UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PROBLEMA INVERSO DE ESCOAMENTO POTENCIAL EM GRADES MISTAS DE MÁQUINAS DE FLUXO

Autor:
Gabriel de Oliveira Barbosa

Itajubá, agosto de 2018
Minas Gerais – Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PROBLEMA INVERSO DE ESCOAMENTO POTENCIAL EM GRADES MISTAS DE MÁQUINAS DE FLUXO

Autor: **Gabriel de Oliveira Barbosa**
Orientador: **Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho**

Curso: **Mestrado em Engenharia Mecânica**
Área de Concentração: **Térmica, Fluidos e Máquinas de Fluxo**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Itajubá, agosto de 2018
Minas Gerais – Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PROBLEMA INVERSO DE ESCOAMENTO POTENCIAL EM GRADES MISTAS DE MÁQUINAS DE FLUXO

Autor
Gabriel de Oliveira Barbosa

Banca Examinadora:

Prof.ª Dr.ª Márcia Suely Corrêa Vilela	**PUC Minas**
Prof.ª Dr.ª Angie Lizeth Espinosa Sarmiento	**IEM/UNIFEI**
Prof. Dr. Waldir de Oliveira	**IEM/UNIFEI**
Prof. Dr. Nelson Mazanares Filho (Orientador)	**IEM/UNIFEI**

Dedicatória

Ao vô, Neno, e ao vô, Pulica.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus pelas oportunidades e pela saúde concedida.

À minha querida esposa, Milene, exemplo de mulher, perseverança, esforço, e que há tanto tempo vem me incentivando na conclusão deste trabalho. Te amo!

À minha mãe, Carmen, por sempre ter sido um exemplo de dedicação e pessoa, além de ser uma incentivadora do conhecimento.

Ao meu pai, Luciano, irmão, Fabrício, e família por todo apoio, conversas, companheirismo e incentivo.

Agradeço ao meu orientador Nelson Manzanares Filho por sempre acreditar que eu chegaria ao fim desta jornada. Por muitas vezes nem eu mesmo acreditei, mas ele nunca desistiu. Obrigado.

Ao grande Delegado Dr. Arílio, grande exemplo de pessoa, cidadão e militar. Proporcionou-me muito mais que um local para ficar em Itajubá, mas sim uma amizade que vou levar para o resto da vida.

Ao meu amigo Thiago Bese, companheiro de universidade e amigo para toda vida.

Aos meus Professores Waldir de Oliveira e Rodrigo Barbosa pelas conversas, aprendizados e principalmente pela amizade.

Aos meus colegas de turma Crystianne, Lucas Lincoln, Ariane, Roberto, Pedro e Marcos, muito obrigado por toda paciência, todas as conversas e pelo tempo de convívio.

Ao meu campanha de Marinha Monstro!

À UNIFEI que sempre me abriu as portas e me proporcionou as grandes oportunidades da minha vida.

"O importante é não parar de questionar. A curiosidade tem sua própria razão de existir."

Albert Einstein

Resumo

O projeto inverso aplicado na determinação da geometria de pás de turbomáquinas ainda continua sendo uma importante ferramenta computacional, mesmo com as sofisticadas ferramentas de análises tridimensionais. Foi utilizada a análise Quase-Tridimensional (Q3D), que soluciona os dois problemas propostos por Chung-Hua Wu (1952): cubo-carcaça (*Through-Flow*) e pá-a-pá (*Blade-to-Blade*). Este trabalho propõe um algoritmo para a solução do problema *Blade-to-Blade*, partindo-se dos resultados obtidos da análise *Through-Flow* realizada por Santos *et al*. (2012). O método de painéis foi a ferramenta utilizada para a solução numérica do problema implementado em linguagem FORTRAN. Diversos casos simplificados foram estudados para entendimento e validação do programa. Primeiramente, partiu-se da formulação para perfis finos e isolados, e posteriormente inseriram-se diversos efeitos pertinentes ao escoamento através de um rotor, chegando-se na formulação para uma grade de turbomáquina. Este algoritmo pode ser utilizado para turbomáquinas de escoamento misto. Entretanto, o algoritmo desenvolvido foi aplicado em uma turbina hidráulica axial, variando o número de pás na solução e comparando os resultados com a geometria obtida por Santos *et al*. (2012). Espera-se que o programa desenvolvido sirva de subsídio para uma ferramenta de otimização da geometria, levando em conta outros importantes efeitos do escoamento.

***Palavras-chave*:**

Projeto Inverso, Geometria de pás, Pá-a-pá (*Blade-to-Blade*), Cubo-carcaça (*Through-Flow*), Método de Painéis.

Abstract

The inverse method applied on the design of blade geometry still remains an important computational tool, even with sophisticated three-dimensional programs. It was used the quasi-three-dimensional analysis (Q3D), which solves the two problems proposed by Chung-Hua Wu (1952): Through-Flow and Blade-to-Blade. This work proposes an algorithm for the solution of the Blade-to-Blade problem, starting from the results obtained from the Through-Flow analysis performed by Santos *et al*. (2012). The panel method was the tool used for the numerical solution of the problem implemented in FORTRAN language. Several simplified cases were studied for the understanding and validation of the program. Firstly, the formulation was started for thin and isolated profiles, and later several effects pertinent to the flow through an impeller were inserted, finishing at the formulation for a grid of turbomachinery. The developed algorithm can be used for mixed turbomachines. However, the algorithm was applied in an axial hydraulic turbine, varying the number of blades in the solution and comparing the results with the geometry obtained by Santos *et al*. (2012). It is hoped that this program will serve as an input for a geometry optimization tool, taking into account other important effects of the flow.

***Keywords*:**

Inverse Method, Blade Geometry, Blade-to-Blade, Through-Flow, Panel Method.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Simbologia

Letras Latinas

$\boldsymbol{A}_{ij}$	Matriz de Influência
a	Parâmetro da transformação conforme; medida da transformação de Joukowski
b	Fator de bloqueio das pás; vetor de segundo membro; largura das pás
c	Velocidade genérica
$\boldsymbol{e}$	Vetor unitário genérico
E	Energia total absoluta
E_R	Energia total relativa
F	Força de interação entre a pá e o escoamento
h	Coordenada vertical de baixo para cima em relação a um plano de referência
$\boldsymbol{i}$	Vetor unitário do eixo x; $\sqrt{-1}$
$\boldsymbol{j}$	Vetor unitário do eixo y
$\boldsymbol{K}_j$	Vetor no método de vórtices
l	Comprimento da corda do perfil na grade
m	Parâmetro da transformação de Joukowski
$\boldsymbol{n}$	Vetor normal à superfície da pá

n Número de painéis

$\boldsymbol{N}$ Vetor perpendicular à velocidade relativa

p Pressão estática

$\boldsymbol{r_p}$ Vetor posição

r Raio genérico

s Coordenada tangente ao painel; razão de solidez

S_1 Superfície quase ortogonal à S_2 (superfície pá-a-pá)

S_2 Superfície quase ortogonal ao eixo do rotor

S_{2m} Superfície média do escoamento

t Espaçamento entre pás

tol Tolerância imposta no algoritmo

u Velocidade circunferencial; componente real da velocidade conjugada induzida

v Componente imaginária da velocidade conjugada induzida

V Velocidade absoluta

V_∞ Velocidade do escoamento incidente; velocidade média entra a entrada e saída da grade

x Abscissas da grade linear

y Ordenadas da grade linear

w Velocidade relativa

w_∞ Velocidade relativa média entre a entrada e saída da grade

z Coordenada axial; função da transformação de Joukowski

Z Número de pás

Letras Gregas

α Ângulo de ataque

β	Parâmetro do círculo do plano imaginário ζ
Γ	Circulação em torno do perfil
γ	Densidade de vorticidade
Δ	Diferença
δ	Incremento
ζ	Abscissa da transformada de Joukowski; vetor posição na grade linear
η	Ordenada da transformação de Joukowski
θ	Coordenada circunferencial; ângulo de inclinação do painel
λ	Ângulo da corda com o eixo x
π	3,14159265
ρ	Massa específica
σ	Coordenada ao longo da linha de corrente do plano meridional
φ	Ângulo de torção da pá
ψ	Função corrente
ω	Velocidade angular do rotor
∇	Operador nabla

Sobrescritos

*	Variável parcialmente alterada
-	Lado de sucção da pá
+	Lado de pressão da pá

Subscritos

1	Seção de entrada da grade linear
2	Seção de saída da grade linear
b	Referente ao efeito da variação da largura
c	Referente ao ponto de controle
gl	Referente ao plano transformado
i	Indexação
j	Indexação
L	Ponto no bordo de fuga da linha de corrente na superfície
n	Referente à normal
r	Referente à radial
R	Rotor
t	Referente a tangencial
$total$	Soma das velocidades
v	Referente ao ponto de colocação do vórtice
x	Referente à componente horizontal na grade linear
y	Referente à componente vertical na grade linear
z	Referente à componente axial, vetor posição na grade linear
θ	Referente à componente circunferencial
σ	Referente à componente tangente à linha de corrente

Abreviaturas

DFC	Dinâmica dos Fluidos Computacional
LE	Bordo de ataque – *Leading Edge*
NASA	Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço – *National Aeronautics and Space Administration*
Q3D	Quase Tridimensional
TE	Bordo de Fuga – *Trailing Edge*
UNIFEI	Universidade Federal de Itajubá

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES E MOTIVAÇÃO

Com o avanço das técnicas computacionais, o escoamento em turbomáquinas começou a ser minuciosamente estudado a partir da simulação das equações de Navier-Stokes, via Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC). Aspectos que não podiam ser comprovados analiticamente começaram a ser desvendados. Atualmente, o uso de métodos diretos na DFC é crescente, porém estes, como quaisquer outros métodos, apresentam vantagens e desvantagens. A grande vantagem é a simulação das equações de Navier-Stokes, as quais juntamente com processos de otimização, podem proporcionar excelentes resultados em projetos de turbomáquinas; entretanto, a solução numérica destas equações possui um alto custo computacional, sendo esta uma grande limitação. Em alguns casos, devido à grande complexidade de geometria, os cálculos se tornam muito custosos, se tornando praticamente inviáveis. Sendo assim, outros métodos são utilizados previamente para fornecer dados confiáveis, que alimentam um processo de otimização, trazendo uma grande economia computacional.

Neste contexto, os Métodos Inversos se apresentam como uma excelente ferramenta que pode ser utilizada. Nestes, uma grandeza que seria calculada em uma metodologia direta deve ser fornecida, por exemplo, uma distribuição de torque hidráulico para uma máquina de fluxo hidráulica. Desta forma, a geometria do problema é calculada para produzir aquele torque hidráulico já conhecido ou desejado. Na prática, um fabricante tem conhecimento prévio da distribuição que ele deve ter para uma determinada máquina, e assim, a geometria do problema é obtida, utilizando uma metodologia inversa. Este problema inverso pode levar em conta os efeitos viscosos do escoamento, dependendo da metodologia adotada. Entretanto, pode ser considerado um problema simplificado, sem perdas e, desta maneira, a geometria obtida serviria como ponto de partida para um problema de otimização, até mesmo utilizando programas comerciais existentes, os quais consideram diversas perdas do escoamento, modificando esta geometria inicial para uma forma final mais confiável.

Vale ressaltar que as máquinas de fluxo hidráulicas são frequentemente projetadas para serem operadas em seus pontos de projeto, ou seja, uma situação onde as perdas do escoamento são pequenas se comparadas com outras situações mais extremas de operação. Uma das condições frequentemente utilizadas é a de escoamento sem choque. Isto faz com que o escoamento incida no ponto de estagnação localizado no bordo de ataque da linha de esqueleto do perfil. Assim, uma geometria obtida por um método inverso utilizando uma abordagem potencial, o qual não considera os efeitos viscosos do escoamento, produziria uma geometria muito próxima da geometria ideal do problema se obtida próxima ao ponto de projeto, onde o escoamento entra no rotor praticamente sem choque. Além do mais, existe uma grande flexibilidade que estes métodos trazem para os projetos, onde adaptações necessárias podem ser feitas com facilidade se prevendo as características desejadas, por exemplo, quando se deseja obter uma distribuição específica de velocidades ou de pressões na saída da máquina.

Com isso, pretende-se com o presente trabalho obter uma ferramenta que, juntamente com desenvolvimentos anteriores (Santos *et al.*, 2012), facilite a obtenção da geometria das pás de uma máquina de fluxo hidráulica de escoamento misto. Tem-se em mente o apoio a trabalhos futuros sobre aplicação de técnicas de otimização em problemas de projeto, visando geometrias mais confiáveis na representação dos efeitos reais do escoamento em uma máquina de fluxo. A motivação principal é que tais programas não são disponibilizados na literatura, o que limita a continuação de uma linha de pesquisa se estes não forem desenvolvidos com tecnologia própria.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O escoamento em uma máquina de fluxo possui grande complexidade e abrange diversos efeitos que somente uma metodologia tridimensional seria capaz de captar. Desse modo, Chung-Hua Wu (1952) desenvolveu uma teoria tridimensional aproximada para as turbomáquinas, dividindo o problema tridimensional completo em dois problemas iterativos interdependentes, usando dois conjuntos de superfícies respectivos, S_1 e S_2. As superfícies S_2 são superfícies de corrente quase ortogonais ao eixo da máquina (do cubo à carcaça); já as superfícies S_1 são superfícies de corrente quase ortogonais às superfícies S_2 (de pá a pá), como podem ser observadas na Figura 1.1, retirada do próprio trabalho de Wu (1952). Ainda se identifica uma superfície que divide em partes iguais a vazão entre duas pás consecutivas, a superfície S_{2m}, frequentemente chamada de Superfície Média do Escoamento (*Mid-Channel Flow Surface*). As soluções dos problemas envolvendo as superfícies S_2 e S_1 são conhecidas como "cubo-carcaça" (*Hub-to-Shroud* ou *Through-Flow*) e "pá-a-pá" (*Blade-to-Blade*), respectivamente.

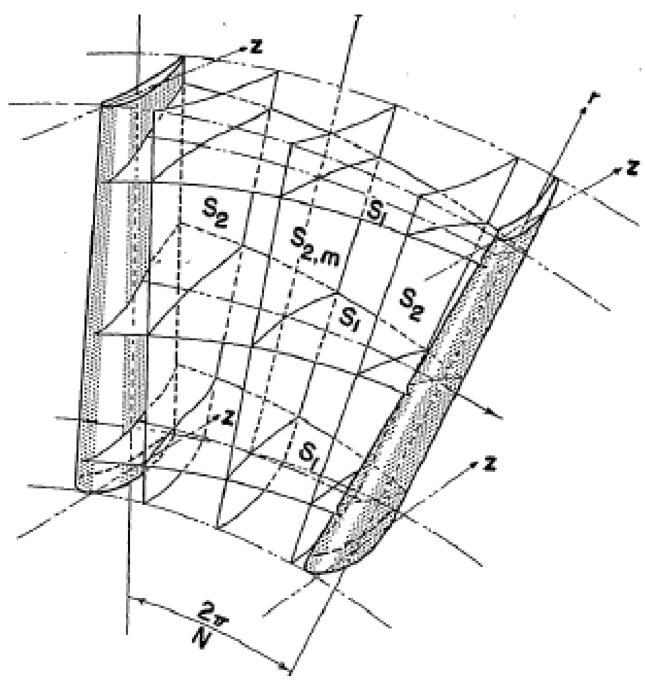

Figura 1.1 – Representação das superfícies S_1, S_2 e S_{2m} (Wu, 1952).

Bosman e El-Shaarawi (1977) citam que dois tipos de técnicas contidas na literatura podem ser aplicados para a solução do problema proposto por Wu (1952): Método de Matrizes (*Matriz*

Method) e Método da Curvatura da Linha de Corrente (*Streamline Curvature Method*). Como todo e qualquer método, existem vantagens e desvantagens relacionadas a cada um destes, porém ambos utilizam processos iterativos para achar soluções numéricas.

O Método de Matrizes utiliza uma malha fixa que pode ser tanto curva como ortogonal. É utilizado por diversos pesquisadores para o desenvolvimento de programas computacionais, que calculam as linhas de corrente da turbomáquina, bem como a distribuição de velocidades sobre pá. Katsanis e Mcnally (1977a, 1977b) em pesquisa para a Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço - NASA desenvolveram um programa na linguagem computacional FORTRAN para calcular as velocidades, as linhas de corrente na superfície média do escoamento e os ângulos do escoamento, bem como realizar cálculos na superfície *Blade-to-Blade* (Katsanis, 1968). Tal programa pode ser aplicado em máquinas axiais, radiais ou de fluxo misto e serviu de base para muitos pesquisadores do assunto, pois seus códigos computacionais foram publicados em um manual, assim como os exemplos numéricos utilizados.

Senoo e Nakase (1972) realizaram um trabalho que calcula o escoamento permanente, tridimensional e subsônico através de um rotor de uma turbomáquina de fluxo misto que possui um número finito de pás. O problema é resolvido com a combinação das soluções tanto no plano meridional como nas superfícies de revolução *Blade-to-Blade*. As soluções são obtidas numericamente pelo método de diferenças finitas. Dentre os resultados obtidos, os autores plotam gráficos para as distribuições de velocidades nos lados de pressão e sucção da pá tanto no cubo como na carcaça da máquina.

Na mesma linha de pesquisa, Hirsch e Warzee (1979) publicaram um trabalho baseado na formulação proposta por Wu (1952), integrando a solução das superfícies S_1 e S_2 e utilizando o método de elementos finitos para simulação do problema. Uma das hipóteses utilizadas pelos autores é de que as superfícies pá-a-pá devem ser simétricas ao eixo da máquina. Ele cita que esta abordagem faz que com que a incerteza relacionada com a escolha da superfície S_2 seja evitada, limitando a quantidade de iterações entre as duas famílias de superfícies. Outros trabalhos foram desenvolvidos seguindo a mesma metodologia e hipóteses simplificadoras, como o de McFarland (1984).

Jennions e Stow (1985a, 1985b) também realizaram um algoritmo para calcular a iteração entre os problemas *Through-Flow* e *Blade-to-Blade*. Eles citam que o trabalho foi feito em módulos, ou seja, existe uma grande flexibilidade para se realizar alterações de acordo com os avanços tecnológicos. Além do mais, o programa permitia que diferentes módulos do problema *Blade-to-Blade* fossem utilizados, dependendo da aplicação específica de cada turbomáquina.

O método inverso é uma ferramenta importante de projeto que requer que uma variável do escoamento seja fornecida para que a modificação da geometria seja computada. Lewis (1982) realizou uma análise bidimensional inversa de aerofólios e também de projeto de grades de turbomáquinas. Lewis permite que a velocidade possa ser especificada em ambos os lados da pá ou, quando especificada em apenas um dos lados, a distribuição da espessura também deve ser fornecida. Com isso uma geometria final é obtida, bem como a distribuição de velocidades e de pressão ao redor do corpo.

Nas máquinas de fluxo, um dos parâmetros frequentemente caracterizados na utilização do método inverso é a distribuição do torque hidráulico. Foi assim que Zangeneh (1991) realizou seu trabalho, no qual desenvolveu um algoritmo para solucionar um problema totalmente tridimensional inverso para projeto de turbomáquinas radiais e de fluxo misto. Em seu trabalho, Zangeneh fez duas abordagens diferentes. Na primeira, chamada de aproximada, ele não considerou as variações da massa específica do fluido. Já na segunda, as variações de densidade e velocidade, através do escoamento tridimensional, foram levadas em consideração utilizando a transformada rápida de Fourier. O autor cita que a diferença do formato das pás obtido para as duas abordagens são muito pequenas e que estariam dentro das tolerâncias de fabricação dos componentes.

Borges (1991) propôs um método inverso, que também utilizava a distribuição de torque nas pás do rotor, aplicado a bombas de fluxo misto. Dentre suas hipóteses, considerou o escoamento irrotacional, não-viscoso e pás sem espessura. Com estas simplificações houve uma significante redução do custo computacional e, assim, o autor cita que diferentes distribuições de torque hidráulico podem ser rapidamente checadas até se chegar a uma que é efetivamente melhor. Porém, reconhece a necessidade de melhorias para se calcular e otimizar a distribuição de pressão sobre as pás, especialmente na região do cubo, devido as simplificações impostas ao problema.

Ainda dentro da metodologia inversa, Wang *et al.* (2000) desenvolveram um novo método numérico para solucionar um problema inverso totalmente tridimensional, que se baseia na simulação das equações de Navier-Stokes. Neste caso, as distribuições de pressão na pá desejadas são especificadas e uma geometria inicial deve ser fornecida como ponto de partida. A partir daí uma nova geometria é obtida por meio de processo iterativo. Os autores citam que usualmente o problema totalmente tridimensional é utilizado posteriormente a uma análise mais simplificada, que possui hipóteses simplificadoras, como por exemplo, escoamento não viscoso.

Susan-Resiga *et al.* (2005) citam que um algoritmo iterativo, que soluciona as superfícies S_1 e S_2, obteria as características de um escoamento tridimensional, porém, que este apresentaria problemas de estabilidade e convergência quando aplicados a problemas tridimensionais mais complexos. Para contornar este empecilho, duas simplificações foram introduzidas ao problema. A primeira é que a superfície S_1 deveria ser simétrica ao eixo da máquina e, consequentemente, faz-se necessário apenas uma única superfície S_2, chamada de superfície meridional média do escoamento, S_{2m}. Com esta hipótese, surgiu o método conhecido por Quase-tridimensional, Q3D, que possui, como uma de suas características, a rápida convergência numérica se comparado ao método puramente tridimensional. Anos depois, Susan-Resiga *et al.* (2008) publicaram um trabalho no qual revisaram toda a teoria clássica Q3D e criaram um algoritmo inverso para gerar o escoamento através de um conjunto distribuidor e rotor, com uma determinada deflexão do escoamento absoluto e relativo.

Peng *et al.* (2002a) mencionam que os rotores utilizados nos problemas Q3D são tratados como partes isoladas de passagem do fluido, sendo necessárias condições de contorno que são definidas empiricamente de dados experimentais (velocidades antes e após o rotor). Com esta abordagem, fica impossível levar em consideração a influência das palhetas diretrizes no problema, além de ser difícil se utilizar boas estimativas para as velocidades de entrada e saída, devido às limitações experimentais. Desta forma, os autores criaram um método Q3D modificado para turbinas axiais, no qual o domínio do problema era estendido para bem antes do distribuidor até muito após o rotor. Desta maneira, não se faz necessário definir as condições do escoamento na entrada do rotor. Posteriormente, os autores aplicaram um processo de otimização para uma turbina axial tipo Kaplan levando em consideração aspectos de cavitação e perdas hidráulicas no rotor (Peng *et al.*, 2002b).

Continuando sua linha de pesquisa, Peng (2005) propôs uma análise tridimensional do problema *Through-Flow*. Em seu trabalho, ele incluiu o rotor juntamente com outros componentes hidráulicos para minimizar a dificuldade de se especificar os parâmetros na entrada do rotor. Novamente, aplicou o algoritmo em um exemplo de turbina Kaplan, investigando a influência de tais componentes hidráulicos no problema. Para validação numérica, comparou resultados numéricos de um escoamento circular sem as pás do rotor com dados experimentais.

Até aqui, as maneiras citadas para se resolver o problema da superfície *Blade-to-Blade* consistem em métodos de malha aplicados na própria superfície. Entretanto, uma alternativa é aplicar uma transformação na superfície para se trabalhar no plano de uma grade linear. Gostelow (1984) publicou um trabalho com a teoria clássica de análise de escoamento através de grades. Diversos de seus perfis publicados continuam a ser usados até os dias atuais para validação de programas desenvolvidos.

Neste contexto, Eremeff (1974) publicou um trabalho no qual desenvolveu uma metodologia para solucionar o escoamento de uma grade de aerofólios utilizando uma transformação conforme da superfície de revolução tridimensional do escoamento; os pontos da superfície real e do plano, assim como as velocidades reais e do plano são relacionadas por expressões de transformação. Além disso, Eremeff incorporou efeitos para levar em conta a variação de largura existente entre as linhas de corrente do escoamento, utilizando aproximações de primeira e segunda ordem para este efeito. A transformação conforme da superfície do escoamento em um plano de grade linear foi adotada neste trabalho e será apresentada no capítulo 2.

Susan-Resiga *et al.* (2006a) utilizaram planos de grades lineares para projetar e analisar as linhas de esqueleto de perfis de uma grade. O trabalho foi dividido em duas partes, sendo que a primeira consistia no projeto baseado no carregamento sobre a pá. Com isso foi desenvolvido um algoritmo para solucionar o problema, apresentando dois exemplos de grades de turbinas. O comportamento do formato das pás em função do tamanho da grande, mantendo fixo o carregamento e a vazão, foi apresentado. Na segunda parte do trabalho, os autores fizeram análises numéricas utilizando elementos finitos e volumes finitos, observando a precisão dos métodos nos exemplos estudados e otimizando as geometrias obtidas (Susan-Resiga *et al.* 2006b).

Susan-Resiga *et al.* (2006a) ainda citam a importância em se considerar, no projeto de uma grade, a condição de escoamento incidente sem choque (*Shock-Free*). Isto faz com que o escoamento incida no bordo de ataque de maneira suave, causando o mínimo de perdas. Se o ângulo do escoamento começa a ser modificado, o ponto de estagnação começa a se movimentar para o lado de pressão ou de sucção, causando uma recirculação do fluido próximo ao bordo de ataque do perfil.

Recentemente, Santos *et al.* (2012) realizaram um programa computacional para solucionar o problema *Through-Flow* utilizando uma metodologia totalmente inversa, considerando o escoamento incompressível, não-viscoso e pás infinitamente finas. Nesse método, o torque hidráulico foi fornecido para se obter a superfície média do escoamento, S_{2m}, e as linhas de corrente do escoamento. Esta superfície representaria o formato das pás considerando que existam infinitas pás sem espessura na máquina de fluxo. Para obter os valores da função corrente nos pontos de malha do domínio foi utilizado o método da quadratura diferencial local usando funções de base radial (Santos *et al.*, 2011). O programa foi testado e aplicado em um projeto de turbina axial tipo hélice proposta por Souza (1989). Este desenvolvimento foi parte crucial para a obtenção dos resultados deste trabalho, uma vez que os resultados gerados serviram de valores de entrada para o programa desta dissertação, como será visto posteriormente.

1.3 OBJETIVOS

O principal objetivo deste trabalho é a realização de um programa computacional que faz o cálculo das superfícies S_1 (*Blade-to-Blade*), as quais irão fornecer posteriormente o formato das pás de uma turbina hidráulica de escoamento misto.

Com o intuito de atingir este propósito, listam-se os seguintes objetivos secundários:

I. Buscar o entendimento dos problemas *Through-Flow* e *Blade-to-Blade*;
II. Implementar uma rotina para transformar uma superfície de corrente que corta a superfície média do escoamento em uma grade linear, via transformação conforme;
III. Desenvolver um programa baseado em teoria potencial via método de painéis com vórtices concentrados, desprezando a espessura das pás no tratamento do problema;
IV. Aplicar esse programa em um caso de uma turbina hidráulica axial mostrando a nova geometria obtida para diferentes números de pás.

1.4 DELINEAMENTO DO TRABALHO

Este trabalho foi dividido em seis capítulos:

- **Capítulo 2:** as formulações gerais para as superfícies S_1 e S_2 são desenvolvidas, assim como a transformação conforme de uma superfície tridimensional em um plano bidimensional;
- **Capítulo 3:** trata do método de vórtices aplicado a um perfil fino e isolado e de dois algoritmos desenvolvidos, um levando em conta a metodologia direta e outro a inversa, além de comparar soluções exatas com as numéricas obtidas;
- **Capítulo 4:** apresenta o desenvolvimento do método de painéis para o caso de grades lineares, trazendo as modificações necessárias ao caso de perfil fino e isolado, bem como um algoritmo para solução do problema inverso *Blade-to-Blade*;
- **Capítulo 5:** apresenta a utilização do algoritmo *Blade-to-Blade* com um exemplo de uma turbina axial, bem como uma análise dos resultados;
- **Capítulo 6:** apresenta as conclusões da pesquisa realizada, além das sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 MÉTODO QUASE-TRIDIMENSIONAL (Q3D)

Como citado na revisão bibliográfica, o método tridimensional é bem complexo e exige uma grade demanda computacional para ser solucionado. Uma das maneiras para reduzir tais dificuldades é a consideração de algumas hipóteses simplificadoras. O método Q3D assume duas simplificações do problema puramente tridimensional:

I) As superfícies S_1 são simétricas ao eixo da máquina (superfícies de revolução);

II) As diversas superfícies S_2 são substituídas por uma única superfície que está situada no meio entre duas pás consecutivas. Esta é chamada de superfície média do escoamento, S_{2m};

Dois problemas devem ser solucionados no método Q3D. O primeiro está relacionado com a superfície média do escoamento, S_{2m}, conhecido como problema *Through-Flow*. Já o segundo refere-se à família de superfícies simétricas ao eixo da máquina, S_1, chamado de problema *Blade-to-Blade*. A Figura 2.1 ilustra parte de um rotor e suas superfícies S_1, S_2 e S_{2m}.

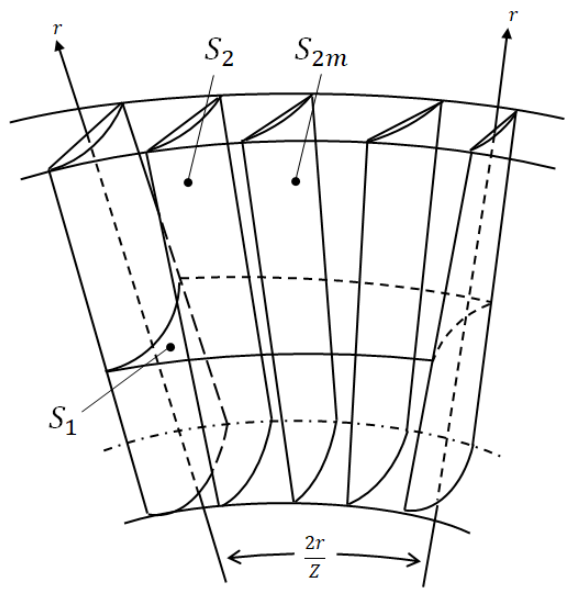

Figura 2.1 – Famílias de superfícies S_1 e S_2 (adaptado de Wu, 1952).

2.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA *THROUGH-FLOW*

Em uma máquina de fluxo existem diversas regiões e componentes estacionários nos quais não há velocidade relativa a ser levada em conta. Para estas, a velocidade absoluta deve ser utilizada nas equações da continuidade e da energia. Considerando escoamento permanente e incompressível e fluido não-viscoso, obtêm-se as seguintes equações (Peng *et al.*, 2002a):

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{V} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{\nabla}(E) \tag{2.2}$$

$$E = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gh\right) \tag{2.3}$$

onde $\boldsymbol{V}$ é a velocidade absoluta do escoamento, E a energia total absoluta, p a pressão estática, ρ a massa específica do fluido e h uma coordenada vertical de baixo para cima em relação a um plano horizontal de referência.

Já na região compreendida pelas pás do rotor, a velocidade relativa é que deve ser considerada quando utilizadas as equações fundamentais. Considerando o triângulo de velocidades, têm-se que $w^2 = V^2 + u^2 - 2\omega r V_\theta$, onde w, u, V são os módulos das velocidades relativa, circunferencial e absoluta, respectivamente. Considerando escoamento relativo permanente, escoamento incompressível, velocidade angular do rotor constante e fluido não-viscoso, obtêm-se (Peng *et al.*, 2002a):

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{w} = 0 \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{w} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{\nabla}(E_R) \tag{2.5}$$

sendo $\boldsymbol{w}$ o vetor velocidade relativa e E_R a energia total relativa, a qual é relacionada com a energia total absoluta E por: $E_R = E - \omega(rV_\theta)$.

Quando o escoamento passa pelas pás do rotor, estas produzem uma diferença de pressão entre os lados de pressão e de sucção da pá. Com isso surge um gradiente circunferencial de pressão que faz com que as linhas de corrente que passam pelos dois lados das pás sejam defletidas. Para levar em conta este efeito, uma força local, $\boldsymbol{F}$, de interação entre a pá e o escoamento, deve ser introduzida, a qual deve ter a direção normal à superfície média do escoamento, S_{2m}.

Considere então que a superfície média do escoamento seja representada por:

$$S(r,\theta,z) = \theta - \varphi(r,z) \tag{2.6}$$

onde φ é o ângulo de torção da pá e (r,θ,z) são as coordenadas cilíndricas do sistema.

Como se sabe, a velocidade relativa do escoamento, $\boldsymbol{w}$, será sempre tangente às linhas de corrente do escoamento relativo. A Figura 2.2 mostra, além da velocidade relativa, a força de interação $\boldsymbol{F}$ e os vetores unitários $\boldsymbol{n}$**,** normal à superfície S_{2m}, e $\boldsymbol{N}$, perpendicular a $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{w}$.

Este vetor $\boldsymbol{n}$ é definido por:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{\nabla} S(r,\theta,z)}{|\boldsymbol{\nabla} S(r,\theta,z)|} = \frac{-r\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{e}_\theta - r\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{\left(r\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + 1 + \left(r\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}} \tag{2.7}$$

onde $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ e $\boldsymbol{e}_z$ são os versores cilíndricos.

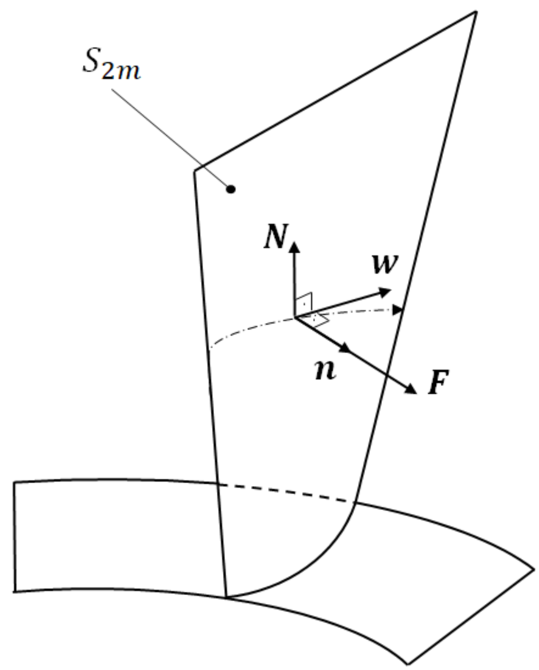

Figura 2.2 – Vetores usados na linha de corrente da superfície S_{2m}.

Fazendo o produto vetorial entre o vetor unitário $\boldsymbol{n}$ e a Equação (2.5), e sabendo que $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{w} = 0$, temos:

$$\boldsymbol{n} \times [\boldsymbol{w} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V})] = \boldsymbol{n} \times \{\boldsymbol{\nabla}[E - \omega(rV_\theta)]\} \tag{2.8}$$

Expandindo e desenvolvendo ambos os lados da Equação (2.8), surge uma expressão geral para o escoamento relativo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_z}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} + \\ + \frac{1}{w^2}\left[\left(w_z + w_\theta\frac{r\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial E_R}{\partial r} - \left(w_r + w_\theta\frac{r\partial\varphi}{\partial r}\right)\frac{\partial E_R}{\partial z}\right] \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $w^2 = w_r{}^2 + w_\theta{}^2 + w_z{}^2$ e w_r, w_θ e w_z correspondem aos módulos das componentes radial, circunferencial e axial da velocidade relativa.

A partir da equação da continuidade, Equação (2.4), pode-se introduzir a definição da função corrente ψ em termos das velocidades w_r e w_z:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -brw_r \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = brw_z \tag{2.11}$$

sendo b um fator de bloqueio das pás. Quando considerado um número finito de pás com espessura este valor é menor que a unidade; já no caso de regiões em que não há pás $b = 1$.

Pode-se então reescrever a equação geral do escoamento, Equação (2.9), em função da função corrente definida anteriormente (Equações (2.10) e (2.11)). Obtém-se assim uma equação diferencial parcial elíptica bidimensional com relação à *r* e *z*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{br}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{br}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r} + \\ + \frac{1}{w^2}\left(\left(w_z + w_\theta \frac{r\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial E_R}{\partial r} - \left(w_r + w_\theta \frac{r\partial \varphi}{\partial r}\right)\frac{\partial E_R}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

A energia total relativa pode ser relacionada com a função corrente a partir da regra da cadeia. Note que, quando as perdas do escoamento são consideradas, a energia específica relativa vai sendo reduzida devido aos efeitos viscosos do escoamento. Além do mais, as condições iniciais antes e depois do rotor devem ser levadas em conta, pois estas determinam as condições limites para as linhas de corrente. Com estas considerações a Equação (2.12) se torna:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{br}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{br}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r} + rb\frac{dE_R}{d\psi} \tag{2.13}$$

Outra equação pode ser obtida da condição de tangência do escoamento, uma vez que a velocidade relativa será tangente à linha de corrente relativa, ou seja, $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\nabla} S = 0$. Trabalhando esta expressão obtém-se:

$$w_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + w_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{r^2}(rV_\theta - \omega r^2) \tag{2.14}$$

Pode-se ainda escrever a equação anterior em função de uma coordenada ao longo da linha de corrente, σ:

$$w_\sigma r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = rV_\theta - \omega r^2 \tag{2.15}$$

em que w_σ é a velocidade meridional, definida por ${w_\sigma}^2 = {w_r}^2 + {w_z}^2$.

Para o escoamento nas regiões sem pá, considerando que também não haja perdas e que a rotação seja nula, um procedimento muito similar pode ser utilizado para se obter expressões para tais regiões a partir das Equações (2.1) e (2.2). Lembrando que nestas, o escoamento é absoluto, portanto as expressões ficam em função das velocidades absolutas do escoamento. Assim:

$$\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} + r \frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r}\right) - r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial z}\right) = 0 \tag{2.16}$$

Da mesma maneira, pode-se utilizar a definição da função corrente, Equações (2.10) e (2.11) do escoamento obtendo-se a equação principal do escoamento absoluto:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = \frac{rV_\theta}{r^2 {V_\sigma}^2}\left(V_r \frac{\partial (rV_\theta)}{\partial z} - V_z \frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r}\right) \tag{2.17}$$

O termo referente ao trabalho específico rV_θ permanece constante ao longo de uma linha de corrente nas regiões onde não existem pás, ou seja, $\frac{d(rV_\theta)}{d\sigma} = 0$.

Em resumo, para solucionar o problema *Through-Flow* são utilizadas a condição de tangência do escoamento relativo, Equação (2.15); a equação do escoamento médio circunferencial, nas regiões com pás, Equação (2.13); e a equação do escoamento absoluto, nas regiões sem pás, Equação (2.17).

2.3 FORMULAÇÃO POTENCIAL PARA O PROBLEMA *BLADE-TO-BLADE*

Considere a seção meridional do rotor da máquina de fluxo da Figura 2.3. Como visto na formulação do problema *Through-Flow*, existe uma coordenada ao longo da linha de corrente, σ, e um raio genérico r associado a cada posição. Desta forma, a velocidade meridional e a velocidade circunferencial são funções do tipo:

$$V_\sigma = V_\sigma(\sigma, r) \tag{2.18}$$

$$V_\theta = V_\theta(\sigma, r) \tag{2.19}$$

Tomando-se um elemento de fluido ao redor do ponto P e aplicando a equação da continuidade, obtém-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial V_\sigma}{\partial \sigma} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_\sigma\left(\frac{1}{b}\frac{db}{d\sigma} + \frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma}\right) = 0 \tag{2.20}$$

Toma-se agora uma superfície contendo o ponto P, ortogonal ao plano meridional, notando que para o escoamento potencial a circulação deve ser nula, $\Gamma = 0$. O sentido anti-horário foi adotado como positivo e os termos de ordem superior desapareceram no limite. Desta maneira é possível obter uma equação que representa a condição de irrotacionalidade do escoamento:

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial \sigma} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_\sigma}{\partial \theta} + V_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma}\right) = 0 \tag{2.21}$$

As Equações (2.20) e (2.21) podem ser reescritas com relação à velocidade relativa do escoamento. Pelo triângulo de velocidades sabe-se que $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_p} + \boldsymbol{w}$, onde $\boldsymbol{r_p}$, $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_p}$ e $\boldsymbol{w}$ representam os vetores posição, velocidade circunferencial, $\boldsymbol{u}$, e velocidade relativa, respectivamente. Observe que $\boldsymbol{u}$, não possui componente na direção meridional, mas apenas na direção circunferencial, ou seja:

$$V_\sigma = w_\sigma \tag{2.22}$$

$$V_\theta = w_\theta + \omega r(\sigma) \tag{2.23}$$

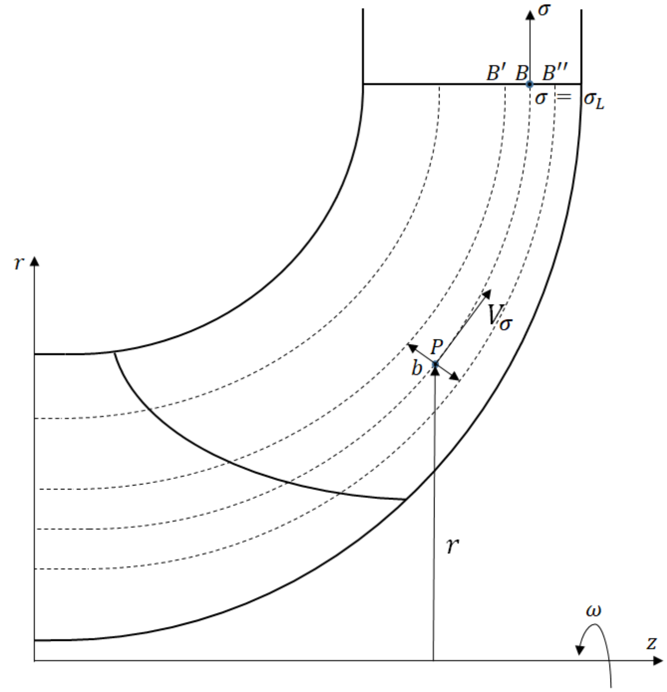

Figura 2.3 – Seção meridional do rotor de uma turbomáquina de fluxo misto.

Substituindo as velocidades absolutas pelas relativas, as Equações (2.20) e (2.21) se tornam:

$$\frac{\partial w_\sigma}{\partial \sigma} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + w_\sigma\left(\frac{1}{b}\frac{db}{d\sigma} + \frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma}\right) = 0 \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial w_\theta}{\partial \sigma} - \frac{1}{r}\frac{\partial w_\sigma}{\partial \theta} + w_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma}\right) = -2\omega\frac{dr}{d\sigma} \tag{2.25}$$

O conjunto das Equações (2.24) e (2.25), se resolvidas, fornecem a solução do problema *Blade-to-Blade*. Diversas metodologias podem ser utilizadas, como os métodos de elementos finitos e de diferenças finitas. Neste trabalho, porém, foi utilizado o método de painéis. Para facilitar sua aplicação, será empregada uma transformação da superfície S_1 no plano de uma grade linear, como será mostrado no tópico seguinte.

2.4 TRANSFORMAÇÃO DAS SUPERFÍCIES S_1 EM PLANOS DE GRADES LINEARES

Como já mencionado, diversos métodos podem ser utilizados para resolver o problema *Blade-to-Blade* diretamente. Porém, foi adotada neste trabalho uma transformação conforme que mapeia as superfícies S_1 em planos de grades lineares. A Figura 2.4 traz uma superfície S_1 genérica e um plano de uma grade linear.

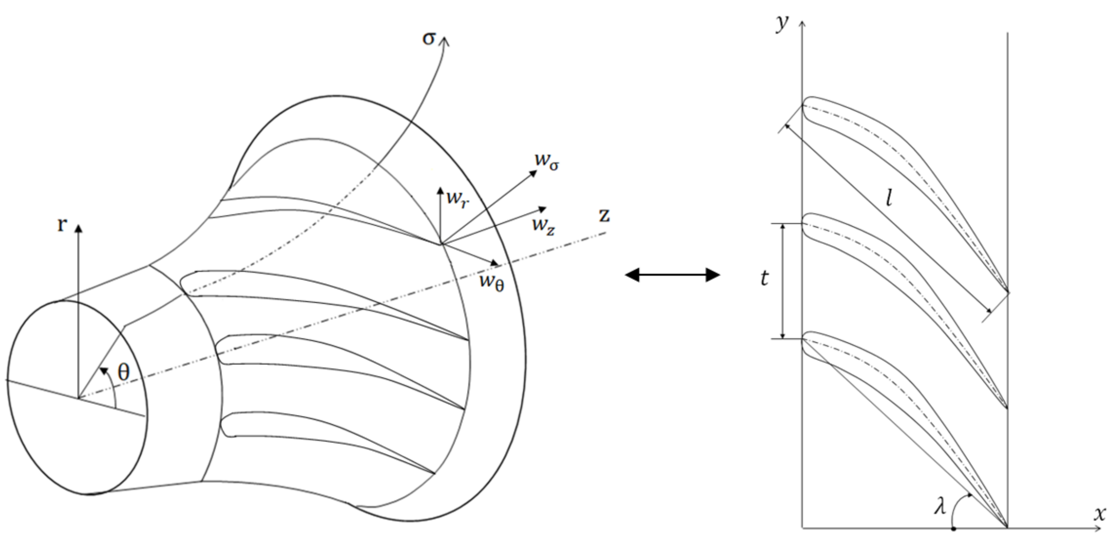

Figura 2.4 – Transformação da superfície S_1 em uma grade linear.

A superfície S_1 acima, de coordenadas (r, σ, φ) conhecidas, é então transformada em uma grade linear num plano (x, y). As equações que regem a transformação são (Eremeff, 1974):

$$x = l\, cos\lambda \left(\frac{1}{a_L} \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{r} \right) \tag{2.26}$$

$$y = \frac{l\, cos\lambda}{a_L}\, \varphi \tag{2.27}$$

onde, $a_L = \int_0^{\sigma_L} \frac{d\sigma}{r}$, $cos\lambda = \frac{a_L}{\sqrt{{a_L}^2 + {\varphi_L}^2}}$, l o comprimento da corda do perfil e L corresponde a um ponto do bordo de fuga da pá na superfície S_1.

O comprimento da corda serve como um fator de escala para a transformação, podendo ser escolhido arbitrariamente.

Com as funções $x(\sigma, r)$ e $y(\varphi)$ conhecidas, a superfície S_1 é transformada no plano de uma grade linear. Existe um espaçamento t entre pontos similares de duas pás consecutivas (ver Figura 2.4). Esse parâmetro é importante, pois ele depende do número de pás, e é desta forma que este efeito será introduzido na solução do problema *Blade-to-Blade*. O espaçamento t é obtido da seguinte maneira:

$$t = \frac{2\pi}{Z} \frac{l cos\lambda}{a_L} \tag{2.28}$$

em que Z é o número de pás e λ o ângulo que a corda faz com o eixo x do plano.

Similarmente, todas as velocidades que estão relacionadas com a superfície média do escoamento também devem ser transformadas para serem utilizadas no plano. A equação que relaciona as velocidades no plano da grade linear, c_{gl}, com as velocidades do rotor c_R, é:

$$c_{gl} = c_R \frac{2\pi}{tZ} r \tag{2.29}$$

Desta forma, as velocidades, V_x e V_y, do plano transformado ficam:

$$V_x = V_\sigma \frac{2\pi}{tZ} r \tag{2.30}$$

$$V_y = V_\theta \frac{2\pi}{t\,Z} r \tag{2.31}$$

Por fim, estas velocidades podem ser substituídas nas Equações (2.20) e (2.21) para se obter o sistema que deve ser resolvido no caso da grade linear. O sistema de equações se torna:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{b}\frac{db}{dx} V_x \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0 \tag{2.33}$$

A primeira das equações anteriores está relacionada com a conservação da massa e o termo a direita da igualdade, nesta equação, expressa o efeito da variação de largura entre as linhas de corrente do escoamento. Já a segunda equação representa a condição de irrotacionalidade do escoamento absoluto simplificando desta forma, as equações.

Capítulo 3

MÉTODO DE VÓRTICES CONCENTRADOS APLICADOS A PERFIS FINOS E ISOLADOS

3.1 FORMULAÇÃO GERAL

Considere o vórtice potencial da Figura 3.1, com intensidade no sentido horário colocado num ponto genérico de coordenadas (x_v, y_v). Note que este induz velocidades tangenciais, enquanto que as velocidades radiais são nulas. Tais velocidades podem, convenientemente, ser escritas em função das componentes cartesianas, *x* e *y*. Desta maneira, a velocidade induzida em um ponto P(x, y) qualquer do plano, por um único vórtice colocado no ponto (x_v, y_v) é (Katz e Plotkin, 1991):

$$\boldsymbol{V}_v = -\frac{\Gamma}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r^2}\big((y - y_v)\boldsymbol{i} - (x - x_v)\boldsymbol{j}\big) \tag{3.1}$$

onde *r* corresponde à distância do ponto de colocação do vórtice ao ponto P, e vale:

$$r = \sqrt{(x - x_v)^2 + (y - y_v)^2} \tag{3.2}$$

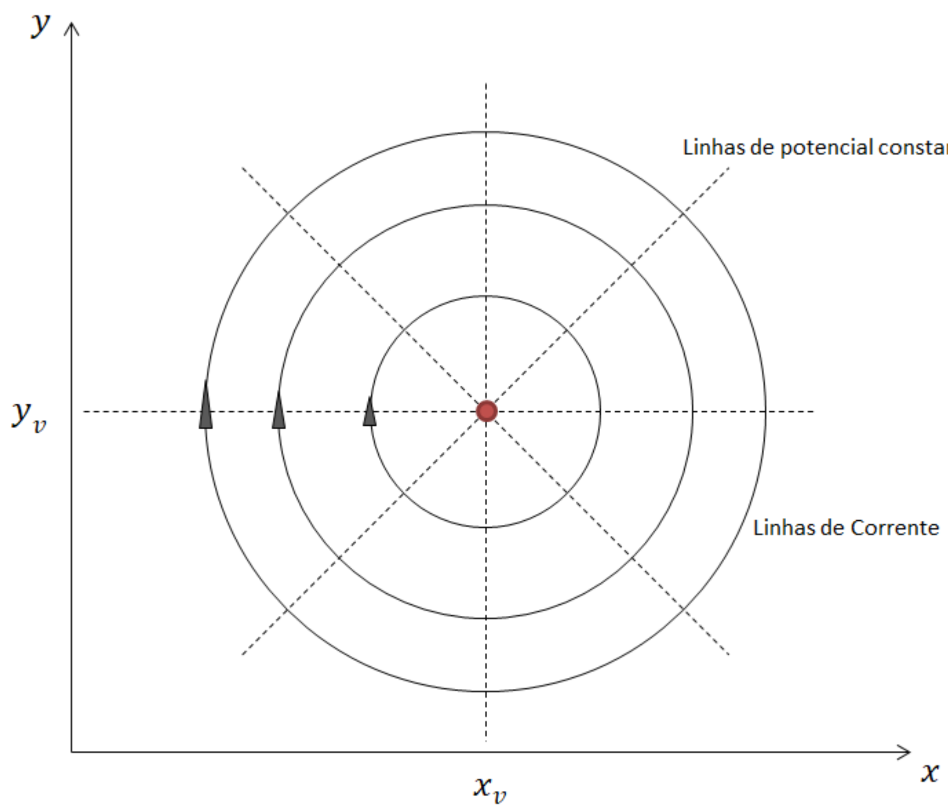

Figura 3.1 – Vórtice com suas linhas de corrente e de potencial constante.

Agora, considere um perfil qualquer dividido em *n* painéis (Figura 3.2). Em cada painel é colocado um vórtice de intensidade Γ_j, e um ponto de controle, de modo que se tenha *n* vórtices e *n* pontos de controle distribuídos pelo corpo. A velocidade induzida por todos os vórtices sobre um ponto de controle de coordenadas (x_{ci}, y_{ci}) será dada por:

$$\boldsymbol{V}_{vi} = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{K}_{ij}\, \Gamma_j \tag{3.3}$$

em que $\boldsymbol{K}_{ij}$ é um vetor que depende das coordenadas do ponto $\mathrm{P}(x, y)$, do ponto de colocação dos vórtices (x_{vj}, y_{vj}) e do ponto de controle (x_{ci}, y_{ci}).

$$\boldsymbol{K}_{ij} = \frac{(y_{ci} - y_{vj})}{(y_{ci} - y_{vj})^2 + (x_{ci} - x_{vj})^2}\,\boldsymbol{i} - \frac{(x_{ci} - x_{vi})}{(y_{ci} - y_{vj})^2 + (x_{ci} - x_{vj})^2}\,\boldsymbol{j} \tag{3.4}$$

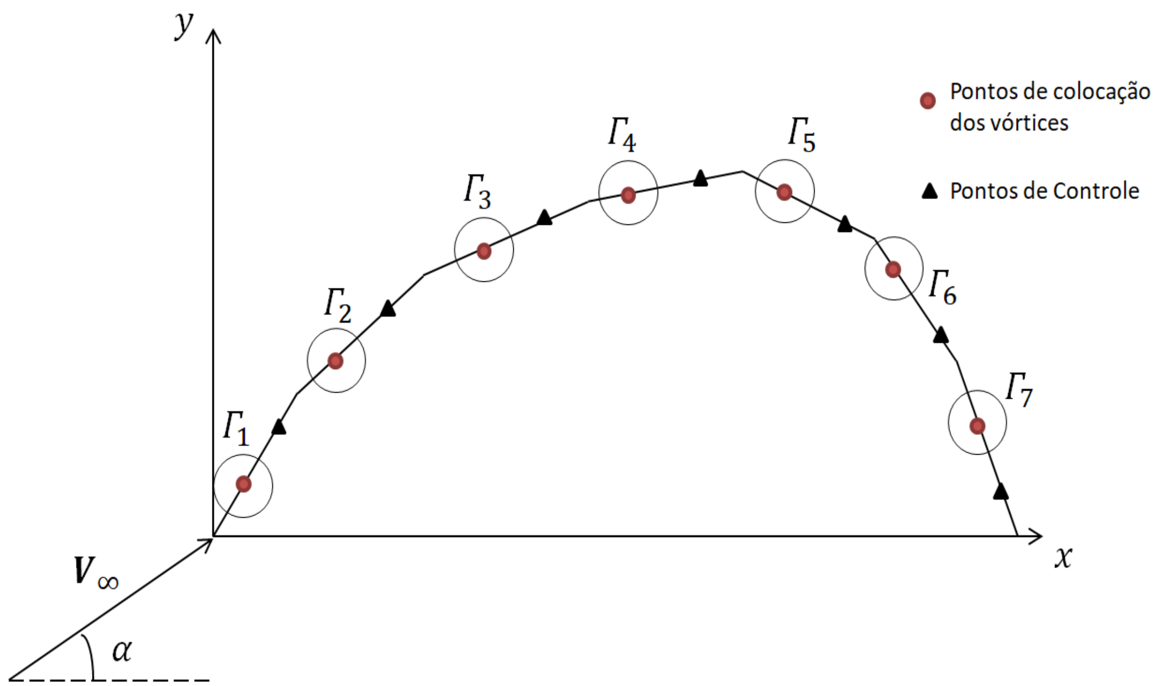

Figura 3.2 – Distribuição dos painéis e pontos de interesse.

Observe na Figura 3.2 que existe ainda uma velocidade incidente sobre o perfil, V_∞, com um ângulo de incidência, α. Assim, para calcular a velocidade total sobre um ponto de controle qualquer, deve-se somar a parcela da velocidade induzida pelos vórtices e a parcela da velocidade incidente. Desta maneira temos:

$$\boldsymbol{V}_{total_i} = \boldsymbol{V}_\infty + \boldsymbol{V}_{vi} = \boldsymbol{V}_\infty + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{K}_{ij}\,\Gamma_j \tag{3.5}$$

Tomando um painel isolado, como o da Figura 3.3, pode-se tomar um vetor normal, $\boldsymbol{n}_i$, e um tangencial, $\boldsymbol{t}_i$. Observe que o ângulo θ_i (Figura 3.3) é um parâmetro que depende somente das coordenadas dos pontos extremos dos painéis, (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_{i+1}).

Como se trata de um perfil sólido impenetrável, aplica-se a condição de contorno nos pontos de controle considerando que a velocidade normal é nula, pois não existe fluido atravessando o corpo (Condição de Neumann). Sendo assim, a expressão para a condição de contorno é:

$$\boldsymbol{V}_{total_i} \cdot \boldsymbol{n}_i = 0 \tag{3.6}$$

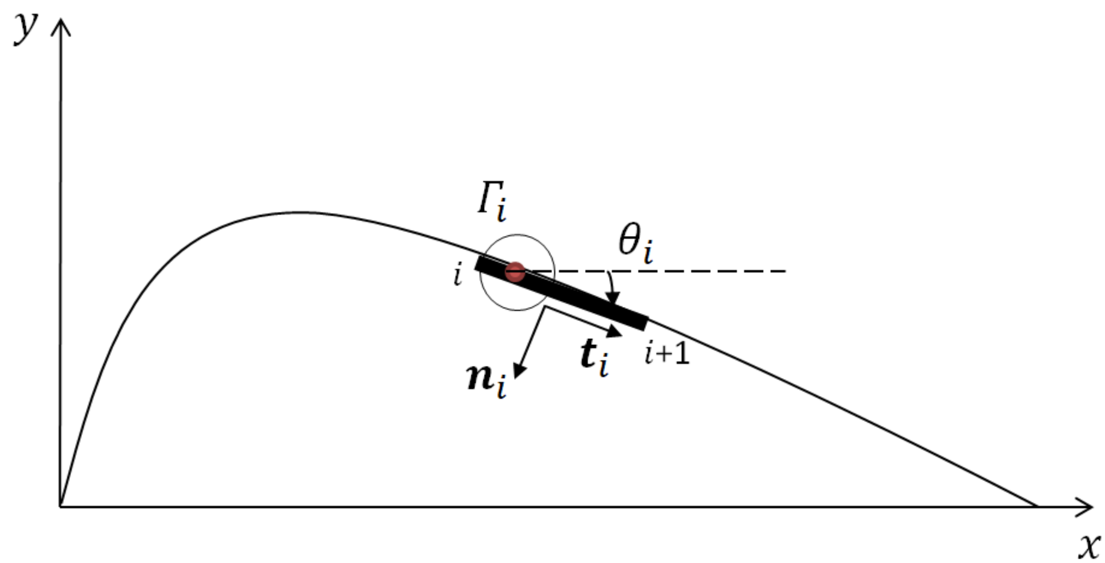

Figura 3.3 – Painel i e seus vetores normal, $\boldsymbol{n}_i$, tangencial, $\boldsymbol{t}_i$ e ângulo de inclinação θ_i.

Considerando o vetor não unitário $\boldsymbol{n}_i = \big((y_{i+1} - y_i), -(x_{i+1} - x_i) \big)$ e substituindo a Equação (3.5) na Equação (3.6), obtém-se um sistema linear com n equações e n incógnitas, as quais são correspondentes às intensidades dos vórtices colocados em cada painel. O sistema a ser resolvido, Equação (3.7), possui uma matriz que depende somente das coordenadas dos pontos extremos dos painéis, dos pontos de colocação dos vórtices e dos pontos de controle. Para uma melhor visualização, o termo $\frac{\Gamma}{2\pi}$ foi substituído por Γ^*.

$$\sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{K}_{ij} \cdot \boldsymbol{n}_i) \Gamma_j^* = -\boldsymbol{V}_\infty \cdot \boldsymbol{n}_i \tag{3.7}$$

O produto $\boldsymbol{K}_{ij} \cdot \boldsymbol{n}_i$ produz os elementos da chamada matriz de influência, $\boldsymbol{A}_{ij}$; já o produto escalar $-\boldsymbol{V}_\infty \cdot \boldsymbol{n}_i$ é o vetor de segundo membro, b_i, e Γ_j^* são as incógnitas. Neste trabalho, o sistema da Equação (3.8) foi solucionado pelo método de eliminação de Gauss com um esquema otimizado de condensação pivotal parcial.

$$\sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{A}_{ij}) \Gamma_j^* = b_i \tag{3.8}$$

Duas observações importantes do método de painéis utilizando vórtices concentrados valem ser citadas. Primeiramente, sobre a posição do vórtice e do ponto de controle sobre o painel. Neste caso, o vórtice deve vir antes do ponto de controle conforme se avança sobre o perfil. Além do mais, as posições em que foram colocados o vórtice e o ponto de controle de cada painel correspondem a 25% e 75% do comprimento do painel, respectivamente.

Por fim, a condição de Kutta, na qual o fluido não pode circular o bordo de fuga, não foi explicitamente imposta. Isto é uma característica do método de painéis utilizando vórtices concentrados: uma vez que o ponto de controle do último painel está muito próximo do bordo de fuga, a condição de Neumann praticamente garante que a velocidade normal no bordo de fuga será nula, especialmente quando se utiliza um número considerável de painéis.

3.2 SOLUÇÕES EXATAS A PARTIR DA TRANSFORMAÇÃO DE JOUKOWSKI

A transformação de Joukowski é utilizada para transformar um cilindro circular contido em um plano imaginário em um aerofólio, como mostra a Figura 3.4. Este é um método muito útil e largamente utilizado na aerodinâmica, pois apresenta solução exata utilizando os conceitos de função complexa (Katz e Plotkin, 1991). A função que rege a transformação é:

$$z = \zeta + \frac{C^2}{\zeta} \tag{3.9}$$

em que $4C$ representa a corda de um arco de círculo, placa plana ou, aproximadamente, de um aerofólio.

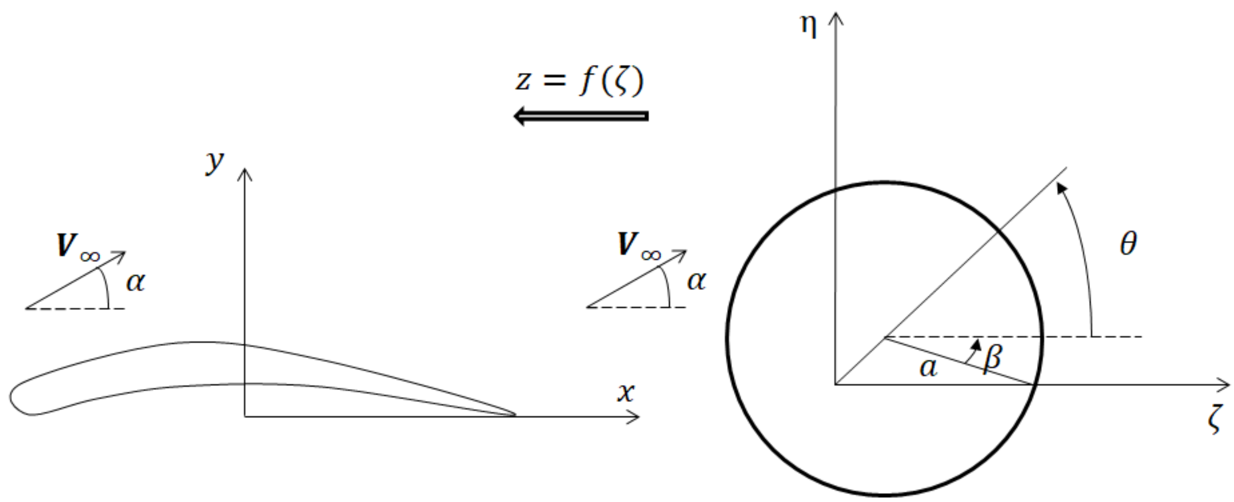

Figura 3.4 – Aerofólio no plano físico z transformado pelo círculo do plano imaginário ζ.

As velocidades para um cilindro circular, o qual está contido no plano imaginário, podem ser facilmente obtidas somando um dipolo e um escoamento uniforme. A expressão para a velocidade no cilindro no plano ζ em função do ângulo θ é dada por:

$$V(\theta) = 2V_\infty[sen(\alpha - \theta) - sen(\alpha + \beta)] \tag{3.10}$$

sendo V_∞ o módulo da velocidade incidente, α o ângulo da velocidade de incidência e β um parâmetro do círculo, o qual está representado na Figura 3.4.

A circulação do cilindro também pode ser obtida de forma exata com a aplicação da condição de Kutta quando o ângulo $\theta = -\beta$ para $V(\theta) = 0$. Assim, esta se torna:

$$\Gamma = 4\pi a V_\infty sen(\alpha + \beta) \tag{3.11}$$

onde a é o raio do cilindro circular.

Já as velocidades no aerofólio contido no plano físico podem ser relacionadas com as velocidades do cilindro a partir da derivada de z com relação à ζ.

$$V(z) = V(\zeta)\frac{1}{\frac{dz}{d\zeta}} \tag{3.12}$$

Desta maneira, observando o círculo genérico da Figura 3.4, pode-se obter dois resultados particulares dependentes da posição do círculo. Quando o círculo está na origem do sistema do plano ζ, o aerofólio se transforma em uma placa plana. Já quando este círculo é deslocado pelo eixo η, um arco de círculo começa a se formar como mostra a Figura 3.5. Observe ainda que o caso da placa plana é um caso particular do arco de círculo quando o parâmetro *m* vale zero.

Observe ainda pela Figura 3.5 que um ponto sobre o arco de círculo define dois pontos sobre o cilindro. Sendo assim, os pontos B e E do cilindro se juntam no mesmo ponto sobre o arco, por exemplo. Estes pontos são conhecidos uma vez que a equação que rege a transformação é conhecida; portanto, conhecido um ponto sobre o arco, este se transforma inversamente em dois pontos sobre o círculo. Assim, a velocidade sobre um ponto do arco de círculo é descontínua, e a diferença entre os módulos das velocidades transformadas em B e E equivale à densidade de vórtices procurada, $\frac{d\Gamma}{ds}$, ao longo do arco.

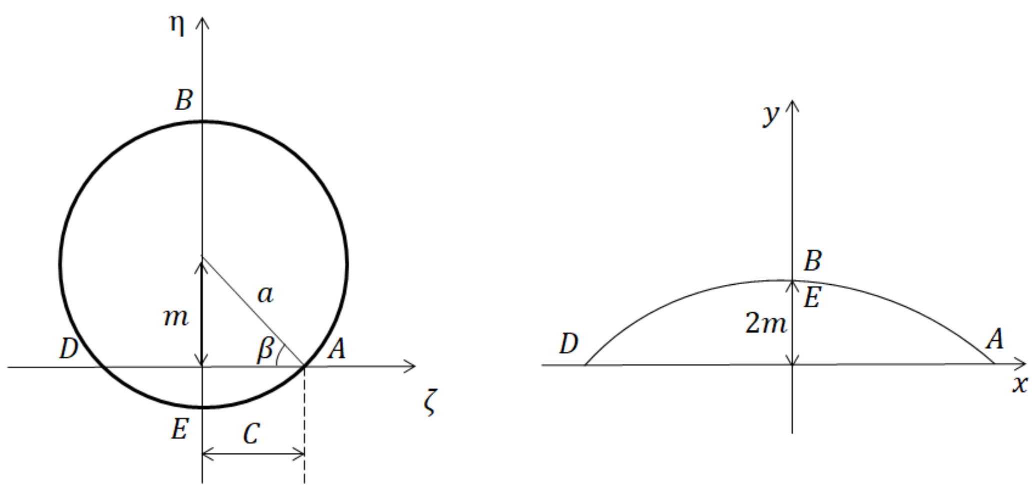

Figura 3.5 – Círculo deslocado de *im* no plano imaginário ζ se transformando em um arco de círculo com arqueamento *i2m* e corda *4C.*

3.3 RESULTADOS PARA PERFIS FINOS E ISOLADOS

Aqui os resultados foram divididos em duas partes. A primeira se refere à aplicação do método direto, ou seja, aquele em que a geometria é fornecida, bem como a velocidade incidente e o ângulo de ataque, sendo obtida a distribuição de vórtices. Na segunda parte, o método inverso é testado, sendo fornecida uma geometria qualquer, bem como uma distribuição de vórtices requerida, e assim uma geometria final é obtida, segundo uma tolerância pré-estabelecida.

3.3.1 Algoritmo do método direto

Neste caso foi desenvolvido um algoritmo que utiliza o método de painéis com vórtices concentrados como descrito na seção 3.1 deste trabalho. O fluxograma abaixo ilustra a sequência lógica utilizada para solução do problema.

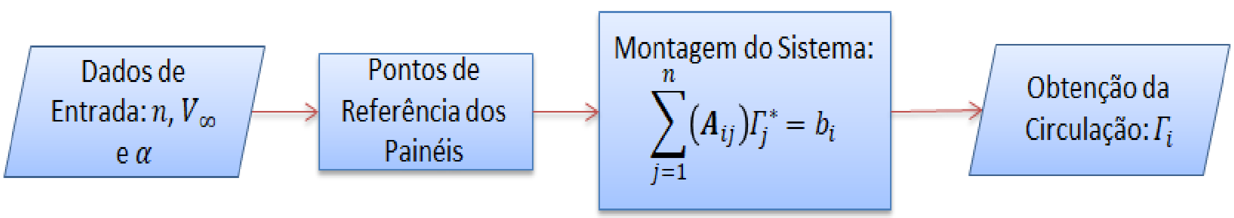

Figura 3.6 – Fluxograma do algoritmo do método direto.

O algoritmo começa com a leitura de diversos dados necessários ao programa, como o número de painéis, n, as coordenadas dos pontos extremos dos painéis, a velocidade incidente, V_∞ e o ângulo de incidência, α. Em seguida, os pontos de referência dos painéis são gerados: pontos extremos dos painéis, pontos de controle e pontos de colocação dos vórtices. Com isso, pode-se obter a matriz de influência e o vetor de segundo membro da Equação (3.8). Por fim, o sistema é solucionado, ou seja, a circulação de cada vórtice é determinada, assim como a circulação total sobre o perfil. O método de eliminação de Gauss foi empregado na solução. As soluções exatas mostradas no tópico anterior foram utilizadas para comparação dos resultados numéricos obtidos.

3.3.2 Resultados do método direto

Para validação do algoritmo do método direto, oito casos foram avaliados tanto para a geometria da placa plana como para uma placa curvada em formato de arco de círculo. A Tabela 3.1 ilustra todos os casos. Por conveniência, a placa curva em formato de arco de círculo está sendo chamada apenas de arco de círculo nos exemplos realizados.

Tabela 3.1 - Casos realizados no Método Direto.

Caso	Geometria	Ângulo de ataque	Número de Painéis	Figura
I	Placa Plana	5º	10	3.7
II	Placa Plana	5º	80	3.8
III	Placa Plana	10º	10	3.9
IV	Placa Plana	10º	80	3.10
V	Arco de Círculo	5º	10	3.11
VI	Arco de Círculo	5º	80	3.12
VII	Arco de Círculo	10º	10	3.13
VIII	Arco de Círculo	10º	80	3.14

Neste caso, as soluções exatas para cada painel foram calculadas pelas Equações (3.10), (3.11) e (3.12). Para efeito de comparação, é importante ressaltar que a densidade de vórtices discreta $\gamma = \frac{\Gamma}{\Delta s}$ é associada aos pontos de colocação dos vórtices e que o módulo da velocidade incidente vale a unidade, $V_\infty = 1{,}0$. Nos casos envolvendo a placa curvada em formato de arco de círculo, o arqueamento corresponde a 10% do valor da corda. A associação das densidades discretas com os pontos de colocação dos vórtices sempre se mostrou mais exata que a associação com os pontos de controle.

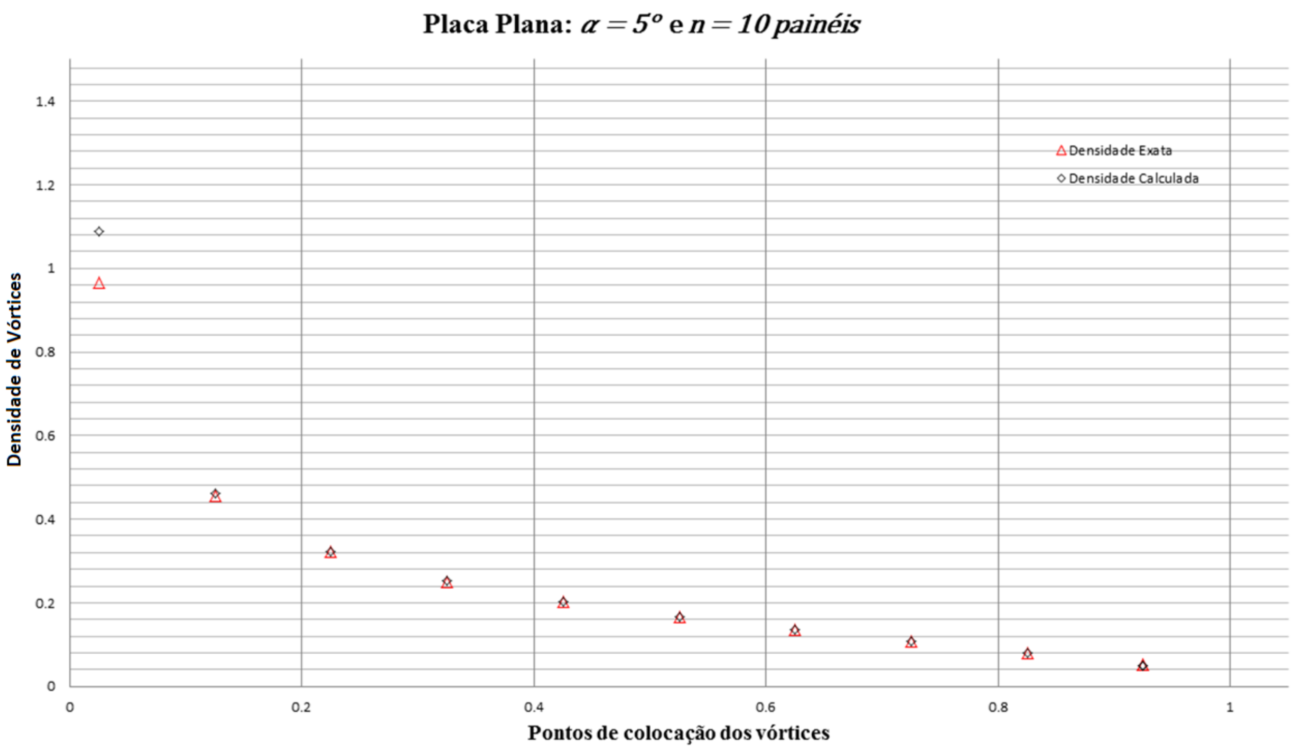

Figura 3.7 – Densidade de vórtices para uma placa plana com $\alpha = 5°$ e $n = 10$ painéis.

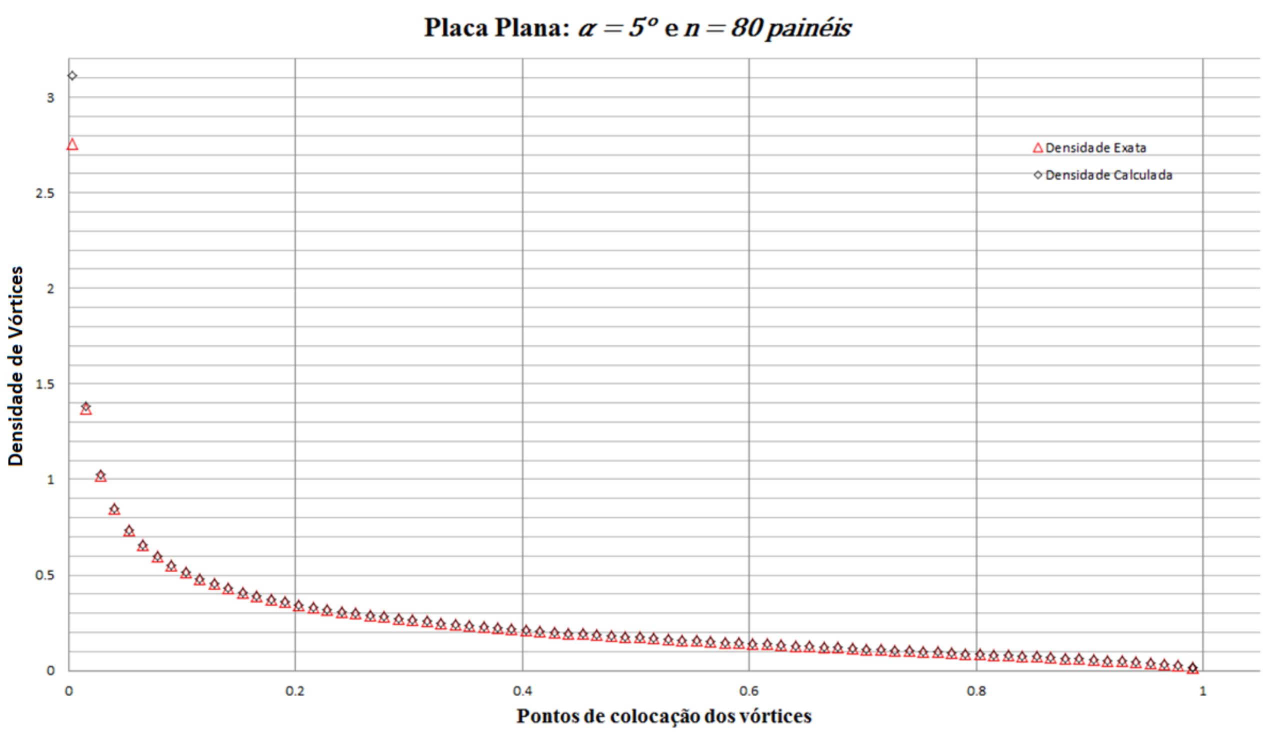

Figura 3.8 – Densidade de vórtices para uma placa plana com $\alpha = 5°$ e $n = 80$ painéis.

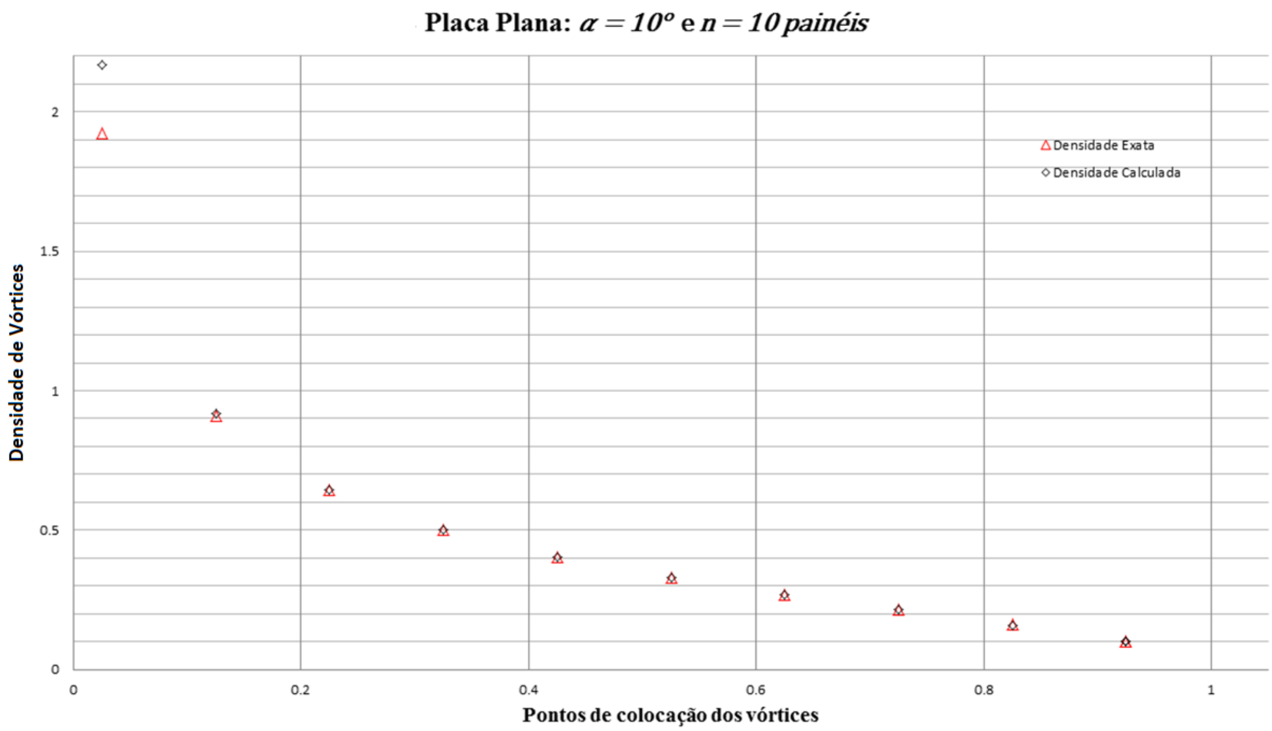

Figura 3.9 – Densidade de vórtices para uma placa plana com $\alpha = 10°$e $n = 10$ painéis.

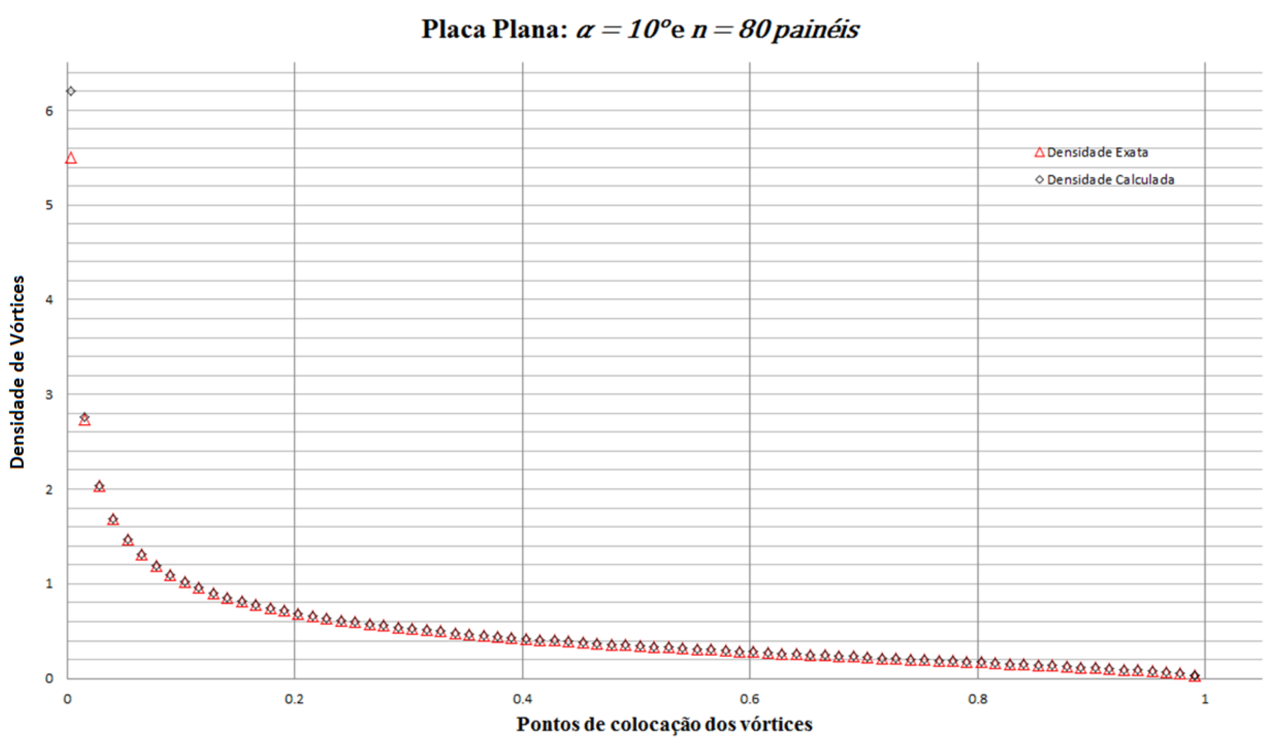

Figura 3.10 – Densidade de vórtices para uma placa plana com $\alpha = 10°$ e $n = 80$ painéis.

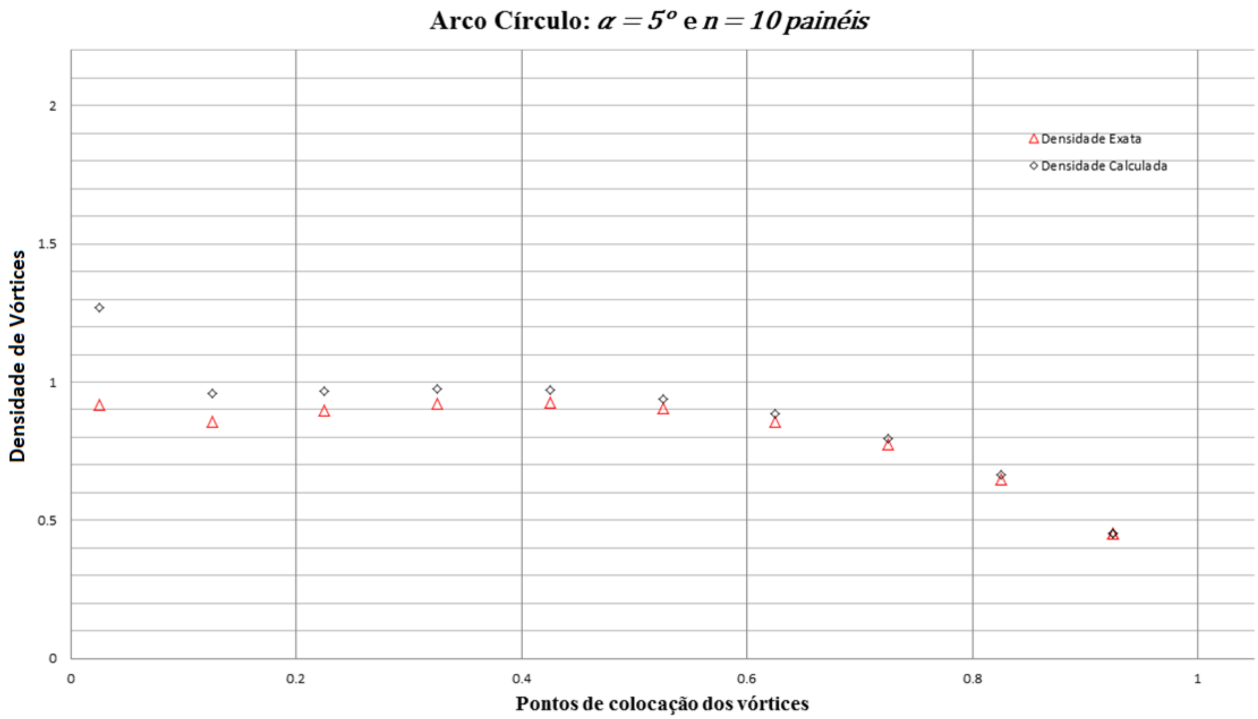

Figura 3.11 – Densidade de vórtices para um arco de círculo com $\alpha = 5°$ e $n = 10$ painéis.

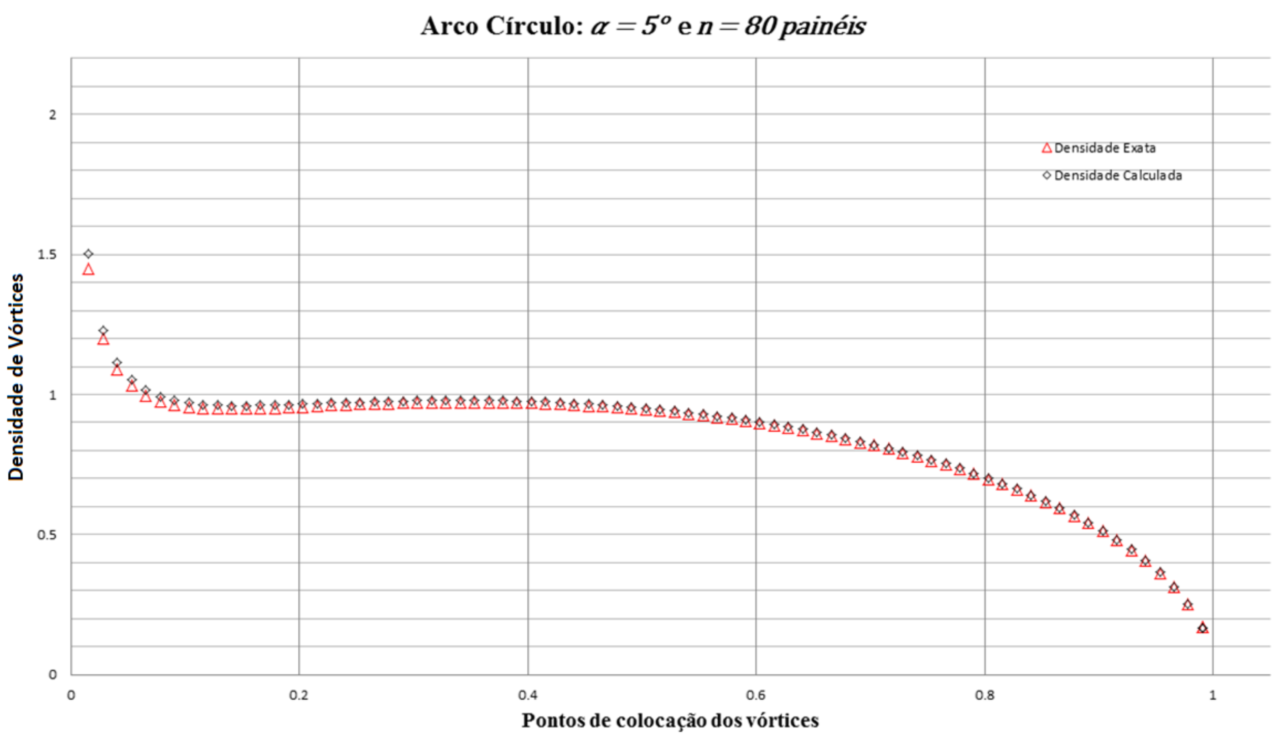

Figura 3.12 – Densidade de vórtices para um arco de círculo com $\alpha = 5°$ e $n = 80$ painéis.

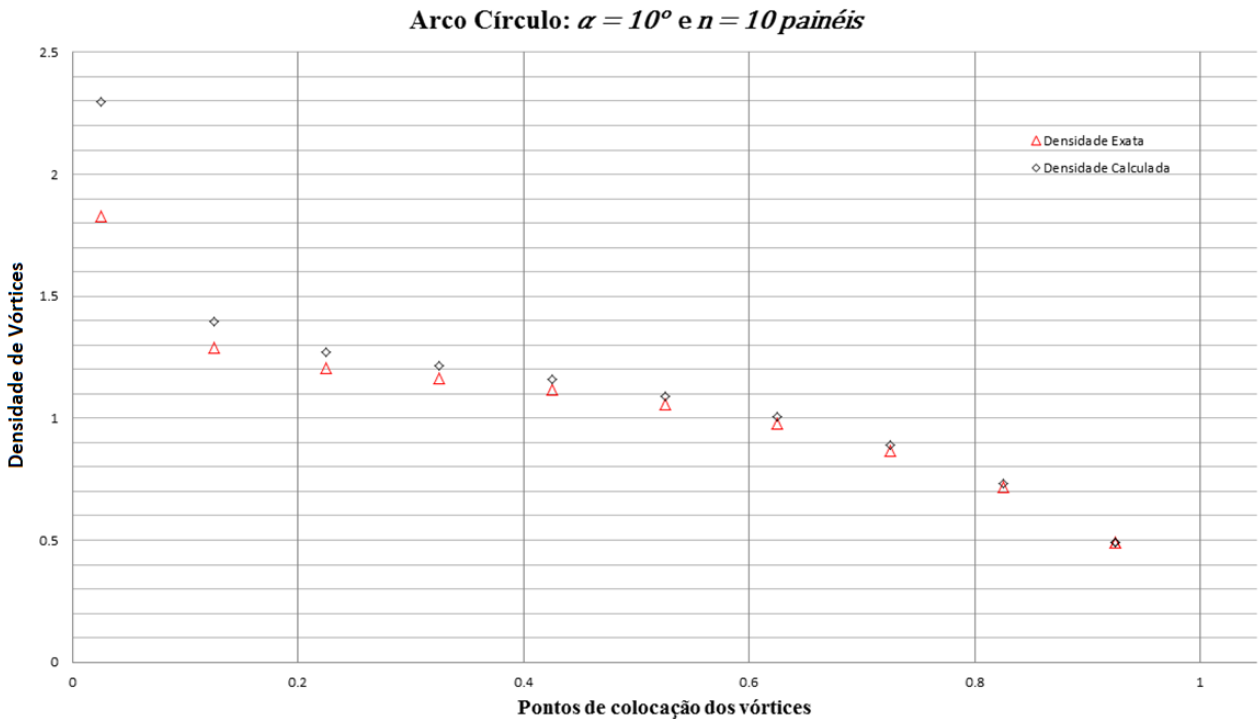

Figura 3.13 – Densidade de vórtices para um arco de círculo com $\alpha = 10°$ e $n = 10$ painéis.

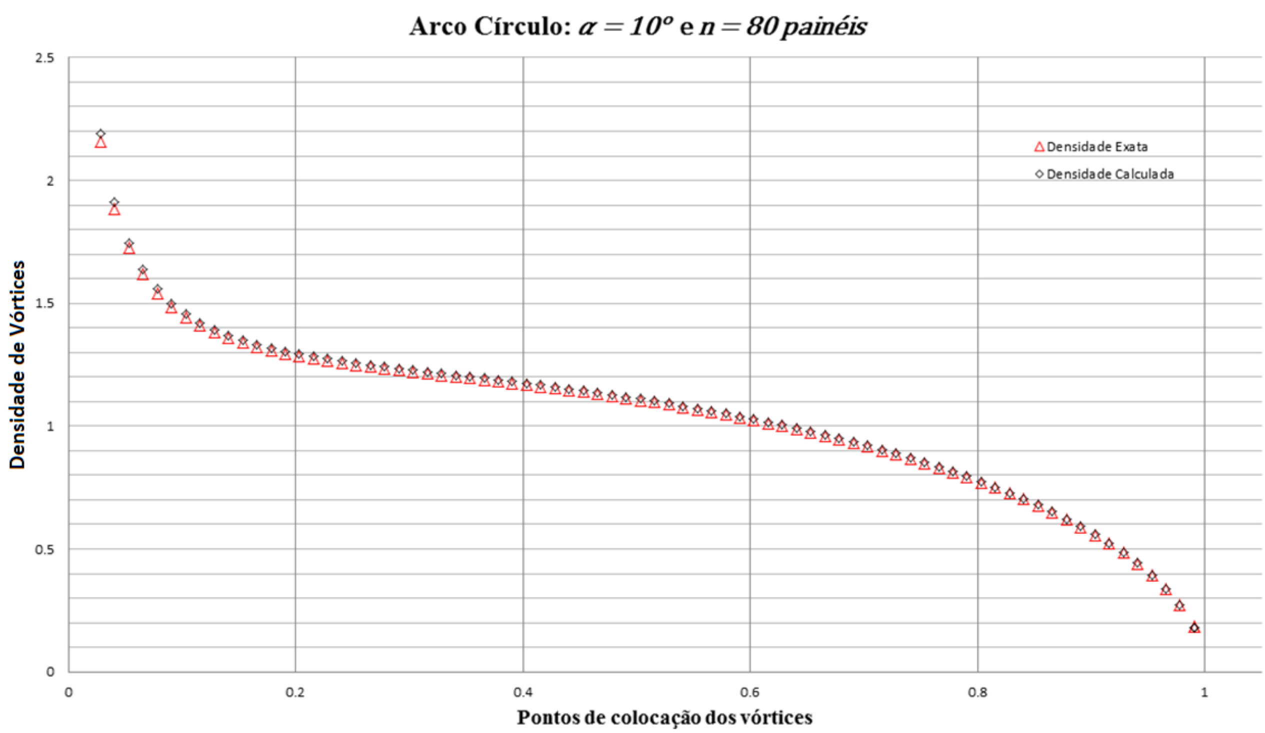

Figura 3.14 – Densidade de vórtices para um arco de círculo com $\alpha = 10°$ e $n = 80$ painéis.

Observando os casos da placa plana, Figuras 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10, é possível notar que a solução calculada pelo método de vórtices concentrados se encontra muito próxima da solução exata. Com o aumento do número de painéis, Figuras 3.8 e 3.10, o método vai se tornando mais preciso. O mesmo foi observado para os casos da placa curvada em formato de arco de círculo, Figuras 3.11, 3.12, 3.13 e 3.14.

3.3.3 Algoritmo do método inverso

Para o caso inverso, foi desenvolvido um algoritmo que resulta em uma geometria para atender a uma determinada distribuição de circulações pré-estabelecida. A Figura 3.15 mostra a estrutura do algoritmo desenvolvido.

Como no caso anterior, o programa recebe o valor de alguns dados: número de painéis, velocidade incidente, ângulo de ataque. Entretanto, devido ao algoritmo ser inverso, a circulação requerida, ou seja, aquela que se deseja obter em cada painel, também é fornecida.

O algoritmo parte de uma geometria inicial, em princípio, qualquer. Esta serve de base para que os pontos de referência dos painéis sejam gerados. Por exemplo, podem ser fornecidas as coordenadas de uma placa plana e, com isso os pontos de controle e pontos de colocação dos vórtices são obtidos.

Em seguida, com todos os painéis conhecidos, o sistema da Equação (3.8) é novamente formado e solucionado para obtenção da circulação em cada painel. Desta forma, uma comparação em cada painel *i* pode ser realizada entre a circulação requerida, $\boldsymbol{\Gamma}_{req}$, e aquela referente à geometria inicial utilizada, $\boldsymbol{\Gamma}_{i}$. Uma tolerância, *tol*, pode ser especificada de acordo com a precisão que se deseja obter do algoritmo.

Se a tolerância é atingida, o programa fornece uma geometria final e se encerra. Caso contrário, uma modificação dos painéis deve ser realizada a fim de corrigir esta diferença entre as circulações calculada e requerida.

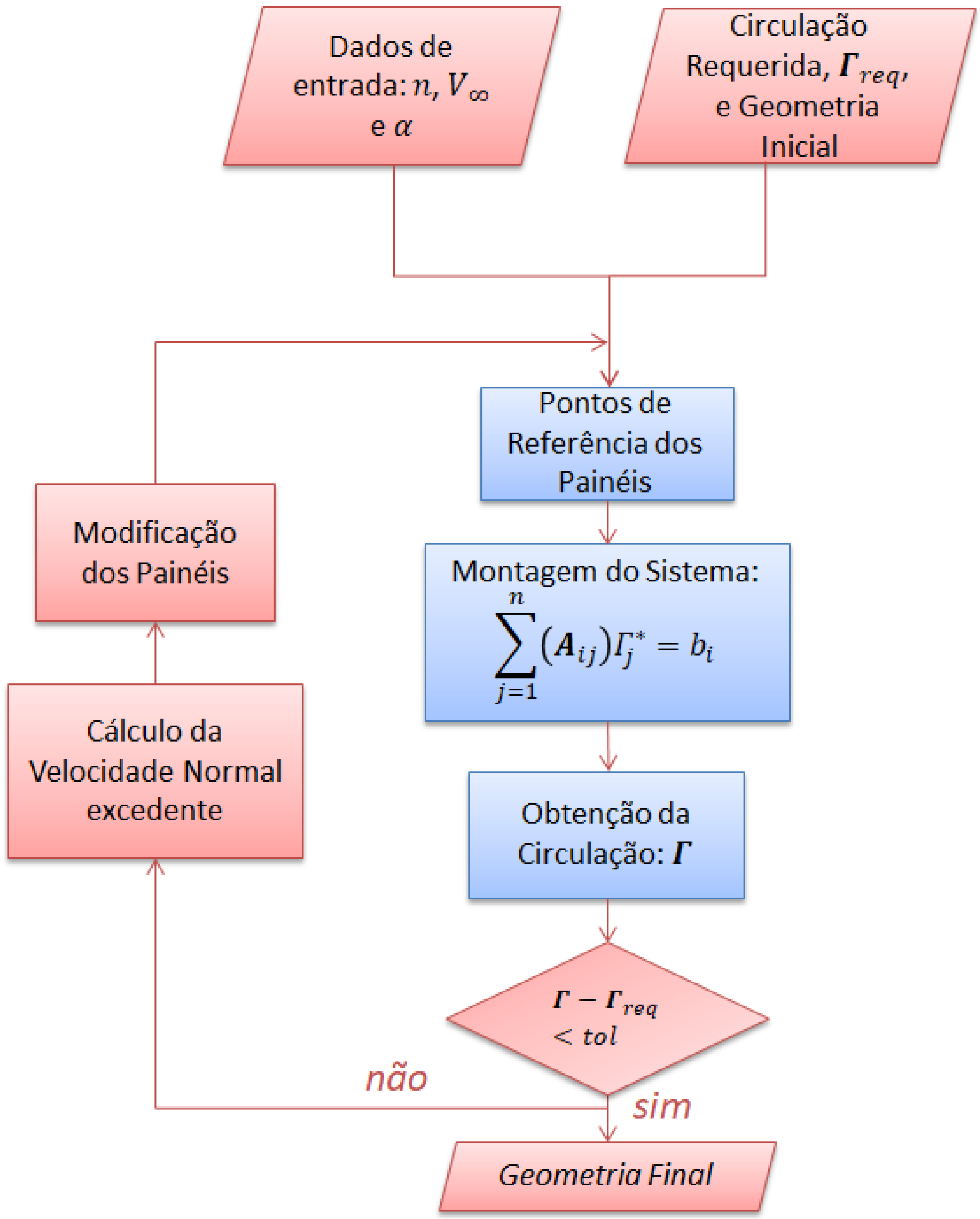

Figura 3.15 – Fluxograma do algoritmo do Método Inverso.

A Figura 3.16 ilustra um painel j com um ângulo de inclinação θ_j e também este mesmo painel com sua ordenada já modificada. Tal modificação depende das velocidades calculadas no ponto de controle (ponto vermelho da Figura 3.16), porém estas velocidades são relativas àquela diferença entre as circulações requerida e calculada. Fazendo uma relação geométrica entre os triângulos formados no painel e no triângulo de velocidades, pode-se obter a diferença δ_{y_j} com que a ordenada deve ser modificada:

$$\delta_{y_j} = \frac{V_{n_{y_j}}}{\left|V_{t_j}\right|} \Delta s_j \tag{3.12}$$

onde V_{t_j} representa o componente tangencial da velocidade no painel; Δs_j o comprimento do painel e δ_{y_j} o deslocamento adicional na direção y do painel.

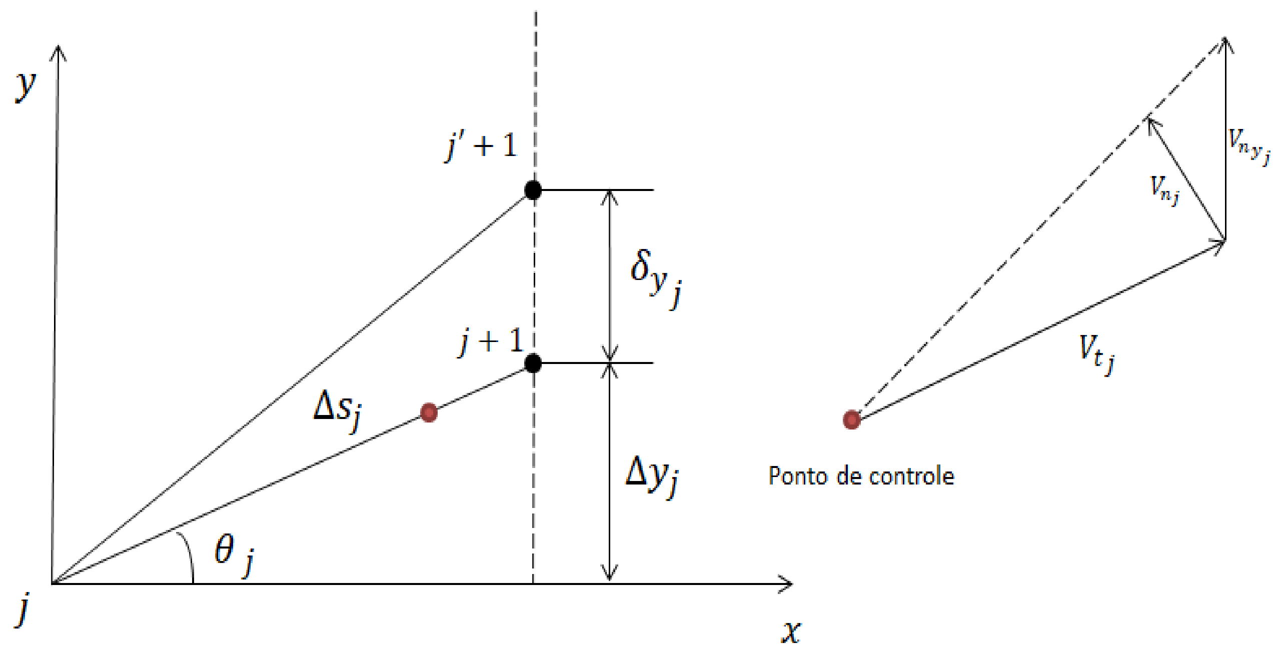

Figura 3.16 – Esquema para a alteração da inclinação do painel *j*.

Este processo de modificação é realizado para todos os painéis, de modo que a correção das ordenadas deve ser cumulativa: em outras palavras, toda vez que um painel tiver sua posição corrigida, o painel seguinte deve carregar tanto a correção do painel anterior como a dele mesmo, até que se chegue ao último painel. Observe que somente as ordenadas são corrigidas, enquanto que as abscissas dos painéis permanecem constantes.

Depois de realizada a correção da geometria, o algoritmo irá refazer todo o procedimento já descrito até que a tolerância seja satisfeita, ou que um número máximo de iterações pré-estabelecido seja alcançado.

3.3.4 Resultados do método inverso

O método inverso descrito na seção 3.3.3 destina-se a uma aplicação importante na busca pela geometria de perfis em grades de turbomáquinas. Nessas situações, uma das condições de projeto típica é que o escoamento deve incidir sobre o perfil sem choque, ou seja, a circulação no bordo de ataque deve ser nula. Sendo assim, os casos expostos utilizam um ângulo de incidência, $\alpha = 0°$, que corresponde à condição sem choque para a placa plana e para a placa plana em formato de arco de círculo.

Para validação do método inverso, alguns testes também foram realizados e a Tabela 3.2 indica todos os casos. Novamente, por conveniência, as placas em formato de parábola, arco de círculo e inclinada foram chamadas de parábola, arco de círculo e placa inclinada, respectivamente.

Tabela 3.2 - Testes realizados para validação do algoritmo do Método Inverso.

Caso	Geometria Inicial	Geometria Final	Número Painéis	Figura
I	Placa Plana	Arco de Círculo	20	3.17
II	Placa Plana	Arco de Círculo	80	3.18
III	Placa Inclinada	Arco de Círculo	20	3.19
IV	Parábola	Arco de Círculo	20	3.20
V	Parábola	Arco de Círculo	80	3.21
VI	Arco de Círculo	Placa Plana	80	3.22
VII	Parábola	Placa Plana	80	3.23

Todos os gráficos das Figuras 3.17 a 3.23 foram construídos de forma a mostrar a geometria inicial, a geometria requerida e a geometria final (chamado de alvo nos gráficos). Além do mais, mostrou-se o resultado da segunda iteração para todos os casos. Em todos estes a convergência foi extremamente rápida; em menos de quatro iterações a diferença entre as circulações requerida e calculada foi da ordem de 10^{-5} entre as circulações calculadas e requeridas.

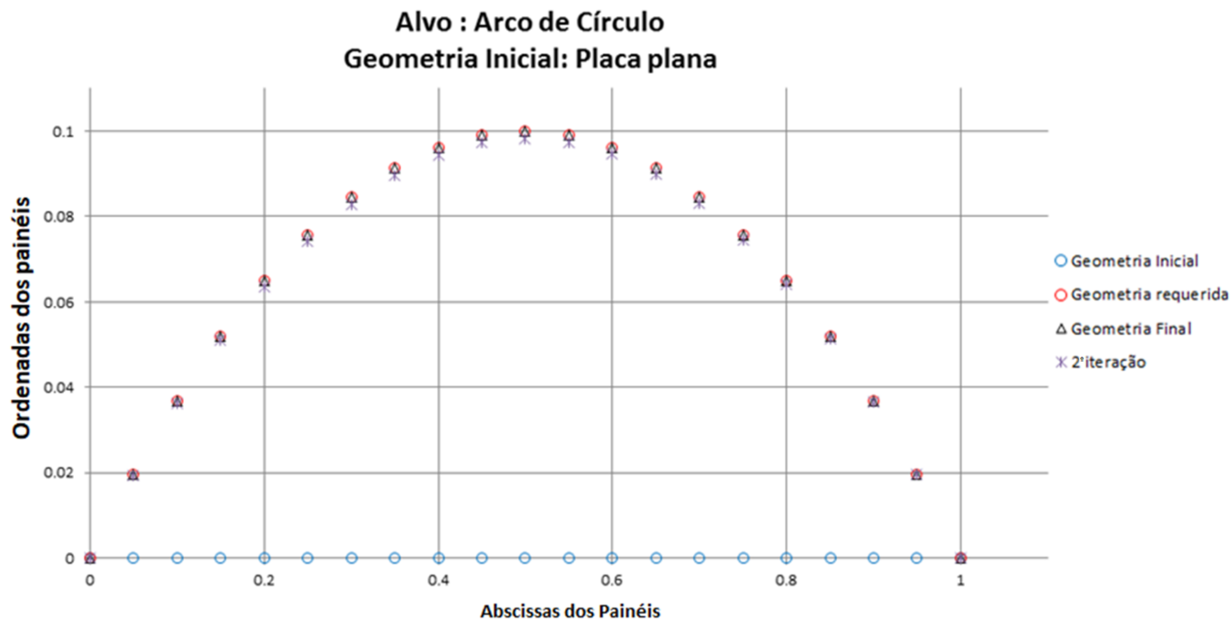

Figura 3.17 – Arco de Círculo obtido a partir de uma placa plana com $n = 20$ painéis.

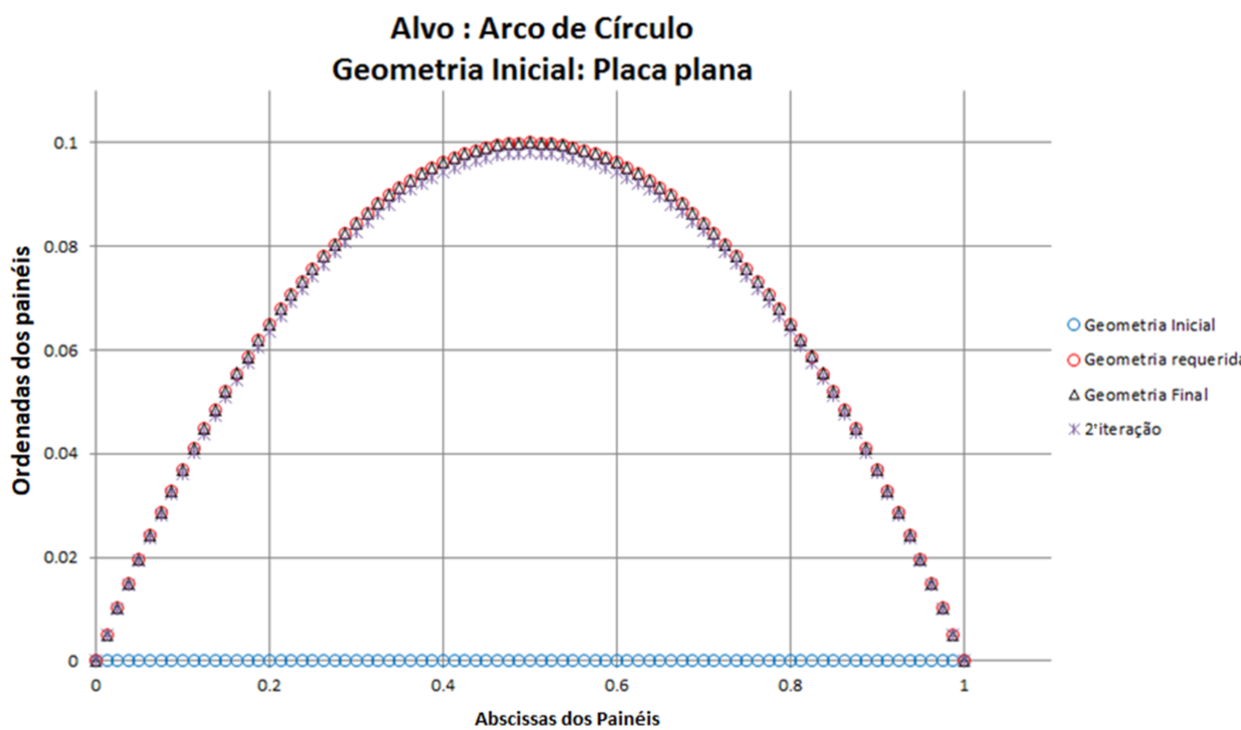

Figura 3.18 – Arco de Círculo obtido a partir de uma placa plana com $n = 80$ painéis.

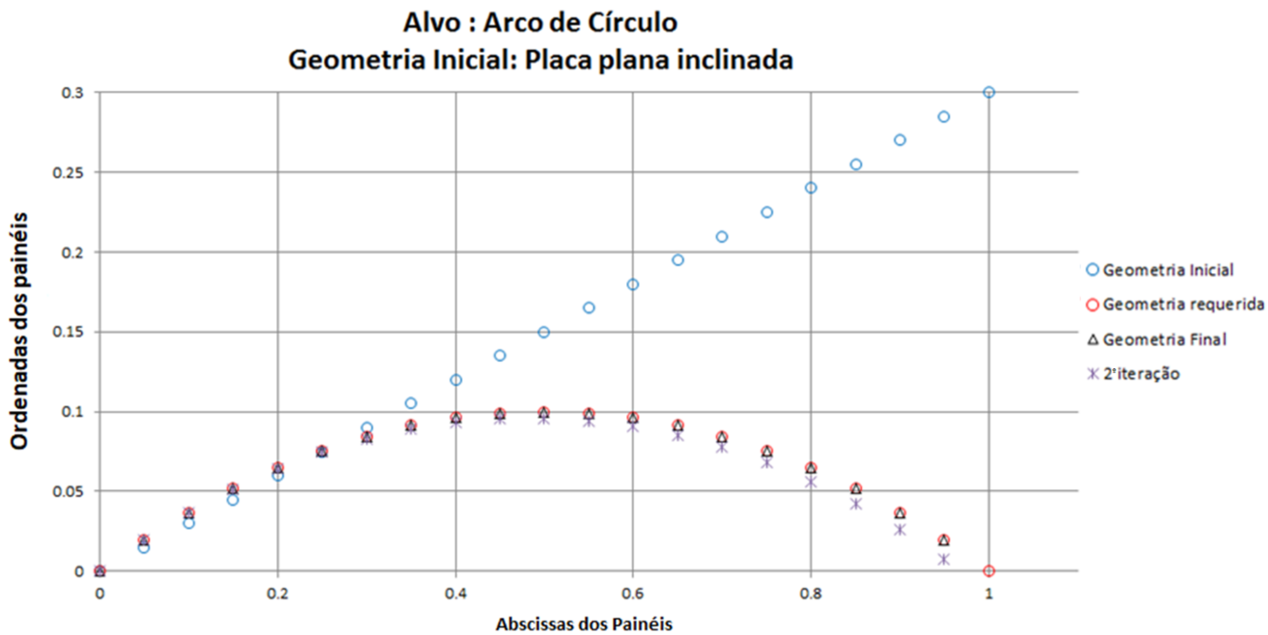

Figura 3.19 - Arco de Círculo obtido a partir de uma placa inclinada com $n = 20$ painéis.

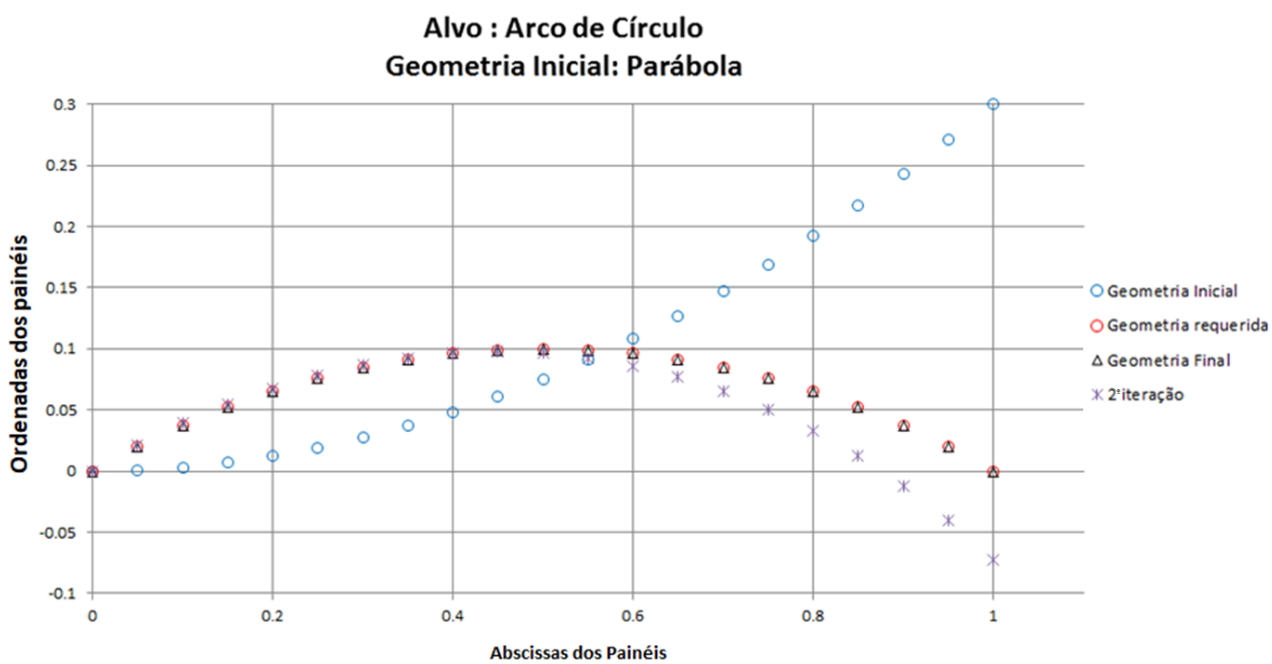

Figura 3.20 – Arco de Círculo obtido a partir de uma parábola com $n = 20$ painéis.

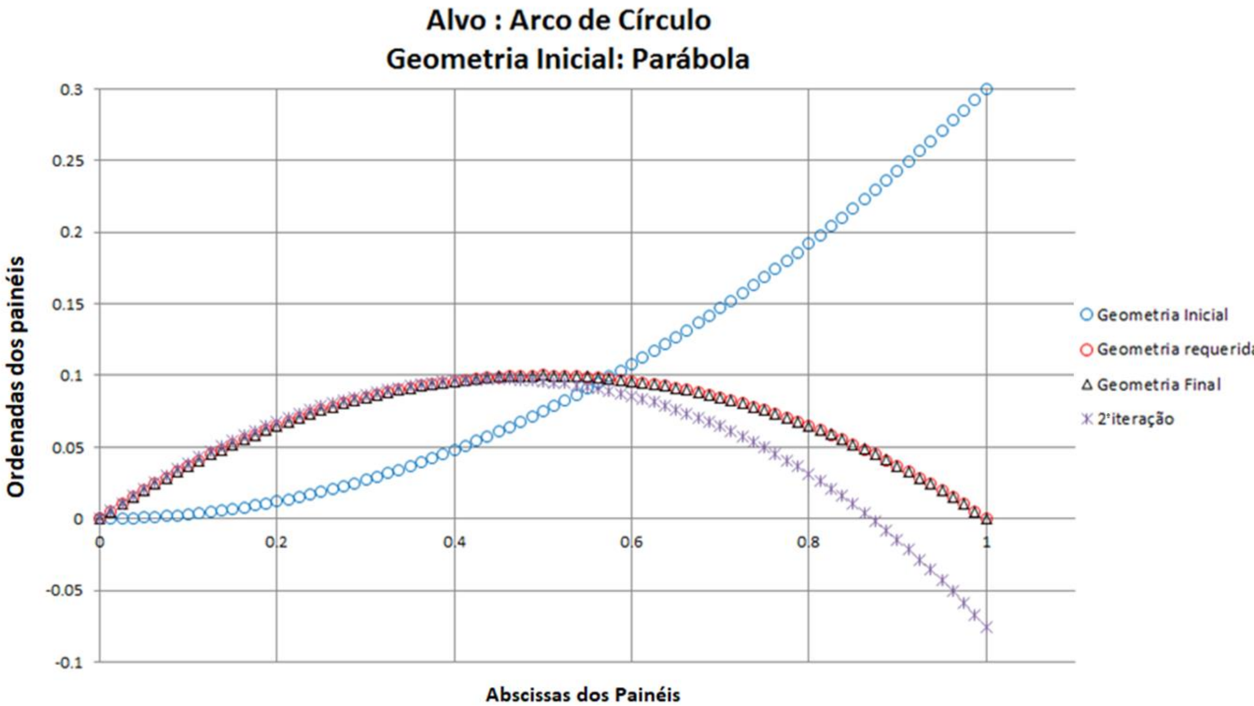

Figura 3.21 – Arco de Círculo obtido a partir de uma parábola com $n = 80$ painéis.

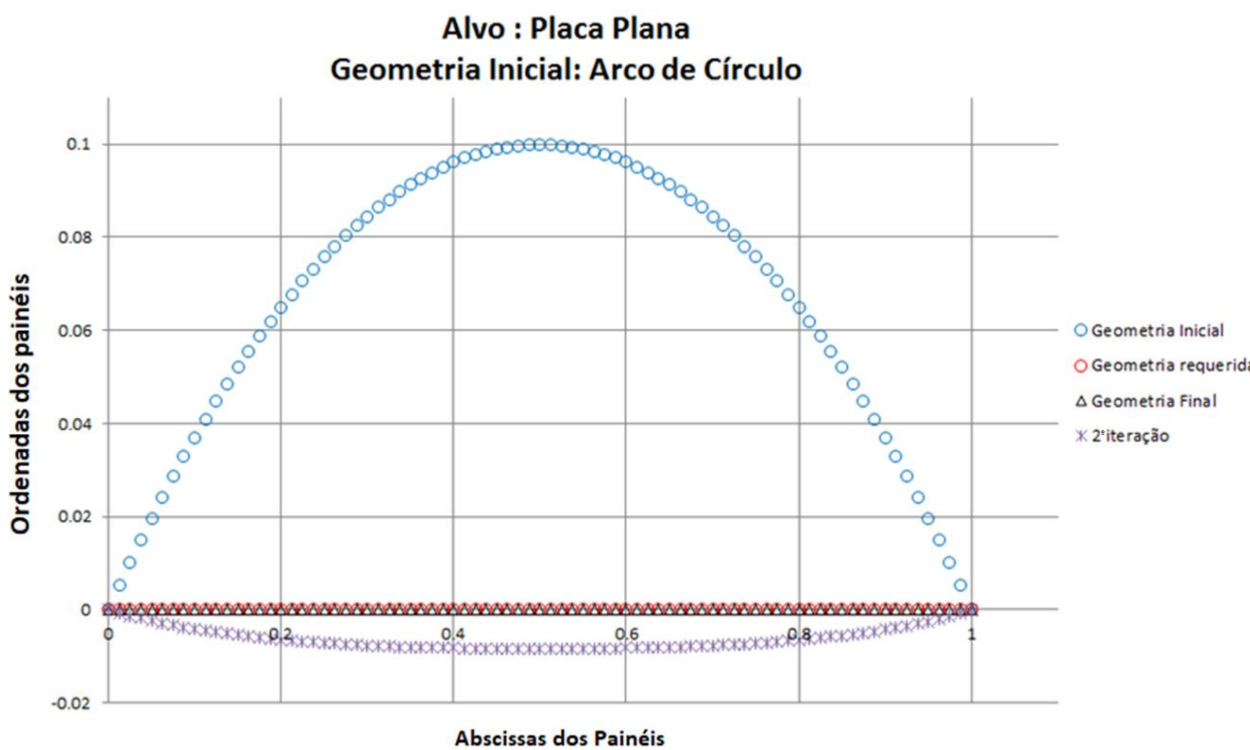

Figura 3.22 – Placa plana obtida a partir de um arco de círculo com $n = 80$ painéis.

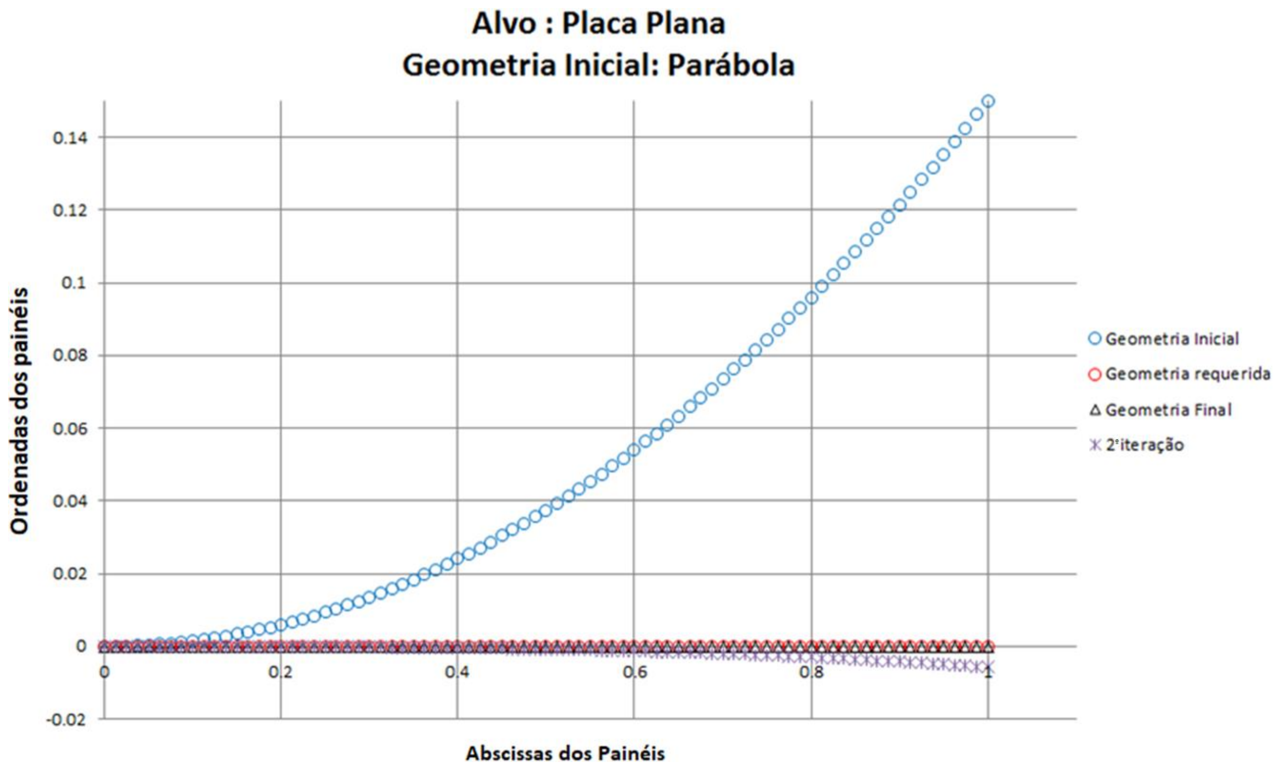

Figura 3.23 – Placa plana obtida a partir de uma parábola com $n = 80$ painéis.

Capítulo 4

MÉTODO DE VÓRTICES CONCENTRADOS APLICADO A GRADES LINEARES

4.1 FORMULAÇÃO GERAL

As grades lineares são modeladas como se existissem infinitas pás igualmente espaçadas por uma distância *t*. Note que esta distância é sempre a mesma para quaisquer dois pontos similares entre as pás. Existe ainda a distância entre o bordo de ataque e o bordo de fuga da pá, comprimento denominado como corda do perfil, *l*. A razão entre esta corda e o espaçamento é denominada de razão de solidez:

$$s = \frac{l}{t} \tag{4.1}$$

Considere então a grade de uma turbomáquina apresentada na Figura 4.1. Outros efeitos devem ser acrescentados: efeito de grade, da rotação e da variação de largura entre as linhas de corrente.

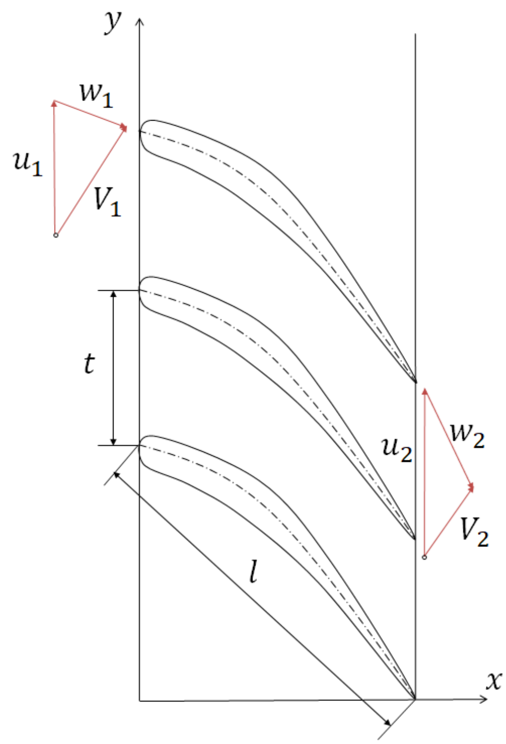

Figura 4.1 – Grade linear de uma máquina de fluxo.

No caso das grades de rotores de turbomáquinas, diferentemente das grades fixas e dos perfis isolados, a velocidade relativa, $\boldsymbol{w}$, deve ser levada em consideração na condição de impenetrabilidade do escoamento sobre o perfil, ou seja, a velocidade normal relativa ao perfil é nula. Sendo assim, do triângulo de velocidades, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{u}$ (Figura 4.1), pode-se escrever a condição de contorno:

$$(\boldsymbol{V}_{total_i} - \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n}_i = 0 \tag{4.2}$$

onde $\boldsymbol{V}_{total_i}$ é a soma de todas as velocidades absolutas atuantes em um ponto de controle i.

Essa velocidade total possui as seguintes componentes:

- A velocidade incidente, $\boldsymbol{V}_\infty$, continua sendo utilizada, porém agora esta é a média vetorial entre a velocidade de entrada, $\boldsymbol{V}_1$, e de saída, $\boldsymbol{V}_2$, do perfil:

$$\boldsymbol{V}_{\infty} = \frac{\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2}{2} \tag{4.3}$$

- A velocidade $\boldsymbol{V}_{vi}$ corresponde à velocidade que está sendo induzida pelas fileiras de vórtices sobre um ponto de controle i.
- A velocidade $\boldsymbol{V}_b$ que leva em conta o efeito da variação de largura.

Tais efeitos serão mostrados com maiores detalhes nos próximos itens. Desta forma, a velocidade total é escrita como:

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{total}_{\boldsymbol{i}}} = \boldsymbol{V}_{\infty} + \boldsymbol{V}_{vi} + \boldsymbol{V}_b \tag{4.4}$$

4.1.1 Efeito de grade

Considere então novamente uma grade linear como a ilustrada na Figura 4.2. Ao vórtice colocado em um ponto P de uma pá de referência corresponde uma infinidade de vórtices equivalentes colocados nos pontos similares das demais pás espaçadas da distância *t*. Pode-se então determinar a velocidade que toda a fileira de vórtices induz em um ponto qualquer do domínio do problema (ponto *z*).

Tal velocidade é denominada de velocidade complexa conjugada induzida e é expressa como (Gostelow, 1984):

$$\overline{V_z} = \frac{i\Gamma}{2t} cotgh\left(\frac{\pi}{t}(z - \zeta)\right) \tag{4.5}$$

Considerando a montagem do sistema de equações do método de painéis, os pontos *z* corresponderiam aos pontos de controle e os pontos ζ seriam os pontos de colocação que representam toda uma fileira de vórtices de intensidade Γ.

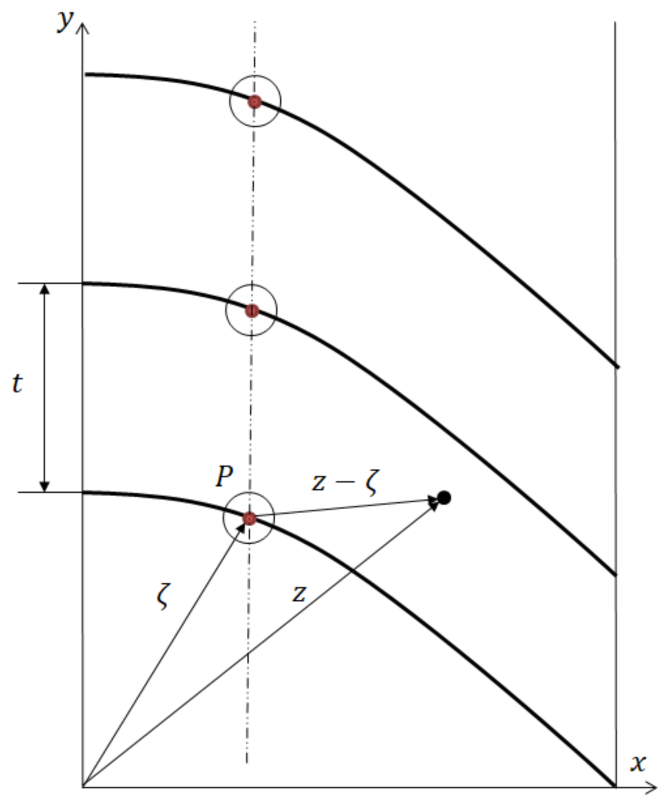

Figura 4.2 – Grade linear mostrando uma fileira de vórtices.

Na prática, tudo se passa como se a grade fosse modelada por um único perfil, porém os pontos dos vórtices correspondem agora a toda fileira ao invés de um único vórtice. Desta forma, torna-se necessário calcular a velocidade que todas as fileiras (pontos ζ) induzem em um ponto de controle. No caso de distribuições contínuas de vórtices a velocidade ficaria como:

$$\overline{V_z} = \frac{i}{2t} \oint cotgh\left(\frac{\pi}{t}(z - \zeta)\right)\gamma(\sigma)d\sigma \tag{4.6}$$

sendo que σ é a coordenada ao longo da superfície da pá.

Pode-se então, convenientemente, escrever a velocidade conjugada induzida na forma de suas componentes, u e v, pois como no caso de um perfil fino e isolado, estas servem de base para compor a matriz de influência. Note-se que $\overline{V_z} = u - iv$, ou seja, u é a parte real da velocidade induzida e $-v$ a parte imaginária.

4.1.2 Efeito da variação de largura

Outro importante efeito a ser considerado é o efeito da variação de largura entre as linhas de corrente do escoamento. Nas máquinas de fluxo, a distância entre duas linhas de corrente próximas não permanecerá sempre constante. A Figura 4.3 ilustra tal situação e, pode ser observado, que entre duas linhas de corrente, a largura entre elas vai variando ao longo do eixo da máquina.

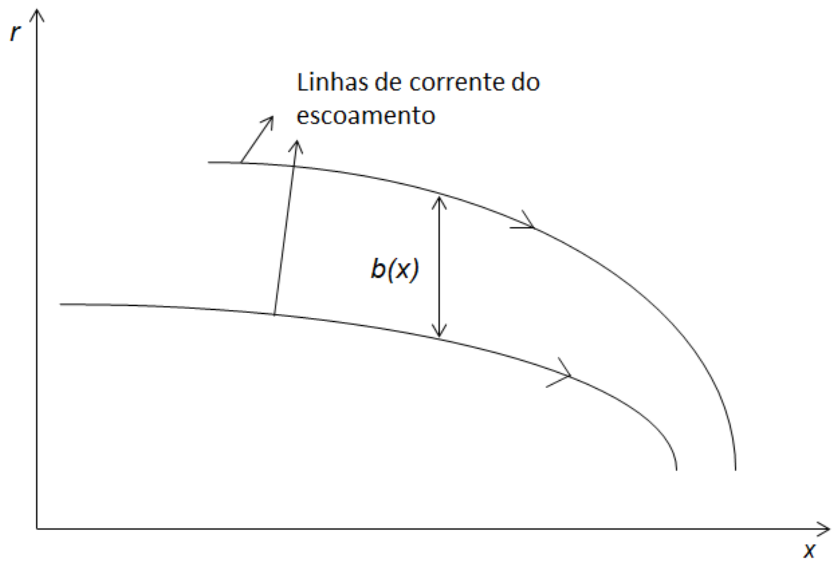

Figura 4.3 – Variação da largura entre duas linhas de corrente consecutivas.

Esse efeito foi adicionado na formulação do problema *Blade-to-Blade* pelo termo $-\frac{1}{b}\frac{db}{dx}V_x$ que está contido na Equação (2.32). Para levar em consideração este importante efeito, uma velocidade $\boldsymbol{V}_b$ foi adicionada na condição de contorno conforme mostrado na Equação (4.4).

Eremeff (1974) desenvolveu em sua pesquisa duas aproximações para levar em conta este efeito. Entretanto, para este trabalho foi utilizada apenas a primeira aproximação, na qual os componentes da velocidade $\boldsymbol{V}_b$ são:

$$V_{bx} \cong V_{1x}\left(\frac{b_1}{b(\zeta)} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b_1}{b_2}\right)\right) \tag{4.7}$$

$$V_{by} \cong 0 \tag{4.8}$$

É possível mostrar que a soma das parcelas $V_{\infty x}$ e V_{bx} dá origem à velocidade V_x, a qual corresponde à velocidade meridional transformada em qualquer ponto do perfil:

$$V_x = V_{\infty x} + V_{bx} \tag{4.9}$$

Importante ressaltar que não é necessário calcular as distribuições de largura da Equação (4.7), bastando considerar que V_x já é a velocidade meridional transformada do problema *Through-Flow*.

Com todas essas considerações feitas e desenvolvendo-se a Equação (4.2) (condição de contorno sobre o perfil), obtém-se a equação utilizada para solucionar o problema na grade linear:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(u_{ij}{}^{*}(y_{i+1}-y_i)+v_{ij}{}^{*}(x_{i+1}-x_i)\right)\Gamma_j^{*} = -V_x(y_{i+1}-y_i)+\left(V_{\infty y}-u\right)(x_{i+1}-x_i) \tag{4.10}$$

onde $u_{ij}{}^{*}$ e $v_{ij}{}^{*}$ equivalem às componentes da velocidade induzida por uma fileira de vórtices unitários correspondentes ao ponto de colocação ζ_j no ponto de controle $z_i = x_i + iy_i$ e u representa a velocidade de condução transformada pela Equação (2.29).

4.1.3 Cálculo da circulação requerida

O método inverso baseado em painéis necessita que uma circulação requerida seja especificada nos pontos de controle do perfil. Entretanto, diferentemente do Capítulo 3, no qual algumas soluções exatas foram utilizadas para obter tal circulação, nas máquinas de fluxo esta pode ser relacionada com a distribuição do produto rV_θ (torque hidráulico), como será visto adiante.

Considere então a grade da Figura 4.4. Os sinais '+' e '-' indicam os lados de pressão e sucção da pá, respectivamente. As pás estão espaçadas da distância t e duas linhas verticais foram traçadas passando pelos pontos x e $x + \Delta x$.

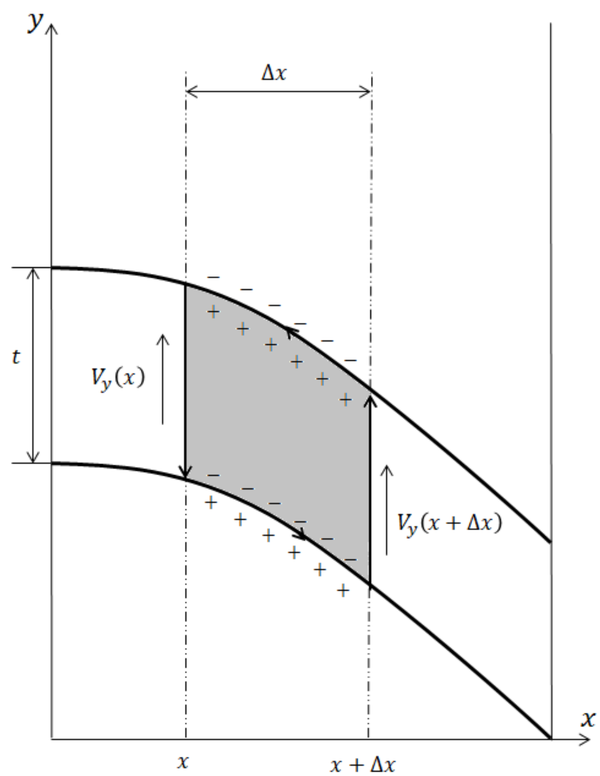

Figura 4.4 – Esquema da região entre duas pás onde é aplicado o Teorema de Stokes.

A circulação total anti-horária no circuito envolvendo a região fechada (cor cinza) da Figura 4.4 é escrita como:

$$\Gamma_T = \left(V_t^{\,-} - V_t^{\,+}\right)\Delta s + \left[V_y(x + \Delta x) - V_y(x)\right] t = \Gamma + \ \Delta V_y \, t \qquad (4.11)$$

onde $V_t^{\,-}$ e $V_t^{\,+}$ são as velocidades tangenciais à pá nos lados de sucção e de pressão, respectivamente, $\Gamma = \left(V_t^{\,-} - V_t^{\,+}\right)\Delta s$ corresponde à circulação no trecho de pá considerado e $\Delta V_y = V_y(x + \Delta x) - V_y(x)$ é a variação de velocidade y correspondente.

Pelo teorema de Stokes, a circulação Γ_T da Equação (4.11) deve ser nula, pois o escoamento é irrotacional na região fechada. Assim:

$$\Gamma = -\Delta V_y\, t \tag{4.12}$$

A variação ΔV_y no plano da grade está diretamente relacionada à variação do torque hidráulico no plano físico. Pela Equação (2.31) vista no Capítulo 2.

$$\Delta V_y = \frac{2\pi}{t\, Z}\Delta(rV_\theta) \tag{4.13}$$

4.2 ALGORITMO *BLADE-TO-BLADE*

Da mesma maneira que foram desenvolvidos algoritmos no capítulo anterior, desenvolveu-se um método inverso aplicado em planos de grades de turbomáquinas. O algoritmo para grades corresponde a uma extensão do método inverso aplicado a perfis finos e isolados, levando em conta todos os efeitos mostrados neste capítulo. O diagrama de blocos do algoritmo desenvolvido pode ser visto na Figura 4.5.

O programa se inicia de maneira muito similar aos anteriores, com a leitura de diversos parâmetros. O bloco “Dados de Entrada” corresponde a leitura do número de painéis, número máximo de iterações, número de pás do rotor, rotação. Neste caso, não é necessária a informação do ângulo de ataque e do módulo da velocidade incidente. Pois, como foi visto, as velocidades na entrada e na saída da grade são conhecidas.

Já o bloco “*Input Through-Flow*” corresponde aos resultados fornecidos pelo programa desenvolvido por Santos *et al.* (2012) para a formulação descrita na seção 2.2 deste trabalho. Dentre os resultados de interesse estão: as coordenadas das linhas de corrente no plano meridional do rotor turbina, os ângulos de torção das pás, as velocidades meridional e circunferencial e também os valores da função corrente do escoamento meridional.

A geometria inicial foi considerada igual à superfície média do escoamento sendo, portanto, totalmente conhecida. Lembrando que, a partir de cada linha de corrente do escoamento meridional uma superfície S_1 é gerada. Na sequência, o algoritmo entra em um processo iterativo para cada uma destas superfícies.

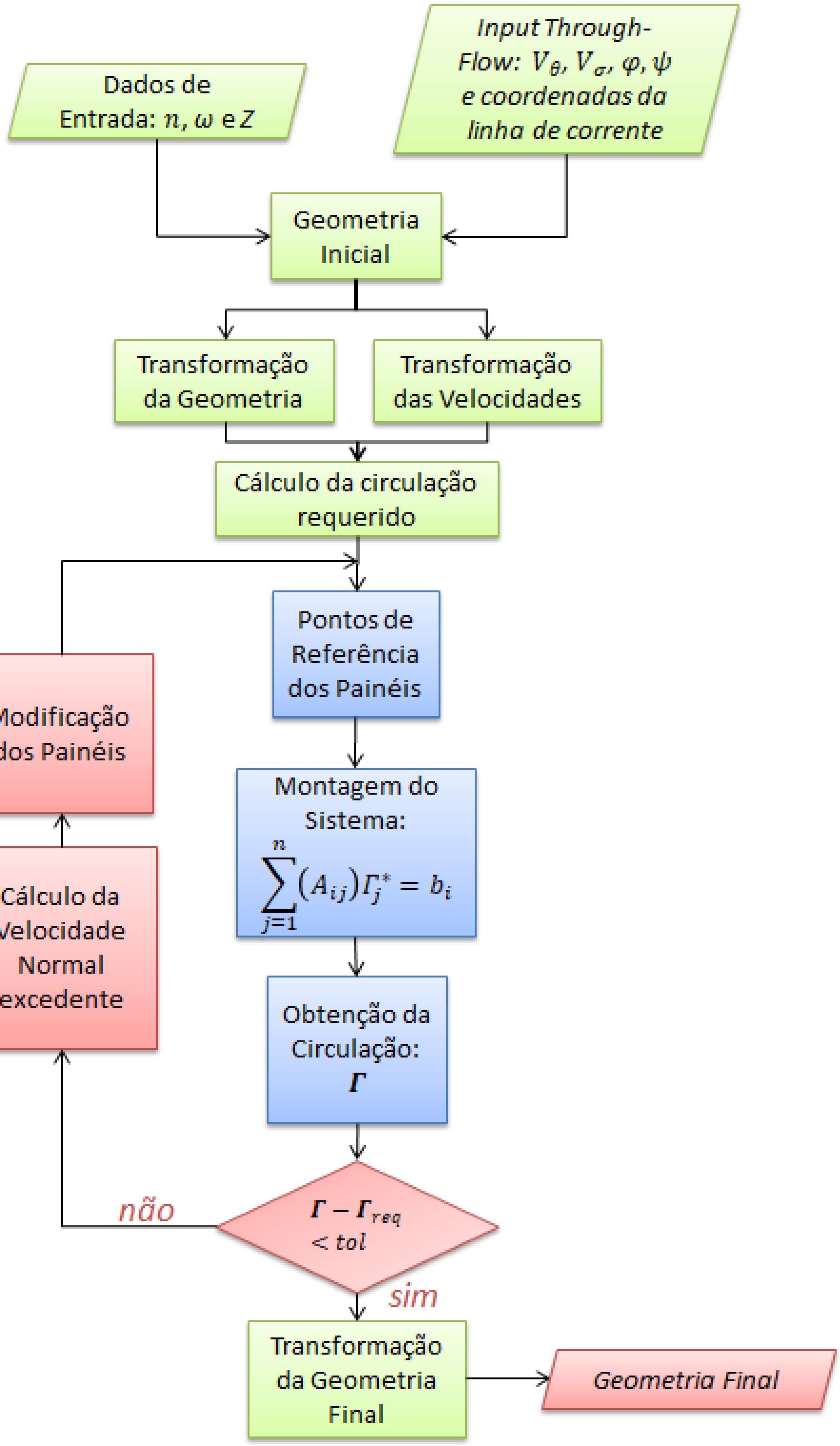

Figura 4.5 – Fluxograma do algoritmo *Blade-to-Blade*.

A transformação conforme das superfícies em planos de grades lineares, descrita na seção 2.4 deste trabalho, é aplicada tanto na geometria inicial, como nas velocidades meridional e circunferencial. Em seguida, a circulação requerida é calculada (conforme mostrado na seção 4.1.3). A partir daí, o algoritmo entra naquele mesmo processo iterativo do método inverso do Capítulo 3.

Quando uma tolerância, *tol*, é satisfeita, ou um número máximo de iterações é atingido, o programa é interrompido e fornece as coordenadas do perfil da pá no plano transformado (na grade linear). Na sequência, a velocidade tangencial às pás nos pontos de controle é calculada para se obter posteriormente a distribuição de velocidades, tanto no lado de pressão como no lado de sucção da pá.

Da mesma maneira que a geometria inicial e as velocidades foram transformadas para se trabalhar na grade linear, uma transformação reversa deve ser aplicada para que a geometria final e a distribuição de velocidades na pá sejam conhecidas na superfície S_1 física.

As cores empregadas no diagrama da Figura 4.5 têm os seguintes significados:

I) A cor verde indica as particularidades adicionadas ao algoritmo *Blade-to-Blade* (transformações da geometria e das velocidades, e circulação requerida);

II) A cor vermelha está relacionada com o método inverso (seção 3.3.3);

III) A cor azul indica o ciclo do método direto (seção 3.3.1).

Capítulo 5

RESULTADOS

5.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Como já mencionado, o problema *Through-Flow* foi resolvido por Santos *et al.* (2012) e seus resultados servem de dados de entrada para o algoritmo *Blade-to-Blade*. O problema trabalhado foi baseado em um projeto de uma turbina hidráulica axial tipo hélice (Souza, 1989), cuja seção meridional pode ser vista na Figura 5.1 e que possui as suas características principais dadas na Tabela 5.1:

Tabela 5.1 – Características da turbina hidráulica axial.

Vazão Volumétrica	0,286 $\frac{m^3}{s}$
Altura de Queda Líquida	4 m
Rotação	1145 rpm
Potência de Eixo	9,5 kW
Eficiência Global	85%
Número de Pás	4
Diâmetro Interno (Cubo)	112 mm
Diâmetro Externo	280 mm

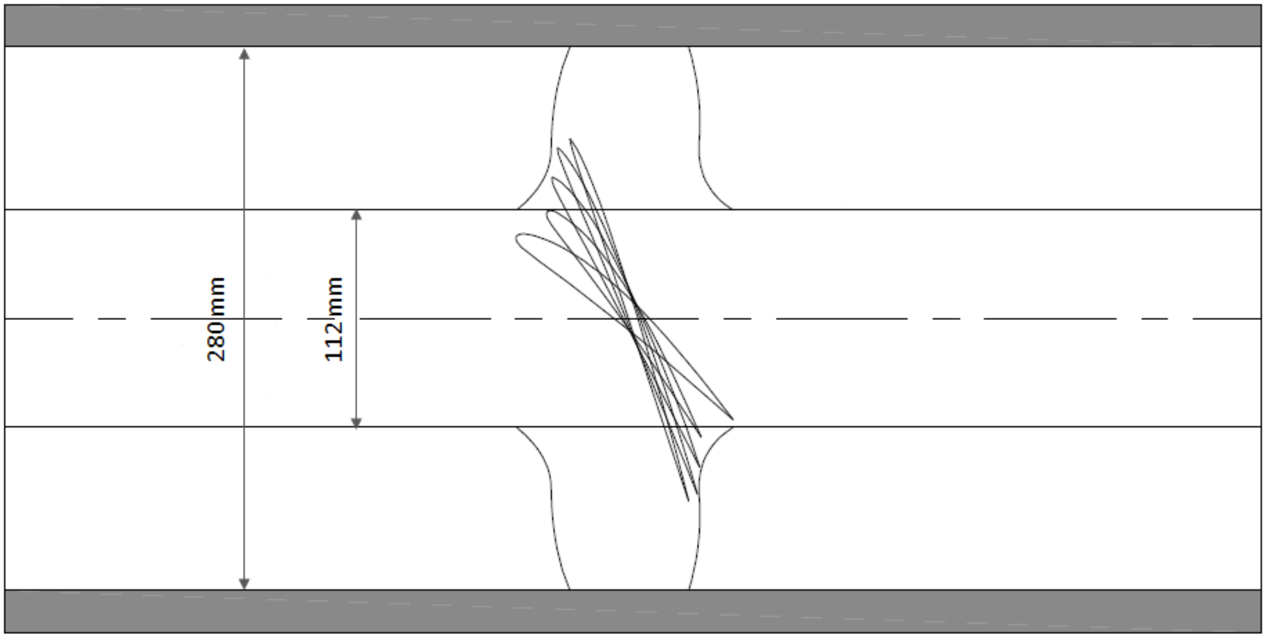

Figura 5.1 – Seção meridional do rotor da turbina estudada. Os perfis representados são ilustrativos (Santos *et al.*, 2012).

A seção meridional do rotor da turbina está sendo novamente ilustrada na Figura 5.2. A malha utilizada possui um número de nós de 31 x 91 e ao todo foram geradas 26 linhas de corrente contando a partir do cubo até a ponta da pá e 31 pontos para cada linha dentro da região da pá. Ainda na Figura 5.2, as indicações LE, TE e *Blade*, indicam o bordo de ataque (*Leading Edge*), bordo de fuga (*Trailing Edge*) e a pá, respectivamente.

Além do mais, uma distribuição de rV_θ (torque hidráulico) ao longo da pá foi especificada para cada linha de corrente. A Figura 5.3 ilustra essa distribuição para algumas dessas linhas. Assim, foram obtidos os resultados esperados: valores da função corrente, do ângulo da superfície média do escoamento e das velocidades em cada nó da malha, a partir de um procedimento iterativo totalmente inverso.

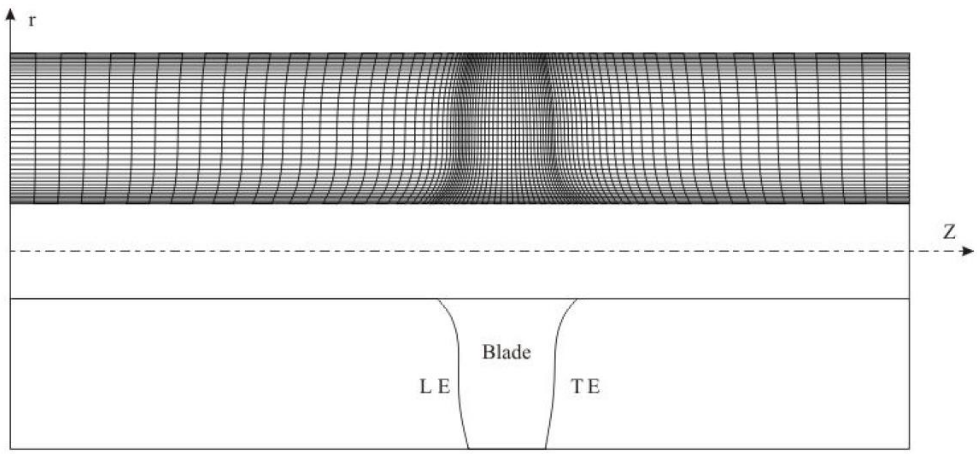

Figura 5.2 – Seção Meridional da turbina axial estudada (Santos *et al.* 2012).

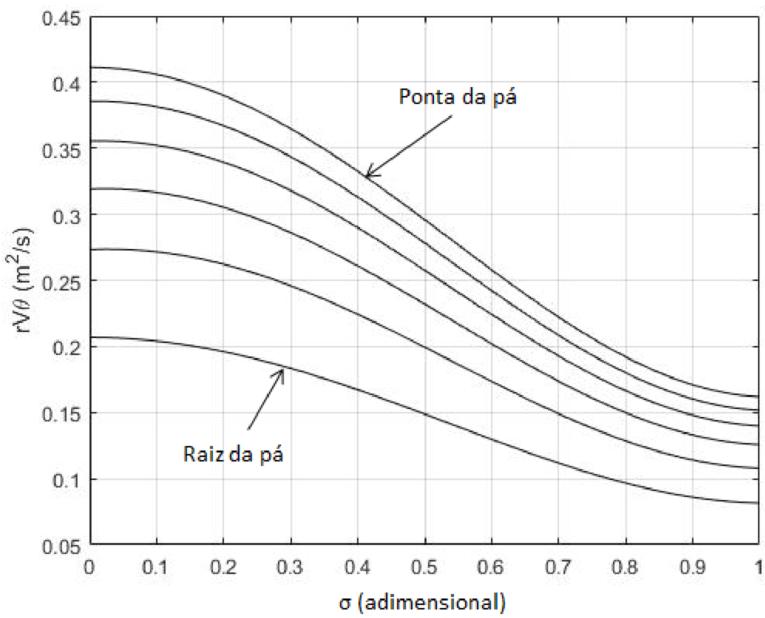

Figura 5.3 – Distribuição de rV_θ (torque hidráulico) ao longo da pá.

5.2 RESULTADOS DO PROGRAMA *THROUGH-FLOW*

O algoritmo que calcula a superfície média do escoamento foi feito por Santos *et al.* (2012). Os autores citam que, primeiramente, o formato da seção meridional deve ser especificado, bem como os valores da distribuição de torque hidráulico ao longo da pá. Assim, uma estimativa inicial da função corrente é dada e estima-se o ângulo de torção, φ, da superfície (Equação (2.6)). Em seguida, calculam-se os novos valores da função corrente utilizando o método da sobre relaxação sucessiva usando as Equações (2.13), (2.14) e (2.17), discretizadas pelo método da quadratura diferencial local com funções de base radial. Este processo é repetido até que os valores da função corrente nos nós convirjam.

Com o conhecimento das incógnitas do problema em cada nó, o valor da função corrente foi interpolado para se obter as linhas de escoamento, ou seja, aquelas nas quais o valor da função corrente é constante. A Figura 5.4 ilustra algumas dessas linhas de corrente. Um fato interessante é que as linhas não são totalmente retas paralelas ao eixo da máquina, como seria no caso de uma distribuição do torque hidráulico constante: existe uma curvatura suave ao longo da pá.

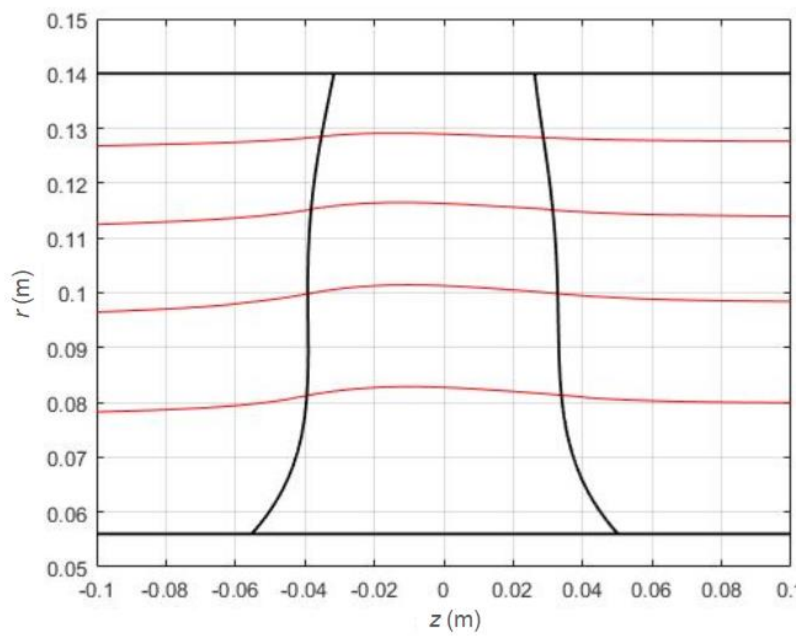

Figura 5.4 – Linhas de corrente da seção meridional da turbina axial.

O problema *Through-Flow* ainda fornece o ângulo de torção da superfície média do escoamento, S_{2m}. Lembrando que esses resultados correspondem a um caso de número infinito de pás. A Figura 5.5 mostra um gráfico com o formato dessa superfície projetada em seções cilíndricas ao longo do eixo da máquina. Cada curva da Figura 5.5 está relacionada a uma das 26 linhas de corrente mencionadas. Observa-se um menor ângulo de torção no cubo e nas suas proximidades. À medida que se aproxima da ponta da pá (região mais escura), a torção se torna cada vez maior e a corda da pá (em número infinito) relativamente menor.

Os resultados obtidos a partir do programa elaborado por Santos *et al.* (2012) serviram de base para o programa do problema *Blade-to-Blade*. Desta forma, as coordenadas das linhas de corrente e as velocidades meridional e circunferencial correspondentes foram utilizadas e serviram de base para se comparar os resultados obtidos neste trabalho.

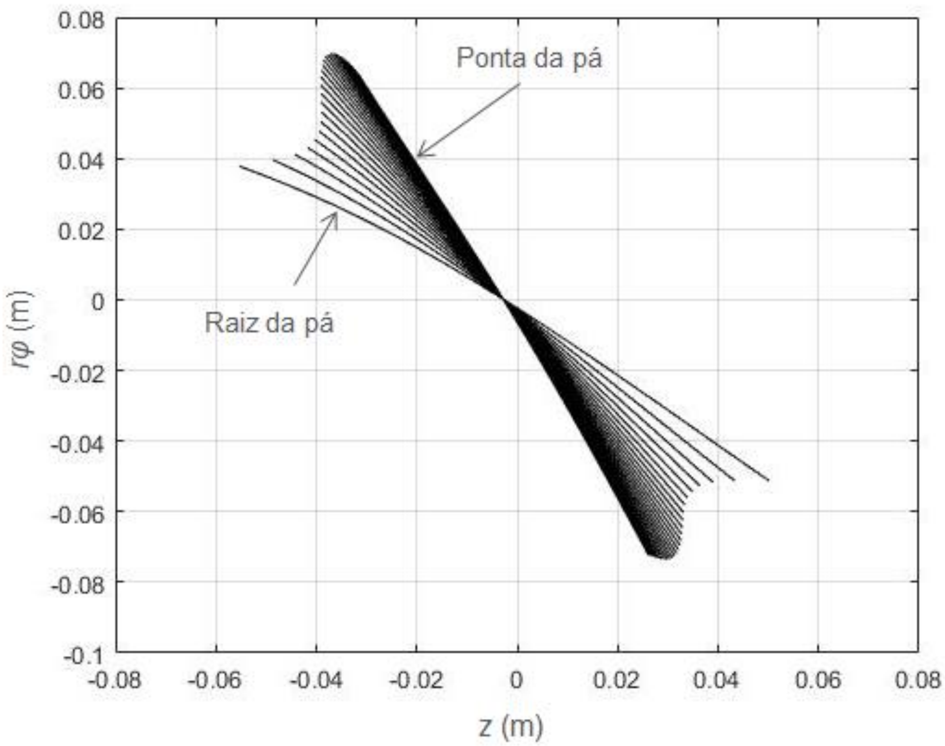

Figura 5.5 – Projeção da superfície S_{2m} em seções cilíndricas.

5.3 RESULTADOS DO PROGRAMA *BLADE-TO-BLADE*

Foi desenvolvido um programa utilizando a linguagem de programação FORTRAN, que primeiramente importa todos os dados necessários do programa *Through-Flow* e depois fornece uma geometria final de acordo com um número de pás previamente especificado, conforme o algoritmo *Blade-to-Blade* descrito na seção 4.2.

Sendo assim, com as coordenadas de cada linha de corrente conhecidas, foi possível transformar as superfícies de revolução S_1 em planos de grade linear. Observe então que cada linha projetada da Figura 5.5 se transforma em outra correspondente em um plano *x-y*. Além do mais, esta geometria transformada serve como base de comparação para os resultados obtidos, uma vez que ela representa uma situação hipotética na qual o rotor possui um número infinito de pás.

Os resultados foram divididos em quatro casos:

(I) Rotor com três pás, $Z = 3$,
(II) Rotor com cinco pás, $Z = 5$,
(III) Rotor com sete pás, $Z = 7$,
(IV) Comparação entre os casos I, II e III, juntamente com a superfície S_{2m} obtida por Santos *et al.* (2012).

Em todos os três casos foram utilizados trinta painéis para cada perfil e uma tolerância de 10^{-6} na comparação das circulações calculadas e requeridas para um máximo de dez iterações.

Frequentemente, para uma melhor visualização dos resultados, foram selecionadas seis linhas de corrente, incluindo aquelas que passam pelo cubo, meio e ponta da pá.

5.3.1 Caso (I): rotor com três pás, $Z = 3$

Neste caso, o rotor possui apenas três pás e a Figura 5.6 traz uma comparação da geometria inicial (curvas azuis), as mesmas da Figura 5.4, com os resultados obtidos pelo algoritmo desenvolvido para $Z = 3$ (curvas vermelhas). Observe que, próximo ao cubo, as diferenças entre as linhas são pequenas, ao passo que quando essas vão se deslocando à ponta da pá, as diferenças tornam-se maiores. A Figura 5.7 mostra todas as curvas no plano físico (plano real), para ambos os casos de número infinito de pás e três pás.

O desvio entre os casos de número infinito de pás e três pás deve ser suficiente para produzir a superfície média do escoamento. Portanto, como será observado posteriormente, com o aumento do número de pás, espera-se que haja cada vez menos desvio, pois existiriam mais pás para realizar o trabalho específico requerido.

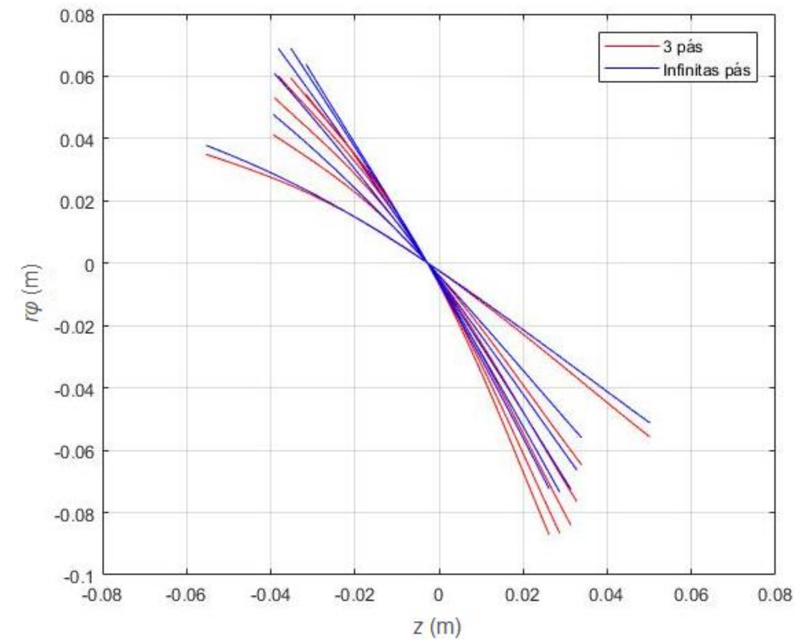

Figura 5.6 – Comparação entre a geometria inicial (superfície média do escoamento), em azul, e geometria final para *Z=3*, em vermelho, no plano físico.

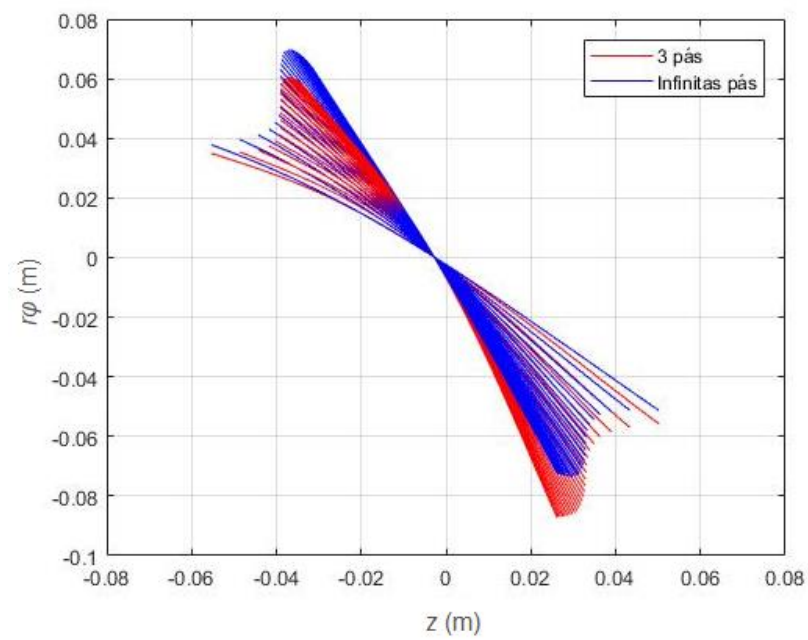

Figura 5.7 – Comparação das projeções para o caso de infinitas pás (azul) e *Z=3* (vermelho).

Foi possível, a partir da intensidade dos vórtices calculados para cada painel, obter a distribuição da velocidade relativa nos lados de pressão e sucção da pá. Essa distribuição foi feita para as linhas de corrente que passam pelo cubo, pelo meio e ponta da pá. Devido ao fato dos pontos de colocação dos painéis extremos não estarem exatamente sobre os bordos de ataque e de fuga, as curvas de velocidade nos lados de pressão e sucção acabam não fechando exatamente nos bordos. Todavia, a diferença é pequena, indicando pouco giro do escoamento nos bordos. A Figura 5.8 ilustra essas distribuições. Os gráficos (5.8a), (5.8b) e (5.8c) representam essas distribuições para o cubo da pá, o meio da pá e a ponta da pá, respectivamente.

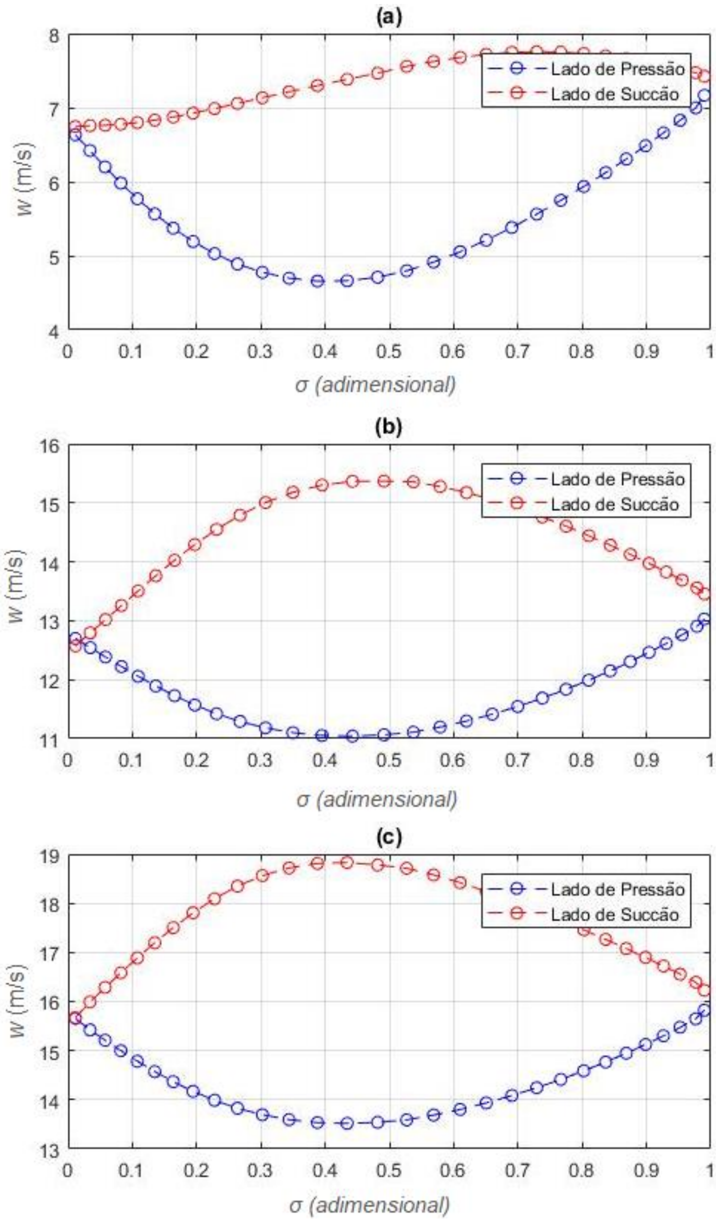

Figura 5.8 – Distribuição das velocidades nos lados de pressão e de sucção da pá para (a) o cubo, (b) meio da pá e (c) ponta da pá no caso *Z=3*.

5.3.2 Caso (II): rotor com cinco pás, $Z = 5$

No caso em que o rotor possui cinco pás, foram obtidos os mesmo gráficos que no caso anterior. Primeiramente, a Figura 5.9 traz a comparação com o caso de número infinito de pás. Já a Figura 5.10 apresenta as geometrias da pá para todas as linhas de corrente. Observe que ambas as figuras correspondem à superfície S_1 física (ou real).

Novamente, as distribuições de velocidade no cubo, meio da pá e ponta da pá são apresentadas para este caso (Figura 5.11). Neste caso, a distribuição de velocidades começa a se elevar em direção ao bordo de fuga. Note-se que esse caso reflete a situação típica de aceleração do escoamento relativo através do rotor de uma turbina axial.

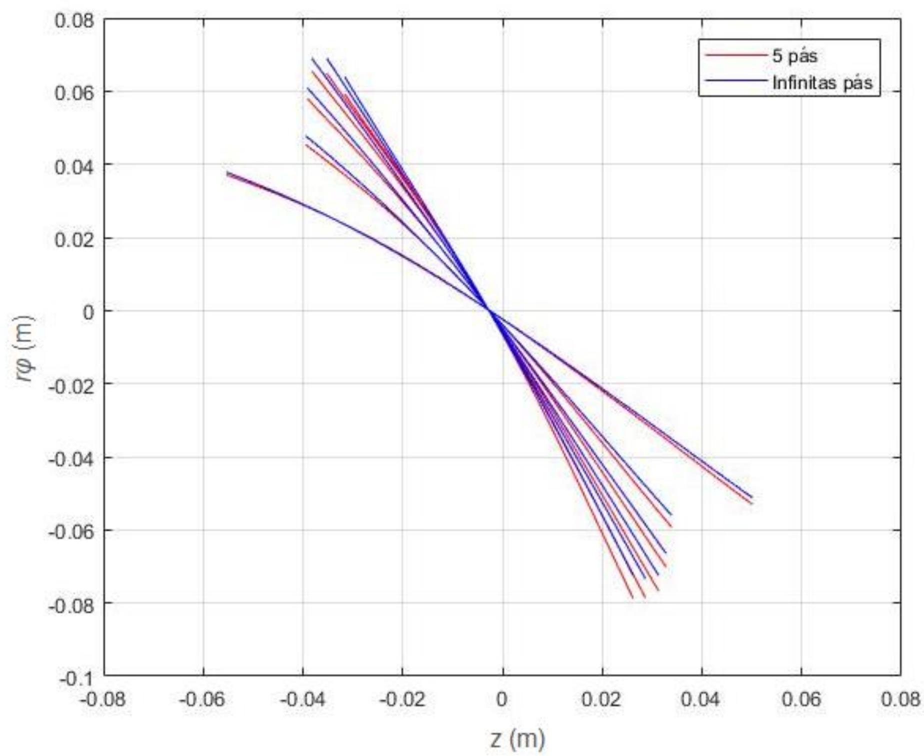

Figura 5.9 - Comparação entre a geometria inicial (superfície média do escoamento) e a geometria final obtida no caso de $Z = 5$ no plano físico.

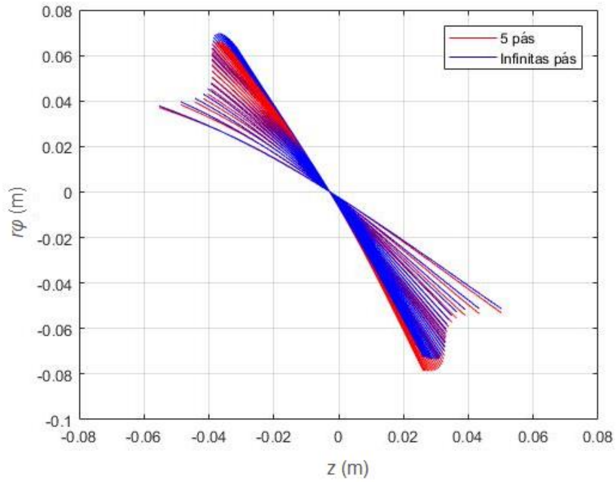

Figura 5.10 – Comparação das projeções para o caso de infinitas pás (azul) e *Z=5* (vermelho).

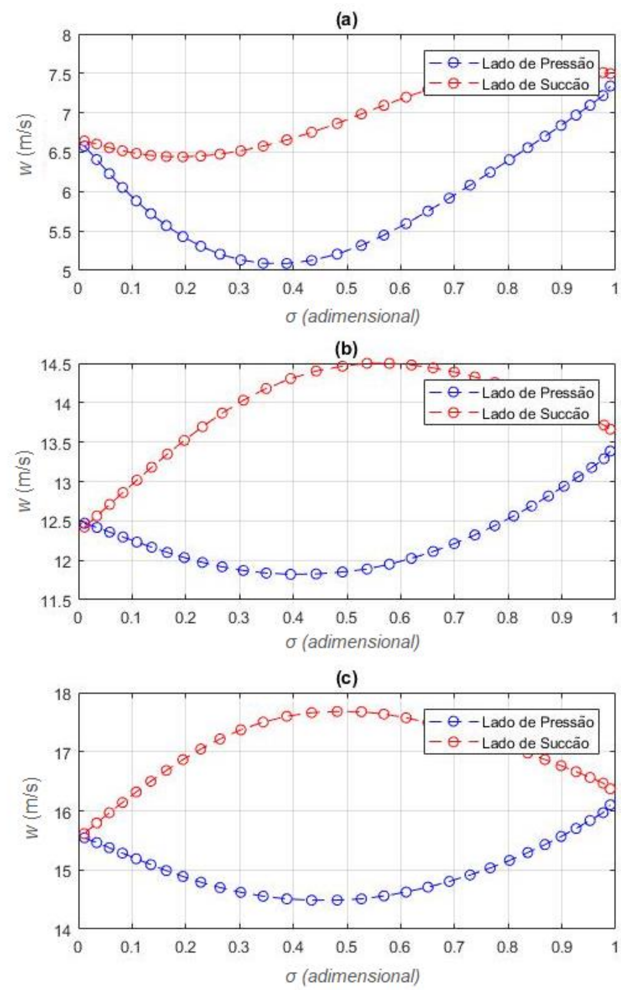

Figura 5.11 - Distribuição das velocidades nos lados de pressão e de sucção da pá para (a) o cubo, (b) meio da pá e (c) ponta da pá no caso *Z=5*.

5.3.3 Caso (III): rotor com sete pás, $Z = 7$

As Figuras 5.12 e 5.13 ilustram um pequeno desvio entre as linhas azuis (caso ideal) e das linhas vermelhas (*Z=7*). As distribuições das velocidades no lado de pressão e sucção são mostradas na Figura 5.14. Estas já apresentam uma maior variação do módulo da velocidade relativa entre a entrada e a saída da pá.

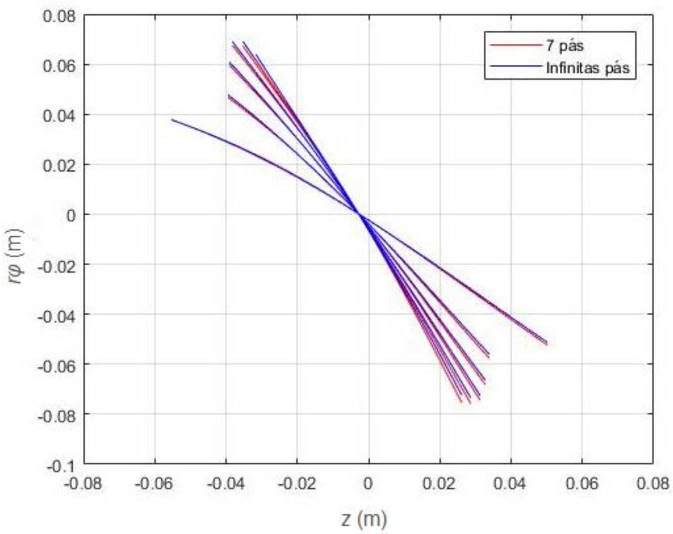

Figura 5.12 - Comparação entre a geometria inicial (superfície média do escoamento) e geometria final obtida no caso de $Z = 7$ no plano real.

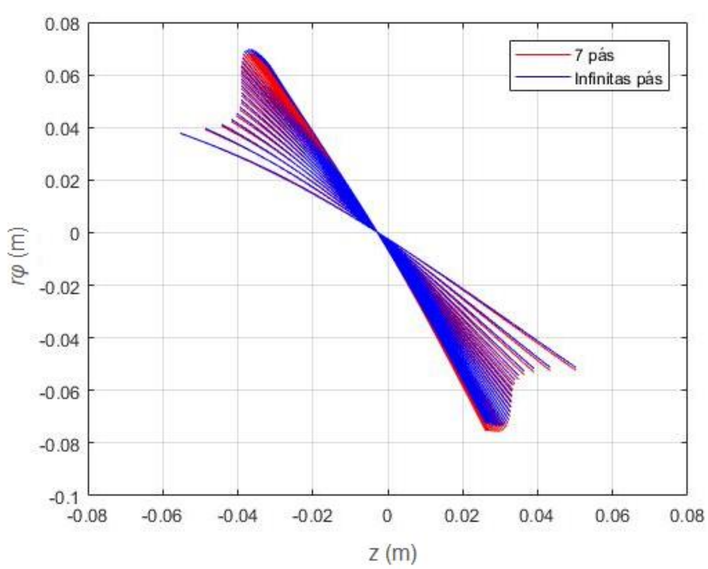

Figura 5.13 - Comparação das projeções para o caso de infinitas pás (azul) e *Z=7* (vermelho).

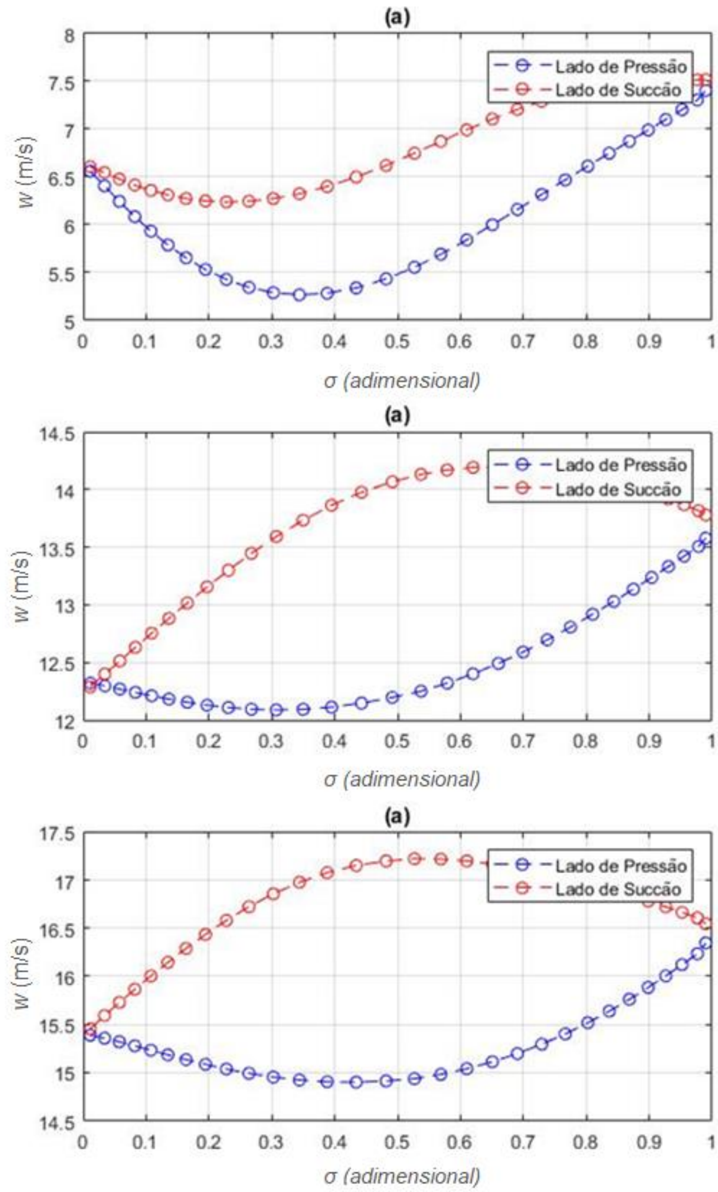

Figura 5.14 - Distribuição das velocidades nos lados de pressão e de sucção da pá para (a) o cubo, (b) meio da pá e (c) ponta da pá no caso *Z=7*.

5.3.4 Caso (IV): comparação entre os casos

Até o momento foram apresentados os resultados particulares para um número específico de pás do rotor. Uma das maneiras de verificar a convergência do algoritmo desenvolvido é aumentar o número de pás e com isso procurar a aproximação para a situação ideal, na qual o rotor possui infinitas pás. Este resultado para infinitas pás já foi obtido no problema *Through-Flow* e está ilustrado na Figura 5.5.

Desta forma, foram criadas outras ilustrações comparando as geometrias obtidas nos casos I, II e III. A Figura 5.15 ilustra as geometrias no cubo; já as Figuras 5.16 e 5.17 comparam as geometrias do meio da pá e ponta da pá, respectivamente. Observe que, conforme esperado, aumentando o número de pás a geometria começa a se aproximar daquela fornecida pelo programa *Through-Flow*. Este resultado é esperado, uma vez que a circulação requerida utilizada no algoritmo *Blade-to-Blade*, se baseia nos resultados da superfície média do escoamento, S_{2m}.

Além do mais, é possível notar que nas proximidades do centro da pá (próximo à linha de empilhamento), praticamente não existe diferença entre as geometrias calculadas e a geometria para infinitas pás. Essa tendência pode ser justificada pelo fato da geometria final no plano da grade linear ser deslocada para o mesmo ponto de empilhamento utilizado por Santos *et al*. (2012). Além do mais, na região próxima a linha de empilhamento, o escoamento acaba sendo mais bem guiado.

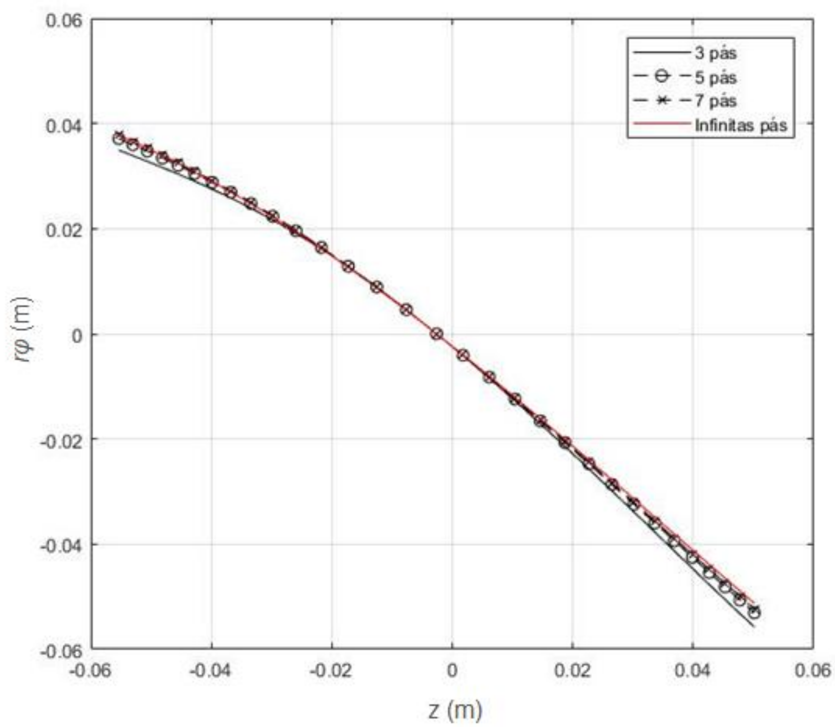

Figura 5.15 – Geometria da linha de esqueleto da pá no cubo.

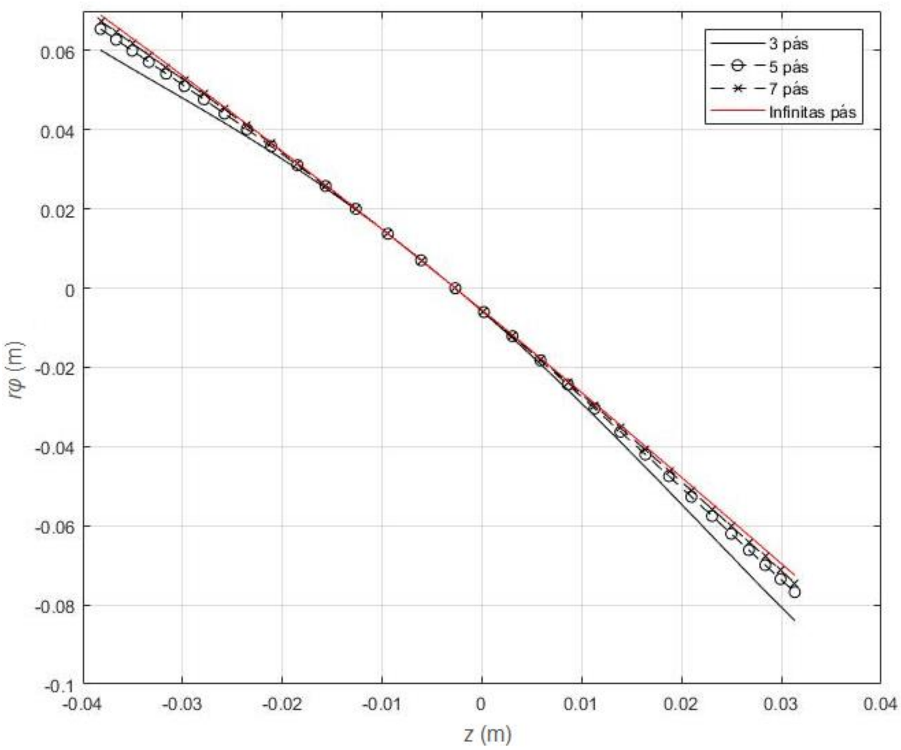

Figura 5.16 - Geometria da linha de esqueleto da pá no meio da pá.

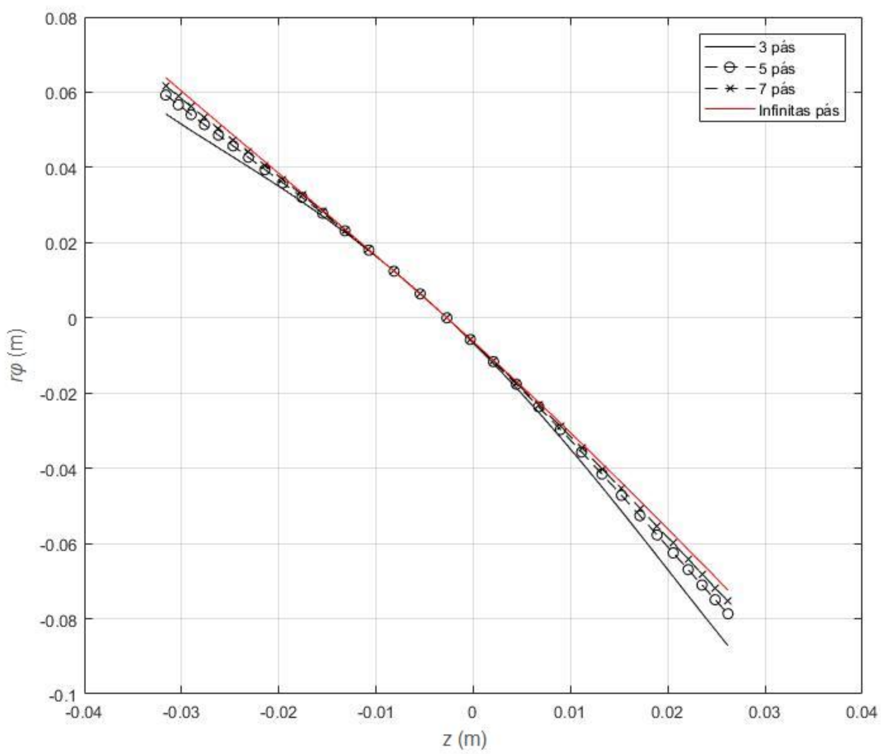

Figura 5.17 - Geometria da linha de esqueleto da pá na ponta da pá.

Da mesma maneira que as geometrias foram comparadas, nas Figuras 5.18, 5.19 e 5.20 são apresentadas comparações para as distribuições de velocidade nos lados de pressão e de sucção das pás dos casos I, II e III. Nestes gráficos, fica evidente o aumento da velocidade relativa entre a entrada e saída, principalmente junto ao cubo. Novamente, é possível observar que os pontos iniciais e finais das distribuições não coincidem, pois os pontos de controle iniciais e finais não coincidem com os bordos de fuga e de ataque, respectivamente. Cabe lembrar que, no caso aqui estudado, o escoamento incide praticamente sem choque.

Por fim, foi elaborado um gráfico que apresenta a geometria das 26 linhas de corrente projetadas no plano *r-z* (Figura 5.21). Esta figura apenas corrobora com as Figuras 5.15, 5,16 e 5,17 quanto a convergência do método utilizado. Existem quatro cores na figura abaixo, representando o número de pás em cada caso.

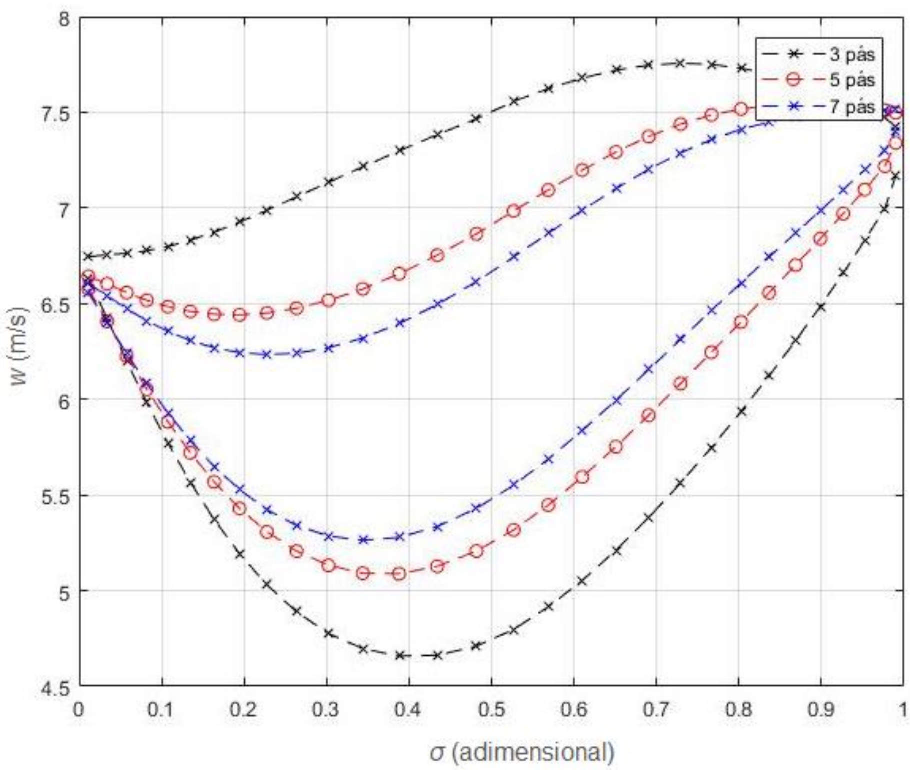

Figura 5.18 – Distribuição das velocidades sobre a pá no cubo.

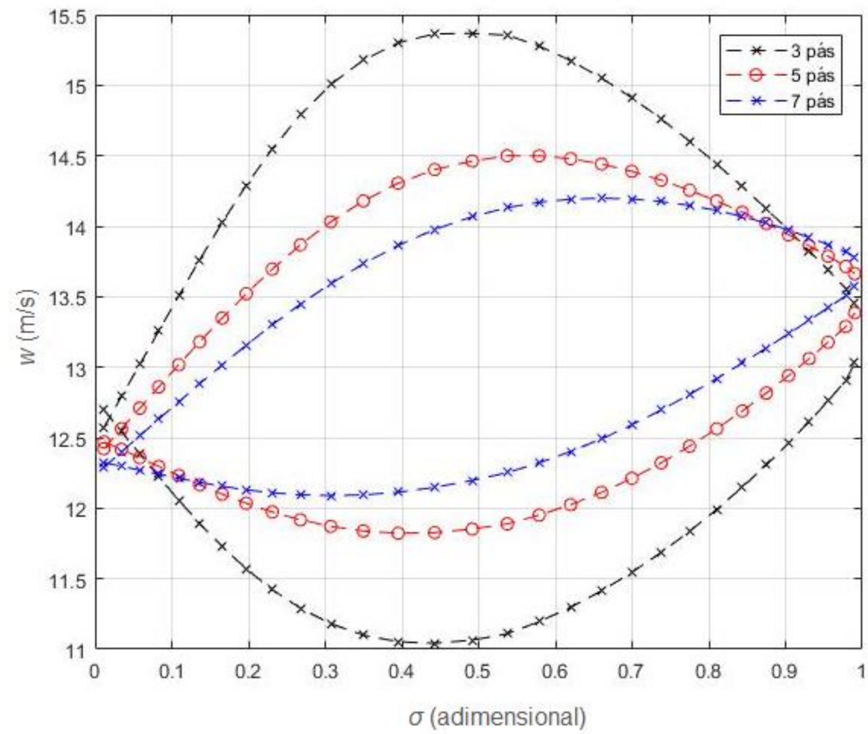

Figura 5.19 – Distribuição das velocidades sobre a pá no meio da pá.

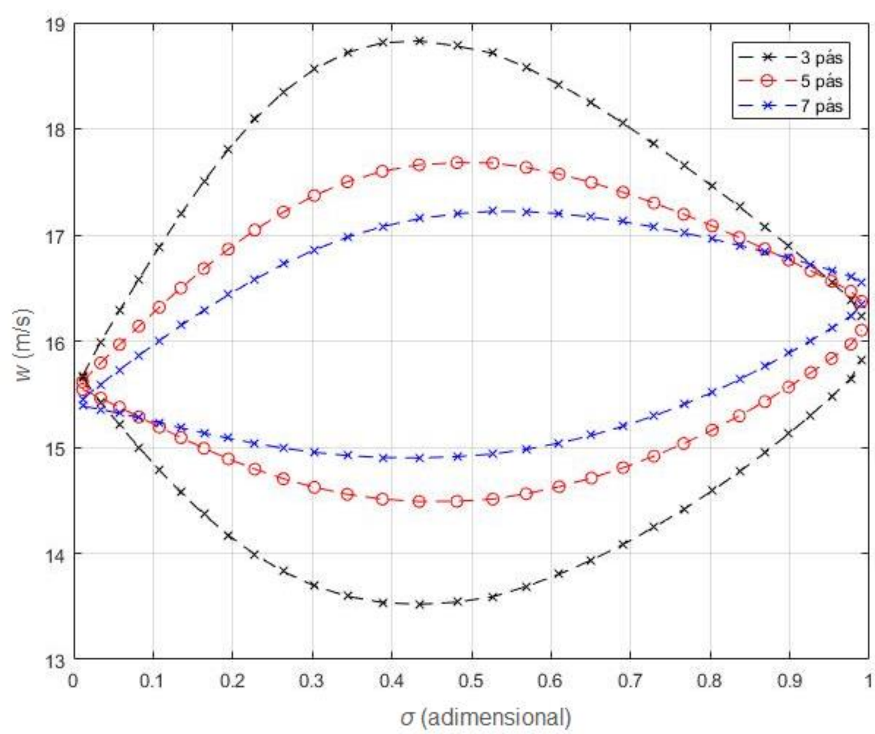

Figura 5.20 – Distribuição das velocidades sobre a pá na ponta da pá.

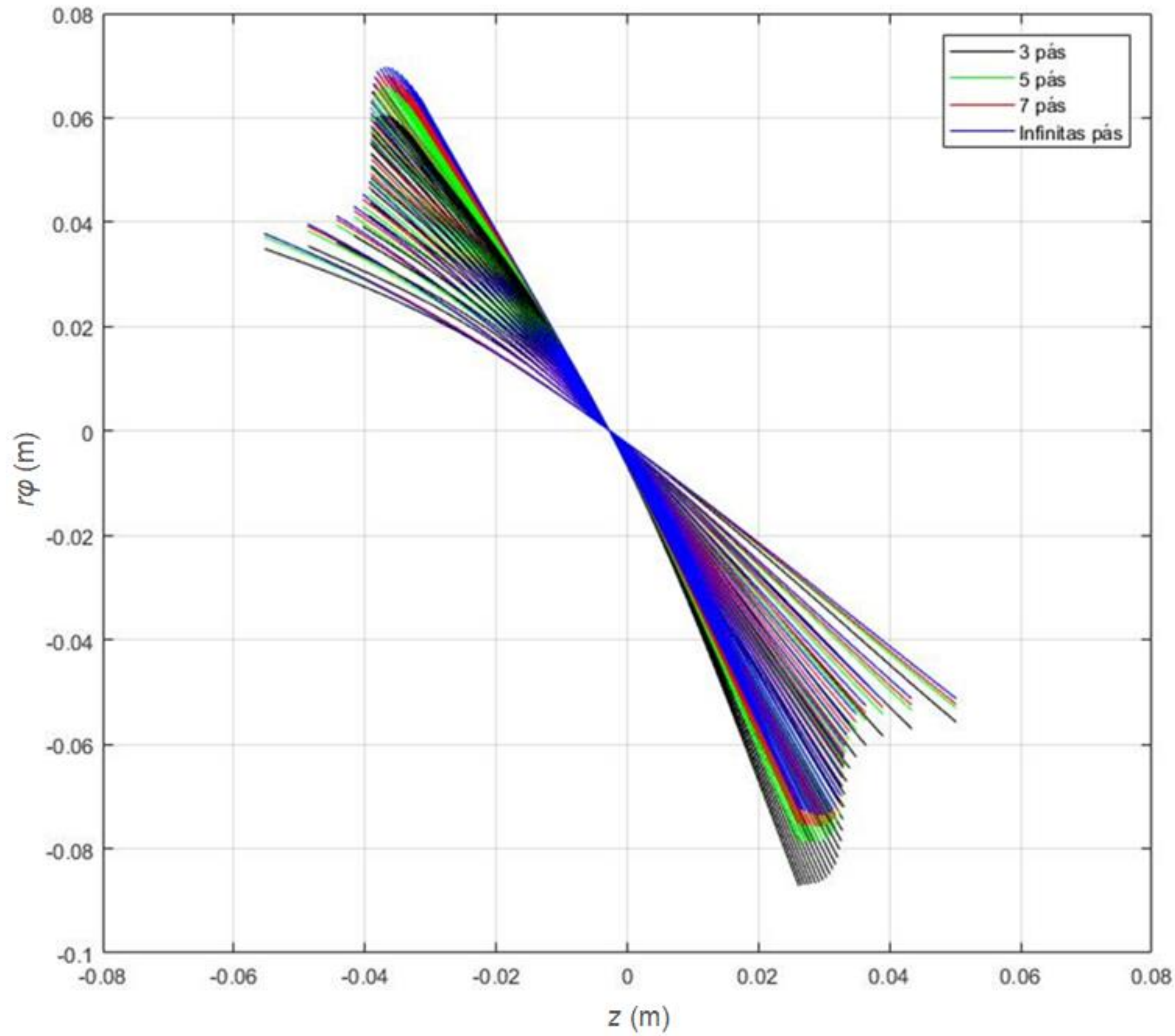

Figura 5.21 – Geometria da pá do rotor para 3, 5, 7 e infinitas pás.

Capítulo 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1 CONCLUSÕES

Embora tenha havido um grande avanço computacional capaz de solucionar escoamentos extremamente complexos, o projeto inverso de turbomáquina continua a ser usado devido ao seu baixo custo computacional e capacidade de produzir resultados próximos dos otimizados. Com esta certeza, espera-se que o algoritmo *Blade-to-Blade* desenvolvido neste trabalho possa contribuir no contexto de um processo de otimização. Obviamente, devido o fato de o escoamento ter sido considerado como potencial, importantes efeitos não puderam ser devidamente computados. Entretanto, como o projeto de uma turbomáquina normalmente é realizado de forma que o ponto de projeto esteja muito próximo do ponto de maior eficiência, e por consequência, de um escoamento sem choque em relação ao bordo de ataque, o problema estudado é capaz de produzir resultados que se aproximem daqueles esperados para uma análise completa.

Como se sabe, um programa de otimização visa obter uma geometria capaz de realizar um trabalho específico desejado para a máquina e ainda produzir uma baixa quantidade de perdas para o escoamento. Desta forma, caso a geometria do algoritmo *Blade-to-Blade* se aproxime realmente da geometria ideal, um programa de otimização necessitará de poucas iterações para que seja alcançada uma geometria final de projeto.

Como foi possível observar no exemplo do Capítulo 5, os resultados da análise *Through-Flow* obtido pelo trabalho de Santos *et al.* (2012) serviram de base de comparação dos resultados obtidos pelo algoritmo *Blade-to-Blade*. Sendo assim, foi possível notar que quanto maior o número de pás mais os resultados se aproximam do de Santos *et al*. (2012), comprovando também a convergência do algoritmo. Já ao passo que se reduz o número de pás ocorre uma maior diferença nos formatos. Fato necessário, pois quanto menor o número de pás espera-se que estas devam estar mais carregadas para produzir uma mesma quantidade de trabalho específico que muitas pás produziriam. Além destas comparações, as velocidades dos lados de pressão e sucção ao redor do perfil foram traçadas, mostrando que quanto menor o número de pás mais rapidamente o escoamento passa pelo lado de sucção e menos rapidamente no lado de pressão.

O algoritmo desenvolvido depende estritamente dos resultados produzidos pela solução do problema *Through-Flow*, que foi tratado por Santos *et al*. (2012). O código computacional disponibilizado por esses autores ainda se encontra relativamente particularizado para o caso de uma turbina axial. Esse fato trouxe certa dificuldade para que um exemplo de escoamento misto pudesse ser realizado neste trabalho. Entretanto, isto não impede que, em futuro próximo, o algoritmo *Blade-to-Blade* possa ser utilizado em um rotor de turbina Francis, por exemplo.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- *Construção de um exemplo para uma turbomáquina de fluxo misto.* Como foi comentado, o programa desenvolvido neste trabalho depende dos resultados da análise da superfície média do escoamento. Com isso é necessário uma reformulação do programa *Through-Flow* desenvolvido por Santos *et al.* (2012).
- *Utilização de distribuições contínuas de vórtices nos painéis.* O método escolhido para o trabalho foi o Método de Vórtices Concentrados, pois este se adequa bem a perfis sem espessura. A condição de escoamento sem choque também é de extrema importância para o método, uma que vez que quando se afasta de tal condição, a convergência numérica começa a ficar cada vez mais difícil. Sendo assim, diferentes distribuições de vórtices poderiam ser utilizadas, por exemplo, lineares ou constantes, podendo-se comparar a eficiência dos métodos, principalmente no caso de perfis espessos.
- *Consideração da espessura das pás.* Neste trabalho, a espessura acabou sendo negligenciada, uma vez que o método de vórtices concentrados não se adequa bem a tal

situação. Entretanto, perfis hidrodinâmicos já conhecidos podem ser adicionados sobre as linhas de esqueleto obtidas, utilizando-se em seguida um método de painéis apropriado nas análises.

- *Adição de outros componentes hidráulicos.* Diversos trabalhos publicados levam em conta a adição de outros componentes no sistema estudado, como por exemplo, um distribuidor de uma turbina axial. Como citado por Peng *et al.* (2002a), isto minimiza a dificuldade que se tem em estimar os valores das grandezas do escoamento na entrada e saída do rotor.
- *Variação da distribuição do torque hidráulico.* O exemplo da turbina axial tipo hélice trouxe uma distribuição de torque hidráulico requerido. Porém, esta não foi modificada durante os testes. Pode-se então variar esta distribuição e analisar o efeito sobre o formato das pás. Borges (1991) cita a grande vantagem de um método simplificado para realizar uma rápida checagem das distribuições do torque hidráulico, devido ao baixo custo computacional.
- *Criação de uma metodologia de otimização numérica.* O principal intuito do algoritmo desenvolvido neste trabalho não é de fornecer uma geometria final para as pás, muito menos uma geometria utilizada para construção de um protótipo, mas sim tornar-se parte de uma metodologia de otimização numérica. Pode-se então utilizar programas comerciais que solucionam as equações de Navier-Stokes, juntamente com os algoritmos inversos *Through-Flow* e *Blade-to-Blade*, assistidos por algoritmos de otimização, para produzir melhores distribuições de torque hidráulico juntamente com as geometrias correspondentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORGES, J.E., "A proposed Through-Flow Inverse Method for the Design of Mixed-Flow Pumps", International Journal for Numerical Methods In Fluids, 17, pp. 1097-1114, 1991.

BOSMAN, C., EL-SHAARAWI, M., A., I., "Quasi-Three-Dimensional Numerical Solution of Flow in Turbomachines", Journal of Fluids Engineering, Vol. 99(1), pp. 132-140, 1977.

EREMEFF, L., R., "Calcul Des Ecoulements Dans Les Turbomachines En Fluide Parfit et Incompressible", Grenoble, França, 1974.

GOSTELOW, J., P., "Cascade Aerodynamics", Oxford, New York, Toronto, Pergamon Press, 1984.

HIRSCH, CH. e **WARZEE, G.**, "An integrated Quasi-3D Finite Element Calculation Program for Turbomachinery Flows", Journal of Engineering for Power, 1979, Vol. 101(1), pp. 141-148.

JENNIONS. I., K. e **STOW, P.**, "A Quasi-Three-Dimensional Turbomachinery Blade Design System: Part I – Throughflow Analysis", Journal of Engineering for Power, 1985a, Vol. 107(2), pp. 301-307.

JENNIONS. I., K. e **STOW, P.**, "A Quasi-Three-Dimensional Turbomachinery Blade Design System: Part II – Computerized System", Journal of Engineering for Power, 1985b, Vol. 107(2), pp. 308-314.

KATSANIS, T., “Computer Program for Calculating Velocities and Streamlines on a Blade-to-Blade Stream Surface of a Turbomachine”, Cleveland: NASA Technical Notes D-4525, 1968.

KATSANIS, T. e **MCNALLY, W.D.**, “Revised FORTRAN Program for Calculating Velocities and Streamlines on the Hub-Shroud Midchannel Stream Surface on an Axial-, Radial-, or Mixed-Flow Turbomachine or Annular Duct. I – User’s Manual”, Cleveland: NASA Technical Notes D-8430, 1977a.

KATSANIS, T. e **MCNALLY, W.D.**, “Revised FORTRAN Program for Calculating Velocities and Streamlines on the Hub-Shroud Midchannel Stream Surface on an Axial-, Radial-, or Mixed-Flow Turbomachine or Annular Duct. II – Programmer’s Manual”, Cleveland: NASA Technical Notes D-8431, 1977b.

KATZ, J., PLOTKIN, A., “Low Speed Aerodynamics : From Wing Theory to Panel Methods”. McGraw Hill, Inc., 1991.

LEWIS, R. I., “A method for Inverse Aerofoil and Cascade Design by Surface Vorticity”, ASME 1982 International Gas Turbine Conference and Exhibit, 1982, London, England. Vol. 1, nº 82-GT-154, 10 páginas.

MCFARLAND, E., R., “A Rapid Blade-to-Blade Solution for Use in Turbomachinery Design”, Journal of Engineering for Power, 1984, Vol. 106(2), pp. 376-382.

PENG, G., “A Practical Combined Computation Method of Mean Through-Flow for 3D Inverse Design of Hydraulic Turbomachinery Blades”, Journal of Fluids Engineering, 172, pp. 1183-1190, 2005.

PENG, G., CAO, S., ISHIZUKA, M. e **HAYAMA, S.**, “Design Optimization of Axial Flow Hydraulic Turbine Runner: Part I - an Improved Q3D Inverse Method”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 39, pp. 517-531, 2002a.

PENG, G., CAO, S., ISHIZUKA, M. e **HAYAMA, S.**, “Design Optimization of Axial Flow Hydraulic Turbine Runner: Part II - Multi-Objective Constrained Method”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 39, pp. 533-548, 2002b.

SANTOS, L. G. C., MANZANARES FILHO, N., MENON, G. J., SANTOS, M. A. R. e **OLIVEIRA, W.**, “Estudos Sobre o Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial e sua Aplicação à Problemas de Dinâmica dos Fluidos”, CILAMCE, vol Nº. pp, 2011.

SANTOS, M. A. R., MANZANARES FILHO, N., OLIVEIRA, W. e **SANTOS, L. G. C.**, “Inverse Computarion Cheme of Turbomachinery Blade Shapes Applied to Axial Hydro-Turbine Runners”, 3rd International Conference on Engineering Optimization, EngOpt, Rio de Janeiro, July, 2012.

SENOO, Y. e **NAKASE, Y.**, “An Analysis of Flow Through a Mixed Flow Impeller”, Journal of Engineering for Power, 1972, Vol. 94(1), pp. 43-50.

SOUZA, Z., “Relatórios de teste e operação da turbina hidráulica tipo tubo da MEP”, Relatório Interno, UNIFEI, Itajubá, MG, 1989.

SUSAN-RESIGA, R., F., MILOS, T., BAYA, A. e **MUNTEAN, S.**, “Mathematical and Numerical Models for Axisymmetric Swirling Flows For Turbomachinery Applications”, Workshop on Vortex Dominated Flows – Achievements and Open Problems, Timisoara, Romania, 2005.

SUSAN-RESIGA, R., MUNTEAN, S., BERNAD, S., FRUNZA, T. e **BALINT, D.**, “Thin Hydrofoil Cascade Design and Numerical Flow Analysis Part I - Design”, Proceedings of the Romanian Academy, Timiasora, Romênia, 2006a, Vol. 7, nº 2/2006, 10 páginas.

SUSAN-RESIGA, R., MUNTEAN, S., BERNAD, S., FRUNZA, T. e **BALINT, D.**, “Thin Hydrofoil Cascade Design and Numerical Flow Analysis Part II - Analysis”, Proceedings of the Romanian Academy, Timiasora, Romênia, 2006b, Vol. 7, nº 3/2006, 10 páginas.

SUSAN-RESIGA, R., MUNTEAN S. e **BOSIOC, A.**, “Blade design for Swirling Flow Generator”, Proc., 4th German-Romanian Workshop on Turbomachinery Hydrodynamics, GROWTH-4, Stuttgart, Germany, 2008.

WANG, Z., CAI, R., CHEN, H. e **JIA, X.**, “A Three-Dimensional Inverse Method Using Navier-Stokes Equations For Turbomachiney Blading”, Inverse Problems in Engineering, Negano, Japan, 2000, Vol. 8, pp. 529-551.

WU, C.-H., “A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Super Sonic Turbomachines of Axial-, Radial- and Mixes Flow Types”, NACA Technical Note 2604, 1952.

ZANGENEH, M., “A compressible Three-Dimensional Design Method for Radial and Mixed Flow Turbomachinery Blades”, International Journal of Numerical Methods in Fluids, 1991, Vol.13, pp. 599-624.