{\sinh^2 u + \cos^2 v} \quad (\text{C.10})$$

Os fatores de escala e as derivadas parciais das coordenadas x , y e z em relação u , v e w são termos essenciais para compor a distribuição de tensão para eixos com entalhes hiperbólicos para as diferentes solicitações.

C.3 Momento Torsional

O momento em torno ao eixo x é determinado pela integração dos momentos de y e z dos componentes da tensão de resultante em relação ao eixo x distante de z e y . O entalhe externo situa-se ao longo de superfície adequada u constante de área A . O elemento de área infinitesimal com arestas $h_u du$ e $h_v dv$ atua na tensão resultante correspondente a força de magnitude $\tau_{uv} h_v h_w dv dw$. A Figura 72 ilustra a magnitude desta força.

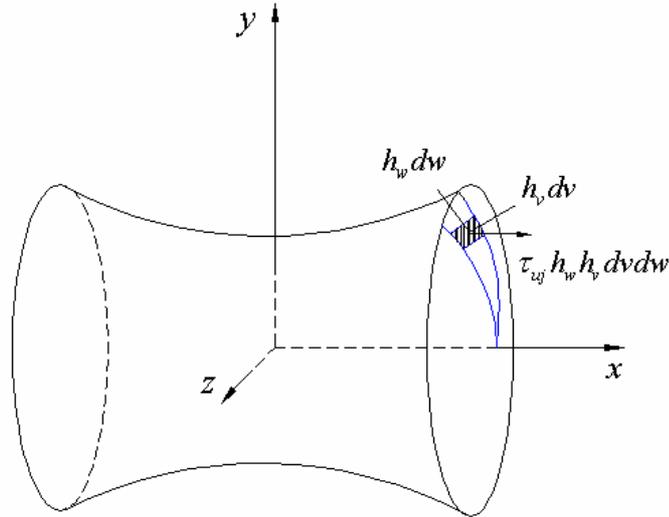


Figura 72 – Elemento infinitesimal em eixo com entalhe externo hiperbólico.

O momento M_t em relação ao sólido de revolução é expresso em coordenadas curvilíneas u , v e w é resultado da integração do elemento força sobre o eixo x em relação a y e z . Por analogia, a projeção dos elementos $h_u du$ e $h_v dv$ apresentados no terceiro capítulo é estendida para todos os elementos envolvidos nesta análise.

$$M_t = \iint_A \tau_{uu} (y \cos(z, u) - z \cos(y, u)) h_v h_w dv dw + \iint_A \tau_{uv} (y \cos(z, v) - z \cos(y, v)) h_u h_w dv dw + \iint_A \tau_{uw} (y \cos(z, w) - z \cos(y, w)) h_u h_v dv dw \quad (\text{C.11})$$

Dividindo o momento M_t em três novos termos de acordo com a equação (C.11).

$$M_t = M_{t1} + M_{t2} + M_{t3} \quad (\text{C.12})$$

A relação trigonométrica co-seno expressa na equação (3.2), no qual relaciona a derivada parcial x em relação a coordenada u e o fator de escala h_u , também podem ser expressa como $\cos(x, u)$. Logo de maneira análoga, todo termo trigonométrico co-seno nestas condições apresenta a mesma relação para os mesmos parâmetros envolvidos. A substituição desta condição para os três termos que compõem o momento M_t estão presentes nas equações (C.13).

$$M_{t1} = \iint_A \tau_{uu} (y \cos(z, u) - z \cos(y, u)) h_v h_w dv dw = \iint_A \frac{\sigma_{uu}}{h_u} \left(y \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial z}{\partial u} \right) - z \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right) h_v h_w dv dw \quad (\text{C.13a})$$

$$M_{t2} = \iint_A \tau_{uv} (y \cos(z, v) - z \cos(y, v)) h_v h_w dv dw = \iint_A \frac{\tau_{uv}}{h_v} \left(y \left(\frac{1}{h_v} \frac{\partial z}{\partial v} \right) - z \left(\frac{1}{h_v} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \right) h_v h_w dv dw \quad (\text{C.13b})$$

$$M_{t3} = \iint_A \tau_{uw} (y \cos(z, w) - z \cos(y, w)) h_v h_w dv dw = \iint_A \frac{\tau_{uw}}{h_w} \left(y \left(\frac{1}{h_w} \frac{\partial z}{\partial w} \right) - z \left(\frac{1}{h_w} \frac{\partial y}{\partial w} \right) \right) h_v h_w dv dw \quad (\text{C.13c})$$

Seja um sólido de revolução que apresenta dois entalhes externos hiperbólicos que apresenta simetria em relação aos eixos x e y . A Figura 73 representa este sólido com os principais parâmetros geométricos submetido à torção. Neuber (1958) estabeleceu as seguintes funções harmônicas para compor a função ϕ em sólidos de revolução com duplo entalhe hiperbólico.

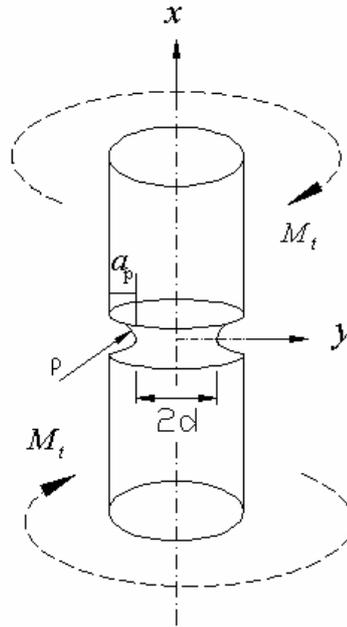


Figura 73 – Eixo com entalhe externo hiperbólico submetido à torção.

$$f(u, v) = T(M_t \cosh u - \tanh u) \operatorname{sen} w \quad (\text{C.14a})$$

$$\phi_2 = -f(u, v) \operatorname{sen} w = -T(M_t \cosh u - \tanh u) \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w \quad (\text{C.14b})$$

$$\phi_3 = -f(u, v) \cos w = -T(M_t \cosh u - \tanh u) \operatorname{sen} v \cos w \quad (\text{C.14c})$$

$$\phi_2 = \phi_1 = 0 \quad (\text{C.14d})$$

Assim, a função de tensão ϕ composta por quatro funções harmônicas conforme a equação (4.66) resultante de um sistema de coordenada elipsoidal é nula. Neste caso, pela superfície $v = v_0$, o hiperbolóide contém todos os componentes da tensão que atuam sobre esta superfície. Assim, temos as seguintes condições de contorno.

$$\tau_{uv} = \sigma_{uu} = \sigma_{vv} = \sigma_{ww} = 0 \quad (\text{C.15})$$

As condições de contorno descritas acima simplificam a expressão para o momento torsional. A imposição do ângulo de rotação w entre 0 e 2π radianos e a superfície entre v_0 e 0 completam todas as condições necessárias para a obtenção do momento M_t .

$$M_t = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} \frac{\tau_{uw}}{h_w} \left[y \frac{\partial z}{\partial w} - z \frac{\partial y}{\partial w} \right] h_v h_w dv dw \quad (\text{C.16})$$

A tensão de cisalhamento τ_{uw} é obtida pela a equação (C.6c). Como a função ϕ assume o valor nulo, logo o primeiro termo também é nulo em decorrência desta condição.

$$\tau_{uw} = \frac{\vartheta}{h} \left[\cot v \frac{\partial \phi_1}{\partial w} + \tanh u \left(\cos w \frac{\partial \phi_2}{\partial w} + \operatorname{sen} w \frac{\partial \phi_3}{\partial w} \right) - \operatorname{sen} w \frac{\partial \phi_2}{\partial u} + \cos w \frac{\partial \phi_3}{\partial u} \right] \quad (\text{C.17})$$

Por fim, efetuando todos os cálculos das derivadas parciais, a tensão de cisalhamento τ_{uw} resultante é:

$$\tau_{uw} = -2\vartheta T \frac{\operatorname{sen} v}{h_u \cosh^2 u} \quad (\text{C.18})$$

A determinação da tensão τ_{uw} possibilita determinar o momento M_t através da equação (C.16).

$$M_t = 2\pi \int_0^{v_0} \tau_{uv} h_u \cosh^2 u \sin^2 v dv = -4\pi \vartheta T \int_0^{v_0} \sin^3 v dv \quad (\text{C.19})$$

O cálculo desta integral resulta a forma mais simples para o momento torsional.

$$M_t = -\frac{4\pi}{3} \vartheta T (2 + \cos v_0)(1 - \cos v_0)^2 \quad (\text{C.20})$$

A tensão de cisalhamento remota em sólidos de revolução descrita pela teoria da elasticidade, designa-se por τ_{nom} . É evidente que a máxima tensão de cisalhamento ocorre no contorno da seção transversal circular, pois a tensão é proporcional a relação da distância da origem do sistema até a extremidade do entalhe e o eixo y , conseqüentemente, é constante ao longo de raio qualquer.

$$\tau_{nom} = \frac{2M_t}{\pi d^3} = p \quad (\text{C.21})$$

A constante T é determinada pela substituição do momento torsional M_t na equação da tensão de cisalhamento remota, através das equações (C.18) e (C.21).

$$T = \frac{3}{8} \frac{\text{sen} v_0 (1 + \cos v_0)}{\vartheta (1 - \cos v_0)(2 + \cos v_0)} p \quad (\text{C.22})$$

As mesmas equações que definem os parâmetros geométricos d e ρ em placas são as mesmas em eixos circulares. De maneira que, é possível determinar a tensão de cisalhamento em função dos mesmos parâmetros geométricos. A Figura 74 representa a tensão de cisalhamento na vizinhança do entalhe hiperbólico para uma razão entre os parâmetros $d/\rho = 9,46$. A curva linear representa a tensão de cisalhamento pela teoria da elasticidade, enquanto a curva perfil não linear representa a tensão τ_{uv} .

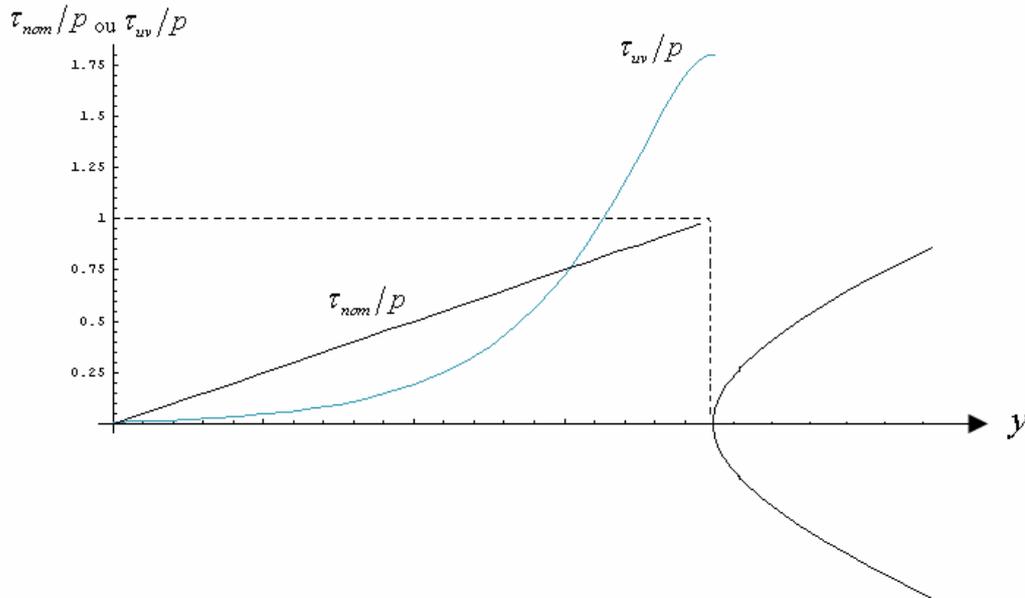


Figura 74 – Tensão de cisalhamento na vizinhança do entalhe hiperbólico em eixos para $\frac{d}{\rho} = 9,46$.

Genericamente, o fator de concentração de tensão para eixos submetidos à torção é determinado pela razão entre a tensão τ_{uv} pela tensão τ_{nom} . As equações (4.115) e (4.116) que relacionam os parâmetros geométricos em coordenadas cartesianas em coordenadas curvilínea v são válidas para placas e eixos com entalhes externos hiperbólicos. Assim, a substituição dos parâmetros geométricos por meio das equações (4.115) e (4.116) nas expressões da constante A e da tensão τ_{uv} determinam o fator de concentração k_t . Facilmente, verifica-se que a máxima tensão para $d/\rho = 9,46$ são as mesmas apresentadas em gráficos específicos conforme a Figura 75.

$$k_t = \frac{\tau_{uv}}{\tau_{nom}} = \frac{3}{4} \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{d}{\rho} + 1}\right)}{\left(1 + 2\sqrt{\frac{d}{\rho} + 1}\right)} \quad (C.23)$$

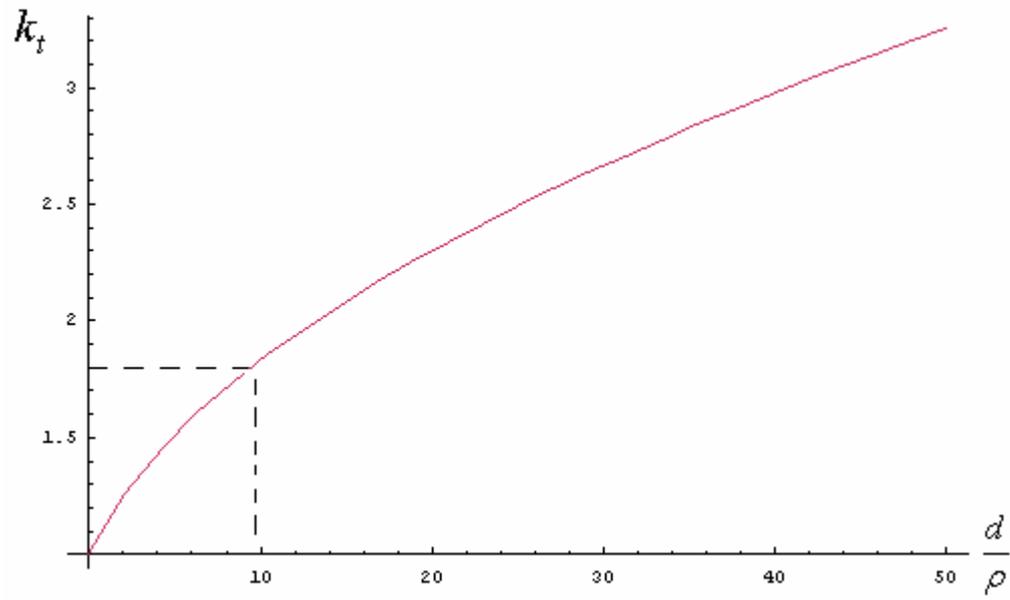


Figura 75 – Fator de concentração de tensão em eixos com entalhe hiperbólico.

