

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Análise do Comportamento Dinâmico de uma  
Viga de Euler-Bernoulli Escalonada com  
Apoios Elasticamente Variáveis**

**Autora: Janaína da Cunha Vaz**

**Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior**

Itajubá, novembro de 2008

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Análise do Comportamento Dinâmico de uma  
Viga de Euler-Bernoulli Escalonada com  
Apoios Elasticamente Variáveis**

**Autora: Janaína da Cunha Vaz**

**Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior**

**Curso: Mestrado em Engenharia Mecânica**

**Área de Concentração: Projeto e Fabricação**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Itajubá, novembro de 2008

M.G. – Brasil

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Análise do Comportamento Dinâmico de uma  
Viga de Euler-Bernoulli Escalonada com  
Apoios Elasticamente Variáveis**

Autora: **Janaína da Cunha Vaz**

Orientador: **Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior**

Composição da Banca Examinadora:

**Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos - DPM/FEM/UNICAMP**

**Prof. Dr. José Célio Dias - IEM/UNIFEI**

**Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior, Presidente - IEM/UNIFEI**

## **Dedicatória**

*Aos meus pais Orlando e Silvania  
e ao meu noivo Rodrigo.*

## Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser feito sem a ajuda de diversas pessoas, às quais presto minha homenagem:

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior, cuja orientação e dedicação foram de fundamental importância.

Aos professores da UNIFEI: José Célio Dias, Marcos Theiss Neves e Marcos Aurélio de Souza, pela colaboração no desenvolvimento deste trabalho.

Aos funcionários do Laboratório do IEM da UNIFEI, João Carlos Fernandes, Luiz Fernando Rodrigues Alves, Wlamir Leandro O. Giffoni e Arley de Melo Rodrigues pelo valioso auxílio nos testes experimentais.

À Elaine, pela verdadeira amizade, pelo convívio que se tornou inesquecível e principalmente pela paciência, pois foi capaz de escutar nos momentos difíceis e dar bons conselhos na hora exata.

À Val, amiga desde a graduação. Bons tempos que não voltam mais.

À Badi e ao Sr. Orlando, que sempre me acolheram com muito amor em sua casa.

Ao meu noivo, Rodrigo, pelo carinho, pelas palavras de apoio e pelo importante incentivo acadêmico.

Aos meus pais, Orlando e Silvania, pois sempre acreditaram nos meus ideais.

A CAPES, pelo apoio financeiro através do programa de bolsas e a FAPMIG pelo projeto TEC 1670/05.

Ao Programa de Pós-Graduação pela oportunidade de realizar o meu mestrado.

*“Nenhum desenvolvimento tecnológico, por mais simples que seja,  
dispensa o estudo teórico dos seus fenômenos.”*

*Vicente Gentil.*

## Resumo

**VAZ, J. D. C. (2008)**, *Análise do Comportamento Dinâmico de uma Viga de Euler-Bernoulli Escalonada com Apoios Elasticamente Variáveis*, Itajubá, 113p. Dissertação (Mestrado em Projeto e Fabricação), Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Este trabalho apresenta uma metodologia baseada no modelo de viga de Euler-Bernoulli para determinar as frequências naturais e os modos de vibrar de vigas escalonadas com variações das seções transversais e variações das constantes de rigidez dos apoios elásticos. Inicialmente, apresentam-se resultados numéricos obtidos com um programa computacional desenvolvido pela autora. Esse programa considera vigas escalonadas em  $n$  partes, com diferentes apoios elásticos, constantes de rigidez e seções transversais, como retangular e circular. Posteriormente, a fim de verificar a eficácia dos modelos teórico e numérico propostos, realizam-se ensaios experimentais usando vigas de alumínio de seção circular e com uma condição de contorno do tipo livre-livre.

### ***Palavras-chave***

Viga Escalonada, Seção Variável, Apoio Elástico, Frequências Naturais, Modos de Vibrar.

## **Abstract**

**VAZ, J. D. C. (2008)**, *Analysis of the Dynamic Behavior of an Euler-Bernoulli Stepped Beam with Elastically Variable Supports*, Itajubá, 113p. MSc. Dissertation – Mechanical Engineering Institute, Federal University of Itajubá.

This work presents a methodology based in the Euler-Bernoulli beam to determine the natural frequencies and the mode shapes of stepped beams with variable cross-sections and elastic supports. First, numerical results are performed by using a computational program developed by the author. This computational program treats stepped beams with infinite step changes in the cross-section, different elastic supports and different cross-sections like rectangular and circular. After, experimental tests were carried out in aluminum beams with circular cross-section, with two step changes in the cross-section and with free-free boundary condition in order to check the efficiency of the proposed methodology.

### ***Keywords***

Stepped Beam, Variable Cross-Section, Elastic Support, Natural Frequencies, Mode Shapes.

# Sumário

<b>DEDICATÓRIA</b>	<b>4</b>
<b>AGRADECIMENTOS</b>	<b>5</b>
<b>RESUMO</b>	<b>7</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>8</b>
<b>SUMÁRIO</b>	<b>1</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>3</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>5</b>
<b>LISTA DE FOTOS</b>	<b>7</b>
<b>SIMBOLOGIA</b>	<b>I</b>
<b>LETRAS LATINAS</b>	<b>I</b>
<b>LETRAS GREGAS</b>	<b>II</b>
<b>SUBSCRITOS</b>	<b>III</b>
<b>ABREVIATURAS</b>	<b>III</b>
<b>SIGLAS</b>	<b>III</b>
<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Revisão da Literatura-----	3
1.2 Contribuição do Trabalho -----	7
1.3 Conteúdo-----	7
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>9</b>
<b>MODELO DE UMA VIGA ESCALONADA EM DUAS PARTES</b>	<b>9</b>
2.1 Análise Dinâmica de uma Viga Escalonada em Duas Partes Restrita Elasticamente em Uma Extremidade e Livre na Outra -----	9
2.2 Análise Dinâmica de uma Viga Escalonada em Duas Partes Restrita Elasticamente em Ambas as Extremidades-----	16
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>19</b>
<b>MODELO DE VIGA ESCALONADA EM INFINITAS PARTES</b>	<b>19</b>
3.1 Análise Dinâmica de uma Viga Escalonada em Infinitas Partes -----	19

<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>31</b>
<b>VALIDAÇÃO</b>	<b>31</b>
4.1 Comparando Frequencias de Vigas Escalonadas em Duas Partes Independente de sua Geometria-----	31
4.2 Comparando Frequencias de Vigas Escalonadas em até Quatro Partes para Diferentes Seções Transversais: Retangular ou Circular -----	33
4.3 Comparando Frequencias de Vigas Escalonadas com Vigas com Atuadores Piezelétricos Incorporados-----	41
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>44</b>
<b>EXPERIMENTO</b>	<b>44</b>
5.1 Análise Experimental -----	44
5.2 Descrição do Ensaio-----	45
5.3 Frequências Fundamentais -----	48
5.4 Espectro de Frequência -----	56
5.4.1 Viga Uniforme -----	56
5.4.2 Viga Escalonada-----	57
<b>CAPÍTULO 6</b>	<b>60</b>
<b>RESULTADOS</b>	<b>60</b>
6.1 Frequências Fundamentais Adimensionais de uma Viga Escalonada em Duas Partes -	60
6.2 Frequências Fundamentais Adimensionais de uma Viga Escalonada em Três Partes --	64
6.3 Modos de Vibrar -----	66
<b>CAPÍTULO 7</b>	<b>78</b>
<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b>	<b>78</b>
7.1 Conclusões-----	78
7.2 Perspectivas Futuras-----	79
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>80</b>
<b>APÊNDICE A</b>	<b>83</b>
<b>MODELO DE VIGA UNIFORME</b>	<b>83</b>
A.1 Equacionamento do Modelo de Viga de Euler-Bernoulli-----	84
<b>APÊNDICE B</b>	<b>92</b>
<b>INSTRUMENTAÇÃO</b>	<b>92</b>

## Lista de Figuras

Figura 2.1 – Viga escalonada em 2 partes e suportada elasticamente em uma extremidade---	11
Figura 2.2 – Viga escalonada em 2 partes e suportada elasticamente em ambas as extremidades -----	17
Figura 3.1 – Viga escalonada em $n$ partes-----	21
Figura 4.1 – Viga escalonada com três mudanças de seções de área,Naguleswaran(2002c)--	34
Figura 4.2 – Viga Tipo 1-----	35
Figura 4.3 – Viga Tipo 2-----	37
Figura 4.4 – Viga Tipo 3-----	39
Figura 4.5 – Viga com materiais piezelétricos incorporados, Maurini et al. (2006)-----	42
Figura 5.1 – Comportamento das três primeiras freqüências, $\hat{\beta}_{1,1}$ , $\hat{\beta}_{1,2}$ e $\hat{\beta}_{1,3}$ , de uma viga de Euler-Bernoulli comparada a uma viga de Timoshenko.-----	50
Figura 5.2 – Espectro de freqüência – viga uniforme, $\phi 30,044\text{ mm}$ -----	56
Figura 5.3 – Espectro de freqüência – viga uniforme, $\phi 20,002\text{ mm}$ -----	57
Figura 5.4 – Espectro de freqüência – viga escalonada – $1/2\text{ L} - \phi 14,996\text{ mm}$ e $1/2\text{ L} - \phi 20,005\text{ mm}$ -----	57
Figura 5.5 – Espectro de freqüência – viga escalonada – $2/3\text{ L} - \phi 14,967\text{ mm}$ e $1/3\text{ L} - \phi 20,007\text{ mm}$ -----	58
Figura 5.6 – Espectro de freqüência – viga escalonada – $1/3\text{ L} - \phi 9,941\text{ mm}$ , $1/3\text{ L} - \phi 14,976\text{ mm}$ e $1/3\text{ L} - \phi 20,008\text{ mm}$ -----	59
Figura 6.1 – Tipos clássicos de suportes elásticos-----	64
Figura 6.2 – 1º Modo de vibrar – viga contínua e escalonada-----	66
Figura 6.3 – 2º Modo de vibrar - viga contínua e escalonada-----	67
Figura 6.4– 3º Modo de vibrar - viga contínua e escalonada-----	68
Figura 6.5 – 1ºModo de vibrar - viga engastada em uma das extremidades ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e restrita elasticamente na outra-----	68
Figura 6.6 – 2º Modo de vibrar - viga engastada em uma das extremidades ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e restrita elasticamente na outra -----	69

Figura 6.7 – 3º Modo de vibrar - viga engastada em uma das extremidades ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e restrita elasticamente na outra -----	69
Figura 6.8– 1º Modo de vibrar – viga contínua com condição de contorno variável-----	70
Figura 6.9 – 1º Modo de vibrar – viga escalonada $I = 0,1$ com condição de contorno variável-----	71
Figura 6.10 – 1º Modo de vibrar – viga contínua-----	72
Figura 6.11 – 1º Modo de vibrar – viga escalonada $I = 0,1$ -----	72
Figura 6.12 – 1º Modo de vibrar – viga contínua -----	73
Figura 6.13 – 1º Modo de vibrar – viga escalonada $\bar{I}_1 = 0,1$ -----	73
Figura 6.14 – Viga engastada-livre ( $R_1 = T_1 = 0$ e $R_2 = T_2 = \infty$ ) escalonada em três partes– tipo 1: seção transversal retangular de altura constante-----	74
Figura 6.15 – Viga engastada-livre ( $R_1 = T_1 = 0$ e $R_2 = T_2 = \infty$ ) escalonada em três partes– tipo 2: seção transversal retangular de base constante-----	75
Figura 6.16 – Viga engastada-livre ( $R_1 = T_1 = 0$ e $R_2 = T_2 = \infty$ ) escalonada em três partes– tipo 3: seção transversal circular-----	75
Figura 6.17 – Viga livre-livre ( $R_1 = T_1 = R_2 = T_2 = \infty$ ) escalonada em três partes – tipo 3: seção transversal circular-----	76
Figura 6.18 – Viga engastada-deslizante ( $R_1 = T_1 = 0$ , $R_2 = 0$ e $T_2 = \infty$ .) escalonada em três partes – tipo 3: seção transversal circular-----	76
Figura 6.19 – Viga engastada-pinada ( $R_1 = T_1 = 0$ , $R_2 = \infty$ e $T_2 = 0$ ) escalonada em três partes – tipo 3: seção transversal circular-----	77
Figura A.1 – Viga uniforme engastada-----	86

## Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – 1ª Frequência natural – viga livre em uma das extremidades ( $R_2 = T_2 = \infty$ ) e apoiada elasticamente na outra, cujas relações de momentos de inércia são: $\bar{I}_1 = 0,1$ e $\bar{I}_2 = 0,5$ -----	32
Tabela 4.2 – 1ª Frequência natural – viga livre em uma das extremidades ( $R_2 = T_2 = \infty$ ) e apoiada elasticamente na outra, cujas relações de momentos de inércia são: $\bar{I}_1 = 1$ , $\bar{I}_2 = 5$ e $\bar{I}_3 = 10$ -----	33
Tabela 4.3 – Frequências naturais adimensionais de uma viga de seção retangular de altura constante com duas mudanças de seções-----	36
Tabela 4.4 – Frequências naturais adimensionais de uma viga de seção retangular de altura constante com três mudanças de seções-----	37
Tabela 4.5 – Frequências naturais adimensionais de uma viga de seção retangular de base constante com duas mudanças de seções-----	38
Tabela 4.6 – Frequências naturais adimensionais de uma viga de seção retangular de base constante com três mudanças de seções-----	39
Tabela 4.7 – Frequências naturais adimensionais de uma viga de seção circular com duas mudanças de seções-----	40
Tabela 4.8 – Frequências naturais adimensionais de uma viga de seção circular com três mudanças de seções-----	41
Tabela 4.9 – Dados geométricos da viga com materiais piezelétricos incorporados, Maurini et al. (2006)-----	43
Tabela 4.10 – Frequências naturais em (Hz) de uma viga com materiais piezelétricos incorporados-----	43
Tabela 5.1 – Desvio percentual entre frequências obtidas por meio de Euler e Timoshenko--	49
Tabela 5.2 – Desvio percentual entre valores experimentais e valores obtidos por meio dos modelos de viga, segundo Traill-Nash & Collar (1953)-----	50
Tabela 5.3 - Viga uniforme - $\phi$ 30,044 mm - Desvio (%) entre os valores experimentais e os valores teóricos da primeira, segunda e terceira frequência natural-----	53

Tabela 5.4 - Viga uniforme - $\phi$ 20,002 mm - Desvio (%) entre os valores experimentais e os valores teóricos da primeira, segunda e terceira frequência natural -----	53
Tabela 5.5 - Viga escalonada - $1/2 L - \phi$ 14,996 mm e $1/2 L - \phi$ 20,005 mm - Desvio (%) entre os valores experimentais e os valores teóricos da primeira, segunda e terceira frequência natural-----	54
Tabela 5.6 - Viga escalonada - $2/3 L - \phi$ 14,967 mm e $1/3 L - \phi$ 20,007 mm - Desvio (%) entre os valores experimentais e os valores teóricos da primeira, segunda e terceira frequência natural -----	54
Tabela 5.7 - Viga escalonada - $1/3 L - \phi$ 9,941 mm , $1/3 L - \phi$ 14,976 mm e $1/3L \phi$ 20,008 mm - Primeira frequência natural-----	55
Tabela 6.1 - 1ª Frequência natural - viga livre em uma das extremidades ( $R_2 = T_2 = \infty$ ) e restrita elasticamente na outra-----	61
Tabela 6.2 - 1ª Frequência natural - viga engastada em uma das extremidades ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e restrita elasticamente na outra-----	62
Tabela 6.3 - 1ª Frequência natural - viga restrita elasticamente nas extremidades -----	62
Tabela 6.4 - 1ª Frequência natural - viga engastada ( $R_1 = T_1 = 0$ ) em uma das extremidades e livre para rotação ( $R_1 = \infty$ ) na outra-----	63
Tabela 6.5 - Viga engastada em uma das extremidades ( $R_1 = T_1 = 0$ ), restrita elasticamente na outra e com a relação de comprimentos $\bar{L}_1 = 1/3$ -----	63
Tabela 6.6 - Viga escalonada em três partes - seção transversal tipo 1-----	65
Tabela 6.7 - Viga escalonada em três partes - seção transversal tipo 2-----	65
Tabela 6.8- Viga escalonada em três partes - seção transversal tipo 3-----	65

## Lista de Fotos

Foto 5.1 – Viga uniforme de alumínio: $\phi 30,044 \text{ mm}$ -----	45
Foto 5.2 – Viga uniforme de alumínio: $\phi 20,0024 \text{ mm}$ -----	46
Foto 5.3 – Viga escalonada de alumínio: 1/2 do comprimento $\phi 14,996 \text{ mm}$ e 1/2 do comprimento $\phi 20,0052 \text{ mm}$ -----	46
Foto 5.4 – Viga escalonada de alumínio: 2/3 do comprimento $\phi 14,9672 \text{ mm}$ e 1/3 do comprimento $\phi 20,0068 \text{ mm}$ -----	47
Foto 5.5 – Viga escalonada de alumínio: 1/3 do comprimento $\phi 9,9408 \text{ mm}$ , 1/3 do comprimento $\phi 14,9764 \text{ mm}$ e 1/3 do comprimento $\phi 20,0084 \text{ mm}$ -----	47
Foto 5.6 – Ensaio de flexão-----	51
Foto B.1 – Vista lateral do acelerômetro fixado na viga-----	92
Foto B.2 – Vista frontal do analisador de sinais-----	93
Foto B.3 – Medição do diâmetro da viga-----	94
Foto B.4 – Vista frontal da máquina para ensaio de flexão-----	94

## Simbologia

### Letras Latinas

$A$	área da seção transversal da viga modelo uniforme.	$m^2$
$a$	aceleração angular.	$rad/s^2$
$a$	aceleração linear.	$m/s^2$
$\{b\}$	vetor de incógnitas.	
$b$	base de uma viga de seção retangular.	$m$
$B$	constante de integração.	
$C$	co-seno.	
$CH$	co-seno hiperbólico.	
$c$	velocidade de propagação do som no meio sólido.	$m/s$
$D$	diâmetro da viga.	$m$
$d$	constante da equação temporal.	
$e$	distância entre os apoios de uma viga.	$m$
$E$	módulo de elasticidade transversal.	$GPa$
$f$	freqüência.	$Hz$
$q$	carga por unidade de comprimento da viga.	$N/m$
$F$	força.	$N$
$[H]$	matriz de coeficientes do sistema linear.	
$h$	altura da viga.	$m$
$\bar{I}$	relação de momentos de inércia de área de trechos adjacentes de uma viga escalonada.	
$I$	momento de inércia de área.	$m^4$
$L'_i$	comprimento dimensional dos trechos da viga escalonada.	$m$
$L_i$	Comprimento adimensional dos trechos da viga escalonada	
$L$	comprimento total da viga.	$m$
$\bar{L}$	relação de comprimentos de trechos adjacentes de uma viga escalonada.	

$M$	momento fletor.	Nm
$m$	massa.	kg
$n$	número de trechos da viga.	
$k_T$	constante de rigidez de translação.	N/m
$k_R$	constante de rigidez de rotação.	Nm
$r$	raio de giração.	m
$R$	constante adimensional inversamente proporcional a rigidez de rotação.	
$S$	seno.	
$SH$	seno hiperbólico.	
$T$	função do tempo.	
$T$	constante adimensional inversamente proporcional a rigidez de translação.	
$t$	tempo.	s
$V'$	volume.	m <sup>3</sup>
$V$	esforço cortante.	N
$v$	deflexão.	m
$X$	modo de vibrar.	
$x$	eixo coordenado cartesiano.	
$y$	eixo coordenado cartesiano.	
$z$	eixo coordenado cartesiano.	

## Letras Gregas

$\alpha$	relação entre momentos de inércia da viga escalonada.	
$\bar{\beta}$	relação de frequências naturais de trechos adjacentes de uma viga escalonada.	
$\beta_i$	frequência natural dimensional dos trechos da viga escalonada.	1/m
$\hat{\beta}_{1,k}$	frequência natural adimensional.	
$\beta_{1,k}$	frequência natural dimensional do primeiro trecho de uma viga escalonada.	1/m
$\rho$	massa específica.	kg/m <sup>3</sup>

$\partial$	operador de diferença parcial.	
$\omega$	velocidade angular.	rad/s
$\lambda$	índice de esbeltez.	
$\delta$	deflexão de uma viga.	m
$\phi$	diâmetro.	mm

## Subscritos

1	índice do primeiro trecho da viga.
2	índice do segundo trecho da viga.
$b_j$	Índice da constante de integração para uma viga com infinitos escalonamentos.
$i$	índice de uma viga escalonada em $n$ partes.
$k$	índice que indica a $k$ -ésima frequência natural.
$p$	índice dos parâmetros de uma viga escalonada em infinitas partes.
$x$	eixo cartesiano.
$y$	eixo cartesiano.
$z$	eixo cartesiano.

## Abreviaturas

EDO	Equação Diferencial Ordinária
GDL	Grau de Liberdade
MEF	Método dos Elementos Finitos.

## Siglas



## Capítulo 1

# INTRODUÇÃO

A análise da resistência dos materiais na área da mecânica dos sólidos é fundamental no dimensionamento de estruturas tanto na Engenharia Mecânica como na Engenharia Civil. A partir da análise estática, determinam-se tensões e deformações nas estruturas sob carregamento, incluindo seu próprio peso. Essas grandezas devem ficar numa faixa de valores permissíveis a fim de garantir a segurança e a funcionalidade das estruturas. Considerável esforço é despendido pelos engenheiros mecânicos e civis justamente para determinar os carregamentos a que estão sujeitas as estruturas por eles dimensionadas. Poucos são os casos em que soluções analíticas podem ser desenvolvidas nessa tarefa. Frequentes são os casos hiperestáticos e/ou com geometria variável, nos quais ferramentas numéricas são praticamente indispensáveis. O Método de Elementos Finitos, por exemplo, foi desenvolvido nesse contexto para a resolução de problemas complexos da mecânica estrutural, Rosa (1995).

Embora a análise estática seja a primeira a ser realizada, em muitos casos, ainda que necessária, ela não é suficiente para assegurar a integridade das estruturas. De fato, na prática, os carregamentos ou esforços costumam ser constituídos de uma parcela estática e outra dinâmica. Esses esforços variáveis ou flutuações induzem vibrações, que além de alterar o quadro geral de tensões e deformações causam ruídos, interferências em equipamentos ou máquinas apoiadas nessas estruturas, instabilidades de operação, aceleração no desgaste, redução na vida útil, etc. A resposta dinâmica de uma estrutura às excitações harmônicas depende, essencialmente, das propriedades como rigidez, massa e amortecimento que influenciam a frequência natural e o modo de vibrar. Essas propriedades, por sua vez,

resultam da geometria, materiais, condições de vinculação ao meio externo. Assim, há situações em que além da caracterização estática, os engenheiros devem investigar características vibratórias e possíveis respostas dinâmicas sob variadas condições de carregamento.

Em poucas palavras, pode-se definir resposta homogênea como aquela exibida por um sistema quando sujeito a uma vibração livre devido às condições iniciais diferentes de zero ou devido a uma excitação do tipo impulso. No campo das vibrações mecânicas, essa é sem dúvida a principal característica a ser investigada nos sistemas em estudo, pois dela se extrai as frequências, fatores de amortecimento e modos de vibrar. O modo de vibrar, por sua vez, refere-se ao aspecto geométrico “adimensional” da vibração livre, sendo importante para caracterizar as regiões nodais e os ventres que se formam no movimento vibratório.

Toda análise dinâmica, independente de seu grau de sofisticação, tem sua base no estudo do mais elementar modelo de sistema oscilatório, a saber, o sistema massa-mola de 1 grau de liberdade (GDL), cuja solução é a conhecida onda harmônica. Vibrações livres de sistemas de vários GDL em princípio podem ser dadas como superposição de sistemas harmônicos elementares, resultando daí a importância do modelo básico de 1 GDL. Desenvolvimento matemático análogo é realizado quando se levam em consideração dissipações naturais de energia mecânica (amortecimento) e forças externas (vibração forçada), Zhaohui (2004).

O caso particular simplificado que talvez seja o mais instrutivo para a compreensão de vibrações forçadas é o sistema massa-mola-amortecedor de 1 GDL sob a ação de uma força externa harmônica. A aplicação direta da mecânica Newtoniana conduz às equações diferenciais básicas para a análise desse movimento, cuja solução em regime permanente é na forma de uma onda harmônica com a mesma frequência angular da excitação externa, estando defasada em relação a esta de acordo com o nível de amortecimento. O ponto importante é que a amplitude do movimento resultante é inversamente proporcional à diferença entre a frequência natural do sistema e a frequência da excitação externa. Ou seja, frequências forçantes distantes da natural não induzem oscilações de grande amplitude, enquanto que frequências próximas podem levar a deslocamentos proibitivos, fenômeno este conhecido como ressonância. Posto isso, fica evidente a importância de bem identificar as frequências naturais nas estruturas reais da engenharia, para daí analisar aquelas que podem estar

próximas das induzidas pelos carregamentos externos, a fim de se evitar os fenômenos de ressonância.

Neste trabalho, a atenção será dada ao estudo do comportamento dinâmico de vigas de geometria variável. Esse interesse se justifica devido ao bom número de estruturas mecânicas que podem ser aproximadas como vigas escalonadas, entre as quais se citam: eixos e rotores de turbomáquinas, pás de turbinas, ventiladores e bombas, asas de aeronaves, pórticos, carcaças de algumas máquinas, etc. Daí o interesse em se levar em consideração as principais mudanças de seção, a fim de uma avaliação mais acurada das possíveis respostas dinâmicas.

De fato, para vigas de seção variável, ainda há espaço para diferentes tratamentos numéricos como o método dos elementos finitos, ainda que boa parte deles baseie-se no modelo teórico clássico de viga de Euler-Bernoulli.

O presente trabalho estuda o comportamento dinâmico de vigas contínuas e escalonadas com diferentes condições de apoios elásticos. As propriedades dessas vigas escalonadas têm sido investigadas por diversos autores devido a sua importância nos campos da engenharia mecânica estrutural e em estruturas ativas.

## 1.1 REVISÃO DA LITERATURA

A análise de vigas escalonadas tem sido objeto de estudo por diversos autores devido a sua importância na engenharia mecânica estrutural e no controle de estruturas ativas. Os modelos de vigas ditos complexos podem ser trabalhados por meio de uma técnica analítica, relativamente simples, como é o caso do modelo de viga de Euler-Bernoulli cujos resultados são bastante satisfatórios. Uns dos precursores do estudo dessa técnica foram Taleb e Suppiger (1961) que derivaram a equação da frequência de uma viga escalonada para casos clássicos de suportes e compararam a primeira frequência fundamental da literatura com a frequência obtida pelo método da função de Cauchy. Também em Heidebrecht (1967) encontra-se um método numérico para obter uma aproximação da primeira frequência natural. Levinson (1976) derivou a mesma equação da frequência obtida por Heidebrecht (1967), mas não apresentou nenhum resultado numérico. Ele concluiu que é possível estudar a vibração de

sistemas contínuos através de propriedades descontínuas em casos simples. Jang e Bert (1989) deduziram a equação da frequência de uma viga escalonada com condições clássicas de contorno, como uma equação diferencial de quarta ordem e um determinante que deve ser igualado a zero, já que se deseja obter uma solução não trivial de um sistema linear homogêneo.

Em Inman (2000), encontra-se com mais pormenores o equacionamento do modelo de viga de Euler-Beunoulli e suas frequências juntamente com aplicações em casos clássicos. Da literatura obtém-se a equação diferencial de quarta ordem que rege uma viga engastada-livre e as condições clássicas de contorno adotadas nesses casos. De posse dessas ferramentas, é possível trabalhar em casos mais complexos das quais não se encontram na literatura. Lima Jr e Arantes (2000) estudaram a influencia do índice de esbeltez nas frequências naturais obtidas a partir dos modelos de Euler-Bernoulli, Vlasov e Timoshenko.

A análise da vibração de vigas com apenas uma mudança de seção e restrita elasticamente em uma das extremidades encontra-se em Maurizi e Bellés (1993a). Esses autores obtiveram uma equação diferencial ordinária (EDO) de quarta ordem, da viga citada, usando o modelo de Euler-Bernoulli. Por meio da solução da equação homogênea e aplicando o método da separação de variáveis é possível obter o modo de vibrar de cada trecho de uma viga escalonada. As condições clássicas de contorno formam a chamada matriz dos coeficientes que compõe o sistema linear homogêneo da qual se obtém as frequências naturais. Maurizi e Bellés (1993a) apresentaram uma tabela com a primeira frequência natural adimensional para casos clássicos de uma viga suportada elasticamente em apenas uma das extremidades e livre na outra. Os parâmetros de rigidez de rotação e de translação variaram entre zero e infinito. Trabalho similar pode ser encontrado em Maurizi e Belés (1993b). Um caso semelhante é encontrado em Rosa (1994), pois o seu trabalho baseou-se em uma viga com uma mudança de seção, porém neste caso, trabalha-se com diferentes condições de apoios elásticos.

Posteriormente, Naguleswaran (2002a) considerou também um modelo de estrutura com apenas uma mudança de seção, mas com condições clássicas de suportes em ambas as extremidades. Do modelo relatado estudaram-se as três primeiras frequências naturais, a sensibilidade e os modos de vibrar para três tipos diferentes de seção transversal de área: a

primeira seção considerada é uma seção retangular de altura constante, a segunda é uma seção retangular de base constante e a terceira é uma seção circular.

Hong e Kim (1999) propõem um modelo de viga não uniforme suportado por dois sistemas massa-mola. Dessa estrutura obtém-se uma matriz dinâmica, que é o produto da inversa da matriz massa com a matriz de rigidez do sistema, por meio da teoria de viga de Timoshenko aplicando a transformação de Laplace. Um método de análise modal generalizado é também proposto e aplicado para a derivação da resposta em frequência e da resposta no tempo para qualquer estrutura do tipo viga em geral. Três exemplos são apresentados para validar e ilustrar a metodologia aplicada. No primeiro exemplo numérico é feito uma comparação entre o método proposto com o Método de Elementos Finitos (M.E.F.). No segundo exemplo apresentam-se três vigas escalonadas suportadas por sistemas massa-mola. O estudo numérico prova que a metodologia apresentada é bastante útil quando se dispõe a fazer análises dinâmicas desse tipo de estrutura apresentada.

A análise modal de vigas com materiais piezelétricos incorporados, apresenta-se em Maurini et al. (2006). O autor valida os resultados teóricos com os resultados obtidos pelo M.E.F. usando a teoria de Euler-Bernoulli. Os resultados numéricos são, também, comparados com os resultados experimentais.

A vibração livre de uma viga engastada com múltiplos escalonamentos é encontrado em Jaworski e Dowell (2008). Eles comparam resultados experimentais com resultados teóricos, sendo que esse último é obtido por meio da teoria de viga de Euler-Bernoulli, do método de Rayleigh-Ritz, além do M.E.F. através do programa comercial (ANSYS®). O M.E.F é também usado para investigar a viga de Timoshenko em um modelo de casca de duas dimensões e em um modelo de um sólido de três dimensões. Detecta-se uma pequena diferença na primeira frequência natural entre os resultados teóricos de viga com os resultados encontrados pelo M.E.F. e pelos dados experimentais.

Uma solução analítica para a resposta dinâmica de uma viga escalonada com uma mudança de seção é oferecida em Koplów et al. (2006). Realizam-se alguns testes experimentais em vigas do tipo livre-livre para comparar os resultados experimentais com os teóricos.

Vibrações transversais de uma viga uniforme de Euler-Bernoulli com massas concentradas são discutidas em Naguleswaran (2002b). O trabalho consiste de uma estrutura com  $n$  partes e carregada por  $n-1$  massas, das quais, duas dessas massas são adicionadas as extremidades. A técnica de autovalores desenvolvida para vigas clássicas com  $n$  sistemas de coordenadas possuem origens nas localizações de cada massa. As três primeiras frequências naturais de vigas (de 3 a 9 partes) com 16 combinações de condições clássicas de contorno são tabeladas e a qualidade dos resultados pode ser julgada por meio dos métodos apresentados.

Após estudar vigas com apenas uma mudança de seção Naguleswaran (2002c) vem propor um método analítico para calcular as frequências de uma viga, agora, com três mudanças de seções. São adotadas condições clássicas de suportes: engastada, pinada, deslizante e livre, bem como, condições gerais de apoio elástico. O trabalho apresenta um programa para calcular os elementos do determinante e um programa para avaliar as raízes desse determinante. Considerações especiais frequentemente encontrados em aplicações da engenharia são feitas para três tipos diferentes de seções transversais de vigas escalonadas: a primeira seção é do tipo retangular de altura constante, a segunda seção é retangular de base constante e a terceira é circular. As três primeiras frequências fundamentais de vigas com duas e três mudanças de seções são tabeladas por seletos parâmetros e 45 tipos diferentes de apoios elásticos. Os resultados tabelados podem ser usados para julgar as frequências calculadas somente por métodos numéricos. Seguindo a mesma linha de trabalho Naguleswaran (2003) vem por meio de um estudo um pouco mais aprofundado apresentar a vibração e a estabilidade de uma viga de Euler-Beurnoulli com três mudanças de seções sob a influencia de forças axiais.

A meta do trabalho de Dong et al. (2005) é investigar as características de vibração de uma viga de compósito laminado escalonado de Timoshenko. Eles determinam a deformação por cisalhamento, a rigidez de flexão e a rigidez de cisalhamento transversal de uma viga laminada. A fim de relatar os efeitos causados pela deformação de cisalhamento e inércia de rotação de uma estrutura escalonada, a teoria de viga de Timoshenko é, então, usada para deduzir a função resposta em frequência. Gráficos da frequência natural e dos modos de vibrar são apresentados ilustrando a influência que o parâmetro de localização exerce no comportamento dinâmico da viga.

Os sucessos obtidos com a aplicação de um método analítico relativamente simples e sem a utilização de malhas, como é caso do modelo de Euler-Bernoulli, sugerem que este possa ser estabelecido como uma ferramenta padrão na investigação de problemas gerais de vibração estrutural.

## 1.2 CONTRIBUIÇÃO DO TRABALHO

Baseado no modelo de Euler-Bernoulli, este trabalho tem como propósito apresentar uma metodologia para o cálculo das frequências naturais e os modos de vibrar de uma viga escalonada em infinitas partes, com apoios elásticos e de geometria variável. Também foi desenvolvido um programa computacional pela autora capaz de gerar as frequências naturais e os modos de vibrar dessa viga para diferentes tipos de seções transversais como retangular e circular.

## 1.3 CONTEÚDO

No capítulo 1, faz-se uma revisão dos trabalhos publicados na área de modelagem de vigas escalonadas e das ferramentas disponíveis na literatura para a análise dinâmica que fornecem a frequência natural e o modo de vibrar da estrutura.

No capítulo 2, faz-se um estudo inicial de vigas escalonadas em duas partes apoiadas elasticamente nas extremidades. São analisadas suas características mecânicas e dinâmicas, equacionamento de modelos simplificados, tais como, a obtenção da equação diferencial de quarta ordem, as condições de contorno e a matriz dos coeficientes.

No capítulo 3, faz-se um estudo sobre vigas escalonadas em  $n$  partes e apoiadas elasticamente nas extremidades. Neste capítulo procura-se mostrar todo o equacionamento e características importantes na obtenção das frequências fundamentais adimensionais de modelos mais complexos.

No capítulo 4, apresentam-se alguns resultados numéricos gerados pelo programa computacional desenvolvido pela autora. Os resultados obtidos são referentes a vigas escalonadas em duas e em três partes em condições variadas de apoios elásticos. Neste capítulo mostram-se alguns dos modos de vibrar e das frequências naturais mais relevantes dentro do contexto abordado.

No capítulo 5, a validação dos resultados numéricos é feita mediante vigas escalonadas em até quatro partes com diferentes seções de área: retangular ou circular. Além disso, comparam-se os resultados da autora com os resultados da literatura que utilizam vigas com materiais piezelétricos incorporados.

As conclusões da dissertação são apresentadas no capítulo 6, com comentários sobre alguns dos resultados teóricos e experimentais, além de sugestões para trabalhos futuros.

No Apêndice A, é mostrado com mais pormenor todo o equacionamento do modelo de vigas de Euler-Bernoulli, as considerações feitas para uma viga do tipo engastada-livre uniforme, além do procedimento usado para obter as frequências naturais e os modos de vibrar.

## Capítulo 2

# MODELO DE UMA VIGA ESCALONADA EM DUAS PARTES

Neste capítulo introduzem-se alguns conceitos básicos sobre a modelagem matemática e o equacionamento de vigas escalonadas em duas partes, elasticamente apoiada em uma ou em ambas as extremidades. Assim, elabora-se a análise de um modelo de viga com diferentes condições de contorno e diferentes relações de momentos de inércia de área das quais se obtém as frequências naturais e os modos de vibrar.

## 2.1 ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA ESCALONADA EM DUAS PARTES RESTRITA ELASTICAMENTE EM UMA EXTREMIDADE E LIVRE NA OUTRA

Vigas são elementos estruturais largamente utilizados na engenharia e resistem a esforços de flexão (momentos) e de cisalhamento. Elas são normalmente prismáticas e os carregamentos são aplicados perpendicularmente ao seu comprimento, eixo longitudinal.

As vigas podem ser classificadas de acordo com sua estaticidade e de acordo com suas vinculações. Com relação a estaticidade, elas podem ser divididas em isostáticas e hiperestáticas: a primeira é caracterizada por apresentar um número de equações igual ao número de variáveis, por outro lado, o segundo caso possui um número inferior ao número de variáveis. As vinculações clássicas são: engastada, livre, pinada e deslizante.

Alguns dos tipos de carregamentos mais freqüentes na engenharia estrutural são: carga concentrada, carga distribuída uniformemente, carga variando ao longo do comprimento de forma linear e carga variando de forma não-linear.

As vigas escalonadas apresentam variações nas seções transversais de área. As estruturas mecânicas ou civis classificadas como complexas e com diferentes seções de área podem, como primeira aproximação, serem idealizadas como vigas escalonadas, como já mencionadas no capítulo introdutório. O estudo das freqüências naturais e dos modos de vibrar de uma viga escalonada é abordado ao longo deste trabalho.

A seguir, apresentam-se o cálculo das freqüências naturais de uma viga escalonada e apoiada em, apenas, uma das extremidades.

A vibração livre de uma viga de Euler-Bernoulli escalonada em duas partes e com rigidez de flexão e translação, como mostra a Figura 2.1, é governada, como descrito no apêndice A, pela equação (2.1).

$$X_i^{iv}(x_i) - \left(\frac{\omega}{c_i}\right)^2 X_i(x_i) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

Definindo,

$$\beta_i^4 = \frac{\omega^2}{c_i^2} = \frac{\rho A_i \omega^2}{EI_i} \quad (2.2)$$

Onde:

$\beta_i$ : freqüência natural referente a cada trecho de uma viga escalonada.

$\omega$ : freqüência natural circular.

$\rho$ : massa específica.

$E$  : módulo de elasticidade longitudinal.

$I$  : momento de inércia.

$A$  : área da seção transversal.

A solução espacial da equação diferencial ordinária (2.1) para cada trecho da viga, é dada por:

$$X_1(x_1) = B_1 \sin \beta_1 x_1 + B_2 \cos \beta_1 x_1 + B_3 \sinh \beta_1 x_1 + B_4 \cosh \beta_1 x_1 \quad 0 \leq x_1 \leq L_1 \quad (2.3)$$

$$X_2(x_2) = B_5 \sin \beta_2 x_2 + B_6 \cos \beta_2 x_2 + B_7 \sinh \beta_2 x_2 + B_8 \cosh \beta_2 x_2 \quad 0 \leq x_2 \leq L_2 \quad (2.4)$$

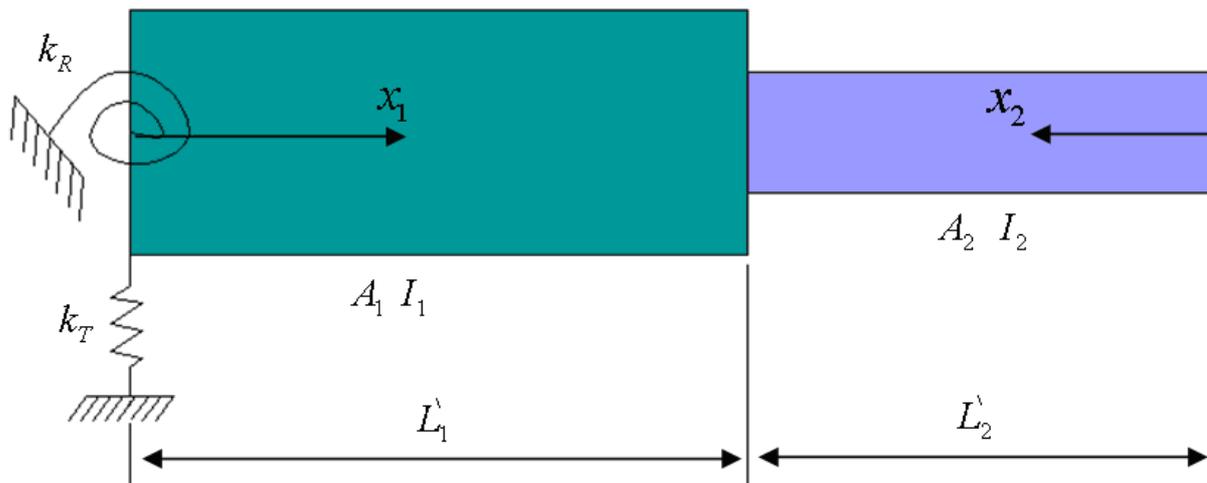


Figura 2.1 – Viga escalonada em 2 partes e suportada elasticamente em uma extremidade.

Com:

$k_{R1}$  e  $k_{T1}$  : constantes de rigidez de rotação e translação, respectivamente.

$A_1$  : área da seção transversal do primeiro trecho.

$A_2$  : área da seção transversal do segundo trecho.

$I_1$  : momento de inércia do primeiro trecho.

$I_2$  : momento de inércia do segundo trecho.

$L_1'$  : comprimento do primeiro trecho.

$L_2'$  : comprimento do segundo trecho.

O comprimento adimensional de cada trecho da viga é a relação entre o comprimento dimensional de cada trecho (metros) e o comprimento total da viga (metros).

$$L_i = \frac{L'_i}{L} \quad (2.5)$$

Onde:

$L'_i$  : comprimento dimensional dos trechos da viga (m).

$L$  : comprimento total da viga (m).

$L_i$  : comprimento adimensional dos trechos da viga.

As oito condições de contorno são apresentadas para uma viga apoiada elasticamente em uma extremidade e livre na outra. Vale ressaltar que os eixos  $x_1$  e  $x_2$  estudados aqui, possuem sentidos oposto, mas poderiam ser estudados com o mesmo sentido, já que o resultado final não se altera com o sentido de tais eixos.

Nas extremidades:

Em  $x_1 = 0$ ,

$$\text{Momento de flexão: } EI_1 \frac{d^2 X_1(x_1)}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} = k_{R1} \frac{dX_1(x_1)}{dx_1} \Big|_{x_1=0} \quad (2.6)$$

$$\text{Força de cisalhamento: } EI_1 \frac{d^3 X_1(x_1)}{dx_1^3} \Big|_{x_1=0} = -k_{T1} X_1(x_1) \Big|_{x_1=0} \quad (2.7)$$

Em  $x_2 = 0$ ,

$$\text{Momento de flexão: } EI_2 \frac{d^2 X_2(x_2)}{dx_2^2} \Big|_{x_2=0} = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{Força de cisalhamento: } EI_2 \frac{d^3 X_2(x_2)}{dx_2^3} \Big|_{x_2=0} = 0 \quad (2.9)$$

Na junção:

$$\text{Deflexão: } X_1(x_1)\Big|_{x_1=L_1} = X_2(x_2)\Big|_{x_2=L_2} \quad (2.10)$$

$$\text{Inclinação: } \frac{dX_1(x_1)}{dx_1}\Big|_{x_1=L_1} = -\frac{dX_2(x_2)}{dx_2}\Big|_{x_2=L_2} \quad (2.11)$$

$$\text{Momento de flexão: } I_1 \frac{d^2 X_1(x_1)}{dx_1^2}\Big|_{x_1=L_1} = I_2 \frac{d^2 X_2(x_2)}{dx_2^2}\Big|_{x_2=L_2} \quad (2.12)$$

$$\text{Força de cisalhamento: } I_1 \frac{d^3 X_1(x_1)}{dx_1^3}\Big|_{x_1=L_1} = -I_2 \frac{d^3 X_2(x_2)}{dx_2^3}\Big|_{x_2=L_2} \quad (2.13)$$

As oito condições de contorno, Equação (2.6) a (2.13), fornecem o sistema linear de equações homogêneas, representada pela matriz de coeficientes,  $[H]$ , e o vetor de incógnitas,  $\{b\}$ , cujos elementos são chamados de constante de integração.

$$\begin{bmatrix} 1 & R_1(\beta_1 L_1) & 1 & -R_1(\beta_1 L_1) & 0 & 0 \\ -T_1(\beta_1 L_1)^3 & 1 & T_1(\beta_1 L_1)^3 & 1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & SH_1 & CH_1 & -(S_2 + SH_2) & -(C_2 + CH_2) \\ C_1 & -S_1 & CH_1 & SH_1 & \bar{\beta}_1(C_2 + CH_2) & \bar{\beta}_1(-S_2 + SH_2) \\ -S_1 & -C_1 & SH_1 & CH_1 & -\bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1(-S_2 + SH_2) & -\bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1(-C_2 + CH_2) \\ -C_1 & S_1 & CH_1 & SH_1 & \bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1(-C_2 + CH_2) & \bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1(S_2 + SH_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Onde:

$$\begin{aligned} S_i &= \text{sen} \beta_i L_i \\ C_i &= \text{cos} \beta_i L_i \\ SH_i &= \text{senh} \beta_i L_i \\ CH_i &= \text{cosh} \beta_i L_i \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\bar{I}_1 = \frac{I_2}{I_1} \quad (2.16)$$

$$R_1 = \frac{EI_1}{k_{R1}L_1} \quad (2.17)$$

$$T_1 = \frac{EI_1}{k_{T1}L_1^3} \quad (2.18)$$

$$\bar{\beta}_1 = \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad (2.19)$$

Onde:

$\beta_1$ : frequência natural do primeiro trecho da viga escalonada.

$\beta_2$ : frequência natural do segundo trecho da viga escalonada.

$\bar{\beta}_1$ : relação das frequências naturais dos trechos adjacentes.

$\bar{I}_1$ : relação entre momentos de inércia de trechos adjacentes.

As oito equações obtidas pelas oito condições de contorno se reduzem a apenas seis equações e por isso obtém-se uma matriz de coeficientes da ordem  $6 \times 6$ . Isso se deve ao fato das constantes de integração,  $B_7$  e  $B_8$ , se igualarem as constantes,  $B_5$  e  $B_6$ , respectivamente, como apresentadas nas Equações (2.20) a (2.25).

Em  $x_2 = 0$ ,

Momento fletor:

$$EI_2 \left( -\text{sen}(\beta_2 x_2) B_5 - \cos(\beta_2 x_2) B_6 + \text{senh}(\beta_2 x_2) B_7 + \cosh(\beta_2 x_2) B_8 \right) = 0 \quad (2.20)$$

$$EI_2 \left( -\text{sen}(0) B_5 - \cos(0) B_6 + \text{senh}(0) B_7 + \cosh(0) B_8 \right) = 0 \quad (2.21)$$

$$EI_2 (-B_6 + B_8) = 0 \rightarrow B_6 = B_8 \quad (2.22)$$

Força de cisalhamento:

$$EI_2(-\cos(\beta_2 x_2)B_5 + \text{sen}(\beta_2 x_2)B_6 + \cosh(\beta_2 x_2)B_7 + \text{senh}(\beta_2 x_2)B_8) = 0 \quad (2.23)$$

$$EI_2(-\cos(0)B_5 + \text{sen}(0)B_6 + \cosh(0)B_7 + \text{senh}(0)B_8) = 0 \quad (2.24)$$

$$EI_2(-B_5 + B_7) = 0 \rightarrow B_5 = B_7 \quad (2.25)$$

O sistema linear homogêneo é representado pela Equação (2.20), onde  $[H]$  é a matriz dos coeficientes e  $\{b\}$  é o vetor de incógnitas. Para que esse sistema tenha uma solução não trivial é necessário que  $\{b\} \neq 0$ , o que implica que  $\det([H]) = 0$ .

$$[H]\{b\} = \{0\} \quad (2.26)$$

$$\det(H(\hat{\beta}_{1,k})) = 0 \quad (2.27)$$

A matriz  $[H]$  é uma função da frequência natural do trecho 1, que servirá como base para o cálculo das frequências dos demais trechos pelas Equações (2.28) a (2.30).

$$\bar{\beta}_i = \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \rightarrow \beta_{i+1} = \beta_i \bar{\beta}_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (2.28)$$

No cálculo do determinante da Equação (2.27) obtém-se a equação característica da qual é possível determinar  $k$  frequências naturais referentes à  $k$  modos de vibrar.

Como  $\beta_i$  pode assumir diferentes valores para diferentes modos de vibrar aplica-se a relação apresentada na Equação (2.29). Portanto teremos  $k$  diferentes frequências naturais para  $\beta_i$ .

$$\beta_{i,k} = \beta_i \Big|_{k\text{-ésima freq.}} \quad (2.29)$$

Onde:

$k$  :  $k$ -ésima frequência natural.

1: índice de  $\beta$  referente ao primeiro trecho da viga escalonada.

$\beta_{1,k}$ : k-ésima frequência natural dimensional do primeiro trecho da viga escalonada, ( $m^{-1}$ ).

$L$ : comprimento total da viga ( $m$ ).

$\hat{\beta}_{1,k}$ : k-ésima frequência natural adimensional do primeiro trecho da viga escalonada.

A frequência natural adimensional do trecho 1,  $\hat{\beta}_{1,k}$ , pode ser relacionada com a frequência natural dimensional do trecho 1,  $\beta_{1,k}$ , pela Equação (2.30).

$$\hat{\beta}_{1,k} = \beta_{1,k} L \quad (2.30)$$

Baseado na Equação (2.26) obtém-se os valores das frequências naturais representados por  $\hat{\beta}_{1,k}$ , que satisfazem o determinante da matriz  $[H]$ .

## 2.2 ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA ESCALONADA EM DUAS PARTES RESTRITA ELASTICAMENTE EM AMBAS AS EXTREMIDADES

Agora, apresentam-se os cálculos das frequências naturais de uma viga escalonada e apoiada em ambas as extremidades. Todo o equacionamento para esse tipo de viga é baseado nas mesmas condições apresentadas para uma viga escalonada em duas partes e apoiada elasticamente em apenas uma extremidade. Sendo assim, da Equação (2.1) a (2.2), tem-se:

$$X_1(x_1) = B_1 \text{sen} \beta_1 x_1 + B_2 \cos \beta_1 x_1 + B_3 \text{senh} \beta_1 x_1 + B_4 \cosh \beta_1 x_1 \quad 0 \leq x_1 \leq L_1 \quad (2.31)$$

$$X_2(x_2) = B_5 \text{sen} \beta_2 x_2 + B_6 \cos \beta_2 x_2 + B_7 \text{senh} \beta_2 x_2 + B_8 \cosh \beta_2 x_2 \quad 0 \leq x_2 \leq L_2 \quad (2.32)$$

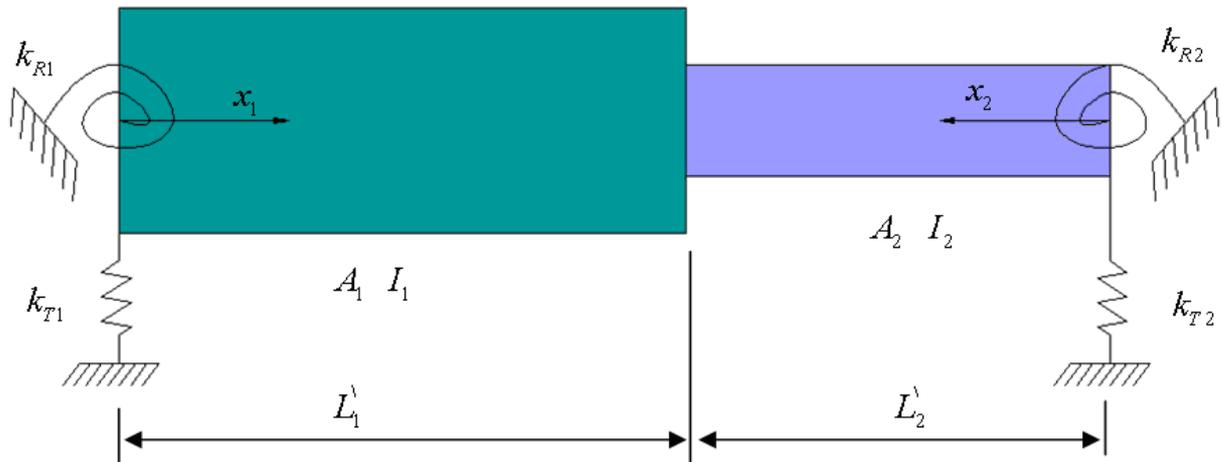


Figura 2.2 – Viga escalonada em 2 partes e suportada elasticamente em ambas as extremidades.

Com:

$k_{R1}$ ,  $k_{R2}$ ,  $k_{T1}$  e  $k_{T2}$  constantes de rigidez de rotação e translação, respectivamente.

As condições de contorno referentes à extremidade esquerda e a junção da viga da Figura 2.1 são iguais as da viga da Figura 2.2. Porém, a Figura 2.2 possui a extremidade direita com apoio elástico e as Equações (2.33) e (2.34) apresentam as condições de contorno para esse novo caso, o que possibilita a obtenção do sistema de equações lineares homogêneas, Equação (2.35).

➤ Extremidade direita, Figura 2.2:

Em  $x_2 = 0$ ,

$$\text{Momento de flexão: } EI_2 \left. \frac{d^2 X_2(x_2)}{dx_2^2} \right|_{x_2=0} = k_{R2} \left. \frac{dX_2(x_2)}{dx_2} \right|_{x_2=0} \quad (2.33)$$

$$\text{Força de cisalhamento: } EI_2 \left. \frac{d^3 X_2(x_2)}{dx_2^3} \right|_{x_2=0} = -k_{T2} X_2(x_2) \Big|_{x_2=0} \quad (2.34)$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & R_1\beta_1L_1 & 1 & -R_1\beta_1L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -T_1\beta_1^3L_1^3 & 1 & T_1\beta_1^3L_1^3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & R_2(\bar{\beta}_1\beta_1)L_2 & 1 & -R_2(\bar{\beta}_1\beta_1)L_2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -T_2(\bar{\beta}_1\beta_1)^3L_2^3 & 1 & T_2(\bar{\beta}_1\beta_1)^3L_2^3 & 1 \\
 S_1 & C_1 & SH_1 & CH_1 & -S_2 & -C_2 & -SH_2 & -CH_2 \\
 C_1 & -S_1 & CH_1 & SH_1 & \bar{\beta}_1C_2 & -\bar{\beta}_1S_2 & \bar{\beta}_1CH_2 & \bar{\beta}_1SH_2 \\
 -S_1 & -C_1 & SH_1 & CH_1 & \bar{\beta}_1^2\bar{I}_1S_2 & \bar{\beta}_1^2\bar{I}_1C_2 & -\bar{\beta}_1^2\bar{I}_1SH_2 & -\bar{\beta}_1^2\bar{I}_1CH_2 \\
 -C_1 & S_1 & CH_1 & SH_1 & -\bar{\beta}_1^3\bar{I}_1C_2 & \bar{\beta}_1^3\bar{I}_1S_2 & \bar{\beta}_1^3\bar{I}_1CH_2 & \bar{\beta}_1^3\bar{I}_1SH_2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4 \\
 B_5 \\
 B_6 \\
 B_7 \\
 B_8
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}$$

(2.35)

Onde:

$$R_2 = \frac{EI_2}{k_{R2}L_2}$$

$$T_2 = \frac{EI_2}{k_{T2}L_2^3}$$

(2.36)

## **Capítulo 3**

# **MODELO DE VIGA ESCALONADA EM INFINITAS PARTES**

Neste capítulo introduz-se a modelagem matemática de vigas escalonadas em infinitas partes seguindo o mesmo raciocínio do capítulo 2. Neste caso, será estudada uma viga elasticamente apoiada em uma ou em ambas as extremidades. Os eixos que direcionam os comprimentos dos diversos trechos da viga possuem um único sentido, diferentemente de outros casos apresentados em que o último trecho apresentava uma inversão no sentido do eixo. Assim elabora-se a análise de um modelo de viga com diferentes condições de contornos e diferentes relações de momentos de inércia da qual se analisa as frequências naturais e os modos de vibrações.

## **3.1 ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA ESCALONADA EM INFINITAS PARTES**

A partir do estudo da teoria de vigas podem-se identificar as frequências naturais e os modos de vibrações de uma viga escalonada e apoiada elasticamente.

O equacionamento de uma viga de Euler-Bernoulli, em vibração livre e sem escalonamento, é apresentado por (Inman, 2001). A partir desse modelo matemático que nos fornece uma base teórica introdutória para casos mais complexos inicia-se, então, o estudo de vigas do tipo escalonada em infinitas partes e com diferentes suportes elásticos nas extremidades, conforme Figura 3.1, onde  $n$  é o número de trechos da viga. No Apêndice A apresenta-se com mais detalhes todo o equacionamento da viga de Euler-Bernoulli e a linha de raciocínio utilizada para obter as equações que são mostradas neste capítulo.

A equação espacial da viga, é:

$$X_i^{iv}(x_i) - \left(\frac{\omega}{c_i}\right)^2 X_i(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

E definindo:

$$\beta_i^4 = \frac{\omega^2}{c_i^2} = \frac{\rho A_i \omega^2}{EI_i} \quad (3.2)$$

Com:  $\beta_i$  - frequência natural dimensional ( $m^{-1}$ ).

A solução espacial para cada trecho da viga obedece à equação.

$$X_i(x_i) = B_{b_1} \text{sen} \beta_i x_i + B_{b_2} \cos \beta_i x_i + B_{b_3} \text{senh} \beta_i x_i + B_{b_4} \cosh \beta_i x_i \quad 0 \leq x_i \leq L_i \quad (3.3)$$

com,

$i = 1, 2, \dots, n$  : número de trechos da viga.

Para determinar os índices  $b_j$  dos coeficientes  $B$  da Equação (3.3), define-se:

$$b_j = j + 4 \times (i - 1), \quad j = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (3.4)$$

Para determinar o índice dos coeficientes do  $n$ -ésimo trecho da viga, deve-se fazer:

$$i = n \text{ e } j = 1, \dots, 4 \quad (3.5)$$

e, substituindo a Equação (3.5) na Equação (3.4), tem-se:

$$b_j = j + 4 \times (n - 1) \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1 + 4 \times (n - 1) \\ b_2 = 2 + 4 \times (n - 1) \\ b_3 = 3 + 4 \times (n - 1) \\ b_4 = 4 + 4 \times (n - 1) \end{cases} \quad (3.6)$$

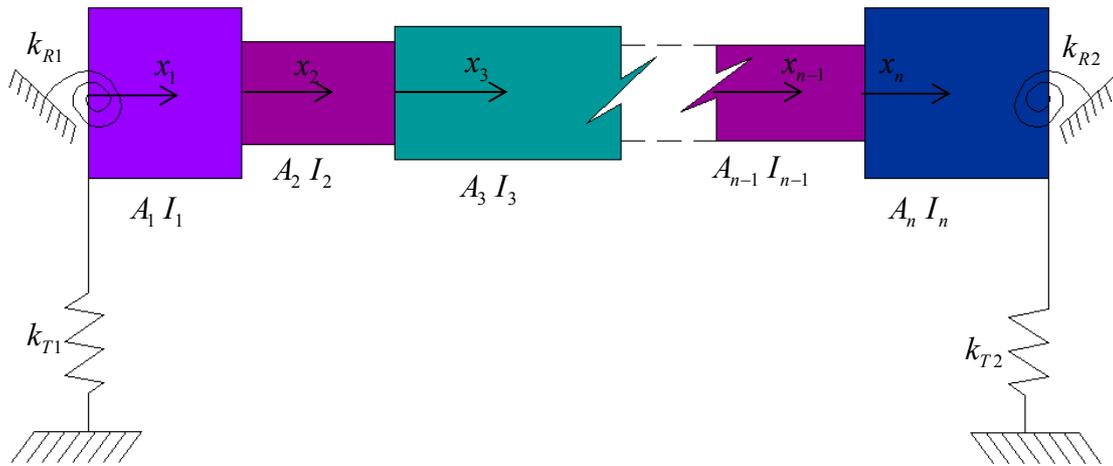


Figura 3.1 – Viga escalonada em  $n$  partes.

Onde:

$$0 \leq x_i \leq L_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$L_i$  : comprimento de cada trecho da viga.

$A_i$  : área da seção transversal.

$I_i$  : momento de inércia.

As oito condições de contorno para uma viga escalonada em  $n$  partes e com apoios elásticos, são:

- Nas extremidades:

Em  $x_1 = 0$ ,

Momento de flexão:

$$EI_1 \frac{d^2 X_1(x_1)}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} = k_{R1} \frac{dX_1(x_1)}{dx_1} \Big|_{x_1=0} \quad (3.7)$$

Força de cisalhamento:

$$EI_1 \frac{d^3 X_1(x_1)}{dx_1^3} \Big|_{x_1=0} = -k_{T1} X_1(x_1) \Big|_{x_1=0} \quad (3.8)$$

Em  $x_n = L_n$ ,

Momento de flexão:

$$EI_n \frac{d^2 X_n(x_n)}{dx_n^2} \Big|_{x_n=L_n} = k_{R2} \frac{dX_n(x_n)}{dx_n} \Big|_{x_n=L_n} \quad (3.9)$$

Força de cisalhamento:

$$EI_n \frac{d^3 X_n(x_n)}{dx_n^3} \Big|_{x_n=L_n} = -k_{T2} \frac{dX_n(x_n)}{dx_n} \Big|_{x_n=L_n} \quad (3.10)$$

- Nas junções:

Deflexão:

$$X_{p-1}(x_{p-1}) \Big|_{x_{p-1}=L_{p-1}} = X_p(x_p) \Big|_{x_p=0}, \quad p = 2, \dots, n \quad (3.11)$$

Inclinação:

$$\frac{dX_{p-1}(x_{p-1})}{dx_{p-1}} \Big|_{x_{p-1}=L_{p-1}} = - \frac{dX_p(x_p)}{dx_p} \Big|_{x_p=0} \quad (3.12)$$

Momento de flexão:

$$I_{p-1} \left. \frac{d^2 X_{p-1}(x_{p-1})}{dx_{p-1}^2} \right|_{x_{p-1}=L_{p-1}} = I_p \left. \frac{d^2 X_p(x_p)}{dx_p^2} \right|_{x_p=0} \quad (3.13)$$

Força de cisalhamento:

$$I_{p-1} \left. \frac{d^3 X_{p-1}(x_{p-1})}{dx_{p-1}^3} \right|_{x_{p-1}=L_{p-1}} = -I_p \left. \frac{d^3 X_p(x_p)}{dx_p^3} \right|_{x_p=0} \quad (3.14)$$

As constantes de integração,  $B_{b_j}$ , que compõem a Equação (3.3) formam o vetor de incógnitas de ordem  $4n$ . As oito condições de contorno, referentes às extremidades e as junções, nos fornecem um sistema linear de equações homogêneas que formam a chamada matriz de coeficientes. Para o caso de uma viga escalonada em “ $n$ ” partes, a matriz de coeficientes é da ordem  $4n \times 4n$ .

Na seqüência apresenta-se uma generalização da matriz de coeficientes  $[H]$  para uma viga escalonada em  $n$  partes.

- Das condições de contorno nas extremidades, têm-se:

1ª linha:

$$1 \quad R_1(\beta_1 L_1) \quad 1 \quad -R_1(\beta_1 L_1) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad (3.15)$$

2ª linha:

$$-T_1 \beta_1^3 L_1^3 \quad 1 \quad T_1 \beta_1^3 L_1^3 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad (3.16)$$

3ª linha:

$$-\left[ R_2(\beta_n L_n) S_n + C_n \right] \quad \left[ S_n - R_2(\bar{\beta}_{n-1} \beta_{n-1}) L_n C_n \right] \quad \left[ R_2(\bar{\beta}_{n-1} \beta_{n-1}) L_n S H_n - C H_n \right] \quad \left[ R_2(\bar{\beta}_{n-1} \beta_{n-1}) L_n C H_n - S H_n \right] \quad 0 \dots 0 \quad (3.17)$$

4ª linha:

$$\left[ -T_2(\bar{\beta}_{n-1}\beta_{n-1}L_n)^3 C_n + S_n \right] \left[ T_2(\bar{\beta}_{n-1}\beta_{n-1}L_n)^3 S_n + C_n \right] \left[ T_2(\bar{\beta}_{n-1}\beta_{n-1}L_n)^3 CH_n + SH_n \right] \left[ T_2(\bar{\beta}_{n-1}\beta_{n-1}L_n)^3 SH_n + CH_n \right] 0 \dots 0 \quad (3.18)$$

- Das condições de contorno nas junções da viga escalonada, têm-se:

5ª linha:

$$S_1 \quad C_1 \quad SH_1 \quad CH_1 \quad -S_1 \quad -C_1 \quad -SH_1 \quad -CH_1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad (3.19)$$

6ª linha:

$$C_1 \quad -S_1 \quad CH_1 \quad SH_1 \quad -\bar{\beta}_1 C_1 \quad -\bar{\beta}_1 S_1 \quad -\bar{\beta}_1 CH_1 \quad -\bar{\beta}_1 SH_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad (3.20)$$

7ª linha:

$$-S_1 \quad -C_1 \quad SH_1 \quad CH_1 \quad -\bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1 S_1 \quad \bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1 C_1 \quad -\bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1 SH_1 \quad -\bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1 CH_1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad (3.21)$$

8ª linha:

$$\vdots \quad -C_1 \quad S_1 \quad CH_1 \quad SH_1 \quad \bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1 C_1 \quad -\bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1 S_1 \quad -\bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1 CH_1 \quad -\bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1 SH_1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad (3.22)$$

(4n - 3)ª linha:

$$0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad S_{n-1} \quad C_{n-1} \quad SH_{n-1} \quad CH_{n-1} \quad -S_{n-1} \quad -C_{n-1} \quad -SH_{n-1} \quad -CH_{n-1} \quad (3.23)$$

(4n - 2)ª linha:

$$0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad C_{n-1} \quad -S_{n-1} \quad CH_{n-1} \quad SH_{n-1} \quad -\bar{\beta}_{n-1} C_{n-1} \quad -\bar{\beta}_{n-1} S_{n-1} \quad -\bar{\beta}_{n-1} CH_{n-1} \quad -\bar{\beta}_{n-1} SH_{n-1} \quad (3.24)$$

(4n - 1)ª linha:

$$0 \quad \dots \quad 0 \quad -S_{n-1} \quad -C_{n-1} \quad SH_{n-1} \quad CH_{n-1} \quad -\bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{I}_{n-1} S_{n-1} \quad \bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{I}_{n-1} C_{n-1} \quad -\bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{I}_{n-1} SH_{n-1} \quad -\bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{I}_{n-1} CH_{n-1} \quad (3.25)$$

$4n^a$  linha:

$$0 \quad \dots \quad 0 \quad -C_{n-1} \quad S_{n-1} \quad CH_{n-1} \quad SH_{n-1} \quad \bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{I}_{n-1} C_{n-1} \quad -\bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{I}_{n-1} S_{n-1} \quad -\bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{I}_{n-1} CH_{n-1} \quad -\bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{I}_{n-1} SH_{n-1} \quad (3.26)$$

Ou então,

$$\begin{bmatrix}
1 & R_1(\beta_1 L_1) & 1 & -R_1(\beta_1 L_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-T_1(\beta_1 L_1)^3 & 1 & T_1(\beta_1 L_1)^3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-(R_2(\beta_n L_n)S_n + C_n) & S_n - R_2(\beta_n L_n)C_n & R_2(\beta_n L_n)SH_n - CH_n & R_2(\beta_n L_n)CH_n - SH_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-T_2(\beta_n L_n)^3 C_n + S_n & T_2(\beta_n L_n)^3 S_n + C_n & T_2(\beta_n L_n)^3 CH_n + SH_n & T_2(\beta_n L_n)^3 SH_n + CH_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S_1 & C_1 & SH_1 & CH_1 & -S_1 & -C_1 & -SH_1 & -CH_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C_1 & -S_1 & CH_1 & SH_1 & -\bar{\beta}_1 & 0 & -\bar{\beta}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-S_1 & -C_1 & SH_1 & CH_1 & 0 & \bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1 & 0 & -\bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-C_1 & S_1 & CH_1 & SH_1 & \bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1 & 0 & -\bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & S_{n-1} & C_{n-1} & SH_{n-1} & CH_{n-1} & -S_{n-1} & -C_{n-1} & -SH_{n-1} & -CH_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-1} & -S_{n-1} & CH_{n-1} & SH_{n-1} & -\bar{\beta}_{n-1} & 0 & -\bar{\beta}_{n-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -S_{n-1} & -C_{n-1} & SH_{n-1} & CH_{n-1} & 0 & \bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{I}_{n-1} & 0 & -\bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{I}_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -C_{n-1} & S_{n-1} & CH_{n-1} & SH_{n-1} & \bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{I}_{n-1} & 0 & -\bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{I}_{n-1} & 0
\end{bmatrix}
\tag{3.27}$$

 $4n \times 4n$

$$\bar{\beta}_{p-1} = \frac{\beta_p}{\beta_{p-1}} ; \quad p = 2, \dots, n \quad (3.28)$$

$$\bar{I}_{p-1} = \frac{I_p}{I_{p-1}} \quad (3.29)$$

Com,

$\bar{\beta}_{p-1}$ : relação entre freqüências naturais de trechos adjacentes de uma viga escalonada,

$\beta_p$  e  $\beta_{p-1}$ : freqüências naturais dimensionais referentes aos trechos,  $p$  e  $p-1$ , da viga escalonada; ( $1/m$ ).

$\bar{I}_{p-1}$ : relação entre momentos de inércia adjacentes;

$I_p$  e  $I_{p-1}$ : momentos de inércia referentes aos trechos,  $p$  e  $p-1$ , da viga escalonada.

Antes de resolver o sistema de equações lineares, e para garantir que o determinante da matriz de coeficientes seja nulo, deve-se fazer uma busca de raízes encontrando-se,  $\hat{\beta}_{1,k}$ , que são as freqüências naturais adimensionais. Com a solução do sistema de equações lineares encontram-se os modos de vibrar da viga.

As vigas estudadas podem apresentar diferentes tipos de seções transversais de área, tais como, seção retangular de altura constante, seção retangular de base constante e seção circular. Portanto, quando se utiliza relações de momentos de inércia no desenvolvimento das equações das condições de contorno, devem-se levar em consideração as relações apresentadas a seguir.

➤ **Tipo 1:** seção retangular de altura constante.

$$h_{p-1} = h_p = h \quad p = 2, \dots, n. \quad (3.30)$$

$$\frac{A_p}{A_{p-1}} = \frac{b_p h_p}{b_{p-1} h_{p-1}} = \frac{b_p h}{b_{p-1} h} = \frac{b_p}{b_{p-1}} \quad (3.31)$$

$$\frac{A_p}{A_{p-1}} = \frac{b_p}{b_{p-1}} = \alpha_{p-1} \quad (3.32)$$

$$\frac{I_p}{I_{p-1}} = \frac{\frac{b_p h_p^3}{12}}{\frac{b_{p-1} h_{p-1}^3}{12}} = \frac{b_p h_p^3}{b_{p-1} h_{p-1}^3} = \frac{b_p}{b_{p-1}} \quad (3.33)$$

$$\frac{I_p}{I_{p-1}} = \alpha_{p-1} \quad (3.34)$$

No Apêndice A encontra-se o equacionamento e hipóteses feitas para obter a expressão da frequência natural representado por  $\beta_i$ .

$$\beta_i^4 = \frac{\rho A_i \omega^2}{EI_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.35)$$

$$\bar{\beta}_{p-1}^4 = \frac{\beta_p^4}{\beta_{p-1}^4} = \frac{\left( \frac{\rho A_p \omega^2}{EI_p} \right)^4}{\left( \frac{\rho A_{p-1} \omega^2}{EI_{p-1}} \right)^4} = \frac{A_p}{A_{p-1}} \times \frac{I_{p-1}}{I_p} = \alpha_{p-1} \times \frac{1}{\alpha_{p-1}} = 1 \quad (3.36)$$

$$\bar{\beta}_{p-1}^4 = 1 \quad (3.37)$$

➤ **Tipo 2:** seção retangular de base constante.

$$b_{p-1} = b_p = b \quad (3.38)$$

$$\frac{A_p}{A_{p-1}} = \frac{b_p h_p}{b_{p-1} h_{p-1}} = \frac{b h_p}{b h_{p-1}} = \frac{h_p}{h_{p-1}} \quad (3.39)$$

$$\frac{A_p}{A_{p-1}} = \frac{h_p}{h_{p-1}} = \alpha_{p-1} \quad (3.40)$$

$$\frac{I_p}{I_{p-1}} = \frac{\frac{b_p h_p^3}{12}}{\frac{b_{p-1} h_{p-1}^3}{12}} = \frac{b h_p^3}{b h_{p-1}^3} = \frac{h_p^3}{h_{p-1}^3} = \alpha_{p-1}^3 \quad (3.41)$$

$$\frac{I_p}{I_{p-1}} = \alpha_{p-1}^3 \quad (3.42)$$

$$\bar{\beta}_{p-1}^4 = \frac{\beta_p^4}{\beta_{p-1}^4} = \frac{\left(\frac{\rho A_p \omega^2}{EI_p}\right)^4}{\left(\frac{\rho A_{p-1} \omega^2}{EI_{p-1}}\right)^4} = \frac{A_p}{A_{p-1}} \times \frac{I_{p-1}}{I_p} = \alpha_{p-1} \times \frac{1}{\alpha_{p-1}^3} = \frac{1}{\alpha_{p-1}^2} \quad (3.43)$$

$$\bar{\beta}_{p-1}^4 = \frac{1}{\alpha_{p-1}^2} \quad (3.44)$$

➤ **Tipo 3:** seção circular.

$$\frac{A_p}{A_{p-1}} = \frac{\frac{\pi D_p^2}{4}}{\frac{\pi D_{p-1}^2}{4}} = \frac{D_p^2}{D_{p-1}^2} = \alpha_{p-1} \quad (3.45)$$

$$\frac{A_p}{A_{p-1}} = \alpha_{p-1} \quad (3.46)$$

$$\frac{I_p}{I_{p-1}} = \frac{\frac{\pi D_p^4}{64}}{\frac{\pi D_{p-1}^4}{64}} = \frac{D_p^4}{D_{p-1}^4} = \alpha_{p-1}^2 \quad (3.47)$$

$$\frac{I_p}{I_{p-1}} = \alpha_{p-1}^2 \quad (3.48)$$

$$\bar{\beta}_{p-1}^4 = \frac{\beta_p^4}{\beta_{p-1}^4} = \frac{\left(\frac{\rho A_p \omega^2}{EI_p}\right)^4}{\left(\frac{\rho A_{p-1} \omega^2}{EI_{p-1}}\right)^4} = \frac{A_p}{A_{p-1}} \times \frac{I_{p-1}}{I_p} = \alpha_{p-1} \times \frac{1}{\alpha_{p-1}^2} = \frac{1}{\alpha_{p-1}} \quad (3.49)$$

$$\bar{\beta}_{p-1}^4 = \frac{1}{\alpha_{p-1}} \quad (3.50)$$

## Capítulo 4

# VALIDAÇÃO

Este capítulo tem como objetivo validar os resultados obtidos pela autora, através do programa computacional desenvolvido com os resultados disponíveis na literatura.

### 4.1 COMPARANDO FREQUENCIAS DE VIGAS ESCALONADAS EM DUAS PARTES INDEPENDENTE DE SUA GEOMETRIA

O programa computacional elaborado pela autora permite que se obtenham as frequências naturais e os modos de vibrar de uma viga escalonada em  $n$  partes, com diferentes apoios elásticos e de geometria variável. Os parâmetros de entrada desse programa são: constante de rigidez, número de escalonamento, dimensão da seção transversal e o comprimento de cada trecho da viga escalonada. De posse desses dados o programa é capaz de gerar as frequências naturais e os modos de vibrar. Cada trecho da viga escalonada é separado por diferentes cores de acordo com os modos de vibrar.

Para fins de comparação, inicialmente, trabalha-se com uma viga escalonada em duas partes e com diferentes condições de apoios elásticos em apenas uma das extremidades, mantendo-se livre a outra extremidade. Esses resultados são comparados com os resultados apresentados por Maurizi e Belles (1993a). O modelo teórico de viga que se utiliza em Maurizi e Belles (1993a) é o modelo de viga de Euler-Bernoulli, o mesmo modelo utilizado pela autora.

A Tabela 4.1 e a Tabela 4.2 apresentam as primeiras freqüências fundamentais para uma viga com apenas uma mudança de seção. Essas freqüências naturais independem da geometria da viga, mas dependem da relação entre os momentos de inércia  $\bar{I}_1 = I_2 / I_1$ . Os diferentes apoios elásticos são representados por  $R$  e  $T$  pela facilidade de se trabalhar com constantes adimensionais. Essas constantes são inversamente proporcionais a rigidez de rotação e translação,  $k_R$  e  $k_T$ , respectivamente.

Tabela 4.1 – 1ª Freqüência natural – viga livre em uma das extremidades ( $R_2 = T_2 = \infty$ ) e apoiada elasticamente na outra para diferentes relações de momentos de inércia:  $\bar{I}_1 = 0,1$  e

$$\bar{I}_1 = 0,5.$$

$R_1 = T_1$	Autora		Marurizi	
	$\bar{I}_1 = 0,1$	$\bar{I}_1 = 0,5$	$\bar{I}_1 = 0,1$	$\bar{I}_1 = 0,5$
$\infty$	0	0	0	0
500	0,12125	0,09682	0,12125	0,09682
50	0,38278	0,30553	0,38278	0,30553
5	1,19003	0,94611	1,19003	0,94611
0,5	3,19308	2,49360	3,19308	2,49360
0,05	4,73087	3,76972	4,73087	3,76972
0,005	4,97010	4,01059	4,97010	4,01059
0	4,99750	4,03959	4,99750	4,03959

Tabela 4.2 – 1ª Freqüência natural – viga livre em uma das extremidades ( $R_2 = T_2 = \infty$ ) e apoiada elasticamente na outra, cujas relações de momentos de inércia são:  $\bar{I}_1 = 1$ ,

$$\bar{I}_1 = 5, \bar{I}_1 = 10.$$

$R_1 = T_1$	Autora			Marurizi		
	$\bar{I}_1 = 1$	$\bar{I}_1 = 5$	$\bar{I}_1 = 10$	$\bar{I}_1 = 1$	$\bar{I}_1 = 5$	$\bar{I}_1 = 10$
$\infty$	0	0	0	0	0	0
500	0,08564	0,61640	0,05280	0,08564	0,61640	0,05280
50	0,27019	0,19440	0,16649	0,27019	0,19440	0,16649
5	0,83520	0,59891	0,51243	0,83520	0,59891	0,51243
0,5	2,18019	1,53526	1,30649	2,18019	1,53526	1,30649
0,05	3,27873	2,27567	1,92740	3,27873	2,27567	1,92740
0,005	3,49034	2,41974	2,04815	3,49034	2,41974	2,04815
0	3,51605	2,43734	2,06292	3,51605	2,43734	2,06292

## 4.2 COMPARANDO FREQUENCIAS DE VIGAS ESCALONADAS EM ATÉ QUATRO PARTES PARA DIFERENTES SEÇÕES TRANSVERSAIS: RETANGULAR OU CIRCULAR

Em Naguleswaran (2002c) encontram-se as freqüências naturais de uma viga com até três mudanças de seções e com condições clássicas de suportes: engastada, apoiada, deslizante e livre, ver Figura 4.1. O modelo matemático da viga em questão foi desenvolvido usando a teoria de viga de Euler- Bernoulli.

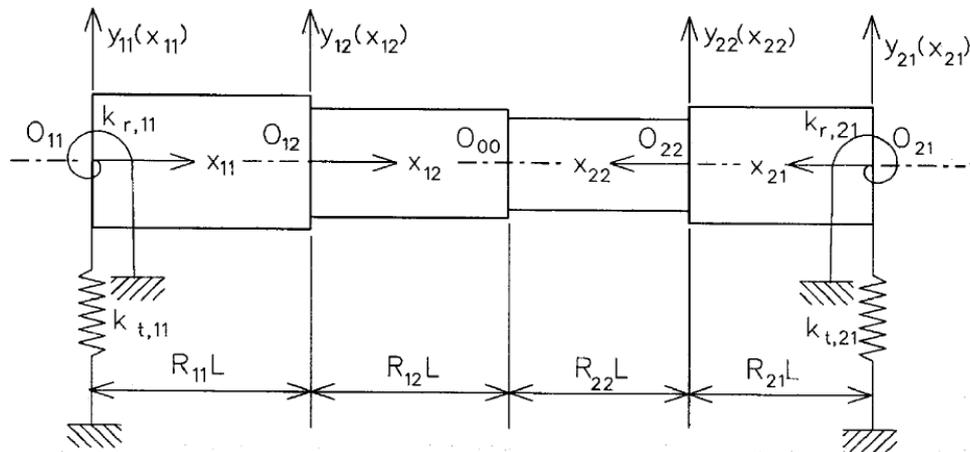


Figura 4.1 – Viga escalonada com três mudanças de seções de área, Naguleswaran (2002c).

Onde:

$x$ : deslocamento longitudinal de cada trecho da viga.

$y$ : deslocamento transversal de cada trecho.

$L$ : comprimento de cada trecho,  $0 \leq R \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq RL$

$O$ : origem dos eixos:  $x$  e  $y$ .

$k_r$ : constante de rigidez de rotação.

$k_t$ : constante de rigidez de translação.

A comparação é feita a partir de vigas escalonadas e com diferentes seções transversais de área: retangular ou circular. A Tabela 4.3 apresenta as três primeiras frequências naturais de uma viga de seção retangular de altura constante, a Tabela 4.4 apresenta as frequências de uma viga de seção retangular de base constante e a Tabela 4.5 de uma viga de seção circular.

As Tabelas, 4.3 a 4.8, apresentam os resultados gerados pela autora sob as mesmas condições de apoios e de geometria em que se encontram as vigas apresentadas por Naguleswaran (2002c). Vale ressaltar que a Tabela 4.3 a Tabela 4.8 referentes a uma viga com apenas duas mudanças de seções possuem como parâmetros de dimensão para o diâmetro de uma viga de seção circular e para vigas de seção retangular, os seguintes valores:  $1,0 m$  para o primeiro trecho,  $0,80 m$  para o segundo trecho e  $0,25 m$  para o terceiro trecho. Adotou-se também, os seguintes parâmetros de comprimentos de viga:  $0,25 m$  para o primeiro comprimento,  $0,3 m$  para o segundo comprimento e  $0,45 m$  para o terceiro comprimento. Nota-se que a soma de todos os comprimentos citados equivale a uma unidade, adimensionalizando os resultados.

As vigas com três mudanças de seções possuem como parâmetros de dimensão para o diâmetro de uma viga de seção circular e para vigas de seção retangular, os seguintes valores:  $1,0\ m$  para a primeira seção transversal da viga,  $0,80\ m$  para a segunda seção,  $0,65\ m$  para a terceira e  $0,25\ m$  para a quarta. Quanto aos comprimentos deste tipo de viga, adotou-se:  $0,25\ m$  para o primeiro comprimento,  $0,3\ m$  para o segundo comprimento,  $0,25\ m$  para o terceiro e  $0,2\ m$  para o quarto.

➤ **Tipo 1:** seção retangular de altura constante:  $h = \text{const.}$



Figura 4.2 – Viga Tipo 1

Onde:

h: altura da seção retangular da viga.

b: base da seção retangular da viga.

A Tabela 4.3 compara as três primeiras frequências fundamentais de uma viga com duas mudanças de seções de área e com condições clássicas de suportes.

Tabela 4.3 – Frequências naturais adimensionais de uma viga de seção retangular de altura constante com duas mudanças de seções.

$R_1$	$T_1$	$R_2$	$T_2$	Autora			Naguleswaran		
				$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$
0	0	0	0	4,59808	7,99230	10,93237	4,59808	7,99230	10,93237
0	0	$\infty$	0	3,98751	7,24824	10,05924	3,98751	7,24824	10,05924
0	0	0	$\infty$	2,80553	5,51936	8,64029	2,80553	5,51936	8,64029
0	0	$\infty$	$\infty$	4,46944	4,77619	7,97117	4,46944	4,77619	7,97117
$\infty$	0	0	0	3,62147	7,09001	10,26138	3,62147	7,09001	10,26138
$\infty$	0	$\infty$	0	2,96115	6,41646	9,33189	2,96115	6,41646	9,33189
$\infty$	0	0	$\infty$	1,48811	4,78826	7,74840	1,48811	4,78826	7,74840
$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	4,05865	7,08509	10,23726	4,05865	7,08509	10,23726
0	$\infty$	0	0	2,03991	5,31298	8,81343	2,03991	5,31298	8,81343
0	$\infty$	$\infty$	0	1,50205	4,67839	7,97006	1,50205	4,67839	7,97006
0	$\infty$	0	$\infty$	3,34398	6,16659	9,51709	3,34398	6,16659	9,51709
0	$\infty$	0	0	2,83322	5,42325	8,78487	2,83322	5,42325	8,78487
$\infty$	$\infty$	0	0	1,37382	4,29261	7,95961	1,37382	4,29261	7,95961
$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3,58748	7,20663	10,04428	3,58748	7,20663	10,04428
$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	2,02607	5,41145	8,61218	2,02607	5,41145	8,61218
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4,62514	7,93631	10,90617	4,62514	7,93631	10,90617

A Tabela 4.4 compara as três primeiras frequências fundamentais de uma viga, agora, com três mudanças de seções e com condições clássicas de suportes.

Tabela 4.4 – Frequências naturais adimensionais de uma viga de seção retangular de altura constante com três mudanças de seções.

$R_1$	$T_1$	$R_2$	$T_2$	Autora			Naguleswaran		
				$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$
0	0	0	0	4,54053	7,66031	10,80888	4,54053	7,66031	10,80888
0	0	$\infty$	0	3,97252	6,99941	10,15323	3,97252	6,99941	10,15323
0	0	0	$\infty$	2,57248	5,63072	8,76359	2,57248	5,63072	8,76359
0	0	$\infty$	$\infty$	2,28469	5,13316	8,08297	2,28469	5,13316	8,08297
$\infty$	0	0	0	3,63486	6,83813	10,01235	3,63486	6,83813	10,01235
$\infty$	0	$\infty$	0	3,09682	6,18383	9,34252	3,09682	6,18383	9,34252
$\infty$	0	0	$\infty$	1,48529	4,77480	7,96461	1,48529	4,77480	7,96461
$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	4,31315	7,33089	10,24003	4,31315	7,33089	10,24003
0	$\infty$	0	0	2,03566	5,25561	8,43005	2,03566	5,25561	8,43005
0	$\infty$	$\infty$	0	1,55612	4,64930	7,75729	1,55612	4,64930	7,75729
0	$\infty$	0	$\infty$	3,16859	6,38971	9,25222	3,16859	6,38971	9,25222
0	$\infty$	0	0	2,74426	5,85544	8,78862	2,74426	5,85544	8,78862
$\infty$	$\infty$	0	0	1,45296	4,35361	7,60522	1,45296	4,35361	7,60522
$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3,77438	6,93279	10,13313	3,77438	6,93279	10,13313
$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	2,07263	5,53861	8,72535	2,07263	5,53861	8,72535
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5,05064	8,03610	10,96791	5,05064	8,03610	10,96791

➤ **Tipo 2:** seção retangular de base constante:  $b = \text{const.}$

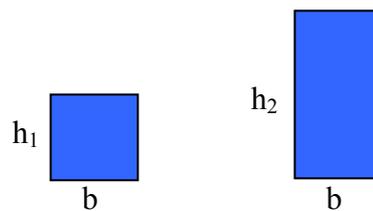


Figura 4.3 – Viga Tipo 2

A Tabela 4.5 compara as três primeiras frequências fundamentais de uma viga com duas mudanças de seções e com condições clássicas de suportes.

Tabela 4.5 – Frequências naturais adimensionais de uma viga de seção retangular de base constante com duas mudanças de seções.

$R_1$	$T_1$	$R_2$	$T_2$	Autora			Naguleswaran		
				$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$
0	0	0	0	3,37467	5,39027	7,57021	3,37467	5,39027	7,57021
0	0	$\infty$	0	3,09698	4,70076	7,20443	3,09698	4,70076	7,20443
0	0	0	$\infty$	2,27086	3,66693	6,06704	2,27086	3,66693	6,06704
0	0	$\infty$	$\infty$	1,91051	3,35379	5,36889	1,91051	3,35379	5,36889
$\infty$	0	0	0	2,09077	5,06333	6,71411	2,09077	5,06333	6,71411
$\infty$	0	$\infty$	0	1,64092	4,36785	6,40669	1,64092	4,36785	6,40669
$\infty$	0	0	$\infty$	0,76296	2,93223	5,63318	0,76296	2,93223	5,63318
$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	2,38127	5,03344	6,71429	2,38127	5,03344	6,71429
0	$\infty$	0	0	1,32653	3,92770	5,63374	1,32653	3,92770	5,63374
0	$\infty$	$\infty$	0	0,95097	3,57272	5,01493	0,95097	3,57272	5,01493
0	$\infty$	0	$\infty$	2,47944	4,20578	6,31552	2,47944	4,20578	6,31552
0	$\infty$	0	0	2,02204	3,90129	5,61926	2,02204	3,90129	5,61926
$\infty$	$\infty$	0	0	0,69135	2,37927	5,30588	0,69135	2,37927	5,30588
$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	1,92118	4,56113	7,11237	1,92118	4,56113	7,11237
$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	1,02788	3,13190	5,99566	1,02788	3,13190	5,99566
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2,58073	5,28004	7,47286	2,58073	5,28004	7,47286

A Tabela 4.6 compara as três primeiras frequências fundamentais de uma viga, agora, com três mudanças de seções e com condições clássicas de suportes.

Tabela 4.6 – Freqüências naturais adimensionais de uma viga de seção retangular de base constante com três mudanças de seções.

$R_1$	$T_1$	$R_2$	$T_2$	Autora			Naguleswaran		
				$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$
0	0	0	0	3,54196	5,81163	8,48186	3,54196	5,81163	8,48186
0	0	$\infty$	0	3,02686	5,42184	8,10835	3,02686	5,42184	8,10835
0	0	0	$\infty$	2,24864	4,67662	6,62451	2,24864	4,67662	6,62451
0	0	$\infty$	$\infty$	2,17847	4,23574	5,92195	2,17847	4,23574	5,92195
$\infty$	0	0	0	2,74595	5,10046	7,79273	2,74595	5,10046	7,79273
$\infty$	0	$\infty$	0	2,24074	4,63823	7,43284	2,24074	4,63823	7,43284
$\infty$	0	0	$\infty$	0,82263	3,93483	6,12866	0,82263	3,93483	6,12866
$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	3,66238	5,35976	7,77966	3,66238	5,35976	7,77966
0	$\infty$	0	0	1,57406	3,99328	6,44533	1,57406	3,99328	6,44533
0	$\infty$	$\infty$	0	1,31710	3,44878	6,08173	1,31710	3,44878	6,08173
0	$\infty$	0	$\infty$	2,67809	5,19487	7,09858	2,67809	5,19487	7,09858
0	$\infty$	0	0	2,56278	4,59567	6,48589	2,56278	4,59567	6,48589
$\infty$	$\infty$	0	0	0,76173	3,18169	5,65333	0,76173	3,18169	5,65333
$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	2,58284	5,23524	8,02344	2,58284	5,23524	8,02344
$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	1,12378	4,47901	6,52987	1,12378	4,47901	6,52987
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4,07605	5,79084	8,38432	4,07605	5,79084	8,38432

➤ **Tipo 3:** seção circular.

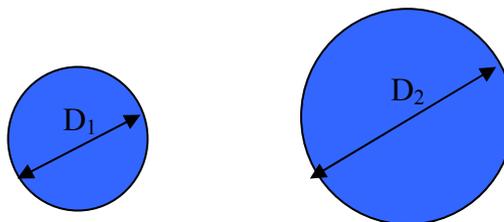


Figura 4.4 – Viga Tipo 3

Onde:

D: diâmetro.

A Tabela 4.7 compara as três primeiras frequências fundamentais de uma viga com duas mudanças de seções e com condições clássicas de suportes.

Tabela 4.7 – Frequências naturais adimensionais de uma viga de seção circular com duas mudanças de seções.

$R_1$	$T_1$	$R_2$	$T_2$	Autora			Naguleswaran		
				$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$
0	0	0	0	3,60940	5,32482	7,81534	3,60940	5,32482	7,81534
0	0	$\infty$	0	3,46095	4,55454	7,48658	3,46095	4,55454	7,48658
0	0	0	$\infty$	2,50056	3,73081	6,10024	2,50056	3,73081	6,10024
0	0	$\infty$	$\infty$	2,02880	3,59685	5,29414	2,02880	3,59685	5,29414
$\infty$	0	0	0	1,65176	5,17145	6,71526	1,65176	5,17145	6,71526
$\infty$	0	$\infty$	0	1,30967	4,36171	6,56606	1,30967	4,36171	6,56606
$\infty$	0	0	$\infty$	0,64063	2,75617	5,86510	0,64063	2,75617	5,86510
$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	2,21508	5,13500	6,71537	2,21508	5,13500	6,71537
0	$\infty$	0	0	1,01312	4,20848	5,45112	1,01312	4,20848	5,45112
0	$\infty$	$\infty$	0	0,72038	3,91144	4,82339	0,72038	3,91144	4,82339
0	$\infty$	0	$\infty$	2,57137	4,34916	6,20368	2,57137	4,34916	6,20368
0	$\infty$	0	0	2,06166	4,19033	5,42730	2,06166	4,19033	5,42730
$\infty$	$\infty$	0	0	0,49658	1,89189	5,26926	0,49658	1,89189	5,26926
$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	1,54446	4,43732	7,35818	1,54446	4,43732	7,35818
$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	0,84953	2,85446	6,05390	0,84953	2,85446	6,05390
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2,32137	5,23477	7,63563	2,32137	5,23477	7,63563

A Tabela 4.8 compara as três primeiras frequências fundamentais de uma viga, agora, com três mudanças de seções e com condições clássicas de suportes.

Tabela 4.8 – Freqüências naturais adimensionais de uma viga de seção circular com três mudanças de seções.

$R_1$	$T_1$	$R_2$	$T_2$	Autora			Naguleswaran		
				$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$
0	0	0	0	3,31284	5,73164	8,58414	3,31284	5,73164	8,58414
0	0	$\infty$	0	2,93302	5,53728	8,33686	2,93302	5,53728	8,33686
0	0	0	$\infty$	2,54342	5,00130	6,44322	2,54342	5,00130	6,44322
0	0	$\infty$	$\infty$	2,51010	4,44542	5,81961	2,51010	4,44542	5,81961
$\infty$	0	0	0	2,40348	4,86328	7,81806	2,40348	4,86328	7,81806
$\infty$	0	$\infty$	0	1,88817	4,61149	7,60874	1,88817	4,61149	7,60874
$\infty$	0	0	$\infty$	0,66734	4,21222	6,05005	0,66734	4,21222	6,05005
$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	3,96743	5,17952	7,80941	3,96743	5,17952	7,80941
0	$\infty$	0	0	1,41366	3,69092	6,39467	1,41366	3,69092	6,39467
0	$\infty$	$\infty$	0	1,12083	3,32455	6,20788	1,12083	3,32455	6,20788
0	$\infty$	0	$\infty$	2,93749	5,41830	6,86277	2,93749	5,41830	6,86277
0	$\infty$	0	0	2,87933	4,64564	6,42345	2,87933	4,64564	6,42345
$\infty$	$\infty$	0	0	0,55143	2,71900	5,44898	0,55143	2,71900	5,44898
$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	2,13937	5,22801	8,21372	2,13937	5,22801	8,21372
$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	0,88598	4,73198	6,32247	0,88598	4,73198	6,32247
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4,28630	5,59020	8,44836	4,28630	5,59020	8,44836

### 4.3 COMPARANDO FREQUENCIAS DE VIGAS ESCALONADAS COM VIGAS COM ATUADORES PIEZELÉTRICOS INCORPORADOS

Os sensores piezelétricos quando integrados a uma viga é capaz de detectar deformação estrutural. Esses sensores provocam descontinuidade e mudança nas propriedades da viga: adicionando massa, rigidez e novas propriedades elétricas. Os materiais cerâmicos podem ser

usados como sensores ou atuadores, pois apresentam como característica gerar tensão elétrica quando deformados e vice-versa.

Maurini et al. (2006) estudaram diversos métodos numéricos para fazer a análise dinâmica de uma viga submetida a ação de materiais piezelétricos e modelada pela teoria de viga de Euler-Bernoulli. Posto isto, foi apresentado uma tabela com as quatro primeiras freqüências naturais (em Hertz) de uma viga descontínua de alumínio com atuadores piezelétricos integrados, ver Figura 4.5.

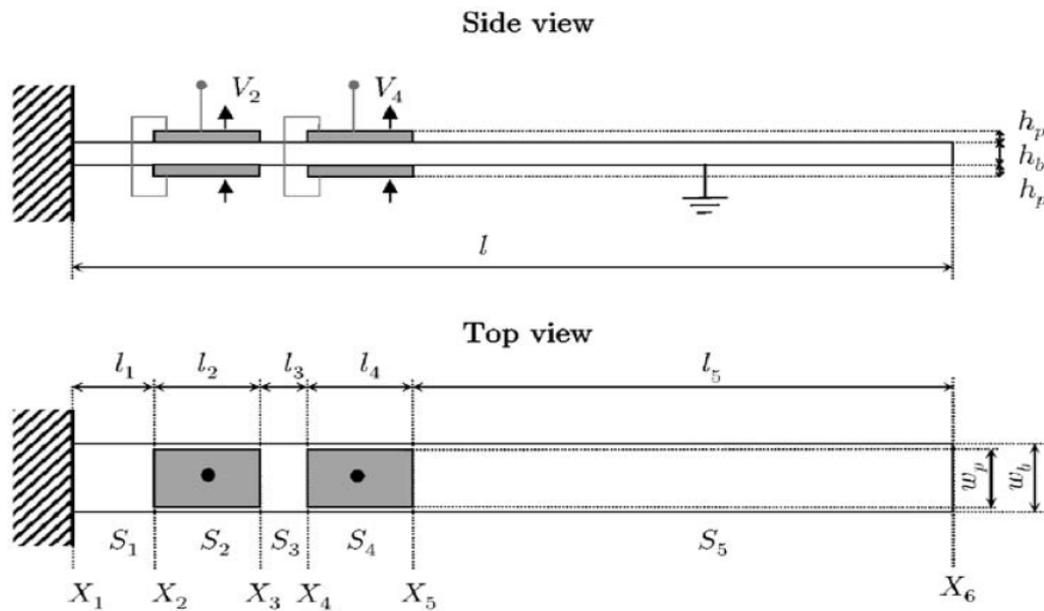


Figura 4.5 – Viga com materiais piezelétricos incorporados, Maurini et al. (2006).

Onde:

$l$ : comprimento de cada trecho.

$X$ : deslocamento transversal.

$V$ : voltagem.

$h$ : altura da viga.

$S$ : segmento.

$\omega$ : largura da viga.

$p$ : índice referente ao piezelétrico.

$b$ : índice referente à viga sem sensores.

A Tabela 4.9 apresenta informações sobre os dados geométricos da viga submetida à atuação dos piezelétricos, conforme a Figura 4.3.

Tabela 4.9 – Dados geométricos da viga sob a ação dos materiais piezelétricos, Maurini et al. (2006).

Dimensões (mm) da viga com materiais piezelétricos incorporados				
$l_1 = 5,0$	$l_2 = 36,5$	$l_3 = 6,0$	$l_4 = 36,5$	$l_5 = 117,0$
$l = 201,0$	$w_p = 17,6$	$w_b = 20,0$	$h_p = 0,267$	$h_p = 2,85$

Devido à descontinuidade da viga gerada pela atuação dos materiais cerâmicos é possível, como primeira aproximação, comparar as propriedades deste tipo de estrutura com relação às propriedades de uma viga escalonada pela simples mudança de seção. A validação teórica feita aqui é baseada em vigas com diferentes tipos de materiais, mas semelhantes nos parâmetros geométricos e nas condições de apoios elásticos, o que confere a ambas as vigas semelhança também nas frequências naturais, conforme Tabela 4.10.

Tabela 4.10 – Frequências naturais em (Hz) de uma viga com materiais piezelétricos incorporados.

	$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$f_3$ (Hz)	$f_4$ (Hz)
Maurini et al. (2006)	66,69	363,59	1001,24	1954,99
Autora	66,43	370,11	1023,9	1994,7
Desvio	0,39%	1,76%	2,21%	1,99%

## Capítulo 5

# EXPERIMENTO

### 5.1 ANÁLISE EXPERIMENTAL

A parte experimental do presente trabalho foi realizada no Laboratório de Vibrações Mecânica do IEM da Unifei. A finalidade dessa etapa consiste em levantar experimentalmente as propriedades do sistema dinâmico em estudo buscando medir as frequências fundamentais de vigas uniformes e escalonadas a fim de comparar as frequências (teórica) com as frequências medidas nos ensaios. Assim, realizaram-se cinco ensaios diferentes, com cinco tipos de estruturas, a fim de variar consideravelmente os parâmetros de teste e verificar a robustez dos resultados numéricos.

Foram ensaiadas cinco vigas de alumínio de extremidades livres com comprimento médio de  $321,22\text{ mm}$ , das quais duas são vigas uniformes com diâmetros  $\phi\ 30,044\text{ mm}$  e  $\phi\ 20,002\text{ mm}$ . As demais vigas são escalonadas: a primeira possui metade do comprimento com  $\phi\ 14,996\text{ mm}$  e a outra metade com  $\phi\ 20,005\text{ mm}$ ; a segunda possui  $2/3$  do comprimento com  $\phi\ 14,967\text{ mm}$  e  $1/3$  do comprimento com  $\phi\ 20,007\text{ mm}$ ; e a terceira possui  $1/3$  do comprimento com  $\phi\ 9,941\text{ mm}$ , outro terço com  $\phi\ 14,976\text{ mm}$  e o final com  $\phi\ 20,008\text{ mm}$ . Os valores dos diâmetros apresentados foram medidos com um micrômetro analógico e referem-se às médias de algumas medições.

Na aquisição dos sinais utilizou-se um acelerômetro e um analisador de sinais. Inicialmente, a estrutura é colocada em vibração livre por meio de uma força impulsiva. Em seguida, o sinal fornecido pelo acelerômetro, adequadamente posicionado na viga, é armazenado no analisador de sinais.

## 5.2 DESCRIÇÃO DO ENSAIO

Inicialmente, fez-se o ensaio de uma viga de alumínio, uniforme, com  $321,22 \text{ mm}$  de comprimento e com  $30,044 \text{ mm}$  de diâmetro. A viga é fixada ao teto por meio de elásticos, amarrados nas extremidades, simulando uma viga livre no espaço, conforme Foto 5.1. A estrutura é colocada em oscilação mediante a aplicação de um impulso usando um martelo instrumentado com o intuito de obter as frequências fundamentais em Hz. O sinal captado pelo acelerômetro, fixado à estrutura vibrante, é transmitido ao analisador de sinais. O analisador é capaz de receber e armazenar um número bastante grande de sinais do acelerômetro em curtos intervalos de tempo, permitindo a obtenção dos gráficos: resposta no tempo e espectro de frequência.

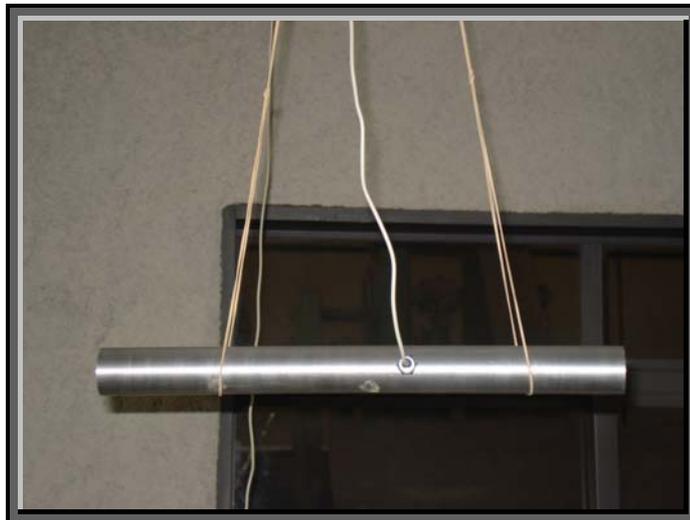


Foto 5.1 – Viga uniforme de alumínio:  $\phi 30,044 \text{ mm}$  .

Neste primeiro ensaio, aplicaram-se cinco diferentes forças impulsivas e adotou-se aquela que foi capaz de gerar os resultados mais satisfatórios. A partir daí, gerou-se um gráfico da resposta no tempo e outro do espectro de frequência.

O segundo ensaio foi realizado usando uma viga de alumínio, uniforme, agora, com  $321,22 \text{ mm}$  de comprimento e com  $20,002 \text{ mm}$  de diâmetro, conforme Foto 5.2. Procedeu-se da mesma maneira que a viga de diâmetro  $\phi 30,044 \text{ mm}$  para que de posse dos dados fosse possível fazer uma primeira aproximação dos parâmetros dinâmicos da viga.



Foto 5.2 – Viga uniforme de alumínio:  $\phi 20,0024 \text{ mm}$ .

Posteriormente, realizaram-se os três últimos ensaios referentes as vigas escalonadas de alumínio. O procedimento destes ensaios é semelhante ao primeiro teste como se apresenta em: Foto 5.3, Foto 5.4 e Foto 5.5.

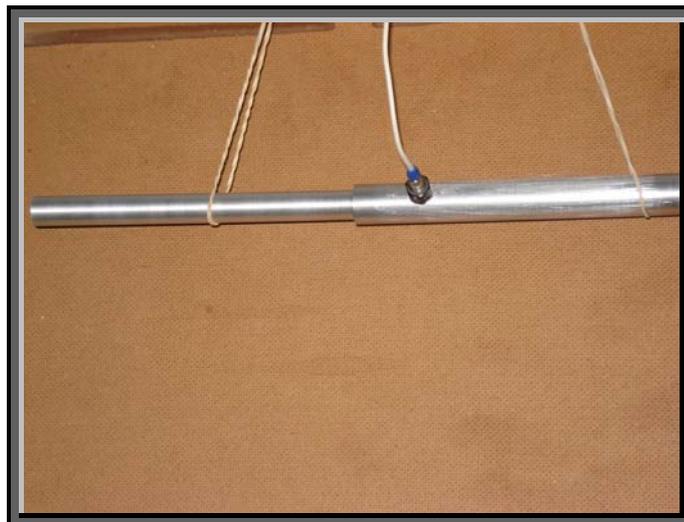


Foto 5.3 – Viga escalonada de alumínio:  $1/2$  do comprimento  $\phi 14,996 \text{ mm}$  e  $1/2$  do comprimento  $\phi 20,0052 \text{ mm}$ .

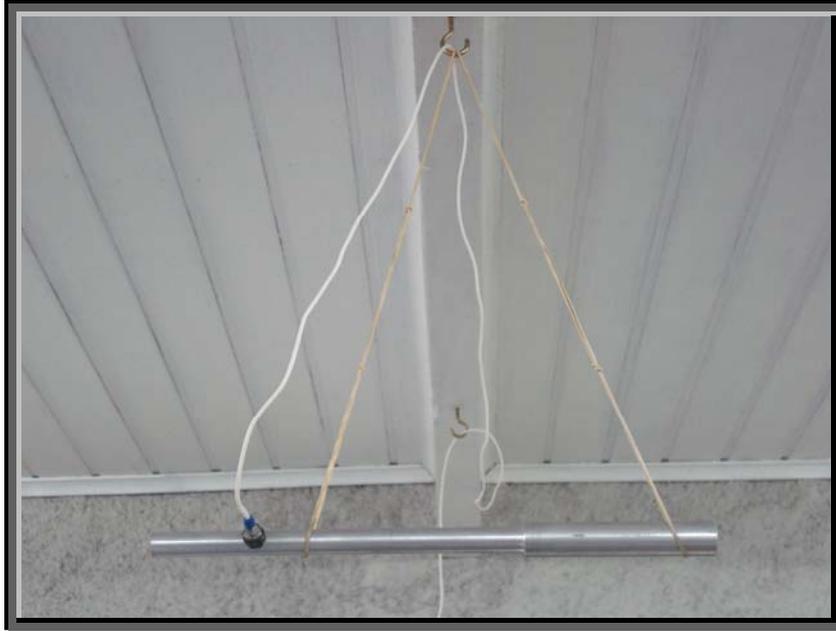


Foto 5.4 – Viga escalonada de alumínio: 2/3 do comprimento  $\phi 14,9672 \text{ mm}$  e 1/3 do comprimento  $\phi 20,0068 \text{ mm}$  .



Foto 5.5 – Viga escalonada de alumínio: 1/3 do comprimento  $\phi 9,9408 \text{ mm}$  , 1/3 do comprimento  $\phi 14,9764 \text{ mm}$  e 1/3 do comprimento  $\phi 20,0084 \text{ mm}$  .

## 5.3 FREQUÊNCIAS FUNDAMENTAIS

Os ensaios no laboratório objetivaram a determinação das propriedades dinâmicas das vigas como suas frequências naturais. Essas grandezas são úteis para a previsão do comportamento dinâmico da máquina em funcionamento e para o estabelecimento de regiões seguras (aceitáveis) de operação, acima e abaixo das frequências naturais. Para se determinar essas frequências em laboratório, excitou-se a estrutura em diferentes regiões com a ajuda de um martelo instrumentado.

As Tabelas, (5.3) a (5.16), comparam os resultados obtidos nos ensaios com os valores gerados pelo programa computacional. Há uma boa concordância entre os resultados teóricos e os experimentais. As frequências medidas em laboratório apresentam-se em Hertz, enquanto que o programa computacional gera valores adimensionais,  $\hat{\beta}_{1,k}$ , que é substituído na Equação (5.1) para o cálculo das frequências em  $Hz$  e posterior comparação.

➤ Cálculo da frequência natural:

$$\omega_k = \left( \frac{\hat{\beta}_{1,k}}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (5.1)$$

$$f = \frac{\omega_k}{2\pi} \quad (5.2)$$

Onde,

$\omega_k$  :  $k$ -ésima frequência natural circular (rad/s)

$\hat{\beta}_{1,k}$  : frequência natural adimensional do primeiro trecho da viga escalonada.

$k$  : índice que indica o modo de vibrar.

1: índice referente à frequência do primeiro trecho da viga.

As Tabelas, 5.3 a 5.16, apresentam o índice de esbeltez,  $\lambda$ , e se verifica a concordância com a seguinte relação  $\lambda_i \leq 0,05$ . O índice de esbeltez é a relação geométrica entre o menor raio de giração da área da seção transversal e o comprimento da viga.

➤ Cálculo do índice de esbeltez:

$$\lambda_i = \frac{r_i}{L'_i} \leq 0,1 \quad (5.3)$$

$$r_i = \sqrt{\frac{I_i}{A_i}} \quad (5.4)$$

De acordo com (Lima Jr & Arantes, 2000) e (Han et al., 1999) quando se utiliza do modelo de viga de Euler-Bernoulli e a relação  $\lambda_i \leq 0,05$  é satisfeita, obtém-se ótimos resultados no 1° modo de vibrar para uma viga uniforme. Os resultados obtidos mediante o modelo de viga de Euler-Bernoulli concordam satisfatoriamente com os resultados apresentados pelo modelo de Timoshenko, que é o modelo que apresenta melhor concordância com os resultados experimentais, conforme Figura 5.1 e Tabela 5.1.

A Figura 5.1 apresenta o desvio (%) entre os resultados obtidos pelo modelo de Euler-Bernoulli e os de Timoshenko para diferentes valores de índice de esbeltez,  $\lambda$ . Analisando a primeira frequência natural adimensional,  $\hat{\beta}_{1,1}$ , observa-se que para a relação  $\lambda_i \leq 0,05$ , já é possível obter bons desvios, em torno de 4%, como mostrado na Tabela 5.1. Entretanto, ao analisar a segunda frequência natural adimensional,  $\hat{\beta}_{1,2}$ , o desvio sobe para aproximadamente 11%, que é um valor, também, bastante satisfatório e aceitável dentro dos padrões da engenharia. Observa-se que quando a relação do índice de esbeltez cai para valores como 0,04; 0,03; 0,02 ou 0,01, os desvios entre os modelos Euler-Bernoulli e Timoshenko tendem a cair consideravelmente.

Tabela 5.1 – Desvio Percentual Relativo entre Euler-Bernoulli/Timoshenko - viga livre-livre.

$\hat{\beta}_{1,k}$	$\lambda$	Desvio %
$k = 1$	0,05	4,4
$k = 2$	0,05	11,35
$k = 3$	0,05	19,85

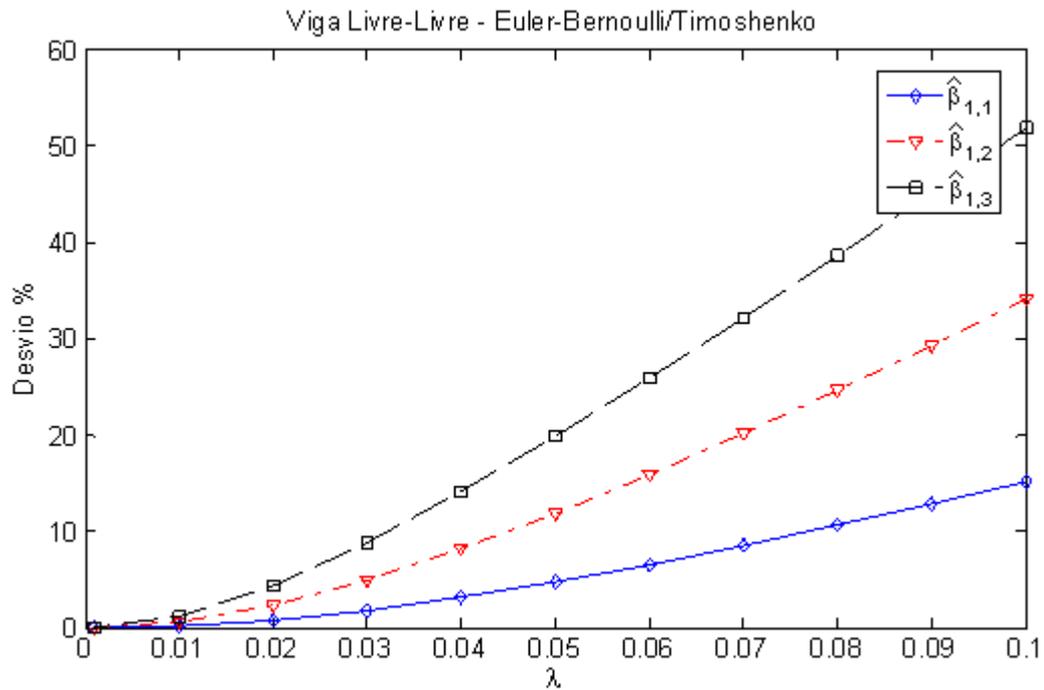


Figura 5.1 – Desvio percentual relativo para as três primeiras frequências,  $\hat{\beta}_{1,1}$ ,  $\hat{\beta}_{1,2}$  e  $\hat{\beta}_{1,3}$ , de uma viga contínua de Euler-Bernoulli comparada a uma viga de Timoshenko.

O desvio percentual dos valores experimentais em relação aos valores teóricos de modelos como Euler-Bernoulli, cisalhamento e Timoshenko é apresentado na Tabela 5.2, de acordo com Traill-Nash & Collar (1953) apud Han et al. (1999). Os ensaios experimentais para o cálculo dos desvios da Tabela 5.2 basearam-se em vigas espessas, ao contrário das vigas utilizadas nos ensaios deste trabalho. Porém, como primeira aproximação, a Tabela 5.2 pode ser utilizada para comparar e analisar a qualidade dos resultados da autora.

Tabela 5.2 – Desvio percentual entre valores experimentais e valores teóricos, segundo Traill-Nash & Collar (1953).

Modelos de Viga	1ª Frequência natural	2ª Frequência natural
Euler-Bernoulli	+14% a +26%	+78% a +133%
Cisalhamento	0% a +3%	-1% a +6%
Timoshenko	-1% a +2%	-1% a +6%

O módulo de Elasticidade,  $E$ , é medido através do ensaio de flexão. Inicialmente adota-se o valor do deslocamento que será aplicado na região central entre os apoios da viga. A máquina (ver Figura 5.6) destinada ao ensaio de flexão é programada para que uma viga, com

uma esfera na ponta, desça e aplique a força necessária ao deslocamento desejado. A partir daí, a máquina fornece o valor da deflexão (em milímetros) e a força (em Newton).

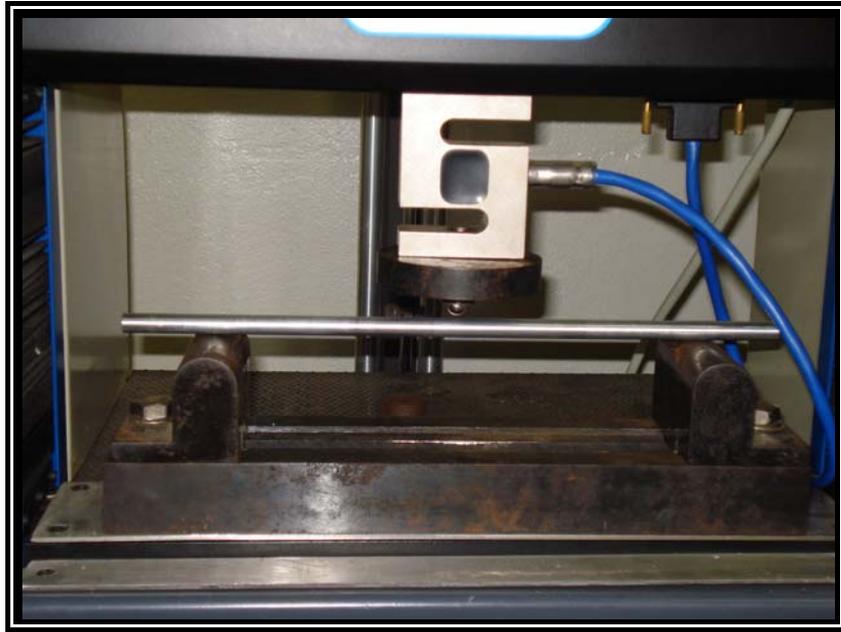


Foto 5.6 – Ensaio de flexão.

➤ Cálculo do módulo de elasticidade

$$E = \frac{F e^3}{48I\delta} \quad (5.5)$$

Com,

$$\begin{aligned} F &= 451 \text{ N} \\ \delta &= 3,85 \text{ mm} \\ D &= 10 \text{ mm} \\ e &= 240 \text{ mm} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Onde:

$\delta$  : deflexão.

$e$  : distância entre os apoios da viga.

$I$  : momento de inércia.

$D$  : diâmetro da viga.

Portanto,

$$E = 68,73 \text{ GPa} \quad (5.7)$$

➤ Cálculo da massa específica:

$$\rho = \frac{m}{V'} \quad (5.8)$$

$$V' = AL \quad (5.9)$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad (5.10)$$

Com,

$$\begin{aligned} m &= 617,20 \text{ g} \\ D &= 30,004 \text{ mm} \\ h &= 321,22 \text{ mm} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Onde:

$\rho$  : massa específica.

$m$  : massa.

$L$  : comprimento total da viga.

$A$  : área.

$V'$  : volume

$D$  : diâmetro.

Logo,

$$\rho = 2710,3 \text{ kg} / \text{m}^3 \quad (5.12)$$

A Tabela 5.3 apresenta o desvio percentual entre os valores experimentais e os valores calculados das frequências, referente à viga contínua de diâmetro  $\phi$  30,044 mm . Neste caso, observa-se que o desvio apresentado para a primeira frequência natural é bem pequeno e insignificante.

Tabela 5.3 - Viga uniforme -  $\phi$  30,044 mm - Desvio (%) entre os valores experimentais e os valores teóricos da primeira, segunda e terceira frequência natural.

<b>Viga Uniforme: <math>\phi</math> 30,044 mm</b>			
<b>Índice de Esbeltez: <math>\lambda = 0,0233</math></b>			
<b><math>f</math> (Hz)</b>	<b>Valor Experimental</b>	<b>Valor Calculado</b>	<b>Desvio %</b>
1 <sup>a</sup>	1301	1305,3	0,33
2 <sup>a</sup>	3468,75	3598,1	3,60
3 <sup>a</sup>	6078,13	7002,5	13,20

A Tabela 5.4 apresenta o desvio percentual entre os dados experimentais e os calculados, referente à viga uniforme de diâmetro  $\phi$  20,002 mm . Neste caso, observa-se uma melhora no desvio percentual em relação à viga uniforme de diâmetro  $\phi$  30,044 mm . Isso se deve a diminuição da rigidez e do raio de giração da estrutura, isto é, a diminuição do índice de esbeltez.

Tabela 5.4 - Viga uniforme -  $\phi$  20,002 mm - Desvio (%) entre os valores experimentais e os valores teóricos da primeira, segunda e terceira frequência natural.

<b>Viga Uniforme: <math>\phi</math> 20,002 mm</b>			
<b>Índice de Esbeltez: <math>\lambda = 0,0156</math></b>			
<b><math>f</math> (Hz)</b>	<b>Valor Experimental</b>	<b>Valor Calculado</b>	<b>Desvio %</b>
1 <sup>a</sup>	875	869	0,69
2 <sup>a</sup>	2375	2395,5	0,86
3 <sup>a</sup>	4500	4662	3,48

A Tabela 5.5 apresenta desvios percentuais de valores relativamente baixos devido aos efeitos da geometria, como por exemplo, a mudança da seção transversal ao longo da viga.

Tabela 5.5 - Viga escalonada –  $1/2 L - \phi 14,996 \text{ mm}$  e  $1/2 L - \phi 20,005 \text{ mm}$  - Desvio (%) entre os valores experimentais e os valores teóricos da primeira, segunda e terceira frequência natural.

<b>Viga Escalonada:</b> $\frac{1}{2} L - \phi 14,996 \text{ mm}$ e $\frac{1}{2} L - \phi 20,005 \text{ mm}$			
<b>Índice de Esbeltez:</b> $\lambda_1 = 0,0233$ e $\lambda_2 = 0,0311$			
<b><math>f</math> (Hz)</b>	<b>Valor Experimental</b>	<b>Valor Calculado</b>	<b>Desvio %</b>
1 <sup>a</sup>	709,4	646,4	8,88
2 <sup>a</sup>	2116	1947,5	7,96
3 <sup>a</sup>	3510	3641,8	3,62

A Tabela 5.6 apresenta as frequências naturais de uma viga escalonada com os diâmetros:  $2/3 L - \phi 14,967 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi 20,007 \text{ mm}$ . Verifica-se que o comportamento dinâmico dessa estrutura é semelhante ao apresentado pela viga escalonada -  $1/2 L - \phi 14,996 \text{ mm}$  e  $1/2 L - \phi 20,005 \text{ mm}$ .

Tabela 5.6 - Viga escalonada –  $2/3 L - \phi 14,967 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi 20,007 \text{ mm}$  - Desvio (%) entre os valores experimentais e os valores teóricos da primeira, segunda e terceira frequência natural.

<b>Viga Escalonada:</b> $\frac{2}{3} L - \phi 14,967 \text{ mm}$ e $\frac{1}{3} L - \phi 20,007 \text{ mm}$			
<b>Índice de Esbeltez:</b> $\lambda_1 = 0,0175$ e $\lambda_2 = 0,0467$			
<b><math>f</math> (Hz)</b>	<b>Valor Experimental</b>	<b>Valor Calculado</b>	<b>Desvio %</b>
1 <sup>a</sup>	643,7	578,6	10,11
2 <sup>a</sup>	1870	1738	7,06
3 <sup>a</sup>	3792	3597	5,14

De acordo com os valores das frequências naturais de uma viga escalonada com os seguintes diâmetros:  $1/3 L - \phi 9,941 \text{ mm}$ ,  $1/3 L - \phi 14,976 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi 20,008 \text{ mm}$ ,

verifica-se que à medida que se aumenta o número de escalonamentos de uma estrutura ocorre uma diminuição nos valores das freqüências, porém, haverá um aumento no desvio percentual entre os valores experimentais e calculados.

Tabela 5.7 - Viga escalonada –  $1/3 L - \phi 9,941 \text{ mm}$  ,  $1/3 L - \phi 14,976 \text{ mm}$  e  $1/3 L \phi 20,008 \text{ mm}$  - Primeira freqüência natural.

<b>Viga Escalonada:</b> $\frac{1}{3} L - \phi 9,941 \text{ mm}$ , $\frac{1}{3} L - \phi 14,976 \text{ mm}$ e $\frac{1}{3} L - \phi 20,008 \text{ mm}$			
<b>Índice de Esbeltez:</b> $\lambda_1 = 0,0232$ , $\lambda_2 = 0,0350$ e $\lambda_3 = 0,0467$			
$f$ (Hz)	Valor Experimental	Valor Calculado	Desvio %
1 <sup>a</sup>	587,1	518	11,77
2 <sup>a</sup>	1573	1375	12,58

Quando se trabalha com vigas escalonadas, o desvio percentual entre valores teóricos e valores experimentais, tende a aumentar um pouco, mas os valores obtidos estão dentro do esperado pela literatura. Uma viga escalonada com as seguintes características:  $(1/2)L - \phi 14,996 \text{ mm}$  ,  $(1/2)L - \phi 20,005 \text{ mm}$  , índice de esbeltez,  $\lambda_1 = 0,0233$  e  $\lambda_2 = 0,0311$  , apresenta-se com um desvio percentual de 8,88%. Uma viga escalonada com as características:  $(2/3)L - \phi 14,967 \text{ mm}$  ,  $(1/3)L - \phi 20,007 \text{ mm}$  , índice de esbeltez,  $\lambda_1 = 0,0175$  e  $\lambda_2 = 0,0467$  , apresenta-se com um desvio percentual de 10,113%. Já uma viga escalonada com as características:  $(1/3)L - \phi 9,941 \text{ mm}$  ,  $(1/3)L - \phi 14,976 \text{ mm}$  ,  $(1/3)L - \phi 20,008 \text{ mm}$  , índice de esbeltez,  $\lambda_1 = 0,0232$  ,  $\lambda_2 = 0,0350$  e  $\lambda_3 = 0,0467$  apresenta-se com um desvio percentual de 11,77%. Segundo (Han et al., 1999) é possível obter desvios percentuais de 14% a 26% quando se compara os resultados teóricos obtidos a partir do modelo de Euler-Bernoulli, com os resultados experimentais. Portanto verifica-se que os resultados apresentados pela autora são bastante satisfatórios, pois os desvios se apresentam com valores abaixo da margem estabelecida pela literatura.

## 5.4 ESPECTRO DE FREQUÊNCIA

### 5.4.1 VIGA UNIFORME

Dos casos estudados, obteve-se em média 15 gráficos referentes ao espectro de frequência, dentre esses gráficos apresenta-se os 5 gráficos com as frequências naturais mais nítidas.

A Figura 5.2 apresenta as frequências fundamentais em Hz de uma estrutura continua com  $\phi 30,044 \text{ mm}$ . Utilizou-se nos ensaios um sinal de excitação impulsiva. A primeira frequência natural foi indicada no gráfico. O espectro de frequência apresentado na Figura 5.2 possui amplitude na forma de decibel de aceleração.

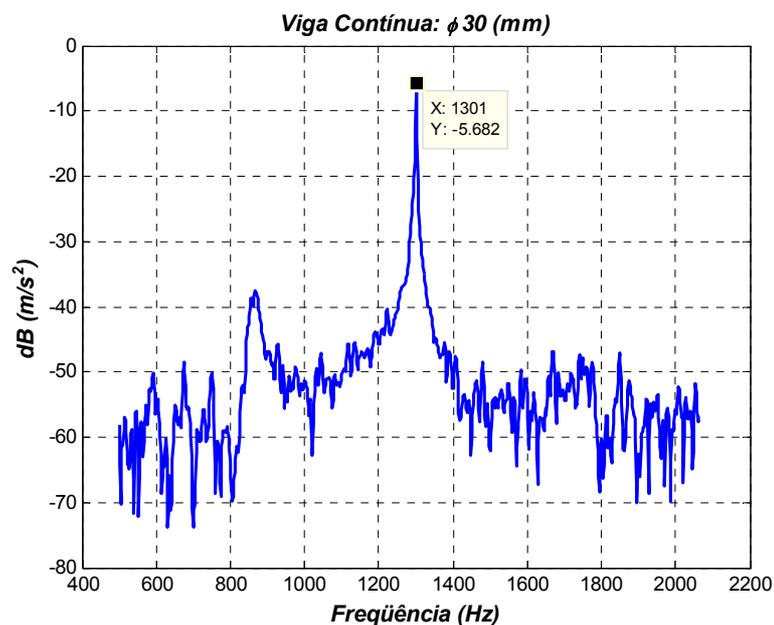


Figura 5.2 – Espectro de frequência – viga uniforme,  $\phi 30,044 \text{ mm}$ .

Na Figura 5.3 identificam-se os valores dos picos referentes às três primeiras frequências naturais de uma viga uniforme com um diâmetro de  $\phi 20,002 \text{ mm}$ . Observa-se neste gráfico, que a primeira frequência fundamental é consideravelmente inferior à frequência apresentada pela viga uniforme  $\phi 30,044 \text{ mm}$ , cerca de 32,7 %, devido a diminuição do índice de esbelteza da viga quando se reduz o diâmetro da mesma.

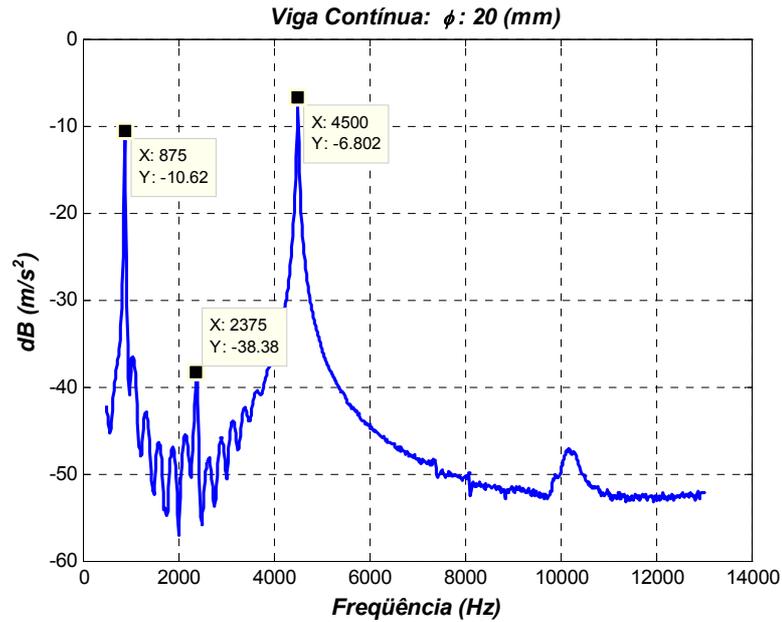


Figura 5.3 – viga uniforme,  $\phi$  20,002 mm .

## 5.4.2 VIGA ESCALONADA

Analisando a Figura 5.4, percebe-se uma razoável diminuição nas três primeiras freqüências em relação ao caso da viga uniforme  $\phi$  20,002 mm .

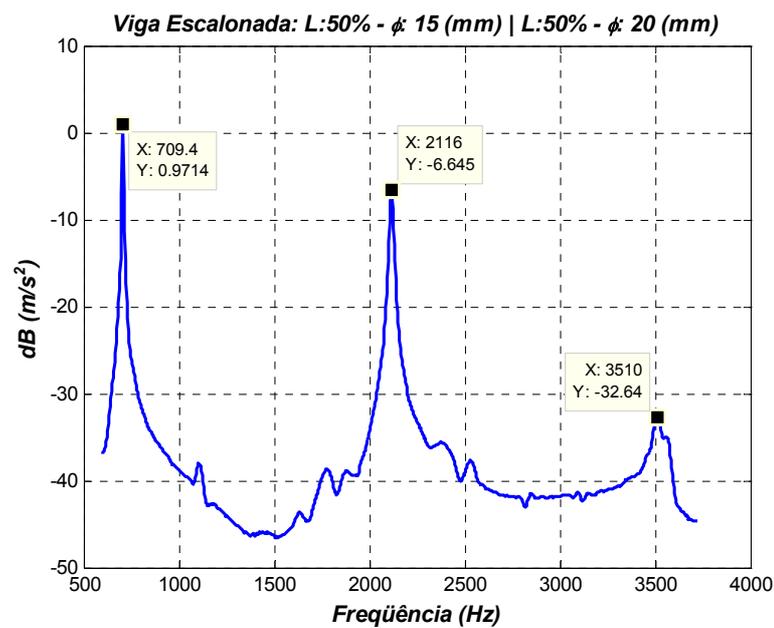


Figura 5.4 – Espectro de freqüência – viga escalonada – 1/2 L -  $\phi$ 14,996 mm e 1/2 L -  $\phi$  20,005 mm .

A Figura 5.4 quando comparada com a Figura 5.5 observam-se uma pequena variação nos valores das freqüências, já que a viga escalonada -  $2/3 L - \phi 14,967 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi 20,007 \text{ mm}$  - adquire melhor mobilidade em virtude da diminuição do raio de giração.

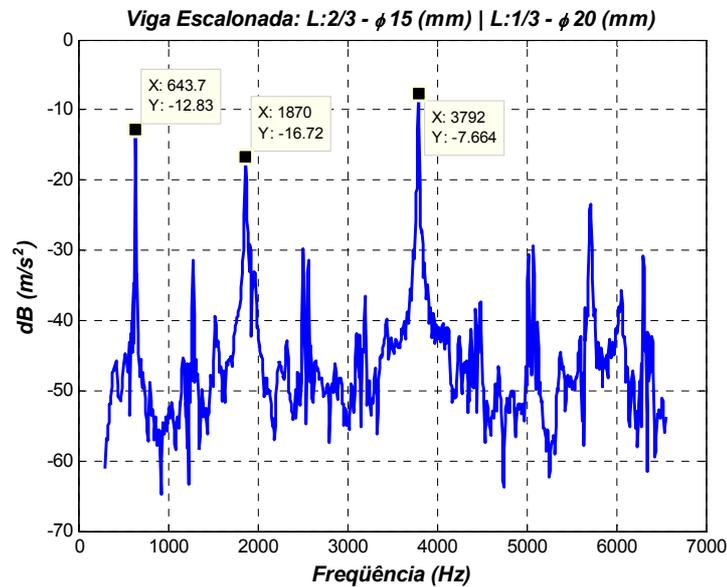


Figura 5.5 – Espectro de freqüência – viga escalonada –  $2/3 L - \phi 14,967 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi 20,007 \text{ mm}$  .

A última viga ensaiada em laboratório é escalonada com os seguintes comprimentos e diâmetros:  $1/3 L - \phi 9,941 \text{ mm}$ ,  $1/3 L - \phi 14,976 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi 20,008 \text{ mm}$ , conforme Figura 5.6. Neste ensaio, encontrou-se dificuldade em captar as freqüências inerentes a esse tipo de estrutura.

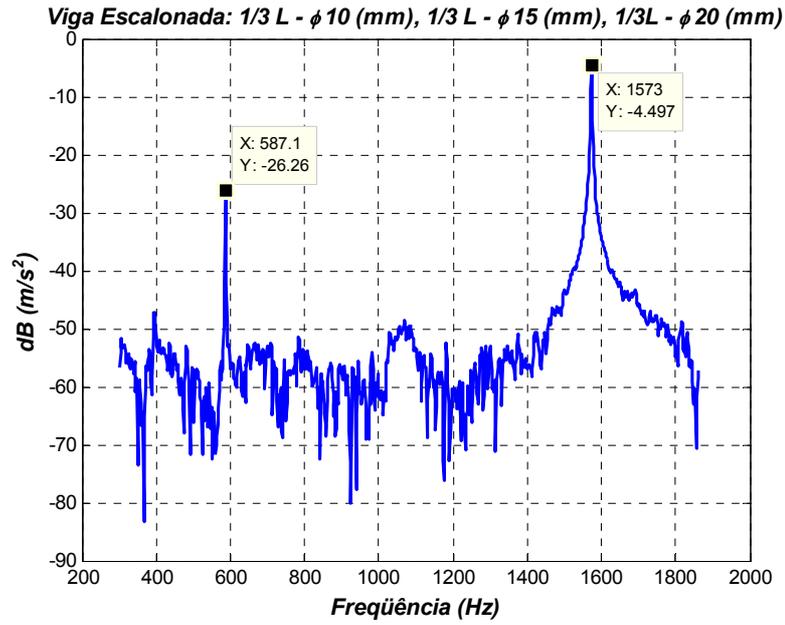


Figura 5.6 – Espectro de frequência – viga escalonada – 1/3 L -  $\phi$ 9,941 mm , 1/3 L -  $\phi$ 14,976 mm e 1/3 L -  $\phi$ 20,008 mm .

## Capítulo 6

### RESULTADOS

Neste capítulo apresentam-se as frequências naturais e os modos de vibrar de vigas escalonadas em duas e em três partes com as extremidades podendo ter apoios elásticos.

Os resultados apresentados neste capítulo foram gerados através de um programa computacional desenvolvido pela autora e uma boa parte desses resultados não se encontra disponíveis na literatura.

#### 6.1 FREQUÊNCIAS FUNDAMENTAIS ADIMENSIONAIS DE UMA VIGA ESCALONADA EM DUAS PARTES

As frequências naturais para diferentes tipos de apoios elásticos encontram-se nas Tabelas 6.1 a 6.5. Inicialmente, variaram-se as condições de apoios e as relações dos momentos de inércia para verificar a reação desse comportamento nas frequências naturais e nos modos de vibrar. As frequências naturais obtidas nas Tabelas, 6.1 a 6.5, são baseadas nas relações de momentos de inércia de trechos adjacentes,  $\bar{I}_1 = I_2 / I_1$ , de uma viga escalonada em duas partes, e independem do tipo de seção transversal da viga.

$$L_1 = L_2 = L/2 \Rightarrow \text{condição estabelecida para as tabelas 6.1 a 6.4.} \quad (6.1)$$

$$L_1 = \frac{2L}{3} \text{ e } L_2 = \frac{L}{3} \Rightarrow \text{condição estabelecida para a tabela 6.5.} \quad (6.2)$$

Na Tabela 6.1 encontram-se os resultados numéricos obtidos na determinação da primeira frequência adimensional de uma viga apoiada elasticamente em uma das extremidades e livre na outra. Verifica-se na Tabela 6.1 que quando  $R_1 = R_2 = T_1 = T_2 = \infty$  tem-se uma viga livre no espaço e as frequências naturais são nulas para qualquer relação de momento de inércia. Verifica-se também, que com a diminuição das constantes adimensionais de rigidez do suporte elástico de apenas uma das extremidades, acarreta em um aumento gradual das suas frequências adimensionais.

Tabela 6.1 – 1ª Frequência natural – viga livre em uma das extremidades ( $R_2 = T_2 = \infty$ ) e apoiada elasticamente na outra.

$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\hat{\beta}_{1,1}$		
		$\bar{I}_1 = 0,1$	$\bar{I}_1 = 1$	$\bar{I}_1 = 10$
$\infty$	$\infty$	0	0	0
500	$\infty$	0,34821	0,29263	0,22976
5	$\infty$	1,09088	0,91389	0,71583
0,05	$\infty$	2,17505	1,81072	1,3883
0	$\infty$	2,2355	1,8751	1,43628

Com,  $\hat{\beta}_{1,1}$ : primeira frequência natural adimensional.

Na Tabela 6.2 encontra-se a primeira frequência adimensional para uma viga engastada em uma das extremidades e apoiada elasticamente na outra. Neste caso, procura-se diminuir as constantes adimensionais de rotação e de translação da extremidade restrita elasticamente ( $R_2 = T_2$ ) para que no final da simulação obtenha-se uma viga do tipo biengastada ( $R_1 = T_1 = R_2 = T_2 = 0$ ). Observa-se que à medida que se diminui as constantes  $R_2$  e  $T_2$ , ou

seja, à medida que a viga torna-se mais rígida elasticamente o valor das frequências naturais tende a aumentar.

Tabela 6.2 – 1ª Frequência natural – viga engastada em uma das extremidades ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e apoiada elasticamente na outra.

$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\hat{\beta}_{1,1}$				
		$\bar{I}_1 = 0,1$	$\bar{I}_1 = 0,5$	$\bar{I}_1 = 1$	$\bar{I}_1 = 5$	$\bar{I}_1 = 10$
0	$\infty$	2,2355	2,00987	1,8751	1,56119	1,43628
0	500	2,23663	2,01208	1,87866	1,57413	1,45941
0	50	2,24656	2,03147	1,90954	1,67694	1,62735
0	5	2,33168	2,1873	2,13952	2,20142	2,29838
0	0,5	2,70056	2,77289	2,87787	3,24695	3,40801
0	0,05	3,42543	3,83194	4,0691	4,56259	4,74954
0	0,005	3,88099	4,42004	4,65386	5,03687	5,20451
0	0	3,94537	4,50112	4,73004	5,095	5,26124

A Tabela 6.3 apresenta a primeira frequência fundamental para uma viga elasticamente apoiada nas extremidades. Da Tabela 6.3 observa-se que uma viga biengastada não necessita possuir engaste perfeitamente rígido para que se conheça sua frequência natural. A primeira frequência fundamental de uma viga, por exemplo, de coeficientes do tipo  $R_1 = T_1 = R_2 = T_2 = 0,005$  se assemelha a frequência de uma viga biengastada.

Tabela 6.3 – 1ª Frequência natural – viga apoiada elasticamente nas extremidades.

$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\hat{\beta}_{1,1}$				
		$\bar{I}_1 = 0,1$	$\bar{I}_1 = 0,5$	$\bar{I}_1 = 1$	$\bar{I}_1 = 5$	$\bar{I}_1 = 10$
500	500	0,38030	0,40560	0,42290	0,47410	0,50720
50	50	0,67610	0,72080	0,75160	0,84280	0,90160
5	5	1,19804	1,27564	1,32987	1,492563	1,59761
0,5	0,5	2,07401	2,21581	2,31092	2,588478	2,76574
0,05	0,05	3,21495	3,57102	3,74253	4,092002	4,28721
0,005	0,005	3,84151	4,36429	4,58437	4,949435	5,12274

A Tabela 6.4 apresenta a primeira frequência fundamental para uma viga que possui o GDL de rotação livre e o GDL de deslocamento com uma variação elástica em, apenas, uma das extremidades. Enquanto que a outra extremidade é engastada.

Tabela 6.4 – 1ª Frequência natural – viga engastada ( $R_1 = T_1 = 0$ ) em uma das extremidades e livre para rotação ( $R_1 = \infty$ ) na outra.

$R_1 = T_1$	$R_2$	$T_2$	$\hat{\beta}_{1,1}$		
			$I = 0,1$	$I = 1$	$I = 10$
0	$\infty$	500	2,23608	1,87752	1,45284
0	$\infty$	5	2,29095	2,07840	2,19969
0	$\infty$	0,05	3,32392	3,74517	3,88310
0	$\infty$	0	3,49549	3,92660	3,93864

A primeira frequência natural adimensional apresentada na Tabela 6.5 refere-se a uma viga engastada em uma das extremidades e elasticamente apoiada na outra extremidade. Observa-se que para uma viga cuja relação de comprimentos é do tipo  $\bar{L}_1 = 1/3$ , as frequências adimensionais tendem a aumentar com a diminuição da constante adimensional  $R_2$  e  $T_2$ .

Tabela 6.5 – Viga engastada em uma das extremidades ( $R_1 = T_1 = 0$ ), restrita elasticamente na outra e com a relação de comprimentos  $\bar{L}_1 = 1/3$ .

$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\hat{\beta}_{1,1}$		
		$\bar{I}_1 = 0,1$	$\bar{I}_1 = 1$	$\bar{I}_1 = 10$
0	$\infty$	2,19672	1,87510	1,49054
0	500	2,19933	1,89639	1,63880
0	5	2,39841	2,76554	3,41741
0	0,05	3,81217	4,59726	5,64303
0	0	4,08201	4,73004	5,72787

## 6.2 FREQUÊNCIAS FUNDAMENTAIS ADIMENSIONAIS DE UMA VIGA ESCALONADA EM TRÊS PARTES

Trabalha-se, agora, com vigas escalonadas em três partes (ou seja, com duas mudanças de seções) e a partir deste tipo de estrutura é feito o estudo das três primeiras frequências fundamentais para três tipos diferentes de seções transversais de área, como mencionado no capítulo de validação: a viga tipo 1 refere-se à seção retangular de altura constante; a tipo 2 refere-se à seção retangular de base constante e a tipo 3 refere-se à seção circular.

As dimensões adotadas para o cálculo das seções transversais de vigas dos Tipos 1, 2 e 3 são:  $0,005m$  para o primeiro trecho,  $0,006m$  para o segundo trecho e  $0,009m$  para o terceiro trecho, esses valores citados são as bases de uma viga Tipo 1 (seção retangular de altura constante), as alturas de uma viga Tipo 2 (seção retangular de base constante) e os diâmetros de uma viga Tipo 3 (seção circular). Adotou-se também, os seguintes parâmetros de comprimentos de viga:  $0,20m$  para o primeiro comprimento,  $0,30m$  para o segundo comprimento e  $0,50m$  para o terceiro comprimento.

As tabelas apresentam frequências adimensionais para quatro casos diferentes de condições clássicas de contorno. Na primeira linha de cada tabela representada por,  $R_1 = T_1 = 0$  e  $R_2 = T_2 = \infty$ , observa-se o caso de uma estrutura engastada-livre. Na segunda linha observa-se o caso de um apoio elástico do tipo livre-livre,  $R_1 = T_1 = R_2 = T_2 = \infty$ . Na terceira linha tem-se o caso de uma viga com apoios elásticos do tipo engastada-deslizante  $R_1 = T_1 = 0$ ,  $R_2 = 0$  e  $T_2 = \infty$ . E, na quarta linha tem-se o caso de uma viga engastada-pinada,  $R_1 = T_1 = 0$ ,  $R_2 = \infty$  e  $T_2 = 0$ .

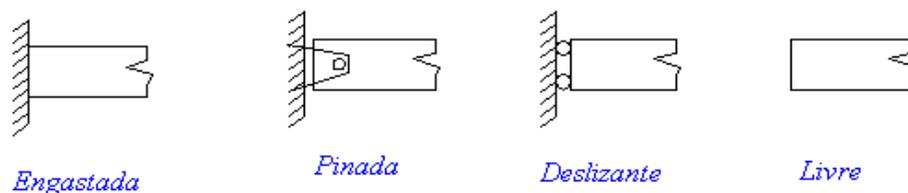


Figura 6.1 – Tipos clássicos de suportes elásticos.

Verifica-se na Tabela 6.7 que as três primeiras frequências apresentadas para o caso tipo 2 (viga de seção retangular com base constante) são superiores aquelas apresentadas pela Tabela 6.6, quando se adota as mesmas condições de suporte elástico.

Tabela 6.6 – Viga escalonada em três partes - seção transversal tipo 1.

Condições de Contorno Clássicas	R1	T1	R2	T2	Tipo 1		
					$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$
Engastada-Livre	0	0	$\infty$	$\infty$	1,66100	4,56222	7,84841
Livre-Livre	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	4,77621	7,91134
Engastada-Deslizante	0	0	0	$\infty$	2,20800	5,42355	8,62546
Engastada-Pinada	0	0	$\infty$	0	3,80416	7,04505	10,1739

Tabela 6.7 – Viga escalonada em três partes - seção transversal tipo 2.

Condições de Contorno Clássicas	R1	T1	R2	T2	Tipo 2		
					$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$
Engastada-Livre	0	0	$\infty$	$\infty$	1,71452	5,16922	9,41405
Livre-Livre	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	5,57601	9,51969
Engastada-Deslizante	0	0	0	$\infty$	2,57846	6,32019	10,2630
Engastada-Pinada	0	0	$\infty$	0	4,39742	8,43703	11,8825

Tabela 6.8– Viga escalonada em três partes - seção transversal tipo 3.

Condições de Contorno Clássicas	R1	T1	R2	T2	Tipo 3		
					$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$
Engastada-Livre	0	0	$\infty$	$\infty$	1,50383	4,93207	9,42708
Livre-Livre	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	5,54988	9,59866
Engastada-Deslizante	0	0	0	$\infty$	2,42957	6,28097	10,1805
Engastada-Pinada	0	0	$\infty$	0	4,18529	8,50978	11,7550

## 6.3 MODOS DE VIBRAR

As Figuras, 6.1 a 6.3, apresentam vigas escalonadas em duas partes baseadas nas relações  $\bar{I}_1=10$  e  $\bar{I}_1=0,1$  para a análise do modo de vibrar. As Figuras, 6.4 a 6.6, apresentam o comportamento dinâmico de vigas uniformes com variações nos apoios elásticos. As Figuras, 6.7 a 6.12, mostram o modo de vibrar de vigas contínuas em comparação com vigas escalonadas em duas partes,  $\bar{I}_1=0,1$ , sob as mesmas condições de apoios elásticos. As Figuras, 6.13 a 6.18, apresentam os modos de vibrar de uma viga escalonada em três partes sob as mesmas dimensões das vigas Tipo 1, 2 e 3, utilizadas para o cálculo das frequências naturais das Tabelas, 6.6 a 6.8.

### 6.3.1 Comparando os modos de vibrar de vigas uniformes e escalonadas em duas partes com $\bar{I}_1=10$ e $\bar{I}_1=0,1$

A Figura 6.2 mostra a diferença de comportamento dinâmico do 1º modo de vibrar de viga contínua e escalonada. Nota-se que o deslocamento vertical da estrutura escalonada do tipo  $\bar{I}_1=0,1$  é superior que as demais, pois ela possui uma menor seção de área transversal no segundo trecho da viga ( $0,5 \leq x/L \leq 1$ ).

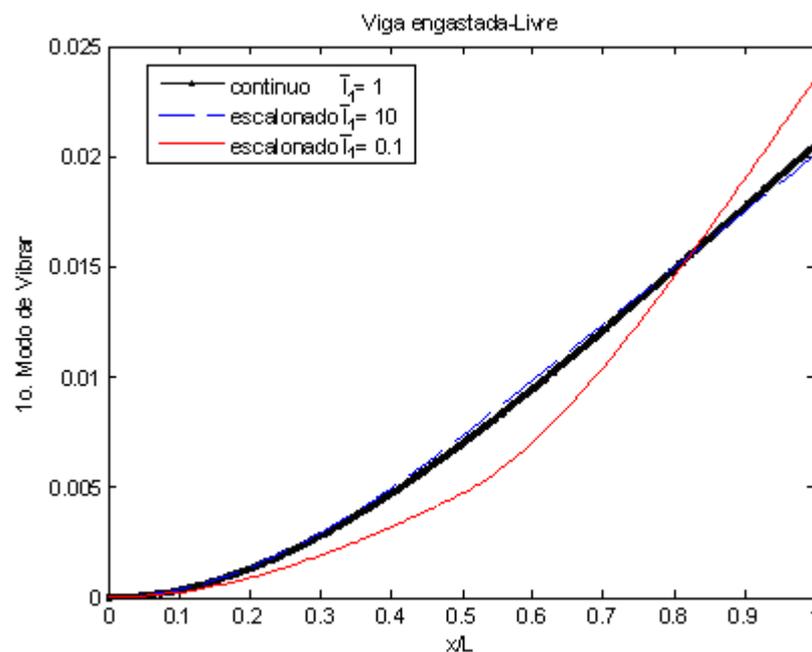


Figura 6.2 – 1º Modo de vibrar – viga contínua e escalonada.

A Figura 6.3 mostra a diferença de comportamento dinâmico do 2º modo de vibrar de vigas contínua e escalonada. Observa-se neste gráfico, que a amplitude do modo da estrutura escalonada do tipo  $\bar{I}_1 = 10$  é superior as demais, pois ela possui uma menor seção de área transversal no primeiro trecho da viga ( $0 \leq x/L \leq 0,5$ ).

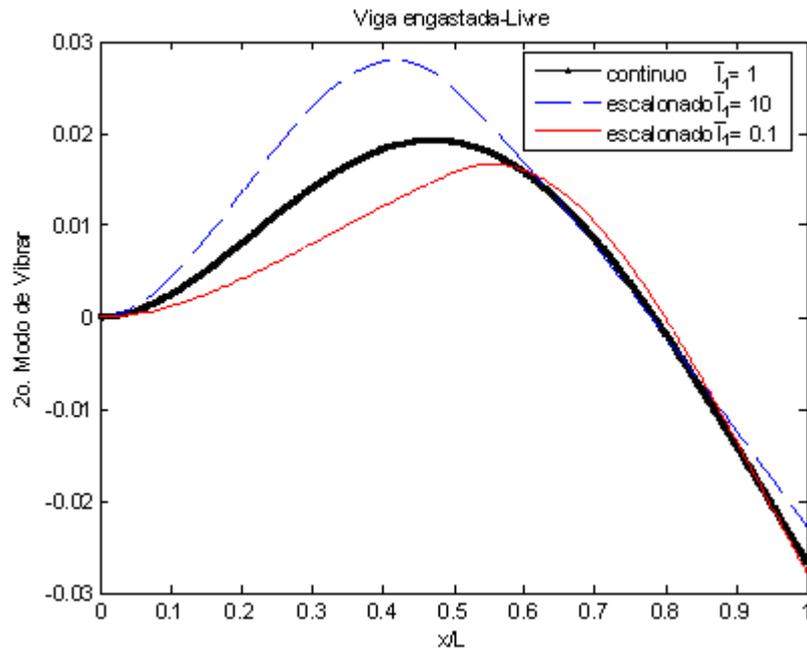


Figura 6.3 – 2º Modo de vibrar - viga contínua e escalonada.

A Figura 6.4 mostra a diferença de comportamento dinâmico entre vigas contínuas e escalonadas no 3º modo de vibrar. Observa-se neste gráfico, que a amplitude do modo da estrutura escalonada do tipo  $\bar{I}_1 = 10$  é superior as demais, no primeiro trecho da viga ( $0 \leq x/L \leq 0,5$ ). Enquanto que no segundo trecho ( $0,5 \leq x/L \leq 1$ ), a maior amplitude do modo ocorre na estrutura escalonada do tipo  $\bar{I}_1 = 0,1$ .

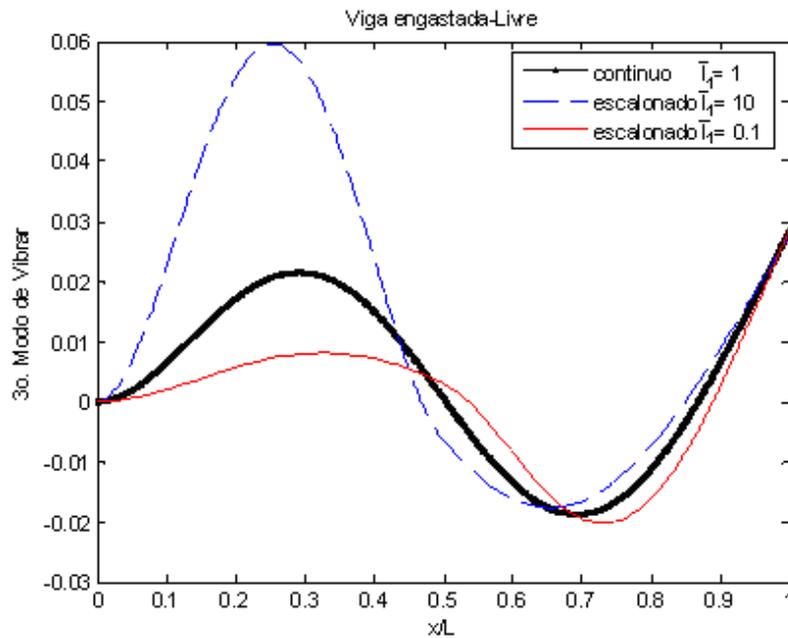


Figura 6.4– 3º Modo de vibrar - viga contínua e escalonada.

### 6.3.2 Comparando os modos de vibrar de vigas uniformes com variações nos apoios elásticos

Os gráficos das Figuras, 6.5 a 6.7, apresentam os modos de vibrar de vigas uniformes do tipo biengastada, da qual se procura variar as constantes adimensionais de rotação e translação deixando a extremidade da direita gradativamente menos rígida.

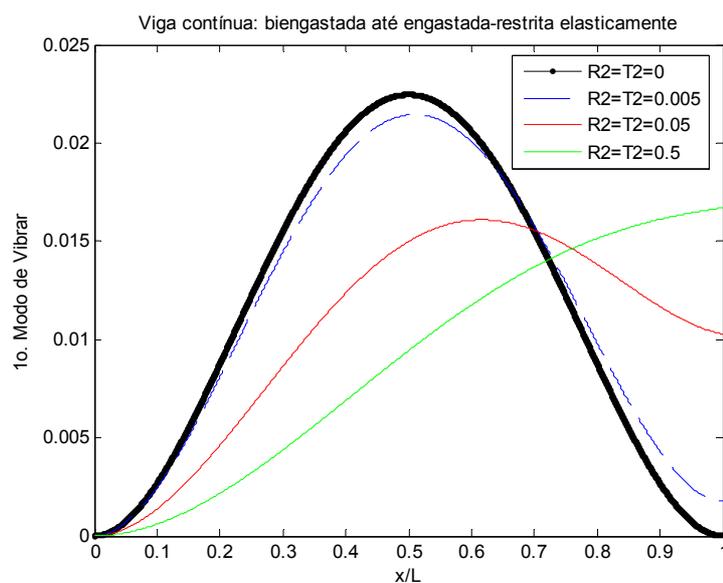


Figura 6.5 – 1º Modo de vibrar - viga engastada em uma das extremidades ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e restrita elasticamente na outra.

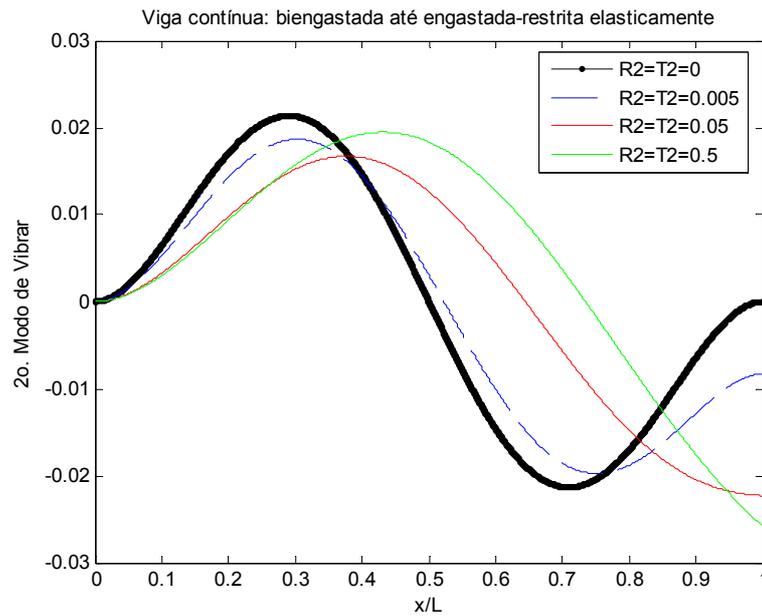


Figura 6.6 – 2º Modo de vibrar - viga engastada em uma das extremidades ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e restrita elasticamente na outra.

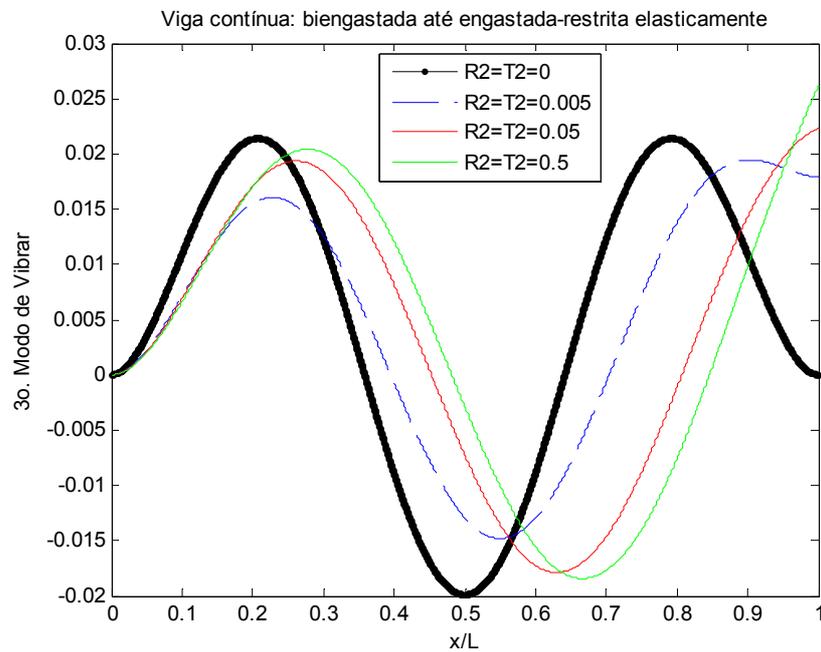


Figura 6.7 – 3º Modo de vibrar - viga engastada em uma das extremidades ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e restrita elasticamente na outra.

### 6.3.3 Comparando os modos de vibrar de vigas uniformes e escalonadas em duas partes com $\bar{I}_1 = 0,1$

A Figura 6.8 e a Figura 6.9 apresentam os modos de vibrar de vigas contínuas e escalonadas, respectivamente, sob as mesmas condições de apoios elásticos. A mudança das condições de contorno (de biapoiada à livre-livre) é obtida variando-se as constantes adimensionais de translação das extremidades e mantendo-se os GDL's de rotação livre ( $R_1 = R_2 = \infty$ ).

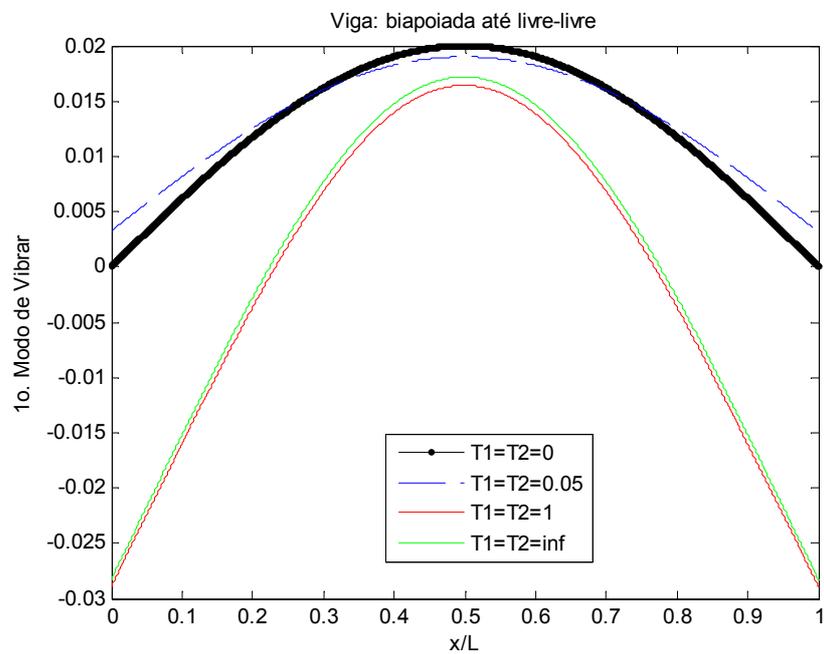


Figura 6.8– 1º Modo de vibrar – viga contínua com condição de contorno variável.

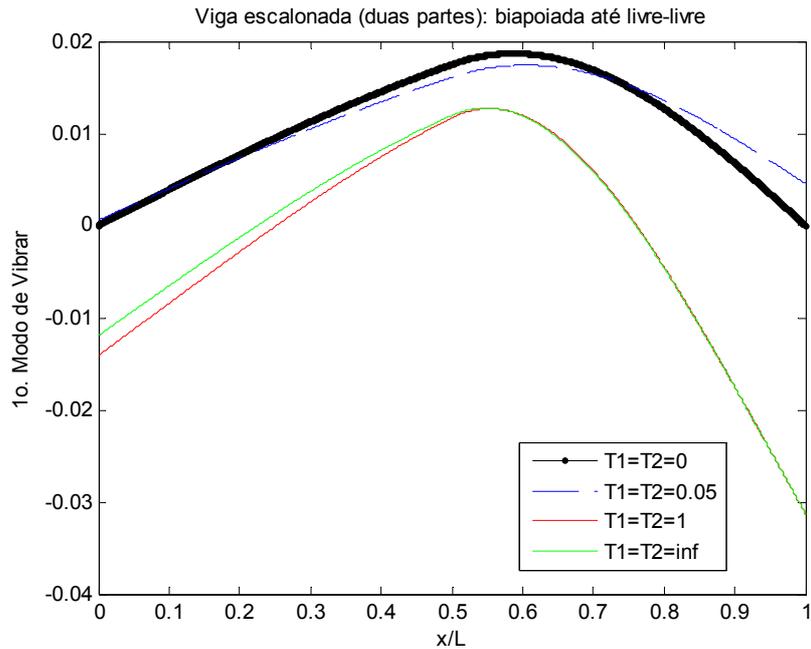


Figura 6.9 – 1º Modo de vibrar – viga escalonada  $I = 0,1$  com condição de contorno variável.

A Figura 6.10 e a Figura 6.11 apresentam o comportamento dinâmico de uma viga contínua e escalonada, respectivamente. A mudança das condições de contorno (de livre-livre à biengastada) é obtida variando-se as constantes adimensionais de rotação e translação das extremidades.

Em uma viga biengastada não há deslocamento e nem inclinação nas extremidades engastadas o que é possível verificar na curva de cor preta da Figura 6.10. Já para o caso de uma viga do tipo livre-livre os coeficientes de rotação e de translação são infinitos  $R_1 = T_1 = R_2 = T_2 = \infty$ .

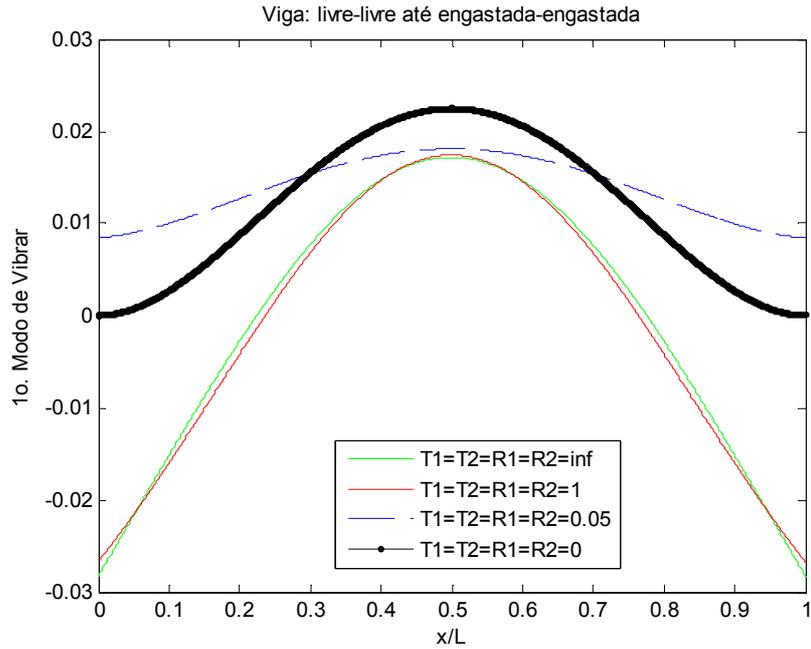


Figura 6.10 – 1º Modo de vibrar – viga contínua.

A partir de uma viga do tipo escalonada e livre nas extremidades, ver curva na cor verde da Figura 6.11, observa-se que o deslocamento do primeiro trecho da viga é inferior ao deslocamento apresentado no segundo trecho, como é de se esperar, já que  $\bar{I}_1 = 0,1$ . O mesmo ocorre para o caso de uma viga escalonada e biengastada.

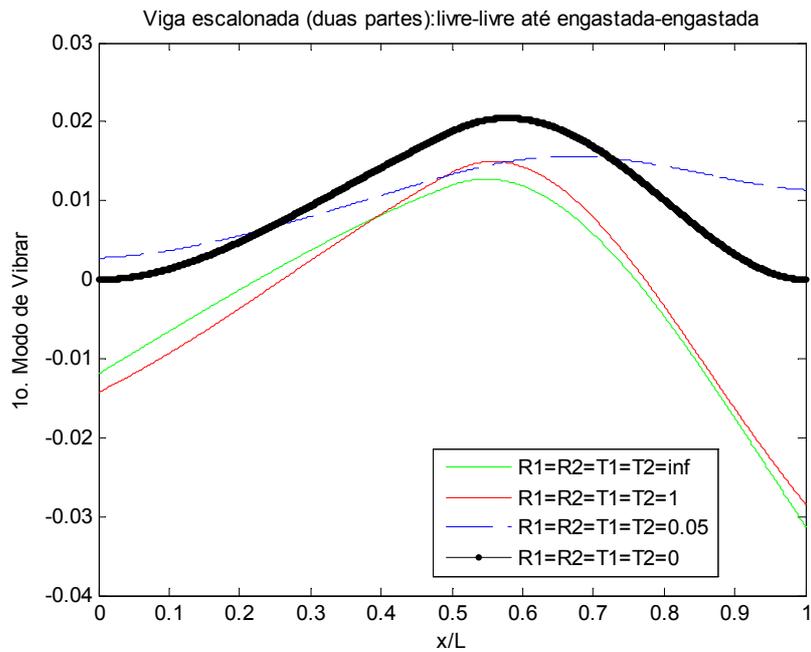


Figura 6.11 – 1º Modo de vibrar – viga escalonada  $I = 0,1$ .

A Figura 6.12 e a Figura 6.13 apresentam o comportamento dinâmico – modos – de vigas contínuas e escalonadas, respectivamente. A mudança das condições de contorno, de engastada-livre a livre-livre, é obtida variando-se os coeficientes de rotação e translação de uma das extremidades e mantendo-se os GDL's de rotação e translação livre na outra.

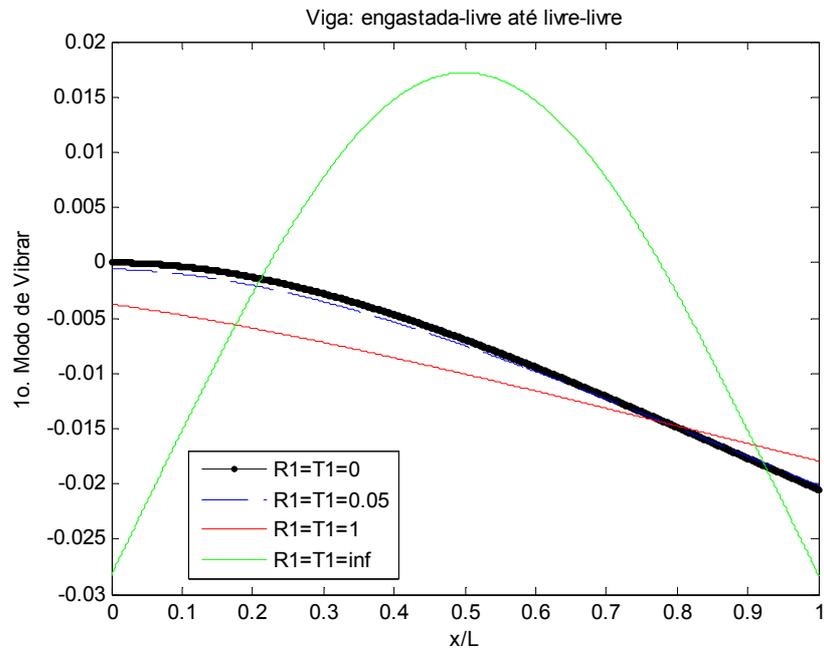


Figura 6.12 – 1º Modo de vibrar – viga contínua.

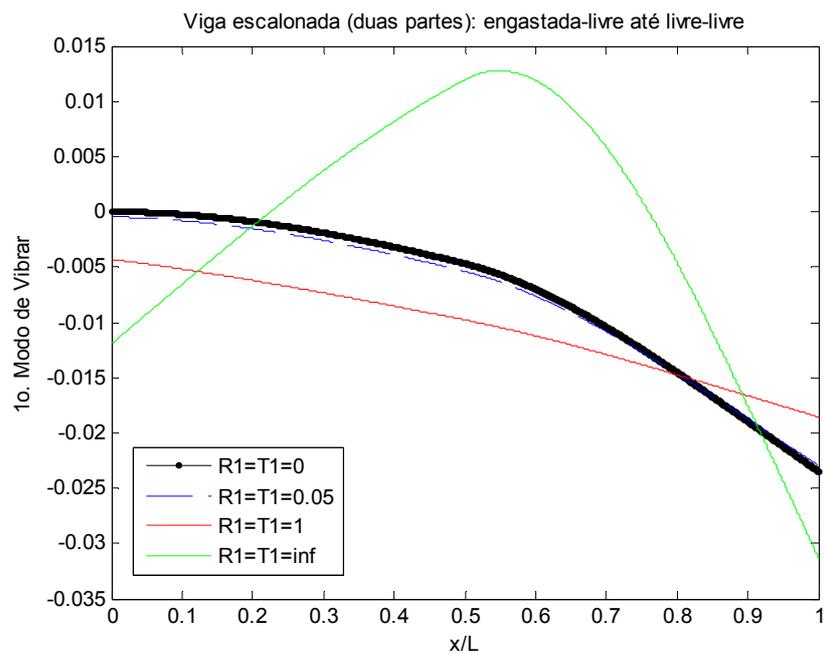


Figura 6.13 – 1º Modo de vibrar – viga escalonada  $\bar{I}_1 = 0,1$ .

### 6.3.4 Comparando os modos de vibrar de vigas do Tipo 1, 2 e 3 escalonadas em três partes

Os modos de vibrar de vigas escalonadas em três partes são apresentados nos gráficos, Figura 6.14 a 6.19. As dimensões adotadas para o cálculo das seções transversais de vigas do Tipo 1, 2 e 3 são:  $0,005m$  para o primeiro trecho,  $0,006m$  para o segundo trecho e  $0,009m$  para o terceiro trecho. Os comprimentos adotados para cada trecho são:  $0,20m$  para o primeiro comprimento,  $0,30m$  para o segundo comprimento e  $0,50m$  para o terceiro comprimento. As diferentes cores apresentadas nas curvas dos gráficos representam diferentes trechos da viga.

Verifica-se da análise gráfica das Figuras 6.14 a 6.16, que independente do tipo de seção transversal de área adotada, modo de vibrar é semelhante para os três tipos apresentados. Há, porém, algumas pequenas diferenças mais evidentes entre as figuras de seção retangular e a figura de seção circular, já que o primeiro caso citado possui um deslocamento transversal mais acentuado que o segundo caso.

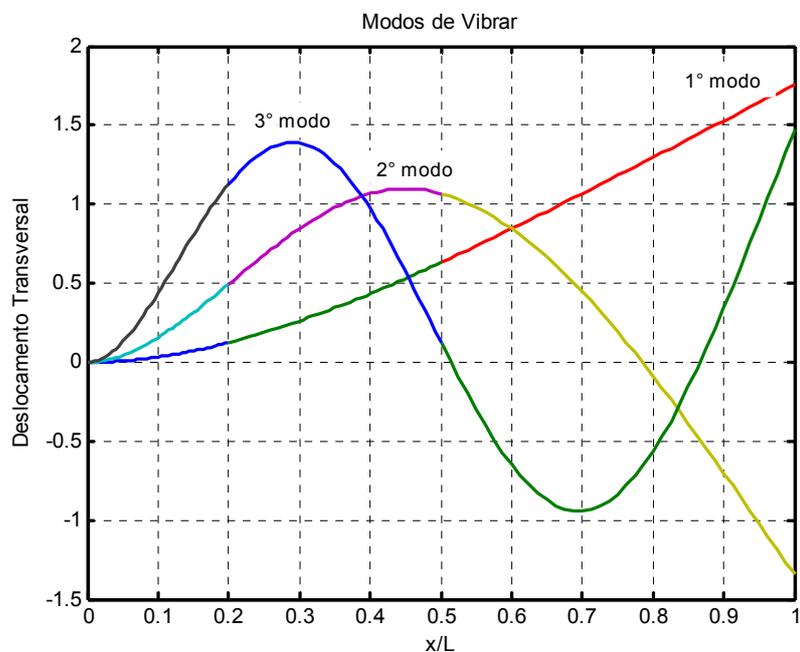


Figura 6.14 – Viga engastada-livre ( $R_1 = T_1 = 0$  e  $R_2 = T_2 = \infty$ ) escalonada em três partes–  
Tipo 1: seção transversal retangular de altura constante.

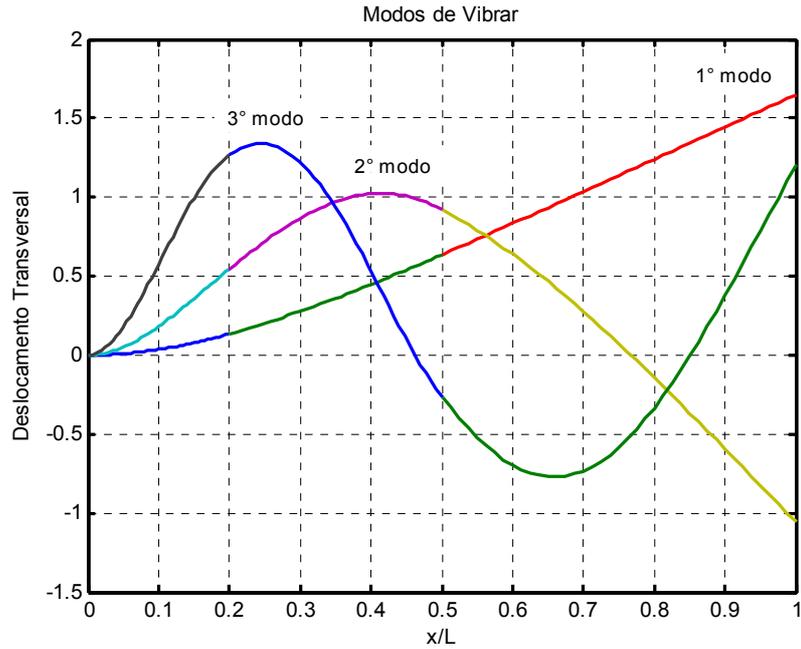


Figura 6.15 – Viga engastada-livre ( $R_1 = T_1 = 0$  e  $R_2 = T_2 = \infty$ ) escalonada em três partes–  
Tipo 2: seção transversal retangular de base constante.

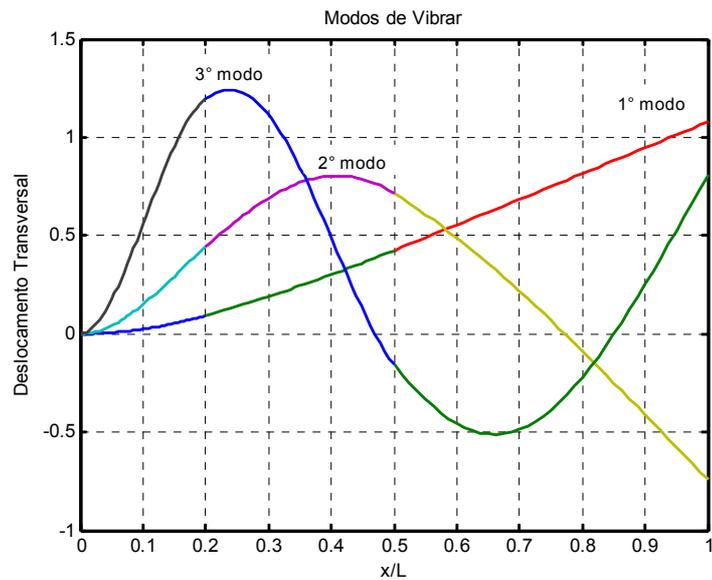


Figura 6.16 – Viga engastada-livre ( $R_1 = T_1 = 0$  e  $R_2 = T_2 = \infty$ ) escalonada em três partes–  
Tipo 3: seção transversal circular.

Identifica-se nos gráficos, Figura 6.16 e Figura 6.17, que o modo de vibrar das curvas do 1º modo e do 2º modo, da Figura 6.17, são semelhantes ao comportamento do 2º modo e do 3º modo da Figura 6.16, respectivamente.

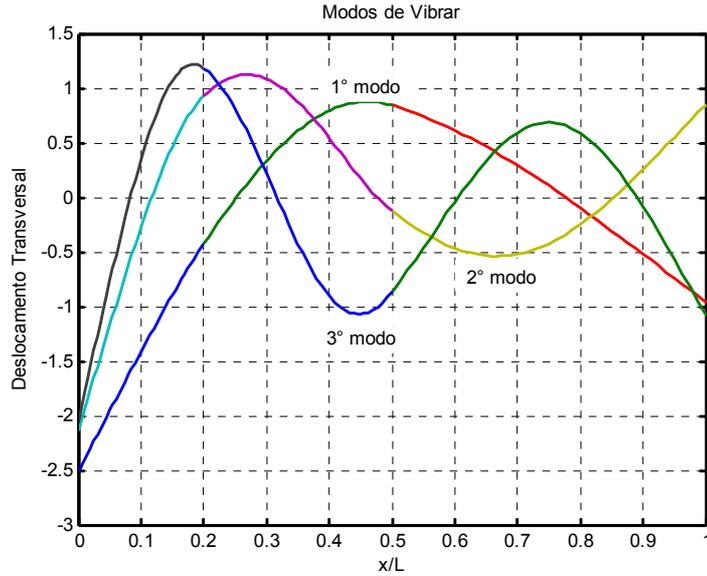


Figura 6.17 – Viga livre-livre ( $R_1 = T_1 = R_2 = T_2 = \infty$ ) escalonada em três partes – Tipo 3: seção transversal circular.

A Figura 6.18 é livre para transladar na extremidade direita e fixa na outra extremidade. Porém, quando se compara a figura engastada-deslizante à figura engastada-livre nota-se que o segundo gráfico é superior nos deslocamentos transversais.

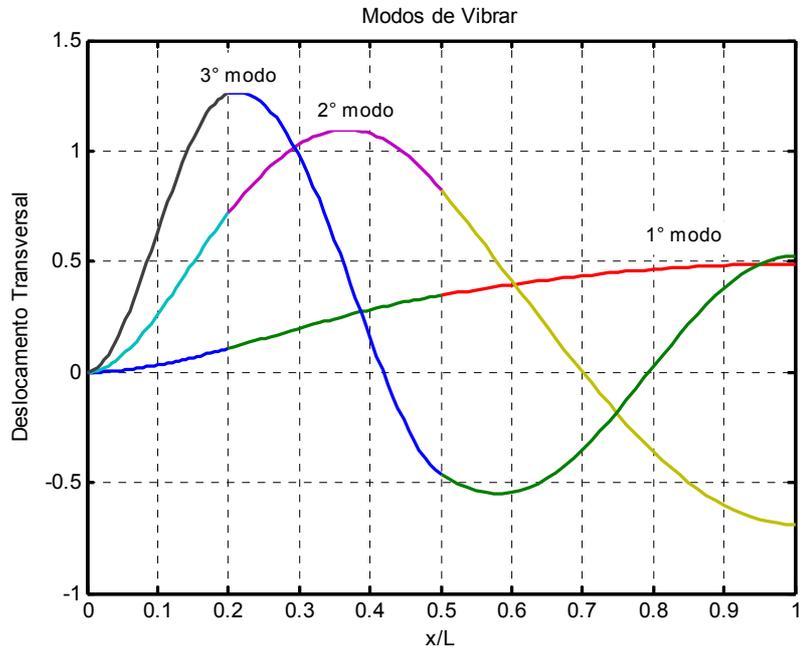


Figura 6.18 – Viga engastada-deslizante ( $R_1 = T_1 = 0$ ,  $R_2 = 0$  e  $T_2 = \infty$ ) escalonada em três partes – Tipo 3: seção transversal circular.

A Figura 6.19 é fixa na extremidade esquerda enquanto a extremidade direita é livre para girar, mas não para transladar.

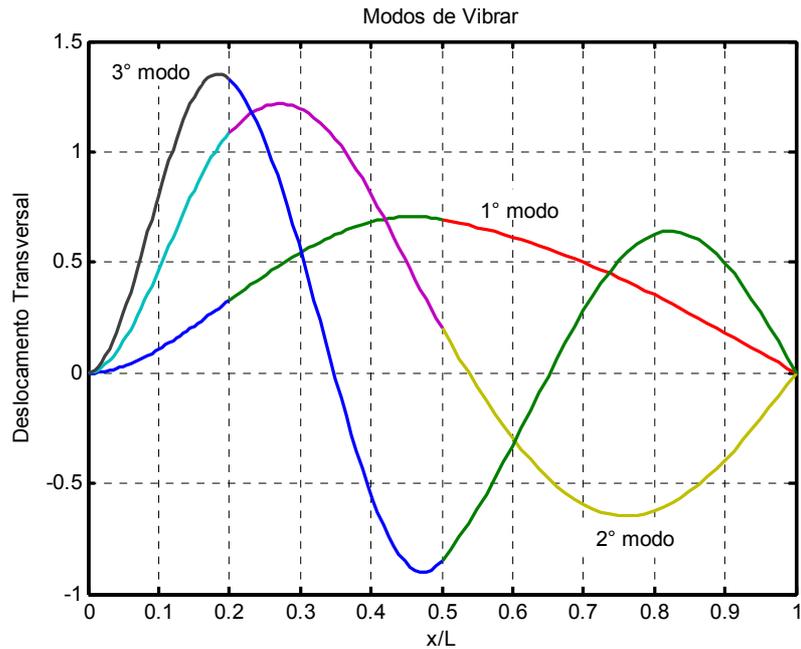


Figura 6.19 – Viga engastada-pinada ( $R_1 = T_1 = 0$ ,  $R_2 = \infty$  e  $T_2 = 0$ ) escalonada em três partes  
– Tipo 3: seção transversal circular.

A avaliação dos modos de vibrar do capítulo de resultados é iniciada mediante vigas com uma mudança de seção transversal e com as relações de momentos de inércia:  $\bar{I}_1 = 0,1$  e  $\bar{I}_2 = 10$ . No primeiro caso tem-se uma viga escalonada em duas partes cuja área da primeira seção é dez vezes superior à área da segunda seção e, por isso, observa-se no gráfico dos modos de vibrar que o ventre é mais acentuado no primeiro trecho da estrutura. Enquanto que no segundo caso tem-se o contrário. Ainda neste capítulo apresentam-se seis gráficos referentes a vigas escalonadas em três partes, ver Figuras 6.14 a 6.19. A análise gráfica da Figura 6.14 a 6.16 mostram que independente do tipo de seção transversal de área estudado, o comportamento dinâmico é semelhante para os três tipos apresentados. Há porém, algumas pequenas diferenças mais evidentes entre as figuras de seção retangular e a figura de seção circular, já que o primeiro caso citado possui um deslocamento transversal, nos nós, mais acentuado que o segundo caso.

## Capítulo 7

# CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

## 7.1 CONCLUSÕES

Através deste trabalho foi possível verificar a eficácia do modelo matemático proposto que é capaz de gerar bons resultados. Esse método elimina a necessidade do uso de malhas na solução de problemas dinâmicos.

A validação dos resultados teóricos com a literatura foi efetiva, pois se verificou concordância entre os valores gerados pelo programa computacional com os resultados da literatura.

Convém ressaltar a dificuldade em se obter na literatura frequências naturais de vigas escalonadas acima de quatro partes. Tendo em vista esses fatores, a comparação dos resultados da autora com a literatura foi feita a partir de vigas escalonadas em até três partes com diferentes tipos de seções transversais: retangular e circular.

Através dos ensaios experimentais pode-se concluir que os desvios percentuais obtidos nos três primeiros modos de vibrar estão dentro do esperado de acordo com (Han et al., 1999), em torno de 12%, e dentro dos padrões aceitáveis na engenharia mecânica.

## 7.2 PERSPECTIVAS FUTURAS

Tendo em vista o desenvolvimento matemático e simulações realizadas neste trabalho como, por exemplo, em vigas com diferentes apoios elásticos, somente nas extremidades, poder-se-ia futuramente estudar o comportamento dinâmico de vigas com vários suportes elásticos ao longo do corpo da estrutura com o sistema mass-mola-amortecedor.

Um outro estudo que se poderia realizar é submeter a estrutura a diferentes forças externas em diferentes posições.

Pode-se, ainda, adicionar massas concentradas nas vigas, o que simula diversos eixos e rotores de sistemas mecânicos e a influência dos acoplamentos na frequência do mesmo.

Uma outra proposta de trabalho é utilizar outros modelos matemáticos e como sugestão, o modelo de Timoshenko. Neste caso, a viga é analisada segundo as forças de cisalhamento e a inércia de rotação. Pode-se também, comparar os resultados teóricos com simulações realizadas por meio do Método de Elementos Finitos.

Por fim, sugere-se que sejam realizados ensaios experimentais com outras condições de contorno no intuito de validar os modelos teóricos desenvolvidos variando-se os tipos de suportes elásticos e o número de escalonamentos. Propõe-se também, trabalhar com vigas de diferentes seções transversais de área seja retangular ou circular.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BLEVINS, R. D. (1979)**, *Formula for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 15 ed., 492 p.
- DONG, X. J., MENG, G., LI, H. G., YE, L. (2005)**, “Vibration analysis of a stepped Laminated Composite Timoshenko Beam”, *Mechanical Research Communications*, vol. 32, pp. 572-581.
- HAN, S. M., BENAROYA, H., WEI, T. (1999)**, “Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 225, n 5, pp. 935-988.
- HEIDEBRECHT, A. C. (1967)**, “Vibration of Non-Uniform Simply-Supported Beams”, *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, vol. 93, pp. 1-15.
- HONG, S. W., KIM, J. W. (1999)**, “Modal Analysis of Multi-Span Timoshenko Beams Connected or Supported by Resilient Joints with Damping”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 227, n 4, pp. 787-806.
- INMAN, D. J. (2001)**. *Engineering Vibration*, 2° ed., Prentice Hall, New Jersey, USA. .
- JANG, S. K., BERT, C. W. (1989)**, “Free Vibration of Stepped Beams: Higher Mode Frequencies and effects of Steps on Frequency”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 132, pp. 164-168.

- JAWORSKI, J. W., DOWELL, E.H. (2008)**, “Free vibration of a cantilevered beam with multiple steps: comparison of several theoretical methods with experiment”, *Journal of Sound and Vibration*, vol 312, pp. 713 – 725. .
- KOPLow , M. A., ;BHATTACHARYYA, A., MANN, B. P. (2006)**, “Closed form solutions for the dynamics response of Euler-Bernoulli beams with step changes in cross section”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 295, pp. 214 – 225.
- LEVINSON, M. (1976)**, “Vibrations of Stepped strings and Beams Euler-Bernoulli”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 49, pp187 – 291.
- LIMA JR., J. J. DE, ARANTES, R. FERREIRA (2000)**, “Estudo Dinâmico Adimensional dos Modelos de Viga de Euler-Bernoulli, Vlasov e Timoshenko”, *Anais do IX Congresso Chileno de Engenharia Mecânica e IV Congresso Nacional de Energia*, Valparaíso, Chile, 6p.
- MAURINI, C., PORFIRI, M., POUGET, J. (2006)**, “Numerical Methods for Modal Analysis of Stepped Piezoelectric Beams”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 298, pp. 918-933.
- MAURIZI, M. J., BELLÉS, P. M. (1993a)**, “Free vibration of stepped beams elastically restrained against translation and rotation at one end”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 163, n 1, pp. 188-191. .
- MAURIZI, M. J., BELÉS, P. M. (1993b)**, “Natural Frequencies of One-Span with Stepwise Variable Cross-Section”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 168, n 1, pp. 184-188.
- NAGULESWARAN, S. (2002a)**, “Natural Frequencies, Sensitivity and Mode Shape Details of an Euler-Bernoulli Beam With One-Step Change in Cross-Section and with Ends on Classical Supports”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 252, n 4 pp. 751-767
- NAGULESWARAN, S. (2002b)**, “Transversal Vibrations of an Euler-Bernoulli Uniform Beam Carrying Several Particles”, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, pp. 2463-2478.

- NAGULESWARAN, S. (2002c)**, “Vibration of an Euler-Bernoulli on Elastic end Supports and with up to Three Step Changes in Cross-Section”, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, pp. 2541-2555. .
- NAGULESWARAN, S. (2003)**, “Vibration and Stability of an Euler-Bernoulli Beam with up to Three Step Changes in Cross-Section an Axial Force”, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 45, pp. 2563-2579.
- NASCIMENTO, R. F. DO (2005)**, “Análise Dinâmica de Vigas Utilizando o Elemento Finito de Timoshenko com Refinamento P-Adaptativo, Dissertação, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, 235p.
- ROSA, M. A. (1994)**, “Free vibrations of stepped beams with elastic ends”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 173, n 4, pp. 563-567.
- ROSA, M. A. (1995)**, “Free Vibrations of Stepped Beams with Flexible Ends, in the Presence of follower Forces at the Step”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 194, n 4, pp. 631-635.
- TALEB, N. J., SUPPIGERS, E. W. (1961)**, “Vibration of Stepped Beam”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 49, pp. 287-291.
- THOMSON, W. T. (1978)**, “*Teoria da Vibração – com aplicações*”, Editora Interciência Ltda, Rio de Janeiro - RJ, 462 páginas.
- ZHAOHUI, Q. (2004)**, “An accurate method for transcendental eigenproblems with a new criterion for eigenfrequencies”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, pp. 3225-3242.

## Apêndice A

### MODELO DE VIGA UNIFORME

Viga é uma estrutura linear que trabalha em posição horizontal ou inclinada, assentada em um ou mais apoios e que tem a função de suportar os carregamentos normais à sua direção.

Aparentemente o astrônomo italiano Galileo Galilei (1564-1642) foi o primeiro a estudar a resistência dos materiais dando origem a Mecânica dos Materiais. Em sua última publicação, *Duas Novas Ciências* (1638), discutia o problema da viga engastada carregada por seu peso próprio com peso adicional, este problema é conhecido como o “Problema de Galileu”, no qual sua análise obteve resultados incorretos e não foi resolvido de maneira apropriada até 1855. Robbert Hooke (1635-1703) estudou a elasticidade dos materiais e formulou em 1660 a lei conhecida por, “Lei de Hooke”, publicada em 1676. Como resultado de seus estudos, inventou a mola espiral que substituiu o pêndulo dos mecanismos dos relógios.

Em 1680, Edme Mariotte (1654-1684) desenvolveu, independentemente, essa mesma lei e a aplicou às fibras de uma viga; observando que umas fibras se encurtavam e outras se esticavam, desenvolvendo o conceito de “linha neutra”. O Problema de Galileo voltou a ser estudado por James Bernoulli (1654-1705), que supôs que uma secção plana de uma viga, permanece plana durante a flexão, mas não chegou a uma solução satisfatória, pois não deu

importância ao que hoje conhecemos como “linha neutra”. Em 1717, Johann Bernoulli (1667-1748), irmão de James, enunciou o “Princípio dos Deslocamentos Virtuais”, que é o método que ainda hoje aplicamos na determinação das deflexões elásticas em estruturas; posteriormente, seu filho Daniel Bernoulli (1700-1782), estudou o problema da determinação do gráfico elástica de barras flexionadas, e inspirou seu amigo Leonard Eüler (1707-1783), na determinação das curvas elásticas em vigas e colunas, contribuições que utilizamos até hoje.

A viga é tratada como modelo unidimensional, fazendo-se a hipótese que o comprimento é bem maior que as dimensões da seção transversal. Observa-se que a análise de vigas é bastante comum em problemas de engenharia, tornando-se fundamental o estudo de sua formulação. Para esta finalidade, geralmente, consideram-se os modelos de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. A diferença básica entre estes modelos está relacionada ao fato que a formulação de Euler-Bernoulli não considera a deformação de cisalhamento presente nas seções transversais. Para incluir este efeito, deve-se considerar o modelo de Timoshenko, (Nascimento, 2005).

## **A.1 EQUACIONAMENTO DO MODELO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI**

Este Apêndice apresenta o equacionamento dinâmico do modelo de viga de Euler-Bernoulli, ilustrada na Figura A.1. Neste caso, consideram-se as seguintes hipóteses:

- As seções planas de uma viga, tomadas normalmente a seu eixo, permanecem planas após a viga ser submetida à flexão;
- Os deslocamentos verticais de todos os pontos de uma seção transversal são pequenos e iguais ao eixo da viga;
- O deslocamento lateral segundo o eixo  $z$  é nulo;
- Se  $(b/L) < 10$  e  $(h/L) < 10$  ou  $\lambda < 0,05$  então, a influência de cisalhamento é desprezível e a hipótese de seções planas é satisfeita;
- A inércia de rotação é desprezível e
- A viga é composta por material elástico linear, homogêneo e isotrópico sem carregamento axial.

A vibração na viga de Euler-Bernoulli é, geralmente, chamada de vibração transversal, ou vibrações de flexão. Esse tipo de vibração é facilmente percebido pelos humanos quando sobre pontes, por exemplo. A Figura A.1 ilustra uma viga engastada com a direção da vibração transversal indicada pela deflexão,  $v(x, t)$ , visto que ocorre no sentido do eixo  $y$ . A viga em questão possui seção retangular,  $A(x)$ , base,  $b$ , altura,  $h$ , comprimento  $L$  e rigidez de flexão,  $EI(x)$ , de acordo com (Inman, 2001).

O momento fletor,  $M(x, t)$ , que é apresentado na Equação (A.1).

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{A.1})$$

com:

$E$  : módulo de elasticidade longitudinal (GPa)

$I(x)$  : momento de inércia de área com relação ao eixo  $z$  ( $\text{m}^4$ )

$v(x, t)$  : deflexão ao longo do eixo  $y$  (m).

Através da 2ª Lei de Newton aplicada a um elemento infinitesimal de uma viga, obtém-se o seguinte somatório de forças na direção  $y$ .

$$\sum F_y = dm \ddot{x}(t) \quad (\text{A.2})$$

$$V(x + dx, t) - V(x, t) + q(x, t)dx = dm \ddot{x}(t) \quad (\text{A.3})$$

$$\left( V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right) - V(x, t) + q(x, t)dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.4})$$

com:

$V(x, t)$  : esforço cortante (N).

$\rho$  : massa específica.

$A$  : área da seção transversal.

$q(x, t)$  : força distribuída por unidade de comprimento.

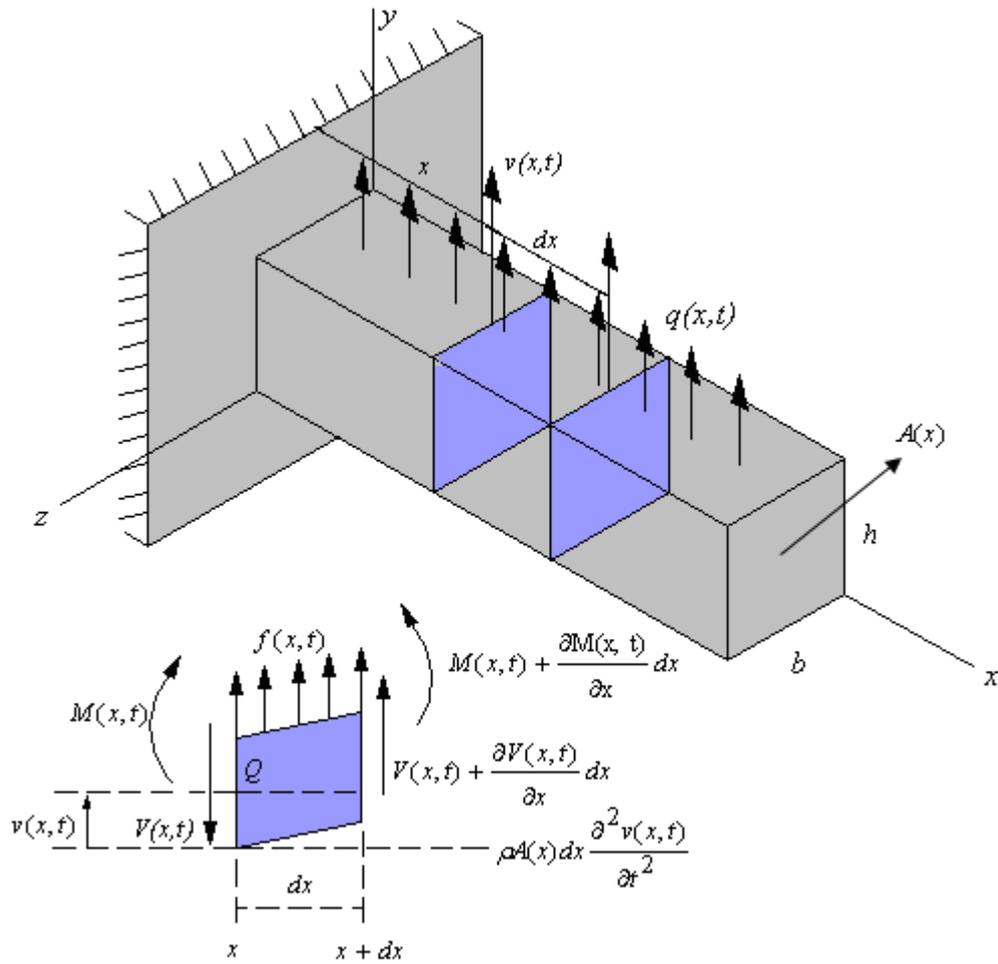


Figura A.1 – Viga uniforme engastada.

Somatório de momentos:

$$M(x+dx, t) - M(x, t) + [q(x, t)dx] \frac{dx}{2} + V(x+dx, t)dx = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx - M(x, t) + q(x, t) \frac{dx^2}{2} + \left[ V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right] dx = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\left[ \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} + V(x, t) \right] dx + \left[ \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + \frac{q(x, t)}{2} \right] (dx)^2 = 0 \quad (\text{A.7})$$

Desprezando-se o termo diferencial de ordem superior ( $dx^2 \cong 0$ ) para o momento, tem-se:

$$V(x,t) = -\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \quad (\text{A.8})$$

Isso mostra que a força cortante é proporcional à derivada do momento fletor em relação a  $x$ . A substituição da expressão do momento fletor na Equação (A.4) produz:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} [M(x,t)] dx + q(x,t) dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.9})$$

A substituição adicional da Equação (A.1) na Equação (A.9), dividindo-se toda a expressão por  $dx$ , leva a:

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right] = q(x,t) \quad (\text{A.10})$$

Se nenhuma força externa for aplicada, ou seja,  $q(x,t) = 0$ , e  $EI(x)$  e  $A(x)$  são admitidos constantes ao longo da viga, a Equação (A.10) simplifica-se de modo que a vibração livre é governada por:

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{A.11})$$

Observa-se que a equação da vibração livre, Equação (A.11), é uma equação diferencial de quarta ordem, logo exigindo quatro condições de contorno ao se determinar a solução. A presença das derivadas temporais de segunda ordem requer que sejam especificadas duas condições iniciais, uma para a deflexão e outra para a inclinação.

As condições de contorno necessárias para se resolver a Equação (A.11) no contexto de uma solução por separação de variáveis são obtidas examinando-se a deflexão  $v(x,t)$ , a derivada da deflexão  $\partial v(x,t)/\partial x$ , o momento fletor  $EI \partial^2 v(x,t)/\partial x^2$ , e a força cortante  $\partial [EI \partial^2 v(x,t)/\partial x^2]/\partial x$  em cada extremidade da viga, isto é, aplicando as devidas condições de contorno.

Uma configuração comum é a viga em balanço, uma extremidade fixa e a outra livre, conforme Figura A.1. Outra condição típica é quando os extremos são pinados representando uma viga biapoiada.

Se uma viga em vibração transversal é livre em uma extremidade, não existem restrições para a deflexão e a inclinação nesse ponto, mas as condições de contorno para a força cortante e o momento fletor devem ser nulos.

$$\text{momento fletor} = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\text{força cortante} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (\text{A.13})$$

Se, por outro lado, a extremidade da viga for engastada, a condição de contorno impõe que a deflexão e a inclinação devem ser nulas nesse extremo:

$$\text{deflexão} = v = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\text{inclinação} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Em uma extremidade simplesmente apoiada (pinada), não existem restrições para a inclinação e a força cortante e, a deflexão e o momento de flexão são nulos:

$$\text{deflexão} = v = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\text{momento fletor} = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{A.17})$$

Em um apoio deslizando, a inclinação é nula.

$$\text{inclinação} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\text{força cortante} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (\text{A.19})$$

Outras condições de contorno são possíveis conectando-se as extremidades de uma viga a uma variedade de dispositivos, sendo determinadas por balanços de força e de momento.

Além das quatro condições de contorno, a solução da Equação (A.11) para a vibração livre só pode ser calculada se duas condições iniciais forem especificadas.

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad , \quad \dot{v}(x, 0) = \dot{v}_0(x) \quad (\text{A.20})$$

considerando-se que  $t = 0$  é o tempo inicial. Sabe-se que  $v_0$  e  $\dot{v}_0$  não podem ser ambos nulos, ou não haveria movimento resultante.

A solução da Equação (A.11) sujeita a quatro condições de contorno e duas condições iniciais seguem os passos convencionais usados nos problemas de contorno e de valor inicial, ou seja, são usadas para se obter um sistema de equações que determinam as constantes da solução geral. Aqui será admitida a possibilidade de escrever a solução na forma de separação de variáveis como a expressão a seguir:

$$v(x, t) = X(x)T(t) \quad (\text{A.21})$$

Substituindo a Equação (A.21) na Equação (A.11), obtém-se:

$$c^2 \frac{X^{iv}(x)}{X(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2 \quad (\text{A.22})$$

onde as derivadas parciais foram substituídas por derivadas totais –  $X^{iv}(x) = d^4 X / dx^4$  e  $\ddot{T} = d^2 T / dt^2$ . Aqui, a escolha da constante de separação,  $\omega^2$ , é feita de maneira que a frequência natural venha da equação temporal.

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (\text{A.23})$$

que é o lado direito da Equação (A.22).

A solução para essa equação é dada na forma:

$$T(t) = d_1 \sin \omega t + d_2 \cos \omega t \quad (\text{A.24})$$

onde as constantes  $d_1$  e  $d_2$  serão determinadas usando-se as condições iniciais especificadas e posteriormente combinando-as com a solução da equação em  $x$ .

A equação em  $x$  surge do rearranjo da Equação (A.22), o que leva a:

$$X^{iv}(x) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0 \quad (\text{A.25})$$

Definindo: 
$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (\text{A.26})$$

$\beta$ : frequência natural,  $(m^{-1})$ .

e assumindo para a Equação (A.25) uma solução na forma  $Ae^{\alpha x}$ , a solução geral da Equação (A.25) pode ser calculada na forma:

$$X(x) = B_1 \sin \beta x + B_2 \cos \beta x + B_3 \sinh \beta x + B_4 \cosh \beta x \quad (\text{A.27})$$

Aqui os valores para  $\beta$  e para três das quatro constantes de integração  $B_1, B_2, B_3$  e  $B_4$  são determinados a partir das quatro condições de contorno. A quarta constante torna-se combinação das constantes  $d_1$  e  $d_2$  da Equação no tempo, que são, então, determinadas a partir das condições iniciais.

Com a aplicação das condições de contorno na viga a ser modelada obtém-se um sistema de equações lineares que é função de  $\hat{\beta}_{1,k}$  e  $\{b\}$ .

$$\left[ H(\hat{\beta}_{1,k}) \right] \{b\} = \{0\} \quad (\text{A.28})$$

$\hat{\beta}_{1,k}$ : frequência natural adimensional.

Com:

$$\{b\} = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4]^T \quad (\text{A.29})$$

Fazendo-se:

$$\det\left(H\left(\hat{\beta}_{1,k}\right)\right)=0 \quad (\text{A.30})$$

Encontram-se os valores do  $\hat{\beta}_{1,k}$  que satisfazem a Equação (A.30).

De posse dos valores do  $\hat{\beta}_{1,k}$  é possível encontrar a solução do sistema da Equação (A.28) que fornecem as constantes da Equação (A.27). Conhecendo os valores do vetor  $\{b\}$ , obtêm-se os modos de vibrar  $X(x)$ .

## Apêndice B

# INSTRUMENTAÇÃO

➤ **Acelerômetro:**

Descrição: Acelerômetro ISOTRON

Fabricante: ENDEVCO

Número do modelo: 256 HX – 100

Número do serial: 12152

Peso: 3,5 g

Sensitividade:

98,75 mv/g	@ 100Hz	10g pk
10,07 mv/(m/s <sup>2</sup> )	@ 100Hz	98 m/s <sup>2</sup> pk

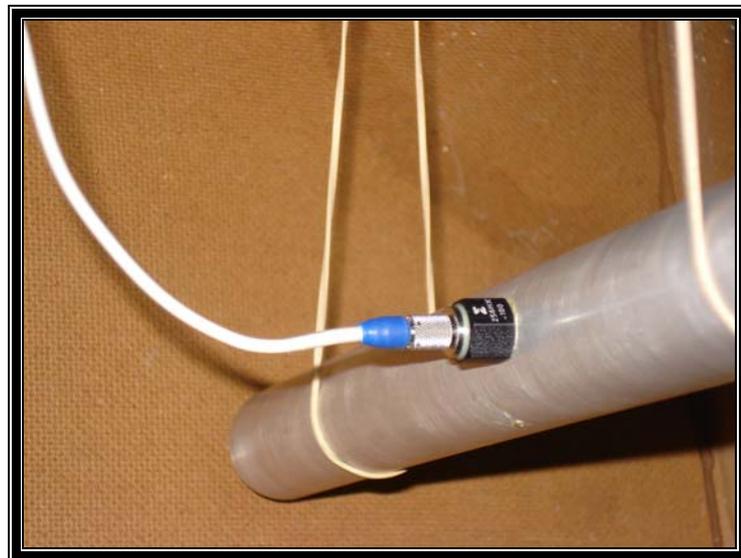


Foto B.1 – Vista lateral do acelerômetro fixado na viga.

➤ **Analizador de sinais:**

Modelo: SR780

*Network Signal Analyzer*

*SRS – Stanford Research Systems*

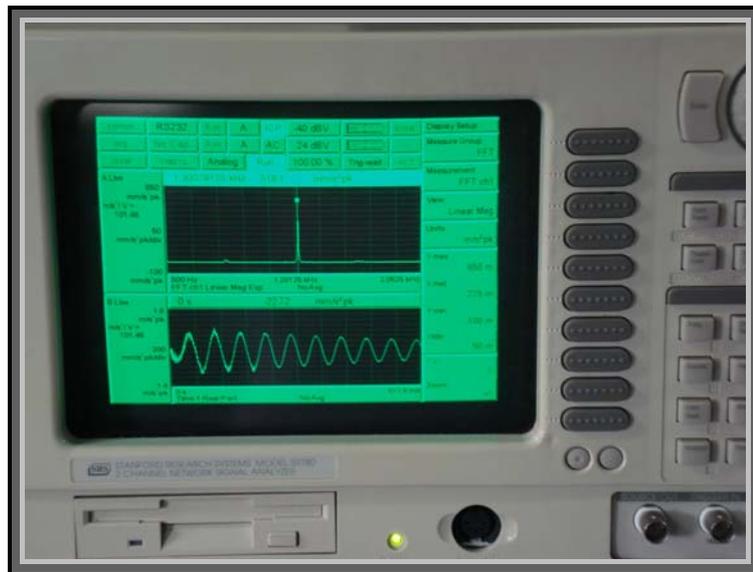


Foto B.2 – Vista frontal do analisador de sinais.

➤ **Micrômetro:**

Faixa de operação: 0 – 25 mm

Fabricante: Mitutoyo

Resolução: 0,001 mm

Resolução adotada: 0,002 mm

Código: LME DID – 011



Foto B.3 – Medição do diâmetro da viga.

➤ **Máquina para ensaio de flexão**

Fabricante: EMIC

Capacidade máxima: 30 kN



Foto B.4 – Vista frontal da máquina para ensaio de flexão.