

Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**Aplicação de Filtros de Savitzky-Golay no
Processamento de Sinais de
Eletrocardiografia**

Natanael de Souza Figueiredo

Itajubá – MG
Agosto de 2018

Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Natanael de Souza Figueiredo

**Aplicação de Filtros de Savitzky-Golay no
Processamento de Sinais de Eletrocardiografia**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica na área de concentração em Microeletrônica.

Orientador: Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira

Coorientador: Dr. Odilon de Oliveira Dutra

Itajubá – MG

Agosto de 2018

*Este trabalho é dedicado a todas as pessoas com doenças cardíacas.
Que seja uma contribuição, ainda que pequena e indireta,
para sua maior longevidade e qualidade de vida.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo presente da vida e, neste trabalho em especial, pela oportunidade de contemplar parte de Suas maravilhas na descrição e acompanhamento da batida de um coração e poder refletir sobre como um pequeno detalhe de Sua grandiosa obra se torna algo tão vital para nós, como criaturas. Um pequeno sistema, de enorme complexidade, que precisou de anos de estudos e desenvolvimento de muita tecnologia para poder ser observado, compreendido e, nos últimos anos, parcialmente imitado pelas mãos humanas revelaram para mim, por meio da ciência, aquilo que minha fé já dizia sobre Sua grandiosidade e, ao mesmo tempo, Sua delicadeza.

Agradeço de forma especial à minha noiva Luana sempre companheira e presente dando apoio e ânimo para todos os momentos dessa caminhada que escolhemos trilhar juntos e também a meus pais Diovani e Jeusa por toda a vida de dedicação e exemplo que ofereceram a mim para que eu pudesse trilhar meus caminhos e alcançar minhas conquistas.

Agradeço também aos professores orientadores Luís Henrique e Odilon por terem guiado os passos deste trabalho, também ao professor Gustavo sempre atencioso e disposto a ajudar no desenvolvimento do mesmo.

Também fazem parte da minha gratidão toda minha família, meus amigos, todos os professores e colegas do mestrado e também de toda a vida escolar e universitária, em especial os do grupo de microeletrônica, com os quais trocamos muitas ideias e conversas, construindo fortes amizades e grandes conhecimentos durante o período deste trabalho.

*“Que os nossos esforços desafiem as impossibilidades.
Lembrai-vos de que as grandes proezas da história
foram conquistas daquilo que parecia impossível.”
(Charles Chaplin)*

Resumo

O presente trabalho é parte do projeto FINEP sob o convênio 01.13.0387, cujo objetivo global é a construção de um microssistema de eletrocardiografia de baixo custo para monitoramento remoto. Neste contexto, o objetivo específico deste trabalho é projetar filtros digitais diferenciadores, baseados na técnica dos mínimos quadrados de Savitzky-Golay, capazes de eliminar ruídos provenientes das interferências de alta frequência e também da rede elétrica, para melhorar confiabilidade das medidas, mantendo o projeto comprometido com as normas técnicas aplicáveis e com o baixo custo. As novas abordagens mantêm as mesmas propriedades da abordagem clássica, porém resultam em filtros com menor amplificação de ruído.

Palavras-chave: Processamento digital de sinais. Filtros Savitzky-Golay. Eletrocardiografia.

Abstract

The present work is part of FINEP project under grant 01.13.0387, whose global objective is the development of a low cost electrocardiography micro-system for remote monitoring. In this context, the specific objective of this work is to design differentiator digital filters, based on the Savitzky-Golay least squares technique, which is able to eliminate noise arising from high frequency interference and also from the electrical network, to improve the reliability of measurements, keeping the project committed to applicable technical standards and low cost. The new approaches keep the same properties of the classical approach, but result in filters with less noise amplification.

Keywords: Digital signal processing. Savitzky-Golay filters. Electrocardiography.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Anatomia do sistema de condução cardíaco (1)	17
Figura 2 – Potencial de ação em uma célula cardíaca (2)	17
Figura 3 – Sinal de ECG como superposição de potenciais de ação (3)	18
Figura 4 – Partes características de um sinal de ECG típico (4)	18
Figura 5 – Representação geométrica do modelo dinâmico do ECG (5)	19
Figura 6 – Visualização do complexo QRS em diferentes derivações (6)	20
Figura 7 – Distribuição corporal das derivações eletrocardiográficas (6)	20
Figura 8 – Triângulo de Einthoven (7)	21
Figura 9 – Artefatos de movimento (8)	22
Figura 10 – Artefatos musculares (8)	22
Figura 11 – Interferências eletromagnéticas (8)	23
Figura 12 – Possíveis detecções de batimentos em um sinal de ECG normal	24
Figura 13 – Possíveis detecções de batimentos em um sinal de ECG com artefato de respiração	24
Figura 14 – Conceito de suavização de Savitzky-Golay	26
Figura 15 – Resposta em frequência de diferenciadores de Savitzky-Golay de 9 pontos em comparação a diferenciadores ideais	30
Figura 16 – Efeito da mudança de parâmetros na resposta em frequência de filtros suavi- zadores	32
Figura 17 – Resposta em frequência de filtros diferenciadores	36
Figura 18 – Resposta em frequência do filtro projetado	40
Figura 19 – Ganho de potência do ruído de diferenciadores	41
Figura 20 – Sinais de ECG puro e com ruído	42
Figura 21 – Diferenciação por <i>Backward Euler</i>	43
Figura 22 – Diferenciadores de Savitzky-Golay aplicados a sinal de ECG	43
Figura 23 – Ruído propagado na diferenciação de Savitzky-Golay aplicada a sinal de ECG	44

Lista de tabelas

Tabela 1 – Constantes para formato do ECG	19
Tabela 2 – Detalhes das matrizes	27
Tabela 3 – Primeira derivada de polinômio de grau 3	41
Tabela 4 – Segunda derivada de polinômio de grau 4	42
Tabela 5 – Projetos dos filtros aplicados	44
Tabela 6 – Limiar de falha dos algoritmos	45

Lista de abreviaturas e siglas

AD	Analógico-digital
CPU	<i>Central Processing Unit</i> , Unidade Central de Processamento
ECG	Eletrocardiograma
FINEP	Financiadora de Estudos e Projetos
FIR	<i>Finite Impulse Response</i> , Resposta Finita ao Impulso
FPU	<i>Floating Point Unit</i> , Unidade de Ponto Flutuante
IEEE	Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos
IIR	<i>Infinite Impulse Response</i> , Resposta Infinita ao Impulso
SGDD	Filtros diferenciadores digitais de Savitzky-Golay
SGDP	Filtro diferenciador digital de Savitzky-Golay por derivada polinomial
SGDS	Filtros diferenciadores digitais de Savitzky-Golay por diferenciação simétrica
SGDST	Filtro diferenciador digital de Savitzky-Golay por diferenciação simétrica por aproximações de Taylor
SGDSR	Filtros diferenciadores digitais de Savitzky-Golay por diferenciações simétricas recursivas
UNIFEI	Universidade Federal de Itajubá

Lista de símbolos

$*$	Operador de convolução
$[x]$	Função parte inteira de x
\forall	Para todo
\exists	Existe
δ	Função impulso contínua
δ_d	Função impulso discreta
π	Constante matemática com valor aproximadamente igual a 3,14
$\sum_{k=i}^N$	Somatório do índice inteiro k variando de i até N
∞	Infinito
$a_{i,k}$	Elemento de uma matriz genérica A na i -ésima linha e k -ésima coluna
A^T	Notação para uma matriz genérica A transposta
b_k	Notação para k -ésimo elemento de uma matriz linha ou coluna (vetor)
B	Matriz coluna dos coeficientes do polinômio de Savitzky-Golay
Ca^{+2}	Representação do elemento químico cálcio no estado de íon
e^α	Notação para função exponencial, avaliada em α
f	Frequência
f_n	Frequência normalizada
f_s	Frequência de amostragem (<i>sampling frequency</i>)
$g(t)$	Sinal contínuo relacionado a uma grandeza
$g[n]$	Sinal discreto relacionado a uma grandeza
G	Transformada de um sinal g
G_{PR}	Ganho de potência de ruído
$h[n]$	Resposta discreta ao impulso, núcleo de convolução, coeficientes de um filtro <i>FIR</i>

$h_r [n]$	Notação de coeficientes de filtro diferenciador de ordem r
$h(t)$	Resposta contínua ao impulso
H_r	Matriz de coeficientes do filtro diferenciador de Savitzky-Golay de ordem r
$H_r(f_n)$	Resposta em frequência do filtro diferenciador de ordem r
i	Índice genérico, número inteiro
j	Unidade imaginária, equivalente a $\sqrt{-1}$
k	Índice genérico, número inteiro
K^+	Representação do elemento químico potássio no estado de íon
\mathcal{L}	Operador transformada de Laplace
m	Indicador do tamanho da janela do filtro de Savitzky-Golay, número inteiro
M	Índice limite, número inteiro
n	Índice da amostra, número inteiro
N	Índice limite, número inteiro
Na^+	Representação do elemento químico sódio no estado de íon
p	Grau do polinômio de Savitzky-Golay
q	Índice de varredura de um polinômio, número inteiro
r	Ordem da derivada ou diferenciação
s	Variável da transformada de Laplace
S	Matriz de Savitzky-Golay
t	Tempo
T_s	Período de amostragem
ω	Frequência angular ($2 \pi f$)
x	Sinal de entrada de um sistema
y	Sinal de saída de um sistema
z	Variável da transformada Z
\mathcal{Z}	Operador transformada Z

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Contextualização do projeto	14
1.2	Motivação e objetivos	15
1.3	Organização do trabalho	15
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	16
2.1	Eletrocardiografia	16
2.1.1	Sistema de condução cardíaco	16
2.1.2	Sinal elétrico cardíaco	17
2.1.2.1	Origem biológica	17
2.1.2.2	Modelo matemático	18
2.1.2.3	Derivações eletrocardiográficas	20
2.1.3	Interferências em sinais eletrocardiográficos	21
2.1.3.1	Artefatos de movimento	21
2.1.3.2	Artefatos musculares	22
2.1.3.3	Interferências eletromagnéticas	23
2.1.4	Deteção de batimentos cardíacos	23
2.1.5	Requisitos normativos	24
2.1.5.1	Teste das ondas senoidais	25
2.1.5.2	Teste dos pulsos triangulares	25
2.2	Filtros digitais de Savitzky-Golay	25
2.2.1	Suavização	25
2.2.2	Diferenciação	28
2.2.3	Propriedades	29
2.2.3.1	Coeficientes racionais	29
2.2.3.2	Preservação de momento	29
2.2.3.3	Similaridade com diferenciadores ideais em baixas frequências	30
2.2.3.4	Invariância de fase na banda passante ou banda de correspondência	31
2.2.4	Projeto no domínio da frequência	32
2.2.4.1	Banda passante e banda de transição	32
2.2.4.2	Banda de correspondência	32
2.2.4.3	Nulos espectrais	33
3	NOVAS ABORDAGENS DE DIFERENCIADORES SAVITZKY-GOLAY	34
3.1	Diferenciação simétrica por aproximações de Taylor	34
3.1.1	Formulação	35

3.1.2	Confirmação das propriedades	35
3.1.2.1	Coeficientes racionais	35
3.1.2.2	Preservação do momento	35
3.1.2.3	Similaridade com diferenciadores ideais em baixas frequências	36
3.1.2.4	Invariância de fase na banda passante ou banda de correspondência	36
3.2	Diferenciação simétrica recursiva	37
3.2.1	Formulação	37
3.2.2	Confirmação das propriedades	38
3.2.2.1	Coeficientes racionais	38
3.2.2.2	Preservação do momento	38
3.2.2.3	Similaridade com diferenciadores ideais em baixas frequências	38
3.2.2.4	Invariância de fase na banda de correspondência	39
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	40
4.1	Projeto de filtro pelo encontro de nulos espectrais	40
4.2	Comparação do ganho da potência de ruído	41
4.3	Filtragem de sinal típico de ECG	42
5	CONCLUSÃO	46
	REFERÊNCIAS	47
	APÊNDICES	49
	APÊNDICE A – CÓDIGOS FONTE	50
A.1	Ferramentas para filtros de Savitzky-Golay	50
A.1.1	Funções elementares	50
A.1.2	Funções principais	52
A.1.3	Funções relacionadas à resposta em frequência	55
A.2	Geração e tratamento de sinais eletrocardiográficos	58

1 Introdução

1.1 Contextualização do projeto

A aquisição de sinais biológicos, como o sinal elétrico do coração, é essencial para exames eventuais e também monitoramento contínuo de pacientes. A partir das características dos biosinais, é possível diagnosticar doenças como arritmia cardíaca e fundamentar um tratamento a fim de evitar um infarto no miocárdio (9), por exemplo.

No início do século XX, Willen Einthoven propôs o primeiro modelo de eletrocardiógrafo (10), aparelho capaz de medir os sinais elétricos do coração, e desde então, vários avanços foram feitos na área com relação às aplicações, aos materiais utilizados e projetos de circuitos, a fim de proporcionar vantagens como a redução do custo do eletrocardiógrafo, ferramentas de auxílio ao diagnóstico, transmissão de dados adquiridos, portabilidade do equipamento.

O projeto FINEP sob convênio 01.13.0387.00, no qual está inserido o presente trabalho, tem como objetivo a concepção de um sistema de eletrocardiografia de pequeno porte, baixo custo e baixo consumo de potência, com a possibilidade até mesmo da construção de algoritmos de auxílio ao diagnóstico médico, servindo portanto como apoio ao monitoramento remoto de pacientes com doenças cardíacas. O sistema completo a ser desenvolvido pode ser dividido em partes, as quais correspondem à sequência pela qual flui o biosinal:

- **Transdução:** Eletrodos capazes de realizar a conversão de um biopotencial, onde circula corrente iônica, em potencial elétrico onde circula corrente eletrônica, por questões de compatibilidade com o restante do circuito.
- **Amplificação e filtragem básica:** Circuito analógico com a função de amplificar, fazer um ajuste de offset e uma filtragem básica no sinal resultante da transdução para níveis de tensão e conteúdo espectral adequados para a leitura na etapa de processamento.
- **Processamento:** Consiste em um microcontrolador equipado com um conversor analógico-digital que faz a aquisição do sinal amplificado e pré-filtrado e o processa digitalmente a fim de eliminar fontes de ruído típicas, com o compromisso de preservar o sinal de interesse, usado como base para diagnóstico.
- **Transmissão:** Uma vez que o projeto almeja um monitoramento remoto, é necessário que um circuito transmissor receba o resultado do processamento digital dos dados e o transmita para outro dispositivo com interface à interpretação clínica.

1.2 Motivação e objetivos

Existem diversas fontes de interferência (8) ao biosinal do coração, ou seja, sinais não provenientes do coração que se somam ao biosinal cardíaco no ato de sua aquisição. Esses sinais parasitas têm características conhecidas no domínio da frequência, daí surge a necessidade da eliminação dos sinais parasitas sem grandes prejuízos à integridade do sinal de interesse (cardíaco).

Para esse propósito já existem diversas soluções em filtros analógicos e digitais (11)(12), porém este trabalho tem a necessidade específica de realizar a filtragem digital de sinais eletrocardiográficos não só em compromisso com as normas aplicáveis, mas também com os requisitos de baixo custo de hardware e baixo consumo de potência do circuito, o que implica em um software embarcado muito simples que mantenha a eficácia da filtragem.

O principal objetivo do trabalho é, portanto, o projeto de filtros diferenciadores de baixo custo computacional, mais eficazes na eliminação de ruídos e que forneçam informações relacionadas à derivada do sinal eletrocardiográfico, as quais são úteis para o cálculo do ritmo cardíaco (13).

1.3 Organização do trabalho

O Capítulo 1 apresenta o escopo no qual se encaixa o trabalho e guia a leitura e compreensão do mesmo.

O Capítulo 2 revisa os conteúdos teóricos necessários para a compreensão e desenvolvimento do trabalho: conhecimentos médicos relacionados à eletrocardiografia e um estudo detalhado dos filtros digitais de Savitzky-Golay, pois esse orientará metodologia específica de filtro digital usada ao longo do trabalho.

O Capítulo 3 propõe novas metodologias para o cálculo dos filtros diferenciadores de Savitzky-Golay e apresenta suas características em comparação às características da metodologia original.

O Capítulo 4 apresenta resultados de simulações computacionais a fim de verificar, de forma prática, informações apresentadas no Capítulo 3.

O Capítulo 5 expõe as conclusões principais e propõe futuros trabalhos baseados neste.

O Apêndice A lista códigos fonte de bibliotecas criadas em ambiente computacional para o desenvolvimento deste trabalho e úteis para trabalhos similares.

2 Fundamentos teóricos

2.1 Eletrocardiografia

A despolarização e repolarização elétrica das células cardíacas causam a contração (sístole) e o relaxamento (diástole) do coração, logo a leitura do sinal elétrico do coração é uma forma não invasiva de conhecer as informações sobre o funcionamento do coração de um indivíduo (3).

Nesse sentido, a eletrocardiografia é o registro gráfico do sinal elétrico do coração, útil na medicina para diagnosticar doenças como arritmia cardíaca e fundamentar um tratamento a fim de evitar um infarto no miocárdio (9), por exemplo.

O médico, portanto, orientará suas decisões com base na comparação do sinal do paciente com padrões anteriormente conhecidos e o conhecimento do efeito de doenças não cardíacas no sinal (6).

O aparelho capaz de captar o biosinal cardíaco chama-se eletrocardiógrafo e o exame clínico que consiste no registro da eletrocardiografia é denominado eletrocardiograma (ECG).

2.1.1 Sistema de condução cardíaco

A anatomia do sistema de condução cardíaco (3) compreende os seguintes órgãos, retratados na Figura 1:

- **Nó sinusal:** Localiza-se na parte superior do átrio direito e tem a função de marca-passo cardíaco.
- **Nó atrioventricular:** Localiza-se no átrio direito, mais precisamente na base do septo interatrial, é responsável pela transmissão do estímulo elétrico dos átrios aos ventrículos, fazendo uma pausa suficiente para que os átrios consigam bombear sangue para os ventrículos, separando assim as sístoles atrial e ventricular.
- **Feixe de His:** É uma bifurcação do nó atrioventricular que segue pelo corpo fibroso central com a função de conduzir o estímulo elétrico aos ventrículos.
- **Fibras de Purkinje:** Componentes terminais do sistema de condução cardíaco, conduzindo o estímulo até as células miocárdicas dos ventrículos.

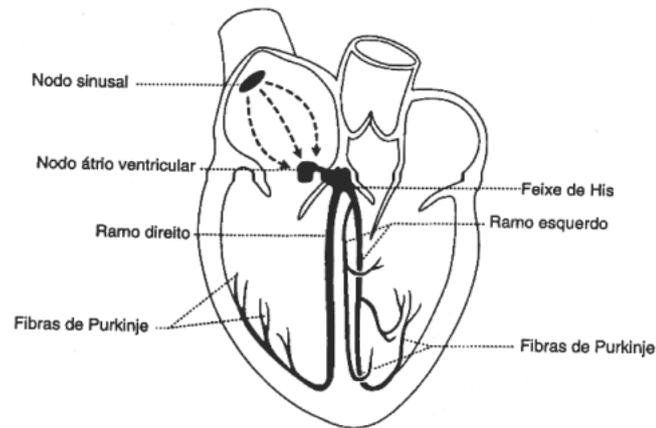


Figura 1 – Anatomia do sistema de condução cardíaco (1)

2.1.2 Sinal elétrico cardíaco

2.1.2.1 Origem biológica

O potencial de ação é um fenômeno elétrico típico de células excitáveis, dado pela inversão de sinal do potencial elétrico de membrana. De forma específica, para uma célula cardíaca, o potencial é dividido nas fases mostradas na Figura 2 e explicadas em seguida, de acordo com a dinâmica do fluxo de íons que dão origem a uma corrente elétrica de natureza iônica (3).

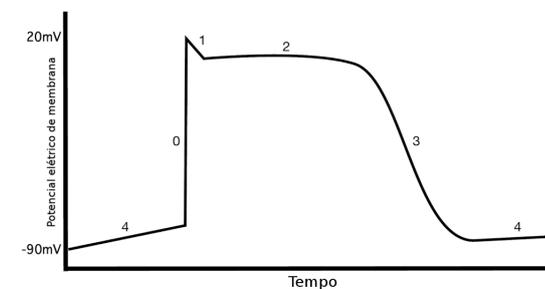


Figura 2 – Potencial de ação em uma célula cardíaca (2)

- **Fase 0 - Despolarização rápida:** Ocorre a entrada de Na^+ na célula.
- **Fase 1 - Repolarização rápida:** Os canais de Na^+ se fecham, ao passo em que os canais de K^+ começam a abrir para sua saída da célula.
- **Fase 2 - Platô:** A célula permanece despolarizada por certo tempo. Há entrada gradual de Ca^{+2} e os íons K^+ continuam saindo.
- **Fase 3 - Repolarização lenta:** Íons K^+ saem da célula a uma taxa mais acelerada e os canais de Ca^{+2} são fechados.

- **Fase 4 - Potencial de repouso:** Caracterizada pela baixa variação no potencial elétrico de membrana, nela acontecem a saída de Na^+ e Ca^{+2} da célula e entrada de K^+ para reinício do ciclo.

Da superposição dos potenciais de ação nas diferentes partes do coração, origina-se o sinal elétrico do coração (sinal de ECG), conforme ilustra a Figura 3.

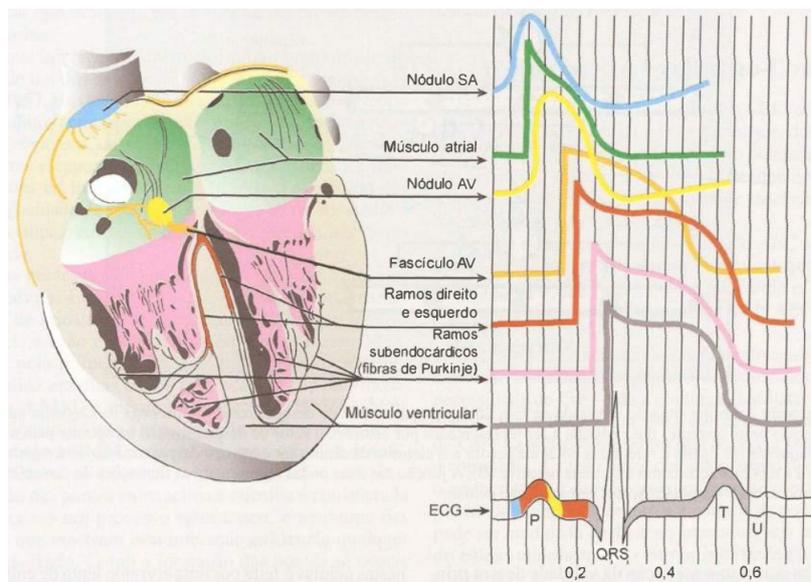


Figura 3 – Sinal de ECG como superposição de potenciais de ação (3)

É comum, para fins de estudo e diagnóstico, a divisão de um sinal de ECG típico em partes (3), conforme a Figura 4.

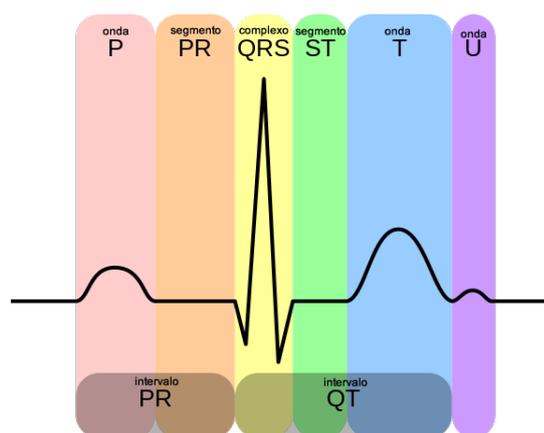


Figura 4 – Partes características de um sinal de ECG típico (4)

2.1.2.2 Modelo matemático

De acordo com o modelo apresentado em (5) o sinal de ECG pode ser calculado como uma variável de estado de um sistema dinâmico de terceira ordem, representado geometricamente

na Figura 5, cuja periodicidade é garantida pelo cálculo da amplitude z baseada no ângulo formado pelo par (x, y) , que por sua vez segue um movimento atraído pela trajetória circular de raio unitário centrada na origem.

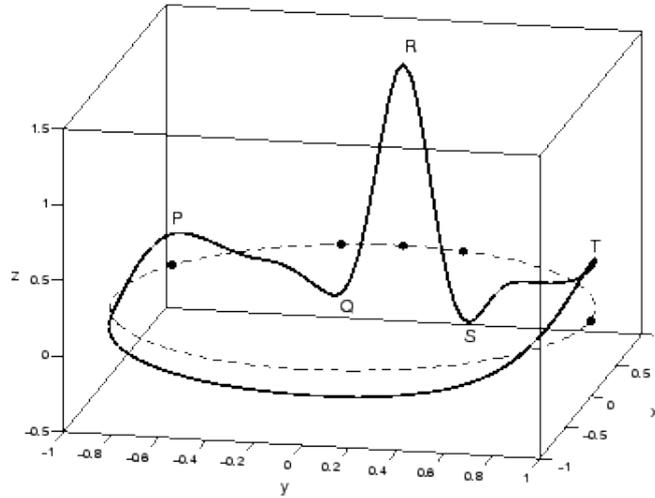


Figura 5 – Representação geométrica do modelo dinâmico do ECG (5)

As equações que fundamentam tal modelo são

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - \sqrt{x^2 + y^2})x - \omega y \\ \dot{y} = \omega x + (1 - \sqrt{x^2 + y^2})y \\ \dot{z} = -(z - z_0) - \sum_{i=1}^5 a_i (\theta - \theta_i) e^{-\frac{(\theta - \theta_i)^2}{2b_i^2}} \end{cases} \quad (2.1)$$

sendo

- ω a frequência cardíaca angular.
- $\theta = \text{atan2}(y, x)$, função arcotangente que considera o sinal das coordenadas e retorna valor entre $-\pi$ e π .
- z_0 é o valor da linha de base, pode variar com o tempo de forma pré-determinada para simular artefatos ou apenas ser definida num valor fixo.
- Constantes a_i , b_i e θ_i definem o formato típico de cada ponto da onda e seus valores são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Constantes para formato do ECG

Índice (i)	1	2	3	4	5
Parte do ECG	P	Q	R	S	T
θ_i	$-\pi/3$	$-\pi/12$	0	$\pi/12$	$\pi/2$
a_i	1,20	-5,00	30,00	-7,50	0,75
b_i	0,25	0,10	0,10	0,10	0,40

2.1.2.3 Derivações eletrocardiográficas

A atividade elétrica do coração tem uma sequência temporal e espacial, logo o sinal elétrico de ECG pode mudar sua forma dependendo dos dois pontos entre os quais é medido, conforme exemplificado pela Figura 6.

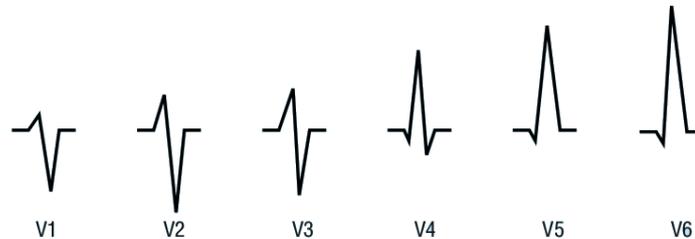


Figura 6 – Visualização do complexo QRS em diferentes derivações (6)

Daí surge o conceito de derivações eletrocardiográficas (6): eixo elétrico definido pelo posicionamento dos dois eletrodos de captação de sinal. A seguir são citados diferentes tipos de derivações, posteriormente ilustradas na Figura 7.

- **Derivações bipolares:** D1, D2 e D3.
- **Derivações unipolares aumentadas:** aVR, aVL e aVF.
- **Derivações precordiais:** V1, V2, V3, V4, V5 e V6.

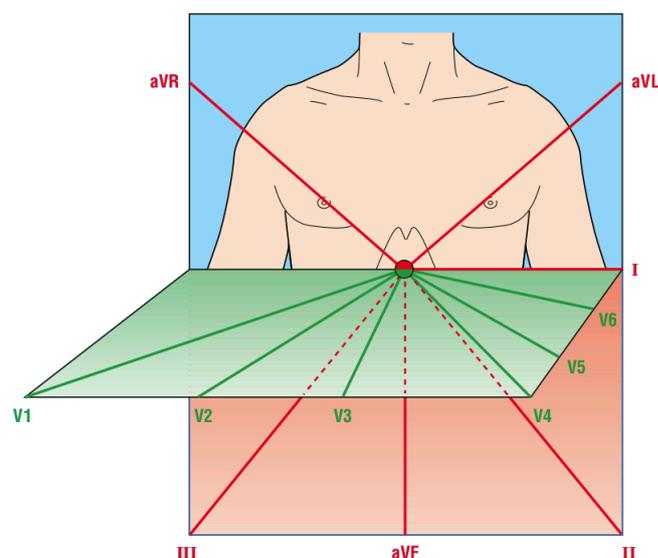


Figura 7 – Distribuição corporal das derivações eletrocardiográficas (6)

As derivações precordiais e unipolares aumentadas são medidas entre um membro do corpo do paciente e um ponto de referência externo, ao contrário das derivações bipolares que, como o próprio nome sugere, medem a diferença de potencial entre dois membros do corpo do paciente.

As derivações bipolares são como as arestas e os membros perna esquerda (PE), braço direito (BD) e braço esquerdo (BE) são como vértices de um triângulo que envolve o coração, conhecido como triângulo de Einthoven mostrado na Figura 8.

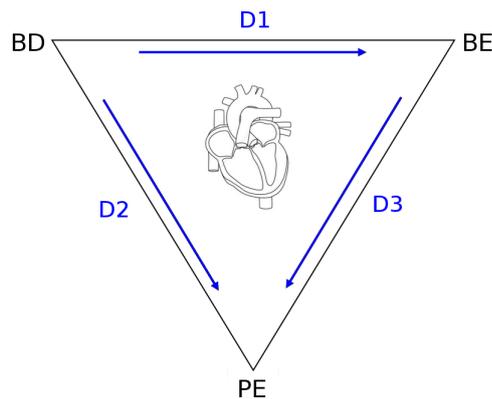


Figura 8 – Triângulo de Einthoven (7)

Esta configuração é definida de forma que pessoas sadias apresentem o complexo QRS de amplitude positiva em qualquer derivação.

2.1.3 Interferências em sinais eletrocardiográficos

Ao adquirir o sinal de ECG, alguns sinais indesejados podem se superpor ao sinal do coração, o que pode atrapalhar o diagnóstico. A seguir são citadas as principais fontes de interferências no sinal de ECG e como o paciente, o operador do exame e o aparelho devem se comportar perante o evento para mitigar seus efeitos no traçado gráfico final (8).

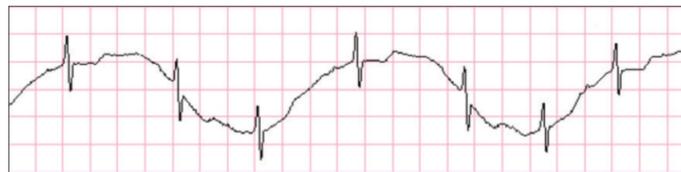
As soluções do aparelho, em especial, referem-se a critérios de projeto do eletrocardiógrafo e devem ser cuidadosamente especificadas para não distorcer o sinal de interesse.

2.1.3.1 Artefatos de movimento

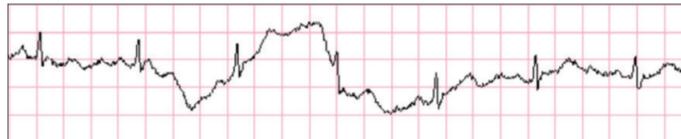
A respiração, o movimento, a fala do paciente e até mesmo seu transporte, em uma ambulância por exemplo, podem causar esse tipo de artefato.

- O paciente deve ficar bem acomodado, sem falar e com respiração suave.
- O operador deve aguardar o transporte do paciente, raspar sua pele e, para eletrodos que exigem o contato por gel, verificar se o gel está seco ou a região está pouco lubrificada.

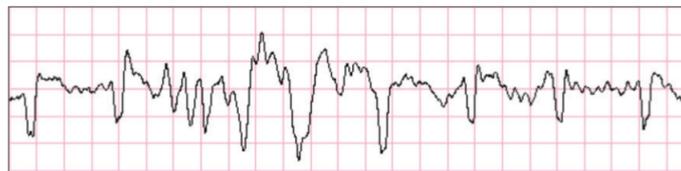
- O eletrocardiograma deve eliminar as baixas frequências típicas desses artefatos, estabelecendo assim a linha de base.



(a) Respiração (0.4 - 2 Hz)



(b) Movimento do paciente (1 - 3 Hz)



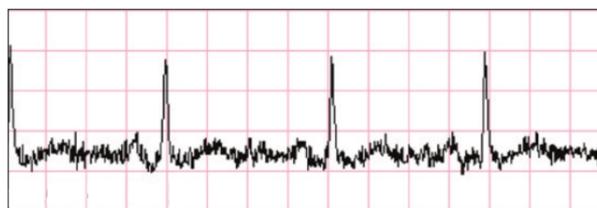
(c) Transporte (3 - 15 Hz)

Figura 9 – Artefatos de movimento (8)

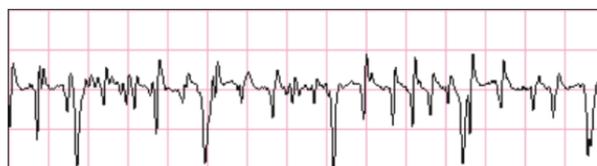
2.1.3.2 Artefatos musculares

Os artefatos musculares são gerados por tensão ou tremor muscular.

- O paciente deve relaxar seus músculos.
- O operador deve cobrir o paciente em caso de tremor por sensação de frio.
- O eletrocardiograma deve eliminar os ruídos de alta e baixa frequência causados por tal artefato.



(a) Tensão muscular (20 - 150 Hz)



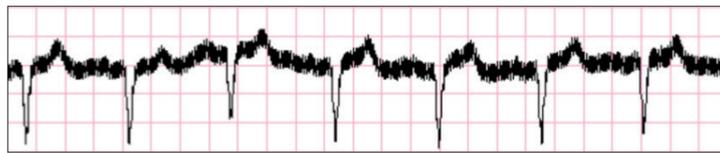
(b) Tremor muscular (20 - 150 Hz e 3 - 5 Hz)

Figura 10 – Artefatos musculares (8)

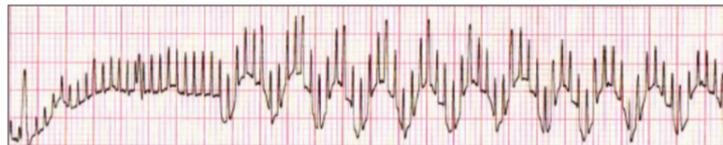
2.1.3.3 Interferências eletromagnéticas

As interferências eletromagnéticas são produzidas pela rede elétrica, por equipamentos elétricos nas proximidades e outras ondas de alta frequência que se propagam pelo ar.

- O paciente deve evitar o porte de aparelhos celulares e outros eletrônicos.
- O operador deve raspar a pele do paciente e, para eletrodos que exigem o contato por gel, verificar se o gel está seco ou a região está pouco lubrificada.
- O eletrocardiógrafo deve eliminar o sinal senoidal na frequência da rede elétrica local e também sinais de alta frequência.



(a) Rede elétrica (frequências pontuais, geralmente 50 ou 60 Hz e múltiplas inteiras)



(b) Aparelho eletrônico (altas frequências)

Figura 11 – Interferências eletromagnéticas (8)

2.1.4 Detecção de batimentos cardíacos

A ocorrência de um complexo QRS relaciona-se biologicamente com uma batida do coração (14). Isso se mostra como uma vantagem, uma vez que essa parte da onda tem grande destaque pela sua alta variação da amplitude em um curto intervalo de tempo.

A princípio, pode se considerar que o estabelecimento de um limiar na onda do ECG seja suficiente para identificar os complexos QRS, porém quando, por exemplo, a onda é modificada por artefatos da respiração (ondas de baixa frequência mencionadas em 2.1.3.1), percebe-se que este critério é insuficiente.

Aproveitando-se, portanto, das características morfológicas do complexo QRS e do benefício do triângulo de Einthoven quanto a garantir que estes complexo seja sempre positivo, é proposto em (13) um método baseado não no sinal original de ECG, mas na sua diferenciação para identificar o complexo QRS.

Porém, deve se tomar cuidado, no filtro diferenciador empregado, com o ganho da potência de ruídos de alta frequência, pois estes ruídos podem eventualmente ser amplificados a níveis que possam ser confundidos com a diferenciação do complexo QRS, contando falsos batimentos. Este é um dos problemas que o presente trabalho se propõe a mitigar.

A fim de exemplificar melhor a discussão entre usar o sinal original ou sua diferenciação, apresentam-se nas Figuras 12 e 13 casos comparativos entre as duas metodologias nos quais a identificação do complexo é feita com o estabelecimento de um limiar no sinal original ou de dois limiares no sinal diferenciado.

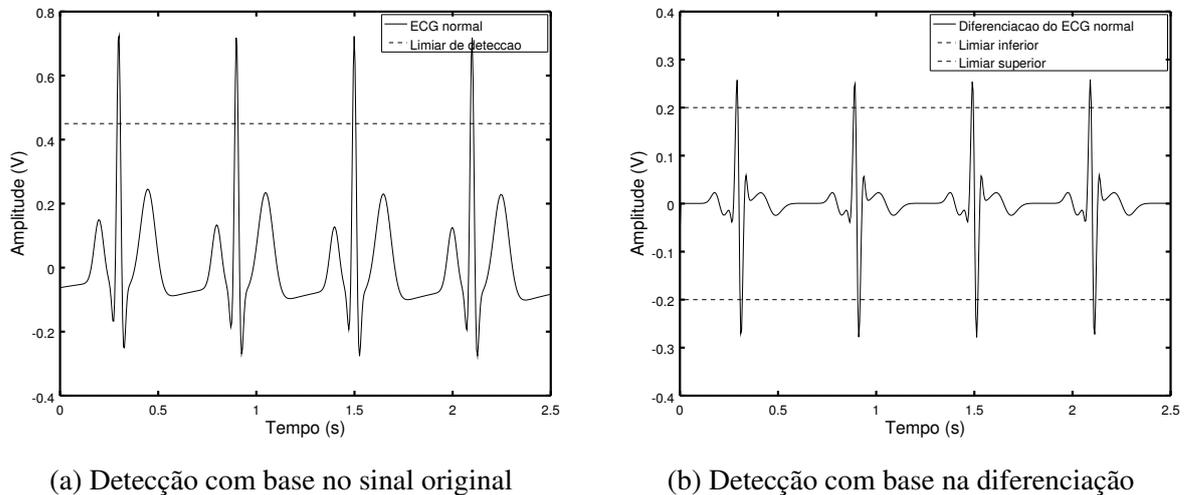


Figura 12 – Possíveis detecções de batimentos em um sinal de ECG normal

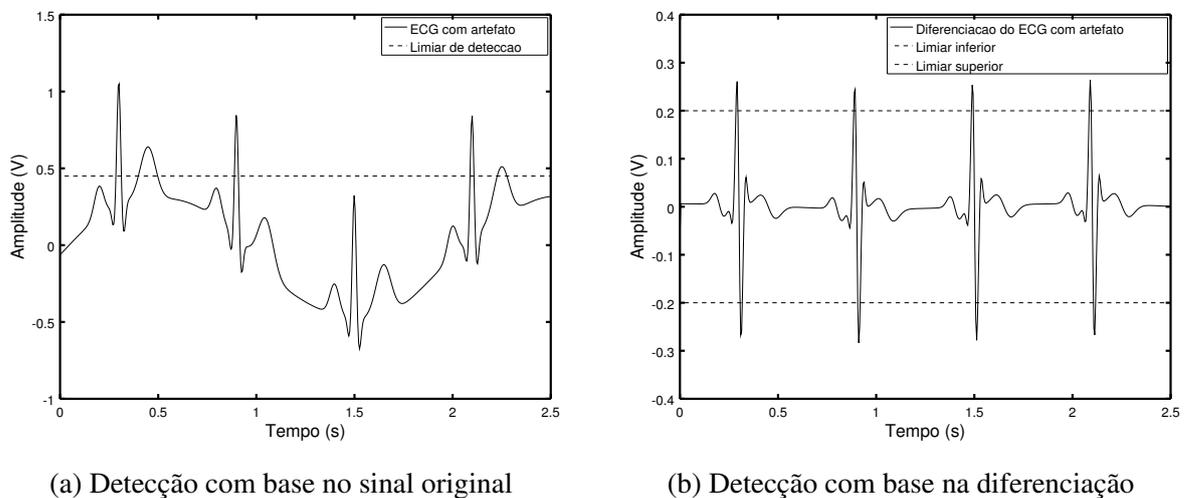


Figura 13 – Possíveis detecções de batimentos em um sinal de ECG com artefato de respiração

2.1.5 Requisitos normativos

No Brasil, a norma que regulamenta aparelhos médicos de monitoramento eletrocardiográfico é a ABNT NBR IEC 60601-2-27:2013, que estabelece requisitos e testes de isolamento elétrico do paciente, tolerância da emissão eletromagnética, susceptibilidade a ondas eletromagnéticas externas e também integridade do sinal examinado (15). Este último critério é o mais importante a ser observado quando se trata de filtros digitais em eletrocardiógrafos, e propõe

dois testes nos quais impõem-se sinais de entrada e monitoram-se os respectivos sinais de saída em busca de parâmetros de qualidade do equipamento.

2.1.5.1 Teste das ondas senoidais

Três sinais senoidais são aplicados separadamente na entrada do aparelho, com amplitude de 1 mV e frequências 0,67 Hz, 5,0 Hz e 40 Hz. O sinal de saída em 0,67 Hz e 40 Hz devem apresentar amplitude de saída entre 71% e 110% da amplitude de saída do sinal de 5 Hz.

2.1.5.2 Teste dos pulsos triangulares

Aplicam-se separadamente dois sinais de entrada de frequência 1 Hz, com um pulso triangular simétrico de amplitude de 1 V e durações de 20 ms e 200 ms. A amplitude da saída obtida para a duração de 20 ms deve ser de 75% a 100% da amplitude de saída obtida para a duração de 200 ms.

2.2 Filtros digitais de Savitzky-Golay

Para o projeto de filtros digitais diferenciadores, são propostas diversas metodologias baseadas em modelos de sinais estocásticos (16), filtros sinc (17), transformadas de Hilbert (18), conversão de filtros analógicos para digitais por alocação de polos e zeros (19), interpolação polinomial (20) ou inferências a resposta em frequência de filtros antissimétricos (21). Os dois últimos são considerados equivalentes pelo próprio (21).

Dentre todos estes apresentados escolheu-se portanto a metodologia de filtros diferenciadores de Savitzky-Golay (20) por apresentar as propriedades de baixíssimo custo computacional do algoritmo de filtragem, não presente em (16) e (17), e também invariância da fase para não deformar picos, o que não é presente em (19) e (18).

2.2.1 Suavização

O filtro de suavização de Savitzky-Golay é baseado na correção do valor central de uma janela de $2m + 1$ pontos pela interpolação polinomial de grau p (20), conforme ilustrado na Figura 14.

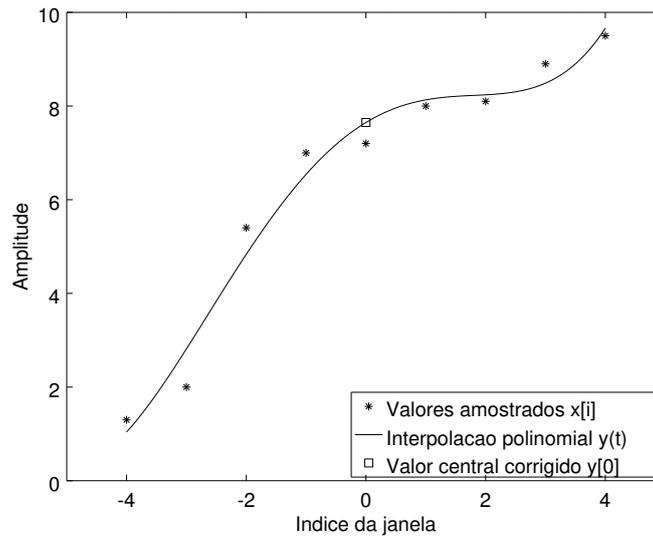


Figura 14 – Conceito de suavização de Savitzky-Golay

De forma detalhada, a janela de pontos amostrados é distribuída sobre um domínio de números inteiros centrados em 0, ou seja, de índice i variando de $-m$ a m , onde é definido o polinômio interpolante (20)

$$y[i] = \sum_{q=0}^p b_q i^q, \quad (2.2)$$

matricialmente representada por

$$Y = S B, \quad (2.3)$$

e expandida como

$$\begin{bmatrix} y[-m] \\ \vdots \\ y[0] \\ \vdots \\ y[+m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -m & (-m)^2 & \cdots & (-m)^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0^2 & \cdots & 0^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & +m & (+m)^2 & \cdots & (+m)^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

A determinação dos coeficientes b_q consiste na solução do sistema linear $S B = X$, que corresponde ao ajuste polinomial nas amostras coletadas. O vetor X é definido pelas amostras de $x[n]$ de forma totalmente análoga à forma como Y é definida por $y[n]$.

A matriz S é a matriz de Savitzky-Golay, que corresponde a uma matriz de Vandermonde (22) em formato retangular de bases inteiras simétricas pela origem. Possui $2m + 1$ linhas e $p + 1$ colunas e as relações entre p e m pode levar a várias situações da solução do sistema $S B = X$:

- $2m < p$ possibilita infinitos polinômios que passem por todos os pontos amostrados, leva a uma indeterminação.

- $2m = p$ possibilita um único polinômio que passe por todos os pontos amostrados, o polinômio é determinado simplesmente por $B = S^{-1} X$.
- $2m > p$ é a situação em que pode não existir um polinômio que passe por todos os pontos amostrados, porém pode se calcular o polinômio que interpola tais pontos de forma a minimizar o erro médio quadrático entre o polinômio encontrado e os pontos amostrados, usando a matriz pseudo-inversa (22)

$$B = (S^T S)^{-1} S^T X . \tag{2.5}$$

Assim, dada a condição $2m > p$ (única coerente com o propósito inicial do filtro), a equação (2.3) pode ser reescrita de forma a calcular a saída do filtro de suavização dependendo apenas da matriz de Savitzky-Golay e do sinal de entrada

$$Y = S (S^T S)^{-1} S^T X = H_0 X , \tag{2.6}$$

na qual a matriz H_0 é definida como a matriz de coeficientes do filtro suavizador de Savitzky-Golay.

Para melhor compreensão das matrizes envolvidas e coerência com a formulação do filtro de Savitzky-Golay centralizado, são apresentadas na Tabela 2 as diferentes matrizes e agrupamentos envolvidas no cálculo dos coeficientes, juntamente com uma indexação não convencional de suas linhas e colunas e também a lei de formação de seus elementos (quando analiticamente viável).

Tabela 2 – Detalhes das matrizes

Matriz	Índice das linhas	Índice das colunas	Lei dos elementos
S	$-m$ até m	0 até p	$s_{i,q} = i^q$
S^T	0 até p	$-m$ até m	$s_{q,i}^T = i^q$
$V = (S^T S)$	0 até p	0 até p	$v_{q,l} = \sum_{\alpha=-m}^m \alpha^{q+l}$
$W = (S^T S)^{-1}$	0 até p	0 até p	$w_{q,l}$
$U = \frac{d^r}{di^r} S$	$-m$ até m	0 até p	$u_{i,q} = \frac{d^r}{di^r} s_{i,q}$
H_r	$-m$ até m	$-m$ até m	$h_{i,k}$

De (2.6) resulta o cálculo da saída $y[i]$ na forma de filtro digital

$$y[i] = \sum_{k=-m}^m h_{i,k} x[k] , \tag{2.7}$$

que deve ser avaliado em $i = 0$ para cumprir com o intuito de corrigir o valor central

$$y[0] = \sum_{k=-m}^m h_{0,k} x[k] . \tag{2.8}$$

Definindo o vetor de coeficientes para correção do valor central $h_{0,k} = h[k]$ e escrevendo o filtro para uma janela móvel ($0 \leq n < \infty$) e não mais na janela fixa ($-m \leq i \leq m$), temos

$$y[n] = \sum_{k=-m}^m h[k] x[n+k] \quad (2.9)$$

como sendo a equação de implementação do filtro de Savitzky-Golay.

2.2.2 Diferenciação

Além da obtenção do sinal suavizado de ruídos, outra possível aplicação é a obtenção da derivada do sinal suavizado ou sua diferenciação (derivada a menos de um ganho), útil na detecção de batimentos cardíacos em um sinal de ECG ruidoso.

O polinômio (2.2) pode ser derivado r vezes com relação a i

$$\frac{d^r y[i]}{di^r} = \frac{d^r}{di^r} \sum_{q=0}^p b_q i^q = \sum_{q=0}^p b_q \frac{d^r i^q}{di^r} = \sum_{q=r}^p b_q \frac{q!}{(q-r)!} i^{q-r}, \quad (2.10)$$

levando a uma nova equação matricial

$$\frac{d^r Y}{di^r} = \frac{d^r S}{di^r} B, \quad (2.11)$$

expandida como

$$\begin{bmatrix} \frac{d^r y[-m]}{di^r} \\ \vdots \\ \frac{d^r y[0]}{di^r} \\ \vdots \\ \frac{d^r y[+m]}{di^r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & r! & (r+1)!(-m) & \cdots & \frac{p!}{(p-r)!}(-m)^{p-r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r! & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r! & (r+1)!(+m) & \cdots & \frac{p!}{(p-r)!}(+m)^{p-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ b_{r+1} \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

sob a condição

$$0 \leq r \leq p. \quad (2.13)$$

Substituindo (2.5) em (2.11), temos a equação matricial

$$\frac{d^r Y}{di^r} = \frac{d^r S}{di^r} (S^T S)^{-1} S^T X \quad (2.14)$$

de onde se extrai a matriz H_r genérica para uma diferenciação de ordem r

$$H_r = \frac{d^r S}{di^r} (S^T S)^{-1} S^T, \quad (2.15)$$

daí convém denotar os coeficientes do filtro diferenciador de Savitzky-Golay, que também corrige valor central ($i = 0$), como $h_r[k]$ para explicitar a ordem da diferenciação.

2.2.3 Propriedades

Algumas propriedades de (23) são listadas e estendidas para uma ordem de diferenciação genérica a fim de se verificar a similaridade entre o método tradicional de diferenciação de Savitzky-Golay e os novos propostos no Capítulo 3.

2.2.3.1 Coeficientes racionais

A matriz de coeficientes do filtro H_r pode ser reescrita usando o método da matriz adjunta (22) para calcular a matriz inversa $(S^T S)^{-1}$

$$H_r = \frac{1}{\det(S^T S)} \frac{d^r S}{di^r} \text{adj}(S^T S) S^T, \quad (2.16)$$

que mostra um produto de matrizes de números inteiros multiplicado pelo inverso de um número inteiro. Isso mostra que qualquer coeficiente $h_r[k]$ é representável por uma fração de numerador inteiro e denominador também inteiro e comum a todos os outros coeficientes.

Assim, a implementação do filtro em software embarcado em microcontrolador, que aquire o sinal de entrada $x[n]$ como números inteiros, não exigirá cálculos com números de ponto flutuante, isso dispensa um hardware especializado em resolver cálculos com ponto flutuante (FPU), representando uma economia em custo do hardware e consumo de energia, já que hardwares mais simples geralmente consomem menos energia.

As operações com números inteiros também são executadas mais rapidamente que operações com números de ponto flutuante, o que representa uma economia de tempo de execução e novamente economia de energia, por usar a CPU por menos tempo. A equação de implementação (2.9) exigirá da CPU $2m + 1$ multiplicações, $2m$ somas e uma única divisão de números inteiros.

2.2.3.2 Preservação de momento

De acordo com (24), o q -ésimo momento da resposta ao impulso $h_r[k]$ é dado por

$$M_q = \sum_{k=-m}^m k^q h_r[k], \quad (2.17)$$

equivalente ao elemento da linha 0 e coluna q do produto $H S$, que expandido, leva à sua simplificação

$$H S = \frac{d^r S}{di^r} (S^T S)^{-1} S^T S = \frac{d^r S}{di^r}. \quad (2.18)$$

Portanto o q -ésimo momento do núcleo $h_r[k]$ é simplesmente dado por

$$M_q = \left(\frac{d^r}{di^r} i^q \right) \Big|_{i=0}. \quad (2.19)$$

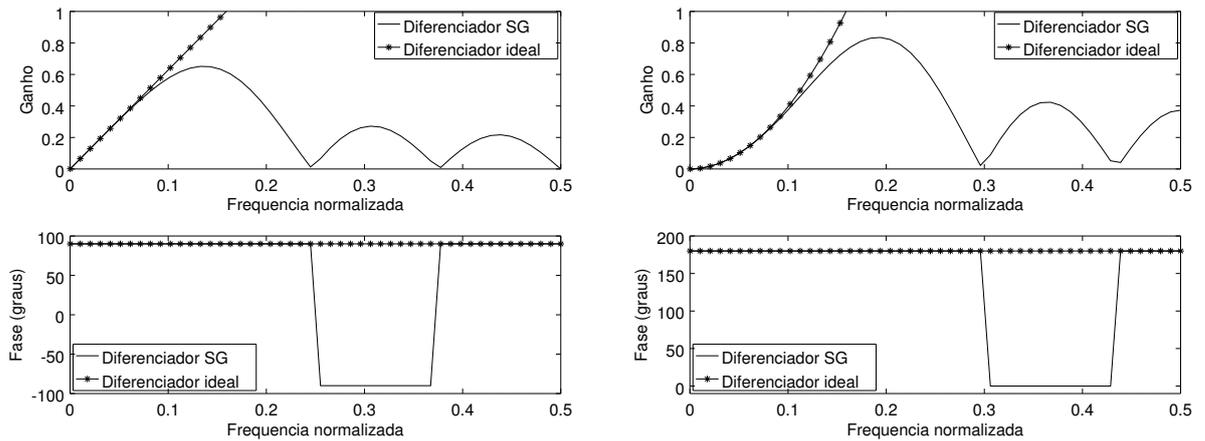
Estendendo o conceito de preservação de momento de (24) e (23) para uma diferenciação genérica de ordem r , com base em (2.19), temos a preservação de momento da r -ésima diferenciação ideal do sinal de entrada como uma consequência direta de

$$M_q = r! \delta_d[r - q], \quad q = 0, 1, \dots, p. \quad (2.20)$$

2.2.3.3 Similaridade com diferenciadores ideais em baixas frequências

Ruídos de alta frequência são largamente amplificados por filtros diferenciadores ideais. Tal característica pode inviabilizar certas aplicações que dependam da operação de diferenciação em um sinal ruidoso.

Nesse quesito, filtros diferenciadores de Savitzky-Golay levam vantagem, pois acompanham o comportamento de diferenciadores ideais para baixas frequências, porém atenuam os sinais de alta frequência, ao contrário do ideal (23).



(a) 1ª diferenciação do filtro de polinômio de 3º grau (b) 2ª diferenciação do filtro de polinômio de 5º grau

Figura 15 – Resposta em frequência de diferenciadores de Savitzky-Golay de 9 pontos em comparação a diferenciadores ideais

A similaridade em baixas frequências pode ser demonstrada matematicamente, assumindo a identidade

$$H_r(f_n) = \sum_{k=-m}^m h_r[k] z^k \equiv (j2\pi f_n)^r \quad (2.21)$$

válida para a região $f_n \approx 0$, onde também é válida a aproximação polinomial de Taylor

$$z^k \approx \sum_{\alpha=0}^{r+1} (j2\pi f_n)^\alpha \frac{k^\alpha}{\alpha!}, \quad (2.22)$$

o que torna (2.21) equivalente a

$$\sum_{k=-m}^m k^q h_r[k] = r! \delta_d[r - q], \quad q = 0, 1, \dots, r + 1, \quad (2.23)$$

que é uma condição contida na condição (2.20) e já verificada em (2.19), uma vez que a ordem da derivada deve ser sempre menor ou igual ao grau do polinômio (2.13).

2.2.3.4 Invariância de fase na banda passante ou banda de correspondência

Da Tabela 2 se obtém a propriedade

$$v_{q,l} = 0 \quad \forall q + l \text{ ímpar} . \quad (2.24)$$

Usando a abordagem de matriz adjunta (22) para cálculo da matriz $W = (S^T S)^{-1}$ e a propriedade (2.24), conclui-se que

$$w_{q,l} = 0 \quad \forall q + l \text{ ímpar} . \quad (2.25)$$

Daí, calculam-se os elementos $(uw)_{k,l}$, do produto matricial $U W$

$$(uw)_{k,l} = r! w_{r,l} + \sum_{\beta=r+1}^p \frac{\beta!}{(\beta-r)!} k^{\beta-r} w_{\beta,l} . \quad (2.26)$$

Assim, para os coeficientes do filtro, originados do produto matricial (2.15), os elementos $h_{i,k}$ são dados por

$$h_{i,k} = \sum_{\gamma=0}^p k^\gamma \left[r! w_{r,\gamma} + \sum_{\beta=r+1}^p \frac{\beta!}{(\beta-r)!} i^{\beta-r} w_{\beta,\gamma} \right] . \quad (2.27)$$

Finalmente, a expressão reduzida dos coeficientes $h_r[k]$ fica

$$h_r[k] = h_{0,k} = r! \sum_{\gamma=0}^p k^\gamma w_{r,\gamma} , \quad (2.28)$$

que, usando (2.25), implica nas propriedades

$$h_r[k] = h_r[-k], \quad r \text{ par} \quad (2.29)$$

e

$$h_r[k] = -h_r[-k], \quad r \text{ ímpar} . \quad (2.30)$$

Aplicando as propriedades (2.29) e (2.30) à equação de resposta em frequência do filtro (2.21), ela pode ser simplificada a

$$H_r(f_n) = \begin{cases} h_r[0] + 2 \sum_{k=1}^m h_r[k] \cos(2\pi k f_n), & r \text{ par} \\ 2j \sum_{k=1}^m h_r[k] \sin(2\pi k f_n), & r \text{ ímpar} . \end{cases} \quad (2.31)$$

Portanto, as propriedades de simetria (2.29) e antissimetria (2.30) implicam numa invariância de fase para toda a banda de passagem (em filtros de suavização) ou banda de correspondência (em filtros diferenciadores) com os filtros ideais correspondentes como mostrado na Figura 15.

2.2.4 Projeto no domínio da frequência

O projeto de filtros de Savitzky-Golay é especificado pelo tamanho da janela de pontos e o grau do polinômio interpolante. Essa especificação é geralmente indireta, pois o objetivo real de um projeto de filtro, em geral, não é interpolar $2m + 1$ pontos por um polinômio de grau p , mas sim atenuação de ruídos, eliminação de frequências específicas, e conservação do sinal de interesse.

As seções deste capítulo dedicam-se a orientar a especificação dos parâmetros m e p de acordo com características pretendidas da resposta frequência dos filtros de Savitzky-Golay.

2.2.4.1 Banda passante e banda de transição

Já que o filtro Savitzky-Golay nada mais é que uma interpolação polinomial, é de se esperar que, para um mesmo número de pontos da janela, quanto maior o grau do polinômio, mais este se ajusta a oscilações, logo a faixa de frequências que passa pelo filtro é maior, o que se traduz numa banda passante mais larga.

Também espera-se que para um grau de polinômio fixo, quanto maior o número de pontos, mais ele rejeita oscilações bruscas e isso se traduz numa banda de transição mais estreita.

A Figura 16 ilustra tais variações na resposta em frequência em função da mudança dos parâmetros do filtro. Essa observação é importante para o projeto iterativo de filtros mínimos capazes de atender uma especificação de frequência máxima de sinal desejado e frequência mínima de ruído a ser eliminado.

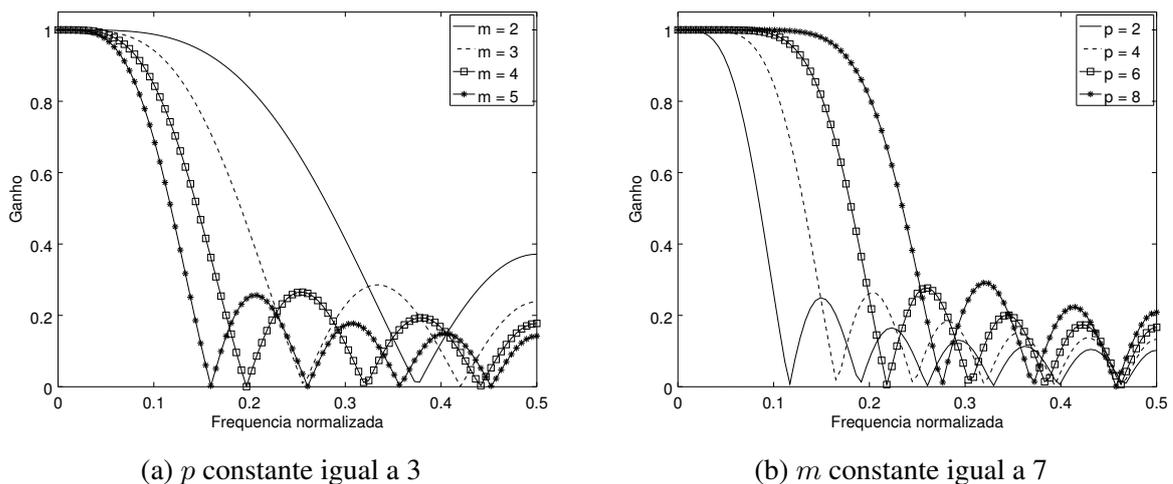


Figura 16 – Efeito da mudança de parâmetros na resposta em frequência de filtros suavizadores

2.2.4.2 Banda de correspondência

O conceito de banda de correspondência não é comum em processamento digital de sinais, porém se faz necessário para o caso de filtros diferenciadores, uma vez que estes idealmente

não possuem uma banda de frequências que passa e outra que é rejeitada, mas sim, há um ganho crescente com a frequência. Denominamos então banda de correspondência a banda de frequências de um filtro diferenciador que corresponde à resposta de um filtro diferenciador ideal de mesma ordem, com pequeno desvio de ganho, como pode ser notado na região de baixa frequência da Figura 15.

2.2.4.3 Nulos espectrais

Os gráficos de resposta em frequência dos filtros Savitzky-Golay (Figura 16) mostram claramente a existência de frequências nas quais o ganho é nulo, esses pontos podem ser usados no projeto de filtros que cortam a banda ao redor de uma frequência pontual que interfere no sinal de interesse, como por exemplo o sinal da rede elétrica acoplada a um sinal de ECG.

Experimentalmente observa-se que o número de pontos nulos espectrais N_0 é dado por

$$N_0 = \begin{cases} m - [p/2], & \text{para filtros suavizadores } (r = 0) \\ m - [p/2] + 1, & \text{para filtros diferenciadores } (r > 0) \end{cases} \quad (2.32)$$

A diferença de N_0 entre os filtros suavizadores e diferenciadores é que os diferenciadores sempre possuem um ponto de nulo espectral em comum que é $f_n = 0$.

A resposta em frequência $H_r(f_n)$ determinada analiticamente por (2.31) permite a determinação numérica dos pontos nulos espectrais, ou seja, permite o encontro das frequências normalizadas f_0 para as quais vale

$$H_r(f_0) \approx 0. \quad (2.33)$$

Deve ser feito portanto um procedimento comum de determinação de raízes, dentro do contexto de filtros

- Escolha de um passo na frequência normalizada adequado para o encontro de N_0 raízes no intervalo $0 \leq f_n \leq \frac{1}{2}$
- Avaliação da função $H_r(f_n)$ a cada passo
- Identificação da troca de sinal na parte real ou imaginária de $H_r(f_n)$
- Execução de método numérico no intervalo da troca de sinal para refinamento da raiz f_0
- Repetição do procedimento até o encontro de N_0 raízes

3 Novas abordagens de diferenciadores Savitzky-Golay

3.1 Diferenciação simétrica por aproximações de Taylor

Dada a aproximação de uma função por uma série de Taylor truncada, temos

$$g(t + T_s) = g(t) + T_s \frac{dg}{dt} + \frac{T_s^2}{2} \frac{d^2g}{dt^2}, \quad (3.1)$$

e por consequência

$$g(t - T_s) = g(t) - T_s \frac{dg}{dt} + \frac{T_s^2}{2} \frac{d^2g}{dt^2}. \quad (3.2)$$

De (3.1) e (3.2), temos

$$g(t + T_s) - g(t - T_s) = 2T_s \frac{dg}{dt}, \quad (3.3)$$

que possibilita uma aproximação para a primeira derivada do sinal $g(t)$:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{g(t + T_s) - g(t - T_s)}{2T_s}, \quad (3.4)$$

representada no domínio das amostras como

$$\frac{dg}{dt} = \frac{g[n + 1] - g[n - 1]}{2T_s}. \quad (3.5)$$

De forma similar, usando (3.1) e (3.2), temos

$$g(t + T_s) + g(t - T_s) = 2g(t) + T_s^2 \frac{d^2g}{dt^2}, \quad (3.6)$$

que possibilita uma aproximação para a segunda derivada do sinal $g(t)$:

$$\frac{d^2g}{dt^2} = \frac{g(t + T_s) - 2g(t) + g(t - T_s)}{T_s^2}, \quad (3.7)$$

representada no domínio das amostras como

$$\frac{d^2g}{dt^2} = \frac{g[n + 1] - 2g[n] + g[n - 1]}{T_s^2}. \quad (3.8)$$

Ao ignorar o valor do tempo de amostragem, equivalente a considerar $T_s = 1$ em (3.5) e (3.8), temos então a chamada diferenciação simétrica do sinal, que corresponde a uma aproximação da derivada do sinal a menos de um fator constante. Nesta abordagem são definidas diferenças apenas para primeira e segunda ordens de diferenciação.

A diferenciação simétrica para sinais discretos propicia uma aproximação numérica melhor que os métodos tradicionais de *Forward Euler* e *Backward Euler* (25).

3.1.1 Formulação

No contexto dos filtros de Savitzky-Golay, a primeira diferenciação simétrica $\Delta^1 y[n]$ da saída suavizada $y[n]$ é dada por

$$\Delta^1 y[n] = \frac{y[n+1] - y[n-1]}{2}, \quad (3.9)$$

e a segunda diferenciação simétrica, por

$$\Delta^2 y[n] = y[n+1] - 2y[n] + y[n-1]. \quad (3.10)$$

Portanto, a equação matricial da filtragem por Diferenciadores de Savitzky-Golay por Diferenciação Simétrica (SGDS) é dada por

$$\Delta^r Y = \Delta^r S B = \Delta^r S (S^T S)^{-1} S^T X \equiv H_r X \quad (3.11)$$

onde $\Delta^r S$ é calculada com base em (3.9) ou (3.10) para $r = 1$ ou 2, respectivamente, usando a definição (2.2), e sendo r a ordem da diferenciação, sendo portanto

$$\Delta^r S_{i,q} = \begin{cases} \frac{(i+1)^q - (i-1)^q}{2}, & \text{para } r = 1 \\ (i+1)^q - 2i^q + (i-1)^q, & \text{para } r = 2. \end{cases} \quad (3.12)$$

3.1.2 Confirmação das propriedades

Propriedades dos filtros diferenciadores de Savitzky-Golay são matematicamente descritas em 2.2.3, as quais também se aplicam à nova abordagem com o propósito de verificar que essa nova abordagem é verdadeiramente um filtro diferenciador de Savitzky-Golay.

3.1.2.1 Coeficientes racionais

Reescrevendo a matriz de coeficientes do filtro H usando o método da matriz adjunta para cálculo da matriz inversa $(S^T S)^{-1}$, obtemos

$$H_r = \frac{1}{\det(S^T S)} (\Delta^r S) \text{adj}(S^T S) S^T, \quad (3.13)$$

que também é composta pelo produto de matrizes de números inteiros multiplicadas por um escalar racional (o inverso do determinante de uma matriz de números inteiros). Isso garante que qualquer coeficiente $h_{i,k}$ também pode ser sempre calculado de forma exata como uma razão de números inteiros, com denominador em comum.

3.1.2.2 Preservação do momento

Sendo o q -ésimo momento M_q da resposta ao impulso $h_r[k]$ dada pelo elemento da linha 0 e coluna q do produto $H_r S$, que pode ser simplificado por

$$H_r S = \Delta^r S (S^T S)^{-1} S^T S = \Delta^r S. \quad (3.14)$$

Portanto o q -ésimo momento da resposta ao impulso $h[k]$ é simplesmente o elemento $\Delta^r s_{0,q}$, ou seja,

$$M_q = \Delta^r s_{0,q} . \quad (3.15)$$

Verifica-se, na nova abordagem, para os valores nela definidos para r , que

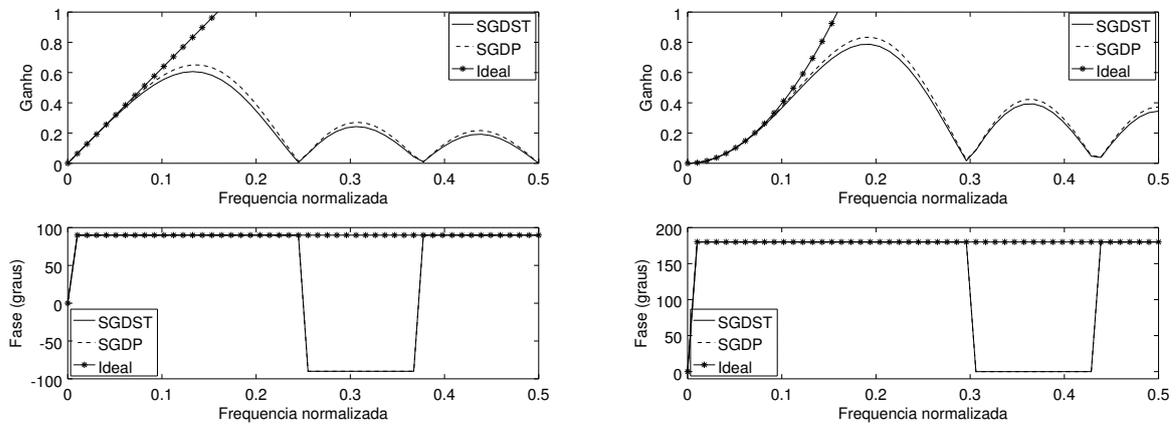
$$M_q = r! \delta_d(r - q), \quad q = 0, 1, \dots, r + 1 , \quad (3.16)$$

sendo uma restrição de (2.20).

Portanto a propriedade de preservação do momento é parcialmente válida para a abordagem de diferenciação simétrica baseada na diferenciação simétrica por aproximações de Taylor.

3.1.2.3 Similaridade com diferenciadores ideais em baixas frequências

Sendo a similaridade com o diferenciador ideal em baixas frequências uma consequência direta de (2.23), esta é atendida por (3.16), o que dá à nova abordagem essa mesma propriedade dos filtros Savitzky-Golay demonstrada na Figura 17.



(a) Primeira diferenciação de um polinômio de 5º grau com janela de 9 pontos. (b) Segunda diferenciação de um polinômio de 3º grau com janela de 9 pontos.

Figura 17 – Resposta em frequência de filtros diferenciadores

3.1.2.4 Invariância de fase na banda passante ou banda de correspondência

Para a nova abordagem apresentada, calculam-se os elementos do filtro $h_{i,k}$ por

$$h_{i,k} = \sum_{\gamma=0}^p (\Delta^r s w)_{i,\gamma} s_{k,\gamma} = \sum_{\gamma=0}^p k^\gamma \sum_{\beta=0}^p \Delta^r s_{i,\beta} w_{\beta,\gamma} . \quad (3.17)$$

e conseqüentemente

$$h_r[k] = h_{0,k} = \sum_{\gamma=0}^p (\Delta^r s w)_{0,\gamma} s_{k,\gamma} = \sum_{\gamma=0}^p k^\gamma \sum_{\beta=0}^p \Delta^r s_{0,\beta} w_{\beta,\gamma}. \quad (3.18)$$

Para $i = 0$, verifica-se que

$$\Delta^r s_{0,\beta} = 0, \beta + r \text{ ímpar}. \quad (3.19)$$

Aplicando a propriedade (3.19) aos termos $h[k]$ dados em (3.18) para SGDP verificam-se as propriedades (2.29) e (2.30) já mencionadas para a abordagem tradicional e conseqüentemente a propriedade de invariância de fase na resposta em frequência na banda de correspondência (2.31).

3.2 Diferenciação simétrica recursiva

3.2.1 Formulação

Partindo-se da primeira diferenciação (3.9), assume-se que a diferenciação de ordem r é simplesmente dada por r diferenciações de primeira ordem, formulada como

$$\Delta^r y[n] = \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{r!}{(r-k)!k!} y[n+r-2k], \quad (3.20)$$

e expandida, com base em (2.2), como

$$\Delta^r y[n] = \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^r \sum_{q=0}^p (-1)^k \frac{r!}{(r-k)!k!} (n+r-2k)^q b_q, \quad (3.21)$$

expressa matricialmente tal como em (3.11), porém sendo a matriz $\Delta^r S$ dada por

$$\Delta^r S = \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^r \begin{bmatrix} c(k, -m, 0) & \cdots & c(k, -m, p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c(k, 0, 0) & \cdots & c(k, 0, p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c(k, +m, 0) & \cdots & c(k, +m, p) \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

na qual

$$c(k, i, q) = (-1)^k \frac{r!}{(r-k)!k!} (i+r-2k)^q, \quad (3.23)$$

e por conseqüência

$$\Delta^r s_{i,q} = \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^r c(k, i, q). \quad (3.24)$$

3.2.2 Confirmação das propriedades

3.2.2.1 Coeficientes racionais

Seguindo-se o mesmo raciocínio empregado em 3.1.2.1, conclui-se que os Filtros Diferenciadores de Savitzky-Golay por diferenciação recursiva resultam também em filtros de coeficientes racionais com denominador comum já que a nova matriz $\Delta^r S$ continua sendo uma matriz de números inteiros.

3.2.2.2 Preservação do momento

Com base no cálculo do q -ésimo momento calculado em (3.15), verifica-se o mesmo que em (3.16) numericamente, com algoritmo computacional, para diversos valores de r , dando a essa abordagem uma restrição da preservação de momento assim como na diferenciação simétrica por aproximações de Taylor.

3.2.2.3 Similaridade com diferenciadores ideais em baixas frequências

Sendo $H_0(z)$ a função de transferência do filtro suavizador ($r = 0$), com base em (3.9), podemos afirmar que a função de transferência do seu respectivo diferenciador por diferenciação simétrica recursiva $H_r(z)$ é dada por

$$H_r(z) = \left(\frac{z^{+1} - z^{-1}}{2} \right)^r H_0(z) . \quad (3.25)$$

Nota-se que a resposta em frequência dos diferenciadores de Savitzky-Golay se aproxima da resposta de diferenciadores ideais, o que deve ser provado matematicamente pela equivalência

$$\lim_{f_n \rightarrow 0} H_r(f_n) \equiv (j2\pi f_n)^r , \quad (3.26)$$

à luz da relação $z = e^{j2\pi f_n}$:

$$\lim_{f_n \rightarrow 0} \left[\left(\frac{e^{+j2\pi f_n} - e^{-j2\pi f_n}}{2} \right)^r H_0(f_n) \right] \equiv (j2\pi f_n)^r , \quad (3.27)$$

usando-se de propriedades de limites:

$$\left(\lim_{f_n \rightarrow 0} \frac{e^{+j2\pi f_n} - e^{-j2\pi f_n}}{2} \right)^r \lim_{f_n \rightarrow 0} H_0(f_n) \equiv (j2\pi f_n)^r . \quad (3.28)$$

Usando-se da propriedade de planície da resposta em frequência de baixas frequências (26) para filtros suavizadores

$$\lim_{f_n \rightarrow 0} H_0(f_n) = 1 , \quad (3.29)$$

resta apenas provar que

$$\lim_{f_n \rightarrow 0} \frac{e^{+j2\pi f_n} - e^{-j2\pi f_n}}{2} \equiv j2\pi f_n , \quad (3.30)$$

que é uma identidade verdadeira ao se considerar a aproximação de Taylor de primeiro grau para a função exponencial:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{\alpha} \equiv 1 + \alpha . \quad (3.31)$$

3.2.2.4 Invariância de fase na banda de correspondência

Em observação às notações da Tabela 2 e à formulação do presente método de diferenciação, os elementos do filtro diferenciador são dados por

$$h_r[k] = \frac{1}{2^r} \sum_{\gamma=0}^p k^{\gamma} \sum_{\beta=0}^p w_{\beta,\gamma} \sum_{\alpha=0}^r c(\alpha, 0, \beta) . \quad (3.32)$$

da onde oportunamente se extraem as propriedades

$$c(r/2, 0, \beta) = 0 \quad \forall r \text{ par} , \quad (3.33)$$

$$c(\alpha, 0, \beta) = (-1)^{\beta+r} c(r - \alpha, 0, \beta) , \quad (3.34)$$

o que garante que

$$\sum_{\alpha=0}^r c(\alpha, 0, \beta) = 0 \quad \forall \beta + r \text{ ímpar} . \quad (3.35)$$

Aplicando então as propriedades (2.25) e (3.35) aos coeficientes (3.32), conclui-se o mesmo que em (2.29) e (2.30), o que implica necessariamente na invariância de fase constatada em (2.31).

4 Resultados e discussões

4.1 Projeto de filtro pelo encontro de nulos espectrais

Foi feito o projeto de um filtro suavizador com a mínima quantidade de pontos suficiente para o atendimento do teste normativo 2.1.5.1 e com o intuito de anular totalmente as interferências de uma rede elétrica que opera em 60 Hz. O algoritmo do projeto foi:

1. Definir $m = 1$
2. Definir $p = 0$
3. Calcular nulos espectrais para o correspondente filtro suavizador conforme 2.2.4.3
4. Calcular a frequência de amostragem considerando o primeiro nulo espectral como 60 Hz
5. Calcular o ganho na frequência de 40 Hz
6. Se o ganho em 40 Hz for maior que 0,71 o projeto está finalizado, do contrário segue
7. Incrementar o valor de p
8. Se $p < 2m$, voltar para passo 3, do contrário segue
9. Incrementar valor de m
10. Retornar ao passo 2

O resultado é um filtro suavizador de 13 pontos e grau polinomial 6, amostrando a uma frequência de 233,92 Hz, cuja resposta em frequência é mostrada na Figura 18.

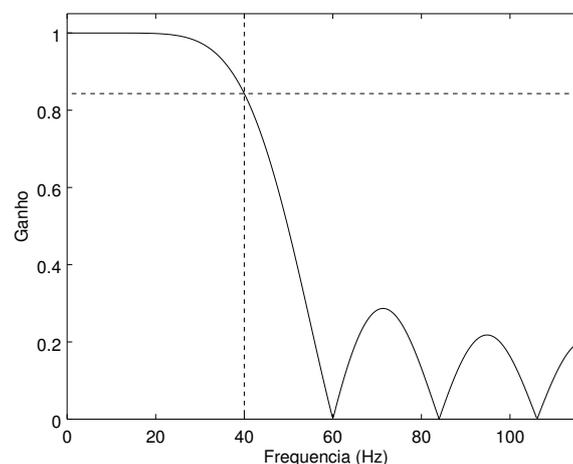


Figura 18 – Resposta em frequência do filtro projetado

4.2 Comparação do ganho da potência de ruído

Aplicando a equação do ganho de potência de ruído (27)

$$G_{PR} = \sum_{k=-m}^m h_r[k]^2 \tag{4.1}$$

às abordagens de diferenciação por Savitzky-Golay: por derivada polinomial (SGDP), por diferenciação simétrica por aproximações de Taylor (SGDST) e recursiva (SGDSR), obtêm-se as Tabelas 3 e 4 e os gráficos da Figura 19 para comparações.

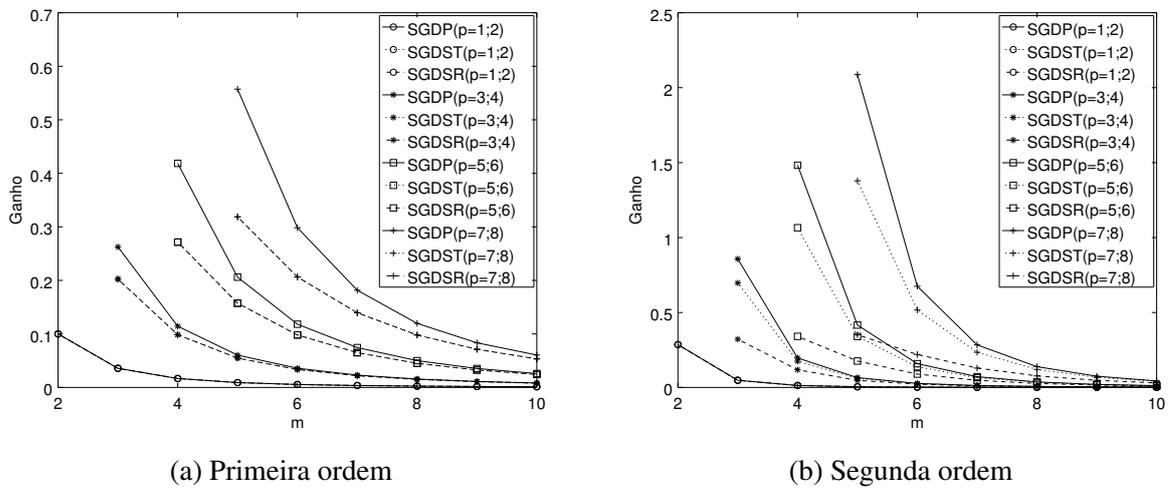


Figura 19 – Ganho de potência do ruído de diferenciadores

Tabela 3 – Primeira derivada de polinômio de grau 3

k/m	4			3			2		
	SGDP	SGDST	SGDSR	SGDP	SGDST	SGDSR	SGDP	SGDST	SGDSR
-4	86	8	8						
-3	-142	-15	-15	22	5	5			
-2	-193	-20	-20	-67	-20	-20	1	0	0
-1	-126	-13	-13	-58	-17	-17	-8	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	126	13	13	58	17	17	8	1	1
2	193	20	20	67	20	20	-1	0	0
3	142	15	15	-22	-5	-5			
4	-86	-8	-8						
Den.	1188	132	132	252	84	84	12	2	2
G_{PR}	0.1143	0.0985	0.0985	0.2626	0.2024	0.2024	0.9028	0.5000	0.5000

Tabela 4 – Segunda derivada de polinômio de grau 4

k/m	4			3			2		
	SGDP	SGDST	SGDSR	SGDP	SGDST	SGDSR	SGDP	SGDST	SGDSR
-4	-126	-56	-70						
-3	371	175	287	-13	-5	-1			
-2	151	70	107	67	30	39	-1	0	1
-1	-211	-101	-175	-19	-9	-15	16	1	0
0	-370	-176	-298	-70	-32	-46	-30	-2	-2
1	-211	-101	-175	-19	-9	-15	16	1	0
2	151	70	107	67	30	39	-1	0	1
3	371	175	287	-13	-5	-1			
4	-126	-56	-70						
Den.	1716	858	1716	132	66	132	12	1	4
G_{PR}	0.1965	0.1748	0.1180	0.8573	0.6970	0.3220	9.8194	6.0000	0.3750

Fica claro que quanto maior o grau do polinômio, maior o ganho de potência do ruído. Também, para um mesmo grau de polinômio e ordem de diferenciação, as abordagens de diferenciação simétrica (SGDS) apresentam menor ganho de potência do ruído que a abordagem de derivada polinomial (SGDP).

4.3 Filtragem de sinal típico de ECG

A fim de verificar as propriedades dos filtros SGDD e a vantagem do uso da abordagem SGDS na detecção de batimentos cardíacos descrita em 2.1.4, um sinal de ECG foi gerado matematicamente conforme 2.1.2.2 e contaminado com ruído branco gaussiano de desvio padrão de 0,09 V como mostrado na Figura 20.

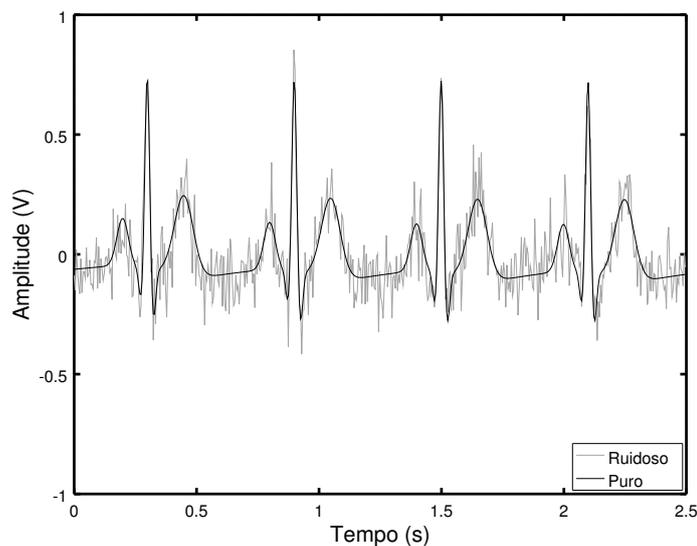


Figura 20 – Sinais de ECG puro e com ruído

Antes de tudo, pode se ver que uma diferenciação simples, baseada no método *Backward Euler*, tal como em (13) amplifica muito o ruído e faz com que a detecção do batimento cardíaco se torne inviável conforme mostra a Figura 21.

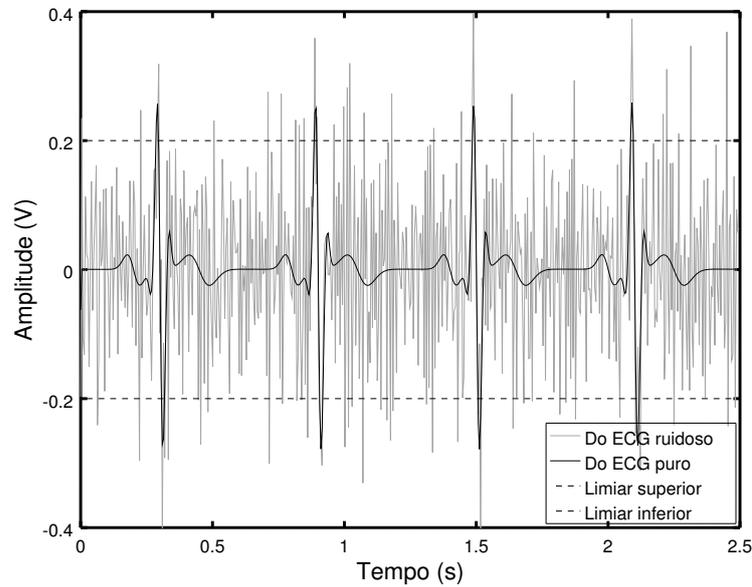


Figura 21 – Diferenciação por *Backward Euler*

Portanto usa-se as diferenciações SGDP e SGDS mostradas na Figura 22, e então os batimentos cardíacos se tornam mais detectáveis.

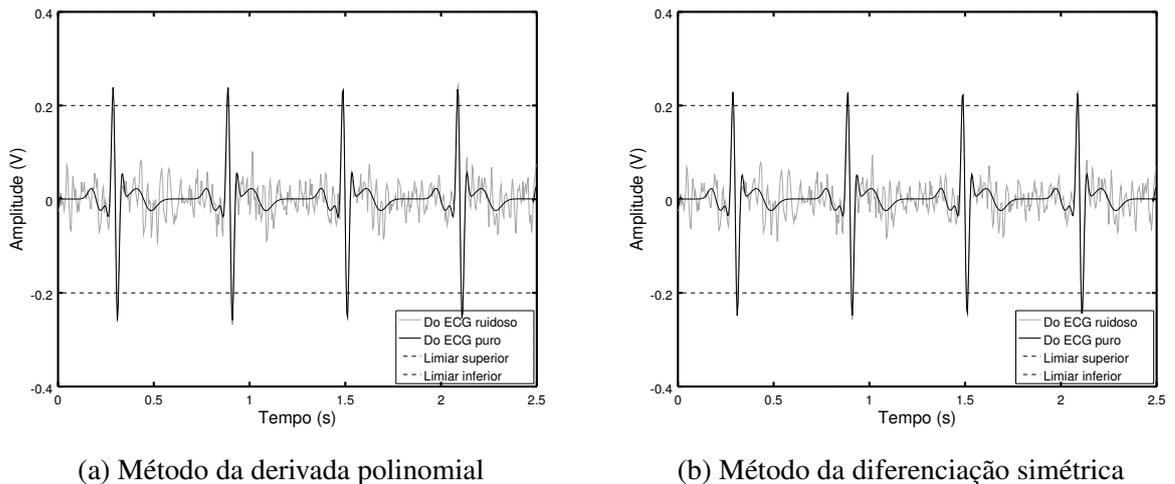


Figura 22 – Diferenciadores de Savitzky-Golay aplicados a sinal de ECG

Os dois filtros diferenciadores de primeira ordem aqui usados são de uma interpolação polinomial de 3º grau em uma janela de 9 pontos. Seus respectivos coeficientes e o ganho de potência do ruído (4.1) são mostrados na Tabela 5.

Tabela 5 – Projetos dos filtros aplicados

k	SGDP	SGDS
-4	86	8
-3	-142	-15
-2	-193	-20
-1	-126	-13
0	0	0
1	126	13
2	193	20
3	142	15
4	-86	-8
Den.	1188	132
G_{PR}	0.1143	0.0985

Da comparação entre as diferenciações, pode se extrair o ruído propagado nas duas abordagens como subtração do sinal diferenciado do ECG puro e do diferenciado do ECG ruidoso, o que é mostrado na Figura 23.

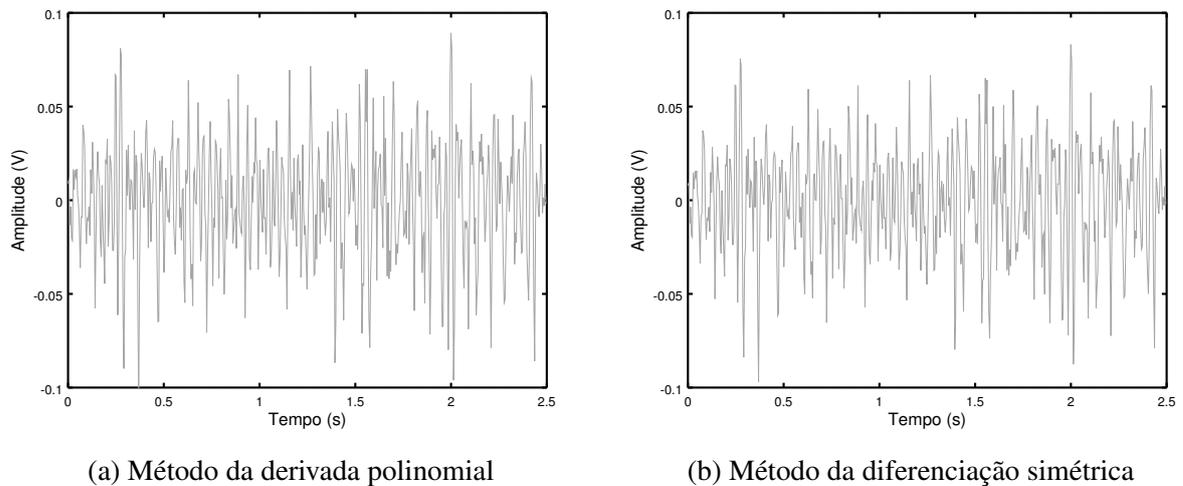


Figura 23 – Ruído propagado na diferenciação de Savitzky-Golay aplicada a sinal de ECG

Ao calcular a potência do ruído P_N do sinal de ruído propagando $y[n]$ usando a fórmula

$$P_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n]^2, \quad (4.2)$$

confirma-se que a razão entre a potência do ruído propagado pelos métodos da derivada polinomial e diferenciação simétrica é igual à razão entre seus respectivos ganhos de potência do ruído calculado por (4.1) e mostrados na Tabela 5.

Neste exemplo, a potência do ruído foi reduzida em aproximadamente 14% pelo uso da diferenciação simétrica em comparação com a diferenciação por derivada polinomial.

Em outra perspectiva, é possível analisar a suportabilidade a ruído do algoritmo de diferenciação empregado na detecção de batimentos cardíacos, com base na metodologia proposta em (13), que divide-se basicamente em duas etapas: diferenciação do sinal e posteriormente a identificação de pontos específicos da onda de ECG.

Concentrando-se apenas nas duas etapas básicas mencionadas, sem levar a conta seus detalhes, a experiência de suportabilidade do ruído consiste em fixar o algoritmo de identificação do QRS e mudar os algoritmos de diferenciação. No caso, a identificação do complexo QRS se dará pelo alcance a limiares fixos opostos em $\pm 0,2$ V na diferenciação, conforme destacado nas Figuras 21 e 22 e a diferenciação vai variar entre os algoritmos de Euler, SGDP e SGDS.

Com relação ao sinal de ECG, este será sempre o mesmo, porém contaminado com ruído gaussiano de desvio padrão que começa em 0,000 V e vai sendo incrementado em 0,001 V até o ponto em que todos os algoritmos estejam detectando batimentos cardíacos além dos contidos no sinal puro.

Desta experiência se extraíram os valores de desvio padrão nos quais cada algoritmo de diferenciação falhou levando à detecção de falsos batimentos cardíacos e os valores são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 – Limiar de falha dos algoritmos

Algoritmo	Desvio padrão (V)
Euler	0,041
SGPD	0,106
SGSD	0,118

Tais valores reforçam novamente a robustez da nova abordagem de diferenciadores proposta diante de ruídos de alta frequência.

5 Conclusão

Este trabalho consiste num estudo aprofundado de filtros de Savitzky-Golay, em especial os diferenciadores. Tais filtros tem a especial característica de exigir baixo custo computacional para sua execução, tornando-os atrativos para aplicações que requerem baixo consumo de energia e baixo custo de hardware.

Para estes filtros foram descritas metodologias e desenvolvidos algoritmos para projetos com foco no domínio da frequência, atendendo a requisitos de banda passante ou banda de correspondência e explorando uma característica particular da resposta em frequência de Savitzky-Golay que são os pontos de nulo espectral.

O diferencial proposto no trabalho são as novas abordagens de diferenciadores baseadas no conceito de diferenciação simétrica, das quais foram comprovadas ter as mesmas propriedades dos filtros diferenciadores tradicionais de Savitzky-Golay baseados na derivada polinomial.

A vantagem obtida nas novas abordagens, com relação à tradicional, é a obtenção de um menor ganho da potência de ruído sem perda das características básicas, o que pode ser útil para melhorar o desempenho da propriedade de diferenciação passa-baixas ou até mesmo diminuir o número de coeficientes, e conseqüentemente tempo de processamento, para uma mesma atenuação de ruído.

A aplicação prática que se beneficiou dos produtos desse trabalho foi a de processamento de sinais eletrocardiográficos, com determinação sistemática da frequência de amostragem necessária para anular a interferência da rede elétrica, que ocorre pontualmente em frequência pré-estabelecida e também a interpretação do sinal cardíaco para extração da informação de batimentos cardíacos por meio de filtros diferenciadores com melhoras na atenuação do ruído de alta frequência, tudo isso mantendo o compromisso com um filtro de baixo custo computacional.

Foi feita a publicação de parte deste trabalho na forma de palestra no 41º Encontro Sul Mineiro de Cardiologia sob o tema “Tecnologia não-convencional na captação de Biopotenciais Cardiológicos” na Faculdade de Medicina de Itajubá - MG, dia 07 de Abril de 2018. Também foi aceito um artigo no Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2018) sob título “Diferenciação simétrica de Savitzky-Golay aplicada em sinais de eletrocardiografia para determinação da frequência cardíaca” a ser apresentado nos dias 09 a 12 de Setembro de 2018 em João Pessoa - PB.

Para trabalhos futuros, sugere-se o uso e comparação das abordagens de diferenciadores apresentadas em outras aplicações que requerem diferenciação de sinais digitais como controladores digitais, detecção de gás em cromatografia e processamento de imagens.

Referências

- 1 GESSNER, I. H.; VICTORICA, B. E. *Cardiologia pediátrica*. 1. ed. [S.l.]: Thieme Revinter, 1996. ISBN 8573090693. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 17.
- 2 KLABUNDE, R. E. *Non-Pacemaker Action Potentials*. <<https://www.cvphysiology.com/Arrhythmias/A006>>. Acessado em 18/09/2017. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 17.
- 3 NASCIMENTO, J. H. M. et al. Fisiologia cardiovascular. In: AIRES, M. (Ed.). *Fisiologia*. 3. ed. [S.l.]: Guanabara Koogan S.A., 2007. cap. 27-28, p. 385–434. Citado 4 vezes nas páginas 7, 16, 17 e 18.
- 4 WIKIPEDIA. *Eletrocardiograma*. <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Eletrocardiograma>>. Acessado em 18/09/2017. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 18.
- 5 MCSHARRY, P. E. et al. A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, IEEE, v. 50, n. 3, p. 289–294, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 7, 18 e 19.
- 6 MORRIS, F.; BRADY, W. J.; CAMM, A. J. *ABC of clinical electrocardiography*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. v. 93. Citado 3 vezes nas páginas 7, 16 e 20.
- 7 THE STUDENT PHYSIOLOGIST (ONLINE CARDIOLOGY RESOURCE). *The ECG Leads, Polarity and Einthoven's Triangle*. <<https://thephysiologist.org/study-materials/the-ecg-leads-polarity-and-einthovens-triangle/>>. Acessado em 18/09/2017. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 21.
- 8 PHYSIO-CONTROL, INC. *Minimizing ECG Artifact*. Redmond WA, USA, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 7, 15, 21, 22 e 23.
- 9 LEIJDEKKERS, P.; GAY, V. A self-test to detect a heart attack using a mobile phone and wearable sensors. In: IEEE. *Computer-Based Medical Systems, 2008. CBMS'08. 21st IEEE International Symposium on*. [S.l.], 2008. p. 93–98. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.
- 10 EINTHOVEN, W. The telecardiogram. *American Heart Journal*, Elsevier, v. 53, n. 4, p. 602–615, 1957. Citado na página 14.
- 11 SUN, Y.; CHAN, K. L.; KRISHNAN, S. M. ECG signal conditioning by morphological filtering. *Computers in Biology and Medicine*, Elsevier, v. 32, n. 6, p. 465–479, 2002. Citado na página 15.
- 12 AHLSTROM, M.; TOMPKINS, W. Digital filters for real-time ECG signal processing using microprocessors. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, IEEE, n. 9, p. 708–713, 1985. Citado na página 15.
- 13 YEH, Y.-C.; WANG, W.-J. QRS complexes detection for ECG signal: The difference operation method. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, Elsevier, v. 91, n. 3, p. 245–254, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 15, 23, 43 e 45.
- 14 PAN, J.; TOMPKINS, W. J. A real-time QRS detection algorithm. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, IEEE, n. 3, p. 230–236, 1985. Citado na página 23.

- 15 ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Equipamento eletromédico*. São Paulo, SP, 2013. Citado na página 24.
- 16 CARLSSON, B.; AHLÉN, A.; STERNAD, M. Optimal differentiation based on stochastic signal models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 39, n. 2, p. 341–353, 1991. Citado na página 25.
- 17 YUAN, X.; WEI, Y.; YU, J. Sinc function and generalized digital fractional differentiators. In: IEEE. *Communications, Circuits and Systems, 2004. ICCAS 2004. 2004 International Conference on*. [S.l.], 2004. v. 2, p. 1414–1418. Citado na página 25.
- 18 KOMODROMOS, M. Z.; RUSSELL, S. F.; TANG, P. T. P. Design of fir hilbert transformers and differentiators in the complex domain. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, IEEE, v. 45, n. 1, p. 64–67, 1998. Citado na página 25.
- 19 BIHAN, J. L. Novel class of digital integrators and differentiators. *Electronics Letters*, IET, v. 29, n. 11, p. 971–973, 1993. Citado na página 25.
- 20 SAVITZKY, A.; GOLAY, M. J. E. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. *Analytical Chemistry*, v. 36, n. 8, p. 1627–1639, 1964. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- 21 CARLSSON, B. Maximum flat digital differentiator. *Electronics Letters*, IET, v. 27, n. 8, p. 675–677, 1991. Citado na página 25.
- 22 PETERSEN, K. B.; PEDERSEN, M. S. et al. The matrix cookbook. *Technical University of Denmark*, v. 7, n. 15, p. 510, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 26, 27, 29 e 31.
- 23 LUO KUI YING, P. H. J.; BAI, J. Properties of Savitzky–Golay digital differentiators. *Digital Signal Processing Journal*, v. 15, p. 122–136, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- 24 ORFANIDIS, S. Signal processing applications. In: *Introduction to Signal Processing*. [S.l.]: Prentice Hall, Inc., 1996. cap. 8, p. 427–452. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- 25 LEVEQUE, R. J. Finite difference approximations. In: *Finite Difference Methods for Differential Equations*. [S.l.]: University of Washington, 2005. Citado na página 34.
- 26 SCHAFER, R. W. What is a Savitzky-Golay filter? *IEEE Signal Processing Magazine*, IEEE, v. 28, n. 4, p. 111–117, 2011. Citado na página 38.
- 27 SHMALIY, Y. S.; IBARRA-MANZANO, O. Noise power gain for discrete-time FIR estimators. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 18, n. 4, p. 207–210, 2011. Citado na página 41.

Apêndices

APÊNDICE A – Códigos fonte

Para desenvolvimento do trabalho, foram criadas bibliotecas capazes de abstrair os cálculos envolvendo filtros de Savitzky-Golay e geração de sinais eletrocardiográficos das quais seguem os códigos fonte como contribuição para trabalhos futuros.

A.1 Ferramentas para filtros de Savitzky-Golay

A.1.1 Funções elementares

Código A.1 – Auxiliar para cálculo de máximo divisor comum

```

1 function x = mdc(vetor)
2 %x = mdc(vetor)
3 %Returns the gcd of a integer numbers vector
4 %
5 %INPUTS:
6 %vetor = row or column vector of integer numbers
7 %
8 %OUTPUTS:
9 %x      = greater common divisor of the set
10      x = vetor(1);
11      for k = 2:length(vetor)
12          x = gcd(x,vetor(k));
13      end
14 end

```

Código A.2 – Auxiliar para cálculo de mínimo múltiplo comum

```

1 function x = mmc(vetor)
2 %x = mmc(vetor)
3 %Returns the lcm of a integer numbers vector
4 %
5 %INPUTS:
6 %vetor = row or column vector of integer numbers
7 %
8 %OUTPUTS:
9 %x      = least common multiple of the set
10      x = vetor(1);
11      for k = 2:length(vetor)
12          x = lcm(x,vetor(k));

```

```

13     end
14 end

```

Código A.3 – Cálculo da matriz S

```

1 function M = vandermonde_sg(m,p,n,r)
2 %M = vandermonde_sg(m,p,n,r)
3 %Returns the vandermonde matrix for SG filters
4 %
5 %INPUTS:
6 %m     = indicative of filter size, filter size = 2*m+1
7 %p     = polynomial degree
8 %n     = output index
9 %r     = derivative order
10 %
11 %OUTPUTS:
12 %M     = vandermonde matrix of (2*m + 1) rows and (p + 1) columns
13     M = zeros(2*m+1,p+1);
14     for q = 0:p
15         for k = -m:m
16             if (round(r)==r) %Symmetrical reference
17                 %+m+1 not used for better integer rounding
18                 M(k+m+1,q+1) = factorial(q)/gamma(1+q-r)*(n+k)^(q-r);
19             else
20                 %+m+1 used for r non-integer for working right
21                 M(k+m+1,q+1) = factorial(q)/gamma(1+q-r)*(n+k+m+1)^(q
22                     -r);
23             end
24             if (isnan(M(k+m+1,q+1)))
25                 M(k+m+1,q+1) = 0;
26             end
27         end
28     end

```

Código A.4 – Cálculo da matriz $\frac{d^r S}{d^i r}$

```

1 function M = matriz_derivada(m,p,r)
2 %M = matriz_derivada(m,p,r)
3 %Returns the induced differentiation matrix for SG filters
4 %
5 %INPUTS:
6 %m     = indicative of filter size, filter size = 2*m+1
7 %p     = polynomial degree

```

```

8 %r      = derivative order
9 %
10 %OUTPUTS:
11 %M      = induced differentiation matrix
12 M = zeros(2*m+1,p+1);
13 for q = 0:p
14     for n = -m:m
15         for ii = 0:r
16             M(n+m+1,q+1) = M(n+m+1,q+1) + (-1)^ii*factorial(r)/(
17                 factorial(r-ii)*factorial(ii))*(n+r-2*ii)^q;
18         end
19     end
20 M = M / 2^r;
21 end

```

A.1.2 Funções principais

Código A.5 – Cálculo de coeficientes

```

1 function [vetor_coef, den] = coef_sg(m,p,n,r,appr,tol)
2 % [vetor_coef,den] = coef_sg(m,p,n,r,appr,tol)
3 % vetor_coef = coef_sg(m,p,n,r,appr,tol)
4 % Returns a vector of frequencies with gain 0, for SG filters
5 %
6 % INPUTS:
7 % m      = indicative of filter size, filter size = 2*m+1
8 % p      = polynomial degree
9 % n      = output index
10 % r      = derivative order
11 % appr = Savitzky-Golay approach:
12 %       'p' for polynomial derivative
13 %       't' for taylor symmetric differentiation
14 %       'r' for recursive symmetric differentiation
15 % tol    = tolerance for rounding integer coefficients
16 %
17 % OUTPUTS:
18 % vetor_coef = filter kernel, when requested lonely,
19 %             when requested with 'den', is the integer numerator of
20 %             the kernel
21 % den      = integer denominator of the kernel
22 if (appr == 'p')
23     DrV = vandermonde_sg(m,p,n,r,sym_ref);

```

```

23     elseif ((appr == 'r' && sym_ref) || (appr == 't' && (r == 1 || r
        == 0)))
24         DrV = matriz_derivada(m,p,r);
25     elseif (appr == 't' && r == 2)
26         DrV = zeros(2*m+1,p+1);
27         for q = 0:p
28             for k = -m:m
29                 DrV(k+m+1,q+1) = (k+1)^q - 2*k^q + (k-1)^q;
30             end
31         end
32     else
33         error('Approach not found or not compatible with derivative
        order')
34     end
35     if (2*m < p)
36         error('Number of points is not enough for this polynomial
        order')
37     end
38     V = vandermonde_sg(m,p,n,0);
39
40     if (nargout > 1)
41         matriz_num = round(DrV*det(V'*V)*inv(V'*V)*V');
42         n_frac = matriz_num(n+m+1,:);
43         d_frac = round(det(V'*V));
44         den = mmc(d_frac)/mdc([n_frac d_frac]);
45         vetor_coef = n_frac.*(mmc(d_frac)./d_frac)/mdc([n_frac d_frac
        ]);
46     else
47         matriz = DrV*((V'*V)\V');
48         vetor_coef = matriz(n+m+1,:);
49     end
50 end

```

Código A.6 – Filtragem de sinal

```

1 function y = filter_sg(m,p,n,r,appr,x)
2 %y = filter_sg(m,p,n,r,appr,x)
3 %Returns a filtered signal by an SG filter
4 %
5 %INPUTS:
6 %m     = indicative of filter size, filter size = 2*m+1
7 %p     = polynomial degree
8 %n     = output index

```

```

9 %r      = derivative order
10 %appr = Savitzky-Golay approach:
11 %      'p' for polynomial derivative
12 %      't' for taylor symmetric differentiation
13 %      'r' for recursive symmetric differentiation
14 %x      = input signal vector
15 %
16 %OUTPUTS:
17 %y      = output signal vector
18     N = length(x);
19     y = zeros(1,N);
20     kernel = coef_sg(m,p,n,r,appr);
21     vet_x = zeros(2*m+1,1);
22     for u = 1:N
23         for k = -m:m
24             if (u + k < 1 || u + k > N)
25                 vet_x(k+m+1) = 0;
26             else
27                 vet_x(k+m+1) = x(u+k);
28             end
29         end
30         y(u) = kernel*vet_x;
31     end
32 end

```

Código A.7 – Cálculo do momento do filtro

```

1 function x = moment_sg(m,p,n,r,appr,moment_order)
2 %x = momento_sg(m,p,n,r,appr,i)
3 %Returns the i-th moment of an SG filter
4 %
5 %INPUTS:
6 %m      = indicative of filter size, filter size = 2*m+1
7 %p      = polynomial degree
8 %n      = output index
9 %r      = derivative order
10 %appr = Savitzky-Golay approach:
11 %      'p' for polynomial derivative
12 %      't' for taylor symmetric differentiation
13 %      'r' for recursive symmetric differentiation
14 %i      = moment order
15 %
16 %OUTPUTS:

```

```

17 %x      = calculated moment
18     vet = zeros(2*m+1,1);
19     for k = -m:m
20         vet(k+m+1) = k^moment_order;
21     end
22     x = coef_sg(m,p,n,r,appr)*vet;
23 end

```

A.1.3 Funções relacionadas à resposta em frequência

Código A.8 – Resposta em frequência do filtro

```

1 function resp = resp_freq_sg(m,p,n,r,appr,fn)
2 %resp = resp_freq_sg(m,p,n,r,appr,fu)
3 %Returns the SG filter frequency response for given frequencies
4 %
5 %INPUTS:
6 %m      = indicative of filter size, filter size = 2*m+1
7 %p      = polynomial degree
8 %n      = output index
9 %r      = derivative order
10 %appr = Savitzky-Golay approach:
11 %      'p' for polynomial derivative
12 %      't' for taylor symmetric differentiation
13 %      'r' for recursive symmetric differentiation
14 %fn     = normalized frequencies
15 %
16 %OUTPUT:
17 %resp  = complex frequency response for frequencies fn
18     h = coef_sg(m,p,n,r,appr);
19     h = h(m+1:end);
20     if (mod(r,2) == 0)
21         resp = h(1);
22         for k = 1:m
23             resp = resp + 2*h(k+1)*cos(2*pi*k*fn);
24         end
25     else
26         resp = 0;
27         for k = 1:m
28             resp = resp + 2j*h(k+1)*sin(2*pi*k*fn);
29         end
30     end
31 end

```

Código A.9 – Cálculo das frequências normalizadas de ganho nulo

```

1 function raizes = freq_nula(m,p,n,r,appr,tol)
2 %f0 = freq_nula(m,p,n,r,appr,tol)
3 %Returns a vector of frequencies with gain 0, for SG filters
4 %
5 %INPUTS:
6 %m    = indicative of filter size, filter size = 2*m+1
7 %p    = polynomial degree
8 %n    = output index
9 %r    = derivative order
10 %appr = Savitzky-Golay approach:
11 %     'p' for polynomial derivative
12 %     't' for taylor symmetric differentiation
13 %     'r' for recursive symmetric differentiation
14 %tol  = tolerance on gain of null frequencies - optional (default = 1
15       e-6)
16 %
17 %OUTPUTS:
18 %f0   = vector of normalized frequencies, whose filter gain is null (
19       null frequencies)
20     if (~exist('tol','var'))
21         tol = 1e-6;
22     end
23     N0 = m-floor(p/2)+(r>0);
24     raizes = zeros(1,N0);
25     if (mod(r,2) == 1)
26         raizes(end) = 0.5;
27     end
28     passo = 0.5/N0/10;
29     vetor_f = 0:passo:0.5;
30     vetor_resp = (1j^mod(r,2))*resp_freq_sg(m,p,n,r,appr,vetor_f);
31     k = 1;
32     encontradas = (r>0);
33     while (encontradas < N0 - mod(r,2))
34         k = k + 1;
35         a = vetor_f(k);
36         b = vetor_f(k-1);
37         fa = vetor_resp(k);
38         fb = vetor_resp(k-1);
39         if (fa*fb < 0)
40             encontradas = encontradas + 1;

```

```

39         fc = tol + 1;
40         while (abs(fc) > tol)
41             c = (a*fb-b*fa)/(fb-fa);
42             fc = (1j^mod(r,2))*resp_freq_sg(m,p,n,r,appr,c);
43             if (fa*fc < 0)
44                 b = c;
45                 fb = fc;
46             else
47                 a = c;
48                 fa = fc;
49             end
50         end
51         raizes(encontradas) = c;
52     end
53 end
54 end
55 %0.0 is root for any order greater than 0
56 %0.5 is root for any odd order

```

Código A.10 – Cálculo de corte do filtro

```

1 function fc = freq_corte(m,p,n,r,appr,quali,resol)
2 %fc = freq_corte(m,p,n,r,appr,quali,resol)
3 %Returns the cut-off/correspondence-off frequency of an SG filter
4 %
5 %INPUTS:
6 %m      = indicative of filter size, filter size = 2*m+1
7 %p      = polynomial degree
8 %n      = output index
9 %r      = derivative order
10 %appr = Savitzky-Golay approach:
11 %      'p' for polynomial derivative
12 %      't' for taylor symmetric differentiation
13 %      'r' for recursive symmetric differentiation
14 %quali = quality factor: the minimum ratio of gains between SG and
15 %       ideal response
16 %       optional (default = 1/sqrt(2))
17 %resol = resolution of fc - optional (default = 1e-4)
18 %
19 %OUTPUTS:
20 %fc     = normalized cut-off/correspondence-off frequency
21 %Standart value for quality

```

```

22     if (~exist('quali','var'))
23         quali = 1/sqrt(2);
24     end
25     if (~exist('resol','var'))
26         resol = 1e-4;
27     end
28
29     Npts = ceil(0.5/resol);
30     f = linspace(0,0.5,Npts);
31     hideal = (2j*pi*f).^r;
32
33     hf = resp_freq_sg(m,p,n,r,appr,f);
34     razao = abs(hf)./abs(hideal);
35     find_zeros = razao-quali;
36
37     k = 1;
38     while (find_zeros(k+1)*find_zeros(k) > 0 || isnan(find_zeros(k))
           || isnan(find_zeros(k+1)))
39         k = k + 1;
40     end
41     fc = f(k);
42 end

```

A.2 Geração e tratamento de sinais eletrocardiográficos

Código A.11 – Cálculo das variáveis de estado

```

1 %Y_prime = ECG_states(t,Y)
2 %State spaces equation for ECG generation
3 %3rd state is the output ECG
4 %MATLAB
5 %function Y_prime = ECG_states(t,Y)
6 %OCTAVE
7 function Y_prime = ECG_states(Y,t)
8     A = [1.2 -5 30 -7.5 0.75];
9     B = [0.25 0.1 0.1 0.1 0.4];
10    TH = [-1/3 -1/12 0 1/12 1/2]*pi;
11    w = 2*pi;
12    z0 = 0;
13
14    Y_prime = zeros(3,1);
15    x = Y(1);
16    y = Y(2);

```

```

17     z = Y(3);
18     alpha = 1-sqrt(x^2+y^2);
19     th = atan2(y,x);
20     Y_prime(1) = alpha*x - w*y;
21     Y_prime(2) = alpha*y + w*x;
22     Y_prime(3) = -(z-z0);
23     for ii = 1:5
24         Y_prime(3) = Y_prime(3) - A(ii)*(th-TH(ii))*exp(-(th-TH(ii))
                ^2/(2*B(ii)^2));
25     end
26 end

```

Código A.12 – Criação parametrizada da onda do ECG

```

1 function [signal_ecg,t] = ECG_wave(hr,Tsim,fs,phase)
2 %[signal_ecg,t] = ECG_wave(hr,Tsim,fs,phase)
3 %Generates an ECG generic wave
4 %
5 %INPUTS:
6 %hr      = heart rate [beats per minute]
7 %Tsim    = simulation time [s]
8 %fs      = sampling frequency [Hz]
9 %phase   = shift percentage (0 ~ 1) - optional (default = 0)
10 %
11 %OUTPUTS:
12 %signal_ecg = output signal
13 %t          = time vector [s]
14
15     if ~exist('phase','var')
16         phase = 0;
17     end
18     phase = mod(phase,1); %Phase shift from 0 to 100%
19     Nbeats = Tsim*hr/60;
20     t_norm = -1:Nbeats/fs/Tsim:Nbeats+phase;
21     %MATLAB
22     %[~,y_out] = ode15s('ECG_states', t_norm, [-1 0 0]);
23     %OCTAVE
24     y_out = lsode("ECG_states", [-1 0 0], t_norm);
25     signal_ecg = y_out(:,3)';
26     t = 0:1/fs:Tsim; %Corrected time vector
27     signal_ecg = signal_ecg(length(t_norm)-length(t)+1:end);
28 end

```

Código A.13 – Contagem de batimentos cardíacos

```
1 function cont = beat_counter(signal,t,threshold_down,threshold_up,  
    time_limit)  
2 %cont = beat_counter(signal,t,threshold_down,threshold_up,time_limit)  
3 %Counts the heart beats based on a difference of the ECG signal  
4 %  
5 %INPUTS:  
6 %signal          = difference signal  
7 %t               = time vector  
8 %threshold_down  = down limit for detecting heart beat  
9 %threshold_up    = upper limit for detecting heart beat  
10 %time_limit      = greater limit of time for considering a true heart  
    beat  
11 %  
12 %OUTPUTS:  
13 %cont           = number of hear beats  
14     cont = 0;  
15     greater_than_up = 0;  
16     less_than_down = 0;  
17     if (length(t) ~= length(signal))  
18         error('Signal and time vector sizes mismatch')  
19     end  
20     for k = 1:length(t)  
21         if (signal(k) > threshold_up && !greater_than_up && !  
            less_than_down)  
22             greater_than_up = 1;  
23             idx_up = k;  
24         elseif (signal(k) < threshold_down && greater_than_up && !  
            less_than_down)  
25             less_than_down = 1;  
26             idx_down = k;  
27             if (t(idx_down) - t(idx_up) < time_limit)  
28                 cont = cont + 1;  
29             end  
30             greater_than_up = 0;  
31             less_than_down = 0;  
32         end  
33     end  
34 end
```