

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

# Configurações Centrais no Problema de $n$ Corpos

Felipe Emanuel Chaves

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

ITAJUBÁ, 16 DE SETEMBRO DE 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

# Configurações Centrais no Problema de $n$ Corpos

Felipe Emanuel Chaves

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada

ITAJUBÁ – MG

16 DE SETEMBRO DE 2009

*Aos meus pais, Raul Dias Chaves  
e Magnífica Elisabete S. Chaves.*

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço aos meus pais, Raul e Magnífica, aos meus irmãos Lucas e Raul e a minha noiva, amiga e companheira Ana Paula, pelo amor, carinho, apoio e paciência durante toda esta jornada, sem os quais eu não estaria completando esta etapa.

Agradeço a todos amigos e professores que tive contato durante minha graduação e mestrado, em especial, agradeço o professor Baêta, pelo seus ensinamentos e por ter me revelado a beleza da matemática, sendo o principal responsável por eu ter optado em seguir por esta área e ao professor e orientador Luis Fernando, pelas motivações e por sua grande dedicação durante a orientação deste trabalho.

Agradeço aos amigos Antônio e Bráulio pelas discussões e pelas contribuições presentes nesta dissertação. Em especial sou eternamente grato ao meu grande amigo Bráulio pelas extensas conversas de caráter especulativos e técnicos que tivemos desde os tempos de ensino médio.

”Os limites de minha linguagem significam os limites de meu mundo.”

Ludwig Wittgenstein.

# Resumo

Nesta dissertação procuramos dar uma abordagem acerca das configurações centrais, apresentando a importância de seu estudo, no que tange resolver o problema clássico de  $n$  corpos da Mecânica Celeste.

Primeiramente apresentamos um pouco da teoria das equações diferenciais ordinárias, afim de, posteriormente, utilizarmos tal teoria, junto aos postulados da mecânica Newtoniana para modelarmos o problema clássico de  $n$  corpos da Mecânica Celeste. Apresentamos, a seguir, propriedades do modelo obtido e também as dificuldades em encontrar as soluções para as equações diferenciais ordinárias que regem tal modelo.

Dentre estas dificuldades, encontra-se a necessidade de tomar certas restrições nas soluções desse problema. Uma solução particular é definida como solução homográfica. Demonstramos que estas soluções formam configurações específicas a cada instante, definidas por configurações centrais.

Estas soluções são as únicas soluções analíticas explícitas de tal problema. Mostramos que além das soluções homográficas formarem uma configuração central a cada instante, dado uma configuração central do problema de  $n$  corpos é possível construir uma solução homográfica de tal problema, desde que existam funções adequadas. Com isso, torna-se importante o estudo das configurações centrais, pois, se desejamos obter as soluções homográficas desse problema é necessário tomarmos condições iniciais tais que as configurações dos corpos no espaço formem uma configuração central.

A seguir apresentamos uma técnica para o estudo das configurações centrais do problema de  $n$  corpos. Esta técnica consiste no estudo de um sistema de equações algébricas que é equivalente ao sistema de equações que definem as configurações centrais. Estas equações são conhecidas como equações de Dziobek. Por fim, utilizamos esta técnica para demonstrar existências de certas classes de configurações centrais planares e espaciais. Apresentamos também alguns corolários e algumas conjecturas

acerca dos resultados obtidos, comparando-os a resultados existentes na literatura.

**Palavras-chave:** Mecânica Celeste, Soluções Homográficas, Configurações Centrais.

# Abstract

This work concerns with the study of central configurations, its importance and relationship with the traditional problem of  $n$  bodies in Celestial Mechanics.

Firstly we present some aspects of the ordinary differential equations theory so that subsequently, with the postulates of Newtonian Mechanics, to model the classic problem of  $n$  bodies in Celestial Mechanics. We show the properties of the model obtained and the difficulties in finding the solutions to the correspondent ordinary differential equations.

In order to avoid these difficulties we take restrictions on the solutions of this problem so that the  $n$  bodies fulfill certain initial conditions. These restrictions led us to the concept of homograph solutions which are the only known analytical solutions to this problem. We prove that these solutions form specific configurations at each instance defined as central configurations. We also show that it is possible to construct homograph solutions from the central configurations with some additional hypotheses.

We present a technique for the study of central configurations which consists in studying a system of equivalent equations to the algebraic system that define central configurations. These equations are known as Dziobek equations. Finally, we use this technique to show the existence of certain classes of central configurations in the planar and spatial cases. We also present some corollaries and some conjectures.

**Keywords:** Celestial Mechanics, Homographic solutions, Central Configurations.



# Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	vi
Índice	vii
Lista de Figuras	ix
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 O Problema de <math>n</math> corpos</b>	<b>5</b>
2.1 Conceitos Básicos de equações diferenciais ordinárias . . . . .	5
2.2 Sistemas Dinâmicos . . . . .	6
2.3 Integrabilidade . . . . .	8
2.4 O modelo clássico do problema de $n$ corpos . . . . .	9
<b>3 Soluções Homográficas e Configurações Centrais</b>	<b>13</b>
3.1 Soluções Homográficas e Transformações Ortogonais . . . . .	13
3.2 Soluções Homográficas flat e não-flat . . . . .	18
3.3 Soluções Homográficas e Configurações Centrais . . . . .	21
3.4 Equilíbrio Relativo e Configurações Centrais . . . . .	23
<b>4 Configurações Centrais e as Equações de Dziobek</b>	<b>26</b>
4.1 Configurações Centrais . . . . .	26
4.2 As equações de Dziobek, caso planar . . . . .	34
4.3 As equações de Dziobek, caso espacial . . . . .	39

<b>5</b>	<b>Exemplos de Configurações Centrais Planares e Espaciais</b>	<b>42</b>
5.0.1	A existência de uma configuração central planar para o problema de 4 corpos . . . . .	42
5.0.2	A existência de uma configuração central espacial para o problema de 6 corpos . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Considerações finais e trabalhos futuros</b>	<b>67</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>69</b>

# Lista de Figuras

4.1	Plano Bissetor. . . . .	33
4.2	Cinco corpos no plano. Exemplo de Roberts. . . . .	38
5.1	Pipa convexa. . . . .	42
5.2	Pipa côncava. . . . .	42
5.3	Configuração do tipo pipa. . . . .	44
5.4	Regiões de existência de configurações centrais do tipo pipa. . . . .	46
5.5	Quatro corpos nos vértices de um tetraedro regular e dois sobre a reta $\mathcal{L}$ que conecta um dos vértices e o centro da face oposta. . . . .	49
5.6	Seis corpos em configuração central espacial. . . . .	50
5.7	A região $\mathcal{W}_1$ e o segmento $I^1(G)$ do Teorema 5.0.3. . . . .	64
5.8	A região $\mathcal{W}_2$ e o segmento $I^2(G)$ do Teorema 5.0.3. . . . .	65
5.9	A região $\mathcal{W}_3$ e o segmento $I^3(G)$ do Teorema 5.0.3. . . . .	66

# Capítulo 1

## Introdução

O movimento dos corpos celestes, luas, planetas, estrelas, dentre outros, é um fenômeno que inquieta a muitos, porém, somente no início do século XVII surgiu uma teoria que descrevesse de maneira aceitável este fenômeno. Esta teoria foi fundamentada por Sir Isaac Newton em 1686 no seu tratado *Philosophia Naturalis Principia Mathematica* [19], com o qual deu início ao estudo da *Mecânica Celeste*.

Essa teoria consiste no estudo da dinâmica de  $n$  partículas de massas positivas  $m_i$ , interagindo de acordo com a lei de Gravitação Universal, proposta por Newton [19].

Para uma descrição mais matemática, consideremos as posições das  $n$  massas  $m_i$  dadas pelos vetores,  $r_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , usualmente  $d = 2$  ou  $d = 3$ . Adotamos um referencial inercial no qual o centro de massa do sistema, que é dado por  $\sum_{j=1}^n m_j r_j / M$ , onde  $M = m_1 + \dots + m_n$  é a massa total, está na origem de nosso referencial, o qual é usualmente chamado *referencial inercial baricêntrico*.

Deste modo, as equações diferenciais que regem o problema de  $n$  corpos são dadas por

$$\ddot{r}_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3}, \quad (1.1)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde  $r_{ij} = \|r_i - r_j\|$  é a distância Euclidiana entre os corpos de massas  $m_i$  e  $m_j$ , e  $G$  uma constante. No capítulo 2 discutiremos melhor este sistema de equações diferenciais ordinárias.

O sistema (1.1) possui soluções num espaço de estados com  $2nd$  dimensões, isto é,

$(\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dots, \dot{r}_n, r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^{2dn}$ , onde  $r_j \in \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $d = 3$ . No caso onde  $n = 2$ , temos o clássico problema de Kepler, o qual pode ser resolvido utilizando as integrais primeiras clássicas. As integrais primeiras clássicas estão associadas às simetrias do problema.

Devido à conservação da energia, das três componentes do momento angular e das seis componentes que vem do movimento retilíneo e uniforme do centro de massa, temos 10 integrais primeiras, sendo assim (1.1) fica reduzido a 2 dimensões, tornando-se analiticamente solúvel. Para  $n = 3$  o problema é o de um sistema dinâmico em  $\mathbb{R}^{18}$ , sendo possível baixar para  $\mathbb{R}^8$ , utilizando as dez integrais primeiras clássicas. Porém, esta ordem é muito alta e ainda seria necessário encontrar novas integrais primeiras, nessa linha de raciocínio.

Mas em 1887, o matemático alemão Bruns, mostrou que toda integral primeira, que é função algébrica das integrais de posição, momento e tempo, são integrais primeira das integrais primeiras clássicas, isto é, as integrais primeiras provenientes das simetrias do problema de 3 corpos, são as mesmas que provém das simetrias do problema de 2 corpos, tornando o sistema de 3 corpos analiticamente insolúvel.

Assim, para resolvê-lo devemos encontrar, se possível, outro método. Uma forma alternativa de resolvê-lo é tomando restrições sobre o movimento. Dentre estas restrições temos as *soluções homográficas*, (veja capítulo 3).

Uma solução homográfica do problema de  $n$  corpos é tal que as razões das distâncias mútuas entre os corpos é preservada, isto é, a configuração inicial dos corpos é preservada por rotações e homotetias. Para  $n = 3$ , Lagrange mostrou que uma tal solução é sempre planar. No mesmo artigo Lagrange mostrou que uma solução particular do problema de três corpos é tal que estes estão situados nos vértices de um triângulo equilátero a cada instante de modo que cada vetor posição  $r_i$ , no referencial baricêntrico, descreva um movimento Kepleriano.

Uma outra solução homográfica para o problema de três corpos, foi dada por Euler. Neste caso os corpos se encontram sobre uma mesma reta a cada instante. Uma solução homográfica é tal que a configuração formada pelos corpos a cada instante, possui características específicas. Tais configurações possuem o vetor aceleração de cada corpo proporcional ao vetor posição relativo ao centro de massa do sistema. Denominaremos tais configurações de *configurações centrais*.

Devido o potencial newtoniano ser singular onde dois corpos possuem a mesma posição, consideramos que as configurações dos corpos não assumem valores no conjunto  $\Delta = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{dn} : r_i = r_j \text{ para } i \neq j\}$ ,  $\Delta$  é denominado de conjunto colisão.

Definimos uma configuração central, se existir  $\lambda$  positivo tal que

$$\ddot{r}_i = \lambda r_i, \quad (1.2)$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

As configurações dos três corpos ao longo das soluções colineares encontradas por Euler [4], para o problema de três corpos, bem como as soluções encontradas por Lagrange [9], também para o problema de três corpos, são exemplos clássicos de configurações centrais.

A noção de configuração central foi introduzida por Laplace em 1789, em um estudo acerca das soluções homotéticas de Lagrange. As configurações centrais tem papel relevante no estudo do problema de  $n$  corpos da Mecânica Celeste, visto que as configurações dos corpos ao longo de soluções homográficas formam uma configuração central a cada instante. Além disso, as soluções homográficas são as únicas soluções explícitas do problema de  $n$  corpos conhecidas até o momento. Para o estudo de assuntos correlatos aqui não tratados, vide os livros de Wintner [27] e Hagihara [5], bem como o artigo de Moeckel [16] e as referências lá citadas. As configurações centrais também estão relacionadas com algumas modificações topológicas dos conjuntos de nível de energia  $h$  e de momento angular  $\mathbf{L}$  do problema de  $n$  corpos [24].

Pouco se sabe a respeito das configurações centrais para  $n$  arbitrário. Para o caso colinear, Moulton [18] mostrou que existem  $n!/2$  possíveis configurações centrais, uma para cada ordenação das massas, para qualquer escolha de massas positivas. Para o caso das configurações centrais *planares*, onde as partículas estão num mesmo plano ( $d = 2$ ), sabe-se, dentre outras coisas, que  $n$  partículas de massas iguais sobre os vértices de um  $n$ -ágono regular formam uma configuração central, generalizando assim o resultado de Lagrange quando  $n = 3$  para massas iguais. Vale observar que uma configuração central planar dá origem a uma família de órbitas na qual cada corpo descreve uma cônica (movimento Kepleriano) com um foco no centro de massa.

A importância dada ao estudo das configurações centrais pode ser exemplificada pelo sexto problema de uma lista proposta por Smale [25] como desafios matemáticos

para o século *XXI*. Smale coloca uma questão levantada por Wintner para as configurações centrais planares:

*para um dado conjunto de  $n$  massas positivas, o número de configurações centrais planares não equivalentes (módulo rotações, translações e dilatações) é finito?*

Para o caso de 3 corpos há somente 5 classes de equivalência de configurações centrais, sendo 3 de Euler e 2 de Lagrange. Recentemente, Hampton e Moeckel em [6] responderam afirmativamente a questão acima para  $n = 4$ , mostrando que, neste caso, o número de configurações centrais planares não equivalentes está entre 32 e 8472. A questão acima ainda está em aberto para  $n > 4$ . Particulares classes de configurações centrais planares neste caso podem ser encontradas em [10, 11, 12, 13].

Há, ainda, interesse no estudo das configurações centrais *espaciais* ( $d = 3$ ). Um exemplo de configuração central espacial, mostrado no capítulo 4, com quatro corpos de massas arbitrárias nos vértices de um tetraedro regular. Recentemente, Hampton e Santoprete [7] apresentaram um novo exemplo de configuração central espacial para o problema de 7 corpos, onde quatro desses corpos se encontram nos vértices de um tetraedro regular e os outros três sobre certas curvas na região interior a esse tetraedro.

Algumas técnicas são utilizadas no estudo das configuração centrais, em particular, no capítulo 4 apresentamos um conjunto de equações algébricas equivalente às equações que definem as configurações centrais, denominadas equações de Dziobek, vale ressaltar aqui que existem controvérsias com relação ao nome dado a esse conjunto de equações, podendo aparecer na literatura também com outros nomes. No entanto no presente trabalho as denominaremos por equações de Dziobek, as quais são utilizadas no capítulo 5, para demonstrarmos a existência de uma configuração central planar não colinear do problema de 4-corpos que tem a forma de pipa, ou simplesmente *configurações centrais do tipo pipa*. Pode-se definir tais configurações como aquelas que têm um eixo de simetria passando por duas das massas.

Mostramos também, no capítulo 5, a existência de três famílias de configurações centrais espaciais para o problema de 6 corpos, com as seguintes propriedades: quatro corpos se encontram nos vértices de um tetraedro regular e os outros dois sobre a reta que passa por um dos vértices e pelo baricentro do triângulo formado pela face oposta a este vértice.

# Capítulo 2

## O Problema de $n$ corpos

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos gerais da teoria das equações diferenciais ordinárias, como essas equações modelam o problema de  $n$  corpos e algumas propriedades particulares desse modelo. Os resultados aqui apresentados estão baseados em [21].

### 2.1 Conceitos Básicos de equações diferenciais ordinárias

Um sistema de equações diferenciais ordinárias possui a forma genérica

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$  e  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$  é chamado de campo de vetores do sistema. Resolver o sistema para uma dada condição inicial  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$  implica achar a solução

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) dt,$$

para todo  $t$  em um intervalo maximal  $\mathbf{J} \subset \mathbb{R}$ .

A existência de tal solução fica garantida devido ao teorema de existência e unicidade das soluções de equações diferenciais ordinárias, resultado fundamental da teoria de equações diferenciais ordinárias. Tal resultado afirma que, se  $\mathbf{f}$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  num domínio de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , então a solução do sistema (2.1) existe e é única para cada condição inicial.



O sistema de equações diferenciais ordinárias se diz autônomo se o campo de vetores não depende do tempo,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ . Introduzindo uma componente a mais em  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{f}$  tais que  $r_{n+1} = t$  e  $f_{n+1} = 1$  podemos sempre transformar um sistema não autônomo num sistema autônomo com uma equação a mais. Reciprocamente, é evidente que se o sistema é autônomo deveria ser possível eliminar uma equação. De fato, supondo que  $f_n \neq 0$  em todo o domínio onde  $\mathbf{f}$  é de classe  $C^1$ , podemos substituir o sistema (2.1) por

$$\frac{dr_i}{dr_n} = \frac{f_i(\mathbf{r})}{f_n(\mathbf{r})} = \mathbf{f}'_i(\mathbf{r}), i = 1, \dots, n - 1. \quad (2.2)$$

Eliminando a variável independente  $t$  reduzimos o sistema de equações diferenciais a  $n - 1$  equações. Em certos problemas, as equações acima são denominadas equações de trajetória. Um sistema de equações diferenciais ordinárias é desacoplado se o campo de vetores não depende simultaneamente de todos os  $r_i$ . Por exemplo, caso  $r_n$  esteja desacoplada do sistema temos,

$$\frac{dr_i}{dt} = \mathbf{f}_i(r_1, \dots, r_{n-1}, t), \quad \frac{dr_n}{dt} = \mathbf{f}_n(r_1, \dots, r_{n-1}, r_n, t),$$

onde  $i = 1, \dots, n$ .

Deste modo  $r_n$  pode ser resolvida de forma separada das restantes equações, desde que as soluções  $r_1(t), \dots, r_{n-1}(t)$  sejam conhecidas.

## 2.2 Sistemas Dinâmicos

Sistemas dinâmicos são caracterizados por vetores de estado  $r \in \mathbb{R}^{2n}$  da forma

$$\mathbf{r} = \{\mathbf{q}, \mathbf{p}\} = \{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\},$$

onde  $\mathbf{q}$  são chamadas coordenadas generalizadas e  $\mathbf{p}$  são chamados de momentos generalizados. O domínio de existência de  $\mathbf{r}$  é chamado de espaço de fases, enquanto que o domínio de existência de  $\mathbf{q}$  é chamado de espaço de configurações. Cada par  $(q_i, p_i)$  constitui um grau de liberdade do sistema. O campo de vetores definido por um sistema dinâmico pode ser denotado como  $\mathbf{f} = \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\} = \{G_1, \dots, G_n, F_1, \dots, F_n\}$  tal que  $d\mathbf{q}/dt = \mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ;  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . O campo  $\mathbf{f}$  se diz incompressível se

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_i} + \frac{\partial F_i}{\partial p_i} \right) = 0, \quad (2.3)$$

ou, em outras palavras, se  $\mathbf{f}$  preserva volumes no espaço de fases. É possível mostrar que a condição (2.3) implica na existência de uma função escalar  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , tal que

$$G_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, F_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.4)$$

e podemos concluir que  $H$  define uma lei de conservação,  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = cte$ . De fato,

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = 0.$$

A função  $H$  é chamada Hamiltoniana e o sistema cujo campo de vetores é dado por (2.4) se diz *Hamiltoniano*. Neste caso, se diz que as coordenadas e momentos  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  constituem um sistema de variáveis canônicas. Sistemas nos quais existe uma lei de conservação são chamados de conservativos. Num sistema dinâmico em que a componente do campo  $\mathbf{F}$  identifica as forças aplicadas ao sistema ( $F/m = d^2\mathbf{q}/dt^2$ ), é possível mostrar que se estas forças derivam do gradiente de um potencial escalar  $U(\mathbf{q})$  na forma

$$\mathbf{F} = -\nabla_{\mathbf{q}}U \equiv \mathbf{F}(\mathbf{q}),$$

então o sistema é conservativo. De fato,

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \nabla_{\mathbf{p}}T(\mathbf{p}),$$

sendo  $T$  a energia cinética, e podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{p}}T(\mathbf{p}) &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{q}}U \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} \\ \frac{dT}{dt} &= -\frac{dU}{dt}. \end{aligned}$$

Integrando obtemos  $T = -U + E_0$ , onde a constante  $E_0$  é a energia total do sistema. É imediato identificar esta grandeza com a Hamiltoniana do sistema,  $H = T + U$ . Além da conservação da energia, quando o sistema possui algum tipo de simetria é possível achar outras leis de conservação adicionais vinculadas a esta simetria (teorema de Noether). No exemplo anterior, se  $U$  não depende do módulo das coordenadas,  $U \equiv U(q)$ , o sistema tem simetria rotacional e se verifica-se que

$$\mathbf{q} \wedge \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\mathbf{q} \wedge \nabla_{\mathbf{q}}U = 0,$$

já que

$$\nabla_{\mathbf{q}} U \propto \mathbf{q},$$

(o símbolo  $\wedge$  representa o produto exterior ou produto vetorial). Integrando, obtemos uma constante

$$\mathbf{q} \wedge \mathbf{p} = \mathbf{L}_0,$$

que é o momento angular generalizado do sistema.

## 2.3 Integrabilidade

A existência de integrais de movimento ou leis de conservação é de fundamental importância para poder achar solução de um sistema dinâmico. As leis de conservação fazem com que as variáveis do sistema não sejam todas independentes entre si, o que permite eliminar equações do sistema, ou em outras palavras, reduzir os graus de liberdade do problema.

Um sistema dinâmico com  $n$  graus de liberdade se diz integrável (ou completamente integrável) quando a existência de integrais de movimento permite reduzi-lo a um sistema com um único grau de liberdade,  $(q_1, p_1)$ , cujo campo seja incompressível. Este sistema reduzido possui uma lei de conservação  $H(q_1, p_1) = h_0$  que permite escrever,  $p_1 = p(q_1, h_0)$ , e assim as suas duas equações de movimento se reduzem a uma única equação  $dq_1/dt = \partial H/\partial p_1 \equiv g(q_1, h_0)$ , que pode ser resolvida trivialmente.

Na prática, este processo é equivalente à eliminação da variável independente discutida na equação (2.2). Note-se que o fato do sistema reduzido possuir só um grau de liberdade implica que as equações são autônomas, já que uma dependência temporal do campo introduziria um grau de liberdade a mais.

Em termos gerais, podemos dizer que para resolver um sistema arbitrário com  $n$  graus de liberdade precisamos conhecer  $2n - 1$  integrais do movimento (sendo que a existência de pelo menos uma delas está sempre garantida pela incompressibilidade do campo). No entanto, a eliminação de graus de liberdade através da existência de integrais de movimento não constitui a única forma de resolver um sistema. Também é possível fazer isto quando o sistema obedece a algum tipo de vínculo. Normalmente, estes vínculos são tais que permitem desacoplar as equações do sistema, reduzindo assim

o número de integrais necessárias para resolvê-lo. Mas, também existem vínculos que permitem diretamente eliminar graus de liberdade do sistema.

## 2.4 O modelo clássico do problema de $n$ corpos

Para o modelamento de tal problema, primeiramente estabeleceremos alguns postulados, os quais foram naturalmente sugeridos pela intuição e experiência. Consideremos um sistema físico constituído de  $n$  massas no espaço em interação gravitacional mútua, representando as massas,  $m_i$ , cujas posições são descritas pelos vetores de coordenadas cartesianas  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$  onde  $i = 1, \dots, n$ . Newton postulou os seguintes princípios:

1. Princípio de inércia: num sistema de referência inercial, a força aplicada por um corpo  $j$  sobre um corpo  $i$  é proporcional à aceleração adquirida por este último. A constante de proporcionalidade é chamada de massa inercial  $\mathbf{F}_{ji} = m_i \mathbf{a}_i$ ;
2. Princípio de ação e reação: se o sistema é isolado, a toda força aplicada se opõe uma força igual em módulo e de sentido contrário  $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ ;
3. Lei da gravitação universal: a força gravitacional entre dois corpos  $i, j$  é proporcional ao produto das massas gravitacionais deles e inversamente proporcional ao quadrado da distância mútua, ou seja  $\mathbf{F}_{ji} = -\frac{Gm_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{r_{ij}^3}$ , onde  $r_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$ .

Idealmente, todos os fenômenos do domínio clássico devem aparecer como uma consequência desses postulados e de uma rede de conceitos baseados nestes. Também todos os teoremas que podem ser derivados destes postulados devem ter expressão em tal domínio. Estes princípios no domínio clássico descrevem aceitavelmente os fenômenos da mecânica.

A combinação destes postulados leva à descrição do movimento dos  $n$  corpos através de um conjunto de  $3n$  equações diferenciais de segunda ordem da forma

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}. \quad (2.5)$$

Estamos considerando as equações acima no referencial baricêntrico, cuja a constante de gravitação universal,  $G$ , tem 1 unidade.

As equações dadas em (2.5) podem ser reduzidas a um sistema de  $6n$  equações de primeira ordem da forma

$$\begin{aligned} m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} &= m_i \mathbf{v}_i, \\ m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Assim o problema consiste em encontrar as soluções  $\mathbf{r}_i(t)$  e  $\mathbf{v}_i(t)$  do sistema (2.6). Veja [4, 9].

Note-se que o campo dado por este sistema é autônomo e incompressível. Portanto, o sistema é conservativo. Mais ainda, a força  $\mathbf{F}_{ij}$  pode ser derivada a partir de um potencial escalar

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = -\nabla_{r_i} U, \quad (2.7)$$

tal que

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \equiv U(r), \quad (2.8)$$

ou seja, o sistema tem simetria rotacional.

O sistema de equações (2.6) possui certas integrais ou constantes do movimento vinculadas às leis de conservação. Estas são:

1. Integral do centro de massa (6 constantes): advém da simetria definida pelo princípio de ação e reação. De fato, de

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = 0, \quad (2.9)$$

integrando duas vezes

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_c = \frac{\mathbf{v}}{M} = cte,$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{v}t + \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_c = \frac{\mathbf{r}}{M} = cte,$$

com  $M = \sum_{i=1}^n m_i$ .

Portanto, num sistema isolado, o centro de massas constitui um sistema de referência inercial;

2. Integral das áreas ou momento angular (3 constantes): advém da simetria rotacional do potencial. De,

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \wedge m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = 0,$$

integrando obtemos,

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \wedge m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{dA_i}{dt} = cte,$$

onde usamos o fato de que  $\delta \mathbf{A} = \mathbf{r} \wedge \delta \mathbf{r}$  é a área orientada formada pelos vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$ ;

3. Integral da energia (1 constante): advém do fato de que a força deriva de um potencial. Assim,

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \cdot m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = - \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_i} U = - \frac{dU}{dt},$$

integrando, obtemos

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right)^2 = -U + E \rightarrow E = T + U = cte.$$

Sendo assim, devido as leis de conservação, temos dez integrais primeiras. No caso do problema de dois corpos o sistema (2.5) trata-se de um sistema em  $\mathbb{R}^{12}$ . Utilizando as dez integrais primeiras associadas às leis de conservação reduzimos o sistema para  $\mathbb{R}^2$  tornando-o analiticamente solúvel.

Para  $n = 3$ , Bruns [8] demonstra o seguinte teorema.

**Teorema 2.4.1** *No problema Newtoniano de três corpos no espaço, toda integral primeira que é algébrica com respeito a posição, momento linear e tempo é uma função algébrica das integrais primeiras clássicas; a energia, as três componentes do momento angular e as seis integrais que vem do movimento retilíneo e uniforme do centro de massa.*

O teorema acima diz que no problema Newtoniano de três corpos temos apenas 10 integrais primeiras, as mesmas do problema de dois corpos, sendo mesmo resultado válido para  $n > 3$ . Portanto, para resolvermos o problema de  $n$  corpos com  $n \geq 3$  devemos, se possível, encontrar outro método. Um dos métodos utilizados consiste em tomarmos restrições acerca do movimento dos corpos, por exemplo, consideramos que estes corpos se encontram num mesmo plano para todo tempo  $t$ . Discutiremos, no próximo capítulo, uma classe de soluções para o problema de  $n$  corpos denominadas soluções homográfica, as quais são até hoje as únicas soluções analíticas explícitas conhecidas do problema.

# Capítulo 3

## Soluções Homográficas e Configurações Centrais

Neste capítulo, apresentamos uma classe de soluções para o problema de  $n$  corpos, as denominadas soluções homográficas.

Demonstramos que as soluções homográficas assumem a cada instante configurações específicas, que denominaremos configurações centrais. Os resultados aqui apresentados estão, exceto quando mencionado, na sua maioria encontradas em [23] e [26].

Estudamos as configurações centrais mais detalhadamente no próximo capítulo.

### 3.1 Soluções Homográficas e Transformações Ortogonais

Nesta seção começamos dando uma definição das soluções homográficas para o problema de  $n$  corpos. Posteriormente, fazemos uma breve discussão acerca das transformações ortogonais, uma vez que estes objetos aparecem na definição das soluções homográficas.

Nas considerações do capítulo anterior definimos:

**Definição 3.1.1** *Uma solução do problema de  $n$  corpos é dita homográfica se existir uma função escalar  $r = r(t)$ , uma matriz  $\Omega(t) \in SO(3)$  e um vetor  $\tau = \tau(t) \in \mathbb{R}^3$ , tal que,  $\mathbf{r}_i(t) = r(t)\Omega(t)\mathbf{r}_i^0 + \tau(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde  $\mathbf{r}_i, r, \Omega, \tau$  estão definidos para todo  $t$  onde a solução é definida e  $\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{r}_i(t_0)$ ,*



Segue, portanto, que as soluções homográficas  $\mathbf{r}_i(t)$  são caracterizadas pela existência de uma rotação  $\Omega(t)$  e uma dilatação  $r(t) > 0$ , tal que o vetor translação  $\tau(t)$  se anula no referencial baricêntrico. Portanto, as soluções homográficas são dadas por

$$\mathbf{r}_i(t) = r(t)\Omega(t)\mathbf{r}_i^0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

Notemos que a solução homográfica é tal que a configuração inicial é preservada ao longo do tempo a menos de homotetias e rotações. Devemos, primeiramente, verificar se existe alguma solução homográfica para o problema de  $n$  corpos. Para o caso particular de 3 corpos no plano, tome a identificação de  $\mathbb{R}^2$  com  $\mathbb{C}$ . Com isso, e visto que a um produto de números complexos corresponde uma rotação seguida de uma homotetia, a solução homográfica pode ser escrita como

$$r_i(t) = \phi(t)a_i. \quad (3.2)$$

onde  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a_i \in \mathbb{C}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Sejam  $a_1, a_2$  e  $a_3$  vértices de um triângulo equilátero no plano complexo. Definimos  $r_i(t) = e^{i\omega t}a_i$ , onde  $\omega^2 = (m_1 + m_2 + m_3)/l^3$ , sendo  $l = \|a_1 - a_2\| = \|a_1 - a_3\| = \|a_2 - a_3\|$  o lado do triângulo equilátero. Vemos que  $r_i$  é da forma da equação (3.2) com  $\phi(t) = e^{i\omega t}$ . Resta mostrar que  $r_i(t)$  é solução de (1.1). De fato,

$$\ddot{r}_i = -\omega^2\phi(t)a_i = -\frac{m_1 + m_2 + m_3}{\phi(t)}a_i$$

de onde,

$$\begin{aligned} \ddot{r}_i &= -\frac{\phi(t)a_i}{l^3} \sum_j m_j = \frac{\phi(t)}{l^3} \left[ -\sum_j m_j a_i \right] = \\ &= \frac{\phi(t)}{l^3} \left[ (-m_i a_i) - \sum_{j \neq i} m_j a_i \right] = \frac{\phi(t)}{l^3} \left[ \left( \sum_{j \neq i} m_j a_j \right) - \sum_{j \neq i} m_j a_i \right] = \\ &= \frac{1}{l^3} \sum_{j \neq i} m_j (a_j \phi(t) - a_i \phi(t)) = \sum_{j \neq i} \frac{m_j (r_j - r_i)}{\|r_i - r_j\|}. \end{aligned}$$

Na segunda igualdade da segunda linha, usamos o fato de que  $m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 = 0$ , e na última igualdade usamos  $\|\phi(t)\| = 1$  donde,  $l = \|a_i - a_j\| \cdot \|\phi(t)\| = \|a_i \phi(t) - a_j \phi(t)\| = \|r_i - r_j\|$ . Assim  $r = (r_1, r_2, r_3)$ , definida acima, é uma solução do problema de 3 corpos com massas  $m_1, m_2$  e  $m_3$ .

Considere o conjunto de todas matrizes reais de ordem  $n$  inversíveis munido com a operação de multiplicação usual. Para  $n \neq 1$  esta estrutura é um grupo não-abeliano. Denotaremos este grupo por  $GL(n, \mathbb{R})$  (grupo linear geral de ordem  $n$  sobre  $\mathbb{R}$ ).

Seja

$$\mathcal{A}(3, \mathbb{R}) = \{A \in GL(3, \mathbb{R}) | A^\top = -A\},$$

onde  $A^\top$  é a transposta da matriz  $A$ , o conjunto das matrizes inversíveis anti-simétricas de ordem  $3 \times 3$  com coeficientes reais e,

$$SO(3) = \{\Omega \in GL(3, \mathbb{R}) | \Omega^\top = \Omega^{-1} \text{ e } \det \Omega = 1\}$$

o conjunto das matrizes ortogonais de ordem  $3 \times 3$  com determinante 1.

Seja  $\Omega(t) \in SO(3)$ , para todo  $t$ . Suponhamos que  $\Omega(t)$  é de classe  $\mathcal{C}^2$ . Sendo  $(\Omega(t))^\top \Omega(t) = I$ ,  $I$  é a matriz identidade, segue-se que

$$\frac{d}{dt}[(\Omega(t))^\top \Omega(t)] = 0, \text{ donde, } \dot{\Omega}^\top \Omega + \Omega^\top \dot{\Omega} = 0, \text{ logo, } \Omega^{-1} \dot{\Omega} = -(\Omega^{-1} \dot{\Omega})^\top,$$

implicando que  $\Omega^{-1} \dot{\Omega} \in \mathcal{A}(3, \mathbb{R})$ , e por um isomorfismo entre  $\mathcal{A}(3, \mathbb{R})$  e  $\mathbb{R}^3$ , associamos a  $\Omega = \Omega(t)$  a existência de um vetor  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t) \in \mathbb{R}^3$  e uma matriz  $\Sigma = \Sigma(t) \in \mathcal{A}(3, \mathbb{R})$ , tal que

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \text{ e } \Sigma \equiv \Omega^{-1} \dot{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix} = -\Sigma^\top. \quad (3.3)$$

Assim

$$\dot{\Sigma} = \Omega^\top \ddot{\Omega} + \dot{\Omega}^\top \dot{\Omega}. \quad (3.4)$$

Como  $\Sigma^\top = \dot{\Omega}^\top \Omega$ , então  $\Sigma^\top \Omega^{-1} = \dot{\Omega}^\top$  e segue-se que  $-\Sigma \Omega^\top = \dot{\Omega}^\top$ . Substituindo esta expressão em (3.4) temos  $\dot{\Sigma} = \Omega^{-1} \ddot{\Omega} - \Sigma \Omega^\top \dot{\Omega} = \Omega^{-1} \ddot{\Omega} - \Sigma^2$ , isto é,

$$\Omega^{-1} \ddot{\Omega} = \dot{\Sigma} + \Sigma^2, \quad (3.5)$$

onde  $\Sigma^2 = (s_i s_k - \|\mathbf{S}\|^2 e_{ik})$ ,  $\|\mathbf{S}\|^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$  e  $(e_{ik})$  é o elemento correspondente a  $i$ -ésima coluna e a  $k$ -ésima linha da matriz identidade, isto é,

$$\Sigma^2 = \begin{pmatrix} -(s_2^2 + s_3^2) & s_1 s_2 & s_1 s_3 \\ s_1 s_2 & -(s_1^2 + s_3^2) & s_2 s_3 \\ s_1 s_3 & s_2 s_3 & -(s_1^2 + s_2^2) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Reciprocamente, dado  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^3$ , e  $\Sigma(t) \in \mathcal{A}(3, \mathbb{R})$  ambas de classe  $\mathcal{C}^2$ , afirmamos que sempre existe  $\Omega(t) \in SO(3)$  tal que  $\Sigma(t) = \Omega^{-1}\dot{\Omega}$  e  $\Omega(t)$  é unicamente determinada por  $\mathbf{S}$  e por uma condição inicial  $\Omega(t_0)$  a qual pode ser escolhida como uma matriz ortogonal arbitrária.

De fato, para verificarmos isto é equivalente verificarmos que  $d\Omega/dt = \Sigma(t)\Omega$ . Deste modo, obtemos da teoria das equações diferenciais ordinárias que  $\Omega(t)$  é definida por

$$\Omega(t) = \Omega(t_0)e^{\int_{t_0}^t \Sigma(\tau)d\tau},$$

portanto,  $\Omega(t) \in SO(3)$ , para todo  $t$ . Visto que  $\Omega(t_0) \in SO(3)$  e como  $\Sigma(t)$  é uma matriz anti-simétrica, temos que  $\int_{t_0}^t \Sigma(\tau)d\tau$  é também uma matriz anti-simétrica, e é sabido que  $e^A$  é uma matriz ortogonal com determinante 1, visto que  $A \in \mathcal{A}(3, \mathbb{R})$ .

Disto verifica-se que  $\Omega(t)$  é única, visto que, do teorema da existência e unicidade das equações diferenciais ordinárias, existe uma única solução  $\Omega(t)$  para uma condição inicial  $\Omega(t_0)$ .

**Proposição 3.1.1** *Sejam  $s_1, s_2, s_3$  as entradas da matriz  $\Sigma$  dada em (3.3). Então, supondo  $\Omega = I$  (matriz identidade de ordem 3), teremos:*

$$\begin{aligned} a) \Sigma &= \begin{pmatrix} 0 & -s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Omega = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \dot{\phi} = s_3; \\ b) \Sigma &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Omega = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}; \dot{\phi} = s_2; \\ c) \Sigma &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_1 \\ 0 & s_1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}; \dot{\phi} = s_1. \end{aligned}$$

**Demonstração.** Demonstraremos aqui o item a) sendo que a demonstração dos outros itens são completamente análogas.

Suponhamos que  $\Sigma = s_3 E$ , com  $E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Então,  $\Omega = e^{\phi E}$  onde  $\phi = \int_{t_0}^t s_3(x) dx$ . Sendo

$$e^{\phi E} = I + \phi E + \frac{(\phi E)^2}{2!} + \frac{(\phi E)^3}{3!} + \dots$$

e observando que

$$E^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E^3 = -E, E^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E^5 = E, E^6 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

...

Segue que

$$\Omega = e^{\phi E} = I + \left( -\frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} + \dots \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left( \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} + \dots \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resultando

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \cos \phi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sin \phi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Disto temos que, em um sistema de coordenadas  $(x, y, z)$ , a matriz  $\Omega$  corresponde a uma rotação em torno do eixo  $z$ .

Analogamente podemos demonstrar os itens *b*) e *c*), bastando tomar  $E$  como sendo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ no item } b),$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ no item } c),$$

respectivamente.

Reciprocamente, se

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

temos

$$\dot{\Omega} = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \sin \phi & -\dot{\phi} \cos \phi & 0 \\ \dot{\phi} \cos \phi & -\dot{\phi} \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $\Sigma = \Omega^\top \dot{\Omega}$ , temos que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & -s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde  $s_3 = \dot{\phi}$ . Analogamente demonstra-se os itens b) e c). ■

## 3.2 Soluções Homográficas flat e não-flat

O intuito desta seção é discutir algumas características relativas às configurações dos corpos em cada instante nas soluções homográficas, de modo que, no final desta seção enunciaremos dois lemas que serão utilizados na seção seguinte.

**Definição 3.2.1** *Uma dada solução do problema de  $n$  corpos é dita ser retilínea se existe uma reta  $\mathcal{L}_0$  que contém os  $n$  corpos para todo instante  $t$ .*

**Definição 3.2.2** *Uma dada solução do problema de  $n$  corpos é dita colinear se existe, para cada instante  $t$ , uma reta  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t)$  que contém os  $n$  corpos no instante  $t$ .*

**Proposição 3.2.1** *Seja  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) uma solução colinear não retilínea. Então, temos o momento angular dos  $n$  corpos não nulo, isto é,  $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \wedge m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \neq 0$ .*

**Demonstração.** Sendo  $\mathbf{r}_i(t)$  colinear segue que existe um vetor unitário  $\mathbf{e} = \mathbf{e}(t)$  e uma função tais que  $\lambda_i(t)\mathbf{e}(t)$ . Estamos supondo que a reta passa pela origem de nosso sistema de coordenadas. Veja (3.2.3). Derivando  $\mathbf{r}_i$  em relação a  $t$ , temos  $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\lambda}\mathbf{e} + \lambda\dot{\mathbf{e}}$ . Desta forma,

$$\mathbf{L} = \left( \sum \lambda_i^2 m_i \right) \mathbf{e} \wedge \dot{\mathbf{e}}.$$

Como  $\mathbf{e}$  é unitário, temos  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1$ , de onde derivando, temos  $2\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}} = 0$  e portanto,  $\mathbf{e}$  e  $\dot{\mathbf{e}}$  são ortogonais. Sendo assim,  $\mathbf{e} \wedge \dot{\mathbf{e}} \neq 0$ , pois  $\dot{\mathbf{e}} \neq 0$ , visto que a solução não é retilínea. Logo,  $\mathbf{L} \neq 0$  pois, para algum índice  $i$ , temos que  $\lambda_i \neq 0$ .

■

**Definição 3.2.3** (*Solução Planar*) Uma solução do problema de  $n$  corpos é dita planar se existe um plano  $\Pi_0$  que contém os  $n$  corpos para todo  $t$ .

**Proposição 3.2.2** *Toda solução colinear é planar.*

**Demonstração.** Se  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$  é uma solução colinear, então  $\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{r}_k = 0$ , onde  $i, k = 1, 2, \dots, n$ . Logo,  $(\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{r}_k) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = 0$ , assim,  $(\mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \mathbf{r}_k = 0$ , portanto, tendo em vista a definição do momento angular  $\mathbf{L}$ , temos  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{r}_k = 0$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ , ou seja, para todo instante  $t$  os corpos estão em um plano passando pela origem possuindo como vetor normal o vetor constante  $\mathbf{L}$ .

■

**Definição 3.2.4** (*Solução Flat*) Uma solução do problema de  $n$  corpos é dita flat se existe, para todo  $t$ , um plano  $\Pi(t)$  que contém os  $n$  corpos no instante  $t$ .

**Proposição 3.2.3** *Dada uma solução flat, cujo plano  $\Pi(t)$  é o plano que contém os  $n$  corpos em um instante  $t$ ,  $\Pi(t)$  passa a cada instante pela origem do sistema de coordenadas, que é o centro de massa.*

**Demonstração.** Seja  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) uma solução flat do problema de  $n$  corpos com massas  $m_i$ . Assim, para cada instante  $t$ , existe um plano  $\Pi = \Pi(t)$  que contém os corpos com massas  $m_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Seja  $\mathbf{r}_0 \in \Pi(t)$ , portanto, temos que  $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0) \wedge (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0)$  é ortogonal  $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0)$ , portanto, ortogonal a  $\Pi$ . Seja o centro de massa, dado por

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i, \text{ então } \mathbf{C} = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) + \mathbf{r}_0.$$

Com isso

$$\mathbf{C} - \mathbf{r}_0 = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0).$$

Sendo que  $(\mathbf{C} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0) \wedge (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0) = 0$ , desta forma temos que  $(\mathbf{C} - \mathbf{r}_0)$  é paralelo à  $\Pi(t)$ , com  $\mathbf{C} \in \Pi(t)$ , para todo  $t$ .

■

Retornando às soluções homográficas que, como vimos são dadas por (3.1), como  $\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{r}_i(t_0)$ , temos que  $r^0 = r(t_0) = 1$ ,  $\Omega^0 = \Omega(t_0) = I$ , onde  $I$  é a matriz identidade de ordem  $3 \times 3$ . Considerando as mudanças de coordenadas  $\mathbf{x}_i = \Omega^{-1}(t)\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , a relação (3.1) assume a seguinte forma

$$\mathbf{x}_i = r\mathbf{r}_i^0, i = 1, \dots, n,$$

isto é, se  $\mathbf{r}_i(t)$  é uma solução de um sistema em um referencial inercial, então  $\mathbf{x}_i(t) = r(t)\mathbf{r}_i^0$  é solução do sistema nas coordenadas rotacionadas.

Existem dois tipos particulares de soluções homográficas:

- Soluções Homotéticas. Estas soluções se expandem ou se contraem preservando as distâncias mútuas entre os corpos, porém não possui rotação. Essas soluções são, em vista de  $\mathbf{r}_i = r\Omega\mathbf{r}_i^0$ , caracterizadas por:

$$\mathbf{r}_i = r\mathbf{r}_i^0, (\Omega(t) = I, r = r(t) > 0), \quad (3.7)$$

- Soluções de Equilíbrio Relativo. Nesta solução as configurações possuem rotações, porém não dilatam ou contraem, em vista de  $\mathbf{r}_i = r\Omega\mathbf{r}_i^0$ , estas soluções são caracterizadas por

$$\mathbf{r}_i = \Omega\mathbf{r}_i^0, (r(t) = 1, \Omega = \Omega(t)), \quad (3.8)$$

Notemos que neste caso as partículas se encontram em repouso relativo a um sistema em rotação conveniente, daí o nome equilíbrio relativo.

No que segue enunciaremos dois lemas cujas demonstrações serão omitidas. As demonstrações podem ser encontradas em [26]. Esses lemas serão utilizadas na seção seguinte.

**Lema 3.2.1** *No problema Newtoniano de  $n$  corpos, toda solução homográfica flat é uma solução planar.*

**Lema 3.2.2** *No problema Newtoniano de  $n$  corpos, toda solução homográfica não-flat é uma solução homotética.*

### 3.3 Soluções Homográficas e Configurações Centrais

No que segue demonstraremos dois resultados, que conectam as denominadas *configurações centrais* às soluções homográficas.

Definiremos a seguir uma configuração particular para  $n$  corpos no espaço, as configurações centrais. Estas configurações são de extrema importância no estudo do problema de  $n$  corpos, pois, a cada instante  $t$  a configuração de  $n$  corpos em uma solução homográfica é uma configuração central. Além disso, se  $n$  massas  $m_1, \dots, m_n$ , formam uma configuração central  $\mathbf{r}_i^0$ , então existem funções,  $r(t)$  e  $\Omega(t)$ , tais que,  $\mathbf{r}_i = r(t)\Omega(t)\mathbf{r}_i^0$  é uma solução homográfica.

**Definição 3.3.1** Dizemos que as  $n$  massas no referencial baricêntrico formam uma configuração central se o vetor aceleração de cada partícula é proporcional ao seu vetor posição relativo ao centro de massa do sistema, ou seja, se existir  $\lambda$  positivo tal que

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \lambda \mathbf{r}_i, \quad (3.9)$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Assim, de (1.1), as equações que regem o problema de  $n$  corpos numa configuração central são dadas por

$$\lambda \mathbf{r}_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}, \quad (3.10)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Proposição 3.3.1** Se  $\mathbf{r}_i(t)$ , com  $i = 1, \dots, n$ , é uma solução homográfica do problema de  $n$  corpos com massas  $m_1, \dots, m_n$ , então  $\mathbf{r}_i^0$  forma uma configuração central das massas  $m_i$ , para cada instante  $t_0$  fixado.

**Demonstração.** Suponhamos que a solução homográfica  $\mathbf{r}_i$  do problema de  $n$  corpos é planar, então, como em (3.2), escrevemos  $\mathbf{r}_i(t) = \phi(t)a_i$ , onde  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $a_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Substituindo na equação (1.1) do problema de  $n$  corpos, temos

$$\|\phi(t)\|^3 \phi^{-1}(t) \ddot{\phi}(t) = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (a_j - a_i)}{\|a_i - a_j\|^3} m_i^{-1} a_i^{-1}. \quad (3.11)$$

Como o membro direito de equação acima não depende de  $t$ , a função de  $t$  no primeiro membro é constante, logo, existe  $\lambda > 0$  tal que  $\|\phi(t)\|^3 (\phi(t))^{-1} \ddot{\phi}(t) = -\lambda$ , ou



$$\phi(\ddot{t}) = \frac{-\lambda}{\|\phi(t)\|^3} \phi(t). \quad (3.12)$$

A substituição em (3.11) dá que

$$-\lambda a_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j (a_j - a_i)}{\|a_i - a_j\|^3},$$

provando que  $a = (a_1, \dots, a_n)$  e assim que cada  $\mathbf{r}_i(t_0) = \phi(t_0)a_i$ , é uma configuração central.

Suponhamos agora que  $\mathbf{r}_i$  seja uma solução não planar. Pelos Lemas 3.2.1 e 3.2.2 a solução é necessariamente homotética, ou seja  $\mathbf{r}_i = r\mathbf{r}_i^0$ , onde  $\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{r}_i(t_0)$  para algum  $t_0$ . Substituindo  $\mathbf{r}_i$  na equação (2.5), temos

$$(\ddot{r}r^2)m_i\mathbf{r}_i^0 = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i^0 - \mathbf{r}_j^0\|^3} (\mathbf{r}_j^0 - \mathbf{r}_i^0), \quad (3.13)$$

Como já visto, a função  $\ddot{r}r^2$  deve ser igual a uma constante  $-\lambda$ . Substituindo em (3.13) obtemos

$$-\lambda m_i \mathbf{r}_i^0 = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i^0 - \mathbf{r}_j^0\|^3} (\mathbf{r}_j^0 - \mathbf{r}_i^0),$$

sendo, assim,  $\mathbf{r}_i^0$  uma configuração central. Portanto, cada  $\mathbf{r}_i(t_0) = r(t_0)\mathbf{r}_i^0$  é uma configuração central. ■

**Proposição 3.3.2** *Seja  $\mathbf{r}_i^0$  uma configuração central das massas  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Então existem funções  $r(t)$  e  $\Omega(t)$  tais que  $\mathbf{r}_i(t) = r(t)\Omega(t)\mathbf{r}_i^0$  é uma solução homográfica.*

**Demonstração.** Suponhamos que  $\mathbf{r}_i^0$  é uma configuração central planar. Neste caso, podemos escrever  $\mathbf{r}_i^0 = a_i \in \mathbb{C}$ . Assim, existe  $\lambda > 0$  tal que

$$\lambda m_i a_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\|a_i - a_j\|^3} (a_j - a_i), \quad (3.14)$$

Seja  $\phi(t) : I \rightarrow \mathbb{C}$  uma função satisfazendo (3.12) para  $\lambda$  obtido de (3.14). Definamos, então,  $\mathbf{r}_i(t) = \phi(t)a_i$ .

Notemos que  $\phi(t)$  satisfaz (3.12) e  $\lambda$  satisfaz (3.14) e, portanto, a equação (3.11) é satisfeita. Logo,

$$\ddot{\phi} m_i a_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (\phi(t)a_j - \phi(t)a_i)}{\|\phi(t)a_i - \phi(t)a_j\|^3}.$$

Assim

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3}.$$

Portanto,  $\mathbf{r}_i$  é uma solução homográfica do problema de  $n$  corpos. Suponhamos que  $\mathbf{r}_i^0$  seja uma configuração central não planar. Então, existe  $\lambda$  tal que

$$\lambda m_i \mathbf{r}_i^0 = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_j^0 - \mathbf{r}_i^0)}{\|\mathbf{r}_i^0 - \mathbf{r}_j^0\|^3}. \quad (3.15)$$

É suficiente considerarmos  $r(t)$  como sendo solução da equação diferencial  $\ddot{r}r^2 = -\lambda$ . A função  $r(t)$  existe, de fato, via teorema da existência e unicidade. Disto, e da última equação, temos,  $\mathbf{r}_i(t) = r(t)\mathbf{r}_i^0$  satisfaz a equação (3.13). Assim,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^0 = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j (r\mathbf{r}_j^0 - r\mathbf{r}_i^0)}{\|r\mathbf{r}_i^0 - r\mathbf{r}_j^0\|^3}.$$

De onde

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3}.$$

Portanto,  $\mathbf{r}_i(t) = r(t)\mathbf{r}_i^0, i = 1, \dots, n$  é uma solução homográfica do problema de  $n$  corpos. ■

### 3.4 Equilíbrio Relativo e Configurações Centrais

As soluções de equilíbrio relativo, segundo Smale em [14], podem ser interpretadas como os pontos críticos de uma função induzida por um potencial de um problema planar de  $n$  corpos. Mais precisamente, o equilíbrio relativo corresponde a pontos críticos de

$$\hat{V} : (S_k - \Delta)/SO(2) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (3.16)$$

onde  $S_k = \{\mathbf{r} \in (\mathbb{R}^2)^n \mid \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = 0, \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\mathbf{r}_i\|^2 = 1\}$  e  $\Delta = \{\mathbf{r} \in S_k \mid \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j \text{ para } i \neq j\}$ .

O grupo de rotação  $SO(2)$  atua em  $S_k - \Delta$  e  $\hat{V}$  é induzido no conjunto quociente de função potencial

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}.$$

Note que  $V : S_k \rightarrow \mathbb{R}$  é invariante sob o grupo de rotação  $SO(2)$  e que o espaço quociente  $S_k/SO(2)$  é homeomorfo ao espaço projetivo complexo de dimensão  $n - 2$ . Deste modo podemos colocar a seguinte questão:

*Existe alguma escolha das massas,  $m_1, \dots, m_n$ , tais que o número de pontos críticos de  $\hat{V}$  em (3.16) seja finito?*

Em [22], Mike Shub mostra que o conjunto de pontos crítico de  $\hat{V}$  é compacto.

Consideremos o problema planar de  $n$  corpos. Denotemos o nosso sistema de coordenadas inercial por  $(x, y)$ . Denotemos um sistema não inercial de coordenadas que gira em torno do centro de massa com velocidade angular constante  $\omega$ , por  $(X, Y)$ . Portanto, se  $r_i = (x_i, y_i)$  no nosso sistema inercial, escreveremos  $r_i$  no sistema em rotação por

$$r_i = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = (X_i \cos \omega t - Y_i \sin \omega t, X_i \sin \omega t + Y_i \cos \omega t),$$

sendo  $r_i = \Omega Z_i$ , onde  $Z_i = (X_i, Y_i)$ . As equações diferenciais do problema de  $n$  corpos, em termos das coordenadas do sistema em rotação  $(X, Y)$ , são dadas por

$$\begin{aligned} m_i \ddot{r}_i &= U_{r_i}, \\ m_i (\ddot{\Omega} Z_i + \dot{\Omega} \dot{Z}_i + \Omega \ddot{Z}_i) &= U_{r_i}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\dot{\Omega} = \Omega \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \ddot{\Omega} = -\omega^2 \Omega.$$

Assim,

$$m_i (\ddot{\Omega} Z_i + \dot{\Omega} \dot{Z}_i + \Omega \ddot{Z}_i) = U_{r_i} \Rightarrow m_i (-\omega^2 \Omega Z_i + 2\Omega \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \dot{Z}_i + \Omega \ddot{Z}_i) = \Omega U_{Z_i}.$$

Segue-se que

$$m_i (\ddot{X}_i - 2\omega \dot{Y}_i - \omega^2 X_i) = U_{X_i}, \quad (3.17)$$

$$m_i (\ddot{Y}_i + 2\omega \dot{X}_i - \omega^2 Y_i) = U_{Y_i}. \quad (3.18)$$

Uma solução de equilíbrio relativo é caracterizada pela existência de um valor  $\omega$ , tal que (3.17) e (3.18) têm, para este valor particular de  $\omega$ , uma solução da forma

$$X_i(t) \equiv X_i^0, Y_i(t) \equiv Y_i^0, \quad (3.19)$$

$$\sum m_i X_i^0 = 0, \sum m_i Y_i^0 = 0. \quad (3.20)$$

Substituindo (3.19) em (3.17) e (3.18) temos

$$\omega^2 X_i^0 = \sum_{k \neq i} m_k \frac{X_i^0 - X_k^0}{\rho_{ik}^{03}}, \omega^2 Y_i^0 = \sum_{k \neq i} m_k \frac{Y_i^0 - Y_k^0}{\rho_{ik}^{03}} \quad (3.21)$$

onde  $\rho_{ik}^0 = [(X_i^0 - X_k^0)^2 + (Y_i^0 - Y_k^0)^2]^{\frac{1}{2}}$ . Portanto, o problema de determinar todos os conjuntos das  $2n + 1$  constantes  $X_i^0, Y_i^0$  e  $\omega$  que satisfazem as  $2n + 2$  condições dadas em (3.20), é equivalente ao problema de enumerar todas as configurações centrais. Se (3.19) é uma solução de equilíbrio relativo correspondentes às massas  $m_i$  com velocidade angular  $\omega$  então  $X_i = \rho X_i^0$  e  $Y_i = \rho Y_i^0$  é, para todo  $\rho > 0$  uma solução de equilíbrio relativo com velocidade angular  $\rho^{-\frac{3}{2}}\omega$ , pois

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{X_i - X_k}{\rho_{ik}^3} = \frac{\rho}{\rho^3} \sum_{k=1}^n m_k \frac{X_i^0 - X_k^0}{\rho_{ik}^0} = \rho^{-2} \omega^2 X_i^0 = \rho^{-3} \omega^2 X_i = (\rho^{-\frac{3}{2}} \omega)^2 X_i.$$

De forma análoga podemos mostrar isto para  $Y_i$ . Esta mudança arbitrária de dimensão linear junto com a possível passagem de  $t$  para  $\pm t + cte$ , esgotam todas as soluções de equilíbrio relativo pertencentes à mesma configuração central de massas  $m_i$ , visto que a translação no tempo em um sistema autônomo não altera a solução.

# Capítulo 4

## Configurações Centrais e as Equações de Dziobek

Neste capítulo apresentamos alguns aspectos e resultados relacionados com as configurações centrais. Os resultados aqui apresentados estão baseados em [16] e [17]. Posteriormente, definimos as equações de Dziobek, as quais, formam um sistema de equações algébricas, que dão uma nova caracterização às configurações centrais. Demonstraremos a equivalência entre as equações de Dziobek e as equações que definem uma configuração central para o caso planar e para o caso espacial. Por fim, daremos algumas aplicações das equações de Dziobek, verificando a existência de configurações centrais para alguns casos particulares do problema de  $n$  corpos.

### 4.1 Configurações Centrais

Equivalentemente à definição de configuração central (3.3.1) no capítulo anterior, uma configuração  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$  de  $n$  corpos, é uma configuração central se existir uma constante  $\lambda$  tal que

$$M^{-1} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \lambda \mathbf{r}, \quad (4.1)$$

onde  $r = (r_1, \dots, r_n)^\top \in \mathbb{R}^{3n}$ ,  $M$  sendo a matriz  $\text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n)$  e  $\Delta$  o conjunto colisão. A conexão entre as configurações centrais e o problema de  $n$ -corpos, motivam a diversas perguntas interessantes, como por exemplo, o que ocorre com os corpos em configuração central cuja velocidade inicial é igual a zero? Ocorre

que todos corpos são acelerados ao longo de um caminho de modo a se colapsarem homoteticamente. O resultado é uma colisão singular. As configurações centrais também podem ser vistas como os pontos de equilíbrios de certos fluxos gradientes. Para isto consideremos a métrica

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } (\mathbf{r}, \mathbf{r}) \mapsto \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \mathbf{r}^\top M \mathbf{r}.$$

Considere

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{r} : \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = 1, m_1 r_1 + \dots + m_n r_n = 0\}$$

a esfera unitária com respeito a métrica acima, em um subespaço de  $\mathbb{R}^{3n}$  determinado pelo referencial baricêntrico. Este subespaço possui dimensão  $3n - 3$  e, portanto, a esfera  $\mathcal{S}$  possui dimensão  $3n - 4$ .

Notemos que a equação (4.1) possui a seguinte propriedade: se  $\mathbf{r}$  é uma solução de (4.1), então  $K\mathbf{r}$  também será (o valor de  $\lambda$  pode ser escolhido como  $\lambda'|K|^{-3}$ ), deste modo não há perda de generalidade se considerarmos  $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = 1$ . As condições do centro de massa valem automaticamente para as soluções de (4.1), desde que  $\lambda(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i) = -\sum_{i=1}^n \nabla_i U(\mathbf{r}) = 0$ . Visto que

$$\lambda(\sum_i m_i |\mathbf{r}|^2) = -\sum \mathbf{r}^\top \nabla_i U(q) = U(q)$$

e que  $U$  é homogêneo e de grau  $-1$ , segue que  $\lambda$  é unicamente determinado por  $\mathbf{r}$ ,  $\lambda = U(\mathbf{r})$ .

**Proposição 4.1.1** *O campo vetorial  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = M^{-1}\nabla U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\mathbf{r}$  é o gradiente do potencial  $U$  restrito a esfera  $\mathcal{S}$ ,  $U|_{\mathcal{S}}$ , com respeito à métrica  $\langle, \rangle$ . Além disso, os pontos de equilíbrio do campo são exatamente as configurações centrais em  $\mathcal{S}$ .*

**Demonstração.** Para demonstrar isso, devemos verificar que  $\mathbf{F}$  é tangente a  $\mathcal{S}$  e que para todo  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{r}}\mathcal{S}$ , temos a derivada de  $U$  em  $r$  na direção de  $v$  dada por  $DU(\mathbf{r})(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle$ . Onde  $T_{\mathbf{r}}\mathcal{S}$  é o espaço tangente a  $\mathcal{S}$  em  $r$ .

Por construção,  $\mathbf{r}$  é um vetor normal à  $\mathcal{S}$  com respeito à métrica  $\langle, \rangle$ .

Devido a homogeneidade do potencial, temos,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}, \mathbf{r} \rangle &= \langle M^{-1}\nabla U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \langle M^{-1}\nabla U(\mathbf{r}), \mathbf{r} \rangle + U(\mathbf{r}) \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \\ &= \mathbf{r}^\top M M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \cdot 1 = -U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) = 0, \end{aligned}$$

portanto,  $\langle \mathbf{F}, \mathbf{r} \rangle = 0$  como queríamos.

Se  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{r} \rangle = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle &= \langle M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle = \langle M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}), \mathbf{v} \rangle + U(\mathbf{r}) \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle \\ &= (M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}))^\top M \mathbf{v} = \nabla U(\mathbf{r})^\top (M^{-1})^\top M \mathbf{v} = \nabla U(\mathbf{r})^\top M^{-1} M \mathbf{v} = DU(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Se denotarmos o gradiente de  $U$  com respeito à métrica  $\langle, \rangle$  por  $\tilde{\nabla}$ , podemos escrever (4.1) como

$$\tilde{\nabla} U|_{\mathcal{S}} = 0.$$

Deste modo podemos ver uma configuração central como os pontos críticos de uma função real analítica em  $\mathcal{S}$ . Alternativamente, podemos considerar o fluxo gradiente em  $\mathcal{S}$

$$\mathbf{r}' = \tilde{\nabla} U|_{\mathcal{S}},$$

e então as configurações centrais são pontos de equilíbrio deste fluxo.

■

Notemos que a dinâmica deste fluxo não é a mesma dinâmica do fluxo correspondente à solução do problema de  $n$  corpos, uma vez que este fluxo restrito à esfera está no espaço de configurações, enquanto que o fluxo do problema de  $n$  corpos está no espaço de fase. Porém, como visto no capítulo anterior, a classe de soluções de (1.1) conhecidas como soluções homográficas estão de certa forma vinculadas às soluções de (4.1).

Podemos questionar se existe apenas um número finito,  $n \in \mathbb{N}$ , para os quais podemos escolher ao menos um conjunto de massas positivas  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ ,  $m_i \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , de modo que exista ao menos uma configuração central. Esta foi uma questão proposta por Wintner [27].

Posteriormente Wintner/Smale [27], [25] conjecturam:

Dadas  $n$  massas positivas no problema de  $n$  corpos, o número de classes de configurações centrais é finita?

Para  $n = 2$  temos somente uma solução, a qual é dada por uma cônica, que depende dos valores da energia, com o centro de massa em um de seus focos. Assim temos somente uma classe de configurações centrais para  $n = 2$ . Para  $n = 3$ , Euler [4]

mostrou em 1767 que existem exatamente 3 soluções colineares as quais correspondem a 3 classes de configurações centrais.

Logo depois, em 1772, Lagrange [9] mostrou que para cada tripla  $m_1, m_2, m_3$  existem além das soluções colineares de Euler, exatamente duas soluções planares, as quais correspondem a duas classes de configurações centrais onde os corpos se encontram nos vértices de um triângulo equilátero, dados por  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_1, r_3, r_2$ .

Assim, para  $n = 3$ , as classes de configurações centrais estão classificadas. Para o caso planar com  $n = 4$ , Albouy [1] classificou todas configurações centrais de quatro corpos com massas iguais: a configuração colinear, o quadrado, o triângulo equilátero com uma massa no centro, o triângulo isósceles com um dos corpos no eixo de simetria.

Para o caso de 4 massas arbitrárias, recentemente, Hampton e Moeckel em [6] responderam afirmativamente a questão sobre a finitude das configurações centrais, mostrando que, neste caso, o número de configurações centrais planares não equivalentes está entre 32 e 8472. A questão acima ainda está em aberto para  $n > 4$ . Uma questão interessante acerca da finitude das configurações centrais aparece em um exemplo do problema de 5 corpos onde um dos corpos possui massa negativa, para o qual o número de configurações centrais não é finito. Esse exemplo será apresentado detalhadamente no final deste capítulo.

Uma contribuição relevante para o problema da classificação é o de determinar todas as classes de configurações colineares para  $n$  massas arbitrárias. Acabamos de ver que se  $n = 2$  ou  $n = 3$  existem exatamente 1 e 3 classes de configurações centrais, respectivamente.

O caso  $n = 3$  foi mostrado por Euler em [4] no ano de 1767. Em 1891, Lehmann-Filhés mostrou que, para cada ordenamento de  $m_1, m_2, \dots, m_n$  existe uma configuração colinear.

Finalmente, em 1910, Mouton [18] mostrou que para cada ordenamento dos  $n$  corpos existe uma única configuração central colinear. Portanto, o número de configurações centrais colineares com  $n$  corpos é  $n!/2$ .

**Teorema 4.1.1** *Dadas  $n$  massas  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) o número de classes de configurações centrais colineares é exatamente  $n!/2$ .*



**Demonstração.** Seja  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ . Definimos o conjunto

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \mid J(\mathbf{r}) = 1, C(\mathbf{r}) = 0\},$$

onde  $J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$  e  $C = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n m_i r_i$  são o momento de inércia e o centro de massa, respectivamente.

Podemos ver  $\mathcal{S}$  como uma esfera topológica de dimensão  $n - 2$  em  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $\Delta'_{ij} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \mid r_i = r_j\}$  e  $\Delta' = \cup \Delta'_{ij}$ , seja, também,  $\Delta = \Delta' \cap \mathcal{S}$ .

Seja  $\mathbf{U}$  a restrição do potencial  $U$  à  $\mathcal{S} - \Delta$ . Por exemplo, se  $n = 3$ ,  $\mathcal{S} \cap \Delta'_{ij}$  é um dos grandes círculos. Notemos que  $\mathcal{S} - \Delta$  tem  $n!$  componentes conexas. Isto se deve ao fato de uma componente conexa de  $\mathcal{S} - \Delta$  corresponder a uma ordenação particular dos  $r_i$ , pois, para cada componente conexa existe uma ordenação  $r_{i_1} < r_{i_2} \dots < r_{i_n}$ , onde  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  é uma das permutações de  $1, 2, \dots, n$ .

Existem  $n!$  tais permutações. Visto que  $\mathbf{U} \rightarrow \infty$  quando  $\mathbf{r} \rightarrow \Delta$ , a função  $\mathbf{U}$  tem ao menos um mínimo em cada componente conexa. Disto, segue que existe ao menos  $n!$  pontos críticos de  $\mathbf{U}$ . Vamos mostrar que esses pontos críticos são únicos em cada componente conexa.

Seja  $a$  um ponto crítico de  $\mathbf{U}$ . Consideremos a derivada de  $\mathbf{U}$  em  $a$  na direção de  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in T_p \mathcal{S}$ , onde  $T_p \mathcal{S}$  é o espaço tangente a  $\mathcal{S}$  em  $a$ .

Assim,

$$D\mathbf{U}(a)(\mathbf{v}) = - \sum \frac{m_i m_j (v_j - v_i)}{|a_j - a_i|^2} + \lambda \sum m_i a_i v_i,$$

onde  $\lambda = \frac{U(a)}{J(a)}$ , e a derivada segunda é

$$D^2\mathbf{U}(a)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 2 \sum \frac{m_i m_j}{|a_j - a_i|^3} ((w_j - w_i)(v_j - v_i)) + \lambda \sum m_i w_i v_i.$$

Vemos que  $D^2\mathbf{U}(a)(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$  quando  $\mathbf{v} \neq 0$ .

Portanto,  $D^2\mathbf{U}(a)$  é definida positiva em cada ponto crítico, implicando que tais pontos críticos são os mínimos de  $\mathbf{U}$ . Logo, não pode existir mais que um ponto crítico em cada componente conexa, resultando que existem exatamente  $n!$  pontos críticos. Removendo a simetria devido à reflexão em torno da origem, obtemos  $n!/2$  classes de configurações centrais. ■

Com base no teorema acima podemos dizer que dado  $n \in \mathbb{N}$  existe um conjunto de massas  $m_1, \dots, m_n$  tal que o número de configurações centrais colineares é exatamente  $n!/2$ . Também que o número de configurações centrais para um problema de  $n$  corpos não pode ser inferior a  $n!/2$ .

**Definição 4.1.1** *Seja  $\mathbf{r} \in \mathcal{S}$  e seja  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3$  uma reta, definimos  $\theta_{\mathcal{L}}(\mathbf{r}) = \theta(\mathbf{r}, \mathcal{L}) = \max_{i \neq j} \angle(\mathcal{L}, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ , onde  $\angle$  define o ângulo entre  $\mathcal{L}$  e  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ .*

Notemos que a função definida acima mede o quanto  $\mathbf{r}$  se aproxima de uma configuração colinear. Esta função se anula se, e somente se,  $\mathbf{r}$  é colinear ao longo de uma reta paralela a  $\mathcal{L}$ .

Defina  $\theta(\mathbf{r}) = \min_{\mathcal{L}} \theta(\mathbf{r}, \mathcal{L})$ , a qual é nula se, e somente se,  $\mathbf{r}$  é colinear ao longo de alguma reta.

**Teorema 4.1.2**  *$\theta$  é uma função contínua em  $\mathcal{S} \setminus \Delta$ .  $\theta(\mathbf{r}(t))$  e é estritamente decrescente ao longo das órbitas do fluxo gradiente de  $U|_{\mathcal{S}}$ , para  $0 < \theta \leq 45^\circ$ .*

**Demonstração.** A função  $\angle(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \mathcal{L})$  para índices  $i, j$  fixados e  $\mathcal{L}$  fixada é claramente contínua em  $\mathcal{S} \setminus \Delta$ . Segue que, fixada  $\mathcal{L}$ ,  $\theta_{\mathcal{L}}(\mathbf{r})$  é também contínua visto que sua maximização ocorre em um conjunto finito de pares de índices  $i, j$ . A passagem de  $\theta_{\mathcal{L}}(\mathbf{r})$  para  $\theta(\mathbf{r})$  implica em minimizá-lo sobre  $\mathcal{L}$ . Visto que somente os ângulos estão envolvidos, podemos restringir nossa atenção à reta  $\mathcal{L}$  passando pela origem. Da compacidade do conjunto de retas passando pela origem implica que  $\theta(\mathbf{r})$  é contínua.

Para mostrar que  $\theta(\mathbf{r}(t)) < \theta(\mathbf{r}(0))$ , para todo  $t > 0$ , tome adequadamente  $\mathcal{L}$  de forma que  $\theta(\mathbf{r}(0)) = \theta(\mathbf{r}(0), \mathcal{L})$ . Por definição,  $\theta(\mathbf{r}(t)) \leq \theta(\mathbf{r}(t), \mathcal{L})$ , deste modo é suficiente mostrar que  $\theta(\mathbf{r}(t), \mathcal{L}) < \theta(\mathbf{r}(0), \mathcal{L})$ . Escolha um par de índices  $i, j$  tal que  $\theta(\mathbf{r}(t), \mathcal{L}) = \angle(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \mathcal{L})$ .

É suficiente mostrar que o ângulo decresce para cada par de índice, para então concluir que o máximo sobre os índices  $i, j$  também decresce.

Seja  $\alpha = \angle(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \mathcal{L})$ . Mostraremos que  $\dot{\alpha} < 0$ . Considere

$$\dot{\mathbf{r}}_i = m_i^{-1} \nabla_i U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \mathbf{r}_i,$$

com isso

$$\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j = m_i^{-1} \nabla_i U(\mathbf{r}) - m_j^{-1} \nabla_j U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

Seja  $\mathbf{u}$  um vetor unitário ao longo de  $\mathcal{L}$ . Então

$$\cos(\alpha(t)) = \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (4.2)$$

(assumimos aqui  $\mathbf{u}$  escolhido de modo que 4.2 é não negativa).

Derivando (4.2), obtemos

$$-\sin(\alpha)\dot{\alpha} = \frac{(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) \cdot \left[ \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{r_{ij}} \cdot u(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right]}{r_{ij}} = \frac{(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) \cdot \mathbf{u}^\perp}{r_{ij}}, \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{u}^\perp$  é a projeção ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre a reta que bissecta o segmento unindo  $\mathbf{r}_i$  à  $\mathbf{r}_j$  e denotaremos por  $\perp$  o plano bissetor a esse segmento.

Visto que  $\mathbf{u}^\perp \perp (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ , temos (4.3) igual a

$$\frac{1}{r_{ij}}(m_i^{-1}\nabla_i U - m_j^{-1}\nabla_j U) \cdot \mathbf{u}^\perp = \frac{1}{r_{ij}} \sum_{k \neq i, j} m_k \left[ \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{u}^\perp}{r_{ik}^3} - \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{u}^\perp}{r_{jk}^3} \right]. \quad (4.4)$$

Note que as massas  $\mathbf{r}_k, k \neq i, j$ , devem estar no cone de ângulo  $\theta(\mathbf{r})$  em  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{r}_j$  na direção de  $\mathcal{L}$ . Esses cones se interceptam sobre o segmento  $\overline{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j}$  e os semi-cones externos. Visto que  $\theta \leq 45^\circ$ , estes semi-cones estão em lados opostos do plano  $\perp$ .

Mostraremos que todos os termos na soma (4.4) são não negativos, com pelo menos algum termo positivo. Note que

$$(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{u}^\perp = (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{u}^\perp \geq 0 \text{ para } \mathbf{r}_k \in \text{semi-cone em } \mathbf{r}_i;$$

$$(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{u}^\perp = (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{u}^\perp \leq 0 \text{ para } \mathbf{r}_k \in \text{semi-cone em } \mathbf{r}_j;$$

Além disso, temos

$$\frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3} \geq 0 \text{ para } \mathbf{r}_k \in \text{no semi-cone em } \mathbf{r}_i;$$

$$\frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3} \leq 0 \text{ para } \mathbf{r}_k \in \text{no semi-cone em } \mathbf{r}_j.$$

Se  $\mathbf{r}_k$  está numa reta determinada por  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{r}_j$  então o produto interno é zero. Deste modo, todo termo é não negativo. Visto que  $\theta \geq 0$ , nem todos  $\mathbf{r}_k$  encontram-se na reta determinada por  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{r}_j$ , deste modo algum termo é positivo.

Segue que  $\dot{\alpha} < 0$ , completando a demonstração. ■

Considere o segmento  $\overline{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j}$  entre os corpos de massas  $m_i$  e  $m_j$ . Seja  $\Pi$  o plano que bissecta o segmento  $\overline{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j}$ . Tome um vetor unitário  $\mathbf{u}^\perp \in \Pi$  e seja  $\mathbf{P}$  o plano contendo

o segmento  $\overline{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j}$  e normal ao vetor  $\mathbf{u}^\perp$ . Então,  $\Pi$  e  $\mathbf{P}$  dividem  $\mathbb{R}^3$  em 4 quadrantes. Nessas considerações temos o seguinte teorema:

**Teorema 4.1.3** (*Plano Bissetor*) *Nas considerações acima, se as massas estão todas contidas nos quadrantes opostos pela diagonal de  $\Pi$  e  $\mathbf{P}$  e nem todas se estão em  $\Pi \cup \mathbf{P}$  então não existem escolhas para as massas tais que  $\mathbf{r}$  seja uma configuração central, veja figura 4.1.*

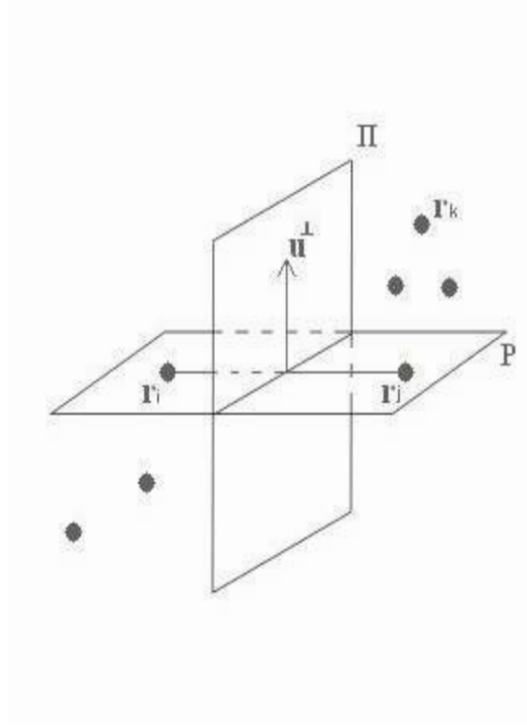


Figura 4.1: Plano Bissetor.

**Demonstração.** Considere  $\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j$  para o fluxo gradiente. Se  $\mathbf{r}$  é uma configuração central então  $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_j = 0$ . Mas, a fórmula para  $(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) \cdot \mathbf{u}^\perp$  é a mesma que aparece na demonstração do Teorema 4.1.2. Assim, pelos mesmos argumentos do Teorema 4.1.2, temos que esta é estritamente positiva, o que é uma contradição. ■

Podemos utilizar o Teorema do Plano Bissetor para provar que a única configuração central não colinear para o problema de 3 corpos é tal que as 3 massas se encontram nos vértices de um triângulo equilátero, que corresponde à solução de Lagrange.

De fato, entre 3 massas, dado um par de massas  $m_i$  e  $m_j$  com  $i \neq j$ , a massa restante deve se encontrar no plano bissetor a  $\overline{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j}$ , caso contrário ela deveria estar em um dos quatro quadrantes abertos e isto violaria o Teorema 4.1.3. Como as massas  $m_i$  e  $m_j$  são arbitrárias estas devem estar nos vértices de um triângulo equilátero. Um argumento similar mostra que as configurações centrais não planares possíveis para o problema de 4 corpos, de massas arbitrárias, é tal que estes devem estar nos vértices de um tetraedro regular.

## 4.2 As equações de Dziobek, caso planar

As equações (4.1) formam um conjunto com  $2n$  equações para o caso de configurações planares. Porém, existe um sistema de equações equivalente com  $n(n-1)/2$  equações, denominadas equações de Dziobek (veja, por exemplo [5], p. 241)

$$f_{ij} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = 0, \quad (4.5)$$

para  $1 \leq i < j \leq n$ , onde  $R_{ij} = 1/r_{ij}^3$ ,  $\Delta_{ijk} = (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k)$ . Observe que em (4.5),  $\Delta_{ijk}$  é o dobro da área orientada do triângulo com vértices em  $r_i$ ,  $r_j$  e  $r_k$ , nesta ordem. Assim,  $\Delta_{ijk} = \Delta_{kij}$  e  $\Delta_{ijk} = -\Delta_{ikj}$ , para todo  $i, j, k$ . É claro que  $R_{ij} = R_{ji}$ , para todo  $i, j$ . Demonstraremos a seguir essa equivalência para o caso planar.

**Proposição 4.2.1** *Considere  $n$  massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  num mesmo plano e não colineares, localizadas, respectivamente, em  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Então, o sistema (3.10) é equivalente ao sistema (4.5).*

**Demonstração.** Suponhamos que as  $n$  massas formem uma configuração central planar. Portanto, existe  $\lambda$  positivo tal que  $\ddot{r}_i = \lambda r_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Utilizando (3.10), temos, para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\lambda r_i = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n m_k R_{ik} (r_i - r_k).$$

Naturalmente, podemos retirar um termo da soma acima, para  $j \neq i$ , obtendo

$$\lambda r_i = - \sum_{k \neq i, j}^n m_k R_{ik} (r_i - r_k) - m_j R_{ij} (r_i - r_j). \quad (4.6)$$

Analogamente, para  $r_j$  e para  $j \neq i$ , obtemos

$$\lambda r_j = - \sum_{k \neq j, i}^n m_k R_{jk} (r_j - r_k) - m_i R_{ji} (r_j - r_i). \quad (4.7)$$

Podemos, então, subtrair (4.7) de (4.6), de modo a obter, para  $i \neq j$ ,

$$\lambda (r_i - r_j) = - \sum_{k \neq i, j}^n m_k [R_{ik} (r_i - r_k) - R_{jk} (r_j - r_k)] - [m_j R_{ij} - m_i R_{ji}] (r_i - r_j). \quad (4.8)$$

Tomando produto o vetorial por  $r_i - r_j$  em ambos os membros de (4.8), decorre

$$0 = - \sum_{k \neq i, j}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = -f_{ij}.$$

Portanto,  $f_{ij} = 0$ , para todo  $1 \leq i < j \leq n$ .

Reciprocamente, consideremos as equações de Dziobek

$$f_{ij} = \sum_{k \neq i, j}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k) = 0,$$

para  $1 \leq i < j \leq n$ , as quais podem ser escritas da forma

$$\sum_{k \neq i, j}^n m_k R_{ik} (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k) = \sum_{k \neq i, j}^n m_k R_{jk} (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k).$$

No membro esquerdo podemos incluir o termo em  $j$  sem alterar a igualdade. Da mesma forma, podemos inserir o termo em  $i$  no membro direito. Assim, temos

$$\sum_{k \neq i}^n m_k R_{ik} (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k) = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k),$$

ou seja

$$(r_i - r_j) \wedge \sum_{k \neq i}^n m_k R_{ik} (r_i - r_k) = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} [r_i \wedge (r_j - r_k) + (r_j \wedge r_k)].$$

Notemos que a igualdade acima pode ser escrita como

$$(r_i - r_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} [r_i \wedge (r_j - r_k) + (r_j \wedge r_k)].$$

Podemos inserir à direita da igualdade o termo  $-r_j$  sem alterá-la, obtendo

$$(r_i - r_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} [r_i \wedge (r_j - r_k) + r_j \wedge (-r_j + r_k)].$$

Disto, segue

$$\begin{aligned} (r_i - r_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} &= \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} [r_i \wedge (r_j - r_k) - r_j \wedge (r_j - r_k)] \\ &= \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} [(r_i - r_j) \wedge (r_j - r_k)] \\ &= (r_i - r_j) \wedge \frac{F_j}{m_j}, \end{aligned}$$

de onde temos

$$(r_i - r_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = (r_i - r_j) \wedge \frac{F_j}{m_j},$$

a qual implica que

$$(r_i - r_j) \wedge (m_j F_i - m_i F_j) = 0. \quad (4.9)$$

Efetuando o produto vetorial membro a membro, obtemos

$$r_i \wedge m_j F_i - r_i \wedge m_i F_j - r_j \wedge m_j F_i + r_j \wedge m_i F_j = 0,$$

de onde temos

$$m_j r_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge F_j - m_j r_j \wedge F_i + m_i r_j \wedge F_j = 0.$$

Somando em  $j$  para  $j \neq i$ , temos

$$(M - m_i) r_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge \sum_{j \neq i}^n F_j - \left( \sum_{j \neq k}^n m_j r_j \right) \wedge F_i + m_i \sum_{j \neq i}^n r_j \wedge F_j = 0, \quad (4.10)$$

onde  $M$  é a massa total. Como o centro de massa está na origem do referencial, temos

$$\sum_{j=1}^n m_j r_j = 0 \implies \sum_{j \neq i}^n m_j r_j = -m_i r_i. \quad (4.11)$$

Visto que o espaço é homogêneo e isotrópico e o sistema é isolado, temos que as quantidades de momento linear e momento angular são conservadas. Então, respectivamente, temos

$$\sum_{j=1}^n F_j = 0 \implies \sum_{j \neq i}^n F_j = -F_i \quad (4.12)$$

e

$$\sum_{j=1}^n (r_j \wedge F_j) = 0 \implies \sum_{j \neq i}^n (r_j \wedge F_j) = (-r_i \wedge F_i). \quad (4.13)$$

Substituindo (4.11), (4.12) e (4.13) em (4.10), obtemos

$$Mr_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge F_i + m_i r_i \wedge F_i + m_i r_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge F_i = 0.$$

Desta forma,  $Mr_i \wedge F_i = 0$ , o que implica em  $r_i$  e  $F_i$  serem paralelos, ou seja,  $F_i = \lambda_i r_i$ , ou ainda  $\ddot{r}_i = (\lambda_i/m_i)r_i$ . De (4.9), decorre

$$\left( \frac{\lambda_i}{m_i} r_i - \frac{\lambda_j}{m_j} r_j \right) \wedge (r_i - r_j) = 0.$$

Assim,

$$-\frac{\lambda_i}{m_i} r_i \wedge r_j - \frac{\lambda_j}{m_j} r_j \wedge r_i = 0,$$

o que implica em

$$\left( \frac{\lambda_i}{m_i} - \frac{\lambda_j}{m_j} \right) (r_j \wedge r_i) = 0.$$

Se  $r_j$  é paralelo a  $r_i$ , a igualdade acima se verifica facilmente. Se  $r_i$  e  $r_j$  são não colineares, temos que

$$\frac{\lambda_i}{m_i} = \frac{\lambda_j}{m_j} = \lambda,$$

para todo  $i, j$ . Portanto,

$$\ddot{r}_i = \lambda r_i,$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , como queríamos provar. ■

A demonstração acima se encontra publicada em [14].

Faremos, a seguir, aplicações das equações (4.5) nos exemplos de configurações centrais planares de Lagrange [9] e de Roberts [20].

Para o caso da configuração planar de 3 corpos de Lagrange, considere 3 corpos de massas positivas e não colineares. Das equações (4.5), temos

$$f_{12} = m_3 (R_{13} - R_{23}) \Delta_{123} = 0, \quad f_{13} = m_2 (R_{12} - R_{23}) \Delta_{132} = 0,$$

$$f_{23} = m_1 (R_{12} - R_{13}) \Delta_{123} = 0.$$

Como  $m_i > 0$  e  $\Delta_{ijk} \neq 0$ , segue que  $R_{12} = R_{13} = R_{23}$ . Em outras palavras, as massas estão sobre os vértices de um triângulo equilátero.



Para caso do exemplo de Robert, considere 5 corpos de massas  $m_1 = m_3 = 1$ ,  $m_2 = m_4 = m$  e  $m_5 = p$ , nas posições  $r_1 = (1, 0)$ ,  $r_2 = (-1, 0)$ ,  $r_3 = (0, k)$ ,  $r_4 = (0, -k)$  e  $r_5 = (0, 0)$ , respectivamente, de acordo com a Figura 4.2.

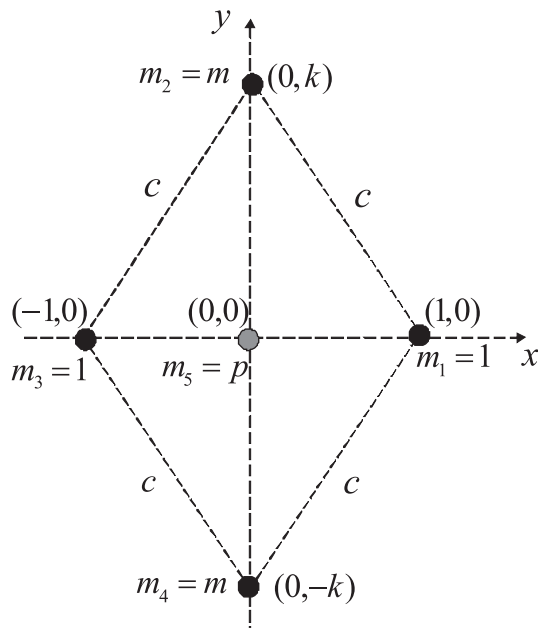


Figura 4.2: Cinco corpos no plano. Exemplo de Roberts.

Queremos encontrar valores para  $m$ ,  $p$  e  $k$  de modo que os 5 corpos com as massas e as posições de acordo com a Figura 4.2 estejam em configuração central. Para este caso, o conjunto de equações (4.5) é um conjunto de 10 equações. No entanto, pelas simetrias envolvidas, resulta que  $f_{13} = 0$ ,  $f_{15} = 0$ ,  $f_{24} = 0$ ,  $f_{25} = 0$ ,  $f_{35} = 0$  e  $f_{45} = 0$  são trivialmente satisfeitas. As outras 4 equações,  $f_{12} = 0$ ,  $f_{14} = 0$ ,  $f_{23} = 0$  e  $f_{34} = 0$  são equivalentes à equação  $f_{12} = 0$ , a qual pode ser escrita como

$$(R_{13} - R_{23})\Delta_{123} + m(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} + p(R_{15} - R_{25})\Delta_{125} = 0,$$

ou, equivalentemente, como

$$m \left( \frac{2}{c^3} - \frac{1}{4k^3} \right) + p \left( 1 - \frac{1}{k^3} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{c^3} \right) = 0.$$

Para  $m = 1$  e  $p = -1/4$ , a equação acima é satisfeita, para todo  $k \in \mathbb{R}^+$ . Ou seja, há um contínuo de configurações centrais não equivalentes.

### 4.3 As equações de Dziobek, caso espacial

Podemos, naturalmente, estender o conjunto das equações de Dziobek, equivalentes às equações que definem as configurações centrais planares à um conjunto de equações que definem as configurações centrais espaciais, veja [7]. A demonstração de tal equivalência é análoga à demonstração feita na seção anterior. Neste caso, as equações de Dziobek para uma configuração central de  $n$  corpos são dadas por

$$f_{ijk} = \sum_{k \neq i, j, k}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijhk} = 0, \quad (4.14)$$

onde  $R_{ij} = 1/r_{ij}^3$  e  $\Delta_{ijhk} = (r_i - r_j) \wedge (r_j - r_h) \cdot (r_h - r_k)$ . Deste modo,  $\Delta_{ijhk}$  é proporcional ao volume orientado do tetraedro formado pelas massas  $m_i$ ,  $m_j$ ,  $m_h$  e  $m_k$  nesta ordem. Além disso, observando (4.14), nota-se que  $f_{ijh} = f_{jih}$ , de fato,

$$\begin{aligned} f_{ijh} &= \sum_{k \neq i, j, k}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijhk} = \\ &= \sum_{k \neq i, j, k}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) [(r_i - r_j) \wedge (r_j - r_h) \cdot (r_h - r_k)] = \\ &= \sum_{k \neq i, j, k}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) [(r_i \wedge r_j) - (r_i \wedge r_h) - (r_j \wedge r_j) + (r_j \wedge r_h)] \cdot (r_h - r_k) = \\ &= \sum_{k \neq i, j, k}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) [(r_i \wedge r_j) \cdot r_h - (r_i \wedge r_j) \cdot r_k - (r_i \wedge r_h) \cdot r_h + (r_i \wedge r_h) \cdot r_k + \\ &\quad - (r_j \wedge r_j) \cdot r_h + (r_j \wedge r_j) \cdot r_k + (r_j \wedge r_h) \cdot r_h - (r_j \wedge r_h) \cdot r_k] = \\ &= \sum_{k \neq i, j, k}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) [-(r_j \wedge r_i) \cdot r_h + (r_j \wedge r_i) \cdot r_k + (r_j \wedge r_h) \cdot r_h + (r_i \wedge r_h) \cdot r_k + \\ &\quad + (r_i \wedge r_i) \cdot r_h - (r_i \wedge r_i) \cdot r_k - (r_i \wedge r_h) \cdot r_h - (r_j \wedge r_h) \cdot r_k] = \\ &= - \sum_{k \neq i, j, k}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) [(r_j \wedge r_i) \cdot r_h - (r_j \wedge r_i) \cdot r_k - (r_j \wedge r_h) \cdot r_h - (r_i \wedge r_h) \cdot r_k - (r_i \wedge r_i) \cdot r_h + \\ &\quad + (r_i \wedge r_i) \cdot r_k + (r_i \wedge r_h) \cdot r_h + (r_j \wedge r_h) \cdot r_k] = \\ &= \sum_{k \neq i, j, k}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) [(r_j \wedge r_i) - (r_j \wedge r_h) - (r_i \wedge r_i) + (r_i \wedge r_h)] \cdot (r_h - r_k) = \\ &= - \sum_{k \neq i, j, k}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) [(r_j - r_i) \wedge (r_i - r_h) \cdot (r_h - r_k)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k \neq i, j, k}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{jihk} = \\
& \sum_{k \neq i, j, k}^n m_k (R_{jk} - R_{ik}) \Delta_{jihk} = f_{jih}.
\end{aligned}$$

Deste modo, (4.14) consiste em um conjunto de  $n(n-1)(n-2)/2$  equações.

No que segue daremos uma aplicação desse conjunto de equações, mostrando que uma configuração com quatro corpos no espaço, que não possua três desses corpos sobre uma mesma reta, forma uma configuração central se, e somente se, estes corpos se encontram nos vértices de um tetraedro regular. De fato, sejam quatro corpos de massas  $m_1, m_2, m_3$  e  $m_4$  em uma configuração espacial como especificado acima. Para este caso, temos  $4(3)(2)/2 = 12$  equações de Dziobek, as quais são listadas a seguir

$$f_{123} = m_4(R_{14} - R_{24})\Delta_{1234} = 0, \quad (4.15)$$

$$f_{124} = m_3(R_{13} - R_{23})\Delta_{1243} = 0, \quad (4.16)$$

$$f_{132} = m_4(R_{14} - R_{34})\Delta_{1324} = 0, \quad (4.17)$$

$$f_{134} = m_2(R_{12} - R_{32})\Delta_{1342} = 0, \quad (4.18)$$

$$f_{142} = m_3(R_{13} - R_{43})\Delta_{1423} = 0, \quad (4.19)$$

$$f_{143} = m_2(R_{12} - R_{42})\Delta_{1432} = 0, \quad (4.20)$$

$$f_{231} = m_4(R_{24} - R_{34})\Delta_{2314} = 0, \quad (4.21)$$

$$f_{234} = m_1(R_{21} - R_{31})\Delta_{2341} = 0, \quad (4.22)$$

$$f_{241} = m_3(R_{23} - R_{43})\Delta_{2413} = 0, \quad (4.23)$$

$$f_{243} = m_1(R_{21} - R_{41})\Delta_{2431} = 0, \quad (4.24)$$

$$f_{341} = m_2(R_{32} - R_{42})\Delta_{3412} = 0, \quad (4.25)$$

$$f_{342} = m_1(R_{31} - R_{41})\Delta_{3421} = 0. \quad (4.26)$$

Como dito acima, não existem nesta configuração três corpos sobre uma mesma reta. Portanto,  $\Delta_{jihk} \neq 0$ , para todo  $i, j, h, k = 1, 2, 3, 4$ , com os índices  $i, j, h, k$  diferentes dois a dois. Além disso, estamos supondo que todas as quatro massas são positivas, sendo assim, para que as 12 equações acima sejam satisfeitas, devemos ter em (4.15),

$$(R_{14} - R_{24}) = 0 \rightarrow (r_{14} - r_{24}) = 0 \rightarrow r_{14} = r_{24}.$$

Analogamente, das outras equações, obtemos

$$r_{13} = r_{23}, r_{14} = r_{34}, r_{12} = r_{23}, r_{13} = r_{34}, r_{12} = r_{24}, r_{24} = r_{34}, r_{12} = r_{13}, r_{23} = r_{34},$$

$$r_{12} = r_{14}, r_{23} = r_{24}, r_{13} = r_{14},$$

assim,

$$r_{12} = r_{13} = r_{14} = r_{23} = r_{24} = r_{34}.$$

Isto ocorre se, e somente se, os corpos se encontram nos vértices de um tetraedro regular.

# Capítulo 5

## Exemplos de Configurações

### Centrais Planares e Espaciais

#### 5.0.1 A existência de uma configuração central planar para o problema de 4 corpos

Nesta primeira seção do capítulo 5 estudaremos configurações centrais planares não colineares do problema de 4-corpos que têm a forma de pipa, ou simplesmente *configurações centrais do tipo pipa*, as quais podem ser definidas como àquelas que têm um eixo de simetria passando por duas das massas. A configuração do tipo pipa é chamada *convexa* se nenhum dos corpos está localizado no interior do fecho convexo dos outros três. Veja Figura 5.1. Caso contrário, dizemos que a configuração do tipo pipa é *côncava*. Veja Figura 5.2. Para maiores detalhes, veja o artigo [3]. Considere

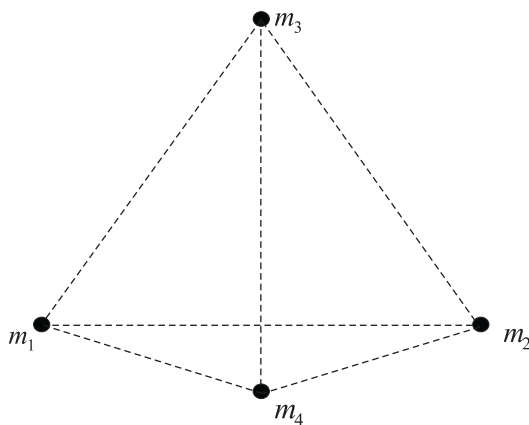


Figura 5.1: Pipa convexa.

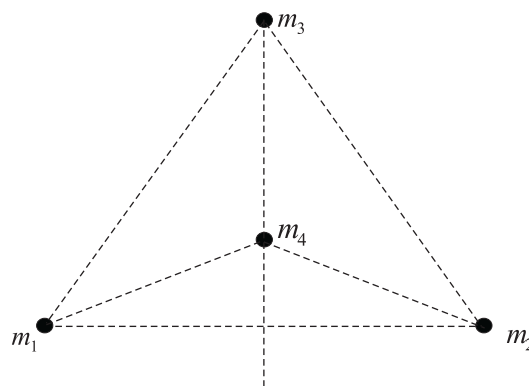


Figura 5.2: Pipa côncava.

massas  $m_3$  e  $m_4$  sobre a reta de simetria das configurações do tipo pipa, sendo que a posição de  $m_3$  estará fixa, conforme a Figura 5.3. Esta seção tem o propósito de demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema 5.0.1** *Considere quatro massas  $m_1, m_2, m_3$  e  $m_4$  localizadas em  $(-x, 0), (x, 0), (0, \sqrt{3}/2)$  e  $(0, y)$ , com  $x > 0$  e  $y < \sqrt{3}/2$ , de acordo com a Figura 5.3. Valem as seguintes afirmações:*

1. Para cada

$$x_0 \in \left( \frac{2\sqrt{3}-3}{2}, \frac{1}{2} \right) \cup \left( \frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{3}+3}{2} \right),$$

*existe um intervalo aberto não vazio  $I_{x_0}$  tal que, para cada  $y_0 \in I_{x_0}$ , existem massas positivas  $m_1 = m_2, m_3$  e  $m_4$  de modo que os quatro corpos, como na Figura 5.3, estão numa configuração central do tipo pipa;*

2. Para  $x_0 = 1/2$  e  $y_0 = \sqrt{3}/6$ , *existem massas positivas  $m_1 = m_2 = m_3$  e  $m_4$  de modo que os quatro corpos, como na Figura 5.3, estão numa configuração central do tipo pipa côncava;*

3. Para  $x_0 = \sqrt{3}/2$  e  $y_0 = -\sqrt{3}/2$ , *existem massas positivas  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$  de modo que os quatro corpos, como na Figura 5.3, estão numa configuração central do tipo pipa convexa.*

**Demonstração.** Consideremos as equações de Dziobek dadas por (4.5), como visto no capítulo anterior. Para  $n = 4$  devemos ter 6 equações de Dziobek, as quais estão listadas a seguir:

$$f_{12} = m_3 (R_{13} - R_{23}) \Delta_{123} + m_4 (R_{14} - R_{24}) \Delta_{124} = 0, \quad (5.1)$$

$$f_{13} = m_2 (R_{12} - R_{32}) \Delta_{132} + m_4 (R_{14} - R_{34}) \Delta_{134} = 0, \quad (5.2)$$

$$f_{14} = m_2 (R_{12} - R_{42}) \Delta_{142} + m_3 (R_{13} - R_{43}) \Delta_{143} = 0, \quad (5.3)$$

$$f_{23} = m_1 (R_{21} - R_{31}) \Delta_{231} + m_4 (R_{24} - R_{34}) \Delta_{234} = 0, \quad (5.4)$$

$$f_{24} = m_1 (R_{21} - R_{41}) \Delta_{241} + m_3 (R_{23} - R_{43}) \Delta_{243} = 0, \quad (5.5)$$

$$f_{34} = m_1 (R_{31} - R_{41}) \Delta_{341} + m_2 (R_{32} - R_{42}) \Delta_{342} = 0. \quad (5.6)$$

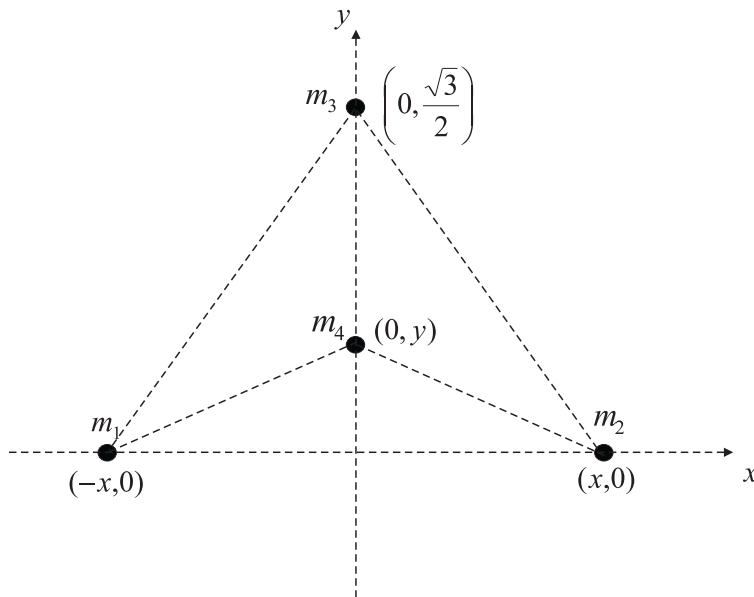


Figura 5.3: Configuração do tipo pipa.

As configurações do tipo pipa, como na Figura 5.3, sem colisões, devem satisfazer, as seguintes relações

$$r_{13} = r_{23}, \quad r_{14} = r_{24}, \quad \Delta_{143} = \Delta_{234}.$$

Usando as relações acima, podemos reescrever a equação (5.6) da seguinte maneira

$$(m_1 - m_2) (R_{31} - R_{41}) \Delta_{341} = 0.$$

Nas hipóteses do Teorema 5.0.1, o termo  $\Delta_{134}$  nunca se anula, daí  $m_1 = m_2$  ou  $R_{13} = R_{14}$ . Se  $R_{13} = R_{14}$ , temos um quadrado, que é uma configuração central se, e somente se,  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$  (veja item 3 do Teorema 5.0.1). Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$m_1 = m_2 = 1.$$

A equação (5.1) é trivialmente satisfeita. Usando as relações de simetria acima, temos

$$f_{13} = 0 \Leftrightarrow f_{23} = 0$$

e

$$f_{14} = 0 \Leftrightarrow f_{24} = 0.$$

Neste caso é suficiente encontrarmos as soluções de (5.2) e (5.3), com valores positivos para as massas  $m_3$  e  $m_4$ . Vamos reescrever estas equações de modo a obter  $m_3$  e  $m_4$

como funções das posições

$$m_3 = \frac{(R_{12} - R_{42}) \Delta_{142}}{(R_{43} - R_{13}) \Delta_{143}}, \quad (5.7)$$

$$m_4 = \frac{(R_{12} - R_{32}) \Delta_{132}}{(R_{34} - R_{14}) \Delta_{134}}. \quad (5.8)$$

Desejamos encontrar, se existirem, as regiões no semiplano  $x > 0$  para as quais teremos valores positivos para ambas as massas. Devemos, então, estudar o sinal dos termos envolvidos nas expressões de  $m_3$  e  $m_4$  em (5.7) e (5.8), respectivamente.

Substituindo as coordenadas, conforme indicações da Figura 5.3, temos

$$\begin{aligned} (R_{12} - R_{42}) < 0 &\Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ x > 0, -\sqrt{3}x < y < \sqrt{3}x \right\}, \\ (R_{34} - R_{14}) < 0 &\Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ x > 0, y < -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right\}, \\ (R_{43} - R_{13}) < 0 &\Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ x > 0, y < \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3 + 4x^2}}{2} \right\}, \\ (R_{12} - R_{32}) < 0 &\Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ x > \frac{1}{2}, y < \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Para o sinal das áreas orientadas consideremos primeiramente  $0 < y < \sqrt{3}/2$ . Neste caso, nas expressões (5.7) e (5.8) vale

$$\Delta_{142} < 0, \quad \Delta_{143} > 0, \quad \Delta_{132} < 0, \quad \Delta_{134} < 0.$$

Assim, comparando o sinal de cada um dos termos de (5.7) e (5.8), teremos que se  $(x, y) \in A_1 \cup A_2$ , as massas  $m_3$  e  $m_4$  serão positivas, onde

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} < x < \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} < y < \sqrt{3}x \right\}, \\ A_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 < y < -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Consideremos agora  $y < 0$ . Neste caso, nas expressões (5.7) e (5.8), temos

$$\Delta_{142} > 0, \quad \Delta_{143} > 0, \quad \Delta_{132} < 0, \quad \Delta_{134} < 0.$$

Novamente, comparando o sinal de cada um dos termos de (5.7) e (5.8), teremos que se  $(x, y) \in A_3 = B_1 \cup B_2$ , as massas  $m_3$  e  $m_4$  serão positivas, onde

$$B_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}, -\sqrt{3}x < y < \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3 + 4x^2}}{2} \right\},$$



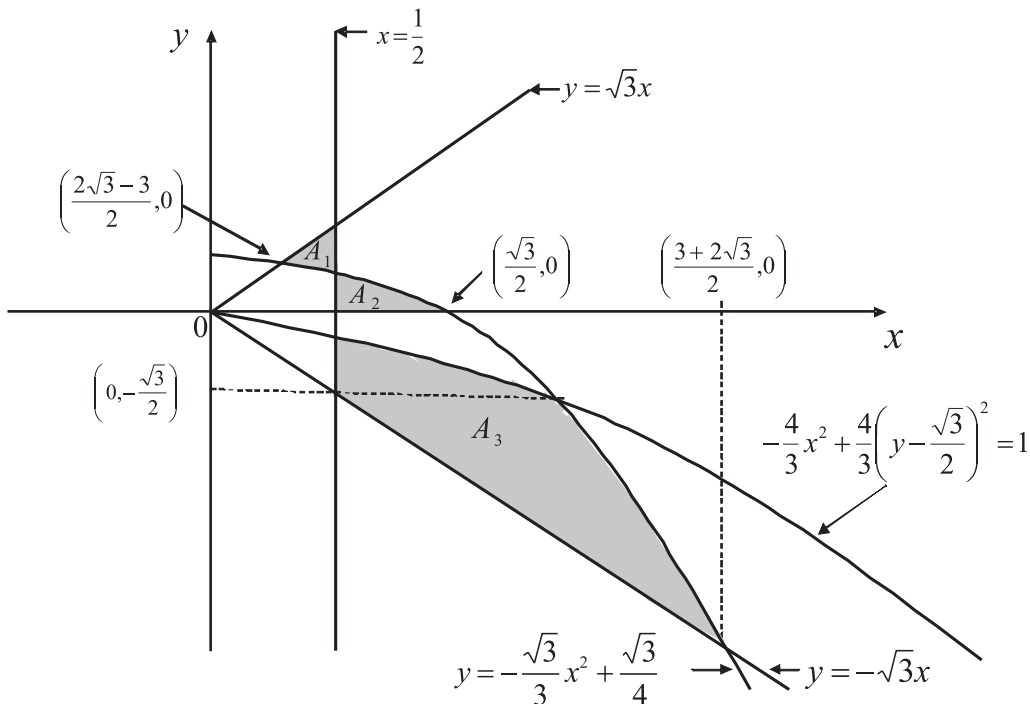


Figura 5.4: Regiões de existência de configurações centrais do tipo pipa.

$$B_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{2\sqrt{3}+3}{2}, -\sqrt{3}x < y < -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right\}.$$

O caso  $y = 0$  não precisa ser considerado, pois, não ocorre configuração central do tipo pipa, devido ao caso planar do Teorema 4.1.3, veja [16].

Finalmente, concluímos que se  $(x_0, y_0) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , (vide Figura 5.4), então as massas

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = m_3(x_0, y_0), \quad m_4 = m_4(x_0, y_0),$$

com posições

$$r_1 = (-x_0, 0), \quad r_2 = (x_0, 0), \quad r_3 = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad r_4 = (0, y_0),$$

formam uma configuração central do tipo pipa, como mostrada na Figura 5.3. O intervalo  $I_{x_0}$  do enunciado do teorema é obtido tomando a interseção da reta  $x = x_0$  com a região aberta  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Isso demonstra o item 1 do Teorema 5.0.1.

Para a prova do item 2, observemos que, neste caso, valem  $r_{12} = r_{13} = r_{23} = 1$ ,  $r_{14} = r_{24}$  e  $\Delta_{143} = \Delta_{234}$ . Assim,  $f_{12} = 0$  é trivialmente satisfeita. De  $f_{13} = 0$  e de  $f_{23} = 0$  resultam, respectivamente,  $R_{14} = R_{34}$  e  $R_{24} = R_{34}$ . Portanto,  $R_{14} = R_{24} = R_{34}$ . Assim, de  $f_{24} = 0$  e  $f_{34} = 0$ , temos  $m_1 = m_3$  e  $m_1 = m_2$ , respectivamente. Logo,

$m_1 = m_2 = m_3$ . De posse dessas conclusões sobre as massas e sobre as distâncias, segue que  $f_{14} = 0$  também é trivialmente satisfeita. Isso conclui a prova do item 2 do Teorema 5.0.1.

Passemos agora à prova do item 3 do Teorema 5.0.1. Neste caso, os 4 corpos estão sobre os vértices de um quadrado, de modo que as seguintes igualdades são obtidas:  $r_{12} = r_{34}$ ,  $r_{13} = r_{23} = r_{14} = r_{24}$  e  $\Delta_{123} = \Delta_{143} = \Delta_{234} = \Delta_{142}$ . Substituindo essas informações nas equações de Dziobek resulta que  $f_{12} = 0$  e  $f_{34} = 0$  são trivialmente satisfeitas, enquanto que de  $f_{13} = 0$ ,  $f_{14} = 0$ ,  $f_{23} = 0$  e  $f_{24} = 0$  resultam  $m_2 = m_4$ ,  $m_2 = m_3$ ,  $m_1 = m_4$  e  $m_1 = m_3$ , respectivamente. Portanto,  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$  e o item 3 do Teorema 5.0.1 está demonstrado. ■

Para completar o estudo do problema segue-se o seguinte Teorema:

**Teorema 5.0.2** *Considere quatro massas  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  e  $m_4$  localizadas em  $(-x, 0)$ ,  $(x, 0)$ ,  $(0, \sqrt{3}/2)$  e  $(0, y)$  respectivamente, com  $x > 0$  e  $y > \sqrt{3}/2$ , então para cada  $x_0 > 3/2$  existe um intervalo aberto não vazio  $I_{x_0}$  tal que, para cada  $y_0 \in I_{x_0}$ , existem massas positivas  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  e  $m_4$  de modo que estes corpos estão em configuração central.*

**Demonstração.** Análogamente a demonstração do Teorema 5.0.1 é suficiente encontrarmos as solução de (5.2) e (5.3), com valores positivos para as massas  $m_3$  e  $m_4$ . Como visto anteriormente

$$m_3 = \frac{(R_{12} - R_{42}) \Delta_{142}}{(R_{43} - R_{13}) \Delta_{143}}, \quad (5.9)$$

$$m_4 = \frac{(R_{12} - R_{32}) \Delta_{132}}{(R_{34} - R_{14}) \Delta_{134}}. \quad (5.10)$$

Desejamos encontrar, se existirem, as regiões no semiplano  $x > 0$  para as quais teremos valores positivos para ambas as massas. Devemos, então, estudar o sinal dos termos envolvidos nas expressões de  $m_3$  e  $m_4$  em (5.9) e (5.10), respectivamente. Temos neste caso

$$\Delta_{142} < 0, \quad \Delta_{143} < 0, \quad \Delta_{132} < 0, \quad \Delta_{134} > 0.$$

Consideremos  $y > \sqrt{3}/2$ , comparando o sinal de cada um dos termos de (5.9) e (5.10), temos que se  $(x, y) \in C_1$ , as massas  $m_3$  e  $m_4$  serão positivas, onde

$$C_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2} < x, \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3 + 4x^2}}{2} < y < \sqrt{3}x \right\},$$

■

Baseados no Teorema 5.0.1, seguem os seguintes corolários.

**Corolário 5.0.1** *Para cada  $1/2 < x_0 < \sqrt{3}/2$ , existem dois intervalos abertos disjuntos  $I_{x_0}^+$  e  $I_{x_0}^-$ , tal que para cada  $y_0 \in I_{x_0}^+ \cup I_{x_0}^-$ , existem massas positivas  $m_1 = m_2, m_3$  e  $m_4$ , de modo que os quatro corpos, como na Figura 5.3, estejam numa configuração central do tipo pipa. Mais especificamente, se  $y_0 \in I_{x_0}^+$  a configuração central é do tipo pipa côncava e se  $y_0 \in I_{x_0}^-$  a configuração central é do tipo pipa convexa.*

**Corolário 5.0.2** *Considere  $0 < x < (2\sqrt{3} - 3)/2$ . Então, não existem  $y \in \mathbb{R}$  e massas positivas  $m_1, m_2, m_3$  e  $m_4$ , de modo que os quatro corpos, como na Figura 5.3, estejam numa configuração central do tipo pipa.*

**Corolário 5.0.3** *Considere  $y < \sqrt{3}/2$ . Então, se  $x > (2\sqrt{3} + 3)/2$ , não existem massas positivas  $m_1, m_2, m_3$  e  $m_4$ , de modo que os quatro corpos, como na Figura 5.3, estejam numa configuração central do tipo pipa.*

## 5.0.2 A existência de uma configuração central espacial para o problema de 6 corpos

Aqui estamos interessados no estudo de configurações centrais espaciais. Mais especificamente, estudaremos uma configuração central do problema de 6 corpos, de acordo com [15] onde foi estudada uma nova classe de configurações centrais espaciais para este problema. Nesta nova classe de configurações centrais teremos quatro corpos nos vértices de um tetraedro regular e os outros dois sobre a reta que conecta um dos vértices do tetraedro ao baricentro do triângulo formado pelos três corpos que definem a face oposta a este vértice, veja (Fig. 5.5). Estas novas configurações são generalizações de um resultado obtido por Llibre e Mello em [11].

Considere um tetraedro regular com lado de comprimento 1 e sejam  $A, B, C, D, E$  e  $F$  pontos sobre a reta  $\mathcal{L}$  que passa pelo vértice em  $r_4$  e pelo baricentro da face oposta a este vértice. Conforme (Fig. 5.6) tomemos as seguintes considerações:

1.  $A$  sendo o centro geométrico do tetraedro;
2.  $B$  é o vértice em  $r_4$ ;
3.  $C$  é o ponto simétrico ao ponto  $B$  relativo ao plano que contém  $r_1, r_2$  e  $r_3$ ;
4.  $E$  é o baricentro do triângulo equilátero com vértices em  $r_1, r_2$  e  $r_3$ ;
5.  $D$  e  $F$  são os pontos onde a esfera centrada em  $B$  e de raio 1 intercepta a reta  $\mathcal{L}$ ;
6.  $AB \subset \mathcal{L}$  o segmento com extremidades em  $A$  e  $B$ .

De maneira análoga definimos os segmentos  $BF, CD, DE$  e  $EA$ .

Enunciaremos a seguir o teorema cuja demonstração é o objetivo desta seção.

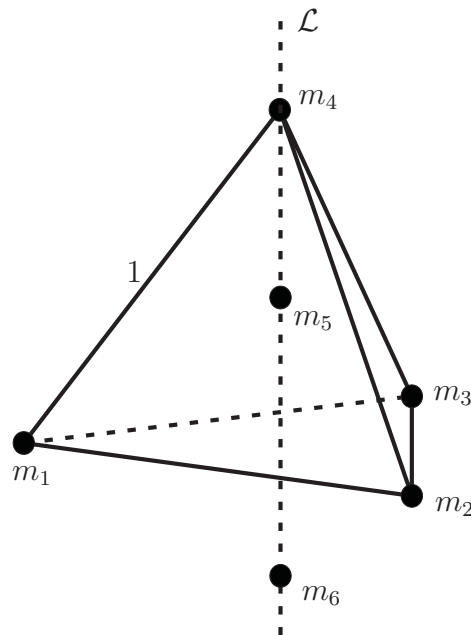


Figura 5.5: Quatro corpos nos vértices de um tetraedro regular e dois sobre a reta  $\mathcal{L}$  que conecta um dos vértices e o centro da face oposta.

**Teorema 5.0.3** *Assumimos que quatro corpos com massas  $m_1, m_2, m_3$  e  $m_4$  estão nos vértices de um tetraedro regular com lados de comprimento 1 e dois corpos de massas  $m_5$  e  $m_6$  estão sobre a reta  $\mathcal{L}$ , de acordo com a figura 5.5. Nestas considerações, os seis corpos formam uma configuração central se as seguintes exigências se verificam:*

- (a) *As três massas  $m_1, m_2$  e  $m_3$  são iguais;*

(b) Somente um dos vetores posições  $r_5$  ou  $r_6$  deve estar sobre o segmento  $AB$ , veja Fig 5.6.

Sem perda de generalidade, assumiremos que  $r_5 \in AB$ , sendo que para o caso em que  $r_6 \in AB$  pode-se proceder de maneira análoga. Então existem uma posição  $G \in AB$ , segmentos não vazios  $I^1(G) \subset CD$ ,  $I^2(G) \subset EA$ ,  $I^3(G) \subset BF$  e massas positivas  $m_1 = m_2 = m_3$ ,  $m_4$ ,  $m_5$  e  $m_6(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , tais que  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  e  $r_4$  estão nos vértices de um tetraedro regular,  $r_5$  está em  $G$  e  $r_6(1) \in I^1(G)$ , ou  $r_6(2) \in I^2(G)$ , ou  $r_6(3) \in I^3(G)$ , tais que estes corpos formam três configurações centrais. Veja Fig.5.6.

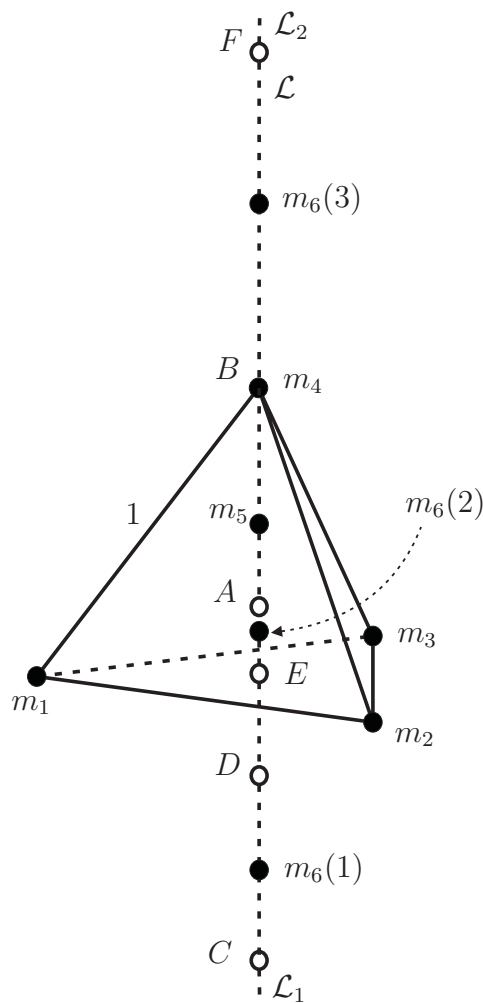


Figura 5.6: Seis corpos em configuração central espacial.

**Demonstração.** Considere as equações de Dziobek, dadas pelas equações (4.14), para este problema. Como dito anteriormente, o número de equações de Dziobek para o caso espacial de um problema de  $n$  corpos é dado por  $n(n-1)(n-2)/2$ . Sendo assim, temos para o problema espacial de 6 corpos, um conjunto de 60 equações de Dziobek:

$$\begin{aligned}
f_{123} = 0, f_{124} = 0, f_{125} = 0, f_{126} = 0, f_{132} = 0, f_{134} = 0, f_{135} = 0, f_{136} = 0, f_{142} = 0, \\
f_{143} = 0, f_{145} = 0, f_{146} = 0, f_{152} = 0, f_{153} = 0, f_{154} = 0, f_{156} = 0, f_{162} = 0, f_{163} = 0, \\
f_{164} = 0, f_{165} = 0, f_{231} = 0, f_{234} = 0, f_{235} = 0, f_{236} = 0, f_{241} = 0, f_{243} = 0, f_{245} = 0, \\
f_{246} = 0, f_{251} = 0, f_{253} = 0, f_{254} = 0, f_{256} = 0, f_{261} = 0, f_{263} = 0, f_{264} = 0, f_{265} = 0, \\
f_{341} = 0, f_{342} = 0, f_{345} = 0, f_{346} = 0, f_{351} = 0, f_{352} = 0, f_{354} = 0, f_{356} = 0, f_{361} = 0, \\
f_{362} = 0, f_{364} = 0, f_{365} = 0, f_{451} = 0, f_{452} = 0, f_{453} = 0, f_{456} = 0, f_{461} = 0, f_{462} = 0, \\
f_{463} = 0, f_{465} = 0, f_{561} = 0, f_{562} = 0, f_{563} = 0, f_{564} = 0.
\end{aligned}$$

Afim de darmos uma orientação ao espaço, assumiremos nas equações de Dziobek que  $\Delta_{1234} > 0$ . Defina os seguintes subconjuntos de  $\mathcal{L}$  (veja Fig. 5.6):

$$\mathcal{L}_1 = \{r_i \in \mathcal{L} : r_{1i} > 1 = r_{12}, \Delta_{123i} < 0, i = 5, 6\},$$

$$\mathcal{L}_2 = \{r_i \in \mathcal{L} : r_{4i} > 1 = r_{12}, \Delta_{123i} > 0, i = 5, 6\}.$$

Disto

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \{C\} \cup CD \cup \{D\} \cup DE \cup \{E\} \cup EA \cup \{A\} \cup AB \cup \{B\} \cup BF \cup \{F\} \cup \mathcal{L}_2.$$

Devido às restrições feitas a priori acerca das configurações a serem estudadas, como na Fig. 5.5, as seguintes relações, dentre outras, devem ser satisfeitas:

$$r_{12} = r_{13} = r_{14} = r_{23} = r_{24} = r_{34} = 1, \quad r_{15} = r_{25} = r_{35}, \quad r_{16} = r_{26} = r_{36},$$

$$\Delta_{1425} = -\Delta_{1435} = -\Delta_{2415} = \Delta_{2435} = \Delta_{3415} = -\Delta_{3425},$$

$$\Delta_{1426} = -\Delta_{1436} = -\Delta_{2416} = \Delta_{2436} = \Delta_{3416} = -\Delta_{3426},$$

$$\Delta_{1523} = -\Delta_{1532} = -\Delta_{2513} = \Delta_{2531} = \Delta_{3512} = -\Delta_{3521},$$

$$\Delta_{1524} = -\Delta_{1534} = -\Delta_{2514} = \Delta_{2534} = \Delta_{3514} = -\Delta_{3524},$$

$$\Delta_{1526} = -\Delta_{1536} = -\Delta_{2516} = \Delta_{2536} = \Delta_{3516} = -\Delta_{3526},$$

$$\Delta_{2613} = -\Delta_{2631} = -\Delta_{1623} = \Delta_{1632} = \Delta_{3612} = -\Delta_{3621},$$

$$\Delta_{2614} = -\Delta_{2634} = -\Delta_{1624} = \Delta_{1634} = \Delta_{3614} = -\Delta_{3624},$$

$$\Delta_{2615} = -\Delta_{2635} = -\Delta_{1625} = \Delta_{1635} = \Delta_{3615} = -\Delta_{3625},$$

e  $\Delta_{456i} = 0$ , para  $i = 1, 2, 3$  e quaisquer permutações dos índices  $i, 4, 5, 6$ , visto que  $\Delta_{ijk} = (r_i - r_j) \wedge (r_j - r_k) \cdot (r_k - r_i)$ .

De acordo com as simetrias especificadas acima, segue que as equações

$$\begin{aligned}
f_{123} = 0, f_{124} = 0, f_{125} = 0, f_{126} = 0, f_{132} = 0, f_{134} = 0, f_{135} = 0, f_{136} = 0, f_{145} = 0, \\
f_{146} = 0, f_{231} = 0, f_{234} = 0, f_{235} = 0, f_{236} = 0, f_{245} = 0, f_{246} = 0, f_{345} = 0, f_{346} = 0, \\
f_{456} = 0, f_{465} = 0 \text{ e } f_{564} = 0
\end{aligned}$$

são trivialmente satisfeitas.

Isto é, 21 das 60 equações se verificam, restando, então, 39 equações a serem verificadas.

**Lema 5.0.1** *Se a posição do corpo de massa  $m_5$  é simétrica à posição do corpo de massa  $m_4$ , isto é,  $r_5$  está em  $C$ , então não existe posição para a massa  $m_6$  em  $\mathcal{L}$  e massas positivas  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , tais que estes corpos formem uma configuração central.*

**Demonstração.** A configuração imposta pelo lema implica que  $r_{12} = r_{15}$ ,  $r_{16} \neq r_{12}$  e  $r_{15} \neq r_{16}$ . Disto temos que as equações

$$f_{142} = 0, f_{143} = 0, f_{241} = 0, f_{243} = 0, f_{341} = 0 \text{ e } f_{342} = 0,$$

são equivalentes a uma única equação, dada por

$$(R_{12} - R_{45})\Delta_{1425} m_5 + (R_{16} - R_{46})\Delta_{1426} m_6 = 0. \quad (5.11)$$

Das equações

$$f_{152} = 0, f_{153} = 0, f_{251} = 0, f_{253} = 0, f_{351} = 0 \text{ e } f_{352} = 0,$$

temos também uma única equação,

$$(R_{12} - R_{45})\Delta_{1524} m_4 + (R_{16} - R_{56})\Delta_{1526} m_6 = 0. \quad (5.12)$$

Note que o coeficiente da massa  $m_5$ ,  $(R_{12} - R_{45})\Delta_{1425}$ , na equação (5.11) é positivo. Deste modo, o coeficiente da massa  $m_6$ ,  $(R_{16} - R_{46})\Delta_{1426}$ , deve ser negativo. Isto ocorre somente quando  $r_{16} > r_{46}$  e  $\Delta_{1426} > 0$ . Isto implica que o coeficiente da massa  $m_6$ ,  $(R_{16} - R_{56})\Delta_{1526}$ , na equação (5.12) é negativo. Porém, nas considerações acima temos que o coeficiente da massa  $m_4$  é negativo. Deste modo, os coeficientes das massas  $m_4$  e  $m_6$  devem ter sinais opostos. Como  $m_4 \neq 0$  e  $m_6 \neq 0$ , ou  $m_4$  ou  $m_6$  deve ter valor negativo. ■

Podemos obter o mesmo resultado se trocarmos a massa  $m_5$  pela massa  $m_6$ , basta proceder de maneira análoga. O mesmo acontecendo para os lemas que seguem.

**Lema 5.0.2** *Se a posição do corpo de massa  $m_5$  é o ponto  $A$ , então não existem posições para o corpo de massa  $m_6$  em  $\mathcal{L}$  e massas positivas  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , tais que estes corpos formem uma configuração central.*

**Demonstração:** Por hipótese, neste caso temos  $r_{15} = r_{45}$  e do Lema 5.0.1, temos  $r_{16} \neq r_{12}$ . Das equações

$$f_{142} = 0, f_{143} = 0, f_{241} = 0, f_{243} = 0, f_{341} = 0 \text{ e } f_{342} = 0,$$

temos uma única equação

$$(R_{16} - R_{46})\Delta_{1426} m_6 = 0.$$

Como  $m_6 > 0$  e  $\Delta_{1426} \neq 0$ , temos  $R_{16} = R_{46}$  ou, equivalentemente,  $r_{16} = r_{46}$ . Sendo assim  $r_6 = r_5$ , mas esta é uma configuração de colisão. ■

**Lema 5.0.3** *Se a posição da massa  $m_5$  é o ponto  $E$ , então não existe posição para o corpo de massa  $m_6$  e massas positivas  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , tais que estes corpos formem uma configuração central.*

**Demonstração:** Por hipótese,  $\Delta_{1523} = 0$ . Das equações

$$f_{152} = 0, f_{153} = 0, f_{251} = 0, f_{253} = 0, f_{351} = 0 \text{ e } f_{352} = 0,$$

temos uma única equação

$$(R_{12} - R_{45})\Delta_{1524} m_4 + (R_{16} - R_{56})\Delta_{1526} m_6 = 0. \quad (5.13)$$

Das equações

$$f_{142} = 0, f_{143} = 0, f_{241} = 0, f_{243} = 0, f_{341} = 0 \text{ e } f_{342} = 0,$$

também temos uma única equação

$$(R_{15} - R_{45})\Delta_{1425} m_5 + (R_{16} - R_{46})\Delta_{1426} m_6 = 0. \quad (5.14)$$



Note que o coeficiente da massa  $m_4$ ,  $(R_{12} - R_{45})\Delta_{1524}$ , na equação (5.13) é positivo. Deste modo, o coeficiente da massa  $m_6$ ,  $(R_{16} - R_{56})\Delta_{1526}$ , deve ser negativo para termos ambas as massas positivas. Isto ocorre somente onde  $r_{16} > r_{56}$  e  $\Delta_{1526} > 0$ . Portanto, o coeficiente da massa  $m_5$ ,  $(R_{15} - R_{45})\Delta_{1425}$ , na equação (5.14) é positivo. Mas o coeficiente da massa  $m_6$  na equação é positivo. Deste modo, as massas  $m_5$  e  $m_6$  tem sinais opostos.

■

**Lema 5.0.4** *Assuma que temos quatro corpos com massas  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  e  $m_4$  nos vértices de um tetraedro regular com todos lados de comprimento 1 e dois corpos com massas  $m_5$  e  $m_6$  na reta  $\mathcal{L}$  de acordo com a Fig. 5.6. Nestas condições, os seis corpos podem estar em configuração central se as seguinte afirmações se verificam:*

(a) *As três massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  são iguais;*

(b) *Somente um dos vetores  $r_5$  ou  $r_6$  deve estar no segmento  $AB$ .*

**Demonstração:** Dos Lemas 5.0.1, 5.0.2 e 5.0.3 devemos assumir  $r_5 \neq A$ ,  $r_5 \neq C$ ,  $r_5 \neq E$ ,  $r_6 \neq A$ ,  $r_6 \neq C$  e  $r_6 \neq E$ . Nestas considerações, das equações

$$f_{254} = 0, f_{256} = 0, f_{264} = 0, f_{265} = 0, f_{452} = 0, f_{462} = 0 \text{ e } f_{562} = 0,$$

temos uma única equação

$$(R_{12} - R_{16})\Delta_{2641}(m_1 - m_3) = 0.$$

Deste modo, temos  $m_1 = m_3$  desde que  $r_{12} \neq r_{16}$  e  $\Delta_{2641} \neq 0$ . Pelo mesmo argumento, das equações

$$f_{154} = 0, f_{156} = 0, f_{164} = 0, f_{165} = 0, f_{451} = 0, f_{461} = 0 \text{ e } f_{561} = 0,$$

temos somente uma equação

$$(R_{12} - R_{15})\Delta_{1542}(m_2 - m_3) = 0.$$

Deste modo, temos  $m_2 = m_3$  desde que  $r_{12} \neq r_{15}$  e  $\Delta_{1542} \neq 0$ . Das equações

$$f_{354} = 0, f_{356} = 0, f_{364} = 0, f_{365} = 0, f_{453} = 0, f_{463} = 0 \text{ e } f_{563} = 0,$$

possuimos somente a equação

$$(R_{12} - R_{15})\Delta_{3541}(m_1 - m_2) = 0.$$

Desde que  $r_{12} \neq r_{15}$  e  $\Delta_{3541} \neq 0$ , temos  $m_1 = m_2$ . Portanto,  $m_1 = m_2 = m_3$ , e assim está provado o item (a) deste Lema. Assumindo, portanto,  $m_1 = m_2 = m_3$ , do Lema 5.0.4 temos mais 21 equações satisfeitas, portanto, o sistema de equações de Dziobek fica reduzido a 18 equações, que podem ser divididas em 3 grupos de 6 equações, onde em cada grupo as equações são equivalentes a uma única equação, a saber:

(i) As equações

$$f_{142} = 0, f_{143} = 0, f_{241} = 0, f_{243} = 0, f_{341} = 0 \text{ e } f_{342} = 0,$$

são equivalentes à equação

$$(R_{15} - R_{45})\Delta_{1425} m_5 + (R_{16} - R_{46})\Delta_{1426} m_6 = 0. \quad (5.15)$$

(ii) As equações

$$f_{152} = 0, f_{153} = 0, f_{251} = 0, f_{253} = 0, f_{351} = 0 \text{ e } f_{352} = 0,$$

são equivalentes à equação

$$(R_{12} - R_{15})\Delta_{1523} m_1 + (R_{12} - R_{45})\Delta_{1524} m_4 + (R_{16} - R_{56})\Delta_{1526} m_6 = 0. \quad (5.16)$$

(iii) As equações

$$f_{162} = 0, f_{163} = 0, f_{261} = 0, f_{263} = 0, f_{361} = 0 \text{ e } f_{362} = 0,$$

são equivalentes à equação

$$(R_{12} - R_{16})\Delta_{1623} m_1 + (R_{12} - R_{46})\Delta_{1624} m_4 + (R_{15} - R_{56})\Delta_{1625} m_5 = 0. \quad (5.17)$$

Os coeficientes da equação (5.15) devem ter sinais opostos. Existem duas possibilidades para isto, ou  $(R_{15} - R_{45})\Delta_{1425} < 0$  e  $(R_{16} - R_{46})\Delta_{1426} > 0$  ou  $(R_{15} - R_{45})\Delta_{1425} > 0$  e  $(R_{16} - R_{46})\Delta_{1426} < 0$ .

1)  $(R_{15} - R_{45})\Delta_{1425} < 0$  e  $(R_{16} - R_{46})\Delta_{1426} > 0$ . A inequação  $(R_{15} - R_{45})\Delta_{1425} < 0$  é satisfeita somente onde  $r_{15} > r_{45}$  e  $\Delta_{1425} > 0$ , ou seja, somente se  $r_5 \in AB$ . Já a inequação  $(R_{16} - R_{46})\Delta_{1426} > 0$  é satisfeita onde  $r_{16} < r_{46}$ , ou seja,  $r_6 \in \mathcal{L}_1 \cup CD \cup DE \cup EA$ , ou  $\Delta_{1426} < 0$ , isto é,  $r_6 \in BF \cup \mathcal{L}_2$ .

2)  $(R_{15} - R_{45})\Delta_{1425} > 0$  e  $(R_{16} - R_{46})\Delta_{1426} < 0$ . A inequação  $(R_{15} - R_{45})\Delta_{1425} > 0$  é satisfeita onde  $r_{15} < r_{45}$ , ou seja,  $r_5 \in \mathcal{L}_1 \cup CD \cup DE \cup EA$ , ou  $\Delta_{1425} < 0$ , isto é,  $r_5 \in BF \cup \mathcal{L}_2$ . Já a inequação  $(R_{16} - R_{46})\Delta_{1426} < 0$  é satisfeita somente se  $r_{16} > r_{46}$  e  $\Delta_{1426} > 0$ . Isto ocorre somente quando  $r_6 \in AB$ .

Assim dos itens 1) e 2) acima o item (b) do lema está provado, finalizando a demonstração. ■

Portanto, a primeira parte do Teorema 5.0.3 está demonstrada.

**Observação 5.0.1** *Como visto no Lema 5.0.4 devemos assumir ou  $r_5$  ou  $r_6$  em  $AB$ . Sem perda de generalidade, assumiremos que  $r_5 \in AB$ . Veja Lema 5.0.4.*

**Lema 5.0.5** *Se  $r_6 \in \mathcal{L}_1$ , então não existem massas positivas  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , tais que estes corpos formem uma configuração central.*

**Demonstração.** Das hipóteses acima, temos as seguintes relações

$$R_{12} - R_{16} > 0, \quad R_{12} - R_{46} > 0, \quad R_{15} - R_{56} > 0,$$

$$\Delta_{1623} < 0, \quad \Delta_{1624} < 0, \quad \Delta_{1625} < 0.$$

Portanto, os três coeficientes da equação (5.17) são negativos. Isto implica que duas das três massas  $m_1$ ,  $m_4$ ,  $m_5$  tem sinais opostos. Sendo assim, pelo menos uma massa será negativa. ■

**Lema 5.0.6** *Se  $r_6 \in \mathcal{L}_2$ , então não existem massas positivas  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , tais que estes corpos formem uma configuração central.*

**Demonstração.** Das hipóteses acima, seguem as relações

$$R_{12} - R_{16} > 0, \quad R_{12} - R_{46} > 0, \quad R_{15} - R_{56} > 0,$$

$$\Delta_{1623} > 0, \quad \Delta_{1624} > 0, \quad \Delta_{1625} > 0.$$

Portanto, os três coeficiente da equação (5.17) são positivos, implicando que duas das três massas  $m_1$ ,  $m_4$ ,  $m_5$  possuem sinais opostos.

■

**Lema 5.0.7** *Se  $r_6 \in DE$ , então não existem massas positivas  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , tais que estes corpos formem uma configuração central.*

**Demonstração.** Das hipóteses acima, temos as relações

$$R_{12} - R_{16} < 0, \quad R_{12} - R_{46} < 0, \quad R_{15} - R_{56} < 0,$$

$$\Delta_{1623} < 0, \quad \Delta_{1624} < 0, \quad \Delta_{1625} < 0.$$

Portanto, os três coeficientes das equações (5.17) são positivos. Isto implica que duas das três massas  $m_1$ ,  $m_4$ ,  $m_5$  tem sinais opostos.

■

Sem perda de generalidade, tomaremos um sistema de coordenadas tal que os corpos de massas  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $m_4$ ,  $m_5$  e  $m_6$  estão nas seguintes posições

$$(\sqrt{3}/3, 0, 0), (-\sqrt{3}/6, -1/2, 0), (-\sqrt{3}/6, 1/2, 0), (0, 0, \sqrt{6}/3), (0, 0, x) \text{ e } (0, 0, y),$$

respectivamente.

Deste modo, temos as seguintes coordenadas

$$A = (0, 0, \sqrt{6}/12), B = (0, 0, \sqrt{6}/3), C = (0, 0, -\sqrt{6}/3), D = (0, 0, -1 + \sqrt{6}/3), \\ E = (0, 0, 0) \text{ e } F = (0, 0, 1 + \sqrt{6}/3).$$

Portanto,  $r_5 \in AB$  se, e somente se,  $\sqrt{6}/12 < x < \sqrt{6}/3$ .

Utilizando os coeficientes das equações (5.15), (5.16) e (5.17), respectivamente, definimos as funções

$$n_{13} = (R_{15} - R_{45})\Delta_{1425}, \quad n_{14} = (R_{16} - R_{46})\Delta_{1426},$$

$$n_{21} = (R_{12} - R_{15})\Delta_{1523}, \quad n_{22} = (R_{12} - R_{45})\Delta_{1524}, \quad n_{24} = (R_{16} - R_{56})\Delta_{1526},$$

$$n_{31} = (R_{12} - R_{16})\Delta_{1623}, \quad n_{32} = (R_{12} - R_{46})\Delta_{1624}, \quad n_{33} = (R_{15} - R_{56})\Delta_{1625}.$$

Em termos das coordenadas citadas acima, podemos escrever estas equações da seguinte maneira

$$n_{13}(x, y) = \left( \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}x}{6} \right) \left( \frac{1}{(x^2 + \frac{1}{3})^{3/2}} - \frac{27}{((\sqrt{6} - 3x)^2)^{3/2}} \right),$$

$$\begin{aligned}
n_{14}(x, y) &= \left( \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}y}{6} \right) \left( \frac{1}{(y^2 + \frac{1}{3})^{3/2}} - \frac{27}{((\sqrt{6} - 3y)^2)^{3/2}} \right), \\
n_{21}(x, y) &= \frac{\sqrt{3}x}{2} \left( 1 - \frac{1}{(x^2 + \frac{1}{3})^{3/2}} \right), \\
n_{22}(x, y) &= \left( \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{2}}{6} \right) \left( 1 - \frac{27}{((\sqrt{6} - 3x)^2)^{3/2}} \right), \\
n_{24}(x, y) &= \left( \frac{x - y}{2\sqrt{3}} \right) \left( \frac{1}{(y^2 + \frac{1}{3})^{3/2}} - \frac{1}{((x - y)^2)^{3/2}} \right), \\
n_{31}(x, y) &= -\frac{\sqrt{3}y}{2} \left( 1 - \frac{1}{(y^2 + \frac{1}{3})^{3/2}} \right), \\
n_{32}(x, y) &= \left( \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}y}{6} \right) \left( 1 - \frac{27}{((\sqrt{6} - 3y)^2)^{3/2}} \right), \\
n_{33}(x, y) &= \left( \frac{x - y}{2\sqrt{3}} \right) \left( \frac{1}{(x^2 + \frac{1}{3})^{3/2}} - \frac{1}{((x - y)^2)^{3/2}} \right).
\end{aligned}$$

As equações (5.15), (5.16), e (5.17) definem três hiperplanos passando pela origem do espaço de parâmetros  $(m_1, m_4, m_5, m_6)$ . O vetor de massa é paralelo à reta definida pela interseção desses três hiperplanos. Podemos escrever o vetor de massa como  $T = (T_1, -T_2, T_3, -T_4)$ , onde

$$T_1 = n_{13}n_{24}n_{32} + n_{14}n_{22}n_{33},$$

$$T_2 = n_{13}n_{24}n_{31} + n_{14}n_{21}n_{33},$$

$$T_3 = n_{14}(n_{21}n_{32} - n_{22}n_{31}),$$

$$T_4 = n_{13}(n_{21}n_{32} - n_{22}n_{31}).$$

Deste modo, teremos massas positivas  $m_1, m_4, m_5$  e  $m_6$  como soluções das equações (5.15), (5.16) e (5.17) se, e somente se, as componentes do vetor de massa  $T$  tem o mesmo sinal.

**Lema 5.0.8** *Consideremos  $x = 3/10$  e  $y = -1/2$ , ou seja  $r_5 \in AB$  e  $r_6 \in CD$ . Então existem massas positivas  $m_i, i = 1, \dots, 6$ , tais que estes corpos formem uma configuração central.*

**Demonstração.** Substituindo  $x = 3/10$  e  $y = -1/2$  em  $n_{13}$ ,  $n_{14}$ ,  $n_{21}$ ,  $n_{22}$ ,  $n_{24}$ ,  $n_{31}$ ,  $n_{32}$  e  $n_{33}$  e então, calculando  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ , segue que

$$T_1 \left( \frac{3}{10}, -\frac{1}{2} \right) < 0, T_2 \left( \frac{3}{10}, -\frac{1}{2} \right) > 0, T_3 \left( \frac{3}{10}, -\frac{1}{2} \right) < 0, T_4 \left( \frac{3}{10}, -\frac{1}{2} \right) > 0.$$

Portanto as componentes do vetor de massa  $T$  tem mesmo sinal. Com isso o Lema está provado.

Considerando  $m_1 = m_2 = m_3 = 10$ , daremos algumas informações acerca do valor das massas  $m_4$ ,  $m_5$  e  $m_6$ :

$$m_4 = -\frac{90 \theta_1}{889 \theta_2},$$

onde

$$\begin{aligned} \theta_1 = & -169428788777 \sqrt{3}\sqrt{127} + 68197707648 \sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2}\sqrt{7} \\ & + 96005855232 \sqrt{127}\sqrt{7} - 1733111767086 \sqrt{7}\sqrt{2} \\ & - 1398415595283 \sqrt{3}\sqrt{7} - 55810140602 \sqrt{127}\sqrt{2} \\ & + 7165469970760 + 277475849024 \sqrt{3}\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_2 = & -6885857196 \sqrt{7}\sqrt{2} - 3517815545 \sqrt{3}\sqrt{7} + 1654729020 \sqrt{127}\sqrt{2} \\ & - 2168765627 \sqrt{3}\sqrt{127} + 12461781528 + 1743814656 \sqrt{127}\sqrt{7} \\ & + 159252480 \sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2}\sqrt{7} + 1138062240 \sqrt{3}\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$m_5 = -\frac{146304 \theta_3}{35 (3 + 2 \sqrt{3}\sqrt{2})^2 (1536 \sqrt{3}\sqrt{127} - 16129) \theta_4},$$

onde

$$\begin{aligned} \theta_3 = & -9279529102449 \sqrt{3}\sqrt{127} + 910848433824 \sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2}\sqrt{7} \\ & + 2443137682041 \sqrt{127}\sqrt{7} - 3512003097036 \sqrt{7}\sqrt{2} \\ & - 3064630331483 \sqrt{3}\sqrt{7} - 8621348150970 \sqrt{127}\sqrt{2} \\ & + 21107073194110 \sqrt{3}\sqrt{2} + 110325167369661, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_4 = & -6885857196 \sqrt{7}\sqrt{2} - 3517815545 \sqrt{3}\sqrt{7} + 1654729020 \sqrt{127}\sqrt{2} \\ & - 2168765627 \sqrt{3}\sqrt{127} + 12461781528 + 1743814656 \sqrt{127}\sqrt{7} \\ & + 159252480 \sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2}\sqrt{7} + 1138062240 \sqrt{3}\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$m_6 = -\frac{40320 (1881 \sqrt{3}\sqrt{127} - 2810 \sqrt{127}\sqrt{2} + 16129) \theta_5}{127 (-9 + 10 \sqrt{3}\sqrt{2})^2 (27 \sqrt{3}\sqrt{7} + 34 \sqrt{7}\sqrt{2} - 49) (1536 \sqrt{3}\sqrt{127} - 16129) \theta_6},$$

onde

$$\begin{aligned} \theta_5 = & -9279529102449 \sqrt{3}\sqrt{127} + 910848433824 \sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2}\sqrt{7} \\ & + 2443137682041 \sqrt{127}\sqrt{7} - 3512003097036 \sqrt{7}\sqrt{2} \\ & - 3064630331483 \sqrt{3}\sqrt{7} - 8621348150970 \sqrt{127}\sqrt{2} \\ & + 21107073194110 \sqrt{3}\sqrt{2} + 110325167369661, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_6 = & -6885857196 \sqrt{7}\sqrt{2} - 3517815545 \sqrt{3}\sqrt{7} + 1654729020 \sqrt{127}\sqrt{2} \\ & - 2168765627 \sqrt{3}\sqrt{127} + 12461781528 + 1743814656 \sqrt{127}\sqrt{7} \\ & + 159252480 \sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2}\sqrt{7} + 1138062240 \sqrt{3}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por um longo cálculo porém elementar, as equações (5.15), (5.16) e (5.17) são satisfeitas. O extenso cálculo envolvido neste Lema foi corroborado com software Maple 9. Os valores das massas acima, com uma precisão de dez casas decimais, são dados por

$$\tilde{m}_4 = 6.7458781851, \quad m_5 = 10.1934123989, \quad m_6 = 8.0305718049.$$

■

**Lema 5.0.9** *Consideremos  $x = 3/10$  e  $y = 1/10$ , ou seja  $r_5 \in AB$  e  $r_6 \in EA$ . Então existem massas positivas  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , tais que estes corpos formem uma configuração central.*

**Demonstração.** Substituindo  $x = 3/10$  e  $y = 1/10$  em  $n_{13}$ ,  $n_{14}$ ,  $n_{21}$ ,  $n_{22}$ ,  $n_{24}$ ,  $n_{31}$ ,  $n_{32}$  e  $n_{33}$  e calculando  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ , segue que

$$T_1 \left( \frac{3}{10}, \frac{1}{10} \right) > 0, \quad T_2 \left( \frac{3}{10}, \frac{1}{10} \right) < 0, \quad T_3 \left( \frac{3}{10}, \frac{1}{10} \right) > 0, \quad T_4 \left( \frac{3}{10}, \frac{1}{10} \right) < 0.$$

Portanto, as componentes do vetor de massa  $T$  tem mesmo sinal. Com isso o lema está provado.

Considerando as massas  $m_1 = m_2 = m_3 = 10$ , temos que as massas  $m_4$ ,  $m_5$  e  $m_6$  assumem o seguintes valores:

$$m_4 = \frac{90 \psi_1}{13081 \psi_2},$$

onde

$$\begin{aligned}\psi_1 = & 400775035943835 \sqrt{3}\sqrt{103} - 367935503618123 \sqrt{3}\sqrt{127} \\ & - 79367052441600 \sqrt{127}\sqrt{103} + 340184683326250 \sqrt{127}\sqrt{2} \\ & - 446181650457150 \sqrt{2}\sqrt{103} - 391767956870560 \sqrt{3}\sqrt{2} \\ & + 42152670665280 \sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2}\sqrt{103} + 1140836863198798,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2 = & -828144000 \sqrt{127}\sqrt{103} + 155520000 \sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2}\sqrt{103} \\ & - 336046827905 \sqrt{3}\sqrt{103} + 123201043920 \sqrt{3}\sqrt{2} \\ & + 344038847249 \sqrt{3}\sqrt{127} + 578025295560 \sqrt{2}\sqrt{103} \\ & - 449497813320 \sqrt{127}\sqrt{2} - 656045558874,\end{aligned}$$

$$m_5 = \frac{4572 \psi_3}{515 (24 \sqrt{3}\sqrt{127} - 16129) (-3 + 10 \sqrt{3}\sqrt{2})^2 \psi_4},$$

onde

$$\begin{aligned}\psi_3 = & 277476547044902110 \sqrt{3}\sqrt{103} - 208952726731151670 \sqrt{3}\sqrt{127} \\ & + 223267858814565828 \sqrt{127}\sqrt{2} - 298005698143418421 \sqrt{2}\sqrt{103} \\ & - 2925421091076103921 \sqrt{3}\sqrt{2} - 118173007491268230 \sqrt{127}\sqrt{103} \\ & + 51801039529144776 \sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2}\sqrt{103} + 5985425952439496070,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_4 = & -828144000 \sqrt{127}\sqrt{103} + 155520000 \sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2}\sqrt{103} \\ & - 336046827905 \sqrt{3}\sqrt{103} + 123201043920 \sqrt{3}\sqrt{2} \\ & + 344038847249 \sqrt{3}\sqrt{127} - 656045558874 \\ & + 578025295560 \sqrt{2}\sqrt{103} - 449497813320 \sqrt{127}\sqrt{2},\end{aligned}$$

$$m_6 = -\frac{3708 (-1881 \sqrt{3}\sqrt{127} + 2810 \sqrt{127}\sqrt{2} - 16129) \psi_5}{635 (24 \sqrt{3}\sqrt{127} - 16129) (-603 \sqrt{3}\sqrt{103} + 2090 \sqrt{2}\sqrt{103} - 10609) \psi_6},$$

onde

$$\begin{aligned}\psi_5 = & 277476547044902110 \sqrt{3}\sqrt{103} - 208952726731151670 \sqrt{3}\sqrt{127} \\ & + 223267858814565828 \sqrt{127}\sqrt{2} - 298005698143418421 \sqrt{2}\sqrt{103} \\ & - 2925421091076103921 \sqrt{3}\sqrt{2} - 118173007491268230 \sqrt{127}\sqrt{103} \\ & + 51801039529144776 \sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2}\sqrt{103} + 5985425952439496070,\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \psi_6 = & \left(-9 + 10\sqrt{3}\sqrt{2}\right)^2 \left(-828144000\sqrt{127}\sqrt{103} - 656045558874 \right. \\ & + 155520000\sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2}\sqrt{103} - 336046827905\sqrt{3}\sqrt{103} \\ & + 123201043920\sqrt{3}\sqrt{2} + 344038847249\sqrt{3}\sqrt{127} \\ & \left. + 578025295560\sqrt{2}\sqrt{103} - 449497813320\sqrt{127}\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Por um longo, porém elementar cálculo, as equações (5.15), (5.16) e (5.17) são satisfeitas. O extenso cálculo envolvido neste lema foi corroborado com o software Maple 9. Os valores das massas acima, com uma precisão de dez casas decimais, são

$$m_4 = 8.0398208730, \quad m_5 = 0.0828851657, \quad m_6 = 0.0962271225.$$

■

**Lema 5.0.10** *Consideremos  $x = 3/10$  e  $y = 1$ , ou seja  $r_5 \in AB$  e  $r_6 \in BF$ . Então existem massas positivas  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , tais que estes corpos formem uma configuração central.*

**Demonstração.** Substituindo  $x = 3/10$  e  $y = 1$  em  $n_{13}$ ,  $n_{14}$ ,  $n_{21}$ ,  $n_{22}$ ,  $n_{24}$ ,  $n_{31}$ ,  $n_{32}$  e  $n_{33}$  e calculando  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ , segue que

$$T_1\left(\frac{3}{10}, 1\right) > 0, \quad T_2\left(\frac{3}{10}, 1\right) < 0, \quad T_3\left(\frac{3}{10}, 1\right) > 0, \quad T_4\left(\frac{3}{10}, 1\right) < 0.$$

Portanto, as componentes do vetor de massa  $T$  tem mesmo sinal. Assim o lema está provado.

Considerando as massas  $m_1 = m_2 = m_3 = 10$ , temos as seguintes informações acerca das massas  $m_4$ ,  $m_5$  e  $m_6$ :

$$m_4 = \frac{45\chi_1}{508\chi_2},$$

onde

$$\begin{aligned} \chi_1 = & 53153630040\sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2} - 218046103912\sqrt{127}\sqrt{2} + 1243241083487 \\ & + 169782922943\sqrt{3}\sqrt{127} - 129631817952\sqrt{127} - 1242920324976\sqrt{3} \\ & - 430417266086\sqrt{3}\sqrt{2} + 1513598400600\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_2 = & -302306823\sqrt{127} + 127894410\sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2} + 831828240\sqrt{127}\sqrt{2} \\ & - 644882824\sqrt{3}\sqrt{127} - 4369346100\sqrt{2} + 3421428641\sqrt{3} \\ & - 4211991576 + 1781931920\sqrt{3}\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$m_5 = -\frac{56007 \chi_3}{80 (1029 \sqrt{3}\sqrt{127} - 16129) (-3 + \sqrt{3}\sqrt{2})^2 \chi_4},$$

onde

$$\begin{aligned} \chi_3 = & 587871472464 \sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2} - 2792763123759 \sqrt{127}\sqrt{2} - 31866467162793 \\ & + 2357179926093 \sqrt{3}\sqrt{127} - 1447895560896 \sqrt{127} - 4363013925568 \sqrt{3} \\ & + 12332808521953 \sqrt{3}\sqrt{2} + 5395481085936 \sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_4 = & -302306823 \sqrt{127} + 127894410 \sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2} + 831828240 \sqrt{127}\sqrt{2} \\ & - 644882824 \sqrt{3}\sqrt{127} - 4369346100 \sqrt{2} + 3421428641 \sqrt{3} \\ & - 4211991576 + 1781931920 \sqrt{3}\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$m_6 = \frac{4410 (-1881 \sqrt{3}\sqrt{127} + 2810 \sqrt{127}\sqrt{2} - 16129) \chi_5}{127 (1029 \sqrt{3}\sqrt{127} - 16129) (-9 \sqrt{3} + 11 \sqrt{2} + 8) (-9 + 10 \sqrt{3}\sqrt{2})^2 \chi_6},$$

onde

$$\begin{aligned} \chi_5 = & 587871472464 \sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2} - 2792763123759 \sqrt{127}\sqrt{2} - 31866467162793 \\ & + 2357179926093 \sqrt{3}\sqrt{127} - 1447895560896 \sqrt{127} - 4363013925568 \sqrt{3} \\ & + 12332808521953 \sqrt{3}\sqrt{2} + 5395481085936 \sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_6 = & -302306823 \sqrt{127} + 127894410 \sqrt{3}\sqrt{127}\sqrt{2} + 831828240 \sqrt{127}\sqrt{2} \\ & - 644882824 \sqrt{3}\sqrt{127} - 4369346100 \sqrt{2} + 3421428641 \sqrt{3} \\ & - 4211991576 + 1781931920 \sqrt{3}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por um longo, porém elementar cálculo, temos que as equações (5.15), (5.16) e (5.17) são satisfeitas. O extenso cálculo envolvido no lema foi corroborado com o software Maple 9. Os valores das massas acima, com uma precisão de dez casas decimais, são

$$m_4 = 2.8165087541, \quad m_5 = 145.0492841643, \quad m_6 = 9.1870655797.$$

■

Defina

$$\begin{aligned} G &= (0, 0, 3/10) \in AB, \quad G_1 = (0, 0, -1/2) \in I^1(G) \subset CD, \\ G_2 &= (0, 0, 1/10) \in I^2(G) \subset EA, \quad \text{e } G_3 = (0, 0, 1) \in I^3(G) \subset BF. \end{aligned}$$

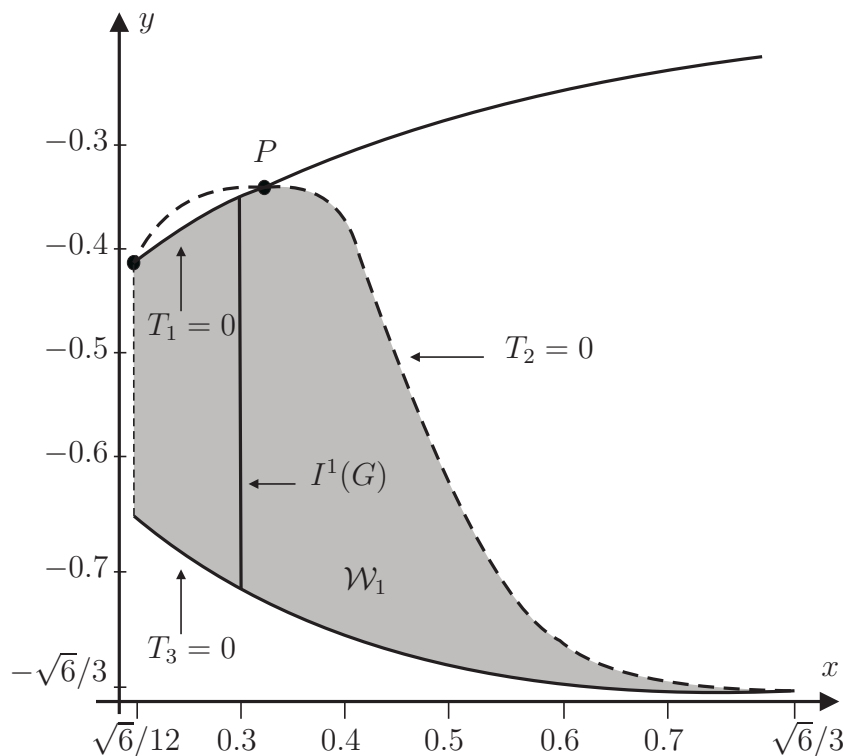


Figura 5.7: A região  $\mathcal{W}_1$  e o segmento  $I^1(G)$  do Teorema 5.0.3.

A prova da última parte do Teorema 5.0.3 segue dos Lemas 5.0.8, 5.0.9 e 5.0.10 e a condição aberta dos vetores de massa  $T$ . Veja Fig. 5.7, 5.8 e 5.9.

Consideremos  $r_5 \in AB$  e  $r_6 \in CD$ . Segue que

$$n_{13} < 0, n_{14} > 0, n_{21} < 0, n_{22} > 0, n_{24} > 0, n_{31} > 0, n_{32} < 0.$$

Em particular, como  $n_{13} \neq 0$  e  $n_{14} \neq 0$ , segue que  $T_3 = 0$  se, e somente se,  $T_4 = 0$ .

Defina a região

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ (x, y) : \frac{\sqrt{6}}{12} < x < \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3} < y < \frac{\sqrt{6}}{3} - 1, T_1 < 0, T_2 > 0, T_3 < 0, T_4 > 0 \right\}.$$

Na Fig. 5.7 a região  $\mathcal{W}_1$  é destacada. Note que  $(3/10, -1/2) \in I^1(G) \subset \mathcal{W}_1$  de acordo com o Teorema 5.0.3. Note também que a projeção da região  $\mathcal{W}_1$  no eixo dos  $x$  é todo segmento  $AB$ . O ponto  $P$  é definido pela interseção das curvas  $T_1 = 0$  e  $T_2 = 0$  e temos as coordenadas  $x = 1/3$  e  $y = -1/3$ .

Consideremos  $r_5 \in AB$  e  $r_6 \in EA$ . Segue que

$$n_{13} < 0, n_{14} > 0, n_{21} < 0, n_{22} > 0, n_{31} < 0, n_{32} > 0.$$

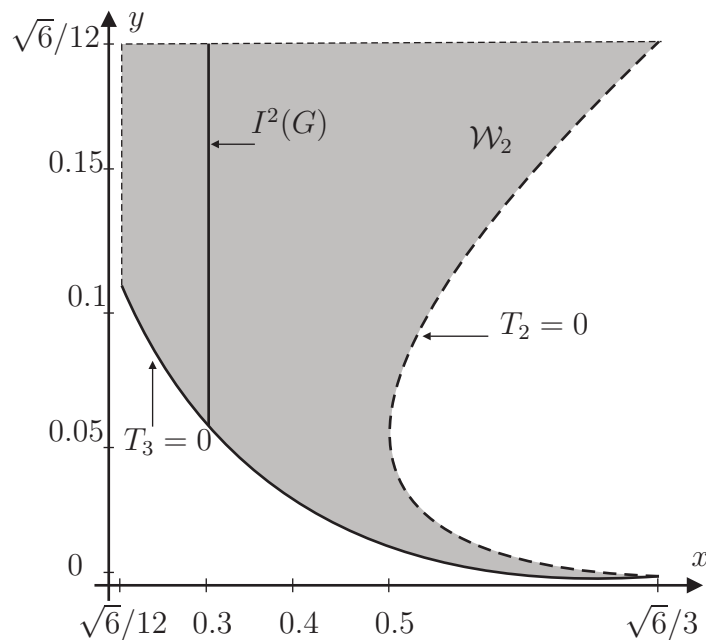


Figura 5.8: A região  $\mathcal{W}_2$  e o segmento  $I^2(G)$  do Teorema 5.0.3.

Em particular, como  $n_{13} \neq 0$  e  $n_{14} \neq 0$ , segue que  $T_3 = 0$  se, e somente se,  $T_4 = 0$ . Além disso a função  $T_1$  é positiva. Defina a região

$$\mathcal{W}_2 = \left\{ (x, y) : \frac{\sqrt{6}}{12} < x < \frac{\sqrt{6}}{3}, 0 < y < \frac{\sqrt{6}}{12}, T_1 > 0, T_2 < 0, T_3 > 0, T_4 < 0 \right\}.$$

A região  $\mathcal{W}_2$  é destacada na Fig. 5.8. Note que  $(3/10, 1/10) \in I^2(G) \subset \mathcal{W}_2$  de acordo com o Teorema 5.0.3. Note também que a projeção da região  $\mathcal{W}_2$  no eixo  $x$  é todo segmento  $AB$ .

Consideremos  $r_5 \in AB$  e  $r_6 \in BF$ . Segue que

$$n_{13} < 0, n_{14} > 0, n_{21} < 0, n_{22} > 0, n_{24} > 0, n_{31} > 0, n_{32} < 0.$$

Em particular, como  $n_{13} \neq 0$  e  $n_{14} \neq 0$ , segue que  $T_3 = 0$  se, e somente se,  $T_4 = 0$ . Além disso a função  $T_1$  é positiva. Defina a região

$$\mathcal{W}_3 = \left\{ (x, y) : \frac{\sqrt{6}}{12} < x < \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} < y < 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, T_1 > 0, T_2 < 0, T_3 > 0, T_4 < 0 \right\}.$$

Na Fig. 5.9 a região  $\mathcal{W}_3$  está destacada. Note que  $(3/10, 1) \in I^3(G) \subset \mathcal{W}_3$  de acordo com o Teorema 5.0.3. Note também que a projeção da região  $\mathcal{W}_3$  no eixo dos  $x$  é todo segmento  $AB$ .

Figura 5.9: A região  $\mathcal{W}_3$  e o segmento  $I^3(G)$  do Teorema 5.0.3.

# Capítulo 6

## Considerações finais e trabalhos futuros

Este capítulo tem como finalidade propor trabalhos futuros e, até onde conhecemos, ainda em abertos, sendo que algumas destas perguntas foram motivadas pelos resultados obtidos neste trabalho.

Relativo às configurações planares de 4-corpos, temos as seguintes questões acerca das configurações centrais:

1. Dar um exemplo analítico de uma configuração central planar para o problema de 4-corpos que não apresente reta de simetria. Um exemplo numérico pode ser encontrado em [3];
2. Inspirado no exemplo de Roberts com uma massa negativa, prove a existência (ou não) de um contínuo de configurações centrais planares não equivalentes para o problema de 4-corpos.

No caso das configurações espaciais, motivados pela configuração central espacial de 6 corpos obtida neste trabalho, podemos colocar a seguinte pergunta:

*Dadas 7 massas tais que 5 se encontram fixas nos vértices de uma pirâmide de base quadrada e faces formadas por triângulos equiláteros, existem posições para as outras duas massas sobre a reta que passa perpendicularmente pelo centro do quadrado que forma a base da pirâmide e pelo vértice oposto à base e massas positivas  $m_1, m_2, \dots, m_7$  tais que estas massas nestas posições estão em configuração central?*

Naturalmente podemos estender a pergunta para um problema espacial de  $n+3$  corpos, onde  $n+1$  se encontram nos vértices de uma pirâmide de base formada por um  $n$ -ângono regular e faces formadas por triângulos equiláteros onde os outros dois corpos se encontram sobre a reta que passa pelo centro geométrico do  $n$ -ângono e pelo vértice oposto a base da pirâmide.

No que segue apresentaremos uma questão acerca das possíveis relações entre as configurações centrais planares e as configurações centrais espaciais.

Em [11], Mello e Llibre demonstraram a existência de três novas famílias de configurações centrais planares para o problema de 5 corpos com as seguintes propriedades: três desses corpos se encontram nos vértices de um triângulo equilátero e os outros dois corpos encontram-se numa reta perpendicular bissetora. Nesta demonstração, Mello e Llibre constroem um vetor de massa  $T = (T_1, T_2, T_3)$ , assim como fizemos no capítulo 5 na demonstração do Teorema 5.0.3. Um fato notável é que as regiões  $\mathcal{W}_1$ ,  $\mathcal{W}_2$  e  $\mathcal{W}_3$  nas figuras 5.7, 5.8 e 5.9, respectivamente, correspondentes ao Teorema 5.0.3, nas quais as componentes do vetor de massas tem o mesmo sinal, são exatamente as mesmas regiões obtidas por Mello e Llibre no estudo do problema planar de 5 corpos com as propriedades já especificadas acima. Sendo assim cabe aqui a seguinte questão:

*Existe alguma projeção das configurações centrais do problema espacial de 6 corpos apresentado no capítulo 5 nas configurações centrais do problema planar de 5 corpos obtidas por Mello e Llibre?*

A pergunta pode ser colocada de uma forma mais geral da seguinte maneira:

*Dada uma configuração central espacial com simetrias adequadas, existe alguma projeção particular tal que produza uma configuração planar preservando a propriedade de ser uma configuração central?*

# Bibliografia

- [1] A. Albouy, *The symmetric central configurations of four equal masses*, Contemporary Math. **198** (1996), 131–135.
- [2] D. Anosov, *Geodesic flows and closed Riemannian manifolds with negative curvature*, Proc. Steklov Inst. Math. **90** (1967), 1–212 (Em Russo).
- [3] J. Bernat, J. Llibre e E. Pérez–Chavela, *On the planar central configurations of the 4–body problem with three equal masses*, Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems **16** (2009), 1–15.
- [4] L. Euler, *De motu retilíneo trium corporum se mutuo attahentium*, Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop. **11** (1767), 144–151.
- [5] Y. Hagihara, *Celestial Mechanics*, vol 1, MIT Press, Massachusetts, (1970).
- [6] M. Hampton, R. Moeckel, *Finiteness of relative equilibria of the four–body problem*, Invent. Math. **163** (2006), 163–289.
- [7] M. Hampton, M. Santoprete, *Seven–body central configurations: a family of central configurations in the spatial seven–body problem*, Celestial Mech. Dyn. Astr. **99** (2007), 293–305.
- [8] E. Julliard–Tosel, *Brunns’ theorem: the proof and some generalization*, Celestial Mech. Dyn. Astr. **76** (2009), 241–281.
- [9] J. L. Lagrange, *Essai sur le problème de trois corps*, Ouvres, **6**, Gauthier-Villars, Paris, (1873).
- [10] J. Llibre, L. F. Mello, *Triple and quadruple nested central configurations for the planar  $n$ –body problem*, Physica D **238** (2009), 263–571.



- [11] L. F. Mello, J. Llibre, *New central configurations for the planar 5–body problem*, *Celestial Mech. Dyn. Astr.* **100** (2008), 141–149.
- [12] L. F. Mello, J. Llibre, *New central configurations for the planar 7–body problem*, *Nonlinear Analysis. Real World Applications* **31** (2009), 2246–2255.
- [13] L. F. Mello, A. C. Fernandes, *Configurações centrais encaixantes*, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **29** (2007), 385.
- [14] L. F. Mello, F. E. Chaves, A. C. Fernandes, *Configurações centrais planares do tipo pipa*, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **31** (2009), 1302.
- [15] L. F. Mello, F. E. Chaves, A. C. Fernandes, B. A. Garcia, *Stacked central configurations for the spatial six–body problem*, *Journal of Geometry and Physics* (2009), aceito para publicação.
- [16] R. Moeckel, *On central configurations*, *Math. Z.* **205** (1990), 499–517.
- [17] R. Moeckel, *Celestial Mechanics, (especially central configurations)*, site: [www.math.umn.edu/~rick/notes/Notes.html](http://www.math.umn.edu/~rick/notes/Notes.html).
- [18] F. R. Moulton, *The straight lines solutions of the problem of n–bodies*, *Ann. of Math.* **12** (1910), 1–17.
- [19] I. Newton, *Philosophi Naturalis Principia Mathematica*, Royal Society, London, (1687).
- [20] G. E. Roberts, *A continuum of relative equilibria in the five–body problem*, *Physica D* **127** (1999), 127–141.
- [21] F. V. Roig, *Sistemas Dinâmicos – Problema de N Corpos*, site: [staff.on.br/froig/apostilas/ncorpos.pdf](http://staff.on.br/froig/apostilas/ncorpos.pdf).
- [22] M. Shub, *Appendix to Smale’s paper: Diagonals and relative equilibria in manifolds*, *Lectures Notes in Math.*, Springer–Verlag, New York **197**, (1970).
- [23] D. L. da Silva, *Soluções Homográficas e Configurações Centrais*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, 2007.

- [24] S. Smale, *Topology and mechanics II: The planar  $n$ -body problem*, Invent. Math. **11** (1970), 45–64.
- [25] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, Mathematical Intelligencer **20** (1998), 7–15.
- [26] C. Vidal, G. Renildo, *Homographic solutions in the  $n$ -body problem*, CUBO, A Mathematical Journal **6** (2004), 185–207.
- [27] A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Math., Série 5, Princeton University Press, Princeton, NJ (1941).