

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Análise de Tensões em Placas
Circulares Utilizando Elementos
Finitos Axissimétricos**

Autor: **William Martins Vicente**

Orientador: **Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira**

Itajubá, Fevereiro de 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Análise de Tensões em Placas
Circulares Utilizando Elementos
Finitos Axissimétricos**

Autor: **William Martins Vicente**

Orientador: **Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira**

Curso: **Mestrado em Engenharia Mecânica**

Área de Concentração: **Projeto e Fabricação**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Itajubá, Fevereiro de 2009

MG – Brasil

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Análise de Tensões em Placas
Circulares Utilizando Elementos
Finitos Axissimétricos**

Autor: **William Martins Vicente**

Orientador: **Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira**

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Renato Pavanello – FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Antonio Marcos G. de Lima – IEM/UNIFEI

Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira, Presidente – IEM/UNIFEI

Dedicatória

*À minha mãe, Marlene,
ao meu pai, Antonio Carlos
e ao meu irmão, Milton.*

Agradecimentos

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira, pela disponibilidade em ajudar, dedicação, paciência e amizade.

Ao Professor da Universidade Federal de Itajubá, Vilmar Arthur Schwarz pelo apoio, incentivo e amizade.

Ao Instituto de Engenharia Mecânica da UNIFEI, representado pelos seus dedicados professores e funcionários, pela oportunidade que me concedeu na realização deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo suporte financeiro.

Aos meus pais, Marlene e Antonio Carlos, e a toda minha família que sempre me incentivaram e apoiaram nessa caminhada.

*A maior recompensa do nosso trabalho
não é o que nos pagam por ele,
mas aquilo em que ele nos transforma.
(John Ruskin)*

Resumo

VICENTE, W. M. (2009), *Análise de Tensões em Placas Circulares Utilizando Elementos Finitos Axissimétricos*, Itajubá, 118p. Dissertação (Mestrado em Projeto e Fabricação) – Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

O presente trabalho enfoca os procedimentos de modelagem por elementos finitos de sistemas estruturais axissimétricos para fins de análise de tensões. Ênfase é dada aos elementos estruturais do tipo placas circulares e vasos de pressão. Na modelagem numérica são considerados três elementos finitos axissimétricos: o elemento LSQ (*Linear Strain Quadrilateral*), o QSQ (*Quadratic Strain Quadrilateral*), e o elemento CSQ (*Cubic Strain Quadrilateral*). São implementados procedimentos computacionais em linguagem FORTRAN[®] para a formulação isoparamétrica do método dos elementos finitos, os quais são validados através da comparação entre os resultados de problemas axissimétricos obtidos via solução analítica, com os respectivos obtidos através do emprego da presente metodologia. A partir dos modelos desenvolvidos e implementados em ambiente FORTRAN[®], são realizados vários testes de simulação numérica visando avaliar o desempenho dos procedimentos de modelagem e caracterização das tensões de sistemas estruturais axissimétricos do tipo placas circulares. Além disso, são feitas comparações entre o desempenho dos elementos implementados e análises da influência da variação da espessura da placa na distribuição das tensões. Os resultados obtidos permitem comprovar a eficiência dos procedimentos de modelagem desenvolvidos para a caracterização da distribuição das tensões de sistemas estruturais axissimétricos.

Palavras-chave

Elementos Finitos Axissimétricos, Placas Circulares, Análise de Tensões

Abstract

VICENTE, W. M. (2009), *Analysis of stresses distribution in Circular Plates by Axisymmetric Finite Elements*, Itajubá, 118p. MSc. Dissertation – Mechanical Engineering Institute, Federal University of Itajubá.

This work is devoted to finite element-based procedures for the modeling of axisymmetric structural elements, for the purposes of stresses characterization. Emphasis is placed on circular plates and pressure vessels structural systems. In the numerical modeling three axisymmetric finite elements are considered, as follows: the Linear Strain Quadrilateral-LSQ element, the Quadratic Strain Quadrilateral-QSQ, and the Cubic Strain Quadrilateral-CSQ element. Computational procedures have been developed and implemented in FORTRAN™ language for the isoparametric formulation, which are validated through the comparison between the results of the axisymmetric problems obtained by the analytical solution, with the corresponding obtained by the finite element. By using the finite element models developed and implemented, several numerical simulations are performed aiming at evaluating the performance of the numerical modeling procedures, and the characterization of the stresses distribution of axisymmetric circular plate systems. Moreover, comparisons between the performance of the implemented elements and analyses of the influence of the thickness variation on the stress distribution of the plate have been investigated. The results obtained indicate the effectiveness of the modeling procedures developed for the characterization of the stress distribution of axisymmetric structural systems.

Keywords

Axisymmetric Finite Elements, Circular Plates, Stresses Analysis

Sumário

SUMÁRIO	I
LISTA DE FIGURAS	IV
LISTA DE TABELAS	VII
SIMBOLOGIA	VIII
LETRAS LATINAS	VIII
LETRAS GREGAS	IX
SOBRESCRITOS	X
SUBSCRITOS	X
ABREVIATURAS	X
SIGLAS	XI
CAPÍTULO 1	1
INTRODUÇÃO	1
1.1 Considerações Iniciais	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Descrição do Trabalho	2
CAPÍTULO 2	4
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1 Histórico do Método dos Elementos Finitos	4
2.2 Estado da Arte	6

	ii
CAPÍTULO 3 _____	9
ELEMENTOS FINITOS AXISSIMÉTRICOS _____	9
3.1 Deformações no Elemento -----	10
3.2 Vetor de Tensões no Elemento-----	12
3.3 Elemento Retangular Bilinear-----	13
3.4 Matriz de Rigidez de Elementos Axissimétricos -----	18
3.5 Forças de Superfície-----	18
3.6 Formulação Isoparamétrica para Elementos Axissimétricos Quadrilaterais da Família Serendipity-----	18
CAPÍTULO 4 _____	25
VASOS DE PRESSÃO CILÍNDRICOS E PLACAS FINAS _____	25
4.1 Vasos de Pressão Cilíndricos-----	25
4.1.1 Vasos de Pressão Cilíndricos de Parede Espessa -----	27
4.1.2 Vasos de Pressão sob Pressão Interna -----	31
4.1.3 Vasos de Pressão sob Pressão Externa -----	32
4.2 Teoria de Placas Finas -----	32
4.2.1 Comportamento Geral de Placas-----	33
4.2.2 Relações de Deformação – Deslocamentos-----	35
4.2.3 Resultante das Tensões-----	36
4.2.4 Variação de Tensão no Interior da Placa-----	39
4.2.5 Equação para o Deslocamento Vertical de Placas -----	41
4.3 Placas Finas Circulares -----	42
4.3.1 Relações básicas em Coordenadas Polares -----	42
4.3.2 Flexão Axissimétrica -----	46
4.3.3 Placas Circulares com Carregamento Uniformemente Distribuído -----	48
4.3.4 Placas Circulares com Carregamento Concentrado -----	52
CAPÍTULO 5 _____	56

VALIDAÇÃO DO CÓDIGO COMPUTACIONAL _____	56
5.1 Validação para Vasos De Pressão -----	57
5.2 Validação para Placas Finas-----	63
CAPÍTULO 6 _____	74
EXEMPLOS NUMÉRICOS _____	74
6.1 Carga Atuando no Centro da Placa-----	76
6.2 Carga Uniforme Circunferencial-----	82
CAPÍTULO 7 _____	93
CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS _____	93
7.1 Conclusões-----	94
7.1.1 Sobre a Diferença entre os Elementos-----	94
7.1.2 Sobre as Cargas Concentradas -----	95
7.1.3 Sobre as Placas com Diferentes Espessuras -----	96
7.2 Perspectivas Futuras-----	97
APÊNDICE A _____	99
INTEGRAÇÃO NUMÉRICA. QUADRATURA DE GAUSS _____	99
A.1 Integração Numérica Unidimensional-----	99
A.2 Integração Numérica em Duas Dimensões -----	103
APÊNDICE B _____	108
MÉTODO DE CHOLESKY _____	108
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS _____	114

Lista de Figuras

Figura 3.1 – Exemplos de Corpos Axissimétricos-----	9
Figura 3.2 – Elemento Quadrilateral Axissimétrico-----	10
Figura 3.3 – Elemento de Volume-----	11
Figura 3.4 – Tensões em Corpos Axissimétricos-----	13
Figura 3.5 – Elemento Retangular Bilinear-----	14
Figura 3.6 – (a) Elemento no Sistema Global; (b) Elemento no Sistema Local-----	19
Figura 3.7 – Função de Forma para o Nó n°. 2-----	20
Figura 3.8 – (a) Elemento no Sistema Global; (b) Elemento no Sistema Local-----	20
Figura 3.9 – Função de Forma (a) para o Nó n°. 2; (b) para o Nó n°. 8-----	21
Figura 3.10 – (a) Elemento no Sistema Global; (b) Elemento no Sistema Local-----	22
Figura 4.1 – Placa Fina com um Furo Circular-----	26
Figura 4.2 – Vaso de Pressão de Parede Espessa-----	28
Figura 4.3 – Deslocamento Vertical em uma Placa Fina-----	34
Figura 4.4 – Tensões em um Elemento Infinitesimal-----	38
Figura 4.5 – Elemento de Placa sujeito a um Carregamento p -----	40
Figura 4.6 – Elemento de Placa em Coordenadas Polares-----	43
Figura 4.7 – Momentos e Forças Cisalhantes em um Elemento Infinitesimal-----	44
Figura 4.8 – Placa Circular Engastada sujeita a um Carregamento Distribuído-----	49
Figura 4.9 – Placa Circular Simplesmente Apoiada sujeita a um Carregamento Distribuído-----	51

Figura 4.10 – Placa Fina Circular Engastada sujeita a um Carregamento Concentrado-----	53
Figura 4.11 – Placa Circular Simplesmente Apoiada sujeita a um Carregamento Concentrado -----	54
Figura 5.1 – Vaso de Pressão Cilíndrico de Parede Espessa -----	57
Figura 5.2 – Deslocamentos usando Elementos LSQ-----	58
Figura 5.3 – Deslocamentos usando um Elemento QSQ -----	58
Figura 5.4 – Deslocamentos usando um Elemento CSQ -----	59
Figura 5.5 – Tensão σ_{θ} usando Elementos LSQ-----	60
Figura 5.6 – Tensão σ_{θ} usando Elementos QSQ -----	60
Figura 5.7 – Tensão σ_{θ} usando um Elemento CSQ -----	61
Figura 5.8 – Tensão σ_r usando Elementos LSQ-----	62
Figura 5.9 – Tensão σ_r usando Elementos QSQ -----	63
Figura 5.10 – Tensão σ_r usando um Elemento CSQ-----	63
Figura 5.11 – Placa Fina Circular Engastada-----	64
Figura 5.12 – Deslocamentos usando Elementos LSQ -----	65
Figura 5.13 – Deslocamentos usando Elementos QSQ -----	66
Figura 5.14 – Deslocamentos usando Elementos CSQ -----	67
Figura 5.15 – Tensão σ_{θ} usando Elementos LSQ -----	69
Figura 5.16 – Tensão σ_{θ} usando Elementos QSQ-----	70
Figura 5.17 – Tensão σ_{θ} usando Elementos CSQ-----	71
Figura 5.18 – Tensão σ_r usando Elementos LSQ -----	72
Figura 5.19 – Tensão σ_r usando Elementos QSQ -----	72
Figura 5.20 – Tensão σ_r usando Elementos CSQ -----	73
Figura 6.1 – Placa Fina Circular Simplesmente Apoiada sob uma Carga Concentrada -----	76
Figura 6.2 – Fator β_r para a Determinação da Tensão σ_r' -----	78

Figura 6.3 – Fator β_z para a Determinação da Tensão σ_z -----	79
Figura 6.4 – Fator β_{rz} para a Determinação da Tensão τ_{rz} -----	80
Figura 6.5 – Fator β_θ para a Determinação da Tensão σ'_θ -----	81
Figura 6.6 – Placa Fina Circular Simplesmente Apoiada sujeita a um Carregamento Uniforme-----	83
Figura 6.7 – Fator β_r para a Determinação da Tensão σ_r -----	85
Figura 6.8 – Fator β_z para a Determinação da Tensão σ_z -----	87
Figura 6.9 – Fator β_{rz} para a Determinação da Tensão τ_{rz} -----	89
Figura 6.10 – Fator β_θ para a Determinação da Tensão σ_θ -----	91
Figura A.1 – Um Ponto de Gauss-----	101
Figura A.2 – Dois Pontos de Gauss -----	102
Figura A.3 – Três Pontos de Gauss-----	102
Figura A.4 – Quatro Pontos de Gauss-----	103
Figura A.5 – Quatro Pontos de Gauss-----	104
Figura A.6 – Nove Pontos de Gauss -----	105
Figura A.7 – Dezesesseis Pontos de Gauss -----	106

Lista de Tabelas

Tabela 5.1 – Malhas Formadas por Elementos Lineares.-----	67
Tabela 5.2 – Malhas Formadas por Elementos Quadráticos. -----	68
Tabela 5.3 – Malhas Formadas por Elementos Cúbicos. -----	68
Tabela A.1 – Pontos de Integração. -----	101

Simbologia

Letras Latinas

$[B]$	matriz das derivadas das funções de interpolação	
d	derivada total	
$\{d\}$	vetor dos deslocamentos nodais	m
D	rigidez a flexão de placa	Nm
$[D]$	matriz de elasticidade do material	Pa
E	módulo de elasticidade do material	Pa
f_{sr}, f_{sz}	forças de superfície	Pa
$\{f_s\}$	vetor das forças de superfície	Pa
F	força de campo por unidade de volume	N/m ³
G	módulo de elasticidade ao cisalhamento	Pa
$[J]$	matriz jacobiana	
$[K]$	matriz de rigidez	N/m
M	momento fletor por unidade de comprimento	N
N_i	funções de interpolação	
$[N]$	matriz das funções de interpolação	
p	pressão	Pa

p_o	carregamento uniformemente distribuído	N/m ²
P	carregamento concentrado	N
Q	força cisalhante por unidade de comprimento	N/m
r	raio do cilindro ou da placa	m
t	espessura da parede do cilindro ou da placa	m
u, v	deslocamentos no plano rz	m
w	deslocamento vertical	m
x, y, z	coordenadas cartesianas	
z, r	coordenadas polares	

Letras Gregas

ξ, η	coordenadas do sistema local	
θ	coordenada polar	
ν	coeficiente de Poisson	
σ_r	tensão normal radial	Pa
σ_z	tensão normal axial	Pa
σ_θ	tensão normal circunferencial	Pa
σ_r	tensão normal radial	Pa
τ_{rz}	tensão de cisalhamento	Pa
$\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta$	deformações específicas	
γ_{rz}	deformação de cisalhamento específica	
$\frac{\partial}{\partial}$	derivada parcial	
$\{\sigma\}$	vetor de tensões	Pa

$\{\varepsilon\}$	vetor de deformações específicas	
$\{\phi\}$	vetor campo de deslocamento	
∇^2	operador de Laplace	
β	fator de concentração de tensão	m^{-1}

Sobrescritos

T	transposta de vetor ou de matriz
-----	----------------------------------

Subscritos

<i>int.</i>	interno
<i>ext.</i>	externo
<i>mín.</i>	mínimo
<i>máx.</i>	máximo
<i>h</i>	solução homogênea
<i>p</i>	solução particular
<i>e</i>	referente ao elemento

Abreviaturas

cos	cosseno
sin	seno
tan	tangente
<i>int.</i>	interno
<i>ext.</i>	externo

mín. mínimo

máx. máximo

Siglas

LSQ	Linear Strain Quadrilateral
QSQ	Quadratic Strain Quadrilateral
CSQ	Cubic Strain Quadrilateral
MEF	Método dos Elementos Finitos
IEM	Instituto de Engenharia Mecânica

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A análise de tensões em corpos de revolução submetidos a carregamentos simétricos com relação ao mesmo eixo de simetria do corpo é chamada de análise de tensões axissimétricas. Os elementos utilizados nesta análise pelo método dos elementos finitos são chamados de elementos axissimétricos. A análise de tensões axissimétricas é de muito interesse em várias áreas da engenharia, como na área de fluidos, na área de projetos de fabricação, etc.

A implementação e testes de novos elementos no método de elementos finitos – MEF continuam sendo alvo de muitas pesquisas em várias áreas da engenharia. Independentemente do assunto pesquisado, a eficiência do método está intimamente ligada ao tipo do elemento implementado.

Na formulação isoparamétrica do MEF, utilizada neste trabalho, as funções de forma do elemento são dadas no sistema local de coordenadas naturais ξ e η . As matrizes dos elementos axissimétricos são avaliadas usando o processo numérico da quadratura de Gauss.

Normalmente, não se encontram na literatura muitos trabalhos voltados à análise de tensões em regiões próximas às cargas concentradas. Neste trabalho, é analisada a distribuição

de tensões em regiões distantes e também próximas a carregamentos concentrados em corpos de revolução.

A análise de tensões em corpos axissimétricos é similar àquela do estado plano de tensões. Na formulação, as deformações do elemento são obtidas considerando as hipóteses simplificadoras da teoria da elasticidade linear na análise plana de tensões e deformações.

1.2 OBJETIVOS

Os principais objetivos deste trabalho são:

–O desenvolvimento de uma rotina computacional em linguagem FORTRAN[®] que seja capaz de determinar as tensões e os deslocamentos ao longo de corpos de revolução envolvidos em problemas axissimétricos;

–Comparar o desempenho dos elementos axissimétricos implementados, (linear, quadrático, cúbico), na determinação das tensões e deslocamentos em vasos de pressão de parede espessa e placas finas circulares;

–Investigar o comportamento das tensões, normais e de cisalhamento, em regiões próximas ao ponto de aplicação de cargas concentradas em uma placa fina circular;

–Verificar a influência da variação da espessura da placa no fator de concentração de tensão para placas circulares sujeitas a carregamentos distribuídos em forma de círculo em sua superfície.

1.3 DESCRIÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho é composto por sete capítulos. Neste primeiro capítulo é apresentada a idéia geral do trabalho.

No segundo capítulo é realizada uma revisão bibliográfica sobre o MEF e também sobre a recente utilização dos elementos axissimétricos.

O terceiro capítulo apresenta a teoria da formulação isoparamétrica do MEF para os elementos axissimétricos, a implementação da rotina computacional será feita com base na teoria apresentada neste capítulo.

O quarto capítulo mostra todo o desenvolvimento das equações para o cálculo dos deslocamentos e das tensões em vasos de pressão cilíndricos de parede espessa, mostra também as equações para placas finas circulares, com base nas hipóteses simplificadoras de Kirchhoff.

O quinto capítulo refere-se à validação do código computacional implementado. Essa validação é feita através da comparação dos resultados obtidos do código computacional com os resultados das equações demonstradas no capítulo anterior, para problemas que possuam solução analítica.

No sexto capítulo são mostrados dois exemplos numéricos de placas circulares, o primeiro exemplo representa uma placa fina circular sujeita a um carregamento concentrado, o segundo exemplo mostra placas com diferentes espessuras sujeitas a um mesmo carregamento.

No sétimo capítulo é feita uma conclusão sobre os resultados apresentados nos capítulos anteriores e também são sugeridas algumas possibilidades para trabalhos futuros.

Capítulo 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 HISTÓRICO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O termo *Elementos Finitos* do método dos elementos finitos – MEF – foi usado pela primeira vez na literatura por Clough (1960) em um artigo de engenharia sobre aplicações da elasticidade plana. Porém, a idéia fundamental do método já vinha sendo utilizada há alguns anos por matemáticos, físicos e engenheiros.

Os primeiros trabalhos na área da mecânica estrutural que utilizaram a análise por elementos finitos foram feitos por Hrennikoff (1941) e McHenry (1943) que desenvolveram uma analogia entre elementos discretos (ex. barra e viga) e a correspondente porção de um sólido contínuo. Nesses trabalhos foi usada a técnica semi-analítica que era muito utilizada nos anos 40 pela indústria aeronáutica. Uma aproximação direta baseada no princípio do trabalho virtual foi dada por Kelsey (1960) e Argyris (1964) em uma série de artigos técnicos. Turner et al. (1956) apresentaram a matriz de rigidez para o elemento triangular e também um método de acoplamento das matrizes de rigidez dos elementos.

No início dos anos sessenta, as bases matemáticas do MEF ainda não estavam completamente desenvolvidas. Apesar disso, o método já era usado por engenheiros para a solução de uma grande quantidade de problemas estruturais (Davies, 1986). A solução para

problemas tridimensionais necessitaram apenas da expansão da teoria para problemas bidimensionais apresentada por Argyris.

Os problemas dinâmicos começaram a ser estudados a partir do trabalho de Archer (1963) que introduziu o conceito da matriz de massa. A partir da introdução desse conceito, problemas de vibração (Zienkiewicz et al., 1966) e problemas transientes (Koenig & Davids, 1969) começaram a aparecer na literatura.

No começo dos anos sessenta surgiram os primeiros trabalhos no campo da não linearidade. Turner et al. (1960) apresentaram a técnica do incremento para solucionar problemas geometricamente não lineares. Nessa área, Martin (1965) analisou problemas de estabilidade. Gallagher et al. (1962) modelaram problemas envolvendo material de comportamento não linear. Zienkiewicz et al. (1968) aplicaram o método para a solução de problemas de visco-elasticidade. O texto de Oden (1972) fez uma análise detalhada da utilização das aplicações do método aplicado a problemas não lineares.

O método começou a utilizar o já conhecido método dos resíduos ponderados (Szabo & Lee, 1969) tornando assim possível a solução de problemas para os quais o princípio variacional não oferecia solução ou as soluções eram muito complexas. Escoamentos de fluidos viscosos (Connor & Brebbia, 1976) e problemas não lineares em eletromagnetismo (Zienkiewicz et al., 1977) são exemplos desses problemas.

Simultaneamente ao desenvolvimento do método no campo da engenharia, vários trabalhos foram realizados por grupos de matemáticos. Raramente esses grupos se interagem. O conteúdo desses trabalhos, normalmente, não era divulgado entre os grupos de diferentes áreas (Cook, 1995).

Courant (1943) apresentou a solução para problemas envolvendo torção usando funções de interpolação lineares para elementos triangulares, tendo-se como base o princípio da energia potencial mínima. Artigos similares foram apresentados por Polya (1952) e Weinberger (1956). O trabalho de Greestadt (1959) considerou um meio contínuo com sendo um acoplamento de vários elementos discretos e fez considerações sobre as variáveis em cada região. Nesse trabalho, foi utilizado, pela primeira vez, o princípio variacional.

Na área da matemática, Birkhoff et al. (1968) e Zlamal (1968) publicaram a prova de convergência do MEF e erros de discretização do contorno do domínio de alguns problemas. Entretanto, a primeira prova da convergência do método na área da engenharia foi

apresentada por Melosh (1963) que utilizou o princípio da energia potencial mínima. O trabalho de Melosh foi complementado por Jones (1964) usando o princípio variacional de Reissner.

A partir da década de setenta, com o rápido desenvolvimento de computadores mais potentes, a aplicação do MEF teve um impressionante crescimento e uma enorme divulgação no meio científico. Atualmente, o método representa uma poderosa ferramenta para análise numérica, utilizada na engenharia, na física e na matemática. Os trabalhos divulgados nessas áreas contribuíram significativamente para o desenvolvimento e aperfeiçoamento do MEF (Huebner et al., 1995).

2.2 ESTADO DA ARTE

Muitos trabalhos têm sido apresentados buscando a solução de problemas axissimétricos através de métodos numéricos. Um dos primeiros trabalhos foi apresentado por Penny (1961). Nesse trabalho foi desenvolvida uma solução, através do método das diferenças finitas, para problemas envolvendo simetria em cascas. Radkowski et al. (1962) apresentaram um trabalho sobre a solução de problemas axissimétricos aplicando o método das diferenças finitas.

Percy et al. (1965) empregou o método dos elementos finitos para determinar a solução de problemas em corpos de revolução sujeitos a cargas simétricas e assimétricas. Smith (1966) apresentou o desenvolvimento de um procedimento para a análise estática axissimétrica através da simplificação das estruturas em uma série de seções anulares. Toda a parte de programação da teoria apresentada por Smith foi desenvolvida e publicada posteriormente por Patrick (1966).

Atualmente, para a simplificação e resolução de problemas envolvendo corpos de revolução, a análise axissimétrica tem sido empregada em diversas áreas da engenharia. Os trabalhos citados a seguir são exemplos de recentes aplicações da análise axissimétrica na área da mecânica estrutural.

Osadchuk & Shelestovs'ka (1999) desenvolveram equações para a determinação das tensões residuais em placas espessas. Nesse trabalho, foi utilizada a análise axissimétrica de tensões para a determinação das equações de tensão. Os coeficientes das equações de tensão

foram obtidos através do ajuste de modelos com o auxílio de informações experimentais obtidas através de ensaios não destrutivos de diversos materiais.

Hongyu & Jiarang (2000) apresentaram o desenvolvimento de equações analíticas para o caso de placas espessas laminadas sujeitas a cargas concentradas. As equações mostradas neste trabalho foram desenvolvidas com base nas equações fundamentais da teoria da elasticidade e nas equações de estado para placas laminadas transversalmente e de material isotrópico.

Smith & Filz (2007) propuseram um modelo numérico axissimétrico de uma célula de reforço estrutural em colunas de sustentação de barragens. Uma comparação foi feita entre as análises axissimétrica e tridimensional para o problema. Os resultados mostraram uma boa concordância entre os valores obtidos através dos dois métodos de análises e também os valores experimentais colhidos da estrutura analisada.

Fox et al. (2007) desenvolveram um modelo analítico para determinação do deslocamento vertical de placas circulares com atuadores piezelétricos axissimétricos. As equações para as forças de interação do atuador com a placa foram resolvidas analiticamente e também numericamente através do MEF. A boa concordância entre os valores das soluções dos dois métodos sugere o modelo analítico proposto como uma boa alternativa para a análise para estudos de otimização e projetos de elementos estruturais.

Santos et al. (2008) realizaram uma análise através do MEF de cascas laminadas axissimétricas com sensores e atuadores piezelétricos. Foram analisados os momentos de torção e os modos de vibrar das estruturas. As equações de movimento tridimensional da elasticidade foram reduzidas a equações bidimensionais envolvendo um termo circunferencial. Na formulação do MEF foi utilizada uma série de Fourier truncada para a expansão das variáveis dependentes, carregamento e o potencial elétrico. Mostra-se, nesse trabalho, o acoplamento dos termos simétricos e assimétricos para materiais laminados com piezelétricos. Os resultados tiveram boa concordância com outras soluções obtidas por outras formulações numéricas.

Uma nova aplicação da formulação axissimétrica foi apresentada por Smith (2008) para a análise de estruturas de revolução tipo cascas e placas sujeitas a carregamentos axissimétricos. Nesse trabalho, Smith propõe um novo método de cálculo de tensões em problemas axissimétricos que se baseia na divisão da estrutura em várias seções anulares

independentes. A solução apresentada por Smith é simplificada em relação à formulação axissimétrica tradicional. No entanto, a solução se mostrou muito eficiente no cálculo de deslocamentos e tensões para placas circulares sujeitas a carregamentos uniformemente distribuídos.

Capítulo 3

ELEMENTOS FINITOS AXISSIMÉTRICOS

O estudo da distribuição de tensões em corpos axissimétricos sob carregamento axissimétrico é de grande interesse na engenharia. A análise de tensões axissimétricas é considerada ser uma análise de tensões em corpos de revolução submetidos a carregamentos simétricos com relação ao mesmo eixo de simetria do corpo. Os elementos utilizados nesta análise pelo método dos finitos são chamados de elementos axissimétricos.

Os elementos axissimétricos são bidimensionais. A análise de tensões axissimétricas é similar àquela do estado plano de tensões e deformações. A Fig. 3.1 mostra exemplos de corpos axissimétricos.



Figura 3.1 – Exemplos de Corpos Axissimétricos.

Devido à simetria, duas componentes de deslocamentos em qualquer seção plana do corpo que contém o eixo de simetria definem completamente o estado de deformações e, portanto, o estado de tensões (Zienkiewicz & Taylor, 1989).

A Fig. 3.2 ilustra um toróide formado pela revolução de um retângulo em torno do eixo z de simetria. O elemento retangular que gera o anel está no plano rz do corpo de revolução.

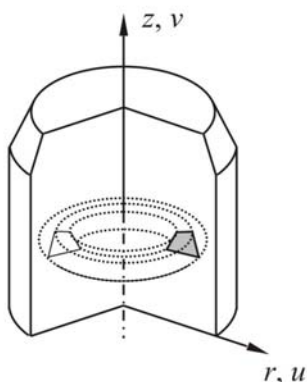


Figura 3.2 – Elemento Quadrilátero Axissimétrico.

3.1 DEFORMAÇÕES NO ELEMENTO

Qualquer ponto do elemento é definido pelas coordenadas, radial r e axial z . Os correspondentes deslocamentos do ponto são u e v , respectivamente, cujas funções de interpolação são precisamente as mesmas quando usadas para o elemento na análise plana de tensões e deformações. Nessa análise pode ser mostrado que o trabalho interno é associado com três componentes de deformações.

Na análise de tensões em corpos axissimétricos, qualquer deslocamento radial provoca automaticamente uma deformação na direção circunferencial e a tensão nessa direção não é nula. Esta quarta componente de deformações das tensões associadas, deve ser considerada. Os pontos nodais de um elemento típico retangular axissimétrico descrevem linhas circunferenciais como mostrado na Fig. 3.2.

Os deslocamentos radiais desenvolvem deformações circunferenciais que provocam as tensões σ_r , σ_z , τ_{rz} e σ_θ . Devido à simetria em relação ao eixo z , as tensões são independentes da coordenada θ .

As Figs. 3.3a-b mostram um elemento de volume de um elemento axissimétrico e sua seção reta para representar o estado geral de deformações para um problema axissimétrico.

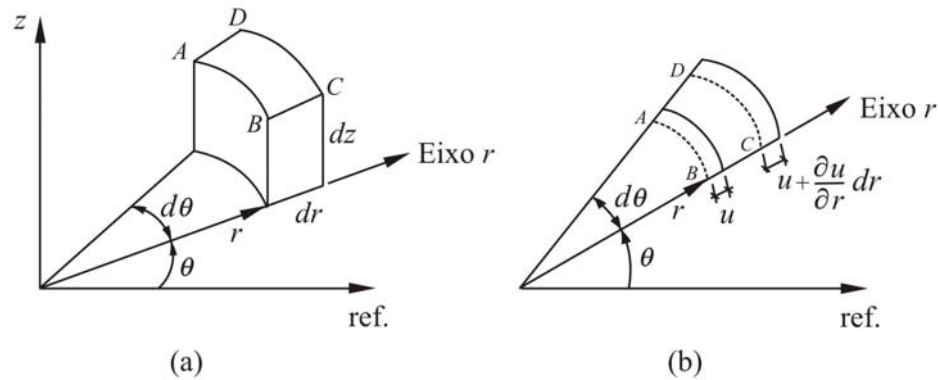


Figura 3.3 – Elemento de Volume

Assim como na análise no estado plano de tensões e deformações, as deformações no plano rz são

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{e} \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \quad (3.1)$$

Analisando a Fig. 3.3(b), pode ser observado que antes da deformação o comprimento do arco AB é $rd\theta$ e após a deformação, o arco AB passa a ter comprimento $(r+u)d\theta$. Então, a deformação tangencial é dada por

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r} \quad (3.2)$$

Portanto, o vetor de deformações do elemento axissimétrico é

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

3.2 VETOR DE TENSÕES NO ELEMENTO

Por outro lado, as deformações no elemento axissimétrico para material linear, homogêneo e isotrópico são (Bathe, 1996)

$$\varepsilon_r = -\frac{\nu\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_r}{E} - \frac{\nu\sigma_\theta}{E} \quad (3.4a)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_r}{E} - \frac{\nu\sigma_\theta}{E} \quad (3.4b)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{2(1+\nu)\tau_{rz}}{E} \quad (3.4c)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\nu\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_r}{E} + \frac{\sigma_\theta}{E} \quad (3.4d)$$

Usando as Eqs. (3.4), o vetor de tensões pode ser colocado em função do vetor de deformação como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

ou

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.6)$$

Então, a matriz que relaciona as tensões com as deformações é

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

A Fig. 3.4 mostra a representação das tensões em corpos axissimétricos.

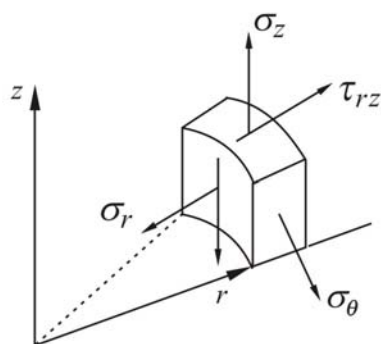


Figura 3.4 – Tensões em Corpos Axissimétricos.

3.3 ELEMENTO RETANGULAR BILINEAR

A Fig. 3.5 mostra um elemento retangular bilinear.

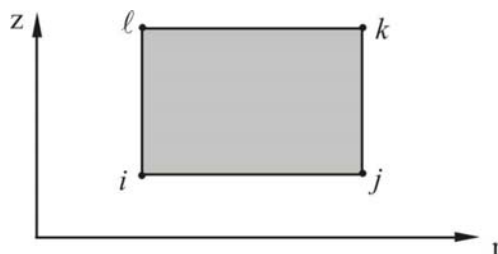


Figura 3.5 – Elemento retangular bilinear

As funções para os deslocamentos do elemento retangular bilinear no sistema global de coordenadas podem ser obtidas fazendo

$$u(r, z) = a + br + crz + dz \quad (3.8a)$$

$$v(r, z) = e + fr + grz + hz \quad (3.8b)$$

onde os coeficientes a , b , c , d , e , f , g e h das funções são colocados em função das coordenadas globais e dos deslocamentos dos pontos nodais do elemento assim com é feito na análise no estado plano de tensões. Fazendo $i = 1$, $j = 2$ e $k = 3$, $l = 4$, tem-se que

$$\text{Para } r = r_1 \text{ e } z = z_1 \Rightarrow u(r_1, z_1) = u_1$$

Usando a Eq. (3.8a), o deslocamento nodal u_1 pode ser representado por

$$u_1 = a + br_1 + cr_1z_1 + d z_1 \quad (3.9a)$$

Repetindo este procedimento para os deslocamentos u_2 , u_3 e u_4 , tem-se que

$$u_2 = a + br_2 + cr_2z_2 + d z_2 \quad (3.9b)$$

$$u_3 = a + br_3 + cr_3z_3 + d z_3 \quad (3.9c)$$

$$u_4 = a + br_4 + cr_4z_4 + d z_4 \quad (3.9c)$$

As Eqs. (3.9) podem ser colocadas como

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_1z_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & r_2z_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & r_3z_3 & z_3 \\ 1 & r_4 & r_4z_4 & z_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_1z_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & r_2z_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & r_3z_3 & z_3 \\ 1 & r_4 & r_4z_4 & z_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

cuja solução é da forma

$$a = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4 \quad (3.12a)$$

$$b = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 + b_4u_4 \quad (3.12b)$$

$$c = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 \quad (3.12c)$$

$$d = d_1u_1 + d_2u_2 + d_3u_3 + d_4u_4 \quad (3.12d)$$

sendo que a_i , b_i , c_i e d_i são funções das coordenadas globais r_i e z_i com $i = (1, \dots, 4)$.

Levando as Eqs. (3.12) na Eq. (3.8a), vem

$$u(r, z) = (a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4) + (b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 + b_4u_4)r + \\ + (c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4)rz + (d_1u_1 + d_2u_2 + d_3u_3 + d_4u_4)z \quad (3.13a)$$

ou,

$$u(r, z) = (a_1 + b_1r + c_1rz + d_1z)u_1 + (a_2 + b_2r + c_2rz + d_2z)u_2 + \\ + (a_3 + b_3r + c_3rz + d_3z)u_3 + (a_4 + b_4r + c_4rz + d_4z)u_4 \quad (3.13b)$$

A Eq. (3.13b) pode ser reescrita como,

$$u(r, z) = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4 \quad (3.14a)$$

ou,

$$u(r, z) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (3.14b)$$

Comparando a Eq. (3.13b) com a Eq. (3.14a), as funções de interpolação da variável física, que no caso é o deslocamento $u(r, z)$ de um ponto qualquer do elemento, são identificadas por

$$N_1 = N_1(r, z) = a_1 + b_1r + c_1rz + d_1z \\ N_2 = N_2(r, z) = a_2 + b_2r + c_2rz + d_2z \\ N_3 = N_3(r, z) = a_3 + b_3r + c_3rz + d_3z \\ N_4 = N_4(r, z) = a_4 + b_4r + c_4rz + d_4z \quad (3.15)$$

Tomando-se o mesmo procedimento para $v(r, z)$, pode-se escrever que,

$$v(r, z) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

onde, N_1 , N_2 , N_3 e N_4 são as mesmas funções dadas pelas Eqs. (3.15). Logo, as funções N_i ($i = 1, 2, 3, 4$) são as funções de interpolação para as variáveis físicas $u(x, y)$ e $v(x, y)$.

As Eqs. (3.14b) e (3.16) podem ser reescritas na forma matricial como,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

ou simplesmente por

$$\{\phi\} = [N] \{d\}_e \quad (3.18)$$

onde $\{\phi\}$ é o vetor campo de deslocamentos, $[N]$ é a matriz que inclui as funções de interpolação e $\{d\}_e$ é o vetor formado pelos deslocamentos nodais do elemento.

Usando a Eq. (3.3), o vetor de deformações de um ponto de um elemento axissimétrico é

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial r} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 & \frac{N_4}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

que na forma matricial compacta, este vetor pode ser reescrito como

$$\{\varepsilon\} = [B] \{d\}_e \quad (3.20)$$

Usando as Eqs. (3.15) e comparando a Eq. (3.19) com a Eq. (3.20), a matriz $[B]$ é identificada por

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 + c_1 z & 0 & b_2 + c_2 z & 0 & b_3 + c_3 z & 0 & b_4 + c_4 z & 0 \\ 0 & c_1 r + d_1 & 0 & c_2 r + d_2 & 0 & c_3 r + d_3 & 0 & c_4 r + d_4 \\ c_1 r + d_1 & b_1 + c_1 z & c_2 r + d_2 & b_2 + c_2 z & c_3 r + d_3 & b_3 + c_3 z & c_4 r + d_4 & b_4 + c_4 z \\ B(4,1) & 0 & B(4,3) & 0 & B(4,5) & 0 & B(4,7) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

sendo que

$$B(4,1) = \frac{a_1}{r} + b_1 + c_1 z + d_1 \frac{z}{r} \quad (3.22a)$$

$$B(4,3) = \frac{a_2}{r} + b_2 + c_2 z + d_2 \frac{z}{r} \quad (3.22b)$$

$$B(4,5) = \frac{a_3}{r} + b_3 + c_3 z + d_3 \frac{z}{r} \quad (3.22c)$$

$$B(4,7) = \frac{a_4}{r} + b_4 + c_4 z + d_4 \frac{z}{r} \quad (3.22d)$$

Notar que $[B]$ é uma função das coordenadas r e z . Portanto, as deformações não serão constantes no interior do elemento.

As tensões no elemento são dadas por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix}_e = \{\sigma\}_e = [D][B]\{d\}_e \quad (3.23)$$

onde $\{d\}_e$ é o vetor de deslocamentos nodais e $[D]$ é dada pela Eq. (3.7).

3.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS AXISSIMÉTRICOS

A matriz de rigidez de elementos axissimétricos pode ser computada de acordo com a expressão geral que é (Zienkiewicz & Taylor, 1989)

$$[K]_e = \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \quad (3.24)$$

que integrada ao longo do contorno circunferencial resulta em

$$[K]_e = 2\pi \iint_A [B]^T [D] [B] r dr dz \quad (3.25)$$

Como a matriz $[B]$, Eq. (3.21), é uma função das coordenadas r e z , a matriz $[K]_e$ também é uma função de r e z . A matriz $[K]_e$ da Eq. (3.25) pode ser avaliada usando integração numérica por quadratura de Gauss, ou em alguns casos por multiplicação explícita e integração termo a termo.

3.5 FORÇAS DE SUPERFÍCIE

O carregamento nodal é

$$\{f_s\} = \iint_S [N]^T \begin{Bmatrix} f_{sr} \\ f_{sz} \end{Bmatrix} dS \quad (3.26)$$

onde f_{sr} e f_{sz} são pressões nas direções radial e axial, respectivamente.

3.6 FORMULAÇÃO ISOPARAMÉTRICA PARA ELEMENTOS AXISSIMÉTRICOS QUADRILATERAIS DA FAMÍLIA SERENDIPITY

Nesta seção é apresentada a análise de tensões axissimétricas em corpos de revolução utilizando elementos quadrilaterais com funções de interpolação da família Serendipity. É aplicada a formulação isoparamétrica do método dos elementos finitos. Nesta formulação, as funções utilizadas para interpolar as variáveis físicas dos problemas são as mesmas para interpolar a geometria do elemento axissimétrico e são chamadas de funções de forma.

As variáveis consideradas na análise de tensões axissimétricas são os deslocamentos, radial u e axial v , e são definidas em função dos deslocamentos nodais u_i e v_i do elemento, como

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i \quad \text{e} \quad v = \sum_{i=1}^n N_i v_i \quad (3.27)$$

As coordenadas r e z de um ponto qualquer do elemento na formulação isoparamétrica, são definidas em função das coordenadas nodais r_i e z_i do elemento, como

$$r = \sum_{i=1}^n N_i r_i \quad \text{e} \quad z = \sum_{i=1}^n N_i z_i \quad (3.28)$$

onde n é o número de pontos nodais do elemento e N_i ($i = 1, \dots, n$) são as funções de forma do elemento. As funções de forma da família Serendipity são definidas no sistema local de coordenadas naturais ξ e η do elemento.

O elemento quadrilateral bilinear de Taig ($n = 4$) é mostrado na Fig. 3.6.

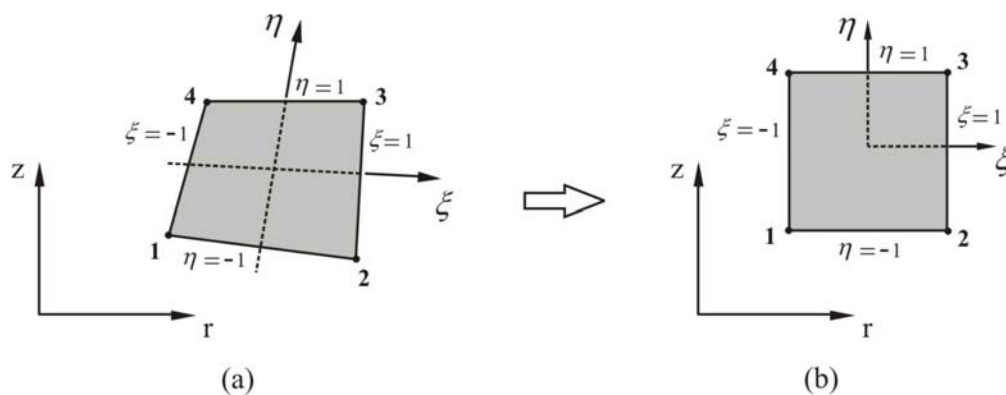


Figura 3.6 – (a) Elemento no Sistema Global; (b) Elemento no Sistema Local.

As funções de forma para esse elemento são

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \quad (3.29a)$$

sendo que

$$\xi_0 = \xi \xi_i \text{ e } \eta_0 = \eta \eta_i \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (3.29b)$$

onde ξ_i e η_i são as coordenadas dos pontos nodais do elemento no sistema local.

A Fig. 3.7 ilustra a função de forma para o segundo ponto nodal do elemento.

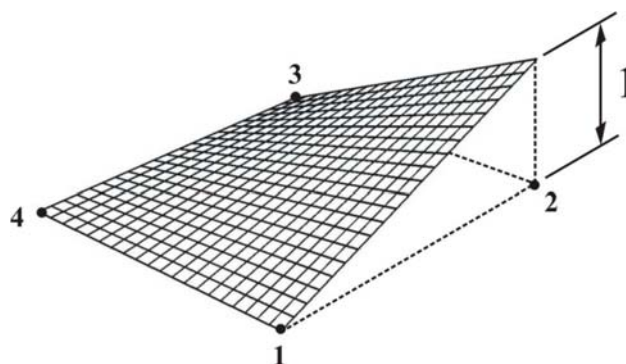


Figura 3.7 – Função de Forma para o Nó n.º 2.

A Fig. 3.8 mostra o elemento quadrilátero quadrático ($n = 8$).

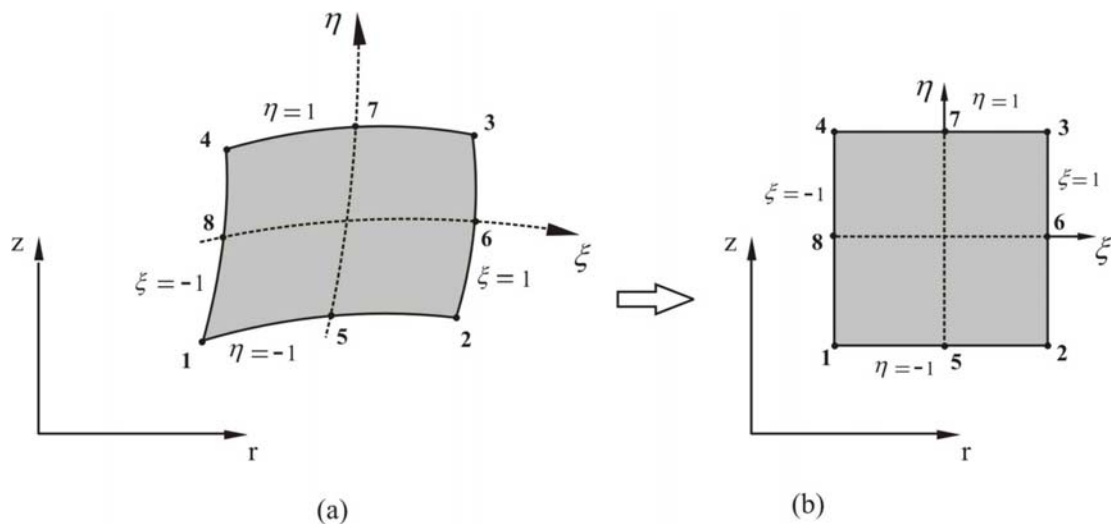


Figura 3.8 – (a) Elemento no Sistema Global; (b) Elemento no Sistema Local.

Usando as mesmas variáveis ξ_0 e η_0 da Eq. (3.29b), as funções de forma da família Serendipity para o elemento quadrilateral quadrático são

Para os nós dos cantos ($i = 1, 2, 3$ e 4):

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) \quad (3.30)$$

Para os nós do meio dos lados ($i = 5, 6, 7, 8$):

Em $\xi_i = 0 \Rightarrow$ para ($i = 5, 7$)

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0) \quad (3.31a)$$

Em $\eta_i = 0 \Rightarrow$ para ($i = 6, 8$)

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi_0) \quad (3.31b)$$

A Fig. 3.9(a) ilustra a função de forma para o segundo ponto nodal, enquanto a Fig. 3.9(b) mostra a função de forma para o oitavo ponto nodal do elemento.

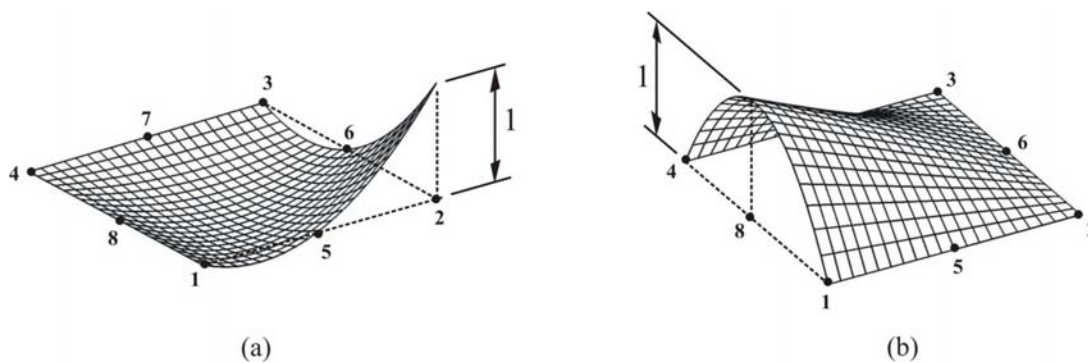


Figura 3.9 – Função de forma (a) para o nó n^o 2; (b) para o nó n^o 8.

A Fig. 3.10 mostra o elemento quadrilateral cúbico ($n = 12$).

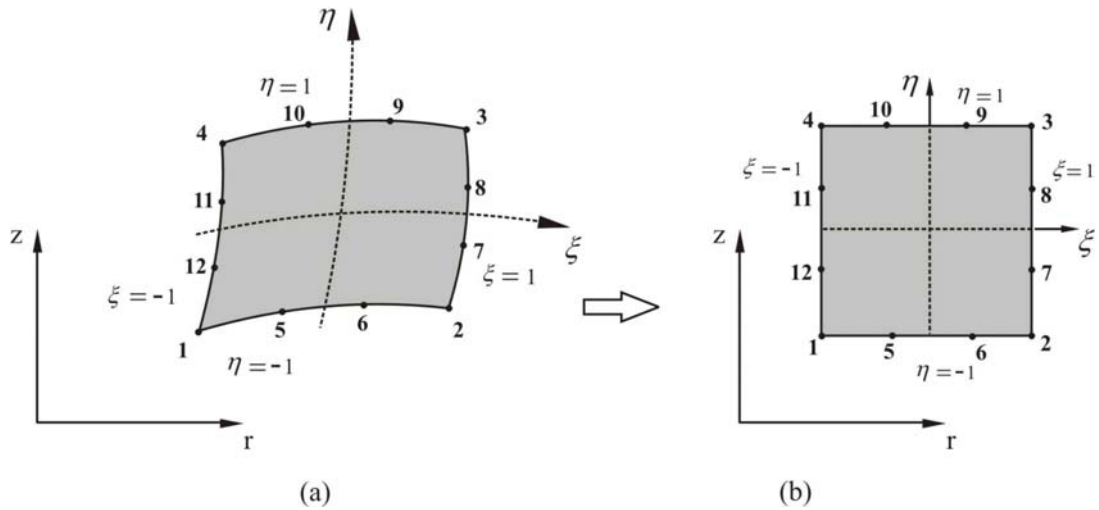


Figura 3.10 – (a) Elemento no sistema global; (b) elemento no sistema local.

cujas funções de forma da família Serendipity são

Para os nós dos vértices ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$N_i = \frac{1}{32}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)[-10 + 9(\xi^2 + \eta^2)] \quad (3.32)$$

Para os nós do meio dos lados ($i = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$):

Em $\xi_i = \pm 1$ com $\eta_i = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow$ para ($i = 7, 8, 11, 12$)

$$N_i = \frac{9}{32}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta_0) \quad (3.33)$$

Em $\eta_i = \pm 1$ com $\xi_i = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow$ para ($i = 5, 6, 9, 10$)

$$N_i = \frac{9}{32}(1 + \eta_0)(1 - \xi^2)(1 + 9\xi_0) \quad (3.34)$$

Para qualquer elemento com n pontos nodais, a matriz de rigidez de elementos axissimétricos é avaliada pela Eq. (3.25) como

$$[K]_e = 2\pi \int_A [B]^T [D] [B] r dr dz \quad (3.35)$$

A matriz $[D]$ que relaciona as tensões com as deformações é a mesma dada pela Eq. (3.7), ou seja

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

A matriz $[B]$ que relaciona as deformações com os deslocamentos nodais do elemento é

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} & \frac{\partial N_n}{\partial r} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 & \dots & \frac{N_n}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Assim como é feito na análise no estado plano de tensões e deformações, os termos $\frac{\partial N_i}{\partial r}$ e $\frac{\partial N_i}{\partial z}$ que aparecem na matriz $[B]$ da Eq. (3.37) são calculados por

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

sendo que $[J]$ é a matriz jacobiana que é calculada por

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} r_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Os termos $\frac{N_i}{r}$ que constam na quarta linha da matriz $[B]$ são determinados usando a coordenada global r da Eq. (3.28). Então

$$\frac{N_i}{r} = \frac{N_i}{\sum_{j=1}^n N_j r_j} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.40)$$

Como $dr dz = dA = \det[J] d\xi d\eta$ e $r = \sum_{j=1}^n N_j r_j$, a matriz de rigidez de elementos axissimétricos, Eq. (3.35), pode ser determinada por

$$[K]_e = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [D] [B(\xi, \eta)] \left(\sum_{j=1}^n N_j r_j \right) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (3.41)$$

O carregamento nodal devido às forças de superfície é

$$\{f_s\}_e = \iint_S [N(\xi, \eta)]^T \begin{Bmatrix} f_{sr} \\ f_{sz} \end{Bmatrix} dS \quad (3.42)$$

Para determinar as forças nodais equivalentes em um nó k do elemento, a matriz $[N(\xi, \eta)]$ da Eq. (3.42) pode ser substituída por

$$[N(\xi, \eta)]_k = [N(\xi, \eta)]_k^T = \begin{bmatrix} N_k(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_k(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Capítulo 4

VASOS DE PRESSÃO CILÍNDRICOS E PLACAS FINAS

Este capítulo tem por objetivo mostrar o desenvolvimento das equações para cálculo de deslocamentos e de tensões em vasos de pressão cilíndricos e em placas finas. Os valores dos deslocamentos e das tensões serão comparados com os resultados obtidos através do código computacional implementado a fim de verificar a validade da metodologia empregada no código. O desenvolvimento das equações para vasos de pressão é realizado com base na teoria mostrada por Ugural & Fenster (1995), enquanto que as equações da teoria de placas finas mostradas neste trabalho são obtidas com auxílio de Ugural (1981).

4.1 VASOS DE PRESSÃO CILÍNDRICOS

Seja uma grande placa fina com um pequeno furo no centro sujeito a uma pressão uniforme, Fig. 4.1. As tensões serão simétricas em relação ao eixo z e as deformações também se mostram independentes da coordenada θ .

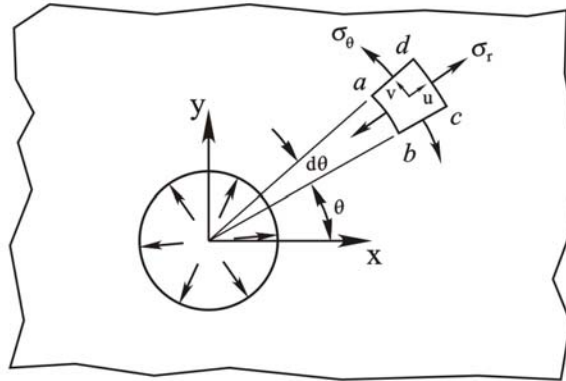


Figura 4.1 – Placa fina com um furo circular.

Como não há carregamento axial, a tensão normal na direção do eixo z é nula, $\sigma_z = 0$. Devido à simetria, as tensões de cisalhamento no plano perpendicular ao eixo z também são nulas, $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0$. Sendo assim, as equações de equilíbrio em coordenadas polares se tornam

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \quad (4.1)$$

onde σ_θ e σ_r representam as tensões normais tangencial (circunferencial) e radial, respectivamente, que atuam no elemento. F_r representa a força de campo na direção radial por unidade de volume. Como exemplo de força de campo pode-se citar a força de inércia associada à rotação. Na ausência das forças de campo, na direção radial, a Eq. (4.1) se reduz a

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (4.2)$$

Os deslocamentos radial e tangencial são denotados por u e v , respectivamente. Devido à simetria do corpo pode não haver deslocamento tangencial, sendo assim $v = 0$. Um ponto representado pelo elemento $abcd$ na Fig. 4.1 pode-se mover apenas radialmente como uma consequência do carregamento. Sendo assim, as deformações se tornam

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = 0 \quad (4.3)$$

Substituindo $u = r\varepsilon_\theta$ na primeira expressão da Eq. (4.3), a equação de compatibilidade é então determinada como sendo

$$\frac{du}{dr} - \varepsilon_r = \frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) - \varepsilon_r = 0$$

ou

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0 \quad (4.4)$$

A solução para qualquer problema axissimétrico de vaso de pressão, dadas as devidas condições de contorno, é obtida utilizando a equação de equilíbrio, Eq. (4.1) ou (4.2), as relações para deformações específicas ou a equação de compatibilidade, Eqs. (4.3) ou (4.4) juntamente com a Lei de Hooke.

4.1.1 Vasos de Pressão Cilíndricos de Parede Espessa

Normalmente os vasos de pressão cilíndricos utilizados na engenharia são divididos em duas categorias: vasos de pressão de parede fina e vasos de pressão de parede espessa. Vasos de pressão de parede fina são definidos como aqueles em que a tensão tangencial pode, dentro de certos limites, ser associada com o valor da espessura. Para estes vasos, quando submetidos a uma pressão interna p , a tensão tangencial é

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{t}$$

onde r é o raio do vaso e t a sua espessura. Se a espessura da parede do vaso de pressão cilíndrico for maior do que 10% do valor do raio interno, o vaso é normalmente classificado como de parede espessa. Nestes casos, a variação da tensão tangencial não é mais proporcional ao raio.

Para cilindros de parede espessa sujeitos a uma pressão interna ou externa, a deformação é simétrica em relação ao eixo z . Por isso, as equações de equilíbrio e de deformação específica ε , aplicam-se para qualquer ponto em um círculo de comprimento unitário do cilindro, Fig. (4.2). Se as extremidades do cilindro estiverem abertas e não

engastadas, então, $\sigma_z = 0$. O cilindro, nestas condições, se encontrará no estado plano de tensões e, de acordo com a Lei de Hooke, as deformações são

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \quad (4.5)$$

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)$$

Portanto, as tensões σ_r e σ_θ são dadas por

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) \quad (4.6)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right)$$

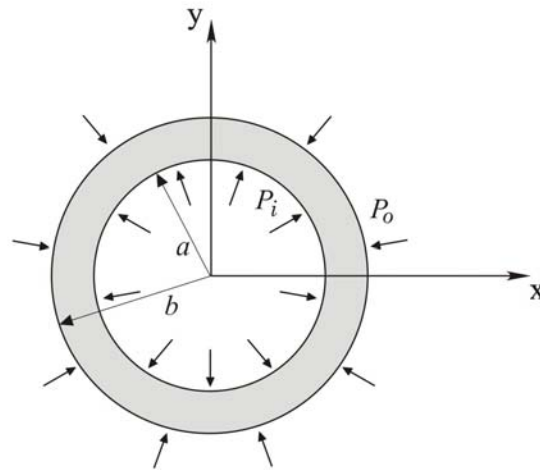


Figura 4.2 – Vaso de pressão de parede espessa.

Substituindo as Eq. (4.6) na Eq. (4.2), a equação para o deslocamento radial resulta em

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (4.7)$$

que admite uma solução do tipo

$$u = c_1r + \frac{c_2}{r} \quad (a)$$

As tensões, radial e tangencial, podem agora ser escritas em termos das constantes de integração c_1 e c_2 pela combinação das Eqs. (a) e (4.6)

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[c_1(1+\nu) - c_2 \left(\frac{1-\nu}{r^2} \right) \right] \quad (b)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left[c_1(1+\nu) + c_2 \left(\frac{1-\nu}{r^2} \right) \right] \quad (c)$$

onde as constantes c_1 e c_2 são determinadas em função das condições de contorno.

Analisando as Eqs. (b) e (c) percebe-se que a soma das tensões, radial e tangencial, é constante, ou seja, $\sigma_r + \sigma_\theta = 2Ec_1/(1-\nu)$.

A deformação específica longitudinal é, portanto, constante, sendo

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) = \text{constante}$$

Pode-se concluir, então, que seções inicialmente planas permanecem planas após o carregamento. Conseqüentemente, $\sigma_z = E\varepsilon_z = \text{constante} = c$. Porém, se as extremidades do cilindro estão abertas e livres de restrições, tem-se que

$$\int_a^b \sigma_z 2\pi r dr = \pi c (b^2 - a^2) = 0$$

Como assumido previamente, $c = \sigma_z = 0$.

Para um vaso de pressão cilíndrico submetido a pressões interna e externa, p_i e p_o , respectivamente, as condições de contorno são

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=a} &= -p_i \\ (\sigma_r)_{r=b} &= -p_o \end{aligned} \quad (d)$$

onde o sinal negativo indica tensão de compressão.

Substituindo as Eqs. (d) na Eq. (b), as constantes c_1 e c_2 são determinadas por

$$c_1 = \frac{1-\nu}{E} \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2}$$

$$c_2 = \frac{1+\nu}{E} \frac{a^2 b^2 (p_i - p_o)}{b^2 - a^2}$$
(e)

Portanto, as equações para as tensões e para o deslocamento u em vaso de pressão cilindro de parede espessa são

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} - \frac{(p_i - p_o) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} + \frac{(p_i - p_o) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2}$$
(4.8)

$$u = \frac{1-\nu}{E} \frac{(a^2 p_i - b^2 p_o) r}{b^2 - a^2} + \frac{1+\nu}{E} \frac{(p_i - p_o) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r}$$

Estas expressões foram obtidas pela primeira vez pelo Engenheiro francês G. Lamé em 1833. O máximo valor numérico de σ_r é encontrado em $r = a$ que é p_i , desde que p_i seja maior do que p_o . Se $p_o > p_i$, o máximo σ_r ocorre em $r = b$ e é igual a p_o . Entretanto, o máximo valor de σ_θ pode ocorrer tanto na parede interna quanto na parede externa dependendo da razão entre as pressões p_i e p_o .

A máxima tensão de cisalhamento é igual a metade da diferença algébrica entre a máxima e a mínima tensão principal,

$$\tau_{máx} = \frac{1}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r) = \frac{(p_i - p_o) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2}$$
(4.9)

Na superfície interna, $r = a$, ocorre o maior valor de $\tau_{máx}$. Uma redução do valor de p_o acarreta um aumento do valor de $\tau_{máx}$. Sendo assim, o maior valor de $\tau_{máx}$ corresponderá $r = a$ e $p_o = 0$, dado por

$$\tau_{máx} = \frac{p_i b^2}{b^2 - a^2}$$
(4.10)

Como σ_r e σ_θ são as tensões principais, $\tau_{m\acute{a}x.}$ irá ocorrer em um plano que faz um ângulo de 45° com o plano onde atuam as tensões σ_r e σ_θ , o que pode ser confirmado pela construção do Círculo de Mohr. A pressão $p_{esc.}$ que iniciará o escoamento da parede interna do vaso de pressão pode ser obtida fazendo $\tau_{m\acute{a}x.} = \sigma_{esc.}/2$ na Eq. (4.10),

$$p_{esc.} = \frac{(b^2 - a^2)\sigma_{esc.}}{2b^2} \quad (4.11)$$

4.1.2 Vasos de Pressão sob Pressão Interna

Em um vaso de pressão cilíndrico, se somente houver pressão interna, as condições de contorno passam a ser

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p_i \quad \text{e} \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0$$

Sendo assim, as Eqs. (4.8) se reduzem para

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (4.12)$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (4.13)$$

$$u = \frac{a^2 p_i r}{E(b^2 - a^2)} \left[(1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right] \quad (4.14)$$

Se $b^2/r^2 > 1$, então σ_r será negativo (compressão). Se $r = b$ então $\sigma_r = 0$. A máxima tensão radial ocorre em $r = a$. A tensão σ_θ é positiva (tração) para todos os valores de r e também terá um máximo em $r = a$.

4.1.3 Vasos de Pressão sob Pressão Externa

Se somente pressão externa estiver atuando em um vaso de pressão cilíndrico então as novas condições de contorno serão

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0 \quad \text{e} \quad (\sigma_r)_{r=b} = -p_o$$

Usando estas condições, as Eqs. (4.8) são reescritas como

$$\sigma_r = -\frac{b^2 p_o}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (4.15)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{b^2 p_o}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (4.16)$$

$$u = -\frac{b^2 p_o r}{E(b^2 - a^2)} \left[(1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{a^2}{r^2} \right] \quad (4.17)$$

A máxima tensão radial, σ_r , ocorre em $r = b$ e é de compressão para todos os valores de r . O máximo valor de σ_θ é encontrado em $r = a$ e assim como σ_r , σ_θ será também de compressão para qualquer valor de r .

4.2 TEORIA DE PLACAS FINAS

Placas podem ser consideradas como sendo elementos estruturais inicialmente planos para os quais a espessura é muito menor do que as outras dimensões. Incluídos entre os muitos exemplos familiares de placas estão tampas de mesa, tampões de bueiro, lajes de construção civil, discos de turbinas dentre outros. Muitos problemas práticos de engenharia recaem nas categorias de estudo sobre o comportamento de placas.

Para o cálculo de tensões, as placas são normalmente divididas em duas partes iguais na direção da espessura t por um plano paralelo às suas faces. Este plano é chamado de plano médio da placa. A espessura da placa é medida na direção normal a este plano. As

propriedades de flexão da placa dependem muito da espessura em comparação com as outras dimensões.

O estudo de placas se divide em três grupos: placas finas com pequenas deformações, placas finas com grandes deformações e placas espessas. De acordo com o critério freqüentemente aplicado para definir placas finas com pequenas deformações, a razão entre a espessura e o menor comprimento da placa deve ser menor do que $1/20$ e os deslocamentos verticais devem ser menores do que $1/5$ da espessura. Neste trabalho é assumido que o material das placas é homogêneo, linear e isotrópico.

As forças externas atuando numa placa podem ser classificadas como sendo forças de superfície ou forças de campo. O principal objetivo é determinar as relações entre essas forças que atuam na placa, as deformações, tensões e deslocamentos. As forças de superfície são distribuídas sobre uma área finita da placa enquanto que forças de campo agem em elementos de volume da placa. Estas últimas são atribuídas às forças, gravitacional, magnética e em casos de movimento de rotação (forças de inércia).

4.2.1 Comportamento Geral de Placas

Seja uma placa sem carregamento, Fig. (4.3-a), na qual o plano xy coincide com o seu plano médio e o deslocamento vertical w na direção do eixo z é zero. As componentes do deslocamento em um ponto são descritas por u , v e w , nas direções x , y e z , respectivamente. Ocorrendo deformações devido a carregamentos, um ponto qualquer de coordenadas (x_a, y_a) do plano médio apresenta um deslocamento vertical w , Fig. (4.3-b). As considerações fundamentais da teoria de pequenas deformações, ou também chamada teoria clássica, para placas finas, homogêneas, isotrópicas e elásticas estão baseadas na geometria da deformação.

Essas considerações são, (Ugural, 1981):

- O deslocamento vertical do plano médio é pequeno quando comparado à espessura da placa. A inclinação da superfície deformada é muito pequena e o quadrado da inclinação é uma quantidade desprezível em comparação com a unidade.

- O plano médio da placa permanece inextensível durante a flexão.

- As seções planas inicialmente normais à superfície média permanecem planas e normais à superfície média depois da flexão. Isto significa que a deformação devida aos cisalhamentos verticais γ_{xz} e γ_{yz} é desprezada. Os deslocamentos verticais da placa são, portanto, associados principalmente com a deformação devida à flexão. Por isso, é deduzido então que a deformação normal ε_z resultante do carregamento transversal pode ser omitida. Isto significa dizer que não há variação da espessura da placa.

- A tensão normal ao plano médio, σ_z , é pequena quando comparada com as outras componentes de tensão e por isso pode ser desprezada. Esta suposição não é verdadeira nas proximidades de cargas transversais concentradas, conforme será visto no decorrer deste trabalho.

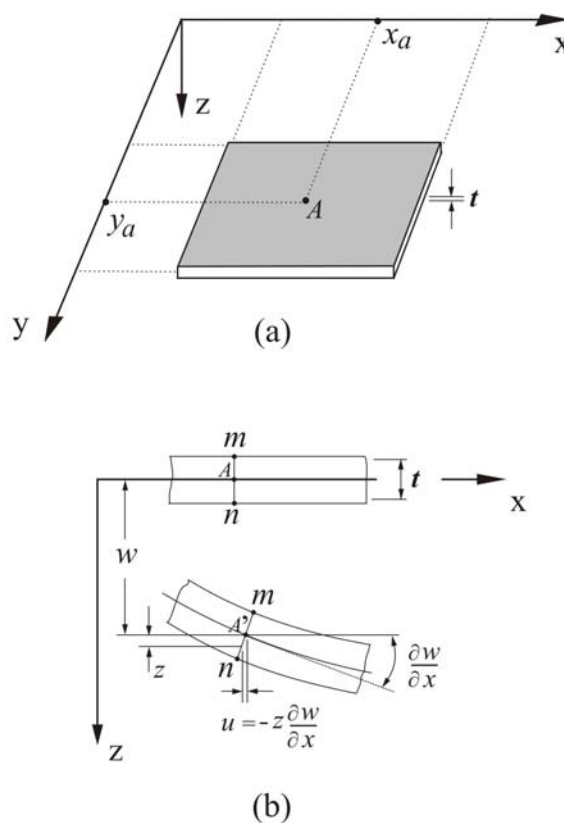


Figura 4.3 – Deslocamento vertical em uma placa fina.

As considerações feitas anteriormente são conhecidas com hipóteses de Kirchhoff e são análogas aquelas associadas com a teoria de flexão de vigas. Na grande maioria das aplicações da engenharia, justificativas adequadas podem ser encontradas para simplificar o

problema com relação ao estado de tensões e deformações. Para diminuir a complexidade, problemas de placa tridimensional podem, em alguns casos, ser reduzidos a problemas envolvendo duas dimensões. Conseqüentemente, as equações de placas podem ser derivadas de maneira concisa e direta.

Para grandes deformações, a flexão de placas é acompanhada pela deformação no plano médio, e as duas primeiras considerações não podem ser aplicadas. Em placas espessas, as tensões de cisalhamento são importantes, como no caso de vigas curtas. Sendo assim, a análise desse tipo de placa se torna um pouco mais complexa, uma vez que as duas últimas simplificações não são mais válidas.

4.2.2 Relações Deformação – Deslocamentos

Para que se possa estudar os problemas de flexão em placas, algumas considerações sobre a geometria das deformações devem ser feitas. Como uma consequência das considerações da seção anterior, as relações deformação – deslocamento se reduzem a

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.18a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.18b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.18c)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.18d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (4.18e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (4.18f)$$

onde $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ ($i, j = x, y, z$).

Considerando a geometria da deformação como sendo um problema de causa e efeito, as expressões acima são referidas como relações cinemáticas.

Integrando ε_z da Eq. (4.18d), pode se obter

$$w = w(x, y) \quad (a)$$

indicando que o deslocamento vertical não varia ao longo da espessura da placa. Da mesma maneira, integrando as expressões para γ_{xy} e γ_{yz} das Eqs. (4.18c) e (4.18f) tem-se que

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_o(x, y) \quad \text{e} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_o(x, y) \quad (b)$$

sendo que $u_o(x, y)$ e $v_o(x, y)$ representam, respectivamente, os valores de u e v no plano médio da placa. Com base na segunda consideração feita na seção anterior, pode-se concluir que $u_o = v_o = 0$. Assim

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{e} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.19)$$

A expressão para u está representada na Fig. (4.3b) na seção $m-n$ passando por um ponto $A(x_a, y_a)$. Uma ilustração similar pode ser encontrada para o deslocamento v no plano yz . Substituindo as Eqs. (4.19) nas Eqs. (4.18a-c) têm-se que, as deformações em qualquer ponto da placa são dadas por

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{e} \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.20)$$

4.2.3 Resultante das Tensões

No caso de um estado tridimensional de tensões, tensões e deformações estão relacionadas pela lei de Hooke generalizada, válida para material homogêneo e isotrópico como

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}\end{aligned}\tag{a}$$

onde $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ ($i, j = x, y, z$). As constantes E , ν e G representam o módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e módulo de elasticidade ao cisalhamento, respectivamente. A expressão para G é

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}\tag{4.21}$$

Substituindo $\varepsilon_x = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ nas Eqs. (a) tem-se para as relações de tensão-deformação para placas finas,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}\tag{4.22}$$

Substituindo as Eqs. (4.20) nas Eqs. (4.22) temos,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{4.23}$$

Observando as Eqs. (4.23) percebe-se que as tensões se tornam nulas no plano médio da placa e variam linearmente ao longo da espessura da placa. As tensões das Eqs. (4.23) produzem momentos, torção e forças de cisalhamento verticais. Estes momentos e forças por unidade de comprimento são também chamados de tensões resultantes.

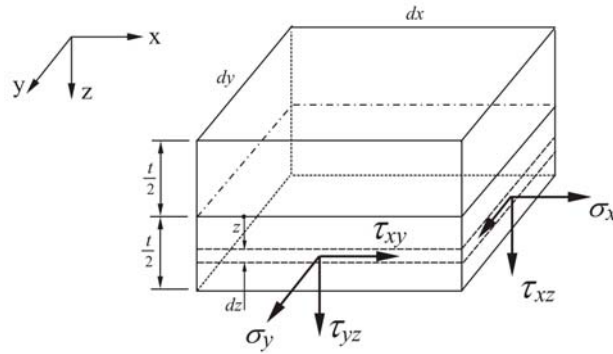


Figura 4.4 – Tensões em um Elemento Infinitesimal.

Da Fig. (4.4) temos que

$$\int_{t/2}^{t/2} z \sigma_x dy dz = dy \int_{t/2}^{t/2} z \sigma_x dz = M_x dy$$

portanto,

$$M_x = \int_{t/2}^{t/2} \sigma_x z dz$$

Similarmente,

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (4.24a)$$

onde $M_{xy} = M_{yx}$, e

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (4.24b)$$

Levando as tensões das Eqs. (4.23) na Eq. (4.24a) e promovendo a integração, pode-se obter as seguintes expressões para os momentos

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4.25a)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (4.25b)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.25c)$$

onde

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.26)$$

é a rigidez à flexão da placa.

Substituindo as Eqs. (4.25) e (4.26) nas Eqs. (4.23), têm-se as equações para as tensões ao longo da placa.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12M_x z}{t^3} \\ \sigma_y &= \frac{12M_y z}{t^3} \\ \tau_{xy} &= \frac{12M_{xy} z}{t^3} \end{aligned} \quad (4.27)$$

4.2.4 Variação de Tensão no Interior da Placa

As variações de componentes de tensão são governadas pelas condições de equilíbrio da estática. Estas condições estabelecem certas relações conhecidas por equações de equilíbrio. Seja um elemento de placa $dx dy$ sujeita a uma carga p por unidade de área distribuída uniformemente, Fig. (4.5). A variação do momento M_x , por exemplo, é expressa por uma série truncada de Taylor, como

$$\nabla M_x = M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \quad (4.28)$$

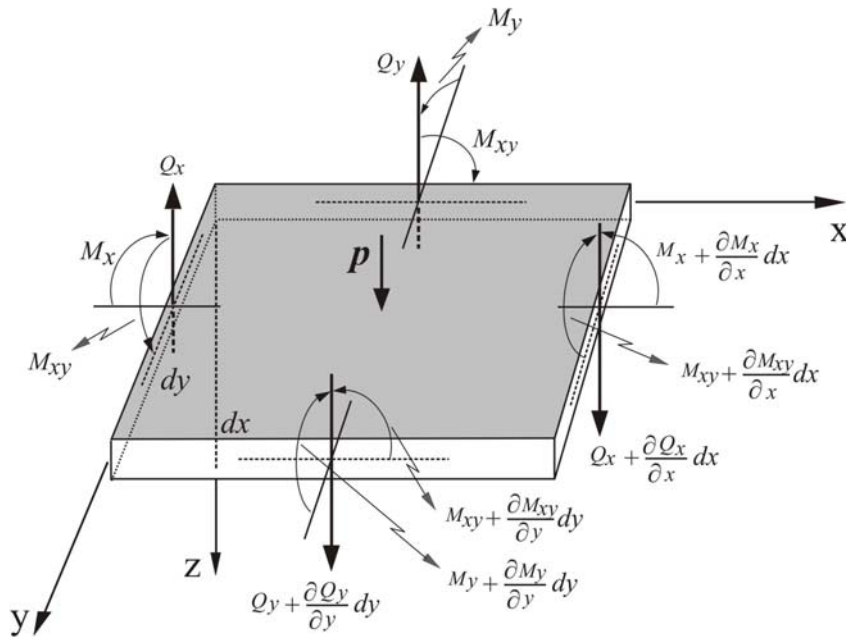


Figura 4.5 – Elemento de Placa sujeito a um carregamento P .

A derivada parcial é usada porque M_x é uma função de x e y . A condição que a soma das forças na direção z seja igual a zero leva a

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + p dx dy = 0$$

da qual

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (a)$$

O equilíbrio dos momentos em relação ao eixo x é

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - Q_y dx dy = 0$$

ou

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (b)$$

Similarmente, do equilíbrio dos momentos em relação ao eixo y , tem-se que

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0 \quad (c)$$

Substituindo as expressões para Q_x e Q_y das Eqs. (b) e (c) na Eq. (a), tem se

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (4.29)$$

A Eq. (4.29) é a equação diferencial do equilíbrio para flexão de placas finas. Usando as Eqs. (4.25), as Eqs. (b) e (c) podem ser reescritas em termos do deslocamento vertical w como

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \quad (4.30)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (d)$$

é o operador de Laplace.

4.2.5 Equação para o Deslocamento Vertical de Placas

Inserindo as Eqs. (4.25) na Eq. (4.29), tem-se

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (4.31a)$$

como sendo a equação diferencial básica para os deslocamentos verticais de placas. Esta equação foi derivada por Lagrange em 1811, que pode ser ainda escrita na seguinte forma

$$\nabla^4 w = \frac{P}{D} \quad (4.31b)$$

na qual $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = (\nabla^2)^2$. Na ausência de cargas,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (4.32)$$

4.3 PLACAS FINAS CIRCULARES

Um dos objetivos deste trabalho é estudar a distribuição das tensões em placas circulares que apresentam um carregamento simétrico em relação ao centro da placa. Estes casos são os chamados problemas axissimétricos em placas.

4.3.1 Relações Básicas em Coordenadas Polares

Em geral, coordenadas polares são mais indicadas do que coordenadas cartesianas quando existe um grau de simetria axial, seja no carregamento ou na geometria. Exemplos incluem placas circulares e placas finas com furo no centro.

As coordenadas polares (r, θ) e as coordenadas cartesianas (x, y) estão relacionadas pelas seguintes equações, conforme mostra a Fig. (4.6)

$$x = r \cos \theta \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \sin \theta \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Pode-se ainda definir as seguintes equações com base nas relações acima,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}$$

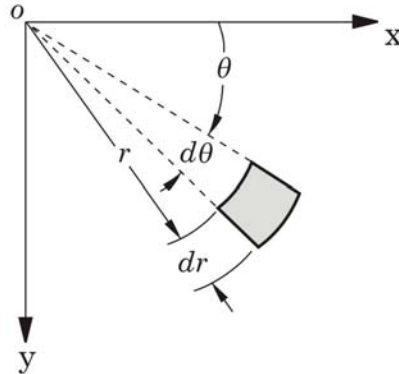


Figura 4.6 – Elemento de Placa em Coordenadas Polares.

Considerando que o deslocamento vertical é uma função de r e θ , as equações acima conduzem a

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \quad (\text{a})$$

Para avaliar a expressão $\partial^2 w / \partial x^2$, deve-se repetir o procedimento empregado na Eq. (a). Sendo assim

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

cujo desenvolvimento resulta em

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \quad (\text{b})$$

Similarmente,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} + 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \quad (c)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \quad (d)$$

Através da substituição das Eqs. (b) e (c) na Eq. (d), o operador laplaciano se torna:

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (4.33)$$

A determinação das equações fundamentais de uma placa, carregada lateralmente, em coordenadas polares requer somente a transformação apropriada das fórmulas em coordenadas cartesianas. Os momentos e forças de cisalhamento em um elemento infinitesimal de espessura t , em coordenadas polares, são mostrados na Fig. (4.7). Conforme a Fig. (4.7), fazendo $\theta = 0$ nas Eqs. (b), (c) e (d) e substituindo os resultados nas Eqs. (4.25) e (4.30), tem-se que

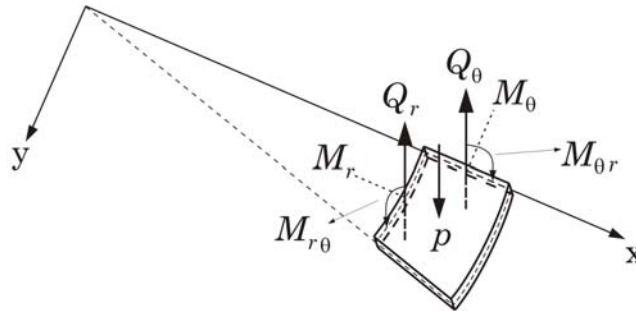


Figura 4.7 – Momentos e Forças Cisalhantes em um Elemento Infinitesimal.

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]$$

$$M_\theta = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]$$

$$M_{r\theta} = -(1-\nu)D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \quad (4.34)$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w)$$

$$Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w)$$

Similarmente, as fórmulas das componentes de tensão para o estado plano, Eqs. (4.27), são escritas da seguinte forma em coordenadas polares,

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{t^3} z \quad \sigma_\theta = \frac{12M_\theta}{t^3} z \quad \tau_{r\theta} = \frac{12M_{r\theta}}{t^3} z \quad (4.35)$$

onde M_θ , M_r , $M_{r\theta}$ são definidos pela Eqs. (4.34).

Pela introdução das Eqs. (b), (c) e (d) na Eq. (4.31), a equação diferencial para o deslocamento vertical em placas em coordenadas polares é

$$\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{p}{D} \quad (4.36)$$

Chamando de w_h a solução da equação homogênea da Eq. (4.36),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_h}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_h}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (4.37)$$

e de w_p a solução particular da Eq. (4.36), a solução completa é expressa por

$$w = w_h + w_p \quad (e)$$

A solução homogênea ou complementar pode ser expressa pelas seguintes séries

$$w_h = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^* \sin n\theta \quad (4.38)$$

onde f_n e f_n^* são funções somente de r . Substituindo a Eq. (4.38) na Eq. (4.37) e notando a validade da expressão resultante para todos os valores de r e θ , surgem duas equações diferenciais com as seguintes soluções

$$\begin{aligned} f_0 &= A_0 + B_0 r^3 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r \\ f_1 &= A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r \\ f_n &= A_n r^n + B_n r^{-n} + C_n r^{n+2} + D_n r^{-n+2} \\ f_1^* &= A_1^* r + B_1^* r^3 + C_1^* r^{-1} + D_1^* r \ln r \\ f_n^* &= A_n^* r^n + B_n^* r^{-n} + C_n^* r^{n+2} + D_n^* r^{-n+2} \end{aligned} \quad (4.39)$$

sendo que A_n, \dots, D_n^* são constantes e são determinadas pela introdução das condições de contorno para placas. A substituição das expressões f_n e f_n^* na Eq. (4.38) resulta na solução da Eq. (4.37) na forma geral.

4.3.2 Flexão Axissimétrica

O deslocamento vertical w irá depender apenas da posição radial r somente quando a carga aplicada e as restrições são independentes do ângulo θ . A situação descrita é uma flexão axissimétrica de placa. Para este caso somente M_θ , M_r e Q_r agem no elemento de placa circular mostrado na Fig. (4.7). Os momentos e forças de cisalhamento, em uma placa circular sob carregamento axissimétrico, são dados pelas Eqs. (4.34) como sendo

$$M_r = -D \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] \quad (4.40a)$$

$$M_\theta = -D \left[\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right] \quad (4.40b)$$

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] \quad (4.40c)$$

A equação diferencial do deslocamento vertical de pontos da superfície, Eq.(4.36), agora se reduz a

$$\nabla^4 w = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{p}{D} \quad (4.41)$$

As fórmulas para as tensões são prontamente obtidas pela substituição das Eqs. (b), (c) e (d) da seção anterior, nas Eqs. (4.23). Com a equação assim obtida, fazendo θ igual à zero, tem-se que

$$\sigma_r = -z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (4.42)$$

$$\sigma_\theta = -z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right)$$

Para escrever a Lei de Hooke em coordenadas polares é necessário substituir na Eq. (4.22) os subscritos x e y por r e θ , respectivamente, resultando em

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \quad (a)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}$$

Denotando por

$$\nabla^2 w = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right)$$

a Eq. (4.36) é reescrita na forma

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p}{D} \quad (4.43)$$

Quando se conhece $p(r)$, o deslocamento vertical w é obtido por sucessivas integrações como

$$w = \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int \frac{rp}{D} dr dr dr \quad (4.44)$$

Se a placa estiver sob um carregamento uniforme $p = p_o$, a solução geral para Eq. (4.44) será da forma:

$$w = w_h + w_p = c_1 \ln r + c_2 r^2 \ln r + c_3 r^2 + c_4 + \frac{p_o r^4}{64D} \quad (4.45)$$

onde c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são constantes de integração. Da comparação da Eq. (4.45) com a primeira das Eqs. (4.39) percebe-se que a solução homogênea f_o representa o caso de flexão axissimétrica em placas circulares.

4.3.3 Placas Circulares com Carregamento Uniformemente Distribuído

Seja o caso de uma placa circular de raio a sob um carregamento uniformemente distribuído p_o . O deslocamento vertical w é expresso pela Eq. (4.45). As constantes de integração na equação são determinadas para dois casos particulares descritos a seguir.

1º. Caso: Placa Engastada, Fig. (4.8).

Para este caso, as condições de contorno são

$$w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dw}{dr} = 0 \quad \text{em} \quad (r = a) \quad (a)$$

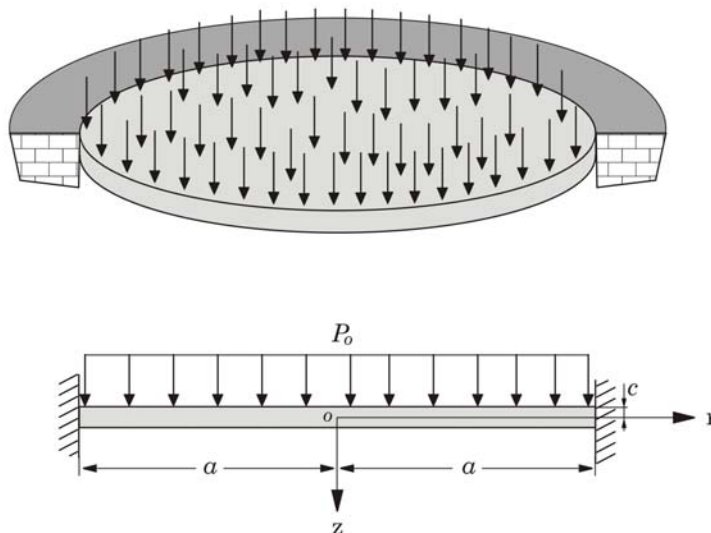


Figura 4.8 – Placa Circular Engastada sujeita a um Carregamento Distribuído.

Os termos envolvendo logaritmos na Eq. (4.45) produzem um deslocamento infinito em $r = 0$ para todos os valores de c_1 e c_2 exceto para zero, por isso, $c_1 = c_2 = 0$. Satisfazendo as condições de contorno, obtém-se

$$c_3 = -\frac{p_o a^2}{32D} \quad c_4 = \frac{p_o a^4}{64D}$$

sendo que o deslocamento vertical é encontrado por

$$w = \frac{p_o}{64D} (a^2 - r^2)^2 \quad (4.46)$$

O máximo deslocamento ocorre no centro da placa, como sendo

$$w = \frac{p_o a^4}{64D} \quad (b)$$

As expressões para os momentos são calculadas substituindo a Eq. (4.46) nas Eqs. (4.40a-b) que resulta em

$$M_r = \frac{p_o}{16} \left[(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2 \right] \quad (4.47)$$

$$M_\theta = \frac{p_o}{16} \left[(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2 \right]$$

As tensões são dadas pelas Eqs. (4.46) e (4.42):

$$\sigma_r = z \frac{3p_o}{4t^3} \left[(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2 \right] \quad (4.48)$$

$$\sigma_\theta = z \frac{3p_o}{4t^3} \left[(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2 \right]$$

Algebricamente os maiores valores de momentos são encontrados no centro e na borda da placa. Na borda ($r = a$), as Eqs. (4.47) resultam em

$$M_r = -\frac{p_o a^2}{8} \quad M_\theta = -\frac{\nu p_o a^2}{8}$$

No centro ($r = 0$)

$$M_r = M_\theta = (1+\nu) \frac{p_o a^2}{16}$$

Pode-se observar que o máximo momento ocorre na borda ($z = t/2$), sendo assim,

$$\sigma_{r, \text{máx.}} = \frac{6M_r}{t^2} = -\frac{3p_o}{4} \left(\frac{a}{t} \right)^2 \quad (c)$$

2º. Caso: Placa simplesmente apoiada, Fig. (4.9).

Como no caso anterior, os valores de c_1 e c_2 devem ser zero para evitar deslocamentos infinitos no centro, as condições de contorno para esta situação são

$$w = 0 \quad \text{e} \quad M_r = 0 \quad \text{em} \quad (r = a)$$

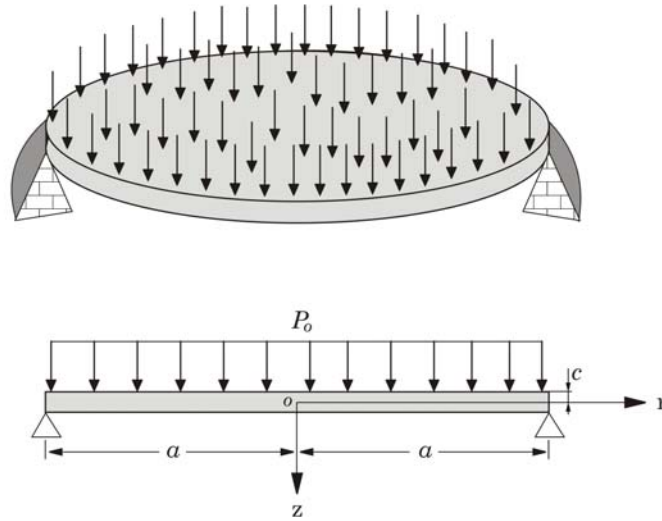


Figura 4.9 – Placa Circular Simplesmente Apoiada sujeita a um Carregamento Distribuído.

Aplicando as condições de contorno para este caso, obtém-se que

$$c_3 = -\frac{p_0 a^2}{32D} \frac{3+\nu}{1+\nu} \quad c_4 = \frac{p_0 a^4}{64D} \frac{5+\nu}{1+\nu}$$

O deslocamento vertical da placa é dado por

$$w = \frac{p_0 a^4}{64D} \left(\frac{r^4}{a^4} - 2 \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{r^2}{a^2} + \frac{5+\nu}{1+\nu} \right) \quad (4.49)$$

O máximo deslocamento vertical ocorre em $r = 0$, sendo

$$w_{m\acute{a}x.} = \frac{p_0 a^4}{64D} \frac{5+\nu}{1+\nu} \quad (d)$$

Com a curva do deslocamento vertical w , os momentos podem ser obtidos da mesma maneira como para o caso de placas engastadas, ou seja,

$$M_r = \frac{p_0}{16} (3+\nu) (a^2 - r^2) \quad (4.50)$$

$$M_\theta = \frac{p_0}{16} \left[(3+\nu) a^2 - (1+3\nu) r^2 \right]$$

As tensões serão dadas por

$$\sigma_r = z \frac{3p_o}{4t^3} \left[(3 + \nu)(a^2 - r^2) \right] \quad (4.51)$$

$$\sigma_\theta = z \frac{3p_o}{4t^3} \left[(3 + \nu)a^2 - (1 + 3\nu)r^2 \right]$$

A máxima tensão ocorrerá exatamente no centro da placa, ($r = 0$),

$$\sigma_{r,máx.} = \sigma_{\theta,máx.} = \frac{3(3 + \nu)p_o}{8} \left(\frac{a}{t} \right)^2 \quad (e)$$

4.3.4 Placas Circulares com Carregamento Concentrado

Quando uma carga concentrada p atua na placa, deve-se usar $p_o = 0$ na Eq. (4.45). O valor de c_1 deve ser zero para que o deslocamento vertical não seja infinito em $r = 0$. O termo que contém c_2 não pode ser desprezado devido às grandes forças de cisalhamento que atuam nas proximidades do ponto de aplicação da carga. A equação do deslocamento vertical na placa toma a seguinte forma,

$$w = c_2 r^2 \ln r + c_3 r^2 + c_4 \quad (4.52)$$

As constantes c_2 , c_3 e c_4 serão calculadas para dois casos particulares.

1º. Caso: Placa Engastada, Fig. (4.10).

As condições de contorno, $w = 0$ e $\partial w / \partial r = 0$ em $r = a$, quando introduzidas na Eq. (4.52) geram as seguintes equações,

$$c_2 a^2 \ln a + c_3 a^2 + c_4 = 0 \quad (a)$$

$$c_2 a(2 \ln a + 1) + 2c_3 = 0$$

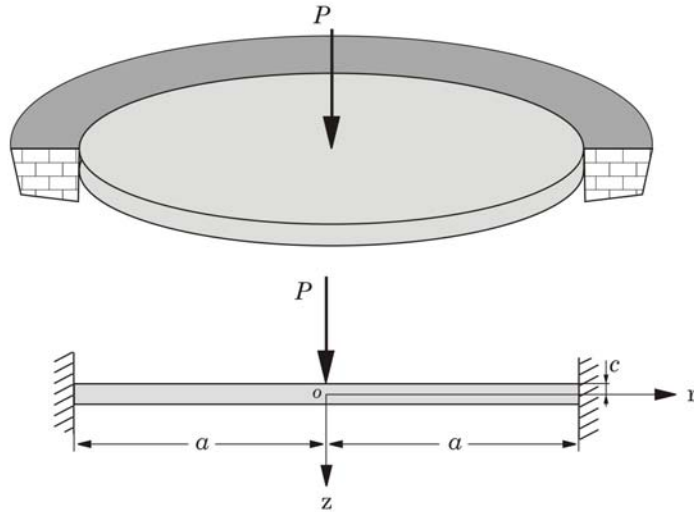


Figura 4.10 – Placa Fina Circular Engastada sujeita a um Carregamento Concentrado.

A condição adicional é que a força de cisalhamento vertical Q_r deve ser igual a $-p/2\pi r$. Sendo assim, das Eqs. (4.40c) e (4.52) obtém uma nova relação para c_2 ,

$$\frac{4D}{r}c_2 = \frac{P}{2\pi r} \quad (b)$$

Resolvendo as Eqs. (a) e (b), as constantes c_2 , c_3 e c_4 são encontradas por

$$c_2 = \frac{P}{8\pi D}, \quad c_3 = -\frac{P}{16\pi D}(2\ln a + 1), \quad c_4 = \frac{Pa^2}{16\pi D}$$

Com os valores dessas constantes, a Eq. (4.52) se torna

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left(2r^2 \ln \frac{r}{a} + a^2 - r^2 \right) \quad (4.53)$$

O máximo deslocamento ocorre no centro da placa, resultando em

$$w_{m\acute{a}x.} = \frac{Pa^2}{16\pi D} \quad (c)$$

Substituindo a Eq. (4.53) nas Eqs. (4.42), as expressões para as tensões correspondentes são calculadas por

$$\sigma_r = \frac{3Pz}{\pi t^3} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} - 1 \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{3Pz}{\pi t^3} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} - \nu \right]$$
(4.54)

2º. Caso: Placa simplesmente apoiada, Fig. (4.11).

Neste caso, o deslocamento vertical e o momento radial se anulam na borda da placa sendo que o valor da carga aplicada é $P = -2\pi r Q_r$, ou seja,

$$(w)_{r=a} = 0, \quad (M_r)_{r=a} = 0, \quad Q_r = -\frac{P}{2\pi r}$$
(d)

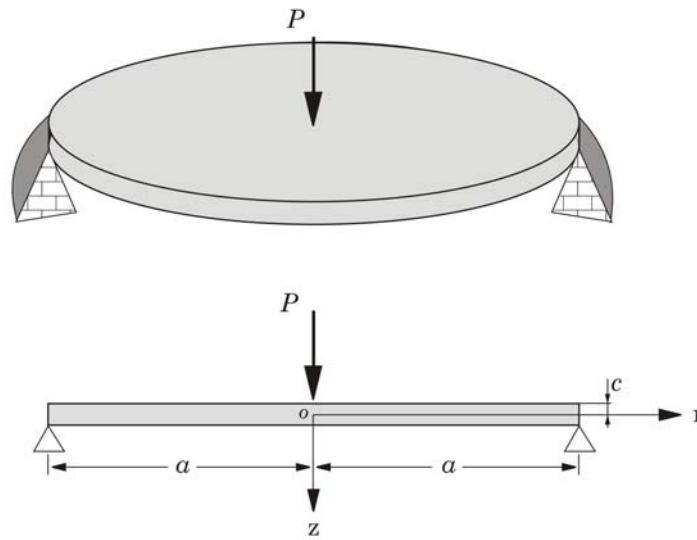


Figura 4.11 – Placa Circular Simplesmente Apoiada sujeita a um Carregamento Concentrado.

Substituindo as relações das Eqs. (d) nas Eqs. (4.52) e (4.40) determinam-se as três constantes c_2 , c_3 e c_4 . Com os valores das constantes, pode ser encontrada a equação para o deslocamento vertical e para as tensões na placa.

O deslocamento vertical da placa, neste caso, será dado por,

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left(2r^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 - r^2) \right)$$
(4.55)

O máximo deslocamento vertical ocorre em $r = 0$, sendo

$$w_{m\acute{a}x.} = \frac{Pa^2}{16\pi D} \frac{3+\nu}{1+\nu} \quad (e)$$

e, finalmente, as tensões serão calculadas por,

$$\sigma_r = z \frac{3P}{\pi t^3} (1+\nu) \ln \frac{a}{r}$$
$$\sigma_\theta = z \frac{3P}{\pi t^3} \left[(1+\nu) \frac{a}{r} + 1 - \nu \right] \quad (4.56)$$

Capítulo 5

VALIDAÇÃO DO CÓDIGO COMPUTACIONAL

Um código computacional foi desenvolvido em linguagem FORTRAN[®] especificamente para este trabalho e será denominado daqui para frente de PROAXI. Nesse programa foi implementada a formulação isoparamétrica do método dos elementos finitos para a análise de tensões e deformações em corpos axissimétricos. Para o desenvolvimento deste programa foi utilizado um compilador em linguagem de programação FORTRAN[®] versão 6.5, no qual foram criadas várias sub-rotinas para compor um programa principal.

As sub-rotinas desenvolvidas são: *Malha.for* para geração automática de malha, *Kel.for* para calcular a matriz de rigidez de cada elemento, *Kglob.for* para obter a matriz de rigidez global do sistema, *Carga.for* para determinar o vetor de carregamento nodal, *Chol.for* para resolver o sistema de equações lineares (Método de Cholesky) e *Tensão.for* para cálculo de tensões. Para economizar memória computacional, a matriz de rigidez global é armazenada na forma comprimida simétrica e em banda.

São utilizados elementos finitos axissimétricos da família Serendipity para o desenvolvimento do programa. Três diferentes tipos de elementos foram implementados: elementos quadrilaterais lineares (LSQ), elementos quadrilaterais quadráticos (QSQ), elementos quadrilaterais cúbicos (CSQ).

Para a validação do código computacional foram avaliados dois casos. No primeiro caso é analisado um vaso de pressão de parede espessa, submetido somente a uma pressão interna.

O segundo caso consiste no estudo de uma placa fina circular engastada submetida a um carregamento uniformemente distribuído. Nos dois casos foram avaliados os deslocamentos e a distribuição de tensões no interior dos corpos.

5.1 VALIDAÇÃO PARA VASOS DE PRESSÃO

O programa PROAXI pode ser utilizado para várias classes de problemas envolvendo corpos axissimétricos. Sendo assim, uma forma de validar o programa é utilizá-lo em casos de problemas axissimétricos que tenham solução analítica para as tensões e deslocamentos.

No capítulo 4 foram mostradas as equações para determinar tensões e deslocamentos em vaso de pressão cilíndrico de parede espessa submetido à pressão interna, Fig. 5.1. Este caso é utilizado para a validação do programa.

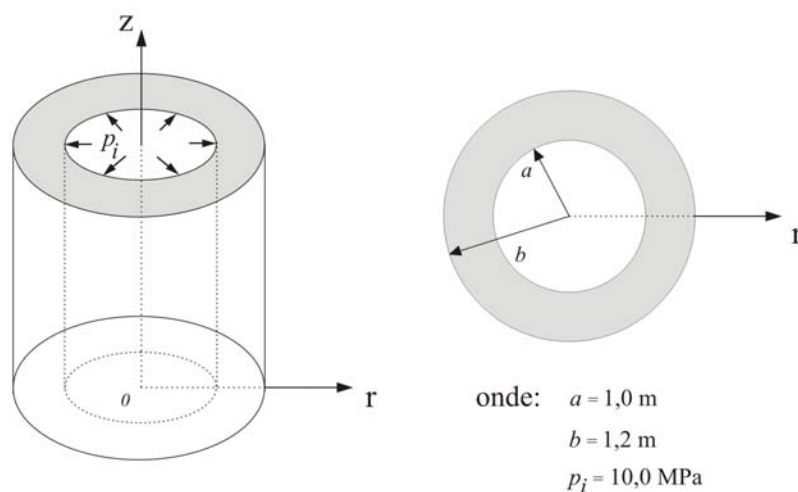


Figura 5.1 – Vaso de Pressão Cilíndrico de Parede Espessa.

No código PROAXI, a matriz $[B]$ que aparece na matriz de rigidez do elemento é determinada utilizando o processo numérico da quadratura de Gauss. Testes preliminares mostram que para elementos lineares, nove pontos de Gauss são suficientes para a resolução da integral. Já, para os elementos, quadrático e cúbico, são necessários dezesseis pontos de Gauss e vinte e cinco pontos de Gauss, respectivamente, para garantir a precisão desejada da resolução da integral.

As Figs. 5.2 a 5.4 mostram o desempenho dos três elementos axissimétricos usados na determinação dos deslocamentos nas paredes do vaso de pressão. Os gráficos da Fig. 5.2 mostram que foram necessários dois elementos lineares (LSQ) para que ocorresse uma aproximação dos valores obtidos pelo programa PROAXI com os valores teóricos, com um desvio de no máximo 1%.

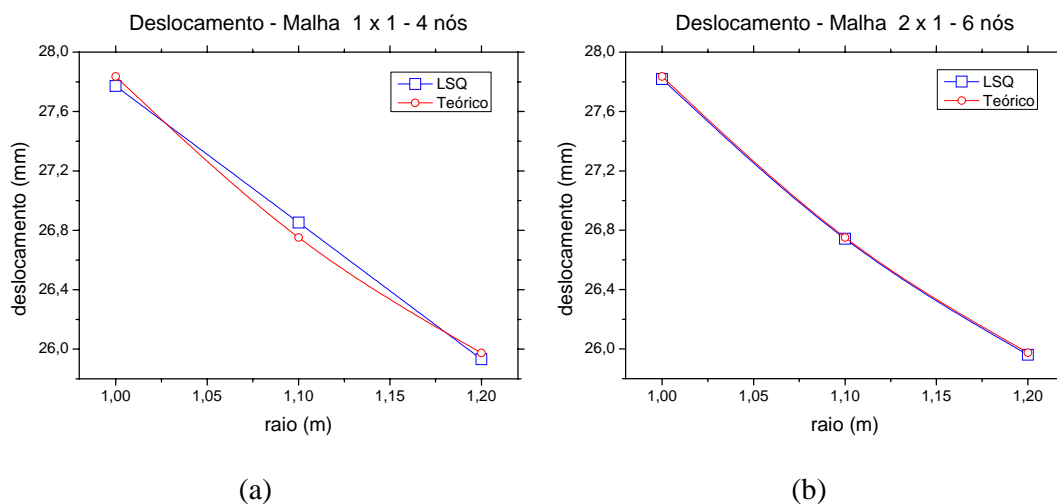


Figura 5.2 – Deslocamentos usando Elementos LSQ

As Figs. 5.3 e 5.4 indicam que a utilização de uma malha com apenas um elemento quadrático (QSQ) ou cúbico (CSQ) é suficiente para descrever, com grande precisão, o deslocamento radial das paredes do cilindro submetido a uma pressão interna.

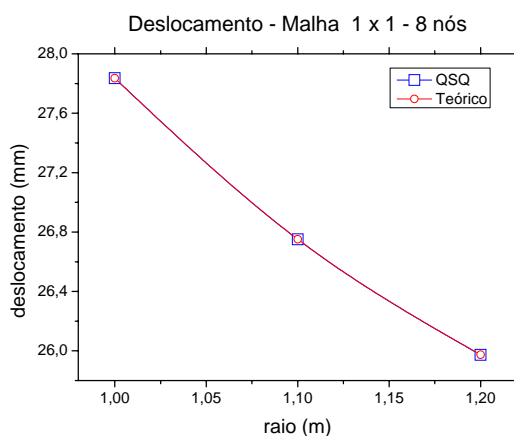


Figura 5.3 – Deslocamentos usando um Elemento QSQ

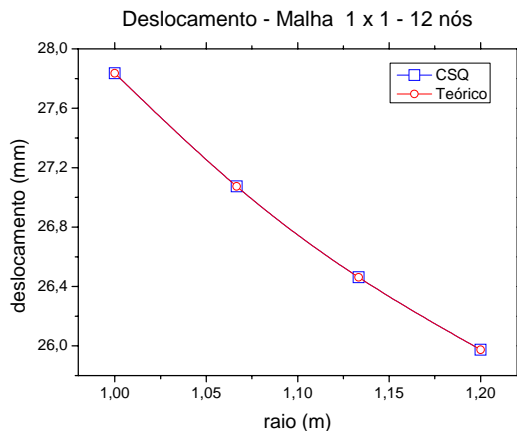
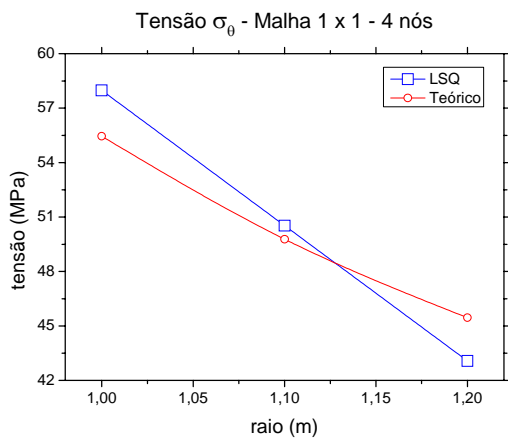
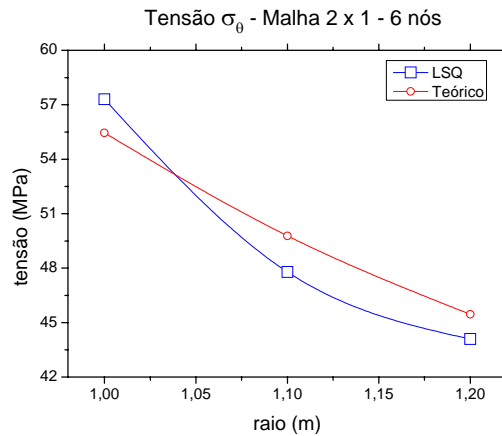


Figura 5.4 – Deslocamentos usando um Elemento CSQ.

Para a determinação das tensões σ_{θ} , nas paredes do vaso de pressão, é necessário fazer um refinamento da malha. As Figs. 5.5 a 5.7 mostram o desempenho dos três elementos axissimétricos na determinação das tensões σ_{θ} . As Figs. 5.5a a 5.5d mostram que são necessários 32 elementos LSQ para que seja atingida uma concordância com desvio de no máximo 1% entre os valores teóricos e os valores encontrados com o MEF.



(a)



(b)

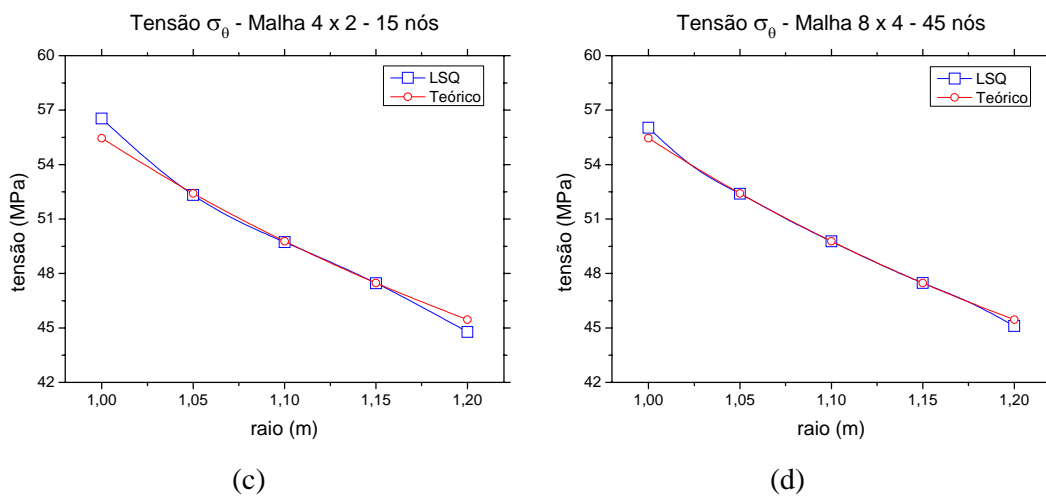


Figura 5.5 – Tensão σ_θ usando Elementos LSQ.

Pode-se observar através das Figs. 5.6a e 5.6b que, para o caso da tensão σ_θ , são necessários pelo menos dois elementos QSQ para que ocorra uma boa aproximação dos resultados do programa PROAXI com a teoria de vaso de pressão.

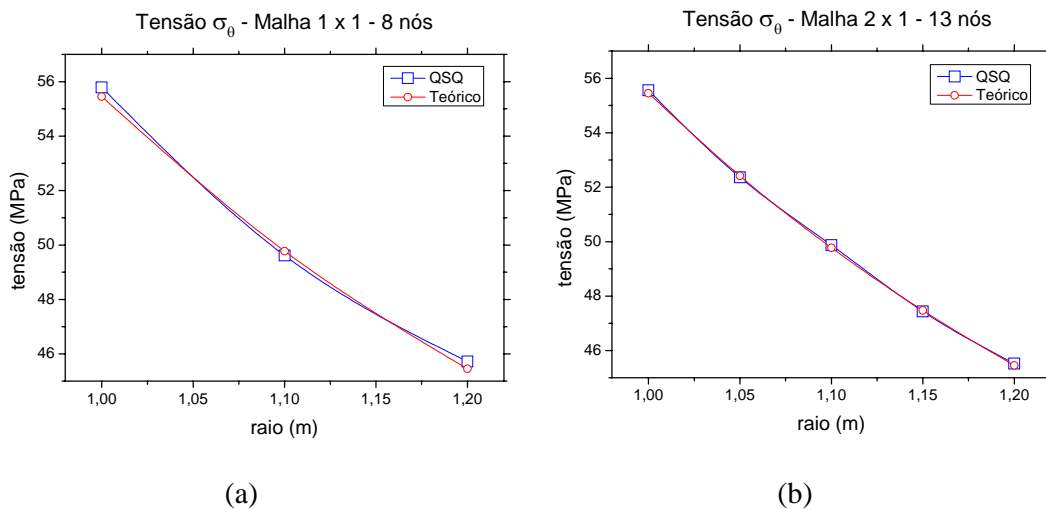


Figura 5.6 – Tensão σ_θ usando Elementos QSQ.

Com o uso da Fig 5.7 nota-se que um elemento CSQ é suficiente para mostrar os valores da tensão σ_θ com bastante precisão em um vaso de pressão de parede cilíndrica.

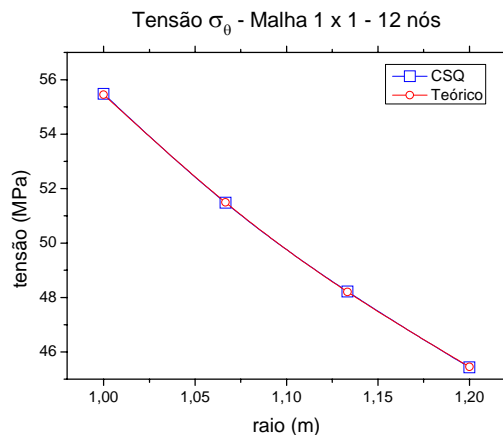
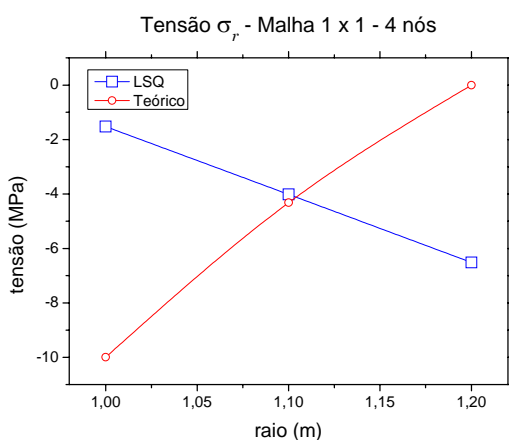
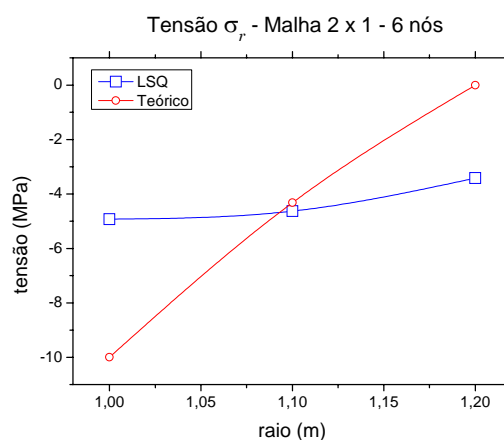


Figura 5.7 – Tensão σ_θ usando um Elemento CSQ.

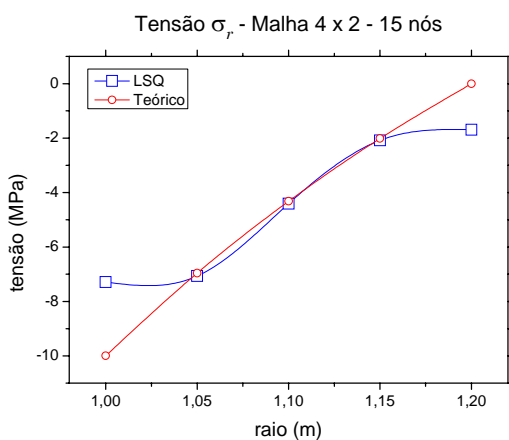
As Figs. 5.8 a 5.10 mostram os resultados das tensões σ_r obtidos pela utilização dos três tipos de elementos. Usando o elemento linear, LSQ, são necessários 128 elementos para se conseguir a precisão com no máximo 1% de desvio, Figs. 5.8a a 5.8e.



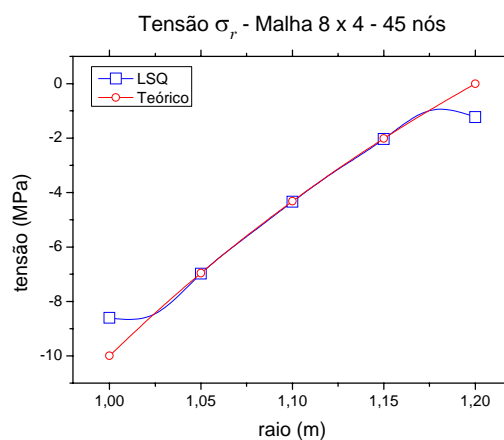
(a)



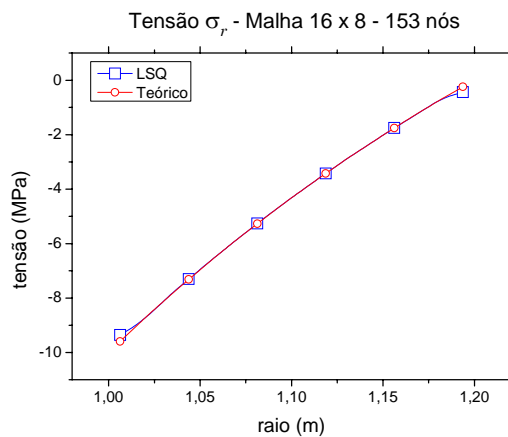
(b)



(c)



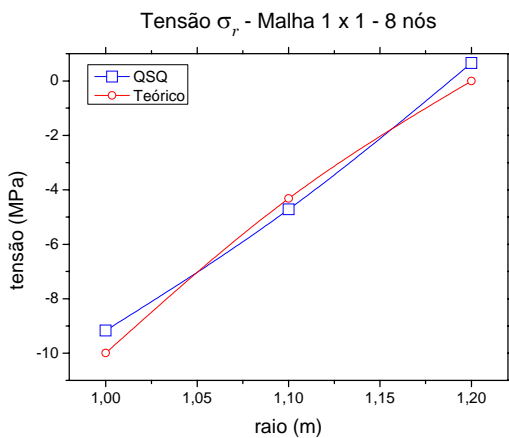
(d)



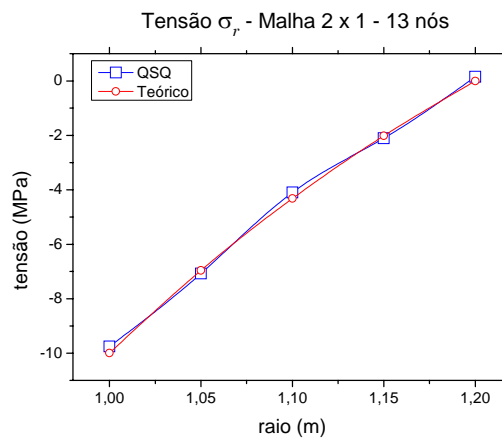
(e)

Figura 5.8 – Tensão σ_r usando Elementos LSQ.

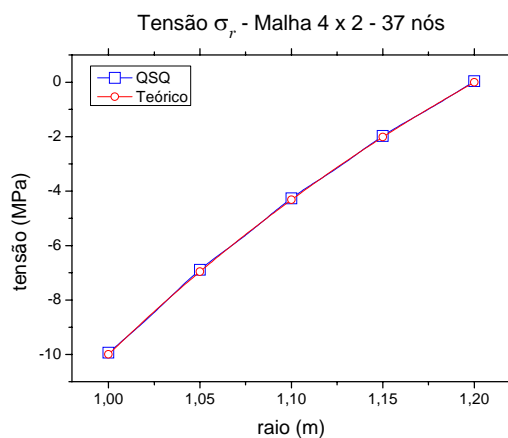
Para o elemento quadrático, QSQ, uma malha formada por 8 elementos é suficiente para expressar as tensões σ_r , Fig. 5.9a e Fig.5.9b. Para o elemento cúbico, CSQ, uma malha com apenas um elemento se mostra capaz de expressar as tensões σ_r com grande precisão, Fig. 5.10.



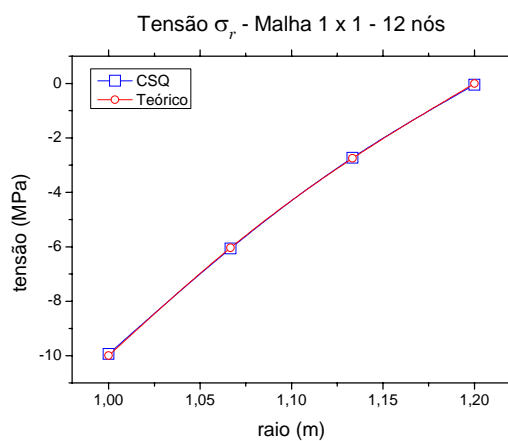
(a)



(b)



(c)

Figura 5.9 – Tensão σ_r usando Elementos QSQ.Figura 5.10 – Tensão σ_r usando um Elemento CSQ.

5.2 VALIDAÇÃO PARA PLACAS FINAS

Para a confirmação da validação do código, um segundo caso de problema axissimétrico é analisado. São verificados os deslocamentos e as tensões em uma placa fina circular engastada submetida a um carregamento uniformemente distribuído, conforme ilustra a Fig. 5.11.

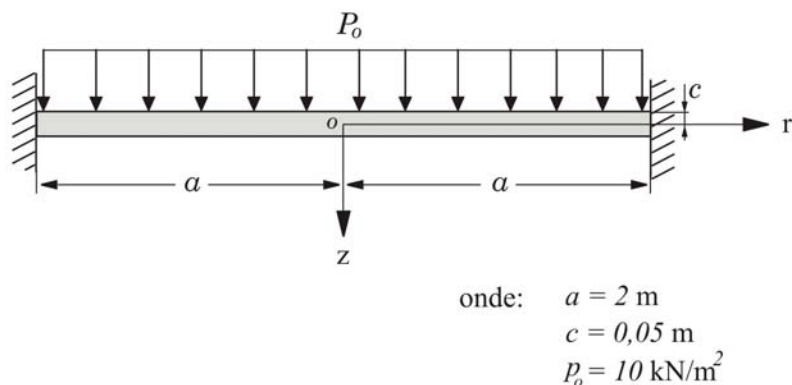
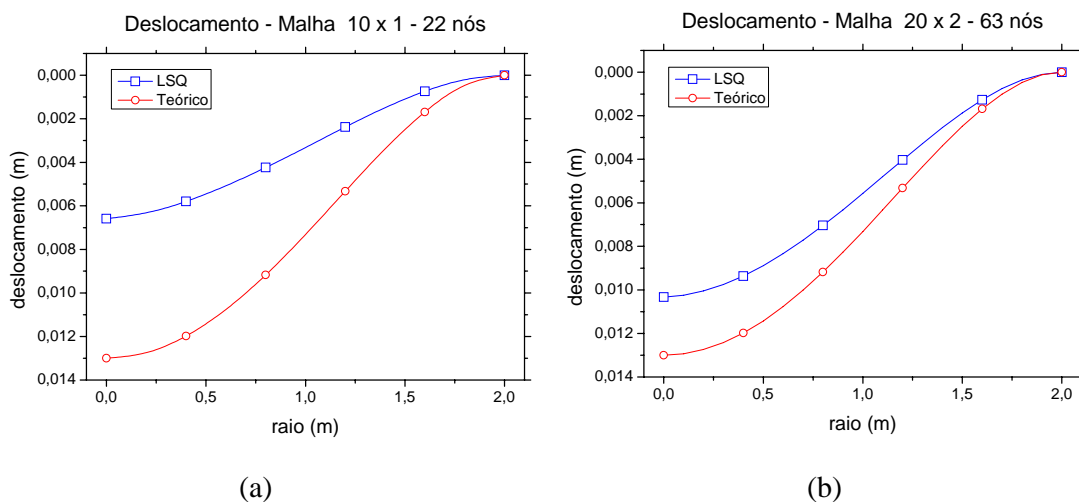
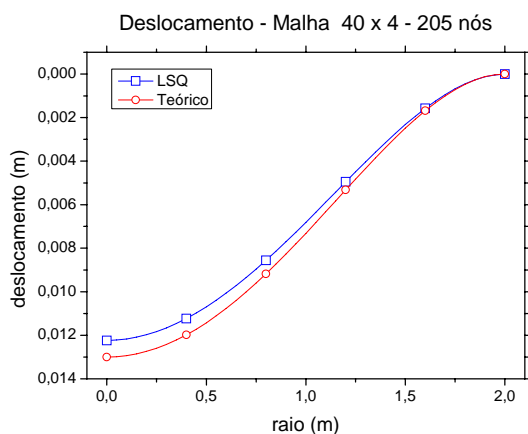


Figura 5.11 – Placa Fina Circular Engastada.

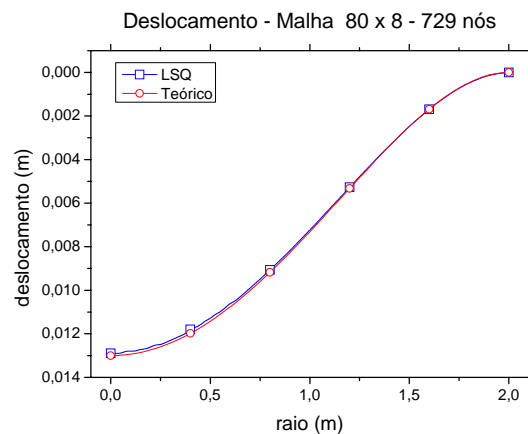
As equações dos deslocamentos e das tensões, para o caso de placas finas, foram apresentadas no capítulo anterior. Com o auxílio destas equações, determinam-se os valores teóricos para os deslocamentos e para as tensões ao longo da placa mostrada na Fig. 5.11.

As Figs. 5.12 a 5.20 mostram a comparação dos valores encontrados através do programa PROAXI com os valores obtidos pelas equações teóricas para placas. As Figs. 5.12a a 5.12d mostram o desempenho do elemento linear, LSQ, na obtenção dos deslocamentos ao longo do plano médio da placa.





(c)

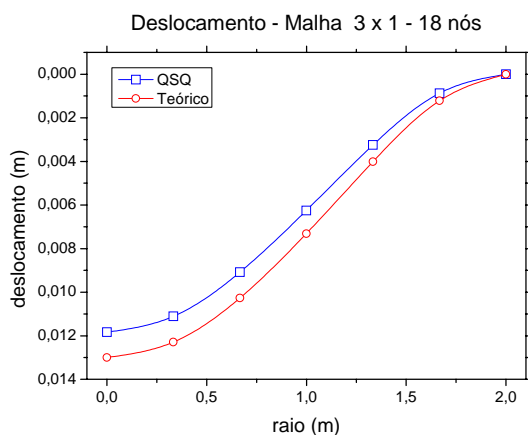


(d)

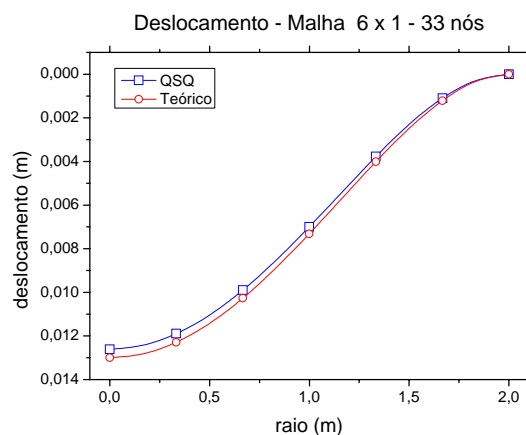
Figura 5.12 – Deslocamentos usando Elementos LSQ.

O desempenho dos três tipos de elementos finitos utilizados pode ser avaliado através do número de elementos e de nós necessários para atingir um desvio menor do que 1% entre os valores teóricos e os valores obtidos pelo PROAXI.

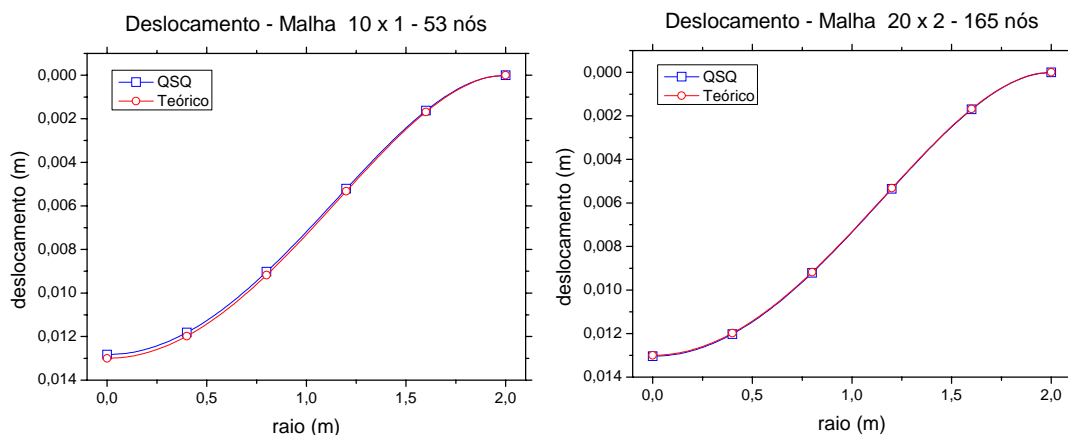
As Figs. 5.13a a 5.13d mostram que para atingir a precisão necessária entre os valores dos deslocamentos, a malha com elementos quadráticos necessita de um número de elementos 16 vezes menor do que uma malha formada por elementos lineares. Observa-se também, nestas figuras, que o número de nós é aproximadamente 4 vezes menor.



(a)



(b)

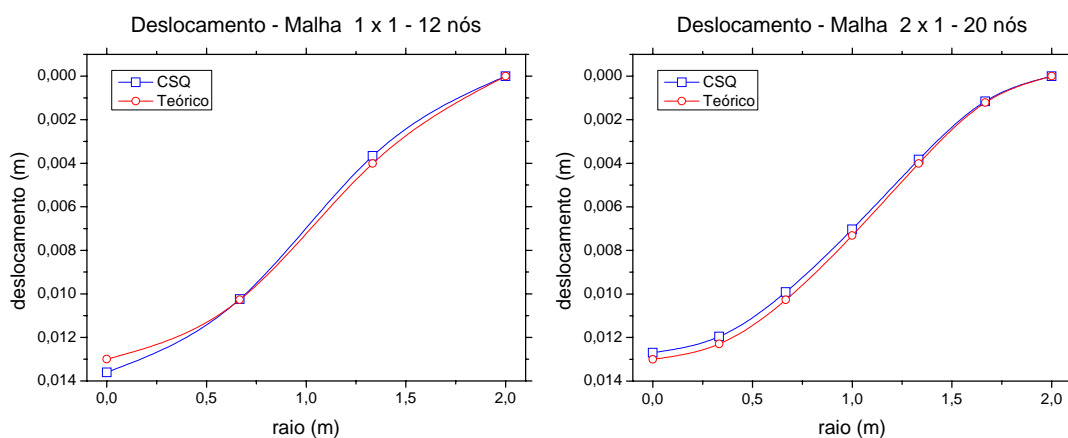


(c)

(d)

Figura 5.13 – Deslocamentos usando Elementos QSQ.

Conforme ilustram as Fig. 5.14a a 5.14d, usando uma malha com elementos cúbicos a quantidade de elementos necessários é, aproximadamente, 60 vezes menor do que a quantidade de elementos para uma malha com elementos lineares e igual à metade quando comparado com o número de elementos quadráticos.



(a)

(b)

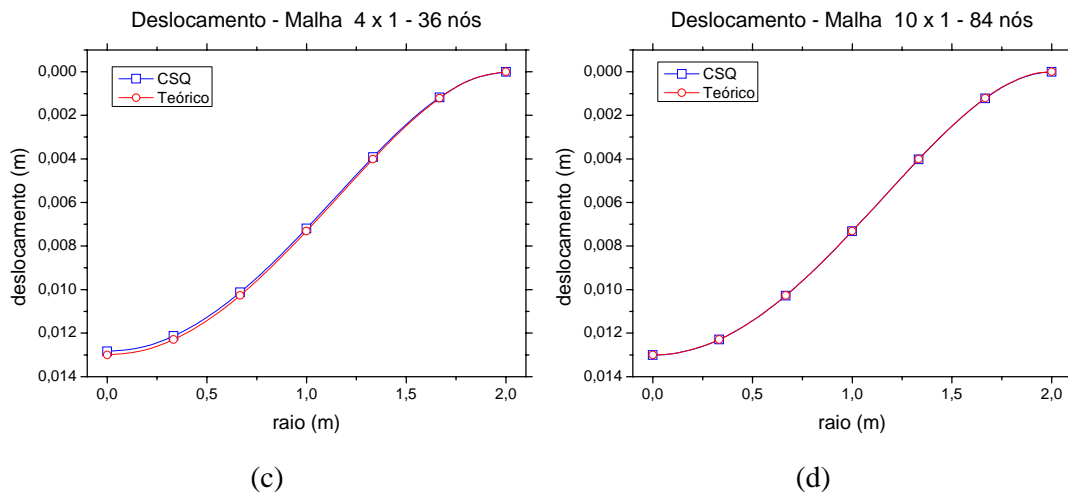


Figura 5.14 – Deslocamentos usando Elementos CSQ.

Para atingir a precisão desejada, observa-se também que o número de nós da malha com elementos cúbicos é aproximadamente 8 vezes menor do que o número de nós da malha formada por elementos lineares.

Para o exemplo da Fig. 5.11 o máximo deslocamento vertical no centro da placa é de 0,013m segundo a Eq. 4.49. As Tab. 5.1 a 5.3 mostram os refinamentos necessários das malhas para determinar esse valor teórico com uma incerteza de no máximo 0,5%, para cada um dos três tipos de elementos implementados. Além disso, as tabelas. 5.1 a 5.3 mostram ainda o tempo computacional gasto para a obtenção dos resultados para cada malha, utilizando um Pentium 4, 3.0GHz.

Tabela 5.1 – Malhas Formadas por Elementos Lineares.

	Elementos <i>LSQ</i>					
Malha	5 x 1	10 x 1	20 x 2	40 x 4	80 x 8	100 x 10
Nós	12	22	63	205	729	1.111
Tempo [s]	0.013	0.016	0.031	0.109	0.422	0.641
Desl. Vertical [mm]	-3.19	-6.59	-0.33	-12.24	-12.87	-12.95
Desvio [%]	-307.62	-97.38	-25.81	-6.2	-1.02	-0.37

Tabela 5.2 – Malhas Formadas por Elementos Quadráticos.

	Elementos <i>QSQ</i>					
Malha	3 x 1	5 x 1	8 x 1	10 x 1	15 x 1	20 x 1
Nós	18	28	43	53	78	103
Tempo [s]	0.015	0.015	0.031	0.031	0.032	0.046
Desl. Vertical [mm]	-11.84	-12.48	-12.75	-12.83	-12.93	-12.97
Desvio [%]	-9.80	-4.17	-1.96	-1.33	-0.57	-0.23

Tabela 5.3 – Malhas Formadas por Elementos Cúbicos.

	Elementos <i>CSQ</i>					
Malha	1 x 1	2 x 1	4 x 1	5 x 1	6 x 1	7 x 1
Nós	12	20	36	44	52	60
Tempo [s]	0.016	0.016	0.016	0.031	0.031	0.031
Desl. Vertical [mm]	-13.60	-12.69	-12.84	-12.89	-12.93	-12.96
Desvio [%]	4.41	-2.44	-1.25	-0.85	-0.55	-0.31

Das Tab. 5.1 a 5.3 percebe-se que a malha formada por elementos lineares requer um tempo e uma quantidade de nós mais de dez vezes superiores ao das malhas formadas por elementos quadráticos e cúbicos.

Para as tensões σ_{θ} são utilizados os mesmos procedimentos empregados para o cálculo dos deslocamentos. São determinados os valores teóricos para as tensões e, posteriormente, com o uso do PROAXI encontram-se os valores da tensão σ_{θ} usando números e tipos diferentes de elementos.

A distribuição de tensões σ_{θ} é encontrada ao longo da superfície da placa na qual o carregamento distribuído é aplicado. As Figs. 5.15a a 5.15d mostram os resultados com o refinamento da malha constituída por elementos lineares, LSQ, necessários para alcançar a precisão desejada.

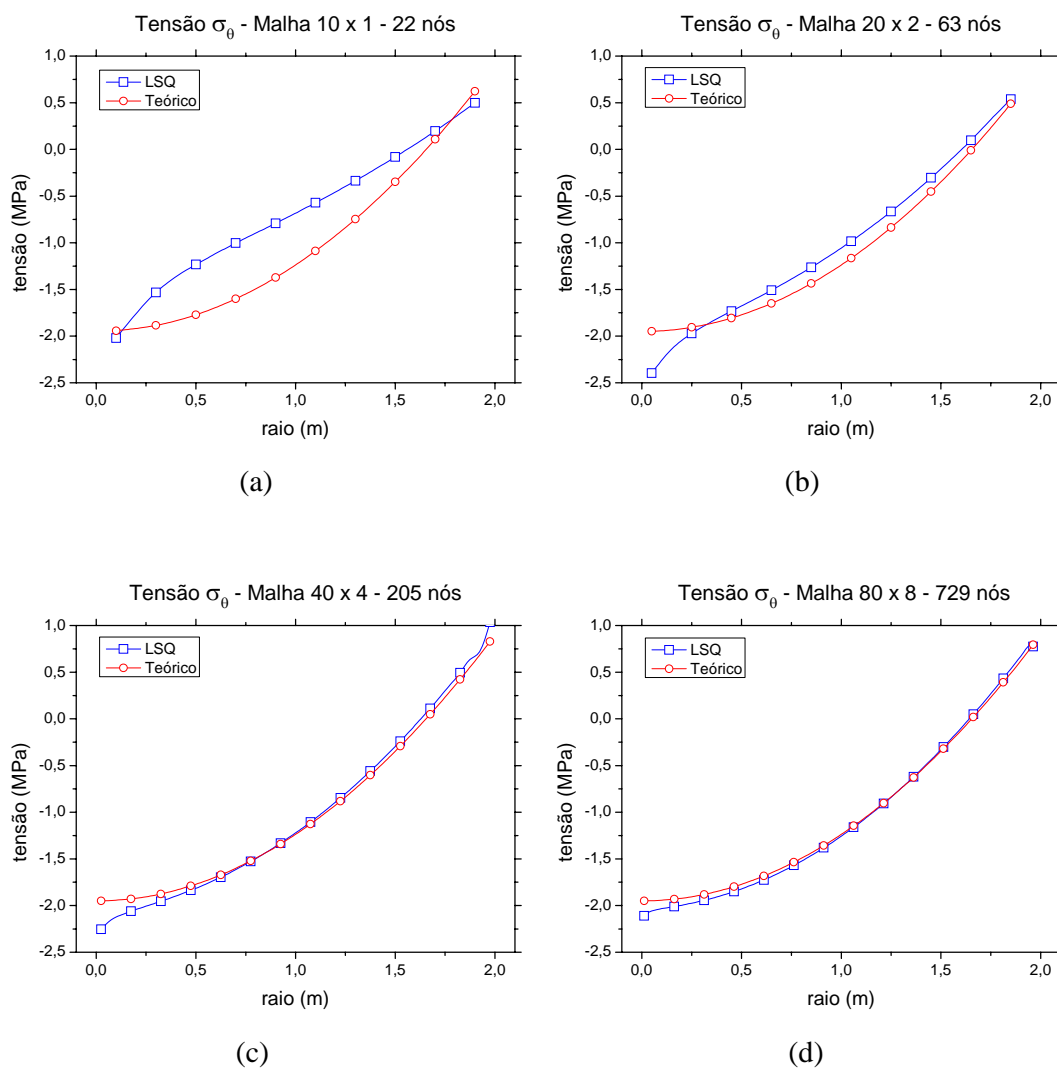


Figura 5.15 – Tensão σ_θ usando Elementos LSQ.

O desempenho das malhas com elementos quadráticos pode ser observado através das Figs. 5.16a a 5.16d. Assim como para o elemento linear, o número necessário de elementos quadráticos para a determinação dos deslocamentos é igual ao número de elementos para a determinação da tensão σ_θ ao longo da superfície da placa, dentro da precisão estipulada.

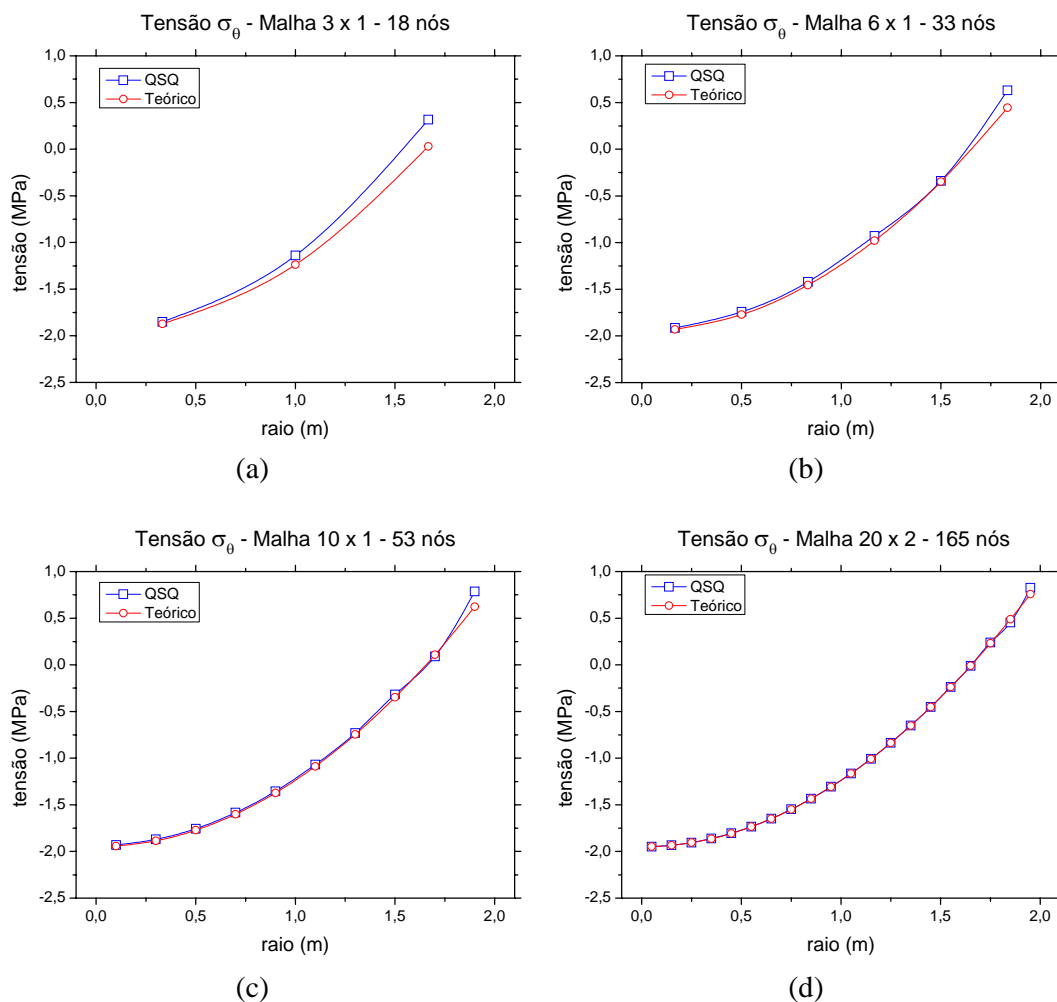
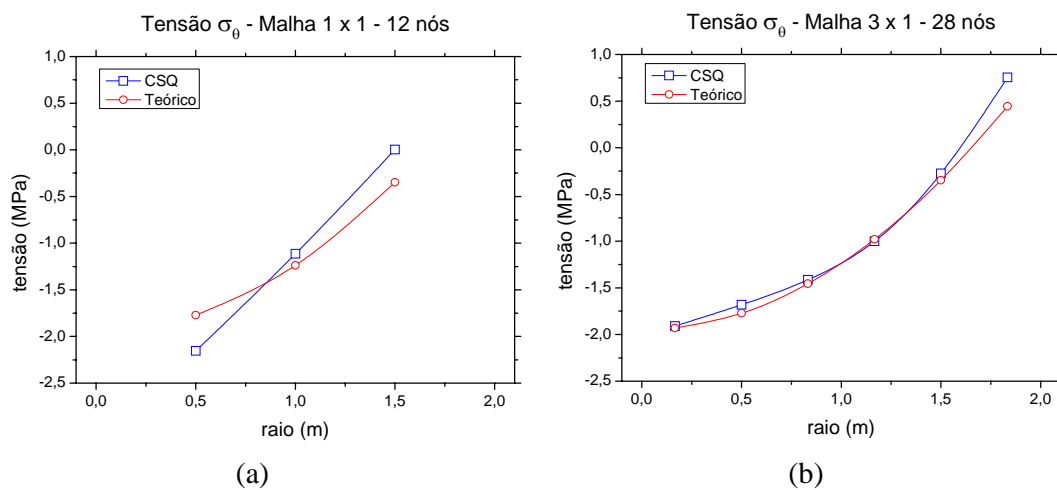
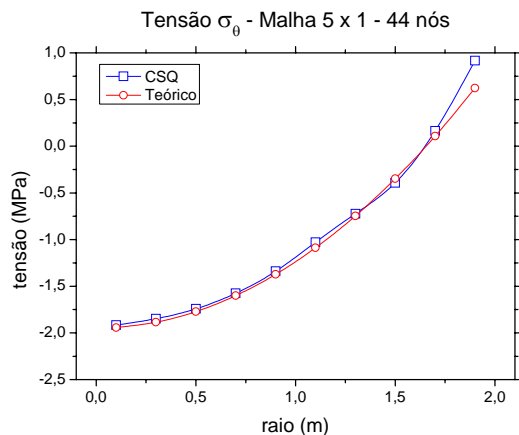


Figura 5.16 – Tensão σ_θ usando Elementos QSQ.

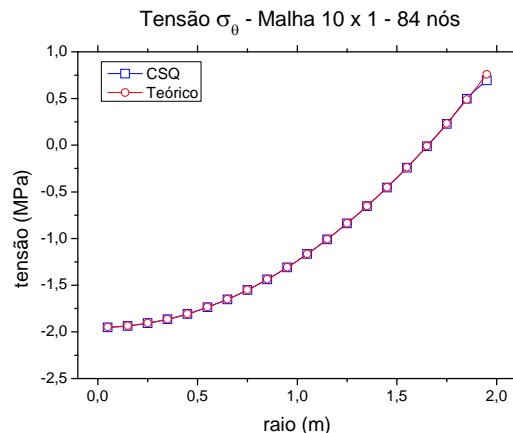
Para o elemento cúbico, são necessários 10 elementos para garantir a precisão dos valores de σ_θ , o mesmo número de elementos necessários para o cálculo dos deslocamentos.

Os valores de σ_θ são plotados nos gráficos das Figs. 5.17a a 5.17d.





(c)

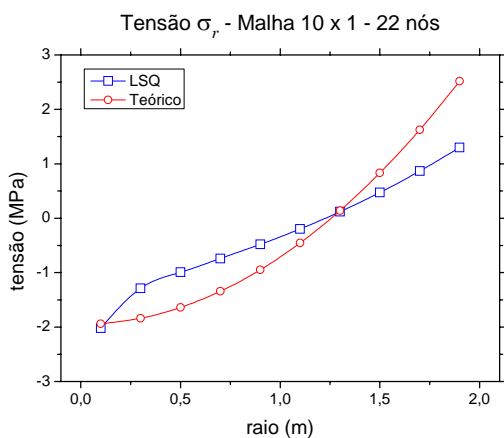


(d)

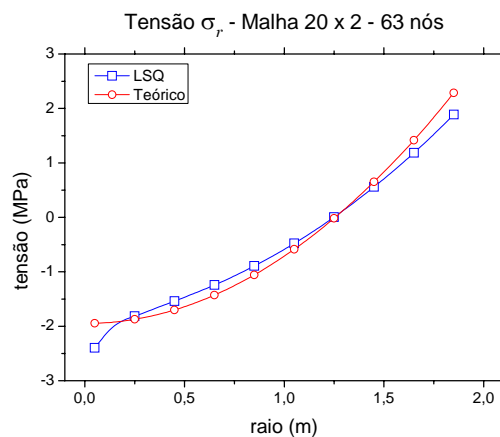
Figura 5.17 – Tensão σ_θ usando Elementos CSQ.

É calculada a distribuição das tensões normais σ_r na superfície superior da placa, em $z = -c$. As Figs. 5.18 a 5.20 mostram como os três tipos de elementos axissimétricos se comportam para a determinação das tensões σ_r .

As Figs. 5.18a a 5.18d ilustram o desempenho do elemento linear para a determinação da tensão σ_r . A precisão estabelecida é atingida com uma malha de 640 elementos com um total de 729 nós. Esta malha é a mesma que foi utilizada para o cálculo dos deslocamentos e para as tensões σ_θ .



(a)



(b)

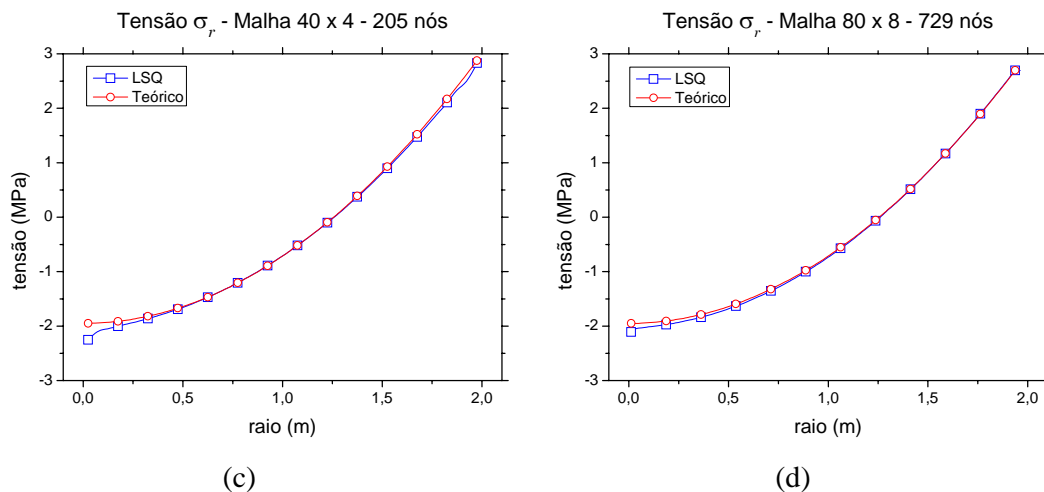


Figura 5.18 – Tensão σ_r usando Elementos LSQ.

Conforme mostram as Figs. 5.19a e 5.19b, para a determinação das tensões σ_r com elementos quadráticos são necessários apenas 6 elementos, com um total de 33 nós. Analisando as Figs. 5.18 e 5.19 percebe-se a grande superioridade do elemento que usa funções de forma quadráticas em relação ao elemento com funções de forma lineares, na determinação da tensão normal σ_r em placas finas.

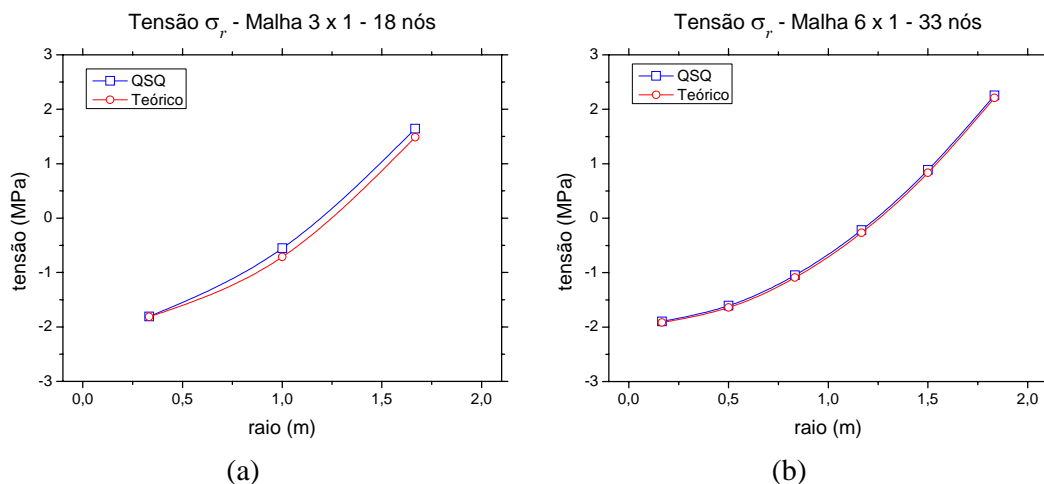
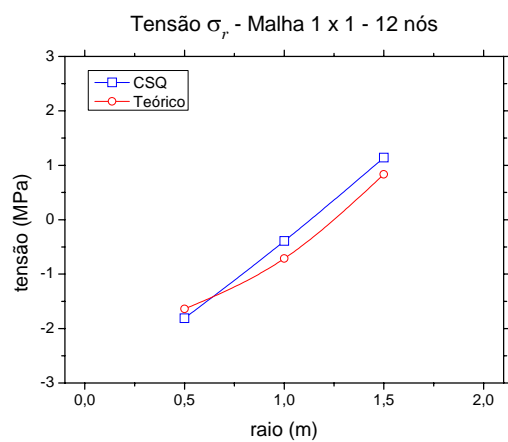
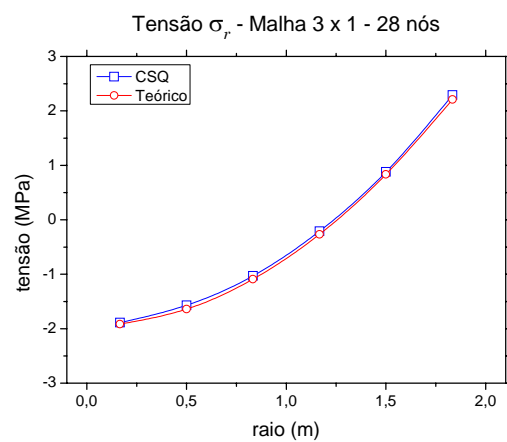


Figura 5.19 – Tensão σ_r usando Elementos QSQ.

As Figs. 5.20a e 5.20b mostram que 2 elementos cúbicos são suficientes para determinar as tensões σ_r com grande precisão. Nota-se também que é necessária uma malha com apenas 28 nós para a determinação das tensões σ_r , contra uma malha de 33 nós do elemento quadrático.



(a)



(b)

Figura 5.20 – Tensão σ_r usando Elementos CSQ.

Capítulo 6

EXEMPLOS NUMÉRICOS

O problema da distribuição de tensões em uma placa sujeita a ação de forças concentradas é de grande interesse prático na engenharia. Conforme foi mostrado no capítulo 4, as equações que regem o comportamento das tensões e deslocamentos de uma placa circular sujeita a um carregamento concentrado podem ser obtidas analiticamente. Entretanto, o princípio de Saint-Venant prevê que em regiões próximas às cargas concentradas a distribuição de tensões não pode ser descrita pelas equações convencionais da resistência dos materiais. Nestas regiões surgem perturbações das tensões e são mais acentuadas nas vizinhanças do ponto de aplicação das cargas, (Oliveira et al, 2008).

O código computacional desenvolvido neste trabalho validado no capítulo anterior é utilizado, neste capítulo, para determinar as tensões normais e de cisalhamento próximas à região de aplicação de cargas concentradas. São estudados dois casos: uma placa sujeita a uma carga concentrada no centro e uma placa sujeita a um carregamento distribuído uniformemente aplicado ao longo de uma circunferência de raio igual à metade do raio da placa.

Usando o mesmo procedimento de Seewald, (Timoshenko & Goodier, 1970), a tensão normal σ_r em uma placa circular é dividida em duas partes. A primeira é representada pela fórmula usual de placas denotada por σ_r'' e a outra parte é representada pelo efeito local

próximo ao ponto de aplicação da carga. Esta última parte, designada por σ_r' , é representada por $\sigma_r' = \beta_r \frac{P}{c}$. Portanto,

$$\sigma_r = \sigma_r'' + \sigma_r' = \sigma_r'' + \beta_r \frac{P}{c} \quad (6.1)$$

onde β_r é um fator numérico que depende do ponto para o qual as tensões locais são calculadas, P é a carga concentrada aplicada e c é a metade da espessura da placa.

O mesmo procedimento de separação das tensões em duas partes foi aplicado por Vicente (2006) para a determinação das tensões normais e de cisalhamento em vigas bi-apoiadas sujeitas à cargas concentradas na superfície superior. Nesse trabalho utilizou-se o MEF para uma análise das tensões nas vizinhanças do ponto de aplicação de cargas concentradas e promover uma comparação com os resultados apresentados por Timoshenko & Goodier (1970) para vigas.

Assim como para a tensão σ_r , pode-se calcular a tensão σ_θ nas vizinhanças do ponto de aplicação da carga. Determina-se assim uma tensão σ_θ' expressa em termos do fator β_θ que deve ser acrescentada à tensão σ_θ'' que é determinada através das equações do capítulo 4. Procedendo-se dessa forma, pode-se obter a real tensão normal circunferencial em uma placa sujeita a ação de uma carga concentrada, ou seja,

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta'' + \sigma_\theta' = \sigma_\theta'' + \beta_\theta \frac{P}{c} \quad (6.2)$$

As outras duas componentes de tensão, σ_z e τ_{rz} , podem também ser representadas diretamente pelo fator de intensidade β , ou seja,

$$\sigma_z = \beta_z \frac{P}{c} \quad (6.3)$$

e

$$\tau_{rz} = \beta_{rz} \frac{P}{c} \quad (6.4)$$

6.1 CARGA ATUANDO NO CENTRO DA PLACA

O fator β é analisado nas regiões próximas ao centro e na borda da placa em cinco planos paralelos ao plano médio da placa mostrada na Fig. 6.1. Estes planos paralelos são definidos em $z = -c$, $z = -c/2$, $z = 0$, $z = c/2$ e $z = c$. Esta análise é feita utilizando o código computacional PROAXI, para os três tipos de elementos: LSQ, QSQ e CSQ. É feita uma discretização da geometria da placa em malhas com 20000 elementos, sendo 1000 divisões na direção do eixo r e 20 divisões na direção do eixo z . Sendo $a = 2$ m, $c = 0,05$ m, $P = 10$ kN/m, Coeficiente de Poisson = 0,3 e Módulo de Elasticidade = $2,1 \times 10^9$ Pa.

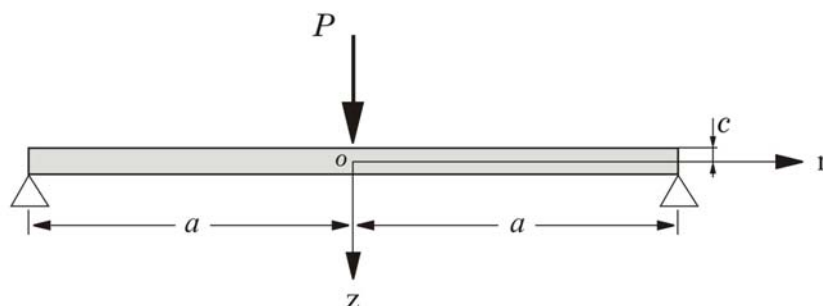
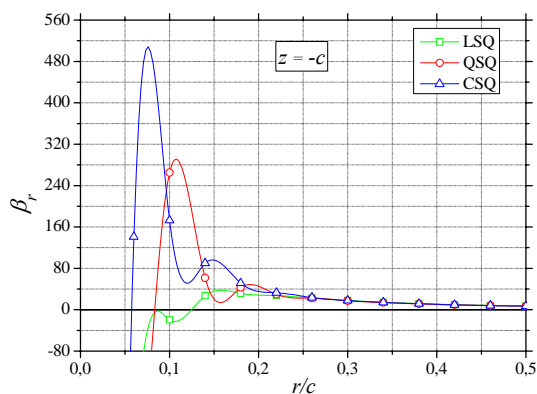
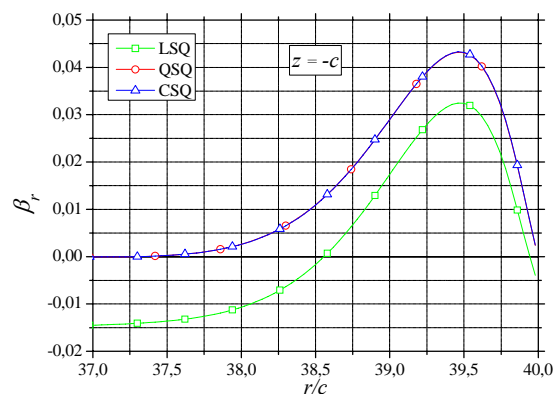


Figura 6.1 – Placa Fina Circular, simplesmente apoiada, sob uma Carga Concentrada.

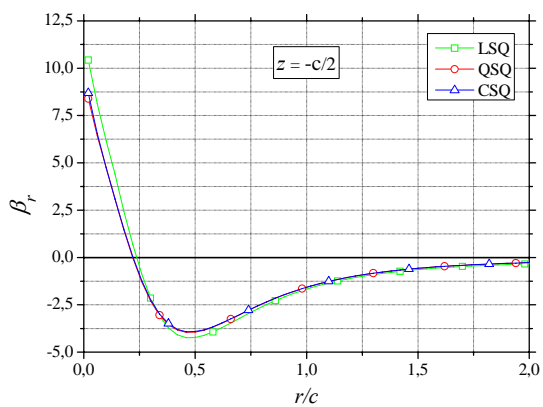
As Figs. 6.2a a 6.2e mostram os valores do fator β_r para a tensão σ'_r na placa fina circular mostrada na Fig. 6.1. Percebe-se na Fig. 6.2a a descontinuidade existente exatamente no ponto de aplicação da carga concentrada na placa.



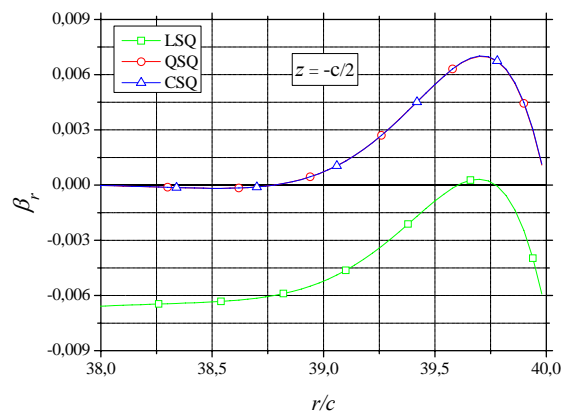
(a)



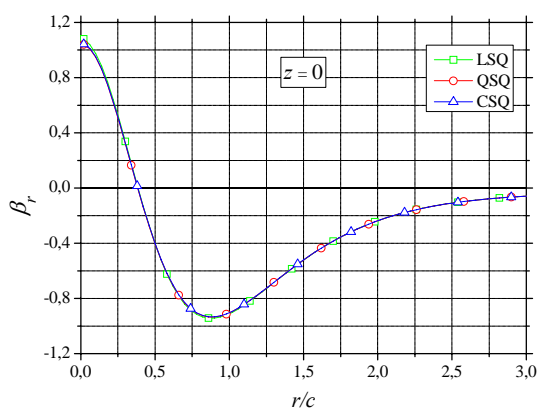
(b)



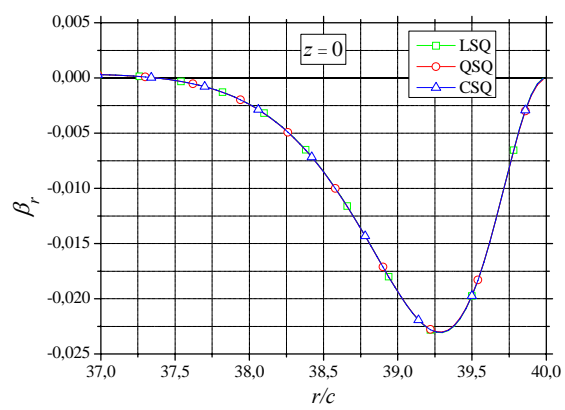
(c)



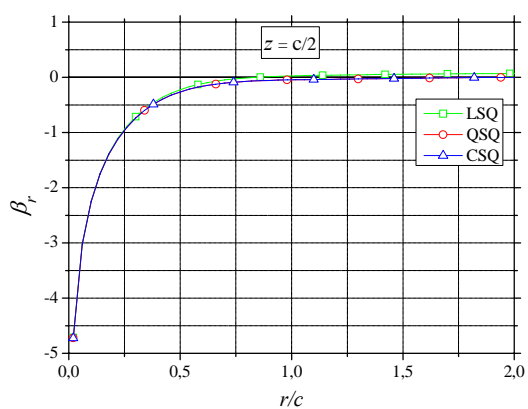
(d)



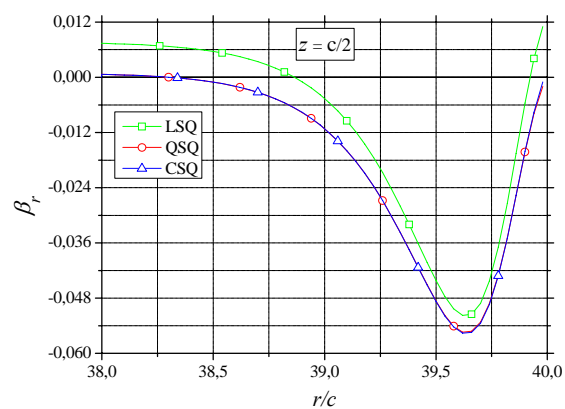
(e)



(f)



(g)



(h)

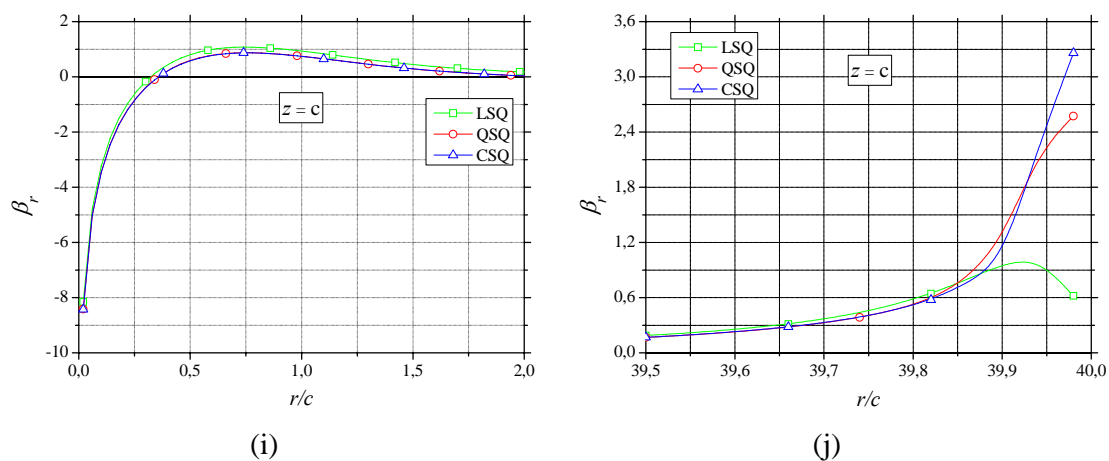
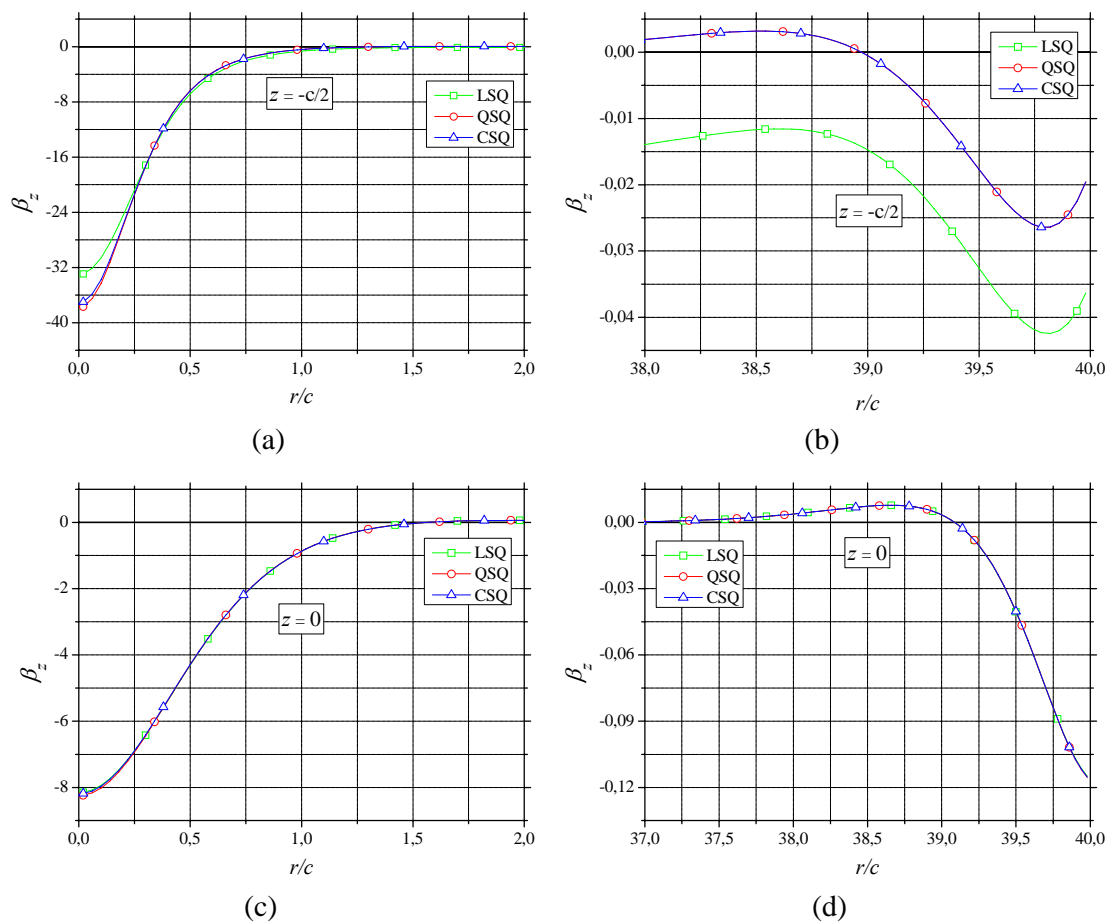


Figura 6.2 – Fator β_r para a determinação da tensão σ_r' .

As Figs. 6.3a a 6.3f mostram os valores do fator de concentração de tensão β_z para a tensão σ_z . Para esta tensão, o fator β_z é calculado em três planos da placa situados em $z = -c/2$, $z = 0$ e em $z = c/2$.



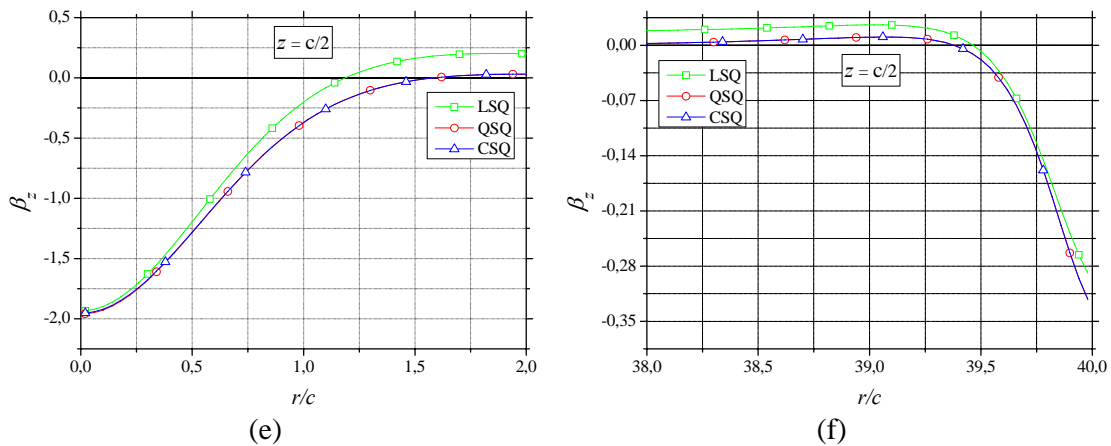
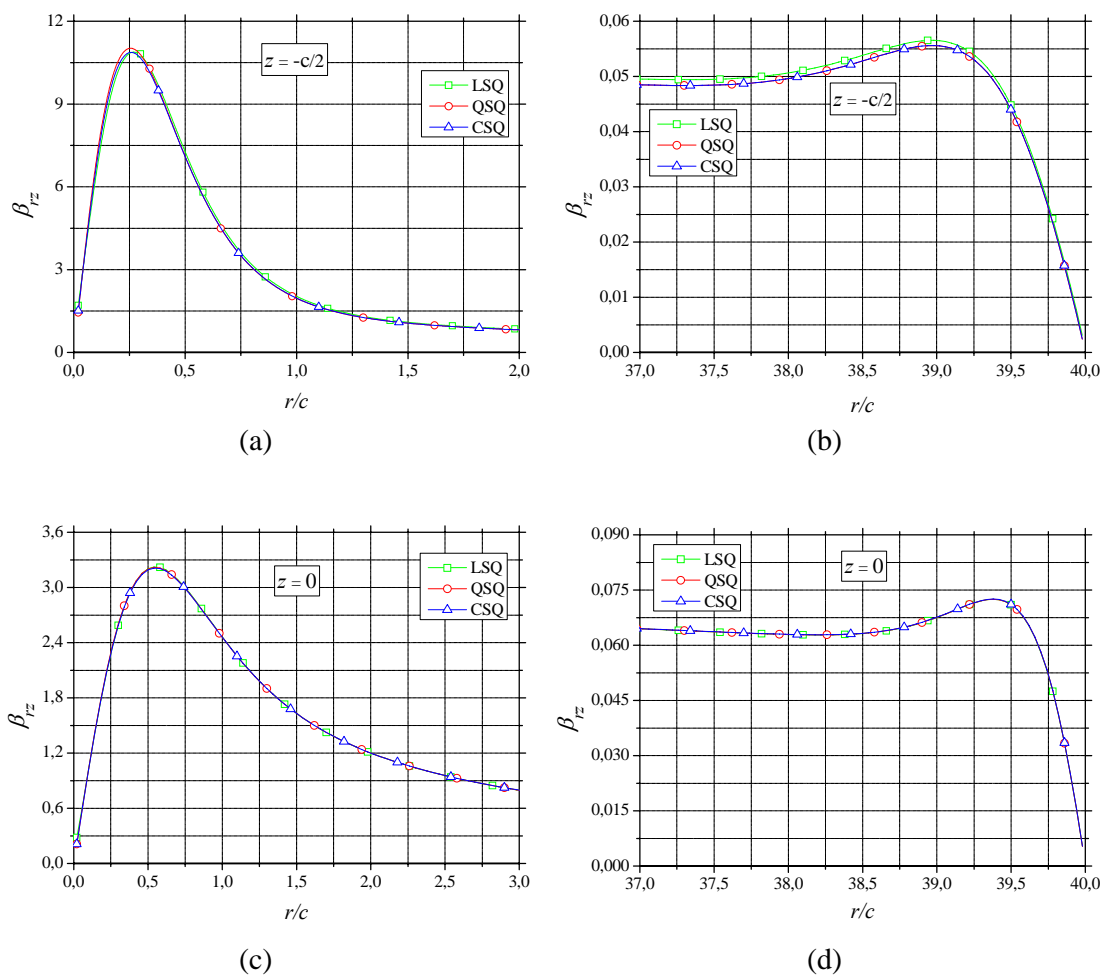
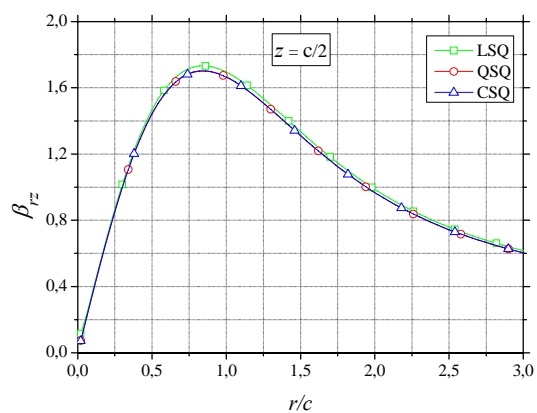


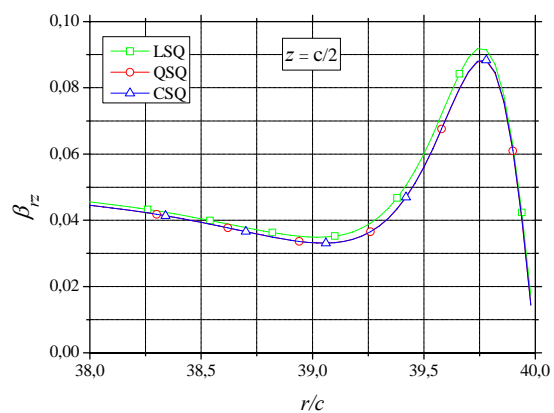
Figura 6.3 – Fator β_z para a determinação da tensão σ_z .

Assim como para a tensão normal σ_z , a tensão de cisalhamento τ_{rz} é calculada também em três planos da placa circular. As Figs. 6.4a a 6.4f mostram o valor do fator β_{rz} para a determinação da tensão de cisalhamento τ_{rz} .





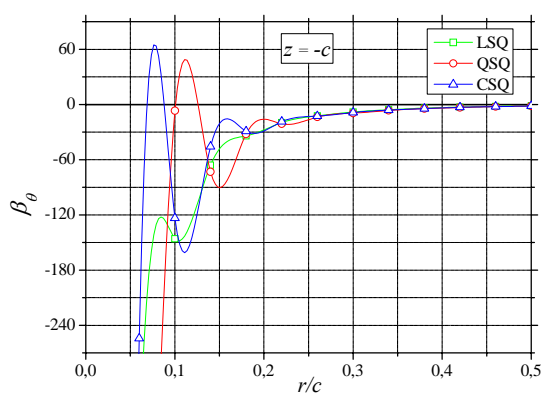
(e)



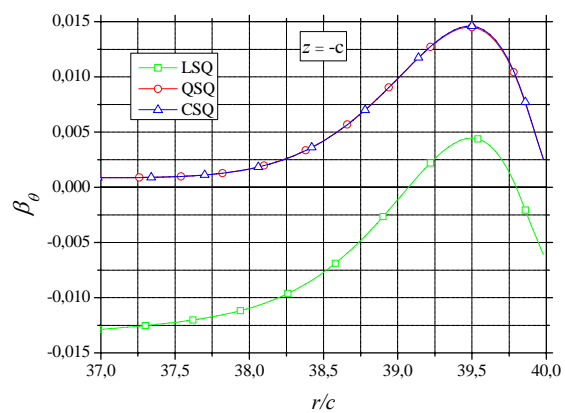
(f)

Figura 6.4 – Fator β_{rz} para a determinação da tensão τ_{rz} .

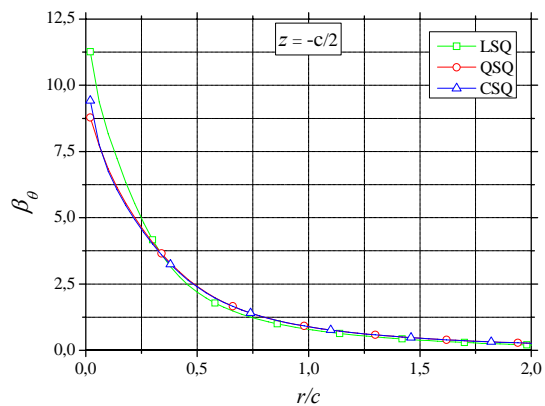
As Figs. 6.5a a 6.5j mostram os valores do fator β_θ para a tensão σ'_θ em cinco planos da placa fina circular mostrada na Fig. 6.1.



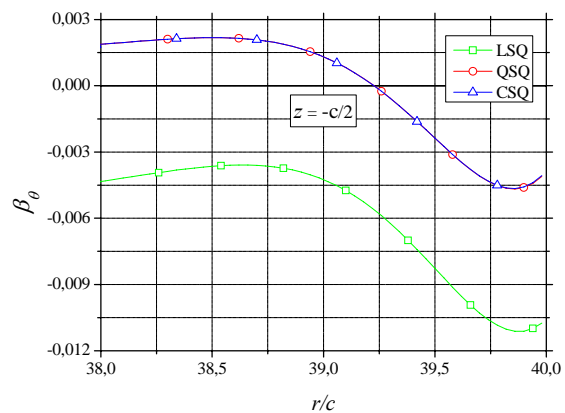
(a)



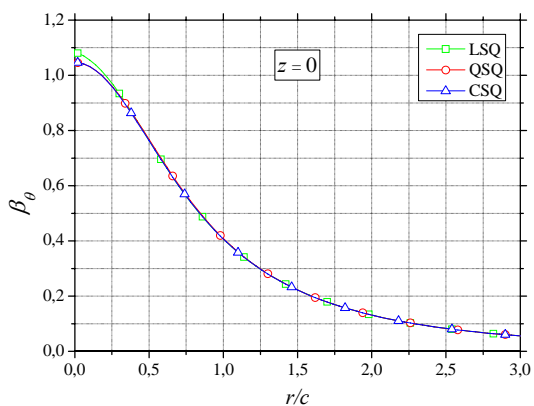
(b)



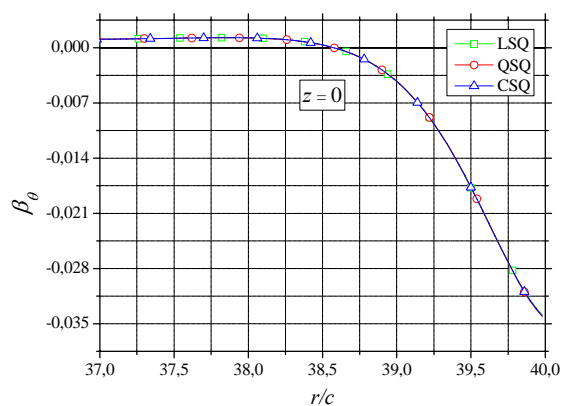
(c)



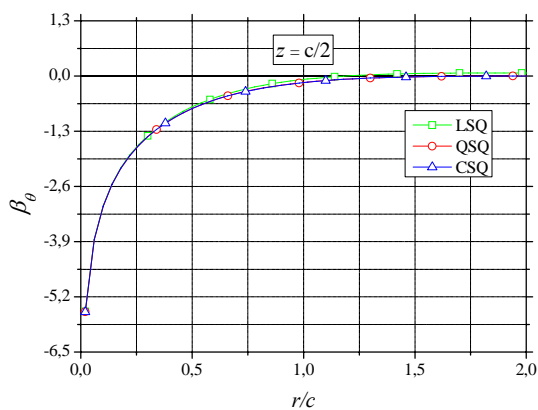
(d)



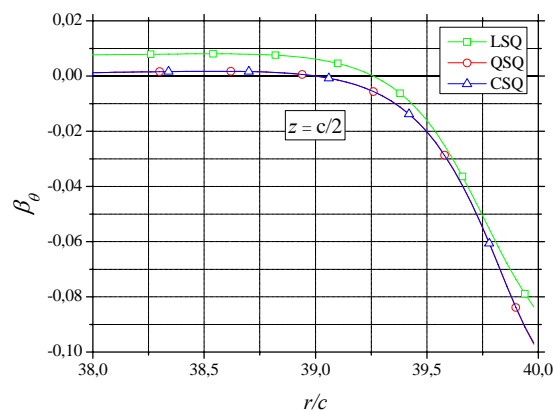
(e)



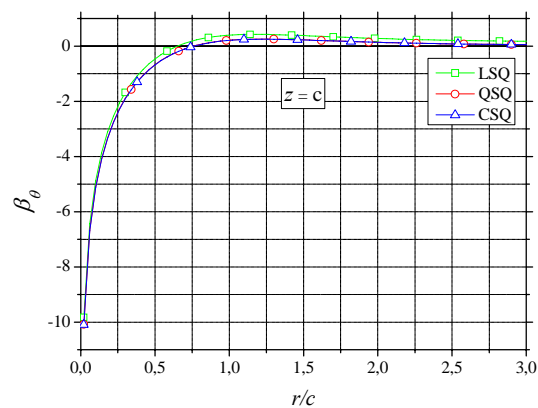
(f)



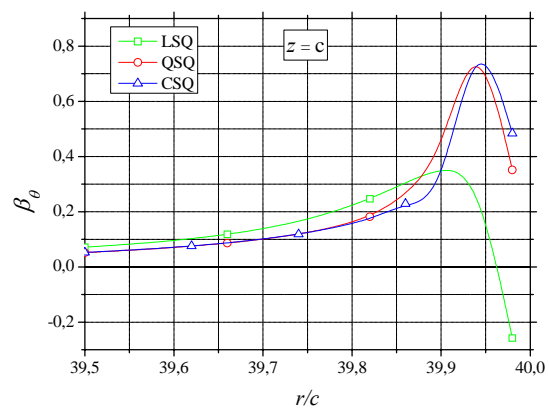
(g)



(h)



(i)



(j)

Figura 6.5 – Fator β_θ para a determinação da tensão σ'_θ .

As Figs. 6.3 a 6.5 mostraram que o desempenho dos elementos QSQ e CSQ é praticamente o mesmo para a determinação das tensões analisadas, exceto para o ponto exato

de aplicação da carga onde a malha formada por elementos CSQ fornece valores de tensão maiores.

A malha com elementos LSQ se mostrou bastante eficaz quando as tensões são analisadas no centro do elemento (plano $z = 0$), entretanto na medida em que as tensões são analisadas próximas as bordas dos elementos, a malha formada por elementos lineares se mostra incapaz de determinar com grande precisão as tensões.

O melhor desempenho do elemento LSQ é na análise das tensões de cisalhamento, τ_{rz} , Figs. 6.4a a 6.4f, onde o desempenho dos 3 elementos foi muito parecido.

6.2 CARGA UNIFORME CIRCUNFERENCIAL

Neste exemplo, os valores do fator β são analisados nas regiões próximas a uma carga uniforme aplicada ao longo de uma circunferência de raio igual à metade do raio da placa. Para avaliar o fator β de concentração de tensão é usado apenas o elemento cúbico da Família Serendipity, CSQ.

A concentração de tensão é analisada para o caso mostrado na Fig. 6.6, considerando três diferentes valores da dimensão de c (metade da altura da placa). É utilizado $c = 0,05$ m para o caso de uma placa fina; $c = 0,15$ m para uma placa de espessura intermediária e $c = 0,25$ m para representar uma placa espessa. Para estes casos são usados $P = 10$ kN, $a = 2$ m, coeficiente de Poisson = 0,3 e módulo de elasticidade = $2,1 \times 10^9$ Pa.

A discretização da geometria do problema é feita com uma malha com 4000 elementos cúbicos, sendo 200 divisões na direção do eixo r e 20 divisões na direção do eixo z . São indicados os valores de β em cinco planos ao longo da espessura da placa.

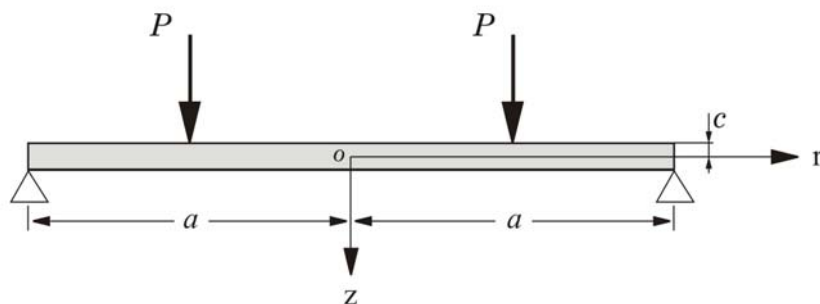


Figura 6.6 – Placa Fina Circular Simplesmente Apoiada sujeita a um Carregamento Circunferencial.

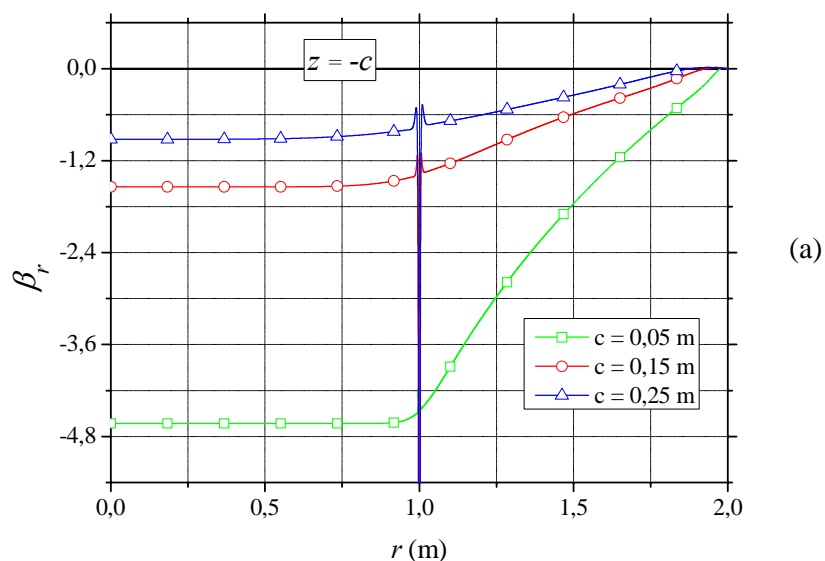
As tensões normais σ_r e σ_θ não são divididas em duas partes conforme foi feito no exemplo anterior. Sendo assim, as tensões para a placa mostrada na Fig. 6.6 podem ser obtidas das Figs. 6.7 e 6.10 utilizando as Eqs. (6.5) e (6.6), respectivamente, ou seja,

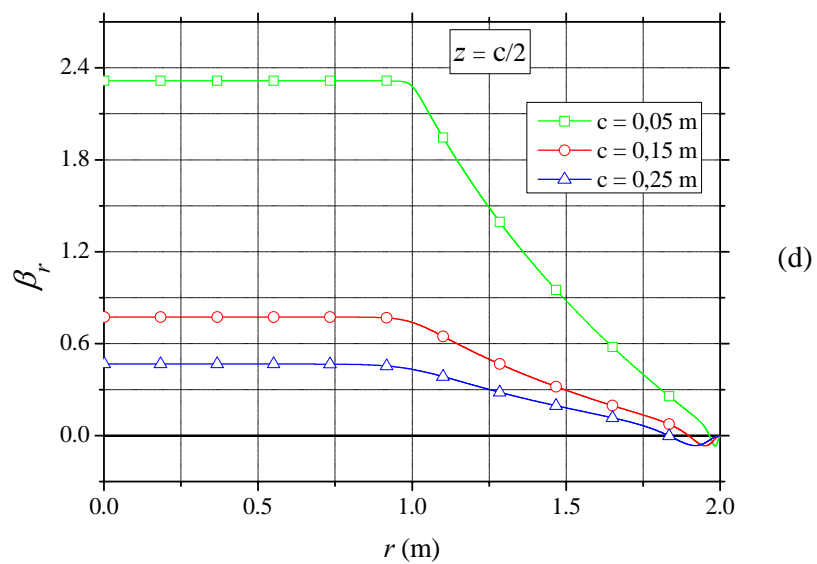
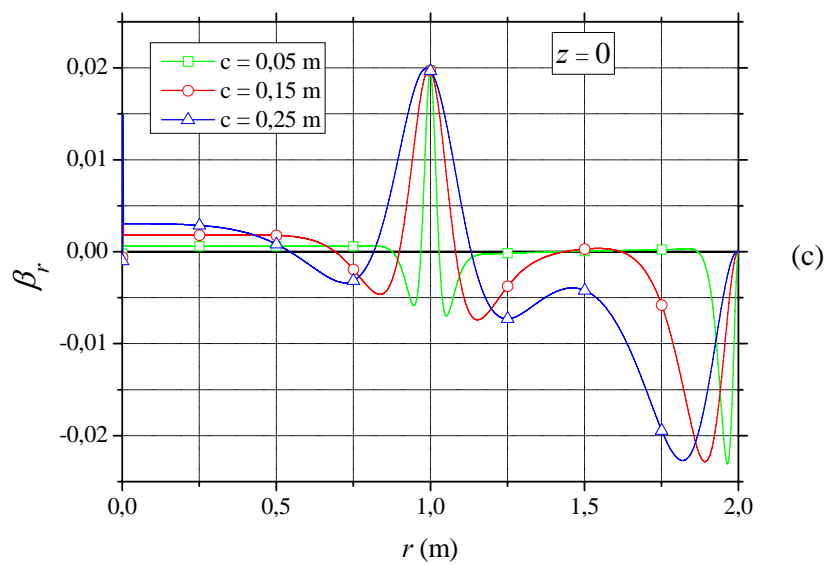
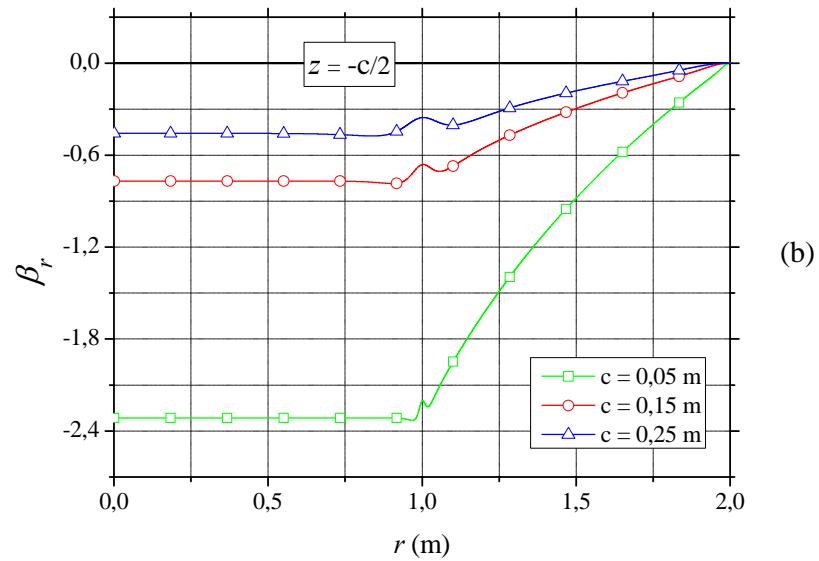
$$\sigma_r = \beta_r \frac{P}{c} \quad (6.5)$$

e

$$\sigma_\theta = \beta_\theta \frac{P}{c} \quad (6.6)$$

As Figs. 6.7a a 6.7e mostram os valores do fator β_r para a tensão σ_r .





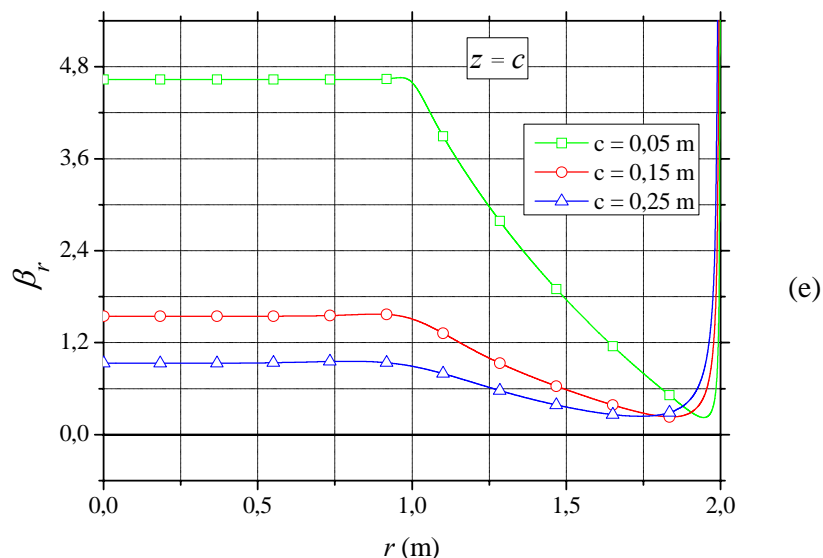
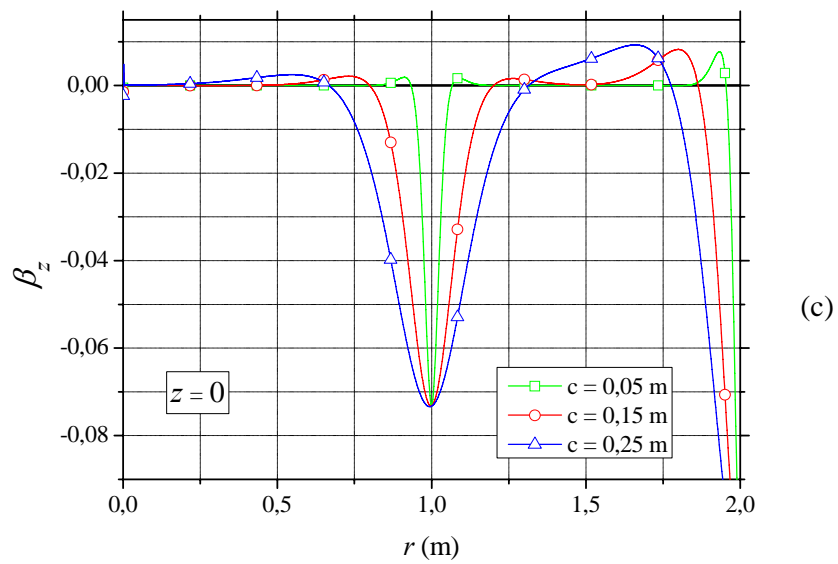
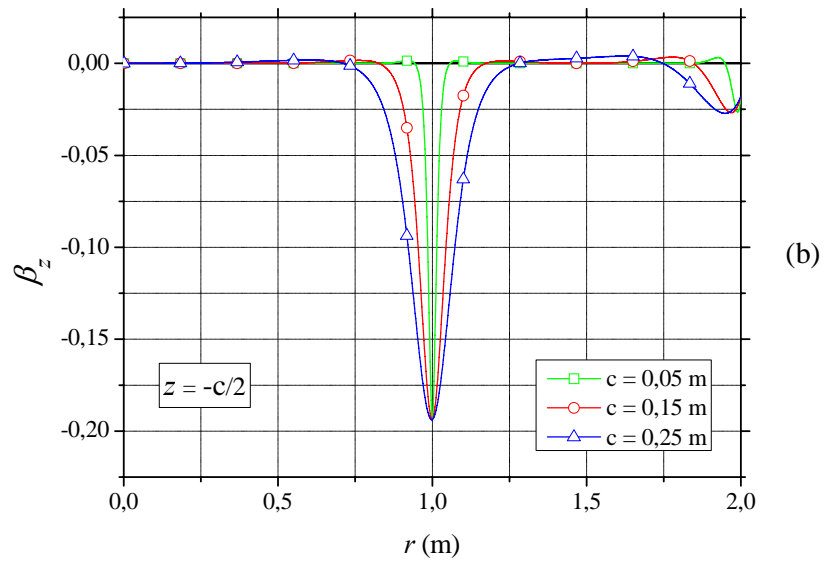
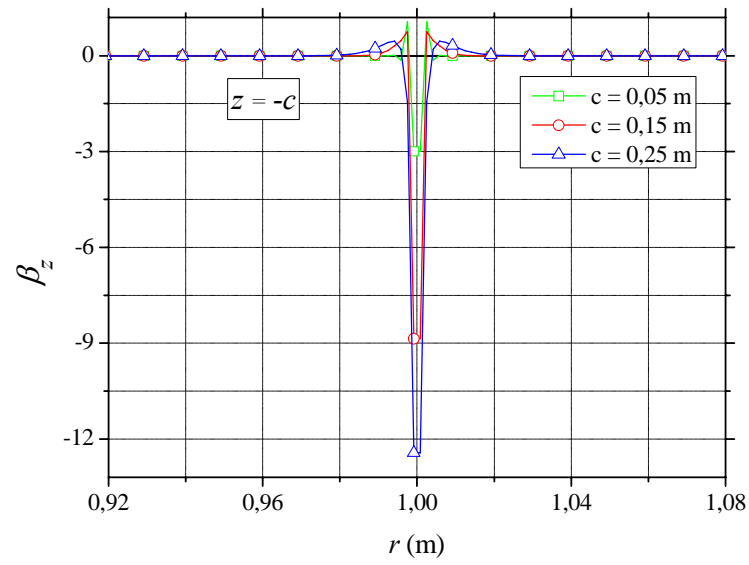


Figura 6.7 – Fator β_r para a determinação da tensão σ_r .

Em regiões distantes do ponto de aplicação da carga, os gráficos da Fig. 6.7 mostram que a placa sofre as maiores tensões normais radiais nas superfícies inferior e superior, sendo compressão na parte superior e tração na inferior. Entretanto, observa-se que devido aos efeitos da carga concentrada e também do apoio na borda da placa, a tensão não é zero no seu plano médio.

A Fig. 6.7c indica que no plano médio, a placa fina ($c = 0,05$ m) está sujeita a uma tensão normal radial, σ_r , cinco vezes maior do que a placa espessa ($c = 0,25$ m). Isto mostra que a tensão normal radial no plano médio é inversamente proporcional a espessura da placa na linha de aplicação da carga concentrada e na região próxima ao apoio da placa.

O fator β_z para a obtenção da tensão σ_z está representado na Figs. 6.8a a 6.8e.



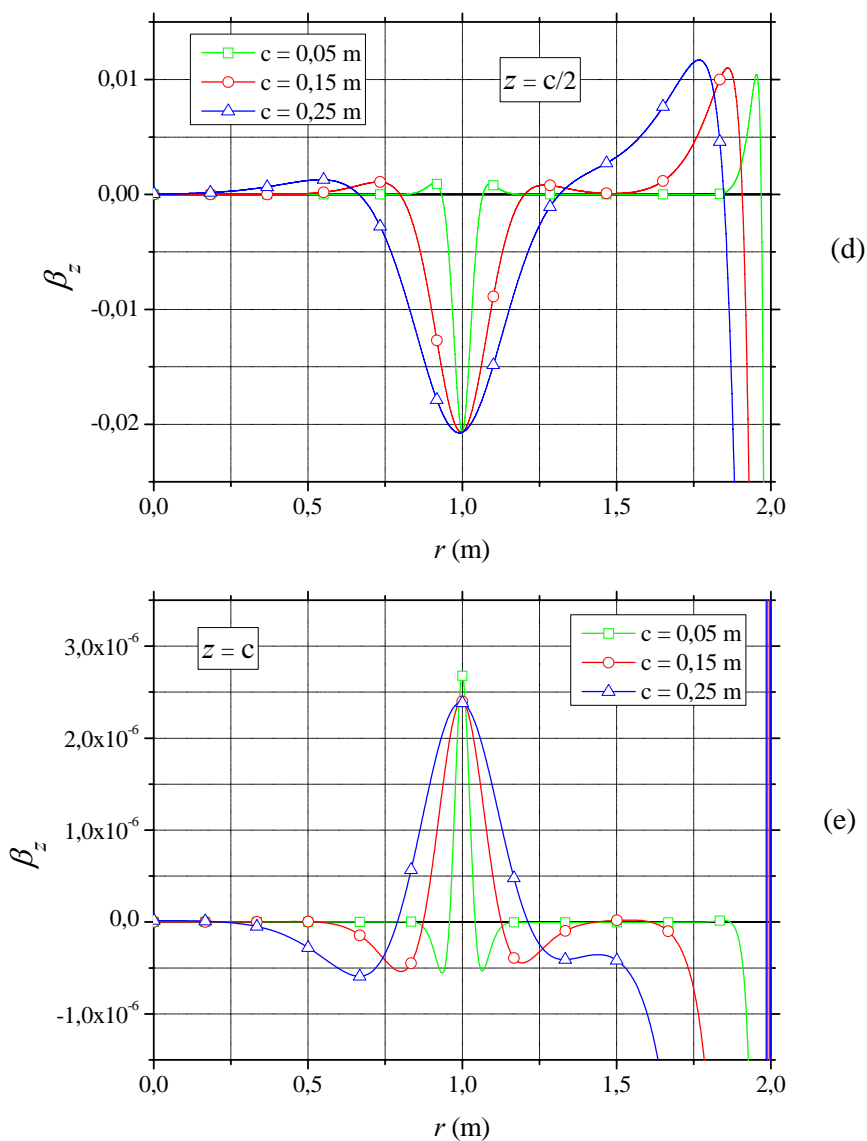
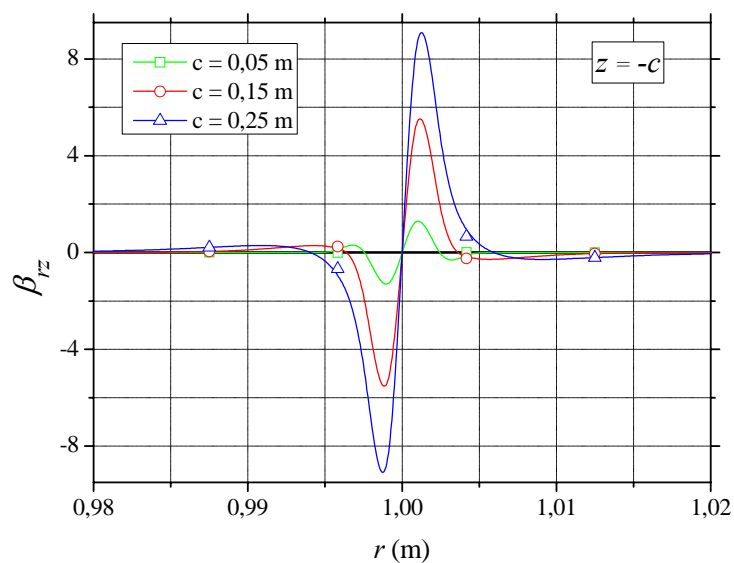


Figura 6.8 – Fator β_z para a determinação da tensão σ_z .

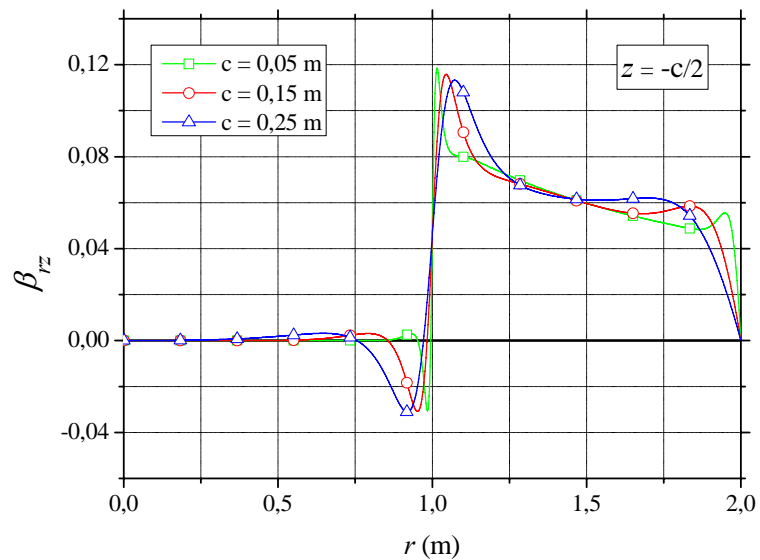
A análise das Figs. 6.8a a 6.8e indica que a tensão normal axial, σ_z , se propaga a uma maior distância na direção radial de placa circular para uma placa espessa, enquanto que para a placa fina essa tensão tende a se manter mais concentrada na linha de atuação da carga.

Na superfície superior da placa, Fig. 6.8a, os fatores β_z encontrados indicam que as tensões σ_z , na linha de aplicação da carga, têm valores iguais para os três casos analisados. Nos planos interiores da placa, Figs. 6.8b a 6.8d, o fator de tensão β_z tem um mesmo valor máximo, indicando que a tensão σ_z nesses casos é inversamente proporcional a espessura da placa. A Fig. 6.8e mostra que uma pequena tensão surge na superfície inferior.

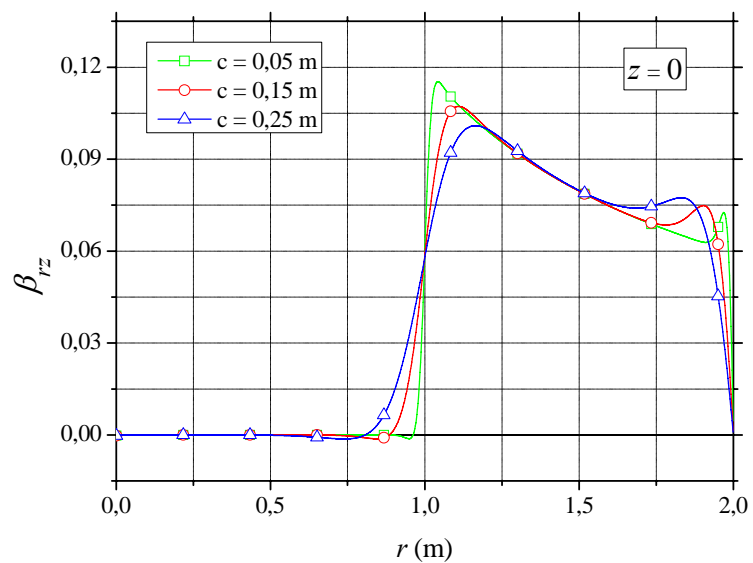
O fator β_{rz} para a obtenção da tensão τ_{rz} está representado na Figs. 6.9a a 6.9e.



(a)



(b)



(c)

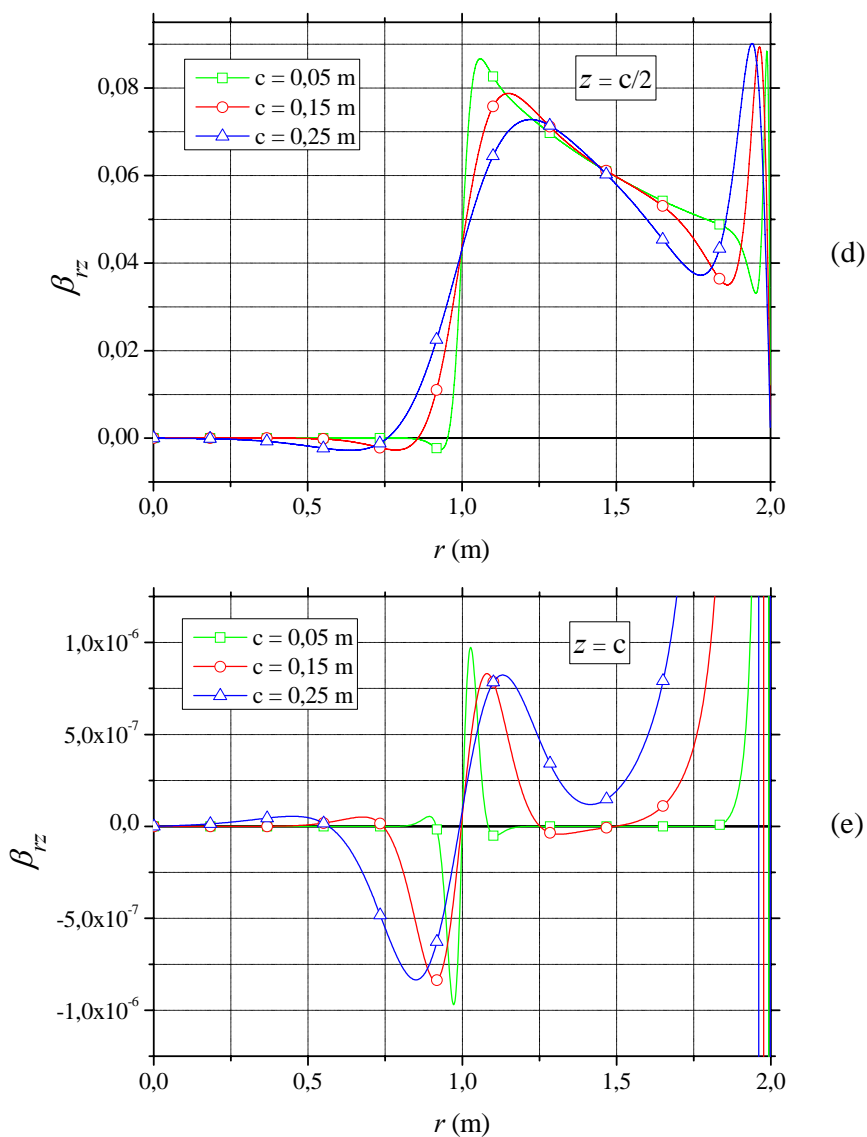


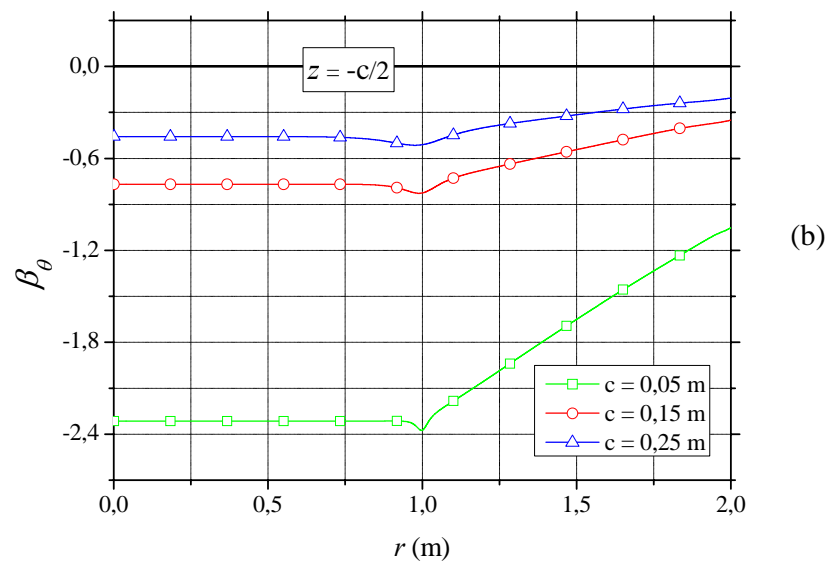
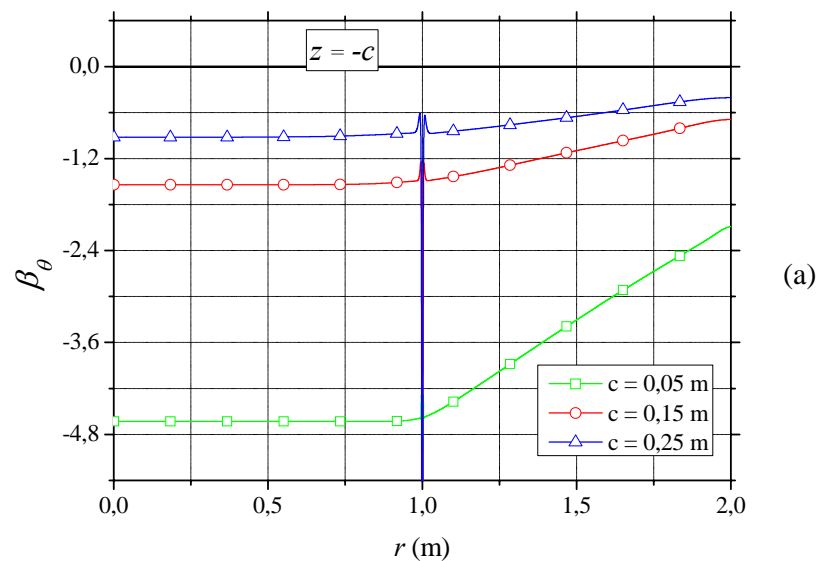
Figura 6.9 – Fator β_{rz} para a determinação da tensão τ_{rz} .

Os fatores β_{rz} mostrados na Fig. 6.9a indicam que a tensão τ_{rz} na superfície superior atinge praticamente o mesmo valor máximo estudados nos três casos. Na superfície inferior, próxima à borda da placa, a tensão τ_{rz} não é desprezível. Nessa região surge uma descontinuidade da tensão τ_{rz} , Fig. 6.9e.

Através das Figs. 6.9b a 6.9d, nota-se que os fatores de tensão β_{rz} são semelhantes para os três casos. A influência da carga concentrada é mais visível quando se observa a Fig. 6.9b.

Com o uso da Fig. 6.9d, observa-se que os valores dos fatores β_{rz} devido ao apoio da placa superam os valores dos fatores β_{rz} devido à própria carga.

O fator β_θ para a obtenção da tensão σ_θ está representado nas Figs. 6.10a a 6.10e.



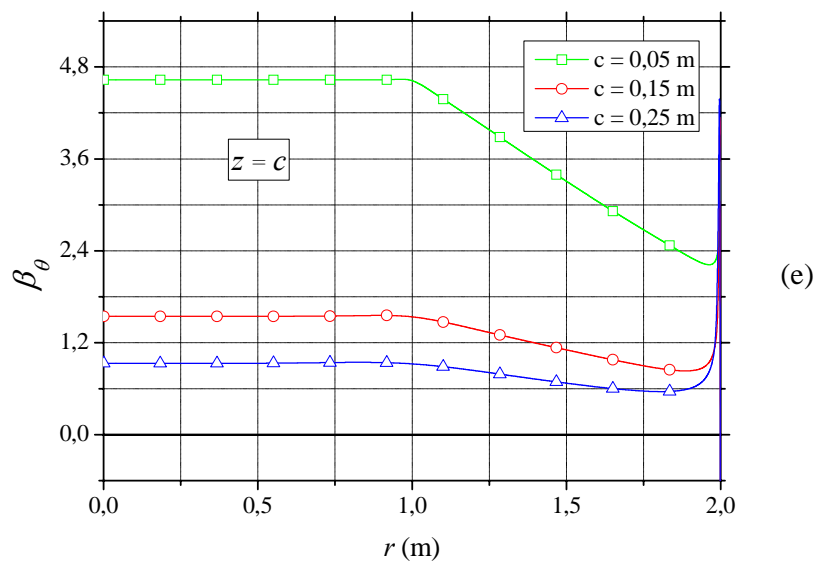
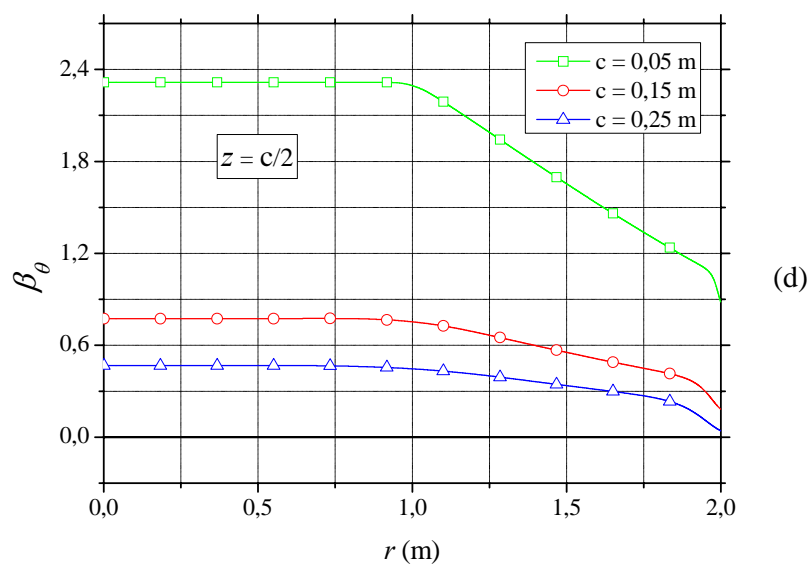
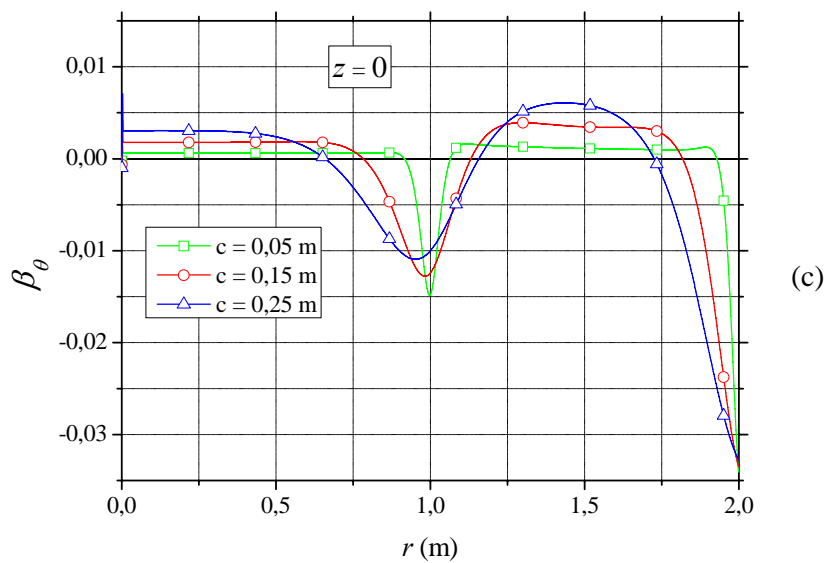


Figura 6.10 – Fator β_θ para a determinação da tensão σ_θ .

Observando os gráficos da Fig. 6.10, percebe-se que os formatos das curvas de β_θ são bastante parecidos com os formatos das curvas de β_r , para todos os planos com exceção do plano médio. Entre o centro da placa e o ponto de aplicação da carga, os valores de β_θ e β_r são exatamente iguais. A partir desse ponto até a borda da placa, os valores do fator de tensão β_θ diminuem e tendem a um valor 2,5 vezes menor do que o valor encontrado no centro da placa. De maneira diferente ao fator β_r , a Fig. 6.10c indica que no plano médio da placa surgem tensões normais circunferenciais, σ_θ , de compressão na linha de atuação da carga concentrada e também na borda da placa.

Capítulo 7

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho foi empregado o MEF para realizar uma análise de tensões em corpos axissimétricos. Foi utilizada a formulação isoparamétrica do MEF para a implementação de três diferentes tipos de elementos quadrilaterais axissimétricos: o elemento linear, o elemento quadrático e o elemento cúbico, todos da família Serendipity. Foram analisadas as diferenças entre o comportamento dos elementos quando estes são utilizados para descrever os deslocamentos e as tensões em corpos de revolução.

Nos exemplos numéricos apresentados neste trabalho, foram avaliadas as regiões de concentração de tensão que surgem devido à aplicação de uma carga concentrada na superfície de uma placa circular.

No primeiro exemplo foi analisado o caso de uma placa fina circular, simplesmente apoiada, sujeita a uma carga aplicada em seu centro. Para essa análise foram utilizados os três tipos de elementos.

No segundo exemplo foi verificada a influência da espessura das placas na distribuição das tensões para o caso em que as placas são submetidas a uma carga distribuída ao longo de uma linha circunferencial. Nesse exemplo, foi utilizado apenas o elemento cúbico para a análise das tensões.

7.1 CONCLUSÕES

7.1.1 Sobre a Diferença entre os Elementos

No capítulo 5 foi realizada uma série de análises dos deslocamentos e tensões em corpos de revolução. Foram analisados um vaso de pressão cilíndrico de parede espessa sujeito a uma pressão interna e também uma placa circular fina, engastada, sujeita a um carregamento distribuído em sua superfície superior. Essas análises foram necessárias para validar o código computacional desenvolvido, código este denominado de PROAXI.

Analisando o exemplo do vaso de pressão, conclui-se que para o cálculo dos deslocamentos da parede do cilindro, os três elementos apresentaram bons desempenhos e malhas com somente 2 elementos foram capazes de descrever com grande precisão os valores dos deslocamentos. Na análise da tensão normal circunferencial, σ_{θ} , o elemento linear LSQ se mostrou ineficiente para a determinação das tensões em regiões próximas as superfícies internas e externas da parede do cilindro, enquanto que com o uso de elementos QSQ e CSQ foram obtidos bons resultados. Para o cálculo da tensão normal radial, σ_r , malhas formadas por elementos CSQ apresentaram melhor eficiência do que malhas compostas pelos outros dois elementos. Foi observado que uma malha composta por somente um elemento CSQ descreve a tensão normal radial dentro da precisão estabelecida.

Em comparação com o exemplo de vaso de pressão, no exemplo de placas foram necessárias malhas com um número muito maior de elementos para descrever as grandezas que estavam sendo avaliadas. A malha composta por elementos lineares LSQ precisou de 640 elementos para descrever os deslocamentos e as tensões normais com um desvio de 1% aproximadamente, com relação aos valores teóricos. Para a malha de elementos quadráticos QSQ, esse número foi bem menor, sendo que 40 elementos já descreveram os deslocamentos e a tensão normal circunferencial com a precisão desejada de 1%. A tensão normal radial foi determinada com uma malha composta de 6 elementos quadráticos. O elemento cúbico se mostrou muito eficiente, sendo que uma malha com apenas 10 elementos foi suficiente para o cálculo dos deslocamentos e da tensão normal circunferencial. Para descrever a tensão normal radial, foram necessários somente 3 elementos.

Quando as tensões são analisadas em pontos fora do centro do elemento, malhas compostas por elementos LSQ apresentaram resultados com grandes diferenças com relação aos valores obtidos pelas equações teóricas. Quanto mais próximo o ponto analisado estiver da borda do elemento maior é a diferença dos resultados, conforme pode ser visto nos exemplos do caso de vasos de pressão e principalmente nos exemplos de placas.

7.1.2 Sobre as Cargas Concentradas

No primeiro exemplo numérico apresentado neste trabalho foram analisadas as tensões normais radial, circunferencial e axial e a tensão de cisalhamento em uma placa fina circular submetida a um carregamento concentrado aplicado na superfície superior. Nesse exemplo tornou-se evidente a alta concentração de tensões em regiões próximas à aplicação da carga e também aos pontos de apoio da placa. Desse exemplo temos as seguintes considerações:

- As malhas formadas por elementos lineares, independentemente do refinamento empregado, não fornecem os resultados esperados pela teoria, quando as tensões são analisadas em pontos fora do centro do elemento. Fato este que se verificou na análise de todas as tensões normais e de cisalhamento.

- As curvas dos fatores de tensão β_r e β_θ indicam que as tensões normais radial, σ_r , e circunferencial, σ_θ , assumem os maiores valores entre todas as tensões que surgem na placa. Em pontos da placa próximos à linha de atuação da carga concentrada, β_r e β_θ assumem elevados valores em todos os planos analisados. No plano superior da placa, próxima ao ponto de aplicação da carga, surge uma descontinuidade das tensões σ_r e σ_θ . Logo abaixo desse plano surgem altas tensões normais de tração. No plano médio da placa, essas tensões continuam sendo de tração e diminuem de modo que na superfície inferior da placa surge uma tensão de compressão.

- Surgem tensões normais axiais de compressão σ_z em todos os planos analisados. Essa tensão de compressão diminui linearmente ao longo da espessura da placa. A forma das curvas do fator de tensão β_z no centro da placa é bastante diferente daquela obtida para o mesmo fator encontrado na borda da placa. Nesse caso, a concentração de tensões devido ao apoio na borda da placa é significativamente menor do que a concentração de tensões devido à aplicação da carga.

– A análise do fator de concentração de tensão β_{rz} mostra que todas as tensões de cisalhamento que surgem nos planos analisados, conforme o sistema de referência adotado, são positivas. As formas das curvas para as tensões na borda e no centro da placa são semelhantes. A variação da tensão de cisalhamento não é linear ao longo da espessura da placa. A tensão de cisalhamento não se torna zero no plano médio da placa conforme era de se esperar pela teoria de placas finas. Os gráficos das tensões de cisalhamento têm curvas com formas semelhantes às curvas dos gráficos apresentados por Timoshenko, (1981), para as tensões de cisalhamento em uma viga bi-apoiada sujeita a um carregamento concentrado em seu centro.

7.1.3 Sobre as Placas com Diferentes Espessuras

A influência da variação da espessura da placa na região de concentração de tensões devido à aplicação de uma carga pode ser avaliada no segundo exemplo numérico. Nesse exemplo a distribuição de tensões é mostrada para todo o domínio da placa. Pode-se concluir neste exemplo que:

– Os gráficos referentes ao fator de concentração β_θ mostram que os valores dos fatores de concentração de tensão são inversamente proporcionais às espessuras das placas. Portanto, pode-se afirmar que as tensões normais σ_θ encontradas nas placas são inversamente proporcionais ao quadrado do valor da espessura da placa. No exemplo, tem-se que a placa fina com $c=0,05$ apresenta uma tensão normal σ_θ 25 vezes maior do que a tensão normal σ_θ apresentada pela placa com $c=0,25$, nos planos analisados. Segundo a teoria de placas, a tensão normal é nula no plano médio da placa. Entretanto, todos os valores do fator de concentração de tensão são próximos de um valor positivo máximo. Isso indica que, nesse plano, as tensões são de compressão e são inversamente proporcionais à espessura da placa.

– Para o fator de concentração β_r , da tensão normal σ_r , todas as conclusões mencionadas para o fator de tensão β_θ são também válidas, do centro da placa até a circunferência de aplicação da carga. A partir dessa posição de aplicação da carga até a borda, os valores de β_r decrescem linearmente até o valor zero na borda da placa. No plano médio

das placas, os valores dos fatores β_r têm um máximo valor negativo, indicando que neste plano as tensões normais são de compressão.

– Os gráficos referentes ao fator β_z mostram que o máximo valor da tensão σ_z , que surge em uma placa circular devido a aplicação de uma carga concentrada, é inversamente proporcional à espessura da placa. Porém, a área de distribuição dessa concentração de tensão é proporcional à espessura. Isso significa que na placa espessa, com $c = 0,25$, tem-se que a tensão normal axial é cinco vezes menor do que em uma placa fina, com $c = 0,05$. Essa concentração de tensões se distribui em uma área cinco vezes maior do que a área da concentração de tensão uma placa com espessura cinco vezes menor.

– O fator de tensão β_{rz} mostra que na superfície da placa, ou seja, na superfície de aplicação do carregamento, a tensão de cisalhamento τ_{rz} apresenta o mesmo valor independentemente da espessura da placa. Para os planos internos da placa, o fator de concentração β_{rz} tem o mesmo valor e praticamente a mesma distribuição, indicando que o valor da tensão τ_{rz} , nos planos interiores da placa, é inversamente proporcional à espessura da placa.

7.2 PESPERSCTIVAS FUTURAS

- Estudar a influência da variação da temperatura nas propriedades dos elementos estruturais de revolução utilizando a formulação axissimétrica do MEF;
- Fazer uma comparação entre as tensões obtidas para placas finas com o uso dos elementos axissimétricos e as tensões obtidas com o uso de elementos planos de placas finas;
- Comparar os valores das tensões obtidas para placas espessas através do uso de elementos axissimétricos com os valores obtidos através de elementos de placas espessas;

- Utilizar um processo adaptativo de refinamento, versão- p , do método dos elementos finitos, para a obtenção das tensões próximas às cargas concentradas em corpos de revolução.

Apêndice A

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA. QUADRATURA DE GAUSS

Na formulação isoparamétrica do método dos elementos finitos é necessário resolver integrais definidas com limites de integração que variam de -1 a $+1$. Um procedimento numérico que tem a finalidade de resolver estes tipos de integrais é conhecido por *quadratura de Gauss* ou *Gauss-Legendre*. A quadratura de Gauss integra exatamente um polinômio de grau $p = (2n - 1)$ com n (inteiro) pontos de integração.

A.1 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA UNIDIMENSIONAL

Seja a integral I definida por

$$I = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi \quad (\text{A.1})$$

onde $G(\xi)$ é um polinômio de ordem p da forma

$$G(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \dots + \alpha_p\xi^p \quad (\text{A.2})$$

Levando a Eq. (A.2) na Eq. (A.1), tem-se que

$$I = \int_{-1}^1 (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots + \alpha_p \xi^p) d\xi$$

cuja solução analítica é

$$I = \alpha_0 \xi \Big|_{-1}^1 + \alpha_1 \frac{\xi^2}{2} \Big|_{-1}^1 + \alpha_2 \frac{\xi^3}{3} \Big|_{-1}^1 + \dots + \alpha_p \frac{\xi^{p+1}}{p+1} \Big|_{-1}^1$$

ou

$$I = 2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \dots + \frac{\alpha_p}{p+1} \left[1 - (-1)^{p+1} \right] \quad (\text{A.3})$$

A quadratura de Gauss consiste em aproximar a solução da integral I em

$$I = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi = W_1 G(\xi_1) + W_2 G(\xi_2) + \dots + W_n G(\xi_n) \quad (\text{A.4})$$

onde n é o número de pontos de integração ou pontos de Gauss, ξ_i é o valor da coordenada natural do ponto i ($i = 1, \dots, n$) e W_i é a ponderação do ponto i .

Levando $G(\xi)$ da Eq. (A.2) com $\xi = \xi_i$ ($i = 1, \dots, n$) na Eq. (A.4), tem-se que

$$\begin{aligned} I \cong & W_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_1^2 + \dots + \alpha_p \xi_1^p) + \\ & W_2 (\alpha_0 + \alpha_1 \xi_2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \dots + \alpha_p \xi_2^p) + \dots + \\ & W_n (\alpha_0 + \alpha_1 \xi_n + \alpha_2 \xi_n^2 + \dots + \alpha_p \xi_n^p) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Comparando as Eqs. (A.3) e (A.5), vem que

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 + \dots + W_n &= 2 \\ W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + \dots + W_n \xi_n &= 0 \\ W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 + \dots + W_n \xi_n^2 &= \frac{2}{3} \\ &\vdots \\ W_1 \xi_1^p + W_2 \xi_2^p + \dots + W_n \xi_n^p &= \frac{1}{p+1} \left[1 - (-1)^{p+1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

No sistema da Eq. (A.6) há n valores de W e n valores de ξ a serem determinados, ou seja, há $2n$ incógnitas. Como, nesse sistema, há $(p+1)$ equações, então, uma solução sempre será possível quando $2n = p+1$. Portanto, a quadratura de Gauss integra exatamente um polinômio de grau p com n pontos de integração, sendo que

$$n = \frac{p+1}{2} \quad (\text{A.7})$$

A Tab. A.1, mostrada abaixo, é construída com o uso da Eq. (A.7).

Tabela A.1 – Pontos de integração.

Nº (n) de pontos de integração	Grau (p) do polinômio a ser integrado
1	1
2	3
3	5
4	7

Do sistema da Eq. (A.6), tem-se que

Para um ponto de integração ($n = 1 \Rightarrow p = 1$):

$$\begin{aligned} W_1 &= 2 \\ W_1 \xi_1 &= 0 \Rightarrow \xi_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

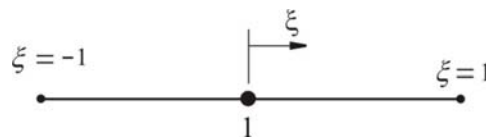


Figura A.1 – Um Ponto de Gauss.

Para dois pontos de integração ($n = 2 \Rightarrow p = 3$):

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= 2 \\ W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 &= 0 \\ W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 &= \frac{2}{3} \\ W_1 \xi_1^3 + W_2 \xi_2^3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

que formam um sistema não linear de equações, cuja solução é

$$\begin{aligned} W_1 &= W_2 = 1 \\ \xi_1 &= -\xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0,577350269189626 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

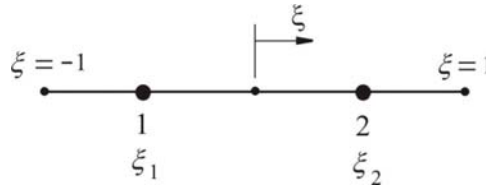


Figura A.2 – Dois Pontos de Gauss.

Para três pontos de integração ($n = 3 \Rightarrow p = 5$):

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 + W_3 &= 2 \\ W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + W_3 \xi_3 &= 0 \\ W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 + W_3 \xi_3^2 &= \frac{2}{3} \\ W_1 \xi_1^3 + W_2 \xi_2^3 + W_3 \xi_3^3 &= 0 \\ W_1 \xi_1^4 + W_2 \xi_2^4 + W_3 \xi_3^4 &= \frac{2}{5} \\ W_1 \xi_1^5 + W_2 \xi_2^5 + W_3 \xi_3^5 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A solução do sistema não linear das Eqs. (A.11) é

$$W_1 = W_3 = \frac{5}{9} = 0,555555555555556 \quad \text{e} \quad W_2 = \frac{8}{9} = 0,888888888888889$$

$$\xi_1 = -\xi_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}} = -0,774596669241483 \quad \text{e} \quad \xi_2 = 0 \quad (\text{A.12})$$

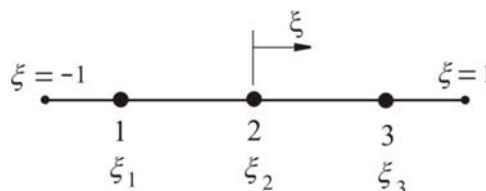


Figura A.3 – Três Pontos de Gauss.

Para quatro pontos de integração ($n = 4 \Rightarrow p = 7$):

$$\begin{aligned}
W_1 + W_2 + W_3 + W_4 &= 2 \\
W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + W_3 \xi_3 + W_4 \xi_4 &= 0 \\
W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 + W_3 \xi_3^2 + W_4 \xi_4^2 &= \frac{2}{3} \\
W_1 \xi_1^3 + W_2 \xi_2^3 + W_3 \xi_3^3 + W_4 \xi_4^3 &= 0 \\
W_1 \xi_1^4 + W_2 \xi_2^4 + W_3 \xi_3^4 + W_4 \xi_4^4 &= \frac{2}{5} \\
W_1 \xi_1^5 + W_2 \xi_2^5 + W_3 \xi_3^5 + W_4 \xi_4^5 &= 0 \\
W_1 \xi_1^6 + W_2 \xi_2^6 + W_3 \xi_3^6 + W_4 \xi_4^6 &= \frac{2}{7} \\
W_1 \xi_1^7 + W_2 \xi_2^7 + W_3 \xi_3^7 + W_4 \xi_4^7 &= 0
\end{aligned} \tag{A.13}$$

A solução do sistema não linear formado pelas Eqs. (A.13) é

$$\begin{aligned}
W_1 = W_2 &= 0,347854845137454 \\
W_3 = W_4 &= 0,652145154862546 \\
\xi_1 = -\xi_2 &= -0,861136311594053 \\
\xi_3 = -\xi_4 &= -0,339981043584856
\end{aligned} \tag{A.14}$$

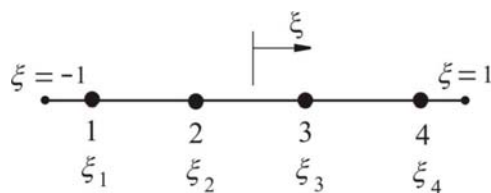


Figura A.4 – Quatro Pontos de Gauss.

O mesmo procedimento poderá ser utilizado para determinar as coordenadas naturais ξ_i e as respectivas ponderações W_i ($i = 1, \dots, n$) para outros valores de n .

A.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA EM DUAS DIMENSÕES

Para obter a integral

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\text{A.15})$$

por quadratura de Gauss, basta avaliar a integral interna fazendo η constante, isto é,

$$\int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi = \sum_{i=1}^n W_i G(\xi_i, \eta) = F(\eta) \quad (\text{A.16})$$

A integral externa é avaliada de maneira similar como

$$I = \int_{-1}^1 F(\eta) d\eta = \sum_{j=1}^n W_j F(\eta_j) = \sum_{j=1}^n W_j \sum_{i=1}^n W_i G(\xi_i, \eta_j)$$

ou seja,

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n W_j W_i G(\xi_i, \eta_j) \quad (\text{A.17})$$

Na expressão acima, o número de pontos de integração é o mesmo em cada direção. Isto, claramente, não é obrigatório. Em algumas situações pode ser vantagem usar números diferentes de pontos de integração em cada direção.

A Fig. A.5 mostra a posição dos quatro pontos de integração para a solução exata de integrais de polinômios até terceira ordem em cada direção.

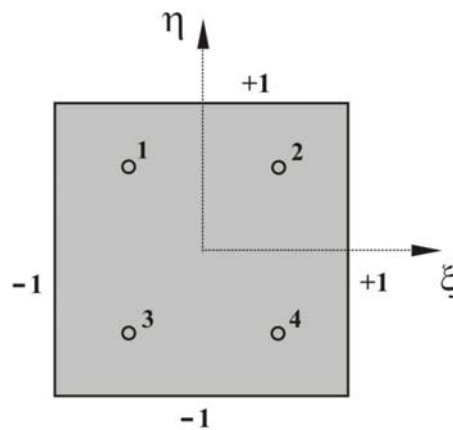


Figura A.5 – Quatro Pontos de Gauss.

Usando a enumeração dos pontos de Gauss como mostrado na Fig. A.5, as coordenadas naturais destes pontos são

$$\xi_1 = \xi_3 = -\xi_2 = -\xi_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \eta_1 = \eta_2 = -\eta_3 = -\eta_4 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$$

e os correspondentes pesos para $i = 1, \dots, 4$ são $W_i = 1 \times 1 = 1$.

A Fig. A.6 mostra a posição dos nove pontos de integração para a solução exata de integrais de polinômios até quinta ordem em cada direção.

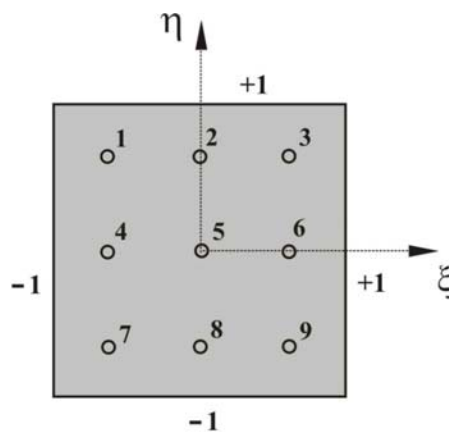


Figura A.6 – Nove Pontos de Gauss.

As coordenadas dos pontos de Gauss, enumerados conforme Fig. A.6 são

$$\xi_1 = \xi_4 = \xi_7 = -\xi_3 = -\xi_6 = -\xi_9 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \quad \text{e} \quad \xi_2 = \xi_5 = \xi_8 = 0$$

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = -\eta_7 = -\eta_8 = -\eta_9 = +\sqrt{\frac{3}{5}} \quad \text{e} \quad \eta_4 = \eta_5 = \eta_6 = 0$$

e os correspondentes pesos são

$$W_1 = W_3 = W_7 = W_9 = \left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{25}{81}$$

$$W_2 = W_4 = W_6 = W_8 = \left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{40}{81}$$

$$W_9 = \left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{64}{81}$$

A Fig. A.7 mostra a posição dos dezesseis pontos de integração para a solução exata de integrais de polinômios até sétima ordem em cada direção.

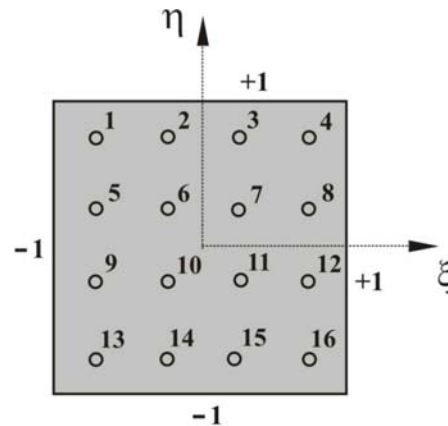


Figura A.7 – Dezesseis Pontos de Gauss.

Usando a enumeração dos pontos de Gauss como mostrado na Fig. A.7, as coordenadas naturais destes pontos são

$$\xi_1 = \xi_5 = \xi_9 = \xi_{13} = -\xi_4 = -\xi_8 = -\xi_{12} = -\xi_{16} = -0,86113631159053$$

$$\xi_2 = \xi_6 = \xi_{10} = \xi_{14} = -\xi_3 = -\xi_7 = -\xi_{11} = -\xi_{15} = -0,339981043584856$$

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = -\eta_{13} = -\eta_{14} = -\eta_{15} = -\eta_{16} = +0,86113631159053$$

$$\eta_5 = \eta_6 = \eta_7 = \eta_8 = -\eta_9 = -\eta_{10} = -\eta_{11} = -\eta_{12} = +0,339981043584856$$

e as correspondentes ponderações são

Para $i = 1, 4, 13, 16$:

$$W_i = 0,347854845137454 \times 0,347854845137454 = 0,121002993285601$$

Para $i = 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15$:

$$W_i = 0,347854845137454 \times 0,652145154862546 = 0,226851851851852$$

Para $i = 6, 7, 10, 11$:

$$W_i = 0,652145154862546 \times 0,652145154862546 = 0,425293303010694$$

Apêndice B

MÉTODO DE CHOLESKY

Neste apêndice, é apresentado um método de solução de sistemas de equações lineares que é bastante utilizado no método dos elementos finitos.

Na análise da estática, problemas de equilíbrio recaem na forma,

$$[K]\{X\} = \{F\} \quad (\text{B.1})$$

onde,

$[K]$ é a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas;

$\{F\}$ é o vetor independente;

$\{X\}$ é o vetor incógnita.

Há vários métodos disponíveis para resolver o sistema de equações da Eq. (B.1). Nos casos em que a matriz $[K]$ for simétrica e positiva definida, pode-se usar, por exemplo, o método de Cholesky

O método de Cholesky consiste em fazer,

$$[K] = [L][L]^T \quad (\text{B.2})$$

onde $[L]$ é uma matriz triangular superior ou inferior.

Levando a Eq. (B.2) na Eq. (B.1), tem-se que

$$[L][L]^T \{X\} = \{F\} \quad (\text{B.3})$$

Fazendo,

$$\{y\} = [L]^T \{X\} \quad (\text{B.4})$$

a Eq. (B.3) pode ser escrita como

$$[L]\{y\} = \{F\} \quad (\text{B.5})$$

Portanto, uma vez determinada a matriz $[L]$ através da Eq. (B.2), calcula-se o vetor $\{y\}$ usando a Eq. (B.5). O vetor incógnita $\{X\}$ será determinado utilizando a Eq. (B.4) com $\{y\}$ e $[L]$ conhecidos.

Agora, o método de Cholesky pode ser aplicado para resolver a Eq. (B.1). Para determinar o vetor $\{X\}$ da Eq. (B.1), devem ser conhecidos o vetor independente $\{F\}$ e a matriz $[K]$ simétrica e positiva definida.

Usando a Eq. (B.2) e adotando a matriz $[L]$ como sendo triangular inferior, tem-se que

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & \cdots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & \cdots & k_{3n} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & \cdots & k_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & k_{n4} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & L_{n4} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} & L_{41} & \cdots & L_{n1} \\ 0 & L_{22} & L_{32} & L_{42} & \cdots & L_{n2} \\ 0 & 0 & L_{33} & L_{43} & \cdots & L_{n3} \\ 0 & 0 & 0 & L_{44} & \cdots & L_{n4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}$$

onde n é a ordem do sistema.

Fazendo a multiplicação $[L][L]^T$ e identificando os elementos $k_{i,j}$ com $1 \leq j \leq n$ e $j \leq i \leq n$, vem que

Para $j = 1$:

$$\begin{aligned} k_{11} &= L_{11}^2 \\ k_{21} &= L_{11}L_{21} \\ k_{31} &= L_{11}L_{31} \\ k_{41} &= L_{11}L_{41} \\ &\vdots \\ k_{n1} &= L_{11}L_{n1} \end{aligned}$$

Para $j = 2$:

$$\begin{aligned} k_{22} &= L_{21}^2 + L_{22}^2 \\ k_{32} &= L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ k_{42} &= L_{21}L_{41} + L_{22}L_{42} \\ &\vdots \\ k_{n2} &= L_{21}L_{n1} + L_{22}L_{n2} \end{aligned}$$

Para $j = 3$:

$$\begin{aligned} k_{33} &= L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \\ k_{43} &= L_{31}L_{41} + L_{32}L_{42} + L_{33}L_{43} \\ &\vdots \\ k_{n3} &= L_{31}L_{n1} + L_{32}L_{n2} + L_{33}L_{n3} \end{aligned}$$

Para $j = 4$:

$$\begin{aligned} k_{44} &= L_{41}^2 + L_{42}^2 + L_{43}^2 + L_{44}^2 \\ &\vdots \\ k_{n4} &= L_{41}L_{n1} + L_{42}L_{n2} + L_{43}L_{n3} + L_{44}L_{n4} \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para $j = n$,

$$k_{44} = L_{n1}^2 + L_{n2}^2 + L_{n3}^2 + L_{n4}^2 + \cdots + L_{nn}^2$$

Portanto,

$$L_{11} = (k_{11})^{1/2}$$

$$L_{21} = k_{21} / L_{11}$$

$$L_{31} = k_{31} / L_{11}$$

$$L_{41} = k_{41} / L_{11}$$

⋮

$$L_{n1} = k_{n1} / L_{11}$$

$$L_{22} = (k_{22} - L_{21}^2)^{1/2}$$

$$L_{32} = (k_{32} - L_{21}L_{31}) / L_{22}$$

$$L_{42} = (k_{42} - L_{21}L_{41}) / L_{22}$$

⋮

$$L_{n2} = (k_{n2} - L_{21}L_{n1}) / L_{22}$$

$$L_{33} = (k_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2)^{1/2}$$

$$L_{43} = (k_{43} - L_{31}L_{41} - L_{32}L_{42}) / L_{33}$$

⋮

$$L_{n3} = (k_{n3} - L_{31}L_{n1} - L_{32}L_{n2}) / L_{33}$$

$$L_{44} = (k_{44} - L_{41}^2 - L_{42}^2 - L_{43}^2)^{1/2}$$

⋮

$$L_{n4} = (k_{n4} - L_{41}L_{n1} - L_{42}L_{n2} - L_{43}L_{n3}) / L_{44}$$

⋮

$$L_{nn} = (k_{nn} - L_{n1}^2 - L_{n2}^2 - L_{n3}^2 - L_{n4}^2 - \cdots - L_{n,n-1}^2)$$

O algoritmo para calcular a primeira coluna da matriz $[L]$ é

$$L_{11} = (k_{11})^{1/2}$$

e fazendo

$$2 \leq i \leq n, \text{ calcula-se } L_{i1} = k_{i1} / L_{11}$$

A partir da segunda coluna, o algoritmo é obtido fazendo $2 \leq i \leq n$ em

$$L_{ii} = \left(k_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^2 \right)^{1/2}. \text{ Se } i+1 \leq n, \text{ calcula-se também para } i+1 \leq j \leq n$$

$$L_{ji} = \left(k_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}L_{jk} \right) / L_{ii}$$

Usando, agora, a Eq. (B.5) tem-se que

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & L_{n4} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

então,

$$\begin{aligned} L_{11}y_1 &= f_1 \\ L_{21}y_1 + L_{22}y_2 &= f_2 \\ L_{31}y_1 + L_{32}y_2 + L_{33}y_3 &= f_3 \\ L_{41}y_1 + L_{42}y_2 + L_{43}y_3 + L_{44}y_4 &= f_4 \\ &\vdots \\ L_{n1}y_1 + L_{n2}y_2 + L_{n3}y_3 + L_{n4}y_4 + \cdots + L_{nn}y_n &= f_n \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1 / L_{11} \\ y_2 &= (f_2 - L_{21}y_1) / L_{22} \\ y_3 &= (f_3 - L_{31}y_1 - L_{32}y_2) / L_{33} \\ y_4 &= (f_4 - L_{41}y_1 - L_{42}y_2 - L_{43}y_3) / L_{44} \\ &\vdots \\ y_n &= (f_n - L_{n1}y_1 - L_{n2}y_2 - L_{n3}y_3 - L_{n4}y_4 - \cdots - L_{n,n-1}y_{n-1}) / L_{nn} \end{aligned}$$

O algoritmo para calcular o vetor $\{y\}$ é

$$y_1 = f_1 / L_{11}$$

e fazendo $2 \leq i \leq n$, determinar y_i em

$$y_i = \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} y_j \right) / L_{ii}$$

Aplicando, finalmente, a Eq. (B.4) vem que

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} & L_{41} & \cdots & L_{n1} \\ 0 & L_{22} & L_{32} & L_{42} & \cdots & L_{n2} \\ 0 & 0 & L_{33} & L_{43} & \cdots & L_{n3} \\ 0 & 0 & 0 & L_{44} & \cdots & L_{n4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{aligned} L_{11}x_1 + L_{21}x_2 + L_{31}x_3 + L_{41}x_4 + \cdots + L_{n1}x_n &= y_1 \\ L_{22}x_2 + L_{32}x_3 + L_{42}x_4 + \cdots + L_{n2}x_n &= y_2 \\ L_{33}x_3 + L_{43}x_4 + \cdots + L_{n3}x_n &= y_3 \\ L_{44}x_4 + \cdots + L_{n4}x_n &= y_4 \\ \vdots & \\ L_{nn}x_n &= y_n \end{aligned}$$

Portanto, fazendo a substituição pra trás, vem que

$$\begin{aligned} x_n &= y_n / L_{nn} \\ \vdots & \\ x_3 &= (y_3 - L_{43}x_4 - \cdots - L_{n3}x_n) / L_{33} \\ x_2 &= (y_2 - L_{32}x_3 - L_{42}x_4 - \cdots - L_{n2}x_n) / L_{22} \\ x_1 &= (y_1 - L_{21}x_2 - L_{31}x_3 - L_{41}x_4 - \cdots - L_{n1}x_n) / L_{11} \end{aligned}$$

O algoritmo para determinar o vetor incógnita $\{X\}$ é

$$x_n = y_n / L_{nn}$$

e fazendo

$n-1 \geq j \geq 1$, ou seja, j variando de $(n-1)$ a 1, com passo -1 , em

$$x_j = \left(y_j - \sum_{i=j+1}^n L_{ij} x_i \right) / L_{jj} \quad \text{e, por último, imprimir } x_i \text{ fazendo } 1 \leq i \leq n.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARCHER, J. S. (1963), “Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems”, *Proceeding ASCE, 89ST4*, pp. 161-178.

ARGYRIS, J. H. (1964), *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis*, Program Aeronautic Science, Pergamon Press, New York, Vol. 4.

BATHE, K. -J. (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1051 p.

BIRKHOFF, G., SCHULTZ, M. H., VARGA, R. S. (1968), “Piecewise Hermite Interpolation in One and Two Variables with Applications to Partial Differential Equations”, *Numerische Mathematik*, vol. 11, pp. 232-256.

CLOUGH, R. W. (1960), “The Finite Element in Plane Stress Analysis”, *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*, Pittsburgh, PA, pp. 345-378.

CONNOR, J. J., BREBBIA, C. A. (1976), *Finite Element Techniques for Fluid Flow*, Butterworth, London, 310 p.

COOK, R. D. (1995), *Finite Element Modeling for Stress Analysis*, John Wiley & Sons, Inc, New York, 320 p.

COURANT, R. (1943), “Variational Methods for the Solutions of Problems of Equilibrium and Vibrations”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 49, pp. 1-23.

- DAVIES, A. J. (1986)**, *The Finite Element Method: A First Approach*, Claredon Press, Oxford, 287 p.
- FOX, C. H. J., CHEN, X., MCWILLIAM, S. (2007)**, “Analysis of the Deflection of a Circular Plate with an Annular Piezoelectric Actuator”, *Sensors and Actuators*, vol. 133, Issue 1, pp. 180-194.
- GALLAGHER, R. H., PADLOG, J., BIJLAARD, P. P. (1962)**, “Stress Analysis of Heated Complex Shapes”, *Journal of the American Rocket Society*, vol. 312, pp. 700-707.
- GREENSTADT, J. (1959)**, “On the Reduction of Continuous Problems to Discrete Form”, *IBM Journal of Research and Development*, vol. 3, pp. 355-368.
- HONGYU, S., JIARANG, F. (2000)**, “Axisymmetric Bending for Thick Laminated Circular Plate Under a Concentrated Load”, *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 21, Issue 1, pp. 95-102.
- HRENNIKOFF, A. (1941)**, “Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 8, pp. 169-175.
- HUEBNER, K. H., THORNTON, E. A., BYROM, T. G. (1995)**, *The Finite Element Method for Engineers*, John Wiley & Sons, Inc, New York, 627 p.
- JONES, R. E. (1964)**, “A Generalization of the Direct Stiffness Method of Structural Analysis”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. 2, pp. 961.
- KELSEY, S. (1960)**, *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth, Reprinted from *Aircraft Engineering* 1954, vol. 5, 85 p.
- KOENIG, H. A., DAVIDS, N. (1969)**, “The Damped Transient Behaviour of Finite Beams and Plates”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 1, pp. 151-162.
- MARTIN, H. C. (1965)**, “On the derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems”, *Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, pp. 697-716.

- MCHENRY, D. (1943)**, “A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems”, *Journal Institute of Civil Engineering*, vol. 21, pp. 59-82.
- MELOSH, R. J. (1963)**, “Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. 1, pp. 1631-1637.
- ODEN, J. T. (1972)**, *Finite Elements of Non-Linear Continua*, McGraw-Hill, New York, 409 p.
- OLIVEIRA, W. C., VICENTE, W. M., MIYAZIMA, A. T. (2008)**, “Análise de Tensões em Placas Finas Circulares Usando Elementos Finitos Axissimétricos”, *Anais do XXIX CILAMCE*, Congresso Ibero Latino – Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, Maceió, vol. 1, ref. 198, pp. 751-757.
- OSADCHUK, V. A., SHELESTOVSKA, M. Y. (1999)**, “The Axisymmetric Problem of Determining the Residual Stresses in Thick Plates”, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 96, Issue 1, pp. 2897-2902.
- PATRICK, G. E. JR. (1966)**, “Computer Program for the Analysis of Axisymmetric Shell Structures under Axisymmetric Loading by the Finite Ring Method”, *US Army Missile Command Technical Report RS-TR-66-9*, Redstone Arsenal, Alabama.
- PENNY, R. K. (1961)**, “Symmetrical Bending of the General Shell of Revolution by Finite Difference Methods”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 3, pp. 369-377.
- PERCY, J. H., PIAN, T. H. H., KLEIN, S., NAVARATNA, D. R. (1965)**, “Application of Matrix Displacement Method to Linear Elastic Analysis of Shells of Revolution”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. 3, pp. 2138-2145.
- POLYA, G. (1952)**, “Sur une Interprétation de la Méthode des Différences Finies qui Peut Fournir des Bornes Supérieures ou Inférieures”, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, Paris, vol. 235, pp. 995-997.
- RADKOWSKI, P. P., DAVIS, R. M., BOLDUC, M. R. (1962)**, “Numeric Analysis of Equations of Thin Shells of Revolution”, *ARS Journal*, vol. 32, pp. 36-41.

- SANTOS, H., SOARES, C. M. M., SOARES, C. A. M., REDDY, J. N. (2008)**, “A Finite Element Model for the Analysis of 3D Axisymmetric Laminated Shells with Piezoelectric Sensors and Actuators: Bending and Free Vibrations”, *Journal Computers and Structure*, vol. 86, Issue 9, pp. 940-947.
- SMITH, M., FILZ, G. (2007)**, “Axisymmetric Numerical Modelling of a Unit Cell in Geosynthetic-Reinforced, Column-Supported Embankments”, *Geosynthetics International*, vol. 14, Issue 1, pp. 13-22.
- SMITH, T. A. (1966)**, “Analysis of Axisymmetric Shell Structures under Axisymmetric Loading by the Finite Element Method”, *US Army Missile Command Technical Report RS-TR-66-8*, Redstone Arsenal, Alabama.
- SMITH, T. A. (2008)**, “Analysis of Axisymmetric Shell Structures under Axisymmetric Loading by the Flexibility Method”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 318, Issue 3, pp. 428-460.
- SZABO, B. A., LEE, G. C. (1969)**, “Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin’s Method”, *International Journal Numerical Method Engineering*, vol. 1, pp. 301- 310.
- TIMOSHENKO, S. P., & GOODIER, J. N. (1970)**, *Theory of Elasticity*, 3 Tokyo, McGraw-Hill, 567 p.
- TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C., TOPP, L. T. (1956)**, “Stiffness and Deflections Analysis of Complex Structures”, *Journal of Aeronautic Science*, vol. 23, pp. 805-823.
- TURNER, M. J., DILL, E. H., MARTIN, H. C., MELOSH, R. J. (1960)**, “Large Deflections of Structures Subjected to Heating and External Loads”, *Journal of Aeronautic Science*, vol. 27, pp. 97-107.
- UGURAL. A. C. (1981)**, *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 317 p.

- UGURAL. A. C., FENSTER, S. K. (1995)**, *Advanced Strength and Applied Elasticity*, 3a. Upper Saddle River, N.J., 570 p.
- VICENTE, W. V. (2006)**, *Uma Análise de Tensões em Vigas em Regiões Próximas à Cargas Concentradas*, Trabalho Final de Graduação de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, UNIFEI, 81 p.
- WEINBERGER, H. F. (1956)**, “Upper and Lower Bounds for Eigenvalues by Finite Difference Methods”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 9, pp. 613-623.
- ZIENKIEWICZ, O. C., IRONS, B. M., NATH, B. (1966)**, “Natural Frequencies of Complex, Free or Submerged Structures by the Finite Element Method”, *Proceedings of Symposium Vibration in Civil Engineering*, Butterworth, pp. 83-93.
- ZIENKIEWICZ, O. C., LYNESS, J., OWEN, D. R. J. (1977)**, “Three-dimensional Magnetic Field Determination using a Scalar Potential – A Finite Element Solution”, *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG13, pp. 1649-1656.
- ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. (1989)**, *The Finite Element Method*, 4th. ed., McGraw-Hill Book Co., London, 648 p.
- ZIENKIEWICZ, O. C., WALTSON, M., KING, I. P. (1968)**, “A Numerical Method of Visco-Elastic Stress Analysis”, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 10, pp. 807-827.
- ZLAMAL, M. (1968)**, “On the Finite Element Method”, *Numerische Mathematik*, vol. 12, pp. 395-409.