

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E  
MATEMÁTICA APLICADA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

# Cosmologia Dominada pela Eletrodinâmica Semi-Clássica

Grasiele Batista dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Renato Klippert

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.

ITAJUBÁ, MARÇO DE 2008.

Ao grande companheiro de todos os momentos, Eduardo Bittencourt.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao mestre, flor no lodo, Renato Klippert, pela paciência e exemplo.

Ao meu pai, Antônio Joaquim dos Santos, que sempre me motivou, e acreditou em mim.

Aos colegas, especialmente a uma grande amizade (maternidade?) nascida nestes dois anos, Márcia Regina Guedes.

Ao professor Vitorio de Lorenci, que desde o primeiro ano da graduação me ensinou o quão bela é a natureza.

À CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

A lagrangeana efetiva de Heisenberg-Euler é utilizada como fonte para a geometria de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Utiliza-se uma abordagem perturbativa nos invariantes do campo, são analisadas aproximações de ordem superior à segunda ordem. Mostra-se que a expansão perturbativa da lagrangeana em potências do invariante escalar  $F$  é tal que, quando aproximada até ordens pares, dá origem a soluções cosmológicas regulares, enquanto que aproximações até ordens ímpares geram soluções singulares.

# Abstract

The effective Heisenberg-Euler lagrangian is considered as a source for de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) geometry in a semiclassical analysis. A perturbative approach on the field invariants is used and approximations up to higher than second order are analyzed. We show in this work that the lagrangian expansion is such that, when approximated up to even orders and applied to a spatially homogeneous and isotropic metric structure, generates regular cosmological solutions. When approximated up to odd orders, the expansion as source of Einstein's equations generates singular solutions.

# Conteúdo

Agradecimentos . . . . .	i
Resumo . . . . .	ii
Abstract . . . . .	iii
Índice . . . . .	iv
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Singularidades</b>	<b>4</b>
2.1 Caracterização das Singularidades . . . . .	4
2.2 Congruências Geodésicas Causais . . . . .	5
2.3 Pontos Conjugados . . . . .	9
2.4 Curvas de Máximo Comprimento e Teoremas de Singularidade . . . . .	14
<b>3 Lagrangeana Efetiva Para a QED</b>	<b>17</b>
3.1 QED em campos eletromagnéticos externos . . . . .	17
3.2 Lagrangeana Efetiva de Heisenberg-Euler . . . . .	18
<b>4 Modelo de FLRW Não Singular</b>	<b>20</b>
4.1 Universo Singular de Einstein-Maxwell . . . . .	20
4.2 Modelo Não-Singular Para o Universo de FLRW . . . . .	22
<b>5 Aproximações de Ordem Superior</b>	<b>26</b>
5.1 Universo Singular de Terceira Ordem . . . . .	26
5.2 Universo Não-Singular de Quarta Ordem . . . . .	28
5.3 Solução Qualitativa em Ordem Superior . . . . .	29
<b>6 Conclusão</b>	<b>35</b>
<b>A Expansão da lagrangeana de Heisenberg-Euler</b>	<b>36</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>38</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Logo depois do surgimento da teoria da relatividade geral, as primeiras soluções exatas mostraram que o universo deve ter sido originado em uma época num tempo finito no passado de densidade e curvatura infinitas se a matéria que ele contém obedece as equações de movimento da relatividade geral, juntamente com as hipóteses de homogeneidade e isotropia. Mas na época essa anomalia não foi levada a sério pelo fato de acreditar-se que ela surgia devido ao alto grau de simetria exigido nas condições assumidas na resolução da equações, e não seria portanto característica intrínseca da relatividade geral.

Por volta das décadas de 60 e 70, Hawking, Penrose e Geroch [1] mostraram, por meio de uma análise rigorosa das propriedades globais de um espaço-tempo geral, que sob certas condições plausíveis fisicamente como a positividade da energia e condições sobre causalidade, singularidades tais como a da origem do universo são características inevitáveis de uma grande classe de teorias de gravitação. A existência destas singularidades surge na forma de geodésicas nulas ou do tipo tempo incompletas. Mas não se sabe a estrutura ou natureza das singularidades preditas pelos teoremas de singularidade. Por exemplo, não se sabe se as densidades e curvaturas necessariamente divergirão ao longo das trajetórias caindo nestas singularidades.

No que se segue usa-se a definição de espaço-tempo como sendo uma variedade pseudo-Riemanniana orientada quadri-dimensional dotada de uma geometria com assinatura Lorentziana positiva +2 [isto é,  $(-, +, +, +)$ ].

Faz-se necessária a introdução de algumas definições [2] com relação à estrutura causal do espaço-tempo para o entendimento do capítulo seguinte.

Curvas causais inextensíveis são trajetórias que não possuem pontos terminais futuros ou passados. Uma curva causal inextensível deve ir ao infinito, ou terminar numa singularidade, ou ainda pode ficar confinada em um conjunto compacto.

Seja  $(M, g_{\mu\nu})$  um espaço-tempo arbitrário, e seja um ponto  $p \in M$ . Então, existe uma vizinhança normal convexa de  $p$ , isto é, um conjunto aberto  $U$  com  $p \in U$  tal que para todos  $q, r \in U$  existe uma única geodésica  $\gamma$  conectando  $q$  e  $r$  e permanecendo inteiramente em  $U$ . Além disso, para tal vizinhança,  $I^+(p)|_U$  é o conjunto constituído de todos os pontos alcançados pelas geodésicas do tipo tempo direcionadas para o futuro começando em  $p$  e contidas em  $U$ . Desta forma  $I^+(p)|_U$  denota o futuro cronológico de  $p$  no espaço-tempo  $(U, g_{\mu\nu})$ . Define-se o conjunto  $\dot{I}^+(p)|_U$  como sendo a fronteira topológica do conjunto  $I^+(p)|_U$ .

Um conjunto  $S \subset M$ ,  $M$  uma variedade, é dito acronal se não existirem  $p, q \in S$  tais

que  $q \in I^+(p)|_U$ , isto é, se  $I^+(S) \cap S = \emptyset$ .

Para um conjunto  $S$  fechado e acronal, define-se borda como o conjunto de pontos  $p \in S$  tais que toda vizinhança aberta  $O$  de  $p$  contenha um ponto  $q \in I^+(p)$ , um ponto  $r \in I^-(p)$  e uma curva do tipo tempo  $\lambda$  que liga  $r$  a  $q$  e não intercepta  $S$ .

Seja  $S$  um conjunto fechado e acronal (possivelmente com borda). Define-se o domínio futuro de dependência de  $S$ , denotado por  $D^+(S)$ , por

$$D^+(S) = \{p \in M \mid \text{toda curva causal inextensível para o passado que passa por } p \text{ intercepta } S\} .$$

O domínio passado de dependência,  $D^-(S)$ , é definido da mesma forma, trocando futuro por passado na definição acima. Agora, o domínio de dependência de  $S$ , denotado por  $D(S)$  é definido como

$$D(S) = D^+(S) \cup D^-(S) . \quad (1.1)$$

Um conjunto acronal fechado  $\Sigma$  para o qual  $D(\Sigma) = M$  é chamado superfície de Cauchy.

Um espaço-tempo  $(M, g_{\mu\nu})$  que possui uma superfície de Cauchy é dito ser globalmente hiperbólico.

Um espaço-tempo  $(M, g_{\mu\nu})$  é dito fortemente causal se para todo  $p \in M$  e toda vizinhança  $O$  de  $p$ , existir uma vizinhança  $V$  de  $p$  contida em  $O$  tal que nenhuma curva causal intercepte  $V$  mais do que uma vez.

Seja  $(M, g_{\mu\nu})$  um espaço-tempo fortemente causal e sejam  $p, q \in M$ . Define-se  $C(p, q)$  como o conjunto das curvas causais contínuas, direcionadas para o futuro de  $p$  a  $q$ , onde curvas que diferem somente por uma reparametrização são consideradas a mesma curva. Define-se uma topologia em  $C(p, q)$  da seguinte maneira. Para cada  $U \subset M$  aberto, defina  $O(U) \subset C(p, q)$  por

$$O(U) = \{\lambda \in C(p, q) \mid \lambda \subset U\} . \quad (1.2)$$

Desta forma, define-se esta topologia chamando de abertos em  $C(p, q)$  aos conjuntos  $O(U)$  expressos como

$$O = \cup O(U) . \quad (1.3)$$

Define-se  $C(\Sigma, q)$  como o conjunto das curvas causais contínuas direcionadas para o futuro de  $\Sigma$  a  $q$  e define-se uma topologia em  $C(\Sigma, q)$  da mesma forma como em  $C(p, q)$ .

No modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), as equações de Einstein implicam que se  $\rho + 3p > 0$  para todos os instantes de tempo, onde  $\rho$  é a densidade total de energia e  $p$  a pressão, haverá uma singularidade no instante  $t = 0$  a qual pode ser identificada como a origem do universo. Se  $\rho + p > 0$  para todos os instantes de tempo então ao longo das trajetórias direcionadas para o passado que encontram esta singularidade,  $\rho \rightarrow \infty$  e também o escalar de curvatura  $R_{ij}R^{ij} \rightarrow \infty$ . Desta forma, todas as geodésicas causais direcionadas para o passado são incompletas, no sentido de que cairão na singularidade dentro de um intervalo finito do parâmetro afim.

A existência de singularidades onde os escalares de curvatura e densidades divergem implica uma patologia intrínseca em tais espaços-tempos onde as leis da física não são aplicáveis. A existência de geodésicas incompletas implica que um observador pode desaparecer repentinamente do espaço-tempo depois de um intervalo finito de tempo-próprio.

Singularidades podem ocorrer sem que haja mau comportamento da curvatura. Um exemplo simples é o espaço-tempo de Minkowski com um ponto retirado. Com este

“buraco” no espaço-tempo, existirão geodésicas do tipo tempo caindo nele e que serão portanto incompletas. Porém essa é uma situação artificial que pode ser evitada exigindo que o espaço-tempo seja inextensível, ou seja, não possa ser isometricamente imerso num espaço-tempo maior como um subconjunto próprio. Em [3] são apresentadas detalhadamente técnicas necessárias para determinar quando é possível estender um espaço-tempo.

Há muitas propostas de soluções cosmológicas isentas da singularidade inicial, baseados em diversos mecanismos tais como constante cosmológica [4], acoplamento não-mínimo [5], lagrangeanas não lineares envolvendo termos quadráticos na curvatura [6], modificações na estrutura geométrica do espaço-tempo [7] entre outras.

Neste trabalho utilizou-se a lagrangeana efetiva para a eletrodinâmica quântica de Heisen-

berg-Euler [8] como fonte para as equações de Einstein. A análise é feita através de uma expansão em série nos invariantes do campo, generalizando a eletrodinâmica de Maxwell.

A segunda ordem pode ser verificada experimentalmente através do fenômeno de bi-refringência [9]. Uma revisão completa sobre a lagrangeana efetiva de Heisenberg-Euler pode ser encontrada em [10].

Este trabalho segue da seguinte maneira. O segundo capítulo faz uma análise dos teoremas de singularidade. O terceiro capítulo dá uma introdução à QED e apresenta a lagrangeana de Heisenberg-Euler. O quarto capítulo apresenta o modelo de FLRW com a lagrangeana até segunda ordem como fonte, gerando uma solução regular, isto é, sem a presença da singularidade primordial. No quinto capítulo são apresentados resultados inéditos considerando termos de ordem superior na expansão como fonte para as equações de Einstein. São considerados termos até sexta ordem, sendo que em cada termo a regularidade da solução é analisada, obtendo-se um estudo detalhado sobre o comportamento da série, o qual é complementado por argumentos qualitativos aplicáveis a todas as ordens.

Uma observação a respeito da notação: índices latinos do meio do alfabeto correm de 1 a 3, índices gregos variam de 0 a 3.

# Capítulo 2

## Singularidades

Este capítulo visa a discussão dos teoremas de singularidade [11], que atestam que as singularidades são características intrínsecas das soluções cosmológicas. Esses teoremas afirmam que universos não singulares são incompatíveis com a teoria da Relatividade Geral, assumindo que certas condições de energia sejam satisfeitas pela matéria e outras condições sejam asseguradas no espaço-tempo.

A predição das singularidades mostra que nas condições extremas esperadas perto destas outras forças devem ser levadas em consideração, os aspectos quânticos da matéria têm um papel fundamental no tratamento a ser dado ao estágio inicial do universo.

### 2.1 Caracterização das Singularidades

Intuitivamente, uma singularidade no espaço-tempo é um ponto onde a curvatura diverge, ou ocorre alguma anomalia da métrica. Uma abordagem natural na Relatividade Geral é considerar o espaço-tempo como consistindo de uma variedade  $M$  e uma métrica definida em toda a variedade. Desta forma, a singularidade do Big-Bang da solução de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker não é considerada como parte da variedade, ou seja, não pode ser considerada como um “lugar” no espaço-tempo.

A caracterização das singularidades através da divergência da curvatura não é satisfatória, visto que há várias possibilidades de comportamentos patológicos, envolvendo a curvatura ou escalares formados a partir dela. A proposta mais apropriada é utilizar os buracos deixados pela remoção das singularidades como critério para a presença delas. Estes buracos seriam detectados pela existência de geodésicas que teriam comprimento afim finito, ou seja, existiriam geodésicas que são inextensíveis em ao menos uma direção mas que possuem um intervalo finito do parâmetro afim; tais geodésicas são ditas incompletas.

Desta maneira, poderíamos definir um espaço-tempo inextensível como sendo singular se possuir ao menos uma geodésica incompleta. Podemos classificar uma singularidade por uma geodésica incompleta de acordo com:

- i. um escalar construído polinomialmente de  $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$  e de suas derivadas covariantes diverge ao longo da geodésica (singularidade do escalar de curvatura).
- ii. uma componente de  $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$  ou de suas derivadas covariantes numa tétrada paralelamente propagada diverge ao longo da geodésica (singularidade da curvatura paralelamente propagada).

iii. nem (i) nem (ii) ocorrem (singularidade de não-curvatura).

Há várias objeções a esta definição de singularidades através da incompletude de geodésicas. No entanto, é intuitivo fisicamente que espaços-tempos que são incompletos com relação à geodésicas nulas ou do tipo tempo sejam considerados singulares pois, neste caso, seria possível que uma partícula caindo livremente ou um fóton acabasse sua existência dentro de um intervalo de tempo finito, ou começasse sua existência num tempo finito no passado. Mesmo sem uma definição satisfatória de singularidades, seria justificável caracterizar tais espaços-tempos como singulares.

## 2.2 Congruências Geodésicas Causais

Seja  $M$  uma variedade e seja um conjunto  $O \subset M$  aberto. Uma congruência em  $O$  é uma família de curvas tais que por cada ponto  $p \in O$  passe precisamente uma curva desta família. Desta forma, os vetores tangentes à congruência formam um campo vetorial em  $O$ . A congruência é dita regular se o correspondente campo vetorial for regular.

Consideremos uma congruência de geodésicas do tipo tempo, parametrizadas pelo tempo próprio  $\tau$ , tal que o campo vetorial  $\xi^\mu$  dos vetores tangentes seja normalizado,  $\xi^\mu \xi_\mu = -1$ . O campo correspondente

$$B_{\mu\nu} = \nabla_\nu \xi_\mu \quad (2.1)$$

será puramente espacial, isto é,

$$B_{\mu\nu} \xi^\mu = B_{\nu\mu} \xi^\mu = 0. \quad (2.2)$$

Considere uma subfamília regular a um parâmetro  $\gamma_s(\tau)$  de geodésicas da congruência. O vetor desvio é definido por  $(\partial/\partial s)^\mu$  e representa um deslocamento para uma geodésica infinitesimalmente próxima. Seja  $\eta^\mu$  o vetor desvio ortogonal de  $\gamma_0$  para esta subfamília. Então  $\eta^\mu$  representa um deslocamento espacial infinitesimal de  $\gamma_0$  para uma geodésica próxima. Temos que a derivada de Lie de  $\eta^\mu$  na direção de  $\xi^\nu$  se anula

$$\mathcal{L}_\xi \eta^\mu = 0, \quad (2.3)$$

então

$$\xi^\nu \nabla_\nu \eta^\mu = \eta^\nu \nabla_\nu \xi^\mu = B^\mu{}_\nu \eta^\nu. \quad (2.4)$$

Desta maneira,  $B^\mu{}_\nu$  mede a falha de  $\eta^\mu$  em ser paralelamente transportado na direção de  $\xi^\mu$ . Um observador na geodésica  $\gamma_0$  veria as geodésicas vizinhas se alongando e girando pela ação do mapa linear  $B^\mu{}_\nu$ .

Definimos a métrica espacial  $h_{\mu\nu}$  por

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \xi_\mu \xi_\nu. \quad (2.5)$$

Assim,  $h^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu}$  é o operador projeção sobre o subespaço do espaço tangente perpendicular a  $\xi^\mu$ .

Definimos a expansão  $\theta$ , o cisalhamento  $\sigma_{\mu\nu}$  e a vorticidade  $\omega_{\mu\nu}$  da congruência por

$$\begin{aligned}\theta &= B_{\mu\nu}h^{\mu\nu}, \\ \sigma_{\mu\nu} &= B_{(\mu\nu)} - \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}, \\ \omega_{\mu\nu} &= B_{[\mu\nu]};\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde os parênteses significam simetria nos índices e os colchetes indicam anti-simetria.

Desta forma,  $B_{\mu\nu}$  é composto como

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}.\tag{2.7}$$

A evolução temporal destes parâmetros é dada por

$$\begin{aligned}\xi^\lambda \nabla_\lambda \theta &= -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - R_{\lambda\rho}\xi^\lambda\xi^\rho, \\ \xi^\lambda \nabla_\lambda \sigma_{\mu\nu} &= -\frac{2}{3}\theta\sigma_{\mu\nu} - \sigma_{\mu\lambda}\sigma^\lambda{}_\nu - \omega_{\mu\lambda}\omega^\lambda{}_\nu + \frac{1}{3}h_{\mu\nu}(\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\lambda\rho} - \omega_{\lambda\rho}\omega^{\lambda\rho}) + C_{\lambda\nu\mu\rho}\xi^\lambda\xi^\rho + \frac{1}{2}\tilde{R}_{\mu\nu}, \\ \xi^\lambda \nabla_\lambda \omega_{\mu\nu} &= -\frac{2}{3}\theta\omega_{\mu\nu} - 2\sigma^\lambda{}_{[\nu}\omega_{\mu]\lambda};\end{aligned}\tag{2.8}$$

onde  $\tilde{R}_{\mu\nu}$  é a parte espacial sem traço de  $R_{\mu\nu}$ ,

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = h_{\mu\lambda}h_{\nu\rho}R^{\lambda\rho} - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}h_{\lambda\rho}R^{\lambda\rho},\tag{2.9}$$

e  $C_{\lambda\nu\mu\rho}$  é o tensor de Weyl.

A primeira das equações (2.8) é conhecida como equação de Raychaudhury. Analisemos o último termo do lado direito desta equação. Usando as equações de Einstein podemos escrever

$$R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = 8\pi \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right] \xi^\mu\xi^\nu = k \left[ T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu + \frac{1}{2}T \right].\tag{2.10}$$

O termo  $T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu$  representa fisicamente a densidade de energia da matéria medida por um observador cuja quadri-velocidade é  $\xi^\mu$ . Acredita-se que, para a matéria clássica, essa densidade é não-negativa:

$$T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0, \quad \forall \xi^\mu \text{ do tipo tempo.}\tag{2.11}$$

Esta hipótese é conhecida como condição fraca de energia. Assume-se também que (condição forte de energia):

$$T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq -\frac{1}{2}T, \quad \forall \xi^\mu \text{ do tipo tempo.}\tag{2.12}$$

O tensor  $T_{\mu\nu}$  é simétrico em seus dois índices, mas como  $g_{\mu\nu}$  não é positivo definido, o mapa linear  $T^\mu{}_\nu$  que leva vetores em vetores não é necessariamente diagonalizável. No

entanto, todos os tensores momentum-energia que representam o que pode ser considerado fisicamente como matéria, isto é, que podem ser tratados como fluidos perfeitos, são diagonalizáveis, podendo ser escritos como

$$T_{\mu\nu} = \rho t_\mu t_\nu + p_1 x_\mu x_\nu + p_2 y_\mu y_\nu + p_3 z_\mu z_\nu, \quad (2.13)$$

onde  $t^\mu, x^\mu, y^\mu, z^\mu$  é uma base ortonormal, com  $t^\mu$  do tipo tempo. O autovalor  $\rho$  pode ser interpretado pelo observador  $t^\mu$  como a densidade de energia de repouso da matéria, enquanto os autovalores  $p_1, p_2$  e  $p_3$  são chamadas de pressões principais.

Neste caso a condição fraca de energia lê-se

$$\rho \geq 0, \quad \rho + p_i \geq 0, \quad (2.14)$$

e a condição forte de energia é equivalente a

$$\rho + \sum p_i \geq 0 \text{ e } \rho + p_i \geq 0. \quad (2.15)$$

Se as equações de Einstein são válidas, e se a condição forte de energia é satisfeita pelo tensor  $T_{\mu\nu}$ , então o último termo da equação de Raychaudhuri será não-positivo. Se a congruência é hipersuperfície ortogonal, temos  $\omega_{\mu\nu} = 0$ , e o terceiro termo se anula. O segundo termo,  $-\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ , é não-positivo. Desta forma

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{3}\theta^2 \leq 0, \quad (2.16)$$

o que implica

$$\frac{d(\theta^{-1})}{d\tau} \geq \frac{1}{3}, \quad (2.17)$$

e então

$$\theta^{-1}(\tau) \geq \theta_0^{-1} + \frac{1}{3}\tau, \quad (2.18)$$

onde  $\theta_0$  é o valor inicial de  $\theta$ . Suponhamos que  $\theta_0$  seja negativo, ou seja, a congruência está inicialmente convergindo. Então a equação (2.18) implica que  $\theta^{-1}$  deve assumir o valor 0, isto é,  $\theta \rightarrow -\infty$ , dentro de um intervalo de tempo próprio  $\tau \leq 3/|\theta_0|$ . Assim está demonstrado o seguinte lema.

**Lema 2.2.1** *Seja  $\xi^\mu$  o campo tangente a uma congruência geodésica do tipo tempo hipersuperfície ortogonal. Suponha que  $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0$ , o que de fato será se as equações de Einstein forem válidas e a condição forte de energia for satisfeita pela matéria. Se a expansão  $\theta$  assumir um valor negativo  $\theta_0$  em qualquer ponto de uma geodésica da congruência, então  $\theta \rightarrow -\infty$  ao longo dessa geodésica dentro de um intervalo de tempo próprio  $\tau \leq 3/|\theta_0|$ .*

Para congruências geodésicas nulas, a parametrização é feita através do parâmetro afim  $\lambda$ , mas neste caso não há maneira natural de normalizar o campo vetorial tangente à congruência  $\kappa^\mu$ .

No caso da congruência do tipo tempo, nos restringimos a vetores desvio  $\eta^\mu$  ortogonais a  $\xi^\mu$ . Há duas razões para essa escolha: (1)  $\xi^\mu\nabla_\mu(\xi_\nu\eta^\nu) = \xi^\mu\xi_\nu\nabla_\mu\eta^\nu = \xi_\nu\mathcal{L}_\xi\eta^\nu +$

$\eta^\mu \xi_\nu \nabla_\mu \xi^\nu = 0 \Rightarrow \xi_\nu \eta^\nu$  é constante ao longo da geodésica, e o comportamento da parte não ortogonal não é interessante. (2) Vetores desvio que diferem somente por um múltiplo de  $\xi^\mu$  representam um deslocamento para a mesma geodésica próxima. A ortogonalidade fixa uma condição de gauge natural em  $\eta^\mu$ .

No caso da congruência geodésica nula, estas restrições para a escolha do vetor desvio ainda se aplicam, mas são agora independentes, pois  $\kappa^\mu$  é nulo e portanto ortogonal a si mesmo. Desta forma, a classe de vetores desvio interessantes fisicamente se reduz a um subespaço de dimensão dois, como será descrito a seguir.

Seja  $V_p$  o espaço tangente no ponto  $p \in M$ . Os vetores tangentes em  $V_p$  que são ortogonais a um dado campo vetorial nulo  $\kappa^\mu$  formam um subespaço de dimensão três que chamaremos  $\tilde{V}_p$ . Definimos  $\hat{V}_p$  como o espaço vetorial das classes de equivalência de vetores em  $\tilde{V}_p$ , onde  $x^\mu, y^\mu \in \tilde{V}_p$  são ditos equivalentes se existir  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $x^\mu - y^\mu = c\kappa^\mu$ . Então  $\hat{V}_p$  é um espaço vetorial de dimensão dois.

Um vetor  $t^\mu \in V_p$  não dá origem naturalmente a um vetor em  $\tilde{V}_p$ , porque não há maneira natural de decompô-lo como a soma de um vetor em  $\tilde{V}_p$  e um vetor que não pertence a  $\tilde{V}_p$ . Entretanto, se  $t^\mu \in \tilde{V}_p$ , isto é, se  $t^\mu \kappa_\mu = 0$ , então  $t^\mu$  dá origem a um vetor  $\hat{t}^\mu \in \hat{V}_p$ , tomando sua classe de equivalência. Por outro lado, um vetor dual  $\mu_\alpha \in V_p^*$  dá origem a um vetor dual  $\tilde{\mu}_\alpha \in \tilde{V}_p^*$  restringindo sua ação a vetores de  $\tilde{V}_p$ . No entanto,  $\tilde{\mu}_\alpha$  dá origem a um vetor dual  $\hat{\mu}_\alpha \in \hat{V}_p^*$  se e somente se  $\tilde{\mu}_\alpha \kappa^\alpha = \mu_\alpha \kappa^\alpha = 0$ .

De forma mais geral, um tensor  $T_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_k}$  em  $V_p$  dá origem a um tensor  $\hat{T}_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_k}$  em  $\hat{V}_p$  se e somente se o resultado da contração de um dos seus índices com  $\kappa^\mu$  ou  $\kappa_\mu$  e a contração dos índices restantes com vetores de  $\hat{V}_p$  ou  $\hat{V}_p^*$  for sempre nula. Para estes tensores o produto externo comuta com a projeção em  $\hat{V}_p$ . Para tensores satisfazendo a propriedade de que contração com qualquer um de seus índices com  $\kappa^\mu$  ou  $\kappa_\mu$  é sempre nula, então projeção em  $\hat{V}_p$  e contração comutam.

A métrica  $g_{\mu\nu}$  satisfaz a primeira propriedade acima e, portanto, dá origem a um tensor em  $\hat{V}_p$ , que denotaremos por  $\hat{h}_{\mu\nu}$ .

Consideremos agora uma congruência de geodésicas nulas com campo tangente  $\kappa^\mu$ . O campo tensorial

$$B_{\mu\nu} = \nabla_\nu \kappa_\mu \quad (2.19)$$

também satisfaz a propriedade que garante a existência de um campo tensorial  $\hat{B}_{\mu\nu}$ , o qual pode ser decomposto como

$$\hat{B}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\theta \hat{h}_{\mu\nu} + \hat{\sigma}_{\mu\nu} + \hat{\omega}_{\mu\nu} \quad (2.20)$$

com

$$\begin{aligned} \theta &= \hat{h}^{\mu\nu} \hat{B}_{\mu\nu}, \\ \hat{\sigma}_{\mu\nu} &= \hat{B}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}\theta \hat{h}_{\mu\nu}, \\ \hat{\omega}_{\mu\nu} &= \hat{B}_{[\mu\nu]}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

tal que os parâmetros são interpretados da mesma maneira que no caso da congruência do tipo tempo.

A evolução destes parâmetros é dada por

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{d\lambda} &= -\frac{1}{2}\theta^2 - \hat{\sigma}_{\mu\nu}\hat{\sigma}^{\mu\nu} + \hat{\omega}_{\mu\nu}\hat{\omega}^{\mu\nu} - R_{\lambda\rho}\kappa^\lambda\kappa^\rho, \\ \kappa^\lambda\nabla_\lambda\hat{\sigma}_{\mu\nu} &= -\theta\hat{\sigma}_{\mu\nu} + \hat{C}_{\lambda\nu\mu\rho}\kappa^\lambda\kappa^\rho, \\ \kappa^\lambda\nabla_\lambda\hat{\omega}_{\mu\nu} &= -\theta\hat{\omega}_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Usando as equações de Einstein obtemos agora

$$R_{\mu\nu}\kappa^\mu\kappa^\nu = kT_{\mu\nu}\kappa^\mu\kappa^\nu.\tag{2.23}$$

Desta maneira, tudo o que é necessário para que o último termo da primeira das equações (2.22) seja não positivo é que  $T_{\mu\nu}\kappa^\mu\kappa^\nu \geq 0$ . Se a condição forte de energia, dada pela equação (2.12), for satisfeita, então para todo  $\xi^\mu$  do tipo tempo temos

$$T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu - \frac{1}{2}T\xi^\mu\xi_\mu \geq 0$$

e, por continuidade, a condição  $T_{\mu\nu}\kappa^\mu\kappa^\nu \geq 0$  será verdadeira para todo  $\kappa^\mu$  nulo. De forma análoga, se a condição fraca de energia é satisfeita, então por continuidade a condição acima também será satisfeita. Para um  $T_{\mu\nu}$  diagonalizável, a condição necessária e suficiente para que a equação seja satisfeita para todo vetor nulo  $\kappa^\mu$  é

$$\rho + p_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, 3).\tag{2.24}$$

Obtemos, desta forma, o seguinte resultado.

**Lema 2.2.2** *Seja  $\kappa^\mu$  um campo tangente a uma dada congruência geodésica nula hiper-superfície ortogonal. Suponha que  $R_{\mu\nu}\kappa^\mu\kappa^\nu \geq 0$ , como de fato será se as equações de Einstein forem satisfeitas no espaço-tempo e a condição forte ou fraca de energia forem satisfeitas pela matéria. Se a expansão  $\theta$  toma um valor negativo  $\theta_0$  em qualquer ponto de uma geodésica na congruência, então  $\theta \rightarrow -\infty$  ao longo dessa geodésica dentro de um intervalo do parâmetro afim  $\lambda \leq 2/|\theta_0|$ .*

## 2.3 Pontos Conjugados

Seja  $M$  uma variedade na qual uma conexão está definida, e seja  $\gamma$  uma geodésica com campo tangente  $v^\mu$ . Uma solução  $\eta^\mu$  da equação do desvio geodésico

$$v^\mu\nabla_\mu(v^\nu\nabla_\nu\eta^\lambda) = -R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda\eta^\nu v^\mu v^\rho\tag{2.25}$$

denomina-se campo de Jacobi em  $\gamma$ . Um par de pontos distintos  $p, q \in \gamma$  são ditos conjugados se existir um campo de Jacobi  $\eta^\mu$  não identicamente nulo mas tal que se anula em  $p$  e  $q$ . Desta forma, intuitivamente,  $p$  e  $q$  são conjugados se uma geodésica infinitesimalmente próxima interceptar  $\gamma$  em ambos os pontos  $q$  e  $p$ .

Seja  $\gamma$  uma geodésica do tipo tempo com tangente  $\xi^\mu$  e seja  $p \in \gamma$ . Consideremos a congruência de todas as geodésicas do tipo tempo passando por  $p$  (esta congruência é obviamente singular em  $p$ ), então todo campo de Jacobi que se anula em  $p$  é um vetor

desvio para essa congruência. Veremos que um ponto  $q \in \gamma$  estando no futuro de  $p$  é conjugado a  $p$  se e somente se a expansão  $\theta$  dessa congruência se aproximar de  $-\infty$  em  $q$ . Para isto, é conveniente introduzir uma base ortonormal de vetores espaciais  $e_1^\mu, e_2^\mu, e_3^\mu$  ortogonais a  $\xi^\mu$  e paralelamente propagados ao longo de  $\gamma$ . Como as componentes dos vetores desvio  $\eta^\mu$  para esta congruência satisfazem as equações diferenciais lineares

$$\frac{d^2\eta^\mu}{d\tau^2} = -R_{\alpha\beta\nu}{}^\mu \xi^\alpha \eta^\beta \xi^\nu, \quad (2.26)$$

o valor de  $\eta^\mu$  num instante qualquer  $\tau$  deve depender linearmente das condições iniciais  $\eta^\mu(0)$  e  $d\eta^\mu/d\tau(0)$  em  $p$ . Como, por construção,  $\eta^\mu(0) = 0$ , temos

$$\eta^\mu(\tau) = A^\mu{}_\nu(\tau) \frac{d\eta^\nu}{d\tau}(0). \quad (2.27)$$

Substituindo na equação (2.26), vê-se que a matriz  $A^\mu{}_\nu(\tau)$  satisfaz a equação

$$\frac{d^2 A^\mu{}_\nu}{d\tau^2} = -R_{\alpha\beta\sigma}{}^\mu \xi^\alpha \xi^\sigma A^\beta{}_\nu. \quad (2.28)$$

Tem-se também que  $A^\mu{}_\nu(0) = 0$  e  $dA^\mu{}_\nu/d\tau(0) = \delta_\nu^\mu$ . Agora,  $q$  será conjugado a  $p$  se e somente se existir uma condição inicial não trivial para a qual  $\eta^\mu = 0$  em  $q$ . Pela equação (2.27), isto ocorrerá se e somente se  $\det A^\mu{}_\nu = 0$  em  $q$ . Ou seja,  $\det A^\mu{}_\nu = 0$  é a condição necessária e suficiente para que exista um ponto conjugado a  $p$ .

A matriz  $A^\mu{}_\nu$  se relaciona com o campo tensorial  $B_{\mu\nu}$  através da relação, em notação matricial,

$$B = \frac{dA}{d\tau} A^{-1}. \quad (2.29)$$

Consequentemente

$$\theta = \text{tr} B = \frac{d(\ln|\det A|)}{d\tau}. \quad (2.30)$$

Como  $A$  satisfaz a equação diferencial (2.28),  $d(\det A)/d\tau$  não pode se tornar infinito ao longo de  $\gamma$ . Desta forma, se  $\theta \rightarrow -\infty$  em  $q$ , segue da equação (2.30) que  $\det A \rightarrow 0$  em  $q$ . Agora, se  $\det A \rightarrow 0$  em  $q$ , segue que  $\theta \rightarrow -\infty$  em  $q$ . Assim fica demonstrado que a condição necessária e suficiente para que  $q$  seja conjugado a  $p$  é que tenhamos  $\theta \rightarrow -\infty$  em  $q$  para a congruência emanando de  $p$ .

Pode ser demonstrado que numa vizinhança normal convexa de  $p$  as geodésicas da congruência são ortogonais à superfície de tempo próprio constante  $\tau$  ao longo das geodésicas e, pela última das equações (2.8), se  $\omega_{\mu\nu}$  se anula num instante de tempo qualquer, deve se anular para todo instante de tempo.

**Lema 2.3.1** *Seja  $(M, g_{\mu\nu})$  um espaço-tempo satisfazendo  $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0$  para todo  $\xi^\mu$  do tipo tempo. Seja  $\gamma$  uma geodésica do tipo tempo e seja  $p \in \gamma$ . Suponha que a congruência de geodésicas do tipo tempo com  $\omega_{\mu\nu} = 0$  emanando de  $p$  seja tal que  $\theta$  assumo o valor negativo  $\theta_0$  em  $r \in \gamma$ . Então dentro do intervalo de tempo próprio  $\tau \leq 3/|\theta_0|$  a partir de  $r$  ao longo de  $\gamma$  existirá um ponto  $q$  conjugado a  $p$  (assumindo que  $\gamma$  se estenda até tal ponto).*

A existência de um par de pontos conjugados numa geodésica completa do tipo tempo pode ser demonstrada por hipóteses mais fracas do que as da proposição acima. Se  $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0$  em todo lugar ao longo da geodésica e  $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu > 0$  em um ponto  $r \in \gamma$ , então pode-se mostrar que (para  $p$  suficientemente longe de  $r$ ) a expansão da congruência emanando de  $p$  deve ser negativa em  $r$ . Então  $p$  terá um ponto conjugado  $q$  em  $\gamma$ . Entretanto, mesmo que  $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = 0$  em todo ponto de  $\gamma$ , se os termos de curvatura no lado direito da equação (2.8) forem não nulos em  $r \in \gamma$ , então  $\sigma_{\mu\nu}$  não pode se anular numa vizinhança de  $r$ . Como  $-\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$  também aparece no lado direito da equação de Raychaudhuri, de maneira análoga é estabelecida a existência de pontos conjugados. Logo, tudo o que é exigido para a existência de pontos conjugados em  $\gamma$  é que  $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0$  em todo ponto de  $\gamma$  e  $R_{\mu\nu\lambda\rho}\xi^\nu\xi^\rho \neq 0$  em pelo menos um ponto de  $\gamma$ .

Um espaço-tempo  $(M, g_{\mu\nu})$  é dito satisfazer a condição genérica do tipo tempo se cada geodésica com campo tangente  $\xi^\mu$  possuir ao menos um ponto no qual  $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \neq 0$ .

**Lema 2.3.2** *Seja  $(M, g_{\mu\nu})$  satisfazendo a condição genérica do tipo tempo e suponha  $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0$  para todo  $\xi^\mu$  do tipo tempo, assumindo que a congruência seja hipersuperfície ortogonal, isto é,  $\omega_{\mu\nu} = 0$ . Então, toda geodésica completa do tipo tempo possui um par de pontos conjugados.*

Consideremos agora a relação entre pontos conjugados e as propriedades de comprimento extremo de geodésicas. Sejam os pontos  $p, q \in M$  e considere uma família a um parâmetro de curvas suaves do tipo tempo  $\lambda_\alpha(t)$  de  $p$  a  $q$ , onde o parâmetro  $t$  é escolhido tal que para todo  $\alpha$  tenhamos  $\lambda_\alpha(a) = p, \lambda_\alpha(b) = q$ . O comprimento de cada curva é dado por

$$\tau(\alpha) = \int_a^b f(\alpha, t) dt, \quad (2.31)$$

onde  $f = (-T^\mu T_\mu)^{1/2}$ , sendo  $T^\mu$  os vetores tangentes  $(\partial/\partial t)^\mu$ .

**Lema 2.3.3** *Seja  $\gamma$  uma curva suave do tipo tempo conectando dois pontos  $p$  e  $q \in M$ . Então a condição necessária e suficiente para que  $\gamma$  maximize localmente o tempo próprio entre  $p$  e  $q$  sob variações suaves a um parâmetro é que  $\gamma$  seja uma geodésica sem pontos conjugados a  $p$  entre  $p$  e  $q$ .*

Uma noção semelhante de conjugação ao longo de uma geodésica pode ser estabelecida entre um ponto e uma hipersuperfície inextensível do tipo espaço suave  $\Sigma$ . Definimos primeiramente o tensor curvatura extrínseca  $K_{\mu\nu}$  de  $\Sigma$ . Seja  $\xi^\mu$  o campo vetorial tangente unitário da congruência geodésica do tipo tempo ortogonal a  $\Sigma$ . O tensor  $K_{\mu\nu}$  é definido como

$$K_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu = B_{\nu\mu}. \quad (2.32)$$

Este tensor é puramente espacial, ou seja,  $K_{\mu\nu}\xi^\mu = K_{\nu\mu}\xi^\mu = 0$ . Como esta congruência é hipersuperfície ortogonal,  $\omega_{\mu\nu} = 0$  e  $K_{\mu\nu}$  é simétrico. Podemos, então, expressar  $K_{\mu\nu}$  na forma

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi (h_{\mu\nu} - \xi_\mu \xi_\nu) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi h_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde  $h_{\mu\nu}$  é definido pela equação (2.5), e a equação geodésica foi usada no último passo. Agora,  $h_{\mu\nu}$  é a métrica espacial induzida nas hipersuperfícies de tempo próprio constante a partir de  $\Sigma$  ao longo da congruência geodésica ortogonal a  $\Sigma$ . Desta forma,  $K_{\mu\nu}$  mede a taxa de variação da métrica espacial ao longo da congruência.

O traço da curvatura extrínseca será denotado por  $K$ ,

$$K \equiv h^{\mu\nu} K_{\mu\nu} . \quad (2.34)$$

Desta forma, temos que

$$K = \theta , \quad (2.35)$$

onde  $\theta$  é a expansão da congruência geodésica.

Um ponto  $p$  numa geodésica  $\gamma$  da congruência geodésica ortogonal a  $\Sigma$  é dito ser conjugado a  $\Sigma$  ao longo de  $\gamma$  se existir um vetor desvio ortogonal  $\eta^\mu$  da congruência que seja não-nulo em  $\Sigma$  mas se anule em  $p$ . Resulta, de forma análoga ao caso de pontos conjugados, a seguinte proposição.

**Lema 2.3.4** *Seja  $(M, g_{\mu\nu})$  um espaço-tempo satisfazendo  $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0$  para todo  $\xi^\nu$  do tipo tempo. Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície inextensível do tipo espaço com  $K = \theta < 0$  num ponto  $q \in \Sigma$ . Então dentro do intervalo de tempo próprio  $\tau \leq 3/|K|$  a partir de  $q$  existirá um ponto  $p$  conjugado a  $\Sigma$  ao longo da geodésica  $\gamma$  ortogonal a  $\Sigma$  e passando por  $q$ , assumindo que  $\gamma$  se estenda a tal ponto.*

O seguinte teorema pode ser demonstrado.

**Lema 2.3.5** *Seja  $\gamma$  uma curva do tipo tempo suave conectando um ponto  $p \in M$  a um ponto  $q$  de uma hipersuperfície suave do tipo espaço  $\Sigma$ . Então, a condição necessária e suficiente para que  $\gamma$  maximize localmente o tempo próprio entre  $p$  e  $\Sigma$  sob variações suaves a um parâmetro é que  $\gamma$  seja uma geodésica ortogonal a  $\Sigma$  sem pontos conjugados a  $\Sigma$  entre  $\Sigma$  e  $p$ .*

Tratemos agora do caso de geodésicas nulas. Para qualquer campo de Jacobi  $\eta^\mu$  numa geodésica nula  $\mu$  com vetor tangente  $k^\mu$ , temos

$$k^\lambda \nabla_\lambda [k^\nu \nabla_\nu (k^\mu \eta_\mu)] = 0 , \quad (2.36)$$

o que implica que  $\eta^\mu$  não pode se anular em dois pontos distintos  $p, q \in \mu$ , a menos que  $k^\mu \eta_\mu = 0$  em todo ponto de  $\mu$ . Além disso, se  $\eta^\mu$  for um campo de Jacobi, então  $\eta^\mu + (a + b\lambda)k^\mu$ , com  $a$  e  $b$  constantes, também o será. Desta forma,  $p$  e  $q$  serão conjugados se e somente se existir um campo de Jacobi  $\eta^\mu$  que difere de zero somente por um múltiplo de  $k^\mu$  em ambos  $p$  e  $q$ . Assim, ao longo de uma geodésica nula  $\mu$ , dois pontos  $p$  e  $q$  serão conjugados se e somente se um vetor  $\hat{\eta}^\mu$  em  $\hat{V}$  satisfizer a equação de desvio geodésico e se anular em  $p$  e  $q$ .

O seguinte resultado é obtido.

**Lema 2.3.6** *Seja  $(M, g_{\mu\nu})$  um espaço-tempo que satisfaz  $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$  para todo  $k^\mu$  nulo. Seja  $\mu$  uma geodésica nula e seja  $p \in \mu$ . Suponha que a expansão da congruência geodésica nula com  $\omega_{\mu\nu} = 0$  emanando de  $p$  atinja um valor negativo  $\theta_0$  em  $r \in \mu$ . Então, dentro do intervalo do parâmetro afim  $\lambda \leq 2/|\theta_0|$  a partir de  $r$ , existirá um ponto  $q$  conjugado a  $p$  ao longo de  $\mu$ , assumindo que  $\mu$  se estenda a tal ponto.*

Novamente, este resultado pode ser obtido de hipóteses mais fracas, se  $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$  em todo ponto de uma geodésica completa nula  $\mu$  e se existir ao menos um ponto  $r \in \mu$  no qual  $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu > 0$  ou  $k_{[\delta}C_{\mu]\nu\lambda[\rho}k_{\alpha]}k^\nu k^\lambda \neq 0$ , então  $\mu$  possuirá um par de pontos conjugados. Um espaço-tempo  $(M, g_{\mu\nu})$  é dito satisfazer a condição genérica nula se toda geodésica nula possuir ao menos um ponto onde  $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu > 0$  ou  $k_{[\delta}C_{\mu]\nu\lambda[\rho}k_{\alpha]}k^\nu k^\lambda \neq 0$ .

**Lema 2.3.7** *Suponha que  $(M, g_{\mu\nu})$  satisfaça a condição genérica nula e  $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$  para todo  $k^\mu$  nulo, assumindo que a congruência seja hipersuperfície ortogonal. Então, toda geodésica nula completa possui um par de pontos conjugados.*

Pontos conjugados indicam quando uma geodésica nula  $\mu$  conectando  $p$  e  $q$  pode ser variada resultando uma curva do tipo tempo entre esses pontos. Pode-se demonstrar que:

**Lema 2.3.8** *Seja  $\mu$  uma curva causal suave e sejam  $p, q \in \mu$  distintos. Então, não existirá uma família a um parâmetro de curvas causais suaves  $\lambda_\alpha$  conectando  $p$  e  $q$  com  $\lambda_0 = \mu$  e  $\lambda_\alpha$  do tipo tempo para todo  $\alpha > 0$  (ou seja,  $\mu$  não pode ser suavemente deformada numa curva do tipo tempo) se e somente se  $\mu$  for uma geodésica nula sem pontos conjugados a  $p$  ao longo de  $\mu$  entre  $p$  e  $q$ .*

A noção de conjugação também pode ser definida para um ponto e uma superfície bidimensional do tipo espaço  $S$ . Em cada ponto  $q \in S$  existirão precisamente dois vetores nulos direcionados para o futuro  $k_1^\mu$  e  $k_2^\mu$  que são ortogonais a  $S$ . Se  $S$  for orientável, podemos fazer uma escolha contínua de  $k_1^\mu$  e  $k_2^\mu$  sobre  $S$  e assim definir duas famílias de geodésicas nulas, família que entra e família que sai. Vamos nos referir a cada uma dessas famílias como congruências apesar de cada uma gerar apenas uma hipersuperfície nula em vez de gerar uma região aberta do espaço-tempo. Assumindo  $\hat{\omega}_{\mu\nu} = 0$ , a expansão  $\theta$  e o cisalhamento  $\hat{\sigma}_{\mu\nu}$  estão bem definidos, pois todos os vetores desvio ortogonais aos vetores tangentes  $k^\mu$  estão incluídos na congruência. Seja  $\mu$  uma geodésica nula em uma dessas congruências. Um ponto  $p \in \mu$  é dito ser conjugado a  $S$  se ao longo de  $\mu$  existir um vetor desvio  $\hat{\eta}^\mu$  da congruência que é não nulo em  $S$  mas se anula em  $p$ . Temos então:

**Lema 2.3.9** *Seja  $(M, g_{\mu\nu})$  um espaço-tempo satisfazendo  $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$  para todo  $k^\mu$  nulo. Seja  $S$  uma subvariedade bidimensional do tipo espaço suave tal que a expansão  $\theta$  das geodésicas nulas saindo atinja um valor negativo  $\theta_0$  em  $q \in S$ . Então, dentro do intervalo do parâmetro afim  $\lambda \leq 2/|\theta_0|$ , existirá um ponto  $p$  conjugado a  $S$  ao longo da geodésica nula que sai  $\mu$  passando por  $q$ .*

O seguinte teorema pode ser obtido:

**Lema 2.3.10** *Seja  $S$  uma subvariedade bidimensional do tipo espaço suave e seja  $\mu$  uma curva causal suave de  $S$  a  $p$ . Então, a condição necessária e suficiente para que  $\mu$  não possa ser suavemente deformada numa curva do tipo tempo conectando  $S$  e  $p$  é que  $\mu$  seja uma geodésica nula ortogonal a  $S$  sem pontos conjugados a  $S$  entre  $S$  e  $p$ .*

Como conseqüência deste teorema (e resultados apresentados na introdução) obtém-se o seguinte teorema.

**Lema 2.3.11** *Seja  $(M, g_{\mu\nu})$  um espaço-tempo globalmente hiperbólico e seja  $K$  uma subvariedade bidimensional de  $M$  compacta e orientável. Então, todo  $p \in \dot{I}^+(K)$  está numa geodésica nula direcionada para o futuro começando em  $K$  que é ortogonal a  $K$  e não possui pontos conjugados a  $K$  entre  $K$  e  $p$ .*

## 2.4 Curvas de Máximo Comprimento e Teoremas de Singularidade

Nesta seção usaremos argumentos globais envolvendo compacidade dos espaços de curvas causais  $C(p, q)$  e  $C(\Sigma, p)$  para provar a existência de curvas de máximo comprimento em espaços-tempos globalmente hiperbólicos.

O comprimento  $\tau$  de uma curva causal suave  $\lambda$  entre os pontos  $p$  e  $q \in M$  com tangente  $T^\mu = (\partial/\partial t)^\mu$  é dado pela fórmula

$$\tau[\lambda] = \int (-T^\mu T_\mu)^{1/2} dt . \quad (2.37)$$

É necessário generalizar essa definição para curvas causais contínuas para que  $\tau$  esteja definida para todas as curvas de  $C(p, q)$ . Seja então  $\tilde{C}(p, q)$  o subconjunto de  $C(p, q)$  formado pelas curvas suaves do tipo tempo, com a topologia induzida por  $C$ . Então  $\tilde{C}(p, q)$  é denso em  $C(p, q)$ , isto é, toda curva causal contínua pode ser expressa como um limite de uma sequência de curvas suaves do tipo tempo. Se  $\tau$  for contínua em  $\tilde{C}(p, q)$ , pode-se estendê-la para uma função contínua em  $C(p, q)$  fazendo

$$\tau[\mu] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau[\lambda_n] , \quad (2.38)$$

onde  $\{\lambda_n\}$  é uma sequência em  $\tilde{C}(p, q)$  que se aproxima da curva causal contínua  $\mu \in C(p, q)$ . Entretanto,  $\tau$  não é contínua em  $\tilde{C}(p, q)$ : arbitrariamente perto de qualquer curva do tipo tempo na topologia de  $C(p, q)$  é possível encontrar uma curva “zigzag” do tipo tempo suave de comprimento arbitrariamente perto de zero. No entanto, a função  $\tau$  é semicontínua superiormente em  $\tilde{C}(p, q)$ , isto é, para todo  $\lambda \in \tilde{C}(p, q)$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe uma vizinhança aberta  $O \subset \tilde{C}(p, q)$  de  $\lambda$  tal que para todo  $\lambda' \in O$  tem-se  $\tau[\lambda'] \leq \tau[\lambda] + \epsilon$ . Se  $\tau$  for semicontínua superiormente em  $\tilde{C}(p, q)$ , podemos estendê-la a uma função semicontínua superiormente em  $C(p, q)$  da seguinte forma. Para  $\mu \in C(p, q)$  e  $O \subset C(p, q)$  uma vizinhança aberta de  $\mu$ , definimos

$$T[O] = \sup\{\tau[\lambda] \mid \lambda \in O, \lambda \in \tilde{C}(p, q)\} , \quad (2.39)$$

onde  $\sup$  denota a menor das cotas superiores. Então definimos

$$\tau[\mu] = \inf\{T[O] \mid O \text{ uma vizinhança aberta de } \mu\} , \quad (2.40)$$

onde  $\inf$  denota a maior das cotas inferiores. Assim, o que nos permite estender a definição de  $\tau$  a  $C(p, q)$  é expresso no seguinte resultado.

**Lema 2.4.1** *Seja  $(M, g_{\mu\nu})$  um espaço-tempo fortemente causal. Sejam  $p$  e  $q \in M$  com  $q \in I^+(p)$ . Então,  $\tau$  é semicontínua superiormente em  $\tilde{C}(p, q)$ .*

Podemos definir  $C(\Sigma, p)$  para qualquer conjunto acronal  $\Sigma$  num espaço-tempo fortemente causal. Analogamente ao caso tratado acima, podemos afirmar que  $\tau$  é semicontínua superiormente no espaço  $\tilde{C}(\Sigma, p)$  de curvas suaves do tipo tempo de  $\Sigma$  a  $p$ . Desta forma,  $\tau$  pode ser estendida a uma função semicontínua superiormente definida em todo espaço  $C(\Sigma, p)$ .

Na seção anterior foi visto que a condição necessária e suficiente para que uma curva suave maximizasse localmente o comprimento entre dois pontos ou entre um ponto e uma hipersuperfície era que fosse uma geodésica sem pontos conjugados. Agora que a definição de  $\tau$  foi estendida para curvas contínuas, pode haver a possibilidade de que uma curva contínua não suave entre dois pontos ou entre um ponto e uma hipersuperfície possa ter comprimento maior ou igual ao da geodésica. Mas há um resultado que garante que isso não acontece. Pode-se mostrar que em qualquer vizinhança normal convexa  $U$ , a única geodésica  $\gamma$  conectando dois pontos causalmente relacionados  $r, s \in U$  tem comprimento estritamente maior que qualquer outra curva causal suave conectando esses dois pontos. Desta forma, pela semicontinuidade superior, qualquer curva causal contínua,  $\mu$ , conectando  $r$  e  $s \in U$  deve satisfazer  $\tau[\mu] \leq \tau[\gamma]$ . Segue o seguinte resultado.

**Lema 2.4.2** *Seja  $(M, g_{\mu\nu})$  um espaço-tempo fortemente causal. Sejam  $p, q \in M$  onde  $q \in J^+(p)$ , e considere a função  $\tau$  definida em  $C(p, q)$ . Uma condição necessária para que  $\tau$  atinja seu valor máximo em  $\gamma \in C(p, q)$  é que  $\gamma$  seja uma geodésica sem pontos conjugados a  $p$  entre  $p$  e  $q$ .*

Analogamente, segue:

**Lema 2.4.3** *Seja  $(M, g_{\mu\nu})$  um espaço-tempo fortemente causal. Seja  $p \in M$ , seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície do tipo espaço suave e acronal, e considere a função  $\tau$  definida em  $C(\Sigma, p)$ . Uma condição necessária para que  $\tau$  atinja seu valor máximo em  $\gamma \in C(\Sigma, p)$  é que  $\gamma$  seja uma geodésica ortogonal a  $\Sigma$  sem pontos conjugados a  $\Sigma$  entre  $\Sigma$  e  $p$ .*

Estes resultados não garantem a existência de um valor máximo para  $\tau$ , mas os próximos teoremas mostram que o valor máximo é sempre atingido pela função  $\tau$  em espaços-tempos globalmente hiperbólicos.

**Lema 2.4.4** *Seja  $(M, g_{\mu\nu})$  um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Sejam  $p, q \in M$  onde  $q \in J^+(p)$ . Então, existe uma curva  $\gamma \in C(p, q)$  para a qual  $\tau$  atinge seu valor máximo em  $C(p, q)$ .*

**Lema 2.4.5** *Seja  $(M, g_{\mu\nu})$  um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Seja  $p \in M$  e seja  $\Sigma$  uma superfície de Cauchy. Então existe uma curva  $\gamma \in C(\Sigma, p)$  para a qual  $\tau$  atinge seu valor máximo em  $C(\Sigma, p)$ .*

Seguem agora os teoremas de singularidade.

**Teorema 2.4.1** *Seja  $(M, g_{\mu\nu})$  um espaço-tempo globalmente hiperbólico com  $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0$  para todo  $\xi^\mu$  do tipo tempo hipersuperfície ortogonal, o que de fato ocorre se as equações de Einstein são válidas e a condição forte de energia é satisfeita pela matéria. Suponha que exista uma superfície de Cauchy  $\Sigma$  do tipo espaço suave (ou, ao menos, de classe  $C^2$ ) para a qual o traço da curvatura extrínseca (para a congruência geodésica normal direcionada para o passado) satisfaça  $K \leq C < 0$  em todo lugar, onde  $C$  é uma constante. Então, nenhuma curva do tipo tempo direcionada para o passado a partir de  $\Sigma$  possui comprimento maior que  $3/|C|$ . Em particular, todas as geodésicas do tipo tempo direcionadas para o passado são incompletas.*

Para provar este teorema, supõe-se que há uma curva  $\lambda$  do tipo tempo direcionada para o passado, a partir de  $\Sigma$ , com comprimento afim maior que  $3/|C|$ . Seja  $p$  um ponto em  $\lambda$  estando além do comprimento  $3/|C|$  a partir de  $\Sigma$ . Pelo lema 2.4.5, existe uma curva de máximo comprimento  $\gamma$  de  $p$  a  $\Sigma$ , a qual claramente deve possuir comprimento maior que  $3/|C|$ . Pelo lema 2.4.3,  $\gamma$  deve ser uma geodésica sem pontos conjugados entre  $\Sigma$  e  $p$ . Entretanto, isto contradiz o lema 2.3.4 que implica que  $\gamma$  deve possuir um ponto conjugado entre  $\Sigma$  e  $p$ . Logo, a curva  $\lambda$  original não pode existir.

A hipótese de hiperbolicidade global pode ser removida, desde de que uma nova hipótese seja adicionada:  $\Sigma$  deve ser compacta. A conclusão também é enfraquecida no sentido de que ao menos uma geodésica do tipo tempo direcionada para o passado deve ser incompleta, e não necessariamente todas as geodésicas do tipo tempo.

**Teorema 2.4.2** *Seja  $(M, g_{\mu\nu})$  um espaço-tempo fortemente causal com  $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0$  para todo  $\xi^\mu$  do tipo tempo hipersuperfície ortogonal, o que de fato ocorre se as equações de Einstein são válidas e a condição forte de energia é satisfeita pela matéria. Suponha que exista uma hipersuperfície  $S$  do tipo espaço suave, acronal, sem borda e compacta tal que para toda congruência geodésica normal direcionada para o passado a partir de  $S$  tenhamos  $K < 0$  em todo ponto de  $S$ . Seja  $C$  o valor máximo de  $K$ , desta forma  $K \leq C < 0$  em todo lugar de  $S$ . Então, ao menos uma geodésica do tipo tempo inextensível direcionada para o passado a partir de  $S$  não possui comprimento maior que  $3/|C|$ .*

# Capítulo 3

## Lagrangiana Efetiva Para a QED

### 3.1 QED em campos eletromagnéticos externos

A lagrangeana que descreve o sistema interagente de fótons, elétrons e pósitrons é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^\gamma + \mathcal{L}_0^{e^+e^-} + \mathcal{L}_{int} , \quad (3.1)$$

onde as lagrangeanas livres  $\mathcal{L}_0^\gamma + \mathcal{L}_0^{e^+e^-}$  para fótons e elétrons são expressas em termos do campo de Dirac  $\Psi(x)$  e do campo  $A_\mu(x)$  como [12]

$$\mathcal{L}_0^{e^+e^-} = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_e)\Psi(x) , \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L}_0^\gamma = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \text{termo de fixação de gauge} , \quad (3.3)$$

onde  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac 4x4,  $\bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger(x)\gamma^0$  e  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor do campo eletromagnético.

O princípio do acoplamento mínimo dá origem à lagrangeana de interação

$$\mathcal{L}_{int} = -e\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)A_\mu(x) , \quad (3.4)$$

usando  $\hbar = c = 1$ .

Um campo eletromagnético externo é incorporado adicionando-se ao campo quântico  $A_\mu$  na equação (3.4) um vetor potencial externo não quantizado  $A_\mu^e$  tal que a interação total se torna

$$\mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{int}^e = -e\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)[A_\mu(x) + A_\mu^e(x)] . \quad (3.5)$$

A teoria quântica de campos é definida através de integrais funcionais para a função partição da mecânica quântica

$$Z[A^e] = \int [D\Psi D\bar{\Psi} DA_\mu] \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L} + \mathcal{L}_{int}^e) \right] , \quad (3.6)$$

a ser integrada sobre todas as flutuações eletromagnéticas e campos grassmanianos. A quantidade normalizada  $Z[A^e]$  dá a amplitude de transição vácuo-vácuo na presença do campo eletromagnético externo clássico,

$$\langle out, 0 | 0, in \rangle = \frac{Z[A^e]}{Z[0]} , \quad (3.7)$$

onde  $|0, in \rangle$  é o estado inicial do vácuo no instante de tempo  $t = t_- \rightarrow -\infty$  e  $\langle out, 0|$  é o estado final de vácuo no instante  $t = t_+ \rightarrow \infty$ .

Selecionando apenas os diagramas de Feynman irredutíveis a uma partícula na expansão perturbativa de  $Z[A^e]$ , obtém-se a ação efetiva como um funcional de  $A^e$ :

$$\Delta S_{ef}[A^e] \equiv -i \ln \langle out, 0|0, in \rangle . \quad (3.8)$$

Sob a hipótese de que o campo externo  $A^e(x)$  varia pouco numa região finita do espaço-tempo, podemos obter uma lagrangeana efetiva aproximadamente local  $\Delta \mathcal{L}_{ef}[A^e]$ , tal que

$$\Delta S_{ef}[A^e] \sim \int d^4x \Delta \mathcal{L}_{ef}[A^e] \sim V \Delta t \Delta \mathcal{L}_{ef}[A^e] , \quad (3.9)$$

onde  $V$  é o volume espacial e  $\Delta t = t_+ - t_-$ . Para  $\Delta t \rightarrow \infty$ , a amplitude de transição vácuo-vácuo assume a forma

$$\langle out, 0|0, in \rangle = e^{-i(\Delta\epsilon_0 - i\Gamma/2)\Delta t} , \quad (3.10)$$

onde  $\Delta\epsilon_0 = \epsilon_0(A^e) - \epsilon_0(0)$  é a diferença entre as energias do vácuo na presença e na ausência do campo,  $\Gamma$  é a taxa de decaimento do estado de vácuo e  $\Delta t$  o intervalo de tempo no qual o campo pode ser não nulo.

A probabilidade de que o vácuo permaneça como é na presença do campo eletromagnético externo clássico é dada por

$$|\langle out, 0|0, in \rangle|^2 = e^{-2\text{Im}\Delta S_{ef}[A^e]} . \quad (3.11)$$

## 3.2 Lagrangeana Efetiva de Heisenberg-Euler

O cálculo da corrente associada ao vácuo do campo de uma partícula carregada envolve a construção da função de Green para o campo da partícula no campo eletromagnético prescrito. Esta corrente do vácuo pode ser exibida como uma variação de uma ação, a qual é adicionada ao campo de Maxwell na descrição do comportamento dos campos eletromagnéticos no vácuo. Em [13] esta questão é resolvida de forma a preservar a invariância de gauge característica à QED. As equações de movimento da partícula, cujas soluções são resolvidas usando o tempo próprio como parâmetro, envolvem somente as intensidades do campo eletromagnético.

Para campos constantes, a renormalização da intensidade do campo e da carga resulta uma função de lagrange modificada que difere da do campo de Maxwell por termos que implicam num comportamento não linear do campo.

Introduzimos o escalar

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (B^2 - E^2) \quad (3.12)$$

e o pseudoescalar

$$\mathcal{G} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* = \vec{E} \cdot \vec{B} . \quad (3.13)$$

Definimos a quantidade

$$X = \sqrt{2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})} = \sqrt{(B + iE)^2} .$$

A langrangeana vem dada [13] finalmente por

$$\mathcal{L} = -\mathcal{F} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} \exp -m^2 s \left[ (es)^2 \mathcal{G} \frac{Re \cosh esX}{Im \cosh esX} - 1 - \frac{2}{3} (es)^2 \mathcal{F} \right], \quad (3.14)$$

que resulta, em aproximação até segunda ordem, restabelecendo as constantes  $\hbar$  e  $c$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2) + \frac{2\alpha^2 (\hbar/mc)^3}{45mc^2} \left[ (E^2 - B^2)^2 + 7(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \right]. \quad (3.15)$$

onde  $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$ .

As quantidades físicas que caracterizam o campo estão contidas no tensor momentum-energia

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\nu &= \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} - 2 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\lambda}} \right) F_{\nu\lambda} \\ &= -(F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{F}) \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}} \right) + \delta^\mu{}_\nu \left( \mathcal{L} - \mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}} - \mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

O tensor de Maxwell

$$T_{\nu}^{(M)} = F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} - \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\nu F_{\lambda\kappa} F^{\lambda\kappa} \quad (3.17)$$

é obtido de  $\mathcal{L} = -\mathcal{F}$ , a aproximação de campo fraco da equação (3.14).

Incluindo os próximos termos na expansão resulta

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(M)} \left( 1 - \frac{16}{45} \alpha^2 \frac{(\hbar/mc)^3}{mc^2} \mathcal{F} \right) - g_{\mu\nu} \frac{2}{45} \alpha^2 \frac{(\hbar/mc)^3}{mc^2} (4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2) + \dots \quad (3.18)$$

# Capítulo 4

## Modelo de FLRW Não Singular

A generalização da eletrodinâmica de Maxwell é utilizada, em expansão até segunda ordem nos invariantes do campo na lagrangeana (3.14), como fonte para as equações de Einstein [14]. A presença das não-linearidades do campo eletromagnético cria uma pressão negativa na fase inicial do Universo, os próprios fótons se comportando como um tipo de matéria exótica que viola a condição forte de energia, comportamento que evita o aparecimento da singularidade inicial.

### 4.1 Universo Singular de Einstein-Maxwell

A Relatividade Geral é uma teoria de gravitação consistente, que prediz corretamente o movimento de partículas e fótons em um espaço-tempo curvo mas, para aplicá-la ao universo, primeiramente é necessário modelá-lo por um fluido simples macroscópico, sem viscosidade e sem condutividade de calor. O tensor momentum-energia é então o de um fluido perfeito,

$$T_{\mu\nu} = -(\rho + p)v_{\mu}v_{\nu} - pg_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia do fluido e  $p$  sua pressão. Qualquer resultado obtido desta teoria deve concordar com resultados observacionais. A observação corrobora a hipótese de que o universo é homogêneo e isotrópico. A homogeneidade, de maneira simplificada, significa que em qualquer instante de tempo cada ponto do espaço é identificado com qualquer outro ponto. A isotropia implica que não há direção privilegiada no espaço.

Torna-se necessário a construção de uma métrica que satisfaça esses pressupostos. A métrica utilizada aqui é a da geometria de FLRW, cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{A^2(t)}{1 - \epsilon r^2/4c^2} [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (4.2)$$

onde  $(t, r, \theta, \varphi)$  são as coordenadas esférico-polares isotrópicas e  $A(t)$  é o fator de escala. A topologia do espaço está relacionada com o valor do parâmetro  $\epsilon$ :  $\epsilon = -1, 0, +1$  para os casos de universo aberto, plano ou fechado, respectivamente.

A hipersuperfície 3-dimensional  $t = \text{constante}$  é ortogonal a uma classe de observadores representada, em coordenadas comóveis, pelo campo vetorial de velocidade  $v^{\mu} = c\delta_0^{\mu}$ . Para um fluido perfeito com densidade de energia  $\rho$  e pressão  $p$  segue das equações de campo

de Einstein que

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{A}}{A} = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} = -\frac{k}{6}(\rho + 3p), \quad (4.4)$$

onde  $k$  é a constante gravitacional de Einstein e o ponto representa a derivada de Lie com respeito ao campo vetorial  $v^\mu$ .

As equações (4.3) e (4.4) admitem uma integral primeira

$$\frac{k}{3}\rho = \left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 + \frac{\epsilon}{A^2}. \quad (4.5)$$

A eletrodinâmica de Maxwell gera um universo singular no modelo de FLRW. Este fato é consequência direta dos teoremas de singularidade, e segue de uma análise da lei de conservação da energia e da equação de Raychaudhuri [15]. Como as seções espaciais da geometria FLRW são isotrópicas, campos eletromagnéticos podem gerar tal universo somente se um procedimento de médias for adotado [16]. A média espacial volumétrica de uma quantidade  $X$  num instante  $t$  é dada por

$$\bar{X} \doteq \lim_{V \rightarrow V_o} \frac{1}{V} \int X \sqrt{-g} d^3x^i,$$

onde  $V = \int \sqrt{-g} d^3x^i$  e  $V_o$  é o volume dependente do tempo de todo o espaço.

Não há direção privilegiada no espaço para os campos elétrico  $E_\mu$  e magnético  $B_\mu$ , portanto

$$\begin{aligned} \bar{E}_\mu &= 0, \\ \bar{B}_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por outro lado, em geral tem-se

$$\begin{aligned} \overline{E_\mu B_\nu} &= \frac{1}{3} \vec{E} \cdot \vec{B} h_{\mu\nu}, \\ \overline{E_\mu E_\nu} &= \frac{1}{3} E^2 h_{\mu\nu}, \\ \overline{B_\mu B_\nu} &= \frac{1}{3} B^2 h_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $h_{\mu\nu}$  está definido em (2.5).

O tensor momentum-energia associado à lagrangeana de Maxwell é dado por

$$T_{\mu\nu} = - \left( F_{\mu\alpha} F^\alpha{}_\nu + \frac{1}{4} F g_{\mu\nu} \right), \quad (4.8)$$

onde  $F = 4\mathcal{F}$ , sendo  $\mathcal{F}$  o escalar definido em (3.12). Usando as médias dadas acima, segue que a equação (4.8) se reduz à configuração de um fluido perfeito com densidade de energia  $\rho_\gamma$  e pressão  $p_\gamma$  como

$$\overline{T_{\mu\nu}} = -(\rho_\gamma + p_\gamma) v_\mu v_\nu - p_\gamma g_{\mu\nu}, \quad (4.9)$$

onde

$$\rho_\gamma = 3p_\gamma = \frac{1}{2} (E^2 + B^2). \quad (4.10)$$

Como tanto a densidade de energia quanto a pressão são quantidades positivas definidas para todo instante de tempo resulta, observando a equação (4.4), a natureza singular do universo de FLRW. As equações de Einstein levam a [17]

$$A(t) = \sqrt{A_0^2 t - \epsilon t^2}, \quad (4.11)$$

onde  $A_0$  é uma constante arbitrária. Vê-se claramente da equação (4.11) que no instante  $t = 0$  surge a singularidade  $A = 0$ .

## 4.2 Modelo Não-Singular Para o Universo de FLRW

O modelo proposto em [14] considera a generalização da lagrangeana de Maxwell de acordo com a expressão (3.14) até termos de segunda ordem nos invariantes  $F$  e

$$G = -4\mathcal{G} = -4\vec{E} \cdot \vec{B},$$

onde  $\mathcal{G}$  é dado em (3.13), tal que

$$L = -\frac{1}{4} F + \beta F^2 + \gamma G^2. \quad (4.12)$$

O significado físico dos parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  pode ser identificado no trabalho de Schwinger conforme a expansão até segunda ordem (no tensor de Maxwell  $F_{\mu\nu}$ ) como um múltiplo numérico positivo de  $e^4 \hbar / m_e^4 c^7$ . Fazendo  $\beta = \gamma = 0$  obtém-se a eletrodinâmica de Maxwell. Termos que envolvem o produto  $FG$  não são incluídos para preservar a paridade.

O tensor momentum-energia para uma teoria não linear do eletromagnetismo é dado por

$$T_{\mu\nu} = 4 L_F F_\mu^\alpha F_{\alpha\nu} + (L - G L_G) g_{\mu\nu}, \quad (4.13)$$

onde  $L_F$  representa a derivada parcial da lagrangeana com respeito ao invariante  $F$  e  $L_G$  a derivada parcial com respeito ao invariante  $G$ .

Como o modelo é relevante apenas no estágio inicial do universo, onde a matéria é identificada com um plasma primordial [18], faz-se  $E^2 = 0$  e  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$  nas equações (4.7), o que fisicamente significa que não havia polarização elétrica no universo. Como o processo de tomar médias é independente das equações de campo eletromagnético, as equações (4.6) e (4.7) são utilizadas para se obter um análogo da equação (4.9) para o caso não linear.

A média do tensor momentum-energia é identificada como sendo a de um fluido perfeito com as seguintes expressões para a densidade de energia e pressão

$$\rho_\gamma = \frac{1}{2} B^2 (1 - 8 \beta B^2), \quad (4.14)$$

$$p_\gamma = \frac{1}{6} B^2 (1 - 40 \beta B^2). \quad (4.15)$$

Inserindo as equações acima na equação (4.3) resulta

$$B^2 (1 - 16\beta B^2) \left( \frac{\dot{B}}{B} + 2\frac{\dot{A}}{A} \right) = 0, \quad (4.16)$$

que, integrando, implica na relação

$$B = \frac{H_o}{A^2}, \quad (4.17)$$

onde  $H_o$  é uma constante. Substituindo as equações (4.17) e (4.14) em (4.5) obtém-se

$$\dot{A}^2 = \frac{kH_o^2}{6A^2} \left( 1 - \frac{8\beta H_o^2}{A^4} \right) - \epsilon. \quad (4.18)$$

Como o lado esquerdo desta equação é não negativo segue que, independente do valor de  $\epsilon$ , para  $\beta > 0$ , o fator de escala  $A(t)$  não pode ser arbitrariamente pequeno.

A solução desta equação é dada implicitamente por

$$ct = \pm \int_{A_o}^{A(t)} \frac{dz}{\sqrt{\frac{kH_o^2}{6z^2} - \frac{8\beta kH_o^4}{6z^6} - \epsilon}}, \quad (4.19)$$

onde  $A(0) = A_o$ .

Para o caso euclidiano ( $\epsilon = 0$ ), a expressão acima resulta

$$A^2 = H_o \sqrt{\frac{2}{3} (k c^2 t^2 + 12\beta)}. \quad (4.20)$$

Da equação (4.17), a magnitude média  $B$  do campo magnético evolui com o tempo na forma

$$B^2 = \frac{3}{2} \frac{1}{k c^2 t^2 + 12\beta}. \quad (4.21)$$

A expressão (4.20) é singular para  $\beta < 0$  pois existe um instante  $t = \sqrt{-12\beta/k c^2}$  para o qual  $A(t)$  é arbitrariamente pequeno. Para  $\beta > 0$ , em  $t = 0$ , o raio do universo atinge um valor mínimo dado por

$$A_{min}^2 = H_o \sqrt{8\beta}. \quad (4.22)$$

A constante  $H_o$  é a única constante livre do modelo. O comportamento não singular do fator de escala é mostrado na figura 4.1.

A densidade de energia dada pela equação (4.14) atinge seu valor máximo  $\rho_{max} = 1/64\beta$  no instante  $t = t_c$  dado por

$$t_c = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{12\beta}{k}}. \quad (4.23)$$

Para valores menores de  $t$  a densidade de energia decresce, anulando-se em  $t = 0$ , enquanto a pressão se torna negativa, como pode ser visto pela figura 4.2. Somente para instantes de tempo  $t < 3t_c$  os efeitos não lineares são relevantes. A solução dada pela equação (4.20) se aproxima da solução dada em (4.11) para valores grandes de  $t$ .

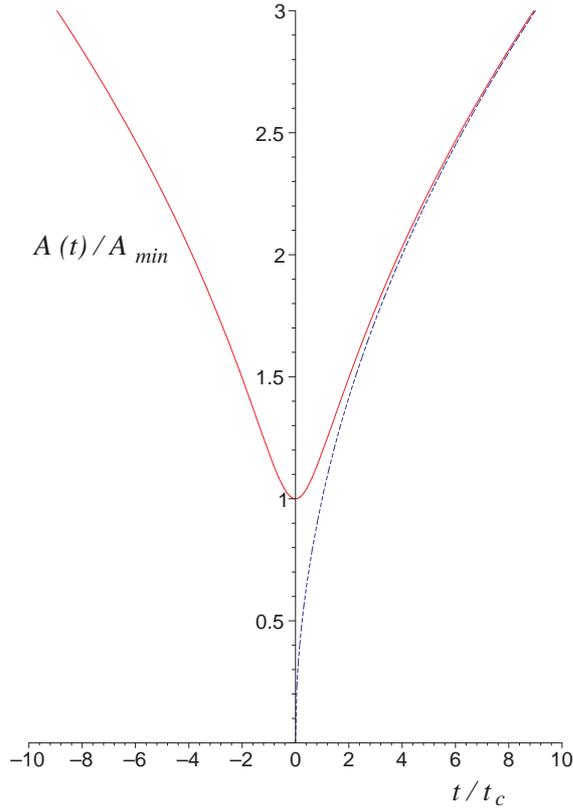


Figura 4.1: Comportamento não-singular do fator de escala.  $A_{min}$  e  $t_c$  são dados pelas equações (4.22) e (4.23). A expressão clássica correspondente é representada pela linha pontilhada, com  $A_0 = A_{min}$ .

O tensor momentum-energia (4.13) não possui traço nulo para  $\beta \neq 0$ . Desta forma, a equação de estado  $p_\gamma = p_\gamma(\rho_\gamma)$  possui um termo adicional quintessencial [19] proporcional à constante  $\beta$ , dado por

$$p_\gamma = \frac{1}{3} \rho_\gamma - \frac{16}{3} \beta B^4. \quad (4.24)$$

A análise da consistência deste modelo é feita através da análise da equação para a densidade de energia, equação (4.14). A condição a ser satisfeita é

$$1 - 8\beta B^2 \geq 0. \quad (4.25)$$

Na história do universo descrito por esse modelo, a média espacial da intensidade do campo magnético  $B^2$  é globalmente regular, e é limitada por cima no valor exato onde a igualdade em (4.25) é válida. Porém, esta igualdade é um limite extremo para a expansão realizada na lagrangeana, pois nesta configuração o termo de correção se iguala ao termo corrigido.

Logo, do ponto de vista da consistência matemática, ou seja, para assegurar a convergência da série, torna-se necessário o cálculo de termos de ordem superior, que será realizado no próximo capítulo.

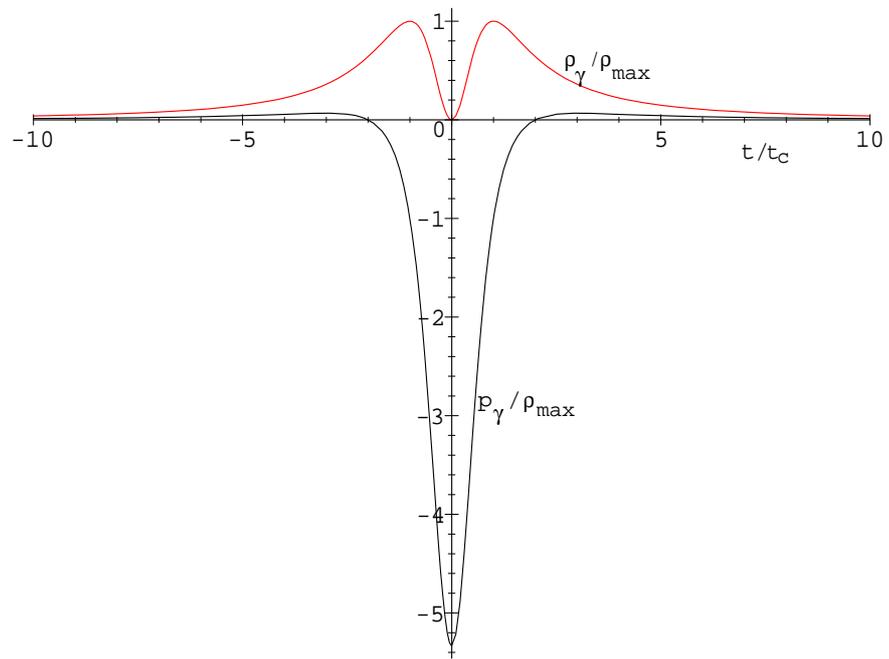


Figura 4.2: Dependência temporal da densidade de energia eletromagnética  $\rho_\gamma$  e pressão  $p_\gamma$ .

# Capítulo 5

## Aproximações de Ordem Superior

No capítulo que segue convencionou-se utilizar ilustrativamente o valor das constantes iguais a um, em particular a constante gravitacional. Tal convenção não modifica a análise feita, a escolha evita somente uma predominância acentuada da tricurvatura escalar sobre os demais termos da equação de movimento para o fator de escala, não modificando qualitativamente os resultados e gráficos apresentados.

### 5.1 Universo Singular de Terceira Ordem

A expansão até terceira ordem da lagrangeana (3.14) resulta

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F + \frac{1}{90\pi^2} \frac{e^4}{m^4} F^2 - \frac{4}{315\pi^2} \frac{e^6}{m^8} F^3. \quad (5.1)$$

O intuito da análise destes termos é a aplicação destes no modelo cosmológico de FLRW. Termos que envolvem o invariante  $G$  foram descartados por duas razões: (i) termos de ordem ímpar nesse invariante violam paridade, (ii) esse invariante contém produtos do tipo  $\vec{E} \cdot \vec{B}$ , cuja média é considerada nula no modelo cosmológico proposto.

A média do tensor momentum-energia até a ordem requerida, de acordo com a equação (3.16), vem dada por

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu}^{(M)} \left( 1 - \frac{8}{45} \mu B^2 + \frac{2\pi}{3\alpha} \mu^2 B^4 \right) - g_{\mu\nu} \left( -\frac{2}{45} \mu B^4 + \frac{2\pi}{9\alpha} \mu^2 B^6 \right), \quad (5.2)$$

onde  $\mu = \frac{\alpha^2 (\hbar/mc)^3}{mc^2}$ .

Este resultado pode ser interpretado como um fluido perfeito, com densidade de energia e pressão dadas por

$$\rho = \frac{1}{2} B^2 \left( 1 - \frac{4}{45} \mu B^2 + \frac{2\pi}{9\alpha} \mu^2 B^4 \right), \quad (5.3)$$

$$p = \frac{1}{6} B^2 \left( 1 - \frac{20}{45} \mu B^2 + \frac{2\pi}{\alpha} \mu^2 B^4 \right). \quad (5.4)$$

Substituindo a equação (5.3) na equação (4.5), utilizando o resultado (4.17) que permanece válido, resulta

$$\dot{A}^2 = \frac{k}{6} \frac{H_0^2}{A^2} \left( 1 - \frac{4}{45} \mu \frac{H_0^2}{A^4} + \frac{2\pi}{9\alpha} \mu^2 \frac{H_0^4}{A^8} \right) - \epsilon. \quad (5.5)$$

Como o lado esquerdo da equação é positivo, deve ser analisado em que situações a equação acima é consistente. Para  $\epsilon = 0$  e  $\epsilon = -1$ , o lado direito da equação é positivo para todo valor de  $A$ . Para  $\epsilon = 1$ ,  $\dot{A}^2$  se anula para um valor do fator de escala,  $A_{max}$ , a partir do qual se torna negativo, como ilustra a figura 5.1.

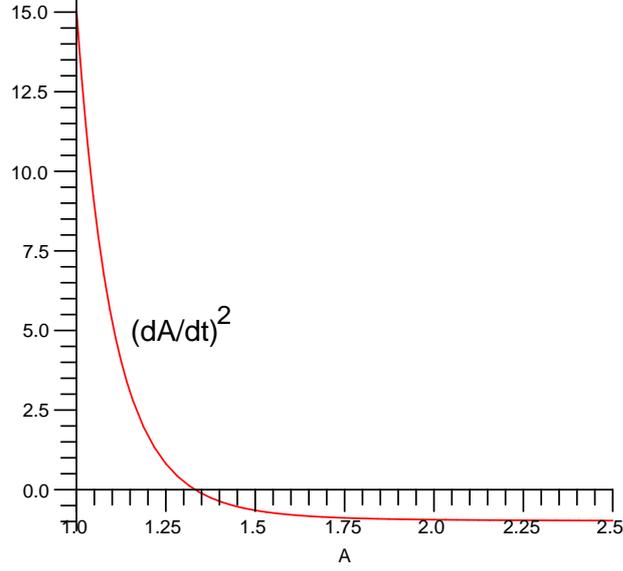


Figura 5.1: Dependência de  $\dot{A}^2$  com  $A$  até terceira ordem, para  $\epsilon = 1$ .

Portanto, o domínio de validade do modelo até terceira ordem no invariante  $F$  se restringe a  $\epsilon = -1$ ,  $\epsilon = 0$ , e  $\epsilon = 1$  até o valor  $A = A_{max}$ , gerando um universo com a singularidade inicial em todos os casos. Em particular, para  $\epsilon = 1$ , surge uma outra singularidade para o valor do fator de escala  $A_{max}$ . Neste ponto a velocidade de expansão do universo se anula, mas com aceleração diferente de zero, como pode ser visualizado pelo gráfico. A curva de  $\dot{A}^2$  chega em  $A_{max}$  com inclinação negativa, a aceleração passa descontinuamente de um valor negativo para um positivo pois o universo não pode se expandir além de  $A_{max}$ , ele se expande desaceleradamente, chega até este valor do fator de escala e abruptamente passa a acelerar e se contrai. Esta descontinuidade na segunda derivada temporal de  $A$  torna este ponto singular.

A solução da equação (5.5) é dada em função do tempo por

$$t = \int_0^A \frac{90a^5 da}{\sqrt{-8100\epsilon a^{10} + 1350kH_0^2 a^8 - 120kH_0^4 \mu a^4 + 41100kH_0^6 \pi \mu^2}}. \quad (5.6)$$

O comportamento resultante do fator de escala é mostrado na figura 5.2.

Vê-se pela figura que, para aproximação até terceira ordem, o universo volta a apresentar um comportamento singular para valores muito pequenos de  $t$ , similar ao comportamento para o caso de Einstein-Maxwell clássico. Para os valores de  $\epsilon = 0$  e  $\epsilon = -1$ , casos em que o fator de escala pode assumir qualquer valor, o comportamento se mostra análogo ao caso clássico. A figura 5.3 ilustra como a contribuição quântica nestes casos

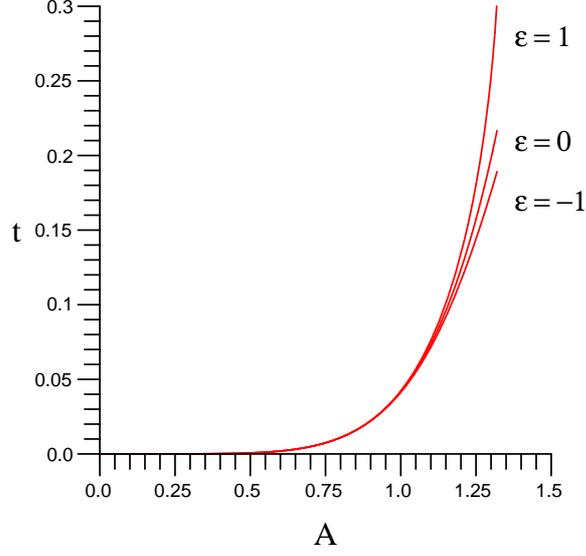


Figura 5.2: Dependência temporal do fator de escala, para os modelos de universo aberto, fechado e plano, para o modelo com expansão até terceira ordem. Para  $k = 1$ ,  $H_0 = 1$  e  $\mu = 1$ ,  $A_{max}$  é da ordem de 1.33.

se resume a um intervalo de tempo muito pequeno, e a rápida transição para o regime clássico.

A densidade de energia e pressão também apresentam caráter singular, como pode ser visto na figura 5.4. Para instantes de tempo se aproximando de zero, estas grandezas apresentam divergência acentuada.

## 5.2 Universo Não-Singular de Quarta Ordem

A expansão até quarta ordem da lagrangeana (3.14), omitindo os termos que envolvem o invariante  $G$  pelos motivos expostos anteriormente, resulta

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F + \frac{1}{90\pi^2} \frac{e^4}{m^4} F^2 - \frac{4}{315\pi^2} \frac{e^6}{m^8} F^3 + \frac{16}{315\pi^2} \frac{e^8}{m^{12}} F^4. \quad (5.7)$$

A densidade de energia e pressão são obtidas de maneira análoga à ordem precedente,

$$\rho = \frac{1}{2}B^2 \left( 1 - \frac{4}{45}\mu B^2 + \frac{64\pi}{315} \frac{\mu^2}{\alpha} B^4 - \frac{512\pi^2}{63} \frac{\mu^3}{\alpha^2} B^6 \right), \quad (5.8)$$

$$p = \frac{1}{6}B^2 \left( 1 - \frac{20}{45}\mu B^2 + 2\pi \frac{\mu^2}{\alpha} B^4 - \frac{9984\pi^2}{315} \frac{\mu^3}{\alpha^2} B^6 \right). \quad (5.9)$$

Substituindo a equação (5.8) em (4.5), com a ajuda da equação (4.17), resulta

$$\dot{A}(t)^2 = \frac{k}{6} \frac{H_0^2}{A^2} \left( 1 - \frac{4}{45}\mu \frac{H_0^2}{A^4} + \frac{2\pi}{9} \frac{\mu^2}{\alpha} \frac{H_0^4}{A^8} - \frac{512\pi^2}{63} \frac{\mu^3}{\alpha^2} \frac{H_0^6}{A^{12}} \right) - \epsilon. \quad (5.10)$$

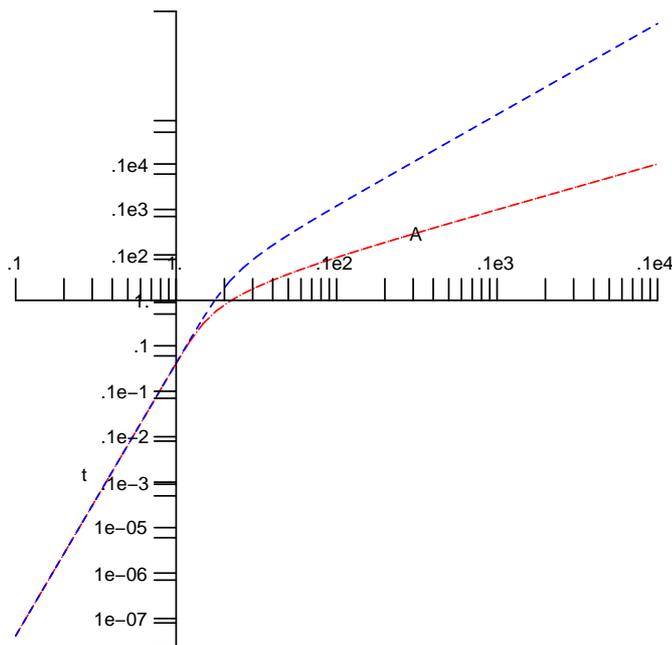


Figura 5.3: Dependência temporal do fator de escala em escala logarítmica. A linha tracejada representa o caso  $\epsilon = 0$  e a linha pontilhada representa  $\epsilon = -1$ .

A solução formal desta equação é dada por

$$t = \int^A \frac{630a^7 da}{\sqrt{-396900\epsilon a^{14} + 66150kH_0^2 a^{12} - 5880kH_0^4 \mu a^8 + 1841280kH_0^6 \pi \mu^2 a^4 - 10090214400kH_0^8 \pi^2 \mu^3}}. \quad (5.11)$$

Analisando a equação (5.10), vê-se claramente que  $\epsilon = 1$  torna a equação inconsistente, pois o lado direito é negativo para todo valor do fator de escala. Para os valores de  $\epsilon = 0$  e  $\epsilon = -1$ , o lado direito se torna positivo a partir de um certo valor do fator de escala, ou seja, nesses casos,  $A(t)$  não pode se tornar arbitrariamente pequeno, conforme mostra a figura 5.5. O comportamento do fator de escala com o tempo é mostrado na figura 5.6. No entanto, para  $\epsilon = -1$ , nos instante iniciais a contribuição quântica é tão dominante que a densidade de energia se torna negativa, como pode ser visto pela figura 5.7.

A dependência temporal da densidade de energia para o caso  $\epsilon = 0$  tem um comportamento mais coerente com o nosso universo e corrobora o resultado de segunda ordem, de acordo com a figura 5.8, exceto o fato de apresentar valor não nulo no instante  $t = 0$ , ou seja, a densidade não se anula na máxima condensação, o que garante um comportamento mais plausível fisicamente para o plasma primordial. A pressão atinge valores negativos permanecendo finita. Portanto, a solução cosmológica obtida com a expansão da lagrangeana até quarta ordem como fonte com  $\epsilon = 0$  é a que mais se adapta ao nosso universo.

### 5.3 Solução Qualitativa em Ordem Superior

A análise da expansão foi feita até a sexta ordem nos invariantes. O modelo, até

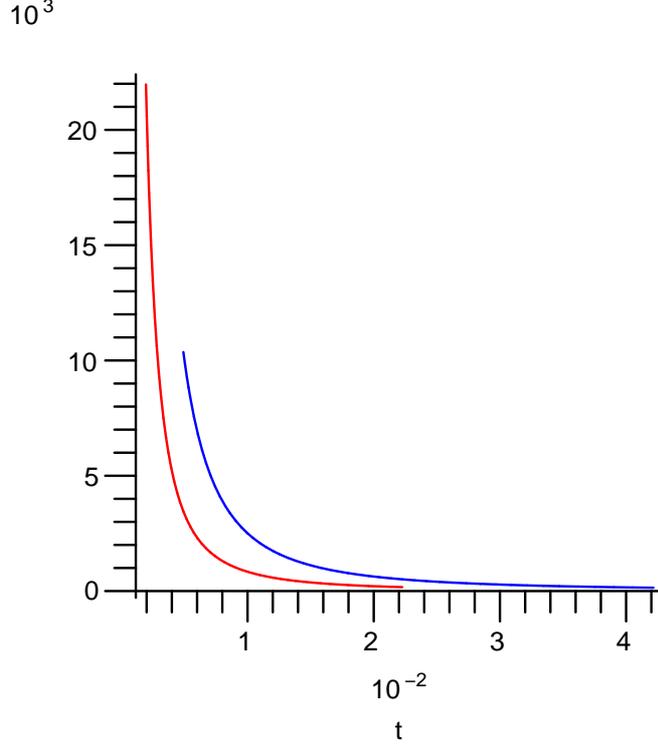


Figura 5.4: Dependência temporal da densidade de energia e pressão para o modelo com expansão até terceira ordem.

expansão em quinta ordem, apresenta comportamento similar ao de expansão até terceira, e o modelo até sexta ordem é análogo ao de quarta. Desta forma as potências pares parecem coincidir na descrição do modelo, da mesma forma que as potências ímpares coincidem entre si. Tal fato se deve à alternância da série, cujos termos variam inversamente com potências do fator de escala. A regularidade da solução cosmológica, com respeito à singularidade inicial  $A = 0$ , somente é garantida quando a expansão da série (3.14) no invariante  $F$  é tomada até um termo cuja ordem é par. Este resultado foi verificado explicitamente ordem a ordem, até o caso de sexta ordem. Tal comportamento pode ser comparado através dos gráficos (figuras 5.9, 5.10), mostrando onde  $\dot{A}^2$  se anula, trocando de sinal. Gráficos similares foram obtidos nas terceira e quarta ordens.

A alternância da série pode ser verificada através da análise da equação (3.14). Considerando a expressão fechada para o invariante  $F$ , e tomando o limite  $G \rightarrow 0$ , obtém-se uma expressão na forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} \exp(-m^2 s) \left[ \sqrt{\frac{e^2 s^2}{2} F} \coth \left( \sqrt{\frac{e^2 s^2}{2} F} \right) - 1 - \frac{1}{6}(es)^2 F \right]. \quad (5.12)$$

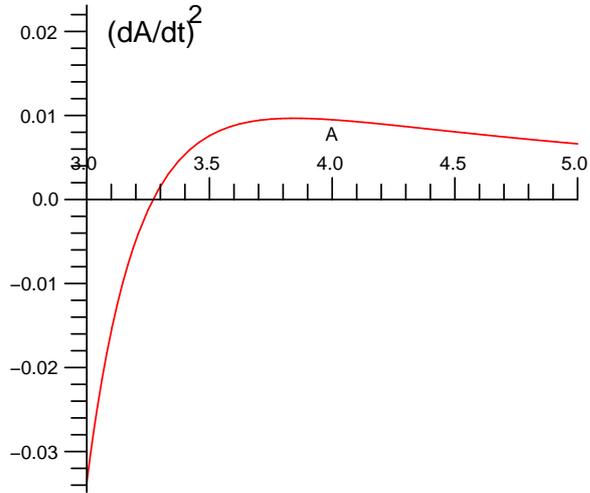


Figura 5.5: Dependência de  $\dot{A}^2$  com  $A$  até quarta ordem, para  $\epsilon = 0$ .

Os dois últimos termos dentro dos colchetes são cancelados com os dois primeiros termos da expansão para a série da função  $x \coth x$ , são termos de renormalização e evitam a divergência da integral. A série  $\coth x$  é uma série alternada e, por consequência, também a série  $x \coth x$ . Este comportamento alternado se reflete na expressão do tensor momentum-energia e conseqüentemente na equação diferencial para o fator de escala [equações (4.18), (5.5), (5.10)].

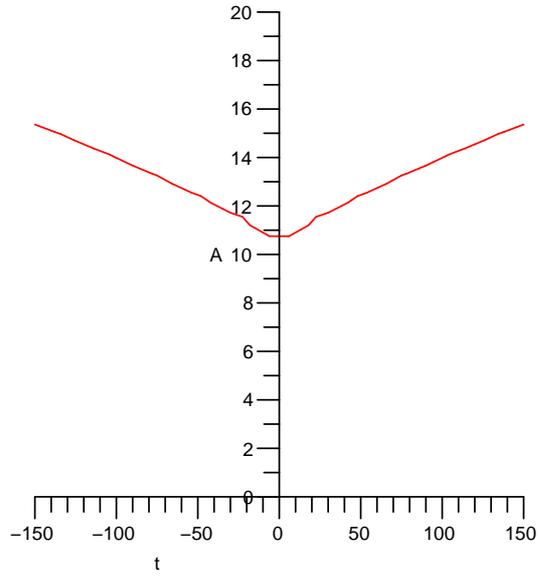


Figura 5.6: Dependência temporal do fator de escala para o modelo com expansão até quarta ordem, para  $\epsilon = 0$ . Este gráfico ilustra o comportamento “bouncing” do fator de escala, quando considera-se valores negativos de  $t$ .

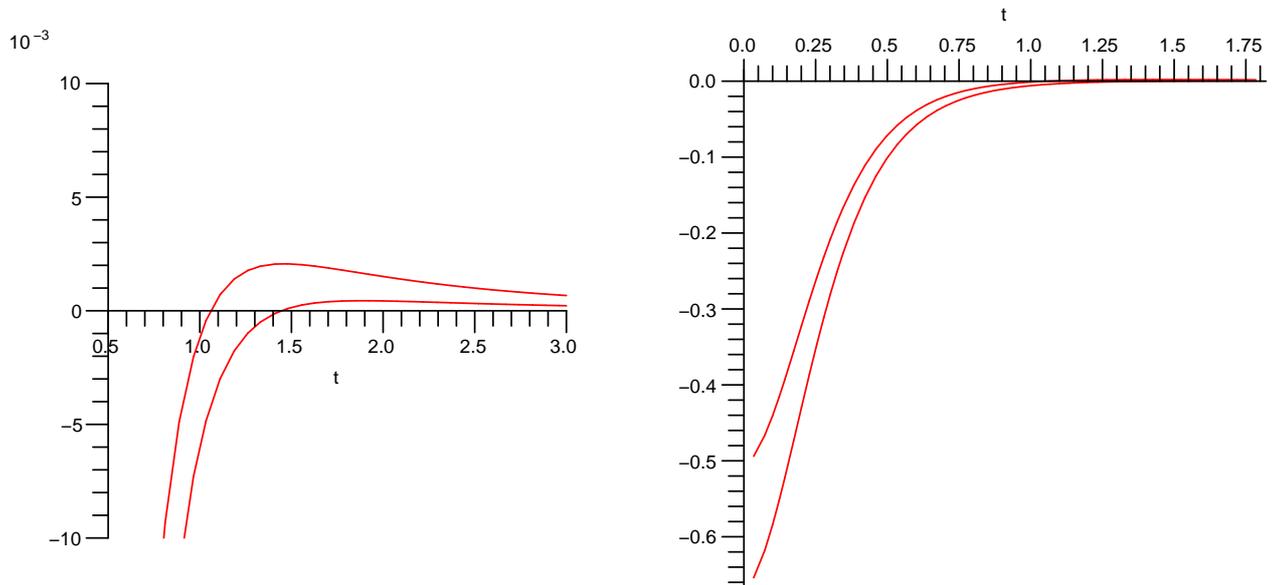


Figura 5.7: Dependência temporal da densidade de energia e pressão para o caso  $\epsilon = -1$ , no modelo até quarta ordem. O gráfico da direita ressalta o comportamento finito das grandezas.

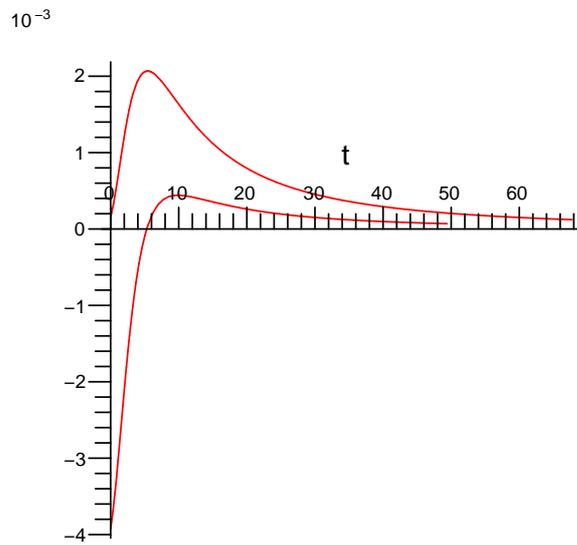


Figura 5.8: Dependência temporal da densidade de energia e pressão para o caso  $\epsilon = 0$ , no modelo até quarta ordem.

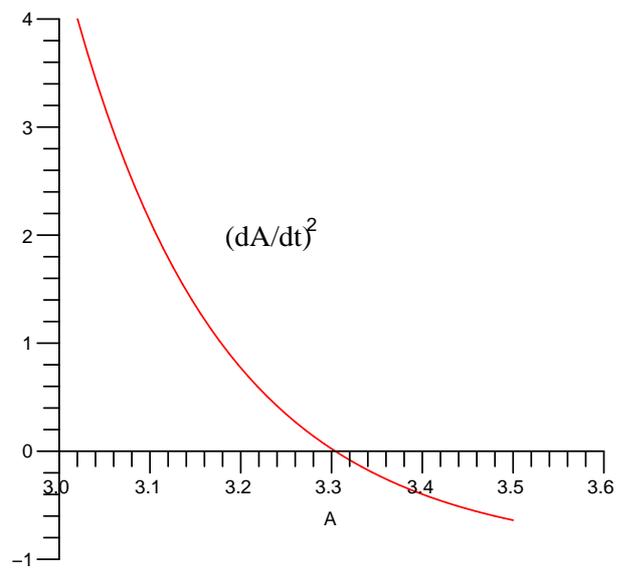


Figura 5.9: Comportamento de  $\dot{A}^2$  com  $A$  até quinta ordem, para  $\epsilon = 1$ .

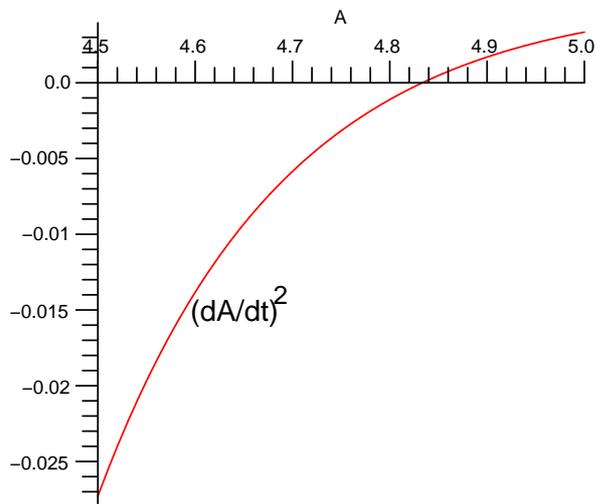


Figura 5.10: Dependência de  $\dot{A}^2$  com  $A$  até sexta ordem, para  $\epsilon = 0$ .

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho foi estudada a contribuição da polarização do vácuo na eletrodinâmica clássica no contexto do modelo de universo de FLRW. Utilizou-se um método perturbativo na lagrangeana de Heisenberg-Euler tratando-a como uma lagrangeana efetiva para a teoria clássica incluindo essas correções quânticas (polarização). Esta nova lagrangeana foi usada como fonte de curvatura para o espaço-tempo.

Expansão até terceira ordem no invariante  $F$  gera um universo singular, para qualquer valor do parâmetro  $\epsilon$ . Em particular, para  $\epsilon = 1$ , uma nova singularidade surge, num valor onde o fator de escala é máximo. Neste ponto  $\dot{A}$  passa por uma descontinuidade.

Na expansão até quarta ordem, uma solução regular é obtida para os valores  $\epsilon = -1$  e  $\epsilon = 0$ , casos em que a pressão atinge valores negativos. Não há solução física para o caso  $\epsilon = 1$ . No entanto, para  $\epsilon = -1$ , a densidade de energia, assim como a pressão, atinge valores negativos. O caso  $\epsilon = 0$  apresenta densidade de energia não-negativa, que atinge um valor máximo finito. O caso  $\epsilon = 0$  parece ser a solução mais consistente com o que se sabe sobre o universo observável na época dominada pela radiação.

A análise para quinta ordem corrobora resultados de terceira ordem, assim como a sexta ordem concorda com a quarta e com a segunda ordens. Esse comportamento é padrão dado que a série perturbativa é alternada, fato que pode ser confirmado através da análise da equação (3.14), com o último termo dominando numericamente o anterior no limite  $A \rightarrow 0$  por valores positivos. Desta forma, expansões até ordens pares geram soluções regulares, enquanto até ordens ímpares apresentam soluções singulares.

Gostaríamos que o universo fosse não-singular. Mas que mecanismo poderia fazer com que ele siga um determinado comportamento, no caso, as ordens pares da série perturbativa da lagrangeana? Este fato sugere uma nova interpretação do método de expansão em série da lagrangeana, na qual tal expansão só faz sentido quando truncada até ordens pares no invariante de campo  $F$ .

# Apêndice A

## Expansão da lagrangeana de Heisenberg-Euler

Apresenta-se a seguir um exemplo de algoritmo, desenvolvido na plataforma Mathematica 5 [20] em ambiente linux, utilizado para determinação dos coeficientes da expansão da lagrangeana de Schwinger em potências de  $F$ , no limite  $G \rightarrow 0$ .

```

X = e * s * Sqrt[2 * (F + I * G)]
cox = Sum[X^(2 * n)/(2 * n)!, {n, 0, ∞}]
coj = Series[cox, {G, 0, 4}];
sqrt2e sqrt[F + iGs]
Cosh [sqrt[2] sqrt[e^2 (F + iG) s^2]]
ser = ComplexExpand[Normal[coj]];

```

$$\begin{aligned}
\text{novoser} = & \text{Cosh} \left[ \sqrt{2} \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} \sqrt{s^2}} \right] - \frac{e^2 G^2 s^2 \text{Cosh} \left[ \sqrt{2} \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} \sqrt{s^2}} \right]}{4F} + \\
& \frac{5e^2 G^4 s^2 \text{Cosh} \left[ \sqrt{2} \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} \sqrt{s^2}} \right]}{64F^3} + \frac{e^4 G^4 s^4 \text{Cosh} \left[ \sqrt{2} \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} \sqrt{s^2}} \right]}{96F^2} + \\
& \frac{1}{4\sqrt{2}F^2} \left( \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} G^2 \sqrt{s^2}} \text{Sinh} \left[ \sqrt{2} \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} \sqrt{s^2}} \right] \right) - \\
& \frac{1}{64\sqrt{2}F^4} \left( 5\sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} G^4 \sqrt{s^2}} \text{Sinh} \left[ \sqrt{2} \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} \sqrt{s^2}} \right] \right) - \\
& \frac{1}{16\sqrt{2}F^3} \left( (e^2)^{3/2} (F^2)^{1/4} G^4 (s^2)^{3/2} \text{Sinh} \left[ \sqrt{2} \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} \sqrt{s^2}} \right] \right) + \\
& i \left( \frac{e^2 G^3 s^2 \text{Cosh} \left[ \sqrt{2} \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} \sqrt{s^2}} \right]}{8F^2} + \frac{1}{\sqrt{2}F} \left( \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} G \sqrt{s^2}} \text{Sinh} \left[ \sqrt{2} \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} \sqrt{s^2}} \right] \right) \right) - \\
& \frac{1}{8\sqrt{2}F^3} \left( \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} G^3 \sqrt{s^2}} \text{Sinh} \left[ \sqrt{2} \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} \sqrt{s^2}} \right] \right) - \\
& \frac{1}{12\sqrt{2}F^2} \left( (e^2)^{3/2} (F^2)^{1/4} G^3 (s^2)^{3/2} \text{Sinh} \left[ \sqrt{2} \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} \sqrt{s^2}} \right] \right); \\
\text{rea} = & \text{Cosh} \left[ \sqrt{2} \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} \sqrt{s^2}} \right] - \frac{e^2 G^2 s^2 \text{Cosh} \left[ \sqrt{2} \sqrt{e^2 (F^2)^{1/4} \sqrt{s^2}} \right]}{4F} +
\end{aligned}$$

$$\frac{5e^2 G^4 s^2 \operatorname{Cosh}\left[\sqrt{2}\sqrt{e^2}(F^2)^{1/4}\sqrt{s^2}\right]}{64F^3} + \frac{e^4 G^4 s^4 \operatorname{Cosh}\left[\sqrt{2}\sqrt{e^2}(F^2)^{1/4}\sqrt{s^2}\right]}{96F^2} +$$

$$\frac{\sqrt{e^2}(F^2)^{1/4} G^2 \sqrt{s^2} \operatorname{Sinh}\left[\sqrt{2}\sqrt{e^2}(F^2)^{1/4}\sqrt{s^2}\right]}{4\sqrt{2}F^2} - \frac{5\sqrt{e^2}(F^2)^{1/4} G^4 \sqrt{s^2} \operatorname{Sinh}\left[\sqrt{2}\sqrt{e^2}(F^2)^{1/4}\sqrt{s^2}\right]}{64\sqrt{2}F^4} -$$

$$\frac{(e^2)^{3/2}(F^2)^{1/4} G^4 (s^2)^{3/2} \operatorname{Sinh}\left[\sqrt{2}\sqrt{e^2}(F^2)^{1/4}\sqrt{s^2}\right]}{16\sqrt{2}F^3};$$

$$\operatorname{imag} = \frac{e^2 G^3 s^2 \operatorname{Cosh}\left[\sqrt{2}\sqrt{e^2}(F^2)^{1/4}\sqrt{s^2}\right]}{8F^2} + \frac{\sqrt{e^2}(F^2)^{1/4} G \sqrt{s^2} \operatorname{Sinh}\left[\sqrt{2}\sqrt{e^2}(F^2)^{1/4}\sqrt{s^2}\right]}{\sqrt{2}F} -$$

$$\frac{\sqrt{e^2}(F^2)^{1/4} G^3 \sqrt{s^2} \operatorname{Sinh}\left[\sqrt{2}\sqrt{e^2}(F^2)^{1/4}\sqrt{s^2}\right]}{8\sqrt{2}F^3} -$$

$$\frac{(e^2)^{3/2}(F^2)^{1/4} G^3 (s^2)^{3/2} \operatorname{Sinh}\left[\sqrt{2}\sqrt{e^2}(F^2)^{1/4}\sqrt{s^2}\right]}{12\sqrt{2}F^2};$$

ser1 = (e \* s)^2 \* G \* (rea/imag);  
ser2 = Normal[Series[ser1, {G, 0, 4}]];  
colchete = ser2 - 1 - 2/3 \* (e \* s)^2 \* F;

c = Normal[Series[colchete, {G, 0, 0}]]

$$-1 - \frac{2}{3}e^2 F s^2 + \frac{\sqrt{2}\sqrt{e^2}(F^2)^{3/4}\sqrt{s^2}\operatorname{Coth}\left[\sqrt{2}\sqrt{e^2}(F^2)^{1/4}\sqrt{s^2}\right]}{F}$$

cc = Normal[Series[c, {F, 0, 6}]];

Integrate[Exp[-m^2 \* s] \* cc/s^3, {s, 0, Infinity}]

If [Re [m^2] > 0,

$$- \frac{4e^4 F^2 (8491008e^8 F^4 - 582400e^6 F^3 m^4 + 68640e^4 F^2 m^8 - 17160e^2 F m^{12} + 15015m^{16})}{675675m^{20}}, \operatorname{Integrate}[$$

$$- \frac{4e^4 e^{-m^2 s} F^2 s (14189175 + 4e^2 F s^2 (-675675 + e^2 F s^2 (135135 + 4e^2 F s^2 (-6825 + 1382e^2 F s^2))))}{638512875},$$

{s, 0, ∞}, Assumptions → Re [m^2] ≤ 0]]

Expand[

-1/(8 \* Pi^2)\*

$$\left( \left( \frac{4e^4 F^2 (8960e^6 F^3 - 1056e^4 F^2 m^4 + 264e^2 F m^8 - 231m^{12})}{10395m^{16}} \right) + 4e^4 F^2 (-8491008e^8 F^4) / (675675m^{20}) \right)$$

$$\frac{1415168e^{12}F^6}{225225m^{20}\pi^2} - \frac{128e^{10}F^5}{297m^{16}\pi^2} + \frac{16e^8F^4}{315m^{12}\pi^2} - \frac{4e^6F^3}{315m^8\pi^2} + \frac{e^4F^2}{90m^4\pi^2}$$

# Bibliografia

- [1] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime*, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1973).
- [2] P. S. Joshi; *Global Aspects in Gravitation and Cosmology*, Oxford Science Publications, (1993).
- [3] C. J. S. Clarke, *The Analysis of Space-Time Singularities*, Cambridge Univ. Press, (1993).
- [4] W. de Sitter, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **19**, 1217 (1917).
- [5] M. Novello and J. M. Salim, *Nonlinear Photons in the Universe*, *Phys. Rev. D* **20**, 377 (1979).
- [6] V. Mukhanov and R. Brandenberger, *A Nonsingular Universe*, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1969 (1992).
- [7] M. Novello, L. A. R. Oliveira, J. M. Salim and E. Elbaz, *Geometrized Instantons and the Creation of the Universe*, *Int. J. Mod. Phys. D* **1**, 641 (1992).
- [8] W. Heisenberg, H. Euler, *Folgerugem aus der Diracschen Theorie des Positrons*, *Z. Phys.* **98**, 714 (1936).
- [9] W. Dittrich and H. Gies; *Vacuum Birefringence in Strong Magnetic Fields*, (Presented at the workshop on “Frontier Tests of Quantum Eletrodynamics and Physics of the Vacuum”, 1998), (hep-ph 9806417).
- [10] G. V. Dunne; *Heisenberg-Euler Effective Lagrangians: Basics and Extensions in From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics*, ed. by M. Shifman, A. Vainshtein and J. Wheeler, (World Scientific, 2005).
- [11] Wald, R.; *General Relativity*, Chicago Univ. Press, Chicago, (1984).
- [12] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton Univ. Press (2003).
- [13] J. Schwinger, *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*, *Physical Review* **82**, 664-679 (1951).
- [14] V. A. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello, J. M. Salim, *Nonlinear Electrodynamics and FRW Cosmology*, *Physical Review D* **65**, 063501-5 (2002).

- [15] M. Novello, *Cosmologia Relativista*, in *Proceedings of the II Brazilian School of Cosmology and Gravitation*, edited by M. Novello (J. Sansom & Cia., Rio de Janeiro, 1980).
- [16] R. C. Tolman and P. Ehrenfest, *Temperature Equilibrium in a Static Gravitational Field*, *Phys. Rev.* **36**, 1791, (1930).
- [17] H. P. Robertson, *Relativistic Cosmology*, *Rev. Mod. Phys.* **5**, 62 (1933).
- [18] A. Campos and B. L. Hu, *Nonequilibrium Dynamics of a Thermal Plasma in a Gravitational Field*, *Phys. Rev. D* **58**, 125021 (1998).
- [19] R. R. Caldwell, R. Dare, and P. J. Steinhardt, *Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State*, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582 (1998).
- [20] Wolfram Research, Inc., *Mathematica 5.2.0.0*, <http://www.wolfram.com/>.