

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
EM FÍSICA

GÁS IDEAL RELATIVÍSTICO CARREGADO

Caroline Piedade Felix

Itajubá, Maio de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
EM FÍSICA

Caroline Piedade Felix

GÁS IDEAL RELATIVÍSTICO CARREGADO

Dissertação submetida ao Programa Pós-Graduação em Física como requisito principal para obtenção do título de Mestre em Ciências em Física.

Área de Concentração: Teoria de Campos, Gravitação e Cosmologia

Orientador: Prof. Dr. Edisom de Souza Moreira Junior

Maio de 2015

Itajubá

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
EM FÍSICA

Caroline Piedade Felix

GÁS IDEAL RELATIVÍSTICO CARREGADO

Dissertação aprovada por banca examinadora em 20 de maio de 2015, conferindo à autora o título de *Mestre em Ciências em Física*.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Edisom de Souza Moreira Junior (Orientador)

Dr. José Martins Salim

Prof. Dr. Ricardo Iván Medina Bascur

Itajubá

2015

Dedicatória

Aos meus pais, Raul e Maria Jacinta, e as minhas irmãs, Juliana e Raquel.

Agradecimentos

Chegar até aqui não foi fácil. Sorte? Não, não foi sorte. Há muita probabilidade nesta palavra, sorte... E acreditar que ela existe é o mesmo que acreditar que cada um tem um destino já determinado e escrito por tal palavra. Mas não acredito nisso. Acho que construímos nossa própria história. Plantamos para colhermos amanhã. Espero estar fazendo um boa plantação (risos), pois até agora tenho colhido bons frutos. Claro, planto roseiras também e estas muitas vezes me ferem com seus espinhos, mas há nada mais belo em um jardim que uma rosa vermelha. O trabalho de um lavrador ou jardineiro é árduo e exige destes muito esforço e paciência. Foi assim que cheguei até aqui, com muito esforço e dedicação. Assim, agradeço a Deus por preparar meu canteiro todos os dias!

Nos dias mais tempestuosos encontro no aconchego da minha casa as pessoas que são minha força maior. Agradeço aos meus pais, Raul e Jacinta, e as minhas irmãs, Ju e Quel, por serem minha base. E Ju mesmo você estando longe sempre estará em casa, pois minha casa é meu interior, é o lugar mais lúcido em minha mente, meu porto mais seguro. Pra onde sempre voltarei!

Fora do porto, encontrei amigos, nome bonito para definir anjos. São eles que mostram-me o mundo e ajudam-me a ir além do horizonte. Ensinam-me a mudar a vela para que o vento possa levar-me ao caminho que desejo. Obrigada a todos os meus amigos, aos que estavam no mesmo barco que eu e já mudaram a direção faz um tempo. Agora, aos que ficam, pois sou eu que estou mudando de embarcação. Mas não se preocupem, pois sempre lembrarei daqueles que mostraram-me novos horizontes. Grata!

Como toda embarcação deve ter um bom capitão... Agradeço ao meu orientador, Professor Edisom de Souza Moreira Junior, por ser um capitão espetacular e por ter ensinado-me a defender minhas próprias ideias. Se não fosse pelo senhor a embarcação já teria afundado a muito tempo, obrigada por ter pulsos firmes com quem quer voar antes de ter asas e por não ter abandonado seu posto.

Ao longo dessa viagem, precisei de equipamentos apropriados para navegação. Assim,

agradeço a CAPES, por ter-me concedido-os.

Enfim, agradeço todos que viajaram ao meu lado durante esses dois anos. Obrigada!

“O olho vê apenas o que a mente esta preparada para compreender.”

Henri Bergson

“Pois o que você ouve e vê depende do lugar em que se coloca, como depende também de quem você é.”

C. S. Lewis

Resumo

Neste trabalho, analisamos o gás ideal relativístico carregado, tanto clássico como quântico (gás de Bose), em um número arbitrário de dimensões do espaço-tempo. Para a análise física, foi usada a metodologia do ensemble microcanônico na Mecânica Estatística. Assim procedendo, obtivemos as grandezas termodinâmicas para uma temperatura arbitrária T . Estudamos em detalhes as grandezas termodinâmicas nos limites não relativístico ($kT \ll Mc^2$) e ultra-relativístico ($kT \gg Mc^2$), sendo M a massa das partículas e antipartículas. Obtivemos resultados interessantes e inesperados acerca do gás clássico no limite ultra-relativístico. No contexto do gás ideal de Bose, empenhamos boa parte do estudo ao condensado de Bose-Einstein, pois esse é um assunto peculiar e se torna bem mais complexo quando consideramos a existência das antipartículas.

Palavras-chave : gás ideal relativístico carregado, antipartículas, partículas, condensado de Bose-Einstein, corpo negro.

Abstract

In this work, we analyze the ideal relativistic charged gas, both classic as quantum (Bose gas), in an arbitrary number of space-time dimensions. For the physical analysis, we used the methodology of the microcanonical ensemble in statistical mechanics. In doing so, we obtained the thermodynamic quantities for an arbitrary temperature T . We study in detail the thermodynamic quantities in the non-relativistic limit ($kT \ll Mc^2$) and ultra-relativistic ($kT \gg Mc^2$), M being the mass of particles and antiparticles. We obtained interesting and unexpected results on the classical gas in ultra-relativistic limit. In the context of ideal Bose gas, we dedicate much of the study to the Bose-Einstein condensate, because this is a peculiar subject and becomes much more complex when we consider the existence of antiparticles.

Keywords: charged relativistic ideal gas, antiparticles, particles, Bose-Einstein condensate, black body.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Conteúdo	vii
Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
2 Gás Ideal Clássico Relativístico Carregado	5
2.1 Limite Não Relativístico $kT \ll Mc^2$	12
2.2 Limite Ultra-Relativístico $kT \gg Mc^2$	15
2.3 Gás Ideal Hipotético	18
3 Gás Ideal de Bose Relativístico Carregado	22
3.1 Limite Não Relativístico $kT \ll Mc^2$	28
3.2 Limite Ultra-Relativístico $kT \gg Mc^2$	32
4 Alguns Aspectos do Condensado de Bose-Einstein	37
4.1 Gás de Bose Não Relativístico $kT_C \ll Mc^2$	38
4.2 Gás de Bose Ultra-Relativístico $kT_C \gg Mc^2$	44
5 Conclusão	50
A Mecânica Estatística Segundo o Ensemble Microcanônico	52
A.1 Ensemble Microcanônico Clássico	53
A.2 Ensemble Microcanônico Quântico	57

<i>CONTEÚDO</i>	viii
B Função de Bessel Modificada de Segunda Espécie $K_\nu(x)$	61
C Função Polilogarítmica $g_\nu(x)$	64
Bibliografia	66

Lista de Figuras

2.1	Potencial Químico: μ vs. T ($M = 10, h = c = V = k = Q = 1$).	10
2.2	Densidades Relativas de Partículas $n_{(+)} / n$ (curva azul tracejada) e de Antipartículas $n_{(-)} / n$ (curva vermelha tracejada-pontilhada) ($M = 10, h = c = V = k = Q = 1$).	11
2.3	Potencial Químico: Eq.(2.27) (azul) e Eq.(2.60) (vermelha) ($M = 10, h = c = V = k = Q = 1$).	14
2.4	Potencial Químico: Eq.(2.27) (azul) e Eq.(2.71) (verde) ($M = 10, h = c = V = k = Q = 1$).	16
2.5	Comparação entre as densidades relativas do gás carregado relativístico e do gás carregado não relativístico, $n_{(+)} / n_h$ (curva verde), $n_{(-)} / n_h$ (curva laranja), $n_{(+)} / n$ (curva azul) e $n_{(-)} / n$ (curva vermelha).	21
4.1	Escala de energia com os regimes de temperatura e com as temperaturas críticas. T_C vermelho representa a temperatura ultra-relativística e T_C azul representa a temperatura não-relativística.	38
4.2	Gráfico z' vs. λ ($V = 10^4, v = Q/V = 1$), λ dado pela Eq.(2.54).	40
4.3	Gráfico de z' vs. λ ($v = Q/V = 1$), λ dado pela Eq.(2.54): curva preta $V = 10^4$, curva vermelha $V = 10^3$, curva laranja $V = 10^2$, curva verde $V = 50$	41
4.4	Gráfico de z' vs. λ ($v = Q/V = 1$), λ dado pela Eq.(2.54): curva preta $V = 10^4$, curva vermelha $V = 10^3$, curva amarela $V = 500$, curva roxa $V = 200$, curva laranja $V = 10^2$, curva verde $V = 50$	42
4.5	Densidade de carga relativa do estado fundamental do gás de Bose não relativístico.	43
4.6	Potencial químico: μ vs. kT com $V = 10^6$ ($M = c = h = 1$).	45
4.7	Potencial químico: μ vs. kT ($M = c = h = 1$). Curva azul $V = 10^6$, curva vermelha $V = 10^3$, curva verde $V = 10^2$, curva amarela $V = 10$	46
4.8	Potencial químico ampliado: μ vs. kT ($M = c = h = 1$). Curva azul $V = 10^6$, curva vermelha $V = 10^3$, curva verde $V = 10^2$, curva amarelo $V = 10$	47
4.9	Densidade de carga relativa do estado fundamental do gás de Bose ultra-relativístico.	48

A.1	No espaço Γ , a evolução de um sistema de N partículas é representada por uma trajetória em uma superfície de mesma energia $(2(D - 1)N - 1)$ -dimensional E [21].	54
A.2	Espaço μ [21]. No espaço μ , a evolução de um sistema de N partículas é representada por um conjunto de N pontos em um espaço $2(D - 1)$ dimensional [21].	54
A.3	Divisão em células do espectro de energia [22].	58
B.1	Função de Bessel modificada de segunda espécie $K_\nu(x)$	62
C.1	Função Polilogarítmica $g_\nu(x)$	65

Capítulo 1

Introdução

No ano de 1928, Paul Dirac formulou a teoria de existência da antipartícula, um elemento que possui algumas propriedades (massa, spin, paridade) iguais a partícula, porém com carga elétrica oposta [1], resolvendo assim o problema de energia negativa decorrente da equação de Klein-Gordon. Em decorrência dessa descoberta, o físico Carl Anderson, em 1931, comprovou experimentalmente a existência do pósitron, a antipartícula do elétron [2–4]. Assim tomamos conhecimento de um elemento da natureza denominado antipartícula.

A princípio, podemos assumir a hipótese que depois do Big Bang, época em que o Universo era estritamente quente e denso [5], cada partícula possuía sua antipartícula correspondente [6]. Nessa época, o Universo era uma “sopa” de partículas, antipartículas e radiação. Isso perdurou até ocorrer a inflação do Universo [4,6]. Depois da expansão, o Universo começou a esfriar e a criação de pares começou a entrar em extinção. A energia da aniquilação de partículas/antipartícula não mais transformava-se em dois novos pares. Essa energia (ou radiação) pode ser observada hoje em dia e recebe o nome de radiação cósmica de fundo [4,5]. O que passa a dominar no Universo é a matéria, ou seja, ela não é totalmente liquidada com a aniquilação de pares partículas/antipartícula. Essa pequena porção de matéria forma o Universo que conhecemos [4,6]. Este fato certamente nos leva a questão: por que a matéria não foi aniquilada como a antimatéria?

O físico Andrei Sakharov assumiu duas hipóteses para explicar a predominância de matéria no Universo [7–10]: partículas e antipartículas transformaram-se em outras partículas e essa transformação era mais frequente com as antipartículas, ocorrendo, assim, uma predominância da matéria e conseqüentemente uma assimetria entre as populações. No entanto, Sakharov não explicou por que as transformações favoreciam apenas as partículas?

A criação de pares de partícula/antipartícula acontece em altas temperaturas, como por

exemplo, no Universo primordial ou em núcleos de estrelas. No entanto, podemos fazer experiências com antipartículas nos grandes aceleradores de partículas (LHC, Fermilab Main Ring, ELSA, ALBA, entre outros) [9]. Por exemplo, uma das maiores proezas do experimento ATHENA no CERN, foi produzir, pela primeira vez, antihidrogênio [11]. O experimento ALPHA é a continuação do ATHENA. O principal objetivo desse experimento é estudar simetrias fundamentais entre matéria e antimatéria [12] e, com isso, compreender melhor porque a maior parte do nosso Universo, hoje, é constituída apenas por matéria.

Como o Universo primordial trata-se de um meio extremamente quente contendo partículas, antipartículas e radiação, podemos considerá-lo como um gás, mais precisamente um gás relativístico carregado. Assim, usaríamos a mecânica estatística e por meio dela obteríamos a termodinâmica desse gás. Consequentemente, poderíamos obter informações valiosas a respeito desse sistema. Isso é exatamente o que foi feito nesse trabalho. Determinamos a termodinâmica de um gás relativístico carregado.

Haber e Weldon [13] estão entre os pioneiros no estudo da termodinâmica do gás ideal de Bose relativístico carregado usando mecânica estatística. No artigo *Thermodynamics of an Ultrarelativistic Ideal Bose Gas* de 1981, esses autores apresentam, em quatro dimensões, algumas grandezas termodinâmica do gás ideal de Bose ultrarelativístico, ou seja, quando a energia térmica kT é muito maior que a energia de repouso Mc^2 . Também analisam o condensado de Bose-Einstein nesse regime em um número arbitrário de dimensões, espaço-temporais.

Devemos também citar o trabalho de Carvalho e Rosa Jr. [14], que embora anterior a [13], difere desse ao considerar o número total de partículas constante. No entanto, a altas temperaturas, de acordo com a teoria quântica de campos, devemos considerar partículas e antipartículas. Portanto, devemos considerar a conservação da carga e não a população total como foi feito em [14].

Depois do artigo do Haber e Weldon [13], surgiu uma série de pesquisas a respeito do gás relativístico carregado. Em 1982, Haber e Weldon [15] tratam o mesmo gás em um número de dimensões arbitrário usando teoria quântica de campos, determinam as grandezas termodinâmicas e trabalham com os dois regimes de temperatura, não relativístico $kT \ll Mc^2$ e ultrarelativístico $kT \gg Mc^2$. No ano seguinte, Singh e Pandita [16] analisam um gás de Bose relativístico em um número arbitrário de dimensões espaciais usando mecânica estatística. Em 1997, Kirsten e Toms [17] estudam o condensado de Bose-Einstein em dimensão arbitrária usando teoria quântica de campos; em 2007,

Grether et al [18] fazem o mesmo estudo de [17], porém numericamente. Em 2008, Begun e Gorenstein [19] estudam o condensado de Bose-Einstein do gás de píons relativístico com carga nula. Por fim, o artigo mais recente é de 2014 de Pandita [20]. Ele estudou analiticamente o condensado de Bose-Einstein e comparou seus resultados com Grether et al [18].

Inspirados por esses trabalhos e a fim de melhor compreender nosso Universo, nesse trabalho tratamos o gás relativístico carregado, tanto do ponto de vista clássico como também do quântico. Contudo, não usamos teoria quântica de campos no estudo. Dessa, apenas utilizamos a informação de que a carga, número de partículas menos o de antipartículas, se conserva. No presente estudo usamos a Mecânica Estatística.

A Mecânica Estatística faz uso de ensembles para obter a termodinâmica de um sistema em equilíbrio termodinâmico. Para termos uma visão mais física do problema usamos o ensemble microcanônico. Nesse ensemble a termodinâmica é obtida através da entropia levando em consideração que essa é máxima no equilíbrio termodinâmico [21–23]. Devemos lembrar que, em mecânica estatística, não estamos interessados em saber como o sistema chegou ao equilíbrio termodinâmico; mas nos interessa quais são as propriedades termodinâmicas do sistema em equilíbrio termodinâmico. O Apêndice A trás uma breve revisão da definição do ensemble microcanônico nos casos clássico e quântico, mostrando como obtemos as grandezas termodinâmicas por meio desse ensemble.

Nos Capítulos 2 e 3, estudaremos o gás ideal clássico relativístico carregado e o gás ideal de Bose relativístico carregado, respectivamente. Obteremos a termodinâmica do gás em um número arbitrário de dimensões e calcularemos os limites não relativísticos e ultrarelativísticos das correspondentes grandezas termodinâmicas.

No Capítulo 4 analisaremos o condensado de Bose-Einstein do gás ideal de Bose relativístico carregado. Essa análise será feita em dois limites distintos, não relativístico e ultra-relativístico. Calcularemos a temperatura crítica em cada situação e estudaremos a densidade relativa do estado fundamental. Um estudo gráfico do comportamento do potencial químico será também apresentado. No capítulo 5 apresentamos nossas conclusões.

No presente estudo, as funções modificadas de Bessel $K_\nu(x)$ serão uma ferramenta matemática fundamental, onde ν será determinado pela dimensionalidade do espaço-tempo. No Apêndice B consideramos algumas de suas propriedades. Outra função importante para nosso estudo foi a função Polilogarítmica $g_\nu(x)$. No Apêndice C apresentamos algumas das suas propriedades usadas neste trabalho.

Julgamos que nossa principal contribuição neste trabalho seja a demonstração de que, em temperaturas suficientemente altas, tanto o gás ideal de Bose relativístico carregado como o gás ideal clássico relativístico carregado comportam-se como a radiação de corpo negro. Embora, esse fato já seja conhecido no contexto do gás de Bose [15, 16], é de certa forma curioso que também se verifique no contexto clássico. Outro aspecto no qual julgamos ter particularmente contribuído consiste no estudo dos regimes não relativístico ($kT \ll Mc^2$) e ultra-relativístico ($kT \gg Mc^2$) de temperatura.

Capítulo 2

Gás Ideal Clássico Relativístico Carregado

Neste capítulo analisaremos o gás ideal clássico relativístico carregado em um número de dimensões arbitrário D do espaço-tempo usando o protocolo do ensemble microcanônico (Apêndice A). Essa análise não é encontrada na literatura, sendo assim os resultados obtidos neste capítulo serão inéditos. Esse gás é composto por partículas e antipartículas, por exemplo, um gás de mésons e antimésons. A carga total desse sistema será definida por

$$Q = (N_{(+)} - N_{(-)}) q, \quad (2.1)$$

onde $N_{(+)}$ é o número total de partículas, $N_{(-)}$ é o número total de antipartículas e q é uma carga elementar, em nossos cálculos consideraremos $q = 1$.

No ensemble microcanônico, a entropia, a menos de uma constante, é definida por [21–23]

$$S(E) = k \ln \Gamma(E), \quad (2.2)$$

sendo k a constante de Boltzmann. O volume no espaço de fase, $\Gamma(E)$, entre duas hiper-superfícies de energia (E e $E + \Delta$, $\Delta \ll E$) é definido pela Eq.(A.4). No entanto, agora temos duas populações distintas (partícula/antipartícula), assim o volume no espaço de fase é dado por:

$$\Gamma(E) \propto \sum_{\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\}} \Omega(\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\}), \quad (2.3)$$

onde $n_{(+)i}$ é número ocupação de partículas, $n_{(-)i}$ é número ocupação de antipartículas e $\Omega(\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\})$ é o número de estados. $\Omega(\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\})$ é calculado pelo número de maneiras que podemos arranjar $N_{(+)}$ partículas e $N_{(-)}$ antipartículas nas K células do

espaço μ dado o conjunto distribuição $\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\}$ e considerando que as partículas e antipartículas são distinguíveis. Desse modo, teremos que¹

$$\Omega(\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\}) = \prod_{i=1}^K \frac{1}{n_{(+)i}! n_{(-)i}!}. \quad (2.4)$$

Seguindo os passos da teoria do ensemble microcanônico, maximizaremos $\ln\Omega(\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\})$ usando o método dos multiplicadores de Lagrange. Nesse caso, consideraremos o sistema com carga Q e energia E fixas notando que fixamos a diferença entre o número de partículas e antipartículas Q , não o número total N ,

$$N = N_{(+)} + N_{(-)}, \quad (2.5)$$

onde

$$N_{(+)} = \sum_{i=1}^K n_{(+)i} \quad (2.6)$$

e

$$N_{(-)} = \sum_{i=1}^K n_{(-)i}. \quad (2.7)$$

Portanto, nossos vínculos serão:

$$Q = \sum_{i=1}^K (n_{(+)i} - n_{(-)i}) \quad (2.8)$$

e

$$E = \sum_{i=1}^K (n_{(+)i} + n_{(-)i}) \epsilon_i, \quad (2.9)$$

sendo

$$\epsilon_i = c\sqrt{M^2c^2 + p_i^2} \quad (2.10)$$

a energia relativística média da i -ésima célula no espaço μ . Assim, dados os vínculos Eq.(2.8) e Eq.(2.9), devemos encontrar as distribuições mais prováveis $\bar{n}_{(+)i}$ e $\bar{n}_{(-)i}$ que maximizam $\ln\Omega(\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\})$. Para encontrarmos essas distribuições faremos a variação:

$$\delta \left[\ln\Omega(\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\}) + \alpha \sum_{i=1}^K (n_{(+)i} - n_{(-)i}) - \beta \sum_{i=1}^K (n_{(+)i} + n_{(-)i}) \epsilon_i \right] \Bigg|_{n_{(+)i}, n_{(-)i} = \bar{n}_{(+)i}, \bar{n}_{(-)i}} = 0, \quad (2.11)$$

usando a aproximação de Stirling [24], Eq.(A.8), encontrando as seguintes distribuições para partículas e antipartículas, respectivamente,

$$\bar{n}_{(+)i} = e^\alpha e^{-\beta\epsilon_i} \quad (2.12)$$

¹Usamos a contagem correta de Boltzmann, ou seja, dividimos pelo fatorial do número total de partícula $N_{(+)}!$ e de antipartícula $N_{(-)}!$

e

$$\bar{n}_{(-)i} = e^{-\alpha} e^{-\beta\epsilon_i} \quad (2.13)$$

Em seguida, para encontrarmos os multiplicadores de Lagrange em função das variáveis termodinâmicas energia interna² U , volume V e carga Q basta usarmos os vínculos, ou seja, as Eqs.(2.8) e Eq.(2.9). Primeiramente, trabalharemos com o primeiro vínculo, como vemos a seguir:

$$Q = \sum_{i=1}^K (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) e^{-\beta\epsilon_i}. \quad (2.14)$$

Transformando a soma de Riemann em integral teremos

$$Q = (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) \frac{V}{h^{D-1}} \int e^{-\beta c \sqrt{M^2 c^2 + p^2}} d^{D-1} p, \quad (2.15)$$

onde h^{D-1} é o volume das células no espaço μ . Para resolvermos a integral acima, transformaremos as coordenadas cartesianas em coordenadas polares esféricas seguindo o método abaixo.

O volume de uma esfera em dimensão arbitrária j é dado por:

$$\Theta_j(R) = C_j R^j, \quad (2.16)$$

onde R é o raio dessa esfera e C_j é uma constante a determinar. Assim, a área da mesma pode ser obtida via:

$$\Xi_j(R) = \frac{d}{dR} [\Theta_j(R)] = j C_j R^{j-1}. \quad (2.17)$$

Logo, usando uma integral conhecida, como por exemplo a integral de uma gaussiana em dimensão j , podemos encontrar a constante C_j . Por meio de

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_j e^{-(x_1^2 + \dots + x_j^2)} = \int_0^{\infty} \Xi_j e^{-R^2} dR = j C_j \int_0^{\infty} R^{j-1} e^{-R^2} dR. \quad (2.18)$$

Ao conhecermos o resultado da integral de uma gaussiana $\pi^{j/2}$ e fazendo uma troca de variável R^2 por t teremos que

$$\int_0^{\infty} R^{j-1} e^{-R^2} dR = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{j/2-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{j}{2}\right), \quad (2.19)$$

onde $\Gamma(x)$ é a função gama. Portanto,

$$C_j = \frac{\pi^{j/2}}{\frac{j}{2} \Gamma\left(\frac{j}{2}\right)} = \frac{\pi^{j/2}}{\Gamma\left(\frac{j}{2} + 1\right)}. \quad (2.20)$$

²Onde $U(S, V) \equiv E(S, V)$ [22].

Depois da mudança de coordenadas, faremos a seguinte mudança de variável:

$$p = Mc \operatorname{sh}(\omega). \quad (2.21)$$

Com isso,

$$dp = Mc \operatorname{ch}(\omega) d\omega \quad (2.22)$$

e

$$\sqrt{M^2c^2 + p^2} = Mc \operatorname{ch}(\omega). \quad (2.23)$$

Assim, usando, em sequência, Eq.(B.3), Eq.(B.6) e Eq.(B.5) (Apêndice B) obtemos que

$$\frac{1}{h^{D-1}} \int e^{-\beta c \sqrt{M^2c^2 + p^2}} d^{D-1}p = \frac{2^{D/2} \pi^{D/2-1} (Mc)^{D-1}}{h^{D-1}} \frac{K_{D/2}(\beta Mc^2)}{(\beta Mc^2)^{(D-2)/2}}, \quad (2.24)$$

onde identificamos

$$\Lambda^{D-1} = \frac{h^{D-1}}{2^{D/2} \pi^{D/2-1} (Mc)^{D-1}} \frac{(\beta Mc^2)^{(D-2)/2}}{K_{D/2}(\beta Mc^2)}. \quad (2.25)$$

O que chamaremos (Λ) de comprimento de onda térmico³. Logo, a Eq.(2.15) torna-se:

$$Q = 2 \operatorname{sh}(\alpha) \frac{V}{\Lambda^{(D-1)}}. \quad (2.26)$$

Usando a Eq.(2.26), o multiplicador de Lagrange $\alpha := \beta \mu$ (sendo μ o potencial químico), associado com a fixação da carga Q , é dado por:

$$\mu = \beta^{-1} \operatorname{arcsch} \left(\frac{Q \Lambda^{D-1}}{2V} \right). \quad (2.27)$$

Note que se $Q = 0$ implica em $\mu = 0$ e vice-versa. Agora, para expressarmos β como função da energia interna U , do volume V e da carga Q , usaremos o segundo vínculo Eq.(2.9) e os números de ocupações mais prováveis (Eq.(2.12) e Eq.(2.13)). Isto é,

$$E = \sum_{i=1}^K (e^\alpha + e^{-\alpha}) e^{-\beta \epsilon_i} \epsilon_i. \quad (2.28)$$

Sendo que, novamente, a soma de Riemann torna-se uma integral:

$$E = (e^\alpha + e^{-\alpha}) \frac{V}{h^{D-1}} \int c \sqrt{M^2c^2 + p^2} e^{-\beta c \sqrt{M^2c^2 + p^2}} d^{D-1}p. \quad (2.29)$$

Para resolvermos a integral, faremos a seguinte manipulação:

$$c \sqrt{M^2c^2 + p^2} e^{-\beta c \sqrt{M^2c^2 + p^2}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left[e^{-\beta c \sqrt{M^2c^2 + p^2}} \right]. \quad (2.30)$$

³Usando um abuso de linguagem, já que estamos tratando o gás por meio da teoria clássica. No entanto no próximo capítulo veremos que esta denominação fará sentido.

Logo,

$$E = -(e^\alpha + e^{-\alpha})V \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{h^{D-1}} \int e^{-\beta c \sqrt{M^2 c^2 + p^2}} d^{D-1} p \right]. \quad (2.31)$$

Da Eq.(2.24) temos que:

$$E = -(e^\alpha + e^{-\alpha})V \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{2^{D/2} \pi^{D/2-1} (Mc)^{D-1}}{h^{D-1}} \frac{K_{D/2}(\beta M c^2)}{(\beta M c^2)^{(D-2)/2}} \right]. \quad (2.32)$$

Usando a Eq.(B.7) obtemos:

$$E = 2\text{ch}(\alpha)V \frac{2^{D/2} \pi^{D/2-1} (Mc)^{D-1}}{h^{D-1} \beta^{D/2-1}} \left[\frac{(D-1)K_{D/2}(\beta M c^2)}{\beta} + M c^2 K_{\frac{D-2}{2}}(\beta M c^2) \right]. \quad (2.33)$$

Por último, sabendo que a energia total é igual a energia interna, temos:

$$U = 2\text{ch}(\alpha)V \Lambda^{-(D-1)} \beta^{-1} \left[D - 1 + M c^2 \beta \frac{K_{\frac{D}{2}-1}(\beta M c^2)}{K_{\frac{D}{2}}(\beta M c^2)} \right], \quad (2.34)$$

onde $\Lambda^{(D-1)}$ é dado na Eq.(2.25). De forma análoga àquela que nos levou à Eq.(2.26) obtemos que N , Eq.(2.5), é dado por:

$$N = 2\text{ch}(\alpha) \frac{V}{\Lambda^{D-1}}. \quad (2.35)$$

Portanto,

$$U = N \beta^{-1} \left[D - 1 + M c^2 \beta \frac{K_{\frac{D}{2}-1}(\beta M c^2)}{K_{\frac{D}{2}}(\beta M c^2)} \right]. \quad (2.36)$$

Antes de calcularmos a entropia, determinaremos a dependência funcional do número total da população N , Eq.(2.5), em termos de Q e V . Conhecendo a propriedade:

$$\text{ch}^2 \alpha = \text{sh}^2 \alpha + 1, \quad (2.37)$$

das Eq.(2.26) e Eq.(2.35) segue que:

$$\frac{\Lambda^{2(D-1)} N^2}{4V^2} = \frac{\Lambda^{2(D-1)} Q^2}{4V^2} + 1. \quad (2.38)$$

Multiplicando por $4V^2/\Lambda^{2(D-1)}$ ambos os lados da Eq.(2.38) teremos:

$$N = \sqrt{Q^2 + \frac{4V^2}{\Lambda^{2(D-1)}}}. \quad (2.39)$$

Com as distribuições mais prováveis calculadas (Eq.(2.12) e Eq.(2.13)), podemos considerar que o volume do espaço de fase $\Gamma(E)$ é dado por

$$\Gamma(E) \propto \Omega(\{\bar{n}_{(+i)}, \bar{n}_{(-i)}\}), \quad (2.40)$$

pois os outros número de estados são desprezíveis com relação a $\Omega(\{\bar{n}_{(+)i}, \bar{n}_{(-)i}\})$. Assim, usando as Eq.(2.4) e Eq.(A.8) encontramos que a entropia Eq.(2.2) é dada, a menos de uma constante, por:

$$\begin{aligned} S &= k \ln \Omega(\{\bar{n}_{(+)i}, \bar{n}_{(-)i}\}) \\ &= -k \sum_{i=1}^K (\bar{n}_{+i} \ln \bar{n}_{+i} + \bar{n}_{-i} \ln \bar{n}_{-i}) + kN \end{aligned} \quad (2.41)$$

sendo N dado na Eq.(2.39). Ao substituímos as equações Eq.(2.12) e Eq.(2.13) na equação anterior, alcançamos o seguinte resultado:

$$S = kU\beta - kQ\alpha + kN \quad (2.42)$$

sendo U dado pela Eq.(2.36), $\alpha = \beta\mu$ (μ dado pela Eq.(2.27)) e N dado pela Eq.(2.39). Usando o mesmo método que leva a Eq.(A.23), lembrando que $\beta = \beta(U, Q, V)$, $\alpha = \alpha(U, Q, V)$ e $N = N(U, Q, V)$ mostramos que

$$\beta = \frac{1}{kT}. \quad (2.43)$$

Agora, como já sabemos que $\beta = 1/kT$ podemos plotar o gráfico do potencial químico, Eq.(2.27), versus a temperatura em $D = 4$ como mostra a figura a seguir:

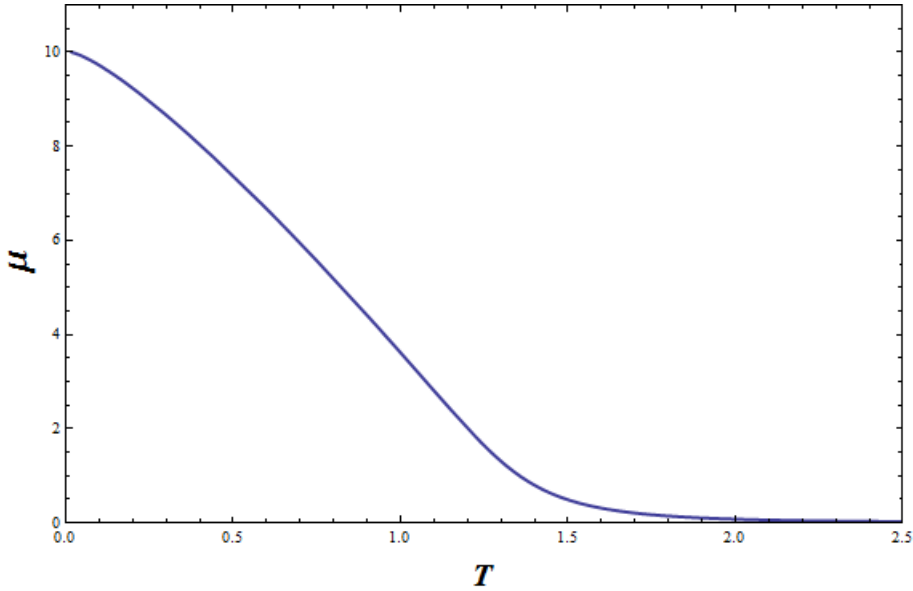


Figura 2.1: Potencial Químico: μ vs. T ($M = 10, h = c = V = k = Q = 1$).

Vemos, no gráfico da figura 2.1, que a temperaturas muito altas o potencial químico tende a zero e para temperaturas próximas ao zero absoluto o potencial químico tende a energia de repouso ($\mu = Mc^2$), o que será comprovado analiticamente nas próximas

seções. Portanto, para temperatura muito elevada, o gás carregado relativístico possui o comportamento de um gás relativístico não carregado, isto é, assume um comportamento semelhante a radiação de corpo negro, isso será verificado na seção 2.2.

Em quatro dimensões podemos fazer o gráfico das duas densidades relativas partículas $n_{(+)} / n$ e antipartículas $n_{(-)} / n$. A equação que descreve ambas densidades relativas, respectivamente, são dadas por:

$$\frac{n_{(+)}}{n} = \frac{1}{e^{-2\frac{\mu}{kT}} + 1} \quad (2.44)$$

e

$$\frac{n_{(-)}}{n} = \frac{1}{e^{2\frac{\mu}{kT}} + 1}, \quad (2.45)$$

onde μ é dado pela Eq.(2.27), $n_{(+)} = N_{(+)}/V$ ($N_{(+)}$ dado pela Eq.(2.6)), $n_{(-)} = N_{(-)}/V$ ($N_{(-)}$ dado pela Eq.(2.7)) e $n = N/V$, sendo

$$N_{(+)} = e^{\beta\mu} \frac{V}{\Lambda^{D-1}}, \quad (2.46)$$

$$N_{(-)} = e^{-\beta\mu} \frac{V}{\Lambda^{D-1}} \quad (2.47)$$

e N dado pela Eq.(2.35). A seguir, veremos o gráfico que compara qualitativamente as duas densidades relativas de partículas e antipartículas em $D = 4$:

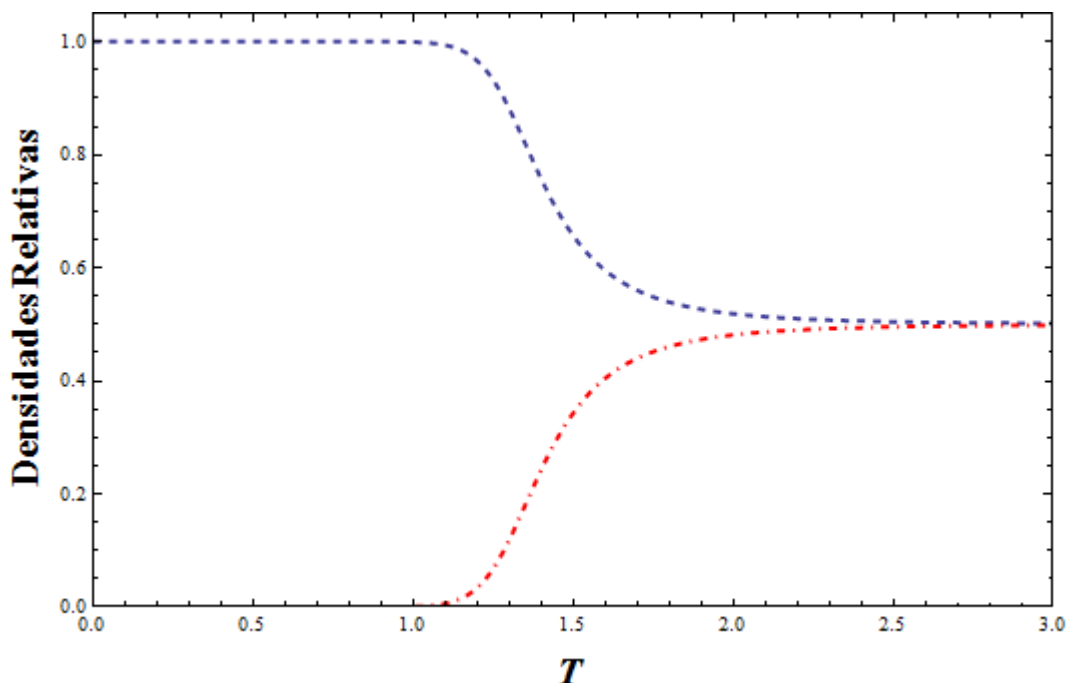


Figura 2.2: Densidades Relativas de Partículas $n_{(+)} / n$ (curva azul tracejada) e de Antipartículas $n_{(-)} / n$ (curva vermelha tracejada-pontilhada) ($M = 10$, $h = c = V = k = Q = 1$).

Note que para temperaturas muito baixas ($kT \ll Mc^2$) a população predominante e que

aproximadamente se mantém constante é a de partículas, pois escolhemos $Q > 0$ na figura 2.2. A população de antipartículas começa ser relevante quando a temperatura cresce a tal ponto que a energia kT torna-se comparável a energia de repouso Mc^2 , imediatamente aparece “criação e aniquilação” de pares partícula e antipartícula. Em uma temperatura muito grande ($kT \gg Mc^2$) ambas as densidades relativas tendem a se igualar.

Como já calculamos a energia interna do gás ideal relativístico carregado e mostramos a Eq.(2.43), podemos, usando as Eq.(2.39), Eq.(2.36) e

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V, \quad (2.48)$$

determinar a capacidade térmica a volume constante C_V como na equação abaixo:

$$C_V = (D-1)Nk + \frac{(D-1)U}{T} + \frac{NM^2c^4}{kT^2} - \frac{U^2}{NkT^2} + \frac{U^2(N^2 - Q^2)}{N^3kT^2}. \quad (2.49)$$

Usamos a Eq.(2.42) e a definição de pressão,

$$P = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,Q}, \quad (2.50)$$

para determinar a equação de estado do nosso gás ideal relativístico carregado. Assim, obtemos

$$PV = NkT. \quad (2.51)$$

onde N é dado pela Eq.(2.39). Note que a equação de estado do gás ideal clássico relativístico carregado, Eq.(2.51), não é igual a equação de estado do gás ideal, pois N não é constante, depende da temperatura, da carga e do volume como mostra a Eq.(2.39).

Com a energia interna e a entropia do gás ideal clássico relativístico carregado podemos encontrar a energia livre de Helmholtz, dada por:

$$A(U, V, Q) = U - TS = kT(Q\alpha - N) \quad (2.52)$$

Para melhor discutirmos a física do gás ideal clássico relativístico carregado, consideraremos os limites não relativístico $kT \ll Mc^2$ e ultra-relativístico $kT \gg Mc^2$, nas duas próximas seções.

2.1 Limite Não Relativístico $kT \ll Mc^2$

Nesta seção consideraremos o limite não relativístico, ou seja, $kT \ll Mc^2$ em todas as grandezas termodinâmicas. Começaremos tomando esse limite para o comprimento de

onda térmico Eq.(2.25) usando a expansão da função de Bessel modificada de segunda ordem $K_\nu(x)$ para argumentos grandes $x \gg 1$, Eq.(B.9). Assim, teremos

$$\Lambda^{D-1} = \lambda^{D-1} e^{\frac{Mc^2}{kT}} \left[1 - \frac{(D^2 - 1)kT}{4Mc^2} \right], \quad (2.53)$$

onde

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi M kT}}. \quad (2.54)$$

Substituindo a Eq.(2.53) na Eq.(2.27), encontramos que o potencial químico neste limite é dado por:

$$\mu = kT \operatorname{arcsch} \left(\frac{Q e^{\frac{Mc^2}{kT}} \lambda^{D-1}}{2V} \right). \quad (2.55)$$

Considerando, primeiramente, $Q > 0$ na Eq.(2.55) e usando o fato de que

$$\operatorname{arcsch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad (2.56)$$

o potencial químico será dado por:

$$\mu = Mc^2 + kT \ln \left[\frac{\lambda^{D-1}}{2V} \left(Q + \sqrt{Q^2 + \frac{4V^2 e^{-2Mc^2/kT}}{\lambda^{2(D-1)}}} \right) \right]. \quad (2.57)$$

No entanto, se tomarmos o limite não relativístico na Eq.(2.39) usando a Eq.(B.9)⁴ teremos

$$N = \sqrt{Q^2 + \frac{4V^2 e^{-2Mc^2/kT}}{\lambda^{2(D-1)}}}, \quad (2.58)$$

sendo λ dado pela Eq.(2.54). Por fim, o potencial químico Eq.(2.57) ficará:

$$\mu = Mc^2 + kT \ln \left[\frac{\lambda^{D-1}}{2V} (Q + N) \right]. \quad (2.59)$$

Para $T \rightarrow 0$ podemos considerar que $N = |Q| = Q$ (da Eq.(2.58)). Assim, considerando esse fato, o potencial químico, Eq.(2.59) torna-se:

$$\mu = Mc^2 + kT \ln \left[\frac{\lambda^{D-1} Q}{V} \right]. \quad (2.60)$$

A próxima figura mostra os potenciais químicos em qualquer regime de temperatura, Eq.(2.27), e o não relativístico, Eq.(2.60), em $D = 4$.

⁴Considerando apenas o primeiro termo da Eq.(B.9), pois os demais termos são desprezíveis com relação ao primeiro.

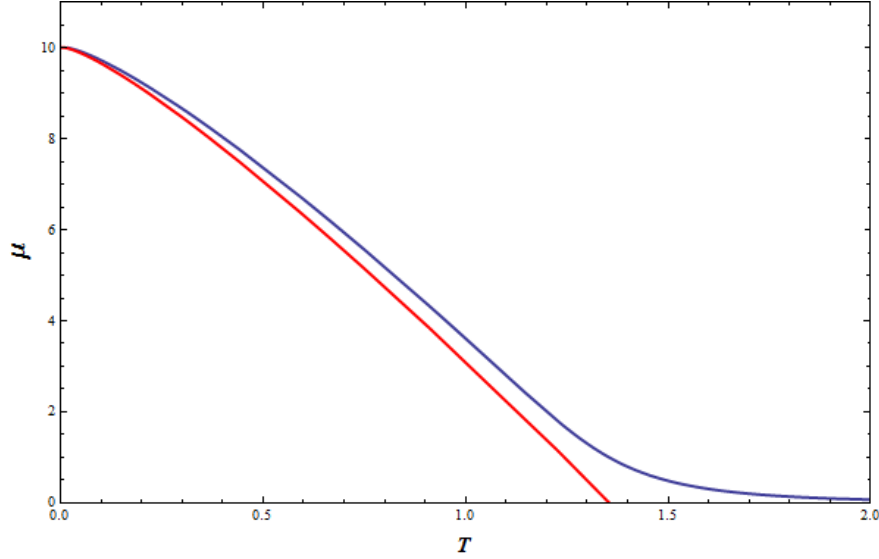


Figura 2.3: Potencial Químico: Eq.(2.27) (azul) e Eq.(2.60) (vermelha) ($M = 10$, $h = c = V = k = Q = 1$).

Para baixas temperaturas, $kT \ll Mc^2$, o gráfico do potencial químico não relativístico (curva vermelha) possui um comportamento semelhante ao gráfico do potencial químico para qualquer regime de temperatura (curva azul).

Agora, se considerarmos $Q < 0$ a Eq.(2.55) torna-se:

$$\mu = -kT \operatorname{arcsch} \left(\frac{|Q| e^{\frac{Mc^2}{kT}} \lambda^{D-1}}{2V} \right). \quad (2.61)$$

Usando novamente a Eq.(2.56) temos que

$$\mu = -Mc^2 - kT \ln \left[\frac{\lambda^{D-1}}{2V} \left(|Q| + \sqrt{Q^2 + \frac{4V^2 e^{-2Mc^2/kT}}{\lambda^{2(D-1)}}}} \right) \right]. \quad (2.62)$$

No limite de baixas temperaturas ($T \rightarrow 0$) $N = |Q|$, assim

$$\mu = -Mc^2 - kT \ln \left[\frac{\lambda^{D-1} |Q|}{V} \right]. \quad (2.63)$$

As Eq.(2.60) e Eq.(2.63) estão de acordo com [22]. É fácil ver da Eq.(2.55) que se a carga é positiva/negativa/nula o potencial químico será positivo/negativo/nulo.

Tomando o limite não relativístico da energia interna Eq.(2.36) usando a Eq.(B.9) e considerando, novamente, apenas que $N = |Q|$ teremos que

$$U = |Q| Mc^2 + \frac{D-1}{2} |Q| kT + \frac{D^2-1}{8Mc^2} |Q| (kT)^2 - \frac{D^2-1}{8M^2c^4} |Q| (kT)^3. \quad (2.64)$$

Vemos da Eq.(2.64) que a energia interna do gás ideal clássico relativístico carregado no limite de baixas temperaturas ($kT \ll Mc^2$) é igual a energia total de repouso mais os

termos de correção, sendo que o primeiro termo é a energia térmica total multiplicada pela metade da dimensão espacial $(D - 1)/2$. Consequentemente a capacidade térmica Eq.(2.49) a volume constante será dada por:

$$C_V = \frac{D - 1}{2}|Q|k + \frac{D^2 - 1}{4Mc^2}|Q|k^2T. \quad (2.65)$$

Note que em $D = 4$ a capacidade térmica a volume constante C_V é $3/2|Q|k$ como o gás ideal clássico não carregado [22, 23].

Substituindo as Eq.(2.55) e Eq.(2.64) na Eq.(2.42) e fazendo $N = |Q|$, obtemos que a entropia neste limite é dada por

$$S = \frac{D + 1}{2}k|Q| + \frac{(D^2 - 1)|Q|k^2T}{8Mc^2} - |Q|k \ln \left(\frac{\lambda^{D-1}|Q|}{V} \right). \quad (2.66)$$

Para obtermos a equação de estado no limite não relativístico, substituíremos $N = |Q|$ na Eq.(2.51). Assim, obtemos que

$$PV = |Q|kT. \quad (2.67)$$

A Eq.(2.67) é a equação de estado do gás ideal clássico não carregado [22, 23]. Para energia livre de Helmholtz basta substituímos as Eq.(2.64) e Eq.(2.66) na Eq.(2.52), assim encontramos que

$$A = Mc^2|Q| + |Q|kT \ln \left[\frac{\lambda^{D-1}|Q|}{V} \right] - |Q|kT. \quad (2.68)$$

A energia livre de Helmholtz Eq.(2.68) é exatamente a energia do gás ideal clássico não carregado em $D - 1$ dimensões espaciais mais a energia de repouso.

2.2 Limite Ultra-Relativístico $kT \gg Mc^2$

Toda moeda possui dois lados: na seção anterior, consideramos o limite não relativístico; nesta seção, consideraremos o outro lado da moeda, o limite ultra-relativístico $kT \gg Mc^2$. Já temos as quantidades termodinâmicas (energia, entropia, potencial químico,...) no caso geral, ou seja, para qualquer regime de temperatura. Nesta seção tomaremos o limite ultra-relativístico dessas quantidades de forma semelhante ao que fizemos no caso não relativístico.

Usando a expansão da função de Bessel modificada de segunda ordem $K_\nu(x)$ para argumentos pequenos $x \ll 1$, Eq.(B.10), o comprimento de onda térmico Eq.(2.25) no

limite ultra-relativístico será dado por

$$\Lambda^{D-1} = \lambda_R^{D-1} \left[1 + \frac{1}{2(D-2)} \left(\frac{Mc^2}{kT} \right)^2 \right], \quad (2.69)$$

onde

$$\lambda_R^{D-1} = \frac{(hc)^{D-1}}{2^{D-1} \pi^{D/2-1} \Gamma(D/2) (kT)^{D-1}}. \quad (2.70)$$

Substituindo a Eq.(2.69) na Eq.(2.27), obtemos que o potencial químico no limite de altas temperaturas ($kT \gg Mc^2$) é dado por:

$$\mu = kT \operatorname{arcsch} \left(\frac{Q \lambda_R^{D-1}}{2V} \right). \quad (2.71)$$

Quando $T \rightarrow \infty$ o potencial químico será dado por:

$$\mu = \frac{Q(hc)^{D-1}}{2^D \pi^{D/2-1} \Gamma(D/2) V (kT)^{D-2}} - \frac{Q^3}{3} \left(\frac{(hc)^{3(D-1)}}{2^{3D-2} \pi^{3D/2-3} (\Gamma(D/2))^3 V^3 (kT)^{3D-4}} \right). \quad (2.72)$$

Notemos que em primeira ordem tanto o comprimento de onda quanto o potencial químico não dependem da massa das partículas e antipartículas. Esse resultado é curioso, pois temos um gás ideal relativístico carregado massivo e a partir das Eq.(2.69) e Eq.(2.71) podemos já concluir, antecipadamente, que esse gás, a altas temperaturas, comporta-se de forma semelhante a um gás de fótons. A próxima figura mostra os potenciais químicos em qualquer regime de temperatura Eq.(2.27) e o ultra-relativístico Eq.(2.71) em $D = 4$.

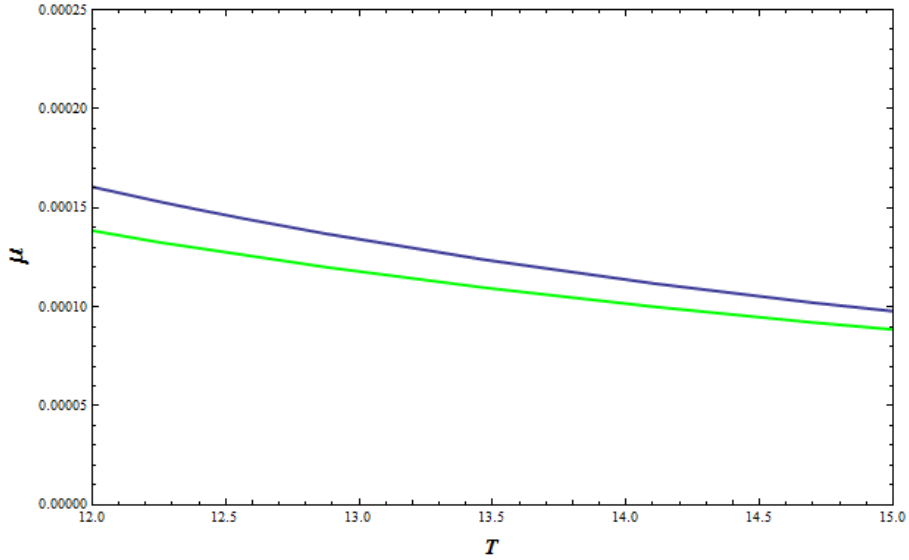


Figura 2.4: Potencial Químico: Eq.(2.27) (azul) e Eq.(2.71) (verde) ($M = 10$, $h = c = V = k = Q = 1$).

No regime de altas temperaturas, $kT \gg Mc^2$, ambos os gráficos geral (curva azul) e ultra-relativístico (curva verde), tendem a zero. Neste regime de altas temperaturas, temos um potencial químico nulo, ou seja, temos um gás não carregado ($\mu = 0 \Leftrightarrow Q = 0$).

Usando a Eq.(B.10), encontramos que a energia interna, Eq.(2.36), no limite ultra-relativístico é dada por:

$$U = \frac{2^D \pi^{D/2-1} V}{(hc)^{D-1}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) (kT)^D \left[D - 1 - \frac{M^2 c^4 (D-3)}{2(kT)^2 (D-2)} \right] \quad (2.73)$$

sendo que número total da população Eq.(2.39), no limite de altas temperaturas $kT \gg Mc^2$, é dado por:

$$N = \frac{2^D \pi^{D/2-1} V}{(hc)^{D-1}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) (kT)^{D-1} \left[1 - \frac{(Mc^2)^2}{2(kT)^2 (D-2)} \right]. \quad (2.74)$$

Note que o primeiro termo da Eq.(2.73) não depende da massa. Portanto, confirmamos que a altas temperaturas o gás ideal relativístico carregado massivo comporta-se como um gás sem massa. O primeiro termo da Eq.(2.73) em $D = 4$ tem forma planckiana, embora estejamos tratando de um gás ideal clássico.

Determinaremos, também, a capacidade térmica a volume constante Eq.(2.49) no limite ultra-relativístico. Isso poderá ser calculado de duas maneiras: calculando a derivada da energia interna Eq.(2.73) com relação a temperatura a volume constante ou substituindo as Eq.(2.73) e Eq.(2.74) na Eq.(2.49). Fazendo uma ou outra obteremos que:

$$C_V = \frac{2^D D(D-1) \pi^{D/2-1} V}{(hc)^{D-1}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) k^D T^{D-1} - \frac{2^{D-1} \pi^{D/2-1} V}{h^{D-1}} M^2 c^{5-D} k^{D-2} T^{D-3} (D-3) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right). \quad (2.75)$$

Substituindo as Eq.(2.71), Eq.(2.73) e Eq.(2.74) na Eq.(2.42) obteremos que a entropia neste limite será dada por:

$$S = \frac{2^D D V \pi^{D/2-1} \Gamma(D/2) k^D T^{D-1}}{(hc)^{D-1}} - \frac{2^{D-1} \pi^{D/2-1} \Gamma(D/2) k^{D-2} T^{D-3} M^2 c^4 V}{(hc)^{D-1}}. \quad (2.76)$$

Ainda há outras grandezas termodinâmicas que devem ser calculadas no limite ultra-relativístico, como por exemplo, a equação de estado Eq.(2.51). Para termos esse resultado, substituiremos a Eq.(2.74) na Eq.(2.51) e obteremos que:

$$P = \frac{2^D \pi^{D/2-1} \Gamma(D/2) (kT)^D}{(hc)^{D-1}} \left[1 - \frac{1}{2(D-2)} \left(\frac{Mc^2}{kT} \right)^2 \right]. \quad (2.77)$$

Notamos que o primeiro termo dessa equação é o primeiro termo da equação Eq. (2.73) dividido por $V(D-1)$. Novamente, temos um resultado planckiano [22, 25]. Por último a energia livre de Helmholtz. Substituindo as Eq.(2.73) e Eq.(2.76) na Eq.(2.52) teremos que

$$A = - \frac{2^D \pi^{D/2-1} \Gamma(D/2) V (kT)^D}{(hc)^{D-1}} + \frac{2^{D-1} \pi^{D/2-1} \Gamma(D/2) V M^2 c^4 (kT)^{D-2}}{(D-2)(hc)^{D-1}}. \quad (2.78)$$

A seguir, faremos um exercício especulativo acerca de um gás carregado não relativístico.

2.3 Gás Ideal Hipotético

Para fins especulativos, consideraremos que a energia média da i -ésima célula no espaço de fase seja dada por:

$$\epsilon_i = \frac{p_i^2}{2M}, \quad (2.79)$$

onde p_i é o momentum da célula i .

Seguindo o protocolo do ensemble microcanônico, encontramos as distribuições mais prováveis dadas pelas Eq.(2.12) e Eq.(2.13), porém com ϵ_i dada pela Eq.(2.79). Também usaremos os mesmos vínculos do caso relativístico Eq.(2.8) e Eq.(2.9) e os multiplicadores de Lagrange (α e β) associados a estes. Considerando a fixação da carga Eq.(2.8), encontramos o multiplicador de Lagrange α dado por:

$$\alpha = \operatorname{arcsch} \left(\frac{Q\lambda^{D-1}}{2V} \right), \quad (2.80)$$

onde λ é dado pela Eq.(2.54). Usando o segundo vínculo, fixação da energia Eq.(2.9), descobrimos que o segundo multiplicador de Lagrange β é dado por:

$$\beta = \frac{(D-1)N}{2U}, \quad (2.81)$$

onde

$$N = \sqrt{Q^2 + \frac{4V^2}{\lambda^{2(D-1)}}}. \quad (2.82)$$

Se fizermos a expansão da Eq.(2.82) para $T \rightarrow 0$ e $T \rightarrow \infty$ teremos, respectivamente,

$$N = Q + \frac{2^D \pi^{D-1} M^{D-1} V^2 (kT)^{D-1}}{Q h^{2(D-1)}} \quad (2.83)$$

e

$$N = \frac{2^{(D+1)/2} \pi^{(D-1)/2} M^{(D-1)/2} V (kT)^{(D-1)/2}}{h^{D-1}} + \frac{h^{D-1} Q^2}{2^{(D+3)/2} \pi^{(D-1)/2} M^{(D-1)/2} V (kT)^{(D-1)/2}}, \quad (2.84)$$

lembrando que λ é dado pela Eq.(2.54).

Usando agora a definição de entropia no ensemble microcanônico Eq.(2.2), encontramos a entropia desse gás dada na Eq.(2.42), porém com U associada a Eq.(2.81), α dado pela

Eq.(2.80) e N dado pela eq.(2.82). Provamos, também, que $\beta = 1/kT$ usando a Eq.(A.20). Assim, pela Eq.(2.81) obtemos a energia interna desse gás dada por:

$$U = \frac{D-1}{2}NkT. \quad (2.85)$$

Expandindo a Eq.(2.85) para $T \rightarrow 0$ e $T \rightarrow \infty$ teremos, respectivamente,

$$U = \frac{D-1}{2}QkT + \frac{2^{D-1}\pi^{D-1}M^{D-1}(D-1)V^2(kT)^D}{Qh^{2(D-1)}} \quad (2.86)$$

e

$$U = \frac{2^{(D-1)/2}\pi^{(D-1)/2}M^{(D-1)/2}(D-1)V(kT)^{(D+1)/2}}{h^{D-1}} + \frac{Q^2(D-1)h^{D-1}}{2^{(D+5)/2}\pi^{(D-1)/2}M^{(D-1)/2}V(kT)^{(D-3)/2}}. \quad (2.87)$$

Já especificada a energia interna, calculamos a capacidade térmica a volume constante que é dada por:

$$C_V = \frac{D-1}{2}Nk + \frac{2^{D-1}M^{D-1}\pi^{D-1}(D-1)^2V^2k^D T^{D-1}}{h^{2(D-1)}N}. \quad (2.88)$$

Assim como também, calculamos os limites da capacidade térmica a volume constante para altas e baixas energias:

- **Limite de baixa temperatura ($T \rightarrow 0$):**

$$C_V = \frac{D-1}{2}Qk + \frac{2^{D-1}M^{D-1}\pi^{D-1}[(D-1)^2 + (D-1)]V^2k^D T^{D-1}}{Qh^{2(D-1)}}. \quad (2.89)$$

- **Limite de alta temperatura ($T \rightarrow \infty$):**

$$C_V = \frac{2^{(D-3)/2}\pi^{(D-1)/2}M^{(D-1)/2}(D^2-1)Vk^{(D+1)/2}T^{(D-1)/2}}{2h^{(D-1)}} - \frac{Q^2(D-1)(D-3)h^{D-1}}{2^{(D+7)/2}\pi^{(D-1)/2}M^{(D-1)/2}Vk^{(D+1)/2}T^{(D-1)/2}}. \quad (2.90)$$

A equação de estado é calculada usando a Eq.(2.50), com isso encontramos

$$PV = kT\sqrt{Q^2 + \frac{4V^2}{\lambda^{2(D-1)}}} = NkT. \quad (2.91)$$

Seguindo a isso, calculamos os limites da equação de estado para altas e baixas energias:

- **Limite de baixa temperatura ($T \rightarrow 0$):**

$$PV = QkT + \frac{2^D\pi^{D-1}M^{D-1}V^2(kT)^D}{Qh^{2(D-1)}}. \quad (2.92)$$

- **Limite de alta temperatura** ($T \rightarrow \infty$):

$$P = \frac{2^{(D+1)/2} \pi^{(D-1)/2} M^{(D-1)/2} (kT)^{(D+1)/2} V}{h^{D-1}} + \frac{h^{D-1} Q^2}{2^{(D+3)/2} \pi^{(D-1)/2} M^{(D-1)/2} V (kT)^{(D-3)/2}}. \quad (2.93)$$

Note que em primeira ordem as grandezas termodinâmicas no regime de baixa temperatura descrevem um gás ideal clássico usual. No entanto, para alta temperatura, as grandezas termodinâmicas não descrevem um gás planckiano ao contrário do que ocorre na seção 3.2.

Estudaremos agora as densidades de cada população (partícula $n_{(+h)}$ e antipartícula $n_{(-h)}$). Assim, temos que as densidades de partícula e antipartícula são dadas por⁵, respectivamente,

$$n_{(+h)} = \frac{N_{(+)}}{V} = \sum_{i=1}^K \frac{\bar{n}_{(+)i}}{V} = e^{\alpha} \lambda^{-3} \quad (2.94)$$

e

$$n_{(-h)} = \frac{N_{(-)}}{V} = \sum_{i=1}^K \frac{\bar{n}_{(-)i}}{V} = e^{-\alpha} \lambda^{-3}, \quad (2.95)$$

onde $\bar{n}_{(+)i}$ e $\bar{n}_{(-)i}$ são dados pelas Eq.(2.12) e Eq.(2.13), respectivamente, com ϵ_i dada pela Eq.(2.79).

O gráfico a seguir compara as densidades relativas dos gases carregados relativístico $n_{(+h)}/n$ e $n_{(-h)}/n$ (Eq.(2.44) e Eq.(2.44), respectivamente) e não relativísticos $n_{(+h)}/n_h$ e $n_{(-h)}/n_h$ (onde $n_h = N/V$, sendo N dado pela Eq.(2.82)).

⁵Transformando a soma de Riemann em integral e resolvendo-a obtemos as Eq.(2.94) e Eq.(2.95).

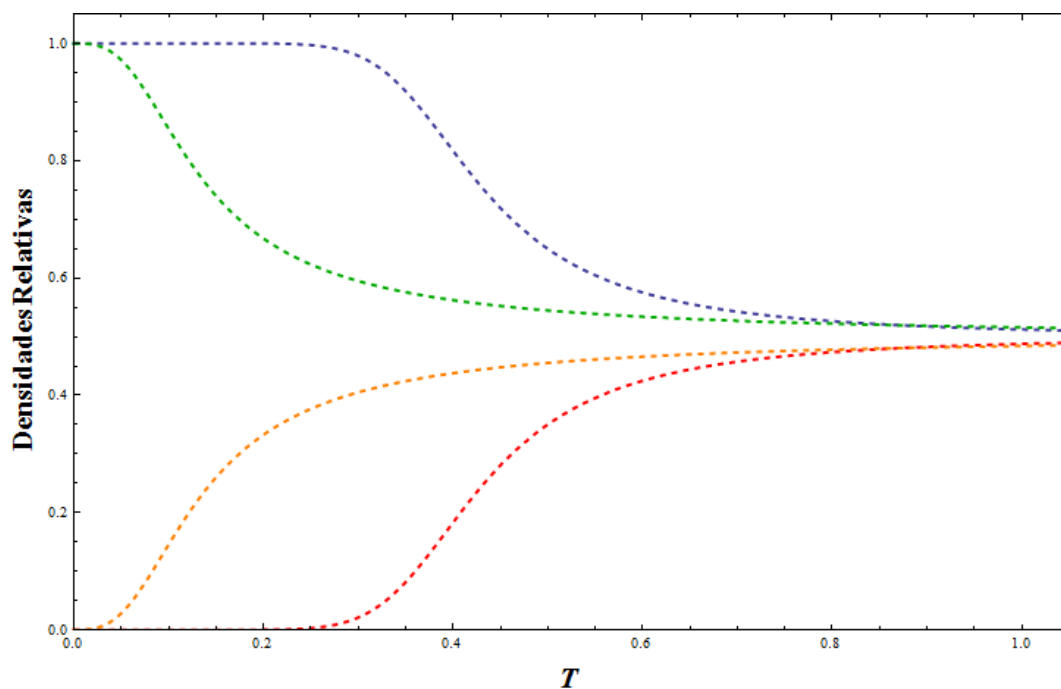


Figura 2.5: Comparação entre as densidades relativas do gás carregado relativístico e do gás carregado não relativístico, $n_{(+)_h}/n_h$ (curva verde), $n_{(-)_h}/n_h$ (curva laranja), $n_{(+)}/n$ (curva azul) e $n_{(-)}/n$ (curva vermelha).

Claramente, o gráfico mostra que ao considerarmos um gás carregado com carga Q e com energia Eq.(2.79), chegaremos a uma física que não descreve qualquer gás conhecido. Os resultados obtidos para o gás hipotético carregado mostram-nos que a criação/aniquiação de pares partícula e antipartícula começa a ocorrer em uma temperatura próxima ao zero absoluto. Isso, obviamente, não ocorre, por exemplo, com o gás do laboratório (nos aceleradores de partículas) ou com os gases da nossa atmosfera. Logo, esses resultados não descrevem a natureza. E portanto esse gás não existe no Universo.

Concluimos que, a partir desse exemplo especulativo, para um gás carregado devemos tanto considerar a conservação da carga como também a energia relativística. Isso se deve ao fato de que o aparecimento de antipartículas acontece apenas a temperaturas em que energia kT torna-se comparável a energia de repouso Mc^2 . Devemos salientar que o equilíbrio termodinâmico de um gás ideal não relativístico carregado requer que haja um “mecanismo” de criação de pares a temperaturas próximas ao zero absoluto e de maneira independente da energia de repouso. Como tal mecanismo evidentemente não existe (isto é, segundo a eletrodinâmica quântica, para haver criação de pares, devemos ter kT da ordem de Mc^2), a consideração deste gás é um mero exercício.

Capítulo 3

Gás Ideal de Bose Relativístico Carregado

Neste capítulo, analisaremos o gás ideal de Bose relativístico carregado em um número de dimensões espaço-temporais D usando o protocolo do ensemble microcanônico (Apêndice A). Como no caso do gás ideal clássico relativístico carregado, o gás ideal de Bose também possui partículas e antipartículas, tendo carga total Q , Eq.(2.1). A energia média na célula i é dada pela Eq.(2.10), no entanto a célula i , agora, é uma célula no espectro de energia (figura A.3). Para encontrarmos o espectro de energia usaremos o Apêndice A e o protocolo a seguir.

Conhecemos a equação de Schrödinger para energia não relativística [26] que é dada por

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V(\mathbf{x})\right]\psi(\mathbf{x},t), \quad (3.1)$$

sendo $\psi(\mathbf{x},t)$ a função de onda, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_{D-1}\}$,

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} + V(\mathbf{x}), \quad (3.2)$$

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla \quad (3.4)$$

os operadores hamiltoniana, energia e momentum linear, respectivamente. No caso relativístico o operador hamiltoniana é dado por

$$\hat{H} = c\sqrt{\hat{\mathbf{P}}^2 + M^2c^2}. \quad (3.5)$$

No entanto, não sabemos como aplicar esse operador na função de onda $\psi(\mathbf{x}, t)$. Para solucionar esse problema aplicamos o operador Hamiltoniano Eq.(3.5) duas vezes na função de onda, assim obtemos:

$$\hat{H}^2\psi(\mathbf{x}, t) = E^2\psi(\mathbf{x}, t) \quad (3.6)$$

ou

$$\left(\hat{P}^\nu \hat{P}_\nu - M^2 c^2\right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (3.7)$$

que é a equação de Klein-Gordon, sendo

$$\hat{P}^\nu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \left\{ \hat{P}_0, \hat{\mathbf{P}} \right\}. \quad (3.8)$$

Logo,

$$\hat{P}^\nu \hat{P}_\nu = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{D-1}^2} \right) = -\hbar^2 \square. \quad (3.9)$$

Substituindo a Eq.(3.9) na Eq.(3.7) obtemos:

$$\left(\square + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.10)$$

Em teoria quântica de campos, a equação Klein-Gordon (Eq.(3.7)) retrata bósons de spin nulo e massa M [27]. A solução da Eq.(3.10) é a função de onda de uma partícula livre, dada por:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_\nu x^\nu\right) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \epsilon t)\right]. \quad (3.11)$$

Agora, substituindo a Eq.(3.11) na Eq.(3.10) encontramos que

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2 c^2}. \quad (3.12)$$

A Eq.(3.12) vale tanto para partícula como para antipartícula. Segundo Paul Dirac [1], uma antipartícula possui a mesma energia que a sua correspondente partícula, porém com carga oposta (conjugação da carga) [26], por isso consideramos apenas a $\epsilon_{\mathbf{p}}$ positiva, Eq.(3.12), da substituição da Eq.(3.11) na Eq.(3.10).

Vamos supor que as funções de ondas Eq.(3.11) estejam em uma caixa cúbica de largura L e admitindo condições de contorno periódicas nas paredes da caixa, encontramos que

$$\mathbf{p}_{\mathbf{k}} = \frac{h}{L} \mathbf{k}, \quad (3.13)$$

onde $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, \dots, k_{D-1}\}$, com $k_i \in \mathbb{Z}$. Substituindo a Eq.(3.13) na Eq.(3.12) teremos que

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = c\sqrt{\frac{h^2 \mathbf{k}^2}{L^2} + M^2 c^2}. \quad (3.14)$$

A Eq.(3.14) é o espectro de energia de cada partícula ou antipartícula do nosso gás de Bose relativístico carregado. Ao obtermos o espectro de energia, determinamos o número de estados do sistema $\Gamma(E)$ com energia entre E e $E+\Delta$. Temos um gás com duas populações, partícula e antipartícula, sendo que as partículas se distinguem das antipartículas. O número de estados do sistema $\Gamma(E)$ é definido por (vide Eq.(A.24)):

$$\Gamma(E) = \sum_{\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\}} W(\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\}), \quad (3.15)$$

onde $W(\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\})$ é o número de estados correspondendo ao conjunto ocupação $\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\}$ definido por:

$$W(\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\}) = \prod_i w_{(+)i} w_{(-)i}. \quad (3.16)$$

Como estamos tratando um gás de Bose teremos que

$$w_{(+)i} = \frac{(n_{(+)i} + g_i - 1)!}{n_{(+)i}!(g_i - 1)!} \quad (3.17)$$

e

$$w_{(-)i} = \frac{(n_{(-)i} + g_i - 1)!}{n_{(-)i}!(g_i - 1)!}, \quad (3.18)$$

onde $w_{(+)i}$ é número de maneiras em que podemos arranjar $n_{(+)i}$ partículas na i -ésima célula com g_i estados, $w_{(-)i}$ é número de maneiras em que podemos arranjar $n_{(-)i}$ antipartículas, também na i -ésima célula com g_i estados, e $(g_i - 1)$ é o número de subdivisões da célula i . Sabendo que existe uma distribuição mais provável de partícula \bar{n}_{+i} e antipartícula \bar{n}_{-i} , podemos considerar que

$$\Gamma(E) = W(\{\bar{n}_{(+)i}, \bar{n}_{(-)i}\}). \quad (3.19)$$

Logo, vamos maximizar $\ln W(\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\})$ para encontrarmos $\bar{n}_{(+)i}$ e $\bar{n}_{(-)i}$. Usaremos o método dos multiplicadores de Lagrange (α e β) com os vínculos Eq.(2.8) e Eq.(2.9), e as Eq.(3.17) e Eq.(3.18),

$$\delta \left[\ln W(\{n_{(+)i}, n_{(-)i}\}) + \alpha \sum_i (n_{(+)i} - n_{(-)i}) - \beta \sum_i (n_{(+)i} + n_{(-)i}) \epsilon_i \right] \Bigg|_{n_{(+)i}, n_{(-)i} = \bar{n}_{(+)i}, \bar{n}_{(-)i}} = 0. \quad (3.20)$$

Assim, usando a aproximação de Stirling, Eq.(A.8), encontramos as distribuições mais prováveis, dadas por

$$\bar{n}_{(+)i} = \frac{g_i}{e^{-\alpha} e^{\beta \epsilon_i} - 1} \quad (3.21)$$

e

$$\bar{n}_{(-)i} = \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{\beta \epsilon_i} - 1}, \quad (3.22)$$

sendo ϵ_i dado pela Eq.(2.10). Também, podemos escrever:

$$\bar{n}_{(+)p} = \frac{\bar{n}_{(+)i}}{g_i} = \frac{1}{e^{-\alpha} e^{\beta \epsilon_p} - 1} \quad (3.23)$$

e

$$\bar{n}_{(-)p} = \frac{\bar{n}_{(-)i}}{g_i} = \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{\beta \epsilon_p} - 1}, \quad (3.24)$$

onde $\bar{n}_{(\pm)p}$ é a distribuição de partículas/antipartículas mais provável no momentum \mathbf{p} e ϵ_p é dada por Eq.(3.12).

A entropia é definida pela Eq.(2.2), sendo que $\Gamma(E)$ é dado pela Eq.(3.19). Assim, se substituindo as Eq.(3.21) e Eq.(3.22) na Eq.(2.2), usando a aproximação de Stirling, Eq.(A.8), e o fato de que $g_i \gg 1$ teremos:

$$\begin{aligned} S &= k \sum_i \left[\frac{g_i}{e^{-\alpha} e^{\beta \epsilon_i} - 1} \ln(e^{-\alpha} e^{\beta \epsilon_i}) + \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{\beta \epsilon_i} - 1} \ln(e^{\alpha} e^{\beta \epsilon_i}) + g_i \ln \left(\frac{e^{-\alpha} e^{\beta \epsilon_i}}{e^{-\alpha} e^{\beta \epsilon_i} - 1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + g_i \ln \left(\frac{e^{\alpha} e^{\beta \epsilon_i}}{e^{\alpha} e^{\beta \epsilon_i} - 1} \right) \right] \\ &= k \sum_i \left[-\alpha \bar{n}_{(+)i} + \beta \epsilon_i \bar{n}_{(+)i} + \alpha \bar{n}_{(-)i} + \beta \epsilon_i \bar{n}_{(-)i} - g_i \ln(1 - e^{\alpha} e^{-\beta \epsilon_i}) - \right. \\ &\quad \left. - g_i \ln(1 - e^{\alpha} e^{-\beta \epsilon_i}) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Usando as Eq.(2.8) e Eq.(2.9) e considerando que a energia interna U é igual a energia total E , encontramos que

$$S = \beta U - \beta \alpha Q - k \sum_i g_i \left[\ln(1 - e^{\alpha} e^{-\beta \epsilon_i}) + g_i \ln(1 - e^{\alpha} e^{-\beta \epsilon_i}) \right] \quad (3.26)$$

Usando as Eq.(3.26) e Eq.(A.20) mostramos que $\beta = 1/kT$; definindo $\alpha = \beta \mu$ e calculando a equação de estado [28] via Eq.(2.50),

$$\frac{PV}{kT} = - \sum_i g_i \left[\ln(1 - e^{\alpha} e^{-\beta \epsilon_i}) + \ln(1 - e^{-\alpha} e^{-\beta \epsilon_i}) \right], \quad (3.27)$$

encontramos que a entropia é dada por

$$S = \frac{U}{T} - \frac{\mu Q}{T} + \frac{PV}{T}. \quad (3.28)$$

Tomamos o limite do contínuo¹,

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int d^{D-1}k \rightarrow \frac{V}{h^{D-1}} \int d^{D-1}p = \frac{(D-1)\pi^{\frac{D-1}{2}} V}{\Gamma(\frac{D+1}{2}) h^{D-1}} \int_0^{\infty} p^{D-2} dp, \quad (3.29)$$

¹Sabendo que \mathbf{p} é dado pela Eq.(3.13).

na Eq.(3.27) temos que

$$\begin{aligned} \frac{PV}{kT} = & -\frac{(D-1)\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} \frac{V}{h^{D-1}} \int_0^\infty [\ln(1 - e^{\beta\mu} e^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}) + \ln(1 - e^{-\beta\mu} e^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}})] p^{D-2} dp - \\ & -[\ln(1 - e^{\beta\mu} e^{-\beta Mc^2}) + \ln(1 - e^{-\beta\mu} e^{-\beta Mc^2})]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Vale ressaltar que o potencial químico em módulo é menor ou igual a energia de repouso [13, 28], ou seja,

$$-Mc^2 \leq \mu \leq Mc^2. \quad (3.31)$$

Isso se deve ao fato de o número de partículas e/ou antipartículas no estado fundamental ser positivo definido. Por exemplo, se considerarmos que $\mu > Mc^2$ e $\mathbf{p} = 0$ na Eq.(3.23), o número de partículas no estado fundamental será negativo e isso não possui significado físico². Sendo assim, podemos usar que

$$\ln(1 - e^{\pm\beta\mu} e^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}) = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{\pm l\beta\mu} e^{-l\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}}{l}. \quad (3.32)$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{PV}{kT} = & \frac{2(D-1)\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} \frac{V}{h^{D-1}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\text{ch}(l\beta\mu)}{l} \int_0^\infty e^{-l\beta\epsilon_{\mathbf{p}}} p^{D-2} dp - \\ & -[\ln(1 - e^{\beta\mu} e^{-\beta Mc^2}) + \ln(1 - e^{-\beta\mu} e^{-\beta Mc^2})]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Fazendo a mudança de variável Eq.(2.21) e usando a Eq.(B.3) identificamos que

$$\int_0^\infty e^{-l\beta\epsilon_{\mathbf{p}}} p^{D-2} dp = 2^{D/2-1} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right) \frac{(Mc)^{D-1}}{\pi^{1/2}} \frac{K_{D/2}(l\beta Mc^2)}{(l\beta Mc^2)^{D/2-1}}. \quad (3.34)$$

Assim, encontramos que a equação de estado, Eq.(3.27), é dada por:

$$\begin{aligned} PV = & \frac{2^{(D+2)/2} \pi^{(D-2)/2} M^{D/2} c V (kT)^{D/2}}{h^{D-1}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\text{ch}(l\beta\mu)}{l^{D/2}} K_{D/2}(l\beta Mc^2) - \\ & - kT[\ln(1 - e^{\beta\mu} e^{-\beta Mc^2}) + \ln(1 - e^{-\beta\mu} e^{-\beta Mc^2})]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

ou

$$P = 2kT \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\text{ch}(l\beta\mu)}{l^{D/2}} \frac{1}{\Lambda_l^{D-1}} - kT[\ln(1 - e^{\beta\mu} e^{-\beta Mc^2}) + \ln(1 - e^{-\beta\mu} e^{-\beta Mc^2})], \quad (3.36)$$

onde

$$\Lambda_l^{D-1} = \frac{h^{D-1}}{2^{D/2} \pi^{D/2-1} (Mc)^{D-1}} \frac{(\beta Mc^2)^{(D-2)/2}}{K_{D/2}(l\beta Mc^2)} \quad (3.37)$$

²Se $\mu < -Mc^2$ e $\mathbf{p} = 0$, pela Eq.(3.24), o número de antipartículas no estado fundamental será negativo.

é o comprimento de onda térmico que podemos associar a Eq.(2.25), para $l = 1$ temos exatamente a Eq.(2.25).

De forma geral, expressaremos implicitamente os multiplicadores de Lagrange α ($\alpha = \beta\mu$) e β em função de Q, U, V tomando o limite do contínuo, Eq.(A.39), sabendo que

$$\frac{1}{e^{\mp\beta\mu+\beta\epsilon_{\mathbf{p}}} - 1} = \sum_{l=1}^{\infty} e^{\pm l\beta\mu} e^{-l\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}. \quad (3.38)$$

Usando a Eq.(3.34) nas Eq.(2.8) temos que μ [16, 20, 28] é dado de forma implícita por:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2^{(D+2)/2}\pi^{(D-2)/2}M^{D/2}cV(kT)^{(D-2)/2}}{h^{D-1}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\text{sh}(l\beta\mu)}{l^{(D-2)/2}} K_{D/2}(l\beta Mc^2) + \\ &+ \frac{1}{e^{-\beta\mu}e^{\beta Mc^2} - 1} - \frac{1}{e^{\beta\mu}e^{\beta Mc^2} - 1}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Note que o sinal de μ depende do sinal da carga (carga positiva implica um potencial químico positivo e carga negativa implica um potencial químico negativo e quando $|\mu| = Mc^2$ [13, 28] teremos o condensado de Bose-Einstein, que será tratado no próximo capítulo.

Agora, usando as Eq.(B.3) e Eq.(3.34) na Eq.(2.9) temos que β é dado por:

$$\begin{aligned} U &= \frac{2^{(D+2)/2}\pi^{(D-2)/2}M^{(D+2)/2}c^3V(kT)^{(D-2)/2}}{h^{D-1}} \times \\ &\times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\text{ch}(l\beta\mu)}{l^{(D-2)/2}} \left[(D-1) \frac{K_{D/2}(l\beta Mc^2)}{l\beta Mc^2} + K_{(D-2)/2}(l\beta Mc^2) \right] + \\ &+ Mc^2 \left[\frac{1}{e^{-\beta\mu}e^{\beta Mc^2} - 1} + \frac{1}{e^{\beta\mu}e^{\beta Mc^2} - 1} \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

A Eq.(3.40) corrige a energia que Singh & Pandita [16] e Pandita [20] obtêm. Esses autores cometem um erro ao calcular a energia na forma geral e isso torna-se claro quando analisamos as equações (7), (8) e (9) do artigo [20]. Percebemos que na equação (9) há um termo sobrando,

$$-\frac{Mc^2 \text{sh}(\beta\mu)}{\text{ch}(\beta\epsilon_{\mathbf{p}}) - \text{ch}(\beta\mu)}, \quad (3.41)$$

esse termo corresponderia a densidade de carga Eq.(3.39), quando $V \rightarrow \infty^3$, multiplicada pela energia de repouso Mc^2 . Nas próximas seções veremos que a energia interna obtida em [16] e [20] não recupera a energia cinética do gás de Bose não relativístico e, também, a energia interna no limite ultra-relativístico obtida por [13]. É interessante notar que a energia interna de um gás com massa não carregado, ou seja, $Q = 0 \rightarrow \mu = 0$ (fazendo $\mu = 0$ na Eq.(3.40)) é duas vezes a energia interna de um gás de bósons escalares [29].

³Maiores explicações no Capítulo 4.

Substituindo a Eq.(3.28) na equação $A = U - TS$, obtemos que a energia livre de Helmholtz é dada por:

$$A = Q\mu - PV. \quad (3.42)$$

Agora, escrevendo as Eq.(3.23), Eq.(3.24) em séries de potências (Eq.(3.38)) e em seguida tomando o limite do contínuo (Eq.(3.29)) obtemos, usando a Eq.(3.34), que o número total N (número total de partículas mais o número total de antipartículas) é dado por:

$$N = \sum_{\mathbf{p}} (n_{(+)\mathbf{p}} + n_{(-)\mathbf{p}}) = \frac{2^{(D+2)/2} \pi^{(D-2)/2} M^{D/2} cV (kT)^{(D-2)/2}}{h^{D-1}} \times \\ \times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\text{ch}(l\beta\mu)}{l^{(D-2)/2}} K_{D/2}(l\beta Mc^2) + N_0, \quad (3.43)$$

onde

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} e^{\beta Mc^2} - 1} + \frac{1}{e^{\beta\mu} e^{\beta Mc^2} - 1}. \quad (3.44)$$

é o número total de partículas mais antipartículas no estado fundamental.

Nas próximas seções deste capítulo, detalharemos o estudo das equações anteriores nos limites não relativístico e ultra-relativístico.

3.1 Limite Não Relativístico $kT \ll Mc^2$

Nesta seção, estudaremos o limite não relativístico, ou seja, $kT \ll Mc^2$. A primeira grandeza termodinâmica que vamos obter neste limite é o potencial químico, Eq.(3.39), em D dimensões espaço-temporais [15]. Para fazer esse cálculo, tomaremos $kT \ll Mc^2$ na Eq.(3.39) usando a Eq.(B.9), até o segundo termo dominante, e a Eq.(C.1), lembrando que μ é limitado (Eq.(3.31)). Assim, obtemos que

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{1}{\lambda^{D-1}} \left\{ g_{\frac{D-1}{2}} \left(e^{\frac{\mu - Mc^2}{kT}} \right) - g_{\frac{D-1}{2}} \left(e^{\frac{-(\mu + Mc^2)}{kT}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{kT}{8Mc^2} (D^2 - 1) \left[g_{\frac{D+1}{2}} \left(e^{\frac{\mu - Mc^2}{kT}} \right) - g_{\frac{D+1}{2}} \left(e^{\frac{-(\mu + Mc^2)}{kT}} \right) \right] \right\} + \\ + \rho_0, \quad (3.45)$$

sendo λ o comprimento de onda térmico dado pela Eq.(2.54),

$$\rho_0 = \frac{1}{V} \left[\frac{1}{e^{\beta(Mc^2 - \mu)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(Mc^2 + \mu)} - 1} \right] \quad (3.46)$$

é a densidade de carga do estado fundamental e $g_j(x)$ a função polilogarítmica (Apêndice C), onde $g_{\frac{j}{2}} \left(e^{\frac{\mu - Mc^2}{kT}} \right)$ corresponde a contribuição das partículas e $g_{\frac{j}{2}} \left(e^{\frac{-(\mu + Mc^2)}{kT}} \right)$ corresponde a contribuição das antipartículas. Para Eq.(3.45) temos dois casos: no caso em que

o potencial químico é positivo, ou seja, $Q > 0$, as partículas predominam sobre as antipartículas, pois todos os termos da série Eq.(C.1) que representa a função polilogarítmica, $g_{\frac{j}{2}} \left(e^{-\frac{(\mu+Mc^2)}{kT}} \right)$, tendem a zero exponencialmente quando $\mu > 0$. Assim a Eq.(3.45) torna-se

$$\frac{Q}{V} = \frac{g_{\frac{D-1}{2}} \left(e^{\frac{\mu-Mc^2}{kT}} \right)}{\lambda^{D-1}} + \frac{kT}{8Mc^2} \frac{(D^2-1)}{\lambda^{D-1}} g_{\frac{D+1}{2}} \left(e^{\frac{\mu-Mc^2}{kT}} \right) + \frac{1}{V} \frac{1}{e^{\beta(Mc^2-\mu)} - 1}; \quad (3.47)$$

no caso em que o potencial químico é negativo, ou seja, $Q < 0$, as antipartículas predominam sobre as partículas, pois todos os termos da série Eq.(C.1) que representa a função polilogarítmica, $g_{\frac{j}{2}} \left(e^{\frac{\mu-Mc^2}{kT}} \right)$, tendem a zero exponencialmente quando $\mu < 0$. Assim a Eq.(3.45) torna-se

$$\frac{|Q|}{V} = \frac{g_{\frac{D-1}{2}} \left(e^{\frac{|\mu|-Mc^2}{kT}} \right)}{\lambda^{D-1}} + \frac{kT}{8Mc^2} \frac{(D^2-1)}{\lambda^{D-1}} g_{\frac{D+1}{2}} \left(e^{\frac{|\mu|-Mc^2}{kT}} \right) + \frac{1}{V} \frac{1}{e^{\beta(Mc^2-|\mu|)} - 1}. \quad (3.48)$$

Sabendo disso, podemos escrever a Eq.(3.45) em função do módulo de μ :

$$\frac{|Q|}{V} = \frac{g_{\frac{D-1}{2}} \left(e^{\frac{|\mu|-Mc^2}{kT}} \right)}{\lambda^{D-1}} + \frac{kT}{8Mc^2} \frac{(D^2-1)}{\lambda^{D-1}} g_{\frac{D+1}{2}} \left(e^{\frac{|\mu|-Mc^2}{kT}} \right) + \frac{1}{V} \frac{1}{e^{\beta(Mc^2-|\mu|)} - 1}. \quad (3.49)$$

A fim de comparação e de análise, calcularemos, agora, o número total da população N , Eq.(3.43), no limite não relativístico. Encontraremos N não relativístico seguindo os mesmos cálculos feitos para acharmos a densidade de carga, tomando $kT \ll Mc^2$ na Eq.(3.43) usando as Eq.(B.9) e Eq.(C.1) e o fato de que partícula ou antipartícula irá dominar sobre a outra dependendo do sinal da carga e conseqüentemente do sinal do potencial químico. Assim, N não relativístico em função de $|\mu|$ será dado por:

$$\frac{N}{V} = \frac{g_{\frac{D-1}{2}} \left(e^{\frac{|\mu|-Mc^2}{kT}} \right)}{\lambda^{D-1}} + \frac{kT}{8Mc^2} \frac{(D^2-1)}{\lambda^{D-1}} g_{\frac{D+1}{2}} \left(e^{\frac{|\mu|-Mc^2}{kT}} \right) + \frac{1}{V} \frac{1}{e^{\beta(Mc^2-|\mu|)} - 1}. \quad (3.50)$$

Note que $N = |Q|$ (Eq.(3.50)=Eq.(3.49)).

Além dos limites não relativístico e ultra-relativístico temos os limites clássico e quântico [16]. Os dois últimos são definidos por

$$\frac{\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{D-1}}}{\lambda} \gg 1 \quad (3.51)$$

e

$$\frac{\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{D-1}}}{\lambda} \ll 1, \quad (3.52)$$

respectivamente. Sendo que λ é o comprimento de onda térmico dado pela Eq.(2.54), e $\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{D-1}}$ é a distância entre os elementos do gás; neste limite podemos considerar

que $N = |Q|$ como visto na Eq.(3.50). Faz sentido falar de limite clássico, Eq.(3.51), apenas para temperaturas superiores a temperatura crítica⁴, ou seja, quando o gás não esta no condensado de Bose-Einstein, pois o condensado de Bose-Einstein é um fenômeno quântico. Portanto, no limite clássico a densidade de partículas do estado fundamental (último termo da Eq.(3.50)). Assim, se tomarmos o limite clássico Eq.(3.51) da Eq.(3.50) podemos escrever o módulo do potencial químico em função da carga Q , volume V e temperatura T que é dado por

$$\frac{\lambda^{D-1}}{V} = \frac{\lambda^{D-1}}{|Q|} = g_{\frac{D-1}{2}} \left(e^{\frac{|\mu| - Mc^2}{kT}} \right) + \frac{kT}{8Mc^2} (D^2 - 1) g_{\frac{D+1}{2}} \left(e^{\frac{|\mu| - Mc^2}{kT}} \right). \quad (3.53)$$

O lado esquerdo da Eq.(3.53) é muito menor que um de acordo com a Eq.(3.51), assim, para termos consistência matemática é necessário que a expressão do lado direito também seja muito menor que um. Para que o lado esquerdo da Eq.(3.53) seja muito menor que um é necessário que $|\mu| \ll Mc^2$. Portanto, consideraremos apenas o primeiro termo da série que representa a função polilogarítmica, Eq.(C.1), já que os outros termos de ordem maiores são desprezíveis com relação ao primeiro. Logo, teremos que

$$\frac{\lambda^{D-1}}{V} = e^{\frac{-(Mc^2 - |\mu|)}{kT}} + \frac{kT}{8Mc^2} (D^2 - 1) e^{\frac{-(Mc^2 - |\mu|)}{kT}}. \quad (3.54)$$

Considerando apenas o primeiro termo da Eq.(3.54) encontramos que o módulo do potencial químico será dado, em primeira ordem, por:

$$|\mu| = Mc^2 + \ln \left(\frac{|Q| \lambda^{D-1}}{V} \right). \quad (3.55)$$

O potencial químico no limite quântico (Eq.(3.52)) será calculado no próximo capítulo, pois envolve a região do condensado de Bose-Einstein e possui apenas solução gráfica.

Agora, usando as Eq.(B.9) e Eq.(C.1) na Eq.(3.40) encontramos o limite não relativístico $kT \ll Mc^2$ da energia interna que é dado por:

$$\begin{aligned} U &= \frac{Mc^2}{\lambda^{D-1}} V \left[g_{\frac{D-1}{2}} \left(e^{\frac{\mu - Mc^2}{kT}} \right) + g_{\frac{D-1}{2}} \left(e^{\frac{-(\mu + Mc^2)}{kT}} \right) \right] + V kT \frac{(D-1)(D+5)}{8\lambda^{D-1}} \times \\ &\times \left[g_{\frac{D+1}{2}} \left(e^{\frac{\mu - Mc^2}{kT}} \right) + g_{\frac{D+1}{2}} \left(e^{\frac{-(\mu + Mc^2)}{kT}} \right) \right] + U_0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde λ é o comprimento de onda térmico e U_0 é a energia correspondente ao estado fundamental dada por:

$$U_0 = Mc^2 \left(\frac{1}{e^{\beta(Mc^2 - \mu)} - 1} + \frac{1}{e^{\beta(Mc^2 + \mu)} - 1} \right). \quad (3.57)$$

⁴Temperatura que acontece o condensado de Bose-Einstein, assunto do Capítulo 4

Novamente, no limite não relativístico partícula ou antipartícula vai predominar. Sabendo disso, podemos escrever a Eq.(3.56) em função do módulo do potencial químico $|\mu|$:

$$U = \frac{Mc^2}{\lambda^{D-1}} V g_{\frac{D-1}{2}} \left(e^{\frac{|\mu|-Mc^2}{kT}} \right) + V kT \frac{(D-1)(D+5)}{8\lambda^{D-1}} g_{\frac{D+1}{2}} \left(e^{\frac{|\mu|-Mc^2}{kT}} \right) + Mc^2 \frac{1}{e^{\beta(Mc^2-|\mu|)} - 1}. \quad (3.58)$$

Podemos, agora, escrever a energia interna Eq.(3.58) em função da carga Eq.(3.49) considerando que estamos em fora do condensado de Bose-Einstein, ou seja, a temperatura T é maior que a temperatura crítica T_C , no equilíbrio termodinâmico quando $V \rightarrow \infty$:

$$U = |Q|Mc^2 + \frac{(D-1) V kT}{2 \lambda^{D-1}} g_{\frac{D+1}{2}} \left(e^{\frac{|\mu|-Mc^2}{kT}} \right). \quad (3.59)$$

A energia interna Eq.(3.59) é a energia total do nosso gás, energia de repouso ($NMc^2 = |Q|Mc^2$) mais a energia cinética (último termo da Eq.(3.59)). Para obtermos apenas a energia cinética devemos subtrair da Eq.(3.59) a energia de repouso $NMc^2 = |Q|Mc^2$. Assim teremos:

$$U_{cin} = U - NMc^2 = \frac{(D-1) V kT}{2 \lambda^{D-1}} g_{\frac{D+1}{2}} \left(e^{\frac{|\mu|-Mc^2}{kT}} \right). \quad (3.60)$$

A energia cinética Eq.(3.60) concorda com [22] em $D = 4$. Para obtermos o limite clássico, Eq.(3.51), ($|\mu| \ll Mc^2$) consideraremos na Eq.(3.60) apenas o primeiro termo da série que representa a função polilogarítmica, Eq.(C.1), já que os outros termos de ordem maiores são desprezíveis com relação ao primeiro, e $|\mu|$ dado pela Eq.(3.55). Assim obtemos:

$$U_{cin} = \frac{(D-1)}{2} |Q| kT \quad (3.61)$$

que é a energia interna sem a energia de repouso de um gás ideal clássico não relativístico.

Expandindo a Bessel $K_\nu(l\beta Mc^2)$ para argumentos grandes Eq.(B.9) e usando Eq.(C.1) encontramos que a equação de estado Eq.(3.35) no limite não relativístico é dada por:

$$PV = \frac{kTV}{\lambda^{D-1}} \left[g_{\frac{D+1}{2}} \left(e^{\frac{|\mu|-Mc^2}{kT}} \right) + \frac{(D^2-1)kT}{8Mc^2} g_{\frac{D+3}{2}} \left(e^{\frac{|\mu|-Mc^2}{kT}} \right) \right] + kT \ln(1 - e^{\beta|\mu|} e^{-\beta Mc^2}). \quad (3.62)$$

No equilíbrio termodinâmico, o último termo da equação acima é irrelevante na região fora do condensado de Bose-Einstein, assim podemos desconsiderá-lo. Ao fazermos isso, notamos que em primeira ordem a equação de estado Eq.(3.62) é proporcional a energia cinética, Eq.(3.60):

$$PV = \frac{2}{D-1} U_{cin}, \quad (3.63)$$

como deveria ser para um gás de Bose não relativístico [22, 23].

Uma vez encontrando a energia, a equação de estado e uma forma implícita para o potencial químico encontramos rapidamente a entropia Eq.(3.28) e a energia livre de Helmholtz Eq.(3.42), que para corresponderem a um gás de Bose não relativístico, devemos subtrair o termo correspondente a energia de repouso como fizemos com a energia interna Eq.(3.60).

Na próxima seção estudaremos o outro lado da moeda: o limite ultra-relativístico, $kT \gg Mc^2$.

3.2 Limite Ultra-Relativístico $kT \gg Mc^2$

Nesta seção estudaremos o limite ultra-relativístico das grandezas termodinâmicas do gás ideal de Bose relativístico carregado. Veremos que neste limite, a população de anti-partículas será comparável ao de partículas. Neste limite as funções de Bessel modificada de segunda ordem $K_\nu(\beta Mc^2)$ nas equações das grandezas termodinâmicas serão dadas pela Eq.(B.10), onde consideraremos apenas os dois primeiros termos da série. Primeiramente, calcularemos o potencial químico, Eq.(3.39), no limite $kT \gg Mc^2$ que será dado de forma implícita por:

$$\rho = \frac{2^D \pi^{(D-2)/2} (kT)^{D-2} \mu \Gamma(D/2)}{(hc)^{D-1}} [\zeta(D-2) + \dots] + \rho_0, \quad (3.64)$$

onde ρ_0 é dado por:

$$\rho_0 = \frac{Q_0}{V} = \frac{1}{V} \frac{2\mu kT}{M^2 c^4 - \mu^2}. \quad (3.65)$$

A Eq.(3.65) foi obtida considerando $kT \gg Mc^2 \geq \mu$ na Eq.(3.39), considerando $\rho := Q/V$. Notamos que neste limite a antipartícula contribui tão qual a partícula para formação da termodinâmica do gás de Bose ultra-relativístico carregado. O cálculo do segundo termo da Eq.(3.64) não pode ser calculado por nosso método, pois devemos considerar todo o somatório da expansão da $K_\nu(\beta Mc^2)$ para argumentos pequenos. Porém, há outro método para encontrar esse termo que não usa a Bessel modificada de segunda espécie; esse método foi usado por Haber & Weldon [13].

Da Eq.(3.64) podemos escrever o potencial químico μ em função da carga Q na região fora do condensado de Bose-Einstein⁵:

$$\mu = \frac{(hc)^{D-1} Q}{2^D \pi^{(D-2)/2} (kT)^{D-2} \Gamma(D/2) \zeta(D-2) V}. \quad (3.66)$$

⁵Estudaremos o condensado de Bose-Einstein no próximo capítulo.

Vemos da Eq.(3.66) que se a carga é positiva, negativa ou nula o potencial também será positivo, negativo ou nulo. É interessante notar que o potencial químico “quântico” Eq.(3.66) difere do potencial químico “clássico” Eq.(2.72) pela constante multiplicativa $1/\zeta(D-2)$, considerando que h na Eq.(2.72) é igual a constante de Planck que aparece na Eq.(3.66).

No limite ultra-relativístico o gás é estritamente quântico diferentemente do caso não relativístico tratado na seção anterior. Como já vimos, no limite clássico, a distância entre os elementos do gás é muito grande se comparada ao comprimento de onda térmico que neste caso é dado por

$$\lambda_T = \frac{hc}{kT}. \quad (3.67)$$

A distância entre as cargas, $(V/|Q|)^{1/D-1}$, é sempre a mesma. No entanto, a distância entre partículas e antipartículas $(V/N)^{1/D-1}$ decresce com a temperatura como mostraremos a seguir: tomando o limite ultra-relativístico da Eq.(3.43) temos que N é dado por

$$\frac{N}{V} = \frac{2^D \pi^{(D-2)/2} (kT)^{D-1} \Gamma(D/2)}{(hc)^{D-1}} \zeta(D-1) + \frac{N_0}{V}, \quad (3.68)$$

onde

$$\frac{N_0}{V} = \frac{1}{V} \frac{2Mc^2 kT}{M^2 c^4 - \mu^2}. \quad (3.69)$$

Note que N não é igual ao módulo da densidade de carga, Eq.(3.64), ao contrário do que acontecia com o caso não relativístico. A Eq.(3.69) mostra-nos que abaixo de certa temperatura (onde $\mu = Mc^2$) os elementos do gás começam a migrar para o estado fundamental, um fenômeno puramente quântico, ou seja, abaixo dessa temperatura já não temos o limite clássico. No entanto, resta-nos mostrar que esse gás também é estritamente quântico acima da temperatura onde $|\mu| = Mc^2$. Para termos o regime clássico, necessariamente,

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{D-1}} \gg \lambda_T. \quad (3.70)$$

Desconsiderando o estado fundamental da Eq.(3.68) e substituindo-a no lado direito da Eq.(3.70), juntamente com a Eq.(3.67), temos que:

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{D-1}} \frac{1}{\lambda_T} = \frac{1}{[2^D \pi^{D/2-1} \Gamma(D/2) \zeta(D-1)]^{1/(D-1)}} < 1. \quad (3.71)$$

Essa razão sempre será igual a uma contante independentemente da temperatura e essa constante sempre será menor que um. Logo, mostramos que o gás no regime ultra relativístico não possui limite clássico em nenhuma circunstância como afirma [16]. No entanto, o número total de elementos N no limite ultra-relativístico “quântico”, Eq.(3.68),

é proporcional ao número total de elementos N no limite ultra-relativístico que calculamos no Capítulo 2, Eq.(2.74), sendo que a constante de proporcionalidade é $\zeta(D-1)$, novamente considerando que h na Eq.(2.74) é a constante de Planck da Eq.(3.68).

Agora, tomando o limite $kT \gg Mc^2 \geq \mu$ na Eq.(3.40) teremos que a energia interna será dada por:

$$U = \frac{2^{D-1}\pi^{(D-2)/2}V(kT)^{D-2}\Gamma(D/2)}{(hc)^{D-1}} \times \left\{ 2(D-1)\zeta(D)(kT)^2 + \left[(D-1)\mu^2 - \frac{D-3}{D-2}M^2c^4 \right] \zeta(D-2) \right\} + U_0, \quad (3.72)$$

onde U_0 é dada por:

$$U_0 = Mc^2kT \left(\frac{1}{Mc^2 - \mu} + \frac{1}{Mc^2 + \mu} \right) = N_0Mc^2. \quad (3.73)$$

A Eq.(3.72) para $T > T_C$ ⁶ e em $D = 4$ recupera o resultado de [13]. Para $T > T_C$ podemos escrever a energia interna em função da carga substituindo a Eq.(3.66) na Eq.(3.72), assim,

$$U = \frac{2^D\pi^{(D-2)/2}V(kT)^D\Gamma(D/2)}{(hc)^{D-1}}(D-1)\zeta(D) - \frac{2^{D-1}\pi^{(D-2)/2}V(kT)^{D-2}M^2c^4\Gamma(D/2)}{(hc)^{D-1}}\frac{D-3}{D-2}\zeta(D-2). \quad (3.74)$$

Note que o primeiro termo da energia Eq.(3.74) é $\zeta(D)$ vezes o primeiro da Eq.(2.73) e o segundo termo da Eq.(3.74) é $\zeta(D-2)$ vezes o segundo termo de Eq.(2.73) se h que aparece na Eq.(2.73) for a constante de Planck. A capacidade térmica a volume constante C_V é facilmente obtida da Eq.(3.74), basta derivar com relação a temperatura e a volume constante.

A equação de estado do sistema é calculada tomando o limite ultra-relativístico da Eq.(3.35). Assim, a equação de estado do gás de Bose relativístico carregado é dada por:

$$P = \frac{2^D\pi^{(D-2)/2}(kT)^D\Gamma(D/2)}{(hc)^{D-1}} \left[\zeta(D) + \frac{(D-2)\mu^2 - (Mc^2)^2}{2(D-2)(kT)^2} \zeta(D-2) \right] - \frac{kT}{V} \ln \left(\frac{M^2c^4 - \mu^2}{k^2T^2} \right). \quad (3.75)$$

Considerando $T > T_C$ na Eq.(3.75) em $D = 4$ temos o resultado encontrado por [13]. Se substituirmos a Eq.(3.66) na Eq.(3.75), considerando a região onde $T > T_C$, a equação de estado com o primeiro termo de correção torna-se:

$$P = \frac{2^D\pi^{(D-2)/2}(kT)^D\Gamma(D/2)}{(hc)^{D-1}}\zeta(D) - \frac{2^{D-1}\pi^{(D-2)/2}(kT)^{D-2}\Gamma(D/2)M^2c^4}{(hc)^{D-1}(D-2)}\zeta(D-2). \quad (3.76)$$

⁶ T_C é a temperatura que o condensado de Bose-Einstein começ a se formar.

Se considerarmos que h , na Eq.(2.77), é a constante de Planck, o primeiro termo da Eq.(3.76) é igual ao primeiro termo da Eq.(2.77) vezes $\zeta(D)$ e o segundo termo da Eq.(3.76) é igual ao segundo termo da Eq.(2.77) vezes $\zeta(D-2)$. Além disso, note que a energia interna Eq.(3.74) é $(D-1)$ vezes PV , Eq.(3.76), em primeira aproximação. Essa relação da equação de estado com a energia interna é a mesma relação entre equação de estado e a energia interna na radiação de corpo negro [22, 23, 29].

O limite ultra-relativístico da entropia Eq.(3.28) para a região onde $kT > kT_C$ (novamente desprezando o estado fundamental) é dada por:

$$S = \frac{2^{D-1}\pi^{(D-2)/2}k^{D-2}T^{D-3}V\Gamma(D/2)}{(hc)^{D-1}} \{2D(kT)^2\zeta(D) + [(D-2)\mu^2 - M^2c^4]\zeta(D-2)\}. \quad (3.77)$$

Em $D = 4$, a Eq.(3.77) é idêntica a entropia encontrada por [13]. Substituindo a Eq.(3.66) na Eq.(3.77) encontramos que a entropia é dada por (considerando apenas o primeiro termo de correção):

$$S = \frac{2^D\pi^{(D-2)/2}k^D T^{D-1}V\Gamma(D/2)D}{(hc)^{D-1}}\zeta(D) - \frac{2^{D-1}\pi^{(D-2)/2}k^{D-2}T^{D-3}V\Gamma(D/2)M^2c^4}{(hc)^{D-1}}\zeta(D-2). \quad (3.78)$$

Novamente, primeiro termo da Eq.(3.78) é igual ao primeiro termo da Eq.(2.76) vezes $\zeta(D)$ e o segundo termo da Eq.(3.78) é igual ao segundo termo da Eq.(2.76) vezes $\zeta(D-2)$ se e somente se h na Eq.(2.76) for igual a constante de Planck.

Resta-nos, agora, calcular a energia livre de Helmholtz. Substituindo a Eq.(3.66) e Eq.(3.76) na Eq.(3.42) obtemos que a energia livre de Helmholtz é dada por

$$A = -\frac{2^D\pi^{(D-2)/2}(kT)^D\Gamma(D/2)}{(hc)^{D-1}}\zeta(D) + \frac{2^{D-1}\pi^{(D-2)/2}(kT)^{D-2}\Gamma(D/2)M^2c^4}{(hc)^{D-1}(D-2)}\zeta(D-2). \quad (3.79)$$

Há, também uma proporcionalidade entre os termos da Eq.(3.79) e da Eq.(2.78), considerando que h na Eq.(2.78) é a constante de Planck. O primeiro termo da Eq.(3.79) é $\zeta(D)$ vezes o primeiro termo da Eq.(2.78) e o segundo termo da Eq.(3.79) é $\zeta(D-2)$ vezes o segundo termo da Eq.(2.78).

As grandezas termodinâmica calculadas neste capítulo no limite ultra-relativístico concordam com aquelas em [13], quando tomamos $D = 4$. Percebemos também, como mostrado acima, que há proporcionalidade entre as quantidades calculadas nesta seção e aquelas do capítulo anterior no regime de altas temperaturas, considerando que “ h ”, nas equações do Capítulo 2, é igual a constante de Planck. Se não considerarmos o elemento de volume “ h ” (inserido no caso clássico para garantirmos adimensionalidade) igual a constante de Planck, mas sim proporcional a esta, mediante um ajuste adequado, obteríamos

com a teoria clássica os mesmos resultados obtidos com a quântica. Note que para que esta curiosidade aconteça, é necessário apenas considerar a existência de antipartículas, a energia relativística e um volume “ h ” mínimo no espaço de fase clássico que, claramente, está relacionado com o princípio da incerteza.

Capítulo 4

Alguns Aspectos do Condensado de Bose-Einstein

Deixamos, particularmente, um capítulo para analisarmos alguns aspectos do condensado de Bose-Einstein (*BEC-Bose-Einstein Condensate*), pois trata-se de um assunto peculiar, com muitos detalhes e que vem sendo estudado arduamente [13–20, 28, 30–33]. Abaixo de uma certa temperatura, denominada temperatura crítica T_C , a população partículas/antipartículas começa migrar para o estado de menor energia, ou seja, para o estado fundamental. Até que no zero absoluto as populações se encontram totalmente no estado fundamental. A isso chamamos de condensado de Bose-Einstein. Acima da temperatura crítica a população do estado fundamental é irrelevante. O BEC pode acontecer em qualquer regime de temperatura, e o que vai determinar quando este ocorrerá será a densidade do gás. Porém, dificuldades analíticas nos impedem de achar matematicamente a temperatura crítica no caso geral. Nessas circunstâncias estudaremos apenas os gases de Bose não relativístico e ultra-relativístico.

Neste momento, é importante definir o que são gases de Bose não relativístico e ultra-relativístico. O gás de Bose é não relativístico se $kT_C \ll Mc^2$ e ultra-relativístico se $kT_C \gg Mc^2$. Sendo assim, podemos encontrar um gás não relativístico no regime ultra-relativístico ($kT \gg Mc^2$) e esse gás será descrito pelas quantidades termodinâmicas da segunda seção do Capítulo 3. Isto é, um gás de Bose não relativístico a altas temperaturas comporta-se como radiação de corpo negro. Podemos, também encontrar um gás ultra-relativístico no regime de baixas temperaturas ($kT \ll Mc^2$), no entanto esse gás se encontrará no BEC como veremos nas seções deste capítulo. A figura a seguir mostra tanto as temperaturas críticas não relativística e ultra-relativística, como os regimes de baixas

temperaturas ($kT \ll Mc^2$) e de altas temperaturas ($kT \gg Mc^2$) na escala de energia kT .

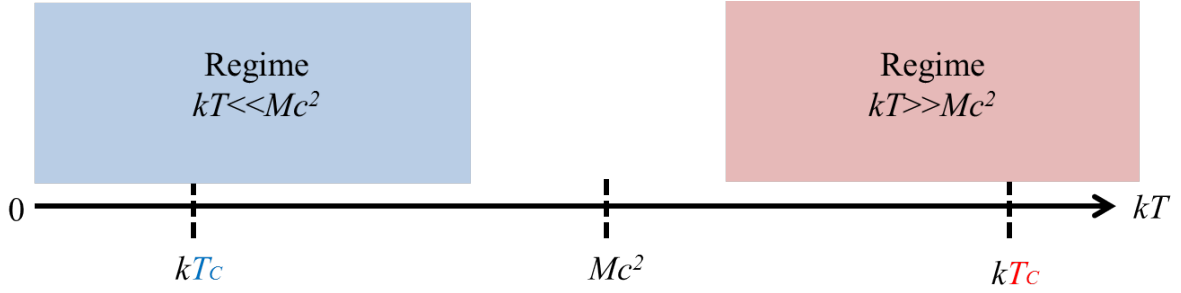


Figura 4.1: Escala de energia com os regimes de temperatura e com as temperaturas críticas. T_C vermelho representa a temperatura ultra-relativística e T_C azul representa a temperatura não-relativística.

Pela figura 4.1, vemos que no regime de baixas temperaturas ($kT \ll Mc^2$ - região azul), o gás não relativístico ($kT_C \ll Mc^2$) (T_C azul) pode estar tanto dentro e fora do BEC (região em azul) e o gás ultra-relativístico está no BEC, pois nessa região $kT \ll Mc^2 \ll kT_C$ (T_C vermelho). Já no regime de altas temperaturas ($kT \gg Mc^2$ - região vermelha), o gás não relativístico se comporta como radiação de corpo negro, de acordo com a segunda seção do Capítulo 3, e o gás ultra-relativístico pode estar tanto dentro como fora do BEC.

4.1 Gás de Bose Não Relativístico $kT_C \ll Mc^2$

Para determinarmos a temperatura crítica T_C de um gás de Bose não relativístico ($kT_C \ll Mc^2$), usaremos a densidade de carga em primeira aproximação, Eq.(3.49), levando em conta que o potencial químico $\mu > 0$, ou seja, nosso gás possui densidade de carga positiva. O BEC ocorre em $\mu = Mc^2$, pois é nessa ocasião em que a densidade de carga do estado fundamental torna-se relevante e isso pode ser confirmado analisando o último termo da Eq.(3.49). Assumimos, também que $T = T_C + \theta$ ($0 < \theta \ll 1$), ou seja, ainda estamos fora do BEC, porém $T \rightarrow T_C$. Logo, podemos desconsiderar o estado fundamental da Eq.(3.49). Assim, fazendo $\mu = Mc^2$ na Eq.(3.49), encontramos que a temperatura crítica de um gás de Bose não relativístico é dada por

$$T_C = \frac{h^2}{2\pi M k} \left[\frac{\rho}{\zeta\left(\frac{D-1}{2}\right)} \right]^{\frac{2}{D-1}}, \quad (4.1)$$

onde usamos a propriedade Eq.(C.3) e $\rho = Q/V$. A temperatura crítica, Eq.(4.1), está completamente de acordo com Pandita [20], Pathria [23], Grether [18], e para $D = 4$ o

resultado também é igual ao do Haber & Weldon [15]. Note que a temperatura crítica, Eq.(4.1), depende da densidade de carga do gás e da massa das partículas e antipartículas desse gás. Observamos pela Eq.(4.1) que a massa M deve ser tal a não violar a relação $kT_C \ll Mc^2$. Isto é, dada uma densidade de carga ρ , se M tender a zero a Eq.(4.1) já não é mais válida, pois a relação $kT_C \ll Mc^2$ será violada.

Tendo a temperatura crítica, podemos ver que o fato de $kT_C \ll Mc^2$ implica que $\rho \ll (Mc/h)^{D-1}$. Isso pode ser verificado substituindo a Eq.(4.1) na relação $kT_C \ll Mc^2$. Se assumirmos $\rho \gg (Mc/h)^{D-1}$ para um gás não relativístico, a relação $kT_C \ll Mc^2$ é violada. Logo, $\rho \ll (Mc/h)^{D-1}$ define o gás de Bose não relativístico. Com a temperatura crítica, podemos, também, encontrar o potencial químico no BEC e fora do BEC. Para determinarmos o potencial químico do gás não relativístico consideraremos a Eq.(3.49). Com algumas manipulações matemáticas e em primeira aproximação, temos

$$\frac{vQ_0}{V} = 1 - \frac{g_{\frac{D-1}{2}}(z')v}{\lambda^{D-1}}, \quad (4.2)$$

sendo λ o comprimento de onda térmico dado pela Eq.(2.54), $v = V/Q$,

$$Q_0 = \frac{1}{z'^{-1} - 1} \quad (4.3)$$

a carga do estado fundamental e definimos

$$z' = e^{(\mu - Mc^2)/kT} = ze^{-Mc^2/kT}, \quad (4.4)$$

onde $z = e^{\mu/kT}$ é a fugacidade. Não temos uma solução analítica para a Eq.(4.2) e apresentaremos apenas a solução gráfica da equação para o potencial químico. Assim, podemos ver no gráfico a seguir, para $D = 4$, que para temperaturas abaixo da temperatura crítica o potencial químico μ é igual a energia de repouso Mc^2 .

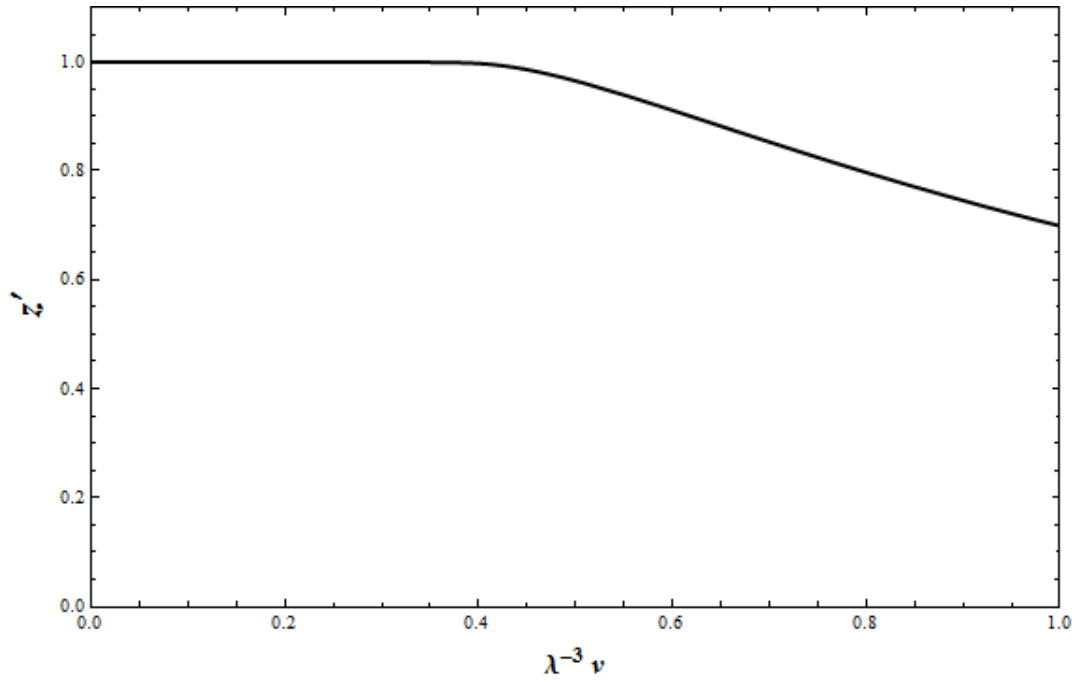


Figura 4.2: Gráfico z' vs. λ ($V = 10^4$, $v = Q/V = 1$), λ dado pela Eq.(2.54).

Vemos pela figura 4.2 que $z' = 1$ (ou seja, $\mu = Mc^2$) abaixo de certa temperatura T_C (na figura $T_C \approx 0.4$). Agora, com o objetivo de analisar o comportamento do gráfico para diferentes volumes, construímos a figura a seguir com algumas curvas de volumes distintos.

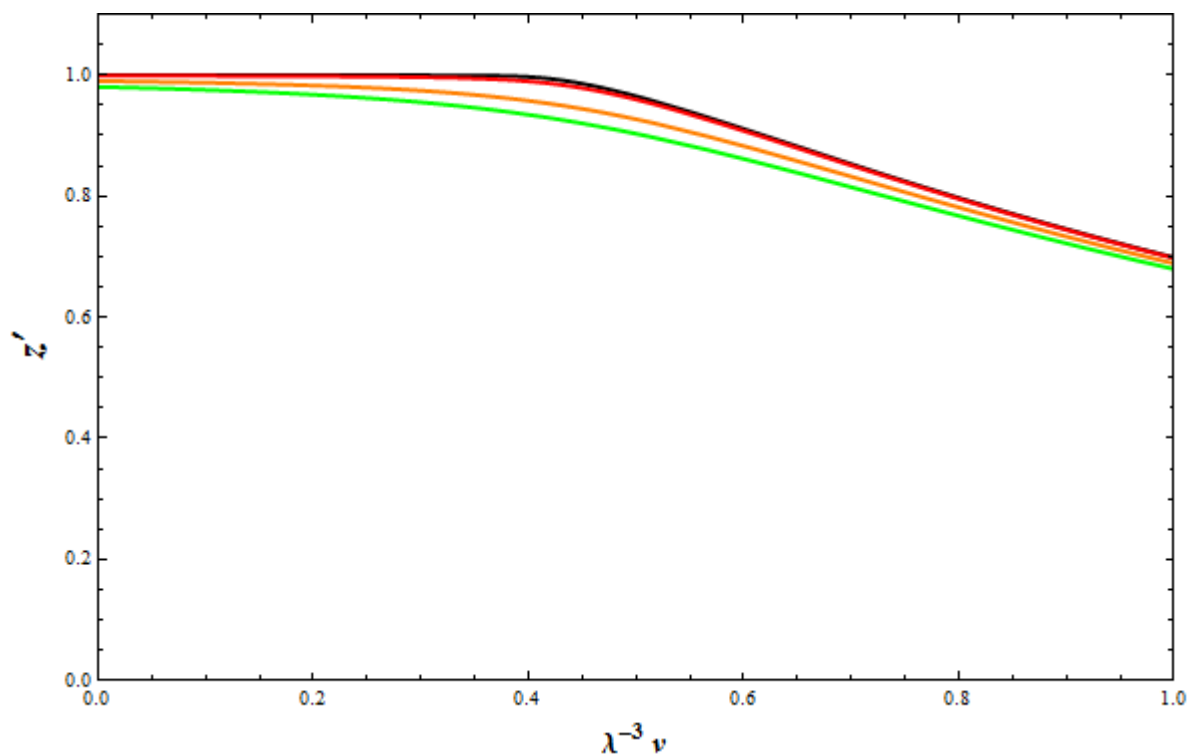


Figura 4.3: Gráfico de z' vs. λ ($v = Q/V = 1$), λ dado pela Eq.(2.54): curva preta $V = 10^4$, curva vermelha $V = 10^3$, curva laranja $V = 10^2$, curva verde $V = 50$.

Claramente, o gráfico acima, nos mostra que quanto maior for o volume mais abruptamente a curva tende $z' = 1$, ou seja, o potencial químico tende a Mc^2 . A próxima figura nos mostra uma ampliação do gráfico anterior na região em que instaura o BEC com mais curvas para volumes diferentes.

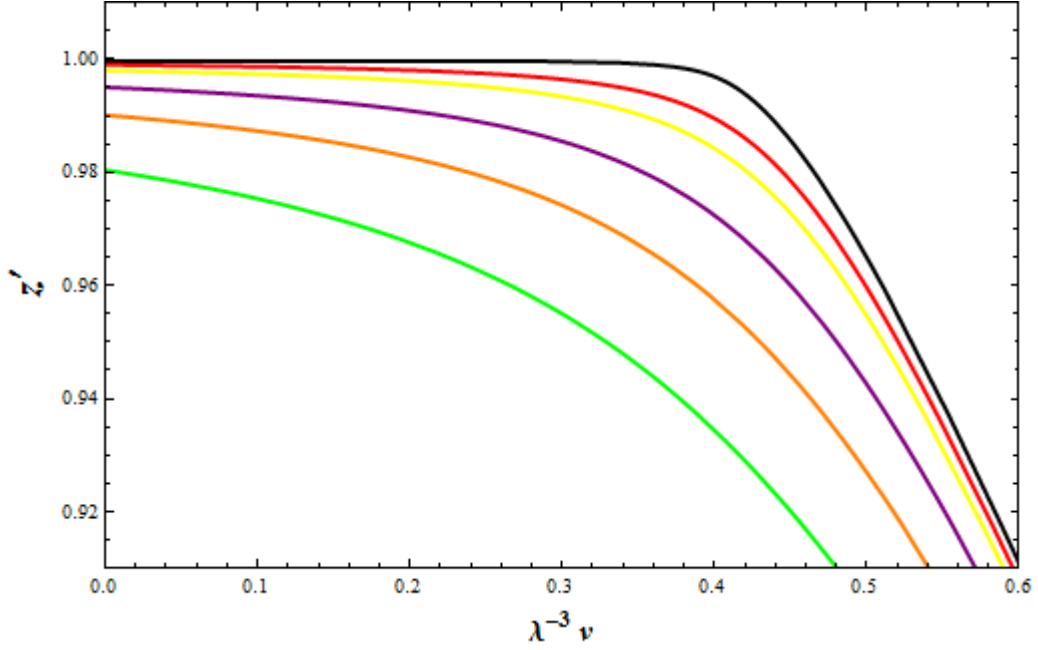


Figura 4.4: Gráfico de z' vs. λ ($v = Q/V = 1$), λ dado pela Eq.(2.54): curva preta $V = 10^4$, curva vermelha $V = 10^3$, curva amarela $V = 500$, curva roxa $V = 200$, curva laranja $V = 10^2$, curva verde $V = 50$.

Notavelmente quanto maior for o volume, ou seja, quanto mais perto V for do limite termodinâmico $V \rightarrow \infty$ mais abruptamente o potencial químico tende a Mc^2 quando a temperatura se aproxima da temperatura crítica. Assim, tendo o conhecimento do comportamento gráfico de z' , temos o seguinte solução

$$z' = \begin{cases} 1, & \text{se } T \leq T_C, \\ g_{\frac{D-1}{2}}(z') = \frac{\lambda^{D-1}}{v}, & \text{se } T \geq T_C. \end{cases} \quad (4.5)$$

Usando esse resultado na Eq.(4.2), encontramos que a densidade relativa de carga do estado fundamental de um gás de Bose não relativístico carregado é dada por:

$$\frac{Q_0}{Q} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{D-1}{2}}, & \text{se } T \leq T_C, \\ 0, & \text{se } T \geq T_C, \end{cases} \quad (4.6)$$

onde T_C é dada pela Eq.(4.1). Para $D = 4$ temos o caso do gás de Bose analisado na literatura [22, 23]. A seguir, plotamos o gráfico da densidade relativa de carga do estado fundamental Eq.(4.6) para $D = 4$.

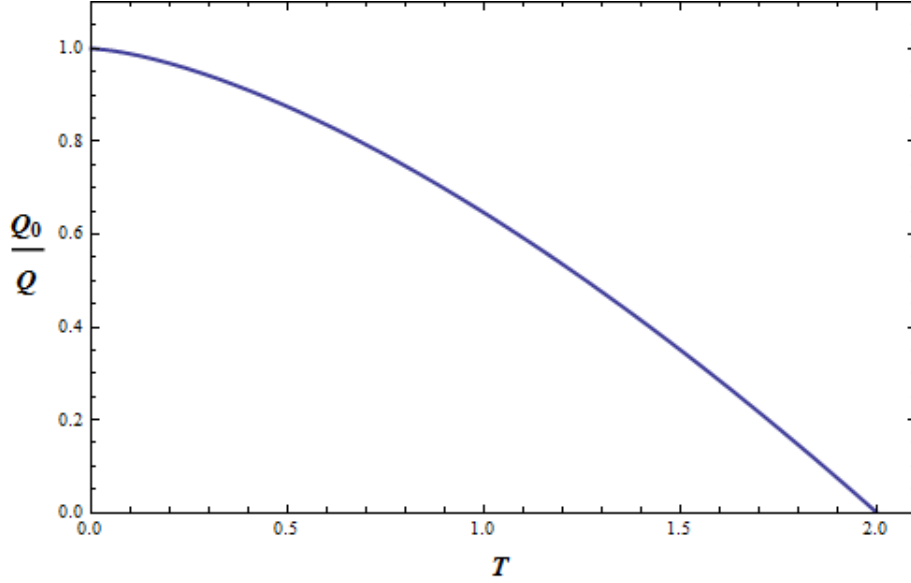


Figura 4.5: Densidade de carga relativa do estado fundamental do gás de Bose não relativístico.

Note que abaixo de uma temperatura (na figura $T_C = 2K^1$), o BEC instaura até que em $T = 0K$ toda a população está no estado fundamental.

Quando calculamos as quantidades termodinâmicas no Capítulo 3 em função da carga desconsideramos o estado fundamental no equilíbrio termodinâmico quando $V \rightarrow \infty$. Para temperaturas acima da temperatura crítica $T > T_C$ isso é claro. Para temperaturas abaixo da temperatura crítica $T < T_C$ isso também ocorre para algumas grandezas. Por exemplo, abaixo da temperatura crítica o último termo da Eq.(3.62) é desprezível se comparado com o primeiro termo da mesma equação. Isso se deve ao fato de que o termo $(1 - z') \propto V^{-1}$ [22], o que pode ser verificado via Eq.(4.2) já que $1 \geq g_{(D-1)/2}(z')v/\lambda^{D-1}$. Assim, a pressão no BEC (quando $\mu = Mc^2$) será dada por:

$$P = \frac{kT}{\lambda^{D-1}} \left[g_{\frac{D+1}{2}}(1) + \frac{(D^2 - 1)kT}{8Mc^2} g_{\frac{D+3}{2}}(1) \right]. \quad (4.7)$$

Note que essa pressão, Eq.(4.7), é tanto a pressão do gás não relativístico como do gás ultra-relativístico no BEC no regime de baixas temperaturas ($kT \ll Mc^2$). A Eq.(4.7), sem o termo de correção (segundo termo), é idêntica a equação da pressão no BEC que encontramos em [22]. A energia interna será diferente da que encontramos na literatura, pois nossa energia é relativística. No entanto, se da energia interna Eq.(3.58) subtrairmos a energia de repouso NMc^2 , senso N dado pela Eq.(3.50), em $\mu = Mc^2$ encontramos que

¹Valor meramente ilustrativo.

a energia cinética, Eq.(3.61), em $T < T_C$ é dada por:

$$U_{cin} = \frac{(D-1) V k T}{2} \frac{g_{\frac{D+1}{2}}(1)}{\lambda^{D-1}} = \frac{(D-1)}{2} P V. \quad (4.8)$$

A Eq.(4.8) é a expressão usual da energia interna no BEC de um gás não relativístico [22]. Tendo a energia interna, a pressão e sabendo que $\mu = Mc^2$ no BEC as outras quantidades termodinâmicas podem ser obtidas seguindo o procedimento padrão, lembrando que para obtermos os resultados da literatura devemos tratar os termos correspondentes a energia de repouso apropriadamente.

4.2 Gás de Bose Ultra-Relativístico $kT_C \gg Mc^2$

Para determinamos a temperatura crítica T_C do gás de Bose ultra-relativístico ($kT_C \gg Mc^2$), usaremos a densidade de carga em primeira aproximação, Eq.(3.64), levando em conta, novamente, que o potencial químico $\mu > 0$, ou seja, nosso gás possui densidade de carga positiva. Como já sabemos o BEC ocorre em $\mu = Mc^2$, pois é nessa ocasião em que a densidade de carga do estado fundamental torna-se relevante e isso pode ser confirmado analisando o último termo da Eq.(3.65). Assumimos, também que $T = T_C + \theta$ ($0 < \theta \ll 1$), ou seja, ainda estamos fora do BEC, portanto podemos desconsiderar o estado fundamental da Eq.(3.64). Assim, fazendo $\mu = Mc^2$ na Eq.(3.64) encontramos que a temperatura crítica de um gás de Bose ultra-relativístico é dada por:

$$T_C = \left[\frac{\rho h^{D-1}}{2^D \pi^{D/2-1} \Gamma[D/2] \zeta(D-2) M c^{3-D} k^{D-2}} \right]^{\frac{1}{D-2}}. \quad (4.9)$$

A temperatura crítica do gás ultra-relativístico está completamente de acordo com Pandita [20], Pathria [23], Grether [18] e para $D = 4$ o resultado é igual ao Haber & Weldon [15]. Note que a temperatura críticas, Eq.(4.9), depende da densidade de carga do gás e da massa das partículas e antipartículas desse gás. Observamos pela Eq.(4.9) que a massa M deve ser tal a não violar a relação $kT_C \gg Mc^2$. Isto é, dada uma densidade de carga ρ , se M tender ao infinito a Eq.(4.9) já não é mais válida, pois a relação $kT_C \gg Mc^2$ será violada.

Tendo a temperatura crítica, podemos ver que $\rho \gg (Mc/h)^{D-1}$ pelo fato de $kT_C \gg Mc^2$. Isso pode ser verificado substituindo a Eq.(4.9) na relação $kT_C \gg Mc^2$. Se assumirmos $\rho \ll (Mc/h)^{D-1}$ para um gás ultra-relativístico, a relação $kT_C \gg Mc^2$ será violada. Logo, $\rho \gg (Mc/h)^{D-1}$ define o gás de Bose ultra-relativístico.

Calcularemos o potencial químico do gás ultra-relativístico de forma análoga ao do gás não relativístico. Para facilitar o cálculo a Eq.(3.64) foi escrita como

$$1 = \frac{2^D \pi^{(D-2)/2} (kT)^{D-2} \mu \Gamma(D/2) v}{(hc)^{D-1}} \zeta(D-2) + \frac{v}{V} \frac{2\mu kT}{M^2 c^4 - \mu^2} \quad (4.10)$$

ou

$$\frac{Q_0}{Q} = 1 - \frac{2^D \pi^{(D-2)/2} (kT)^{D-2} \mu \Gamma(D/2) v}{(hc)^{D-1}} \zeta(D-2), \quad (4.11)$$

onde $v = V/Q$ e Q_0 é dada pela Eq.(3.65). Da Eq.(4.10) segue o gráfico em $D = 4$:

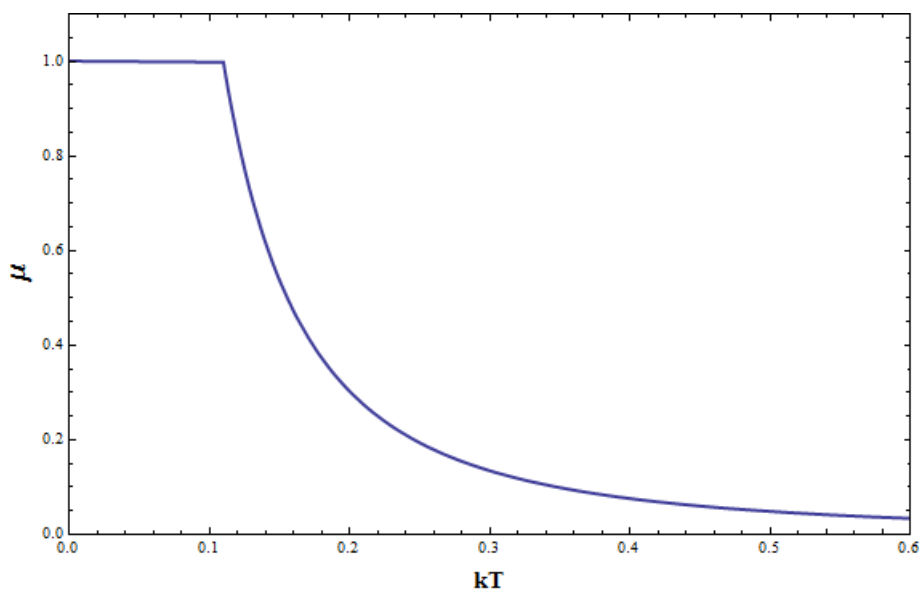


Figura 4.6: Potencial químico: μ vs. kT com $V = 10^6$ ($M = c = h = 1$).

Do gráfico acima, claramente, $\mu = Mc^2$ abaixo de uma temperatura crítica T_C que na figura 4.6 é aproximadamente 0,1. A figura a seguir mostra várias curvas do potencial químico com volumes diferentes.

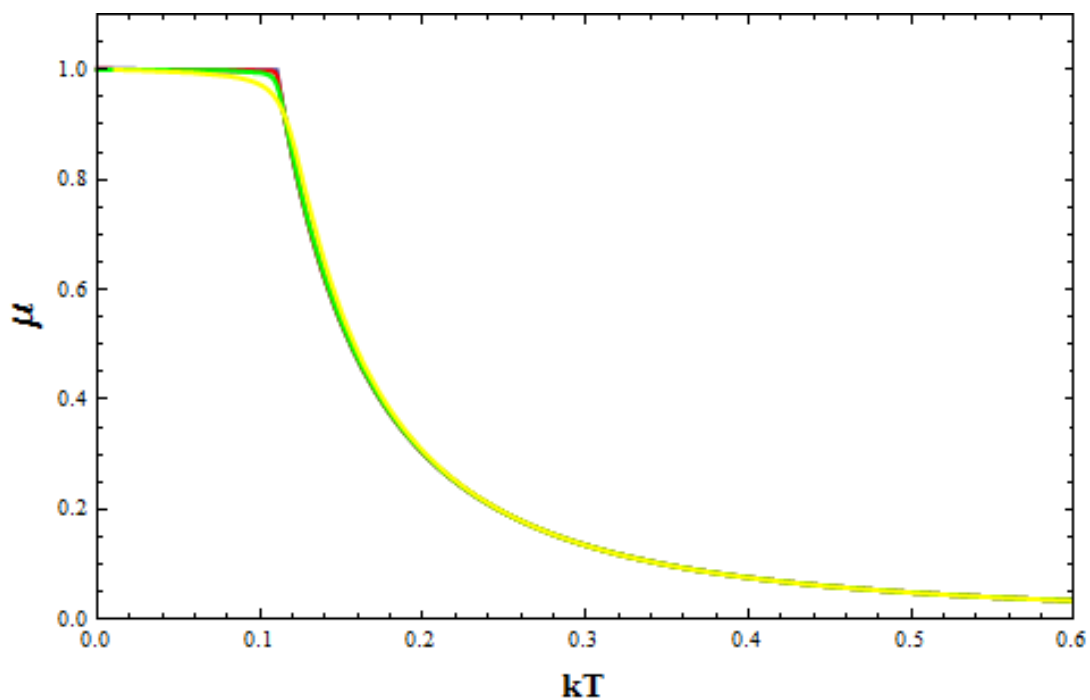


Figura 4.7: Potencial químico: μ vs. kT ($M = c = h = 1$). Curva azul $V = 10^6$, curva vermelha $V = 10^3$, curva verde $V = 10^2$, curva amarela $V = 10$.

Na figura Eq.(4.7) fica claro que quanto maior for o volume, mais rápido o potencial químico tende a energia de repouso Mc^2 à medida que a temperatura é progressivamente reduzida abaixo da temperatura crítica. Na figura seguir ampliamos o gráfico anterior próximo a temperatura crítica para termos uma análise melhor do gráfico.

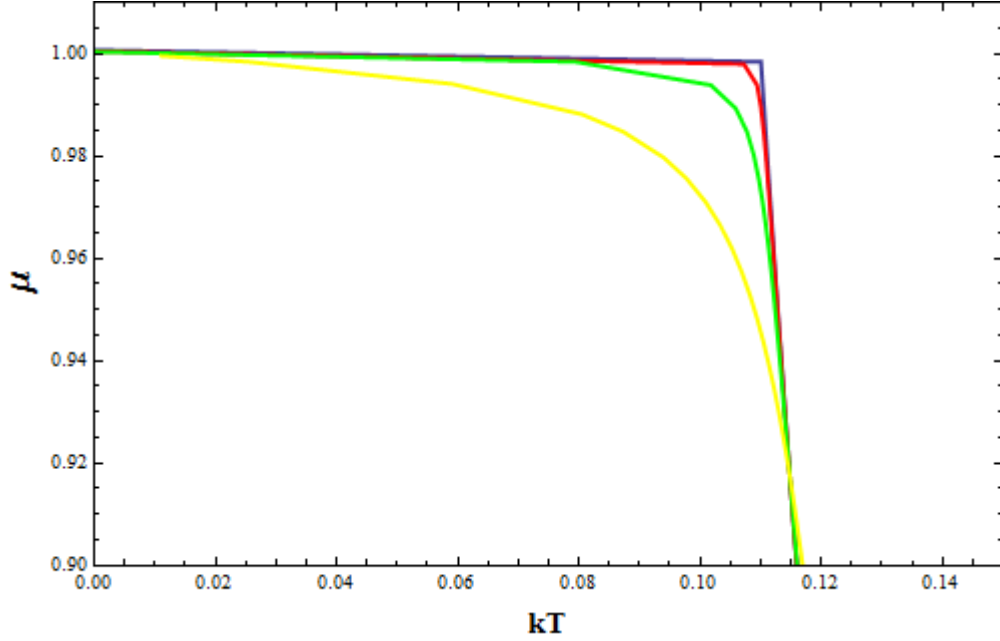


Figura 4.8: Potencial químico ampliado: μ vs. kT ($M = c = h = 1$). Curva azul $V = 10^6$, curva vermelha $V = 10^3$, curva verde $V = 10^2$, curva amarela $V = 10$.

É claro na figura 4.8 que quanto maior for o volume V , ou seja, quanto mais nos aproximamos de $V \rightarrow \infty$, mais abruptamente o potencial químico μ tende a Mc^2 . Vale ressaltar que esse gráfico é semelhante ao gráfico do potencial químico em [19]. Portanto, com os três últimos gráficos, concluímos

$$\mu = \begin{cases} Mc^2, & \text{se } T \leq T_C, \\ \frac{(hc)^{D-1}Q}{2^D \pi^{(D-2)/2} (kT)^{D-2} \Gamma(D/2) \zeta(D-2) V}, & \text{se } T \geq T_C. \end{cases} \quad (4.12)$$

Assim, a densidade relativa de carga do estado fundamental de um gás de Bose ultra-relativístico carregado, Eq.(4.11), é dada por:

$$\frac{Q_0}{Q} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^{D-1}, & \text{se } T \leq T_C, \\ 0, & \text{se } T \geq T_C, \end{cases} \quad (4.13)$$

onde T_C é dada pela Eq.(4.9). Em quatro dimensões temos o caso do gás de Bose ultra-relativístico obtido por Haber & Weldon [13] e em $D = 4$ temos o gráfico da densidade relativa do estado fundamental, Eq.(4.13), como mostra a figura a seguir.

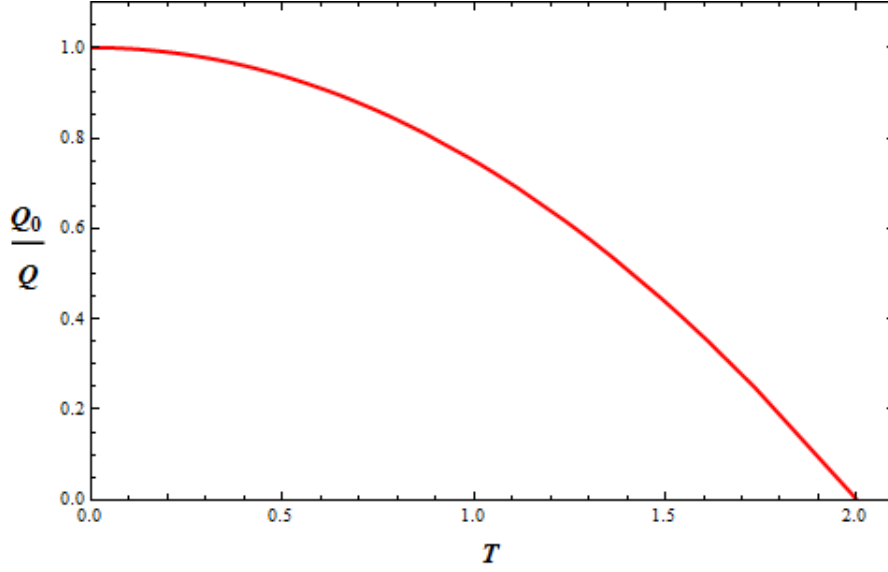


Figura 4.9: Densidade de carga relativa do estado fundamental do gás de Bose ultra-relativístico.

Vemos da figura que o comportamento da densidade de carga relativa do estado fundamental é semelhante ao caso não relativístico. Quando $T = T_C$ ($2.0K^2$ na figura 4.9) o condensado começa a se formar até que em $T = 0K$ temos toda a população no estado fundamental. Ao calcularmos as grandezas termodinâmicas no Capítulo 3 em função da carga desconsideramos o estado fundamental, pois para temperaturas acima da temperatura crítica as contribuições devidas a esse estado são irrelevantes. Porém, para temperaturas abaixo da temperatura crítica esse estado torna-se importante. No entanto, quando $V \rightarrow \infty$ a parte que corresponde a o estado fundamental da Eq.(3.75) também torna-se irrelevante devido ao fato de que $M^2c^4 - \mu^2 \propto V^{-1}$, o que pode ser verificado a partir da Eq.(4.10). Assim, a pressão no BEC é dada por:

$$P = \frac{2^D \pi^{(D-2)/2} (kT)^D \Gamma(D/2)}{(hc)^{D-1}} \left[\zeta(D) + \frac{(D-3)(Mc^2)^2}{2(D-2)(kT)^2} \zeta(D-2) \right]. \quad (4.14)$$

No BEC ultra-relativístico o número de partículas no estado fundamental é igual ao módulo da carga no estado fundamental e isso pode ser visto da Eq.(3.65), quando $\mu = Mc^2 \rightarrow |Q_0| = N_0$, Eq.(3.69). Ou seja, para um gás ultra-relativístico, se $Q > 0$ como é nosso caso, o estado de menor energia será ocupado apenas por partícula, antipartículas não são permitidas no estado fundamental. Logo, a energia do estado fundamental no caso ultra-relativístico, Eq.(3.72), no BEC é dada por

$$U = \frac{2^{D-1} \pi^{(D-2)/2} V (kT)^{D-2} \Gamma(D/2)}{(hc)^{D-1}} \left[2(D-1)\zeta(D)(kT)^2 + \frac{D^2 - 4D - 1}{D-2} M^2c^4 \zeta(D-2) \right] + Q_0 Mc^2. \quad (4.15)$$

²Valor meramente ilustrativo.

Lembrando que a Eq.(4.15) é válida apenas quando $kT \gg Mc^2$. Temos um gás ultra-relativístico, ou seja, $kT_C \gg Mc^2$ que esta no BEC, no regime ultra-relativístico, isto é, $kT \gg Mc^2$. Para que a Eq.(4.15) seja válida quando $T \rightarrow 0$ é necessário que $M = 0$. De acordo com a Eq.(4.9) quando $M \rightarrow 0$ temos que $T_C \rightarrow \infty$. Neste caso, teríamos um gás de Bose ultra-relativístico carregado, sem massa, e que sempre se encontraria no BEC [13]. Para o regime de baixas temperaturas, $kT \ll Mc^2$, as equações da pressão e da energia cinética são dadas por Eq.(4.7) e Eq.(4.8), respectivamente. Note que as Eq.(4.14) e Eq.(4.15), não descrevem o gás não relativístico no regime de altas temperaturas, $kT \gg Mc^2$, pois um gás não relativístico no regime de altas temperaturas nunca estará no BEC.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho, analisamos o gás relativístico carregado em um número de dimensões arbitrário, segundo a mecânica estatística clássica e a quântica, usando o protocolo do ensemble microcanônico. Obtivemos as grandezas termodinâmicas em qualquer dimensão e regime de temperatura, como também comparamos os comportamentos clássico e quântico revelando aspectos interessantes - as quantidades termodinâmicas obtidas no gás ideal de Bose no regime de altas temperaturas $kT \gg Mc^2$ são proporcionais as do gás ideal clássico no mesmo regime de temperatura.

Mostramos que, curiosamente, para altas temperaturas o gás ideal clássico carregado comporta-se como radiação de corpo negro. Esses resultados não eram esperados, pois esse feito mostra que o ingrediente fundamental para gerar o comportamento planckiano não se trata do uso da estatística quântica, mas sim da existência de algum mecanismo de “criação de pares”, além da hipótese de um volume mínimo “ h ” no espaço de fase clássico.

Na segunda parte do trabalho, analisamos o gás de Bose relativístico carregado isto é, o gás quântico compatível com a equação de Klein-Gordon. O procedimento da análise do gás de Bose foi realizado da mesma forma que no do gás clássico. Encontramos as quantidades termodinâmicas em um número de dimensões arbitrário e estudamos em detalhes os regimes não relativístico ($kT \ll Mc^2$) e ultra-relativístico ($kT \gg Mc^2$) tanto do gás de Bose não relativístico $|\rho| \ll (Mc/h)^3$, como do ultra-relativístico, $|\rho| \gg (Mc/h)^3$.

O fato das propriedades do gás definirem o gás como não relativístico ou ultra-relativístico ocorre apenas no gás quântico. No gás clássico temos apenas um gás ideal no regime não relativístico ou ultra-relativístico. No regime de altas temperaturas, concluímos também que as quantidades termodinâmicas do gás de Bose são duas vezes aquelas do gás de bósons escalares [29]. Portanto, as partículas e as antipartículas atuam, cada uma, como um gás

de bósons escalares e conjuntamente como um gás de fótons, no regime de altas temperaturas. Vimos também que no regime de altas temperaturas, o gás é estritamente quântico independentemente da sua natureza, não relativístico ($kT \ll Mc^2$) ou ultra-relativístico ($kT \gg Mc^2$). Já no regime de baixas temperaturas, o gás não relativístico, dependendo da distância intermolecular, $(V/N)^{1/D-1}$, pode ser tanto clássico como quântico e o gás ultra-relativístico não possui limite clássico, pois no regime $kT \ll Mc^2$ esse gás se encontra no BEC. Concluimos, também, que para o gás de Bose não relativístico uma das populações (partícula/antipartícula) é predominante dependendo do sinal da carga. Contudo, para o regime ultra-relativístico as duas populações contribuem igualmente na região onde $T > T_C$.

No caso do gás de Bose, há o condensado de Bose-Einstein (BEC). Confirmamos a existência de dificuldades analíticas para determinarmos a temperatura crítica no caso geral, isto é, em qualquer número de dimensões e em qualquer regime de temperatura. Sendo assim, calculamos as temperaturas críticas dos gases de Bose não relativístico e ultra-relativístico e vimos que dependem da densidade de carga e da massa do gás. Se temos um gás de Bose não carregado, ou seja, $Q = 0$ ambas temperaturas críticas (Eq.(4.1) e Eq.(4.9)) são nulas. Portanto, neste caso, não existe BEC. Agora, se $M \rightarrow 0$ implica que $T_C \rightarrow \infty$, assim temos essencialmente um gás de Bose ultra-relativístico que se encontra apenas no BEC.

A partir do potencial químico calculamos a densidade de carga relativa do estado fundamental em função da temperatura crítica (Eq.(4.6) e Eq.(4.13)). Para um gás com $Q > 0$ à temperaturas menores que a temperatura crítica, a população de partículas do gás de Bose (não relativístico ou ultra-relativístico) começa a “migrar” para o estado fundamental até que no zero absoluto toda a população de partículas se encontra no estado de menor energia, assim, formando o condensado de Bose-Einstein.

Faltou-nos abordar a capacidade térmica no BEC [13, 19, 20], um assunto que nos exigiria mais tempo do que dispúnhamos. Outro assunto, que poderia ser investigado em um trabalho futuro, e que certamente revelaria efeitos interessantes, é a termodinâmica de um gás de Fermi relativístico carregado.

Apêndice A

Mecânica Estatística Segundo o Ensemble Microcanônico

Este capítulo tem como objetivo descrever a ferramenta matemática que usaremos no nosso trabalho. Nosso estudo envolve um sistema complexo em D dimensões espaço-temporais que contém um grande número de entes e onde usaremos a mecânica estatística. Nessa teoria, os detalhes do comportamento de cada ente do sistema não são relevantes. O que devemos considerar são apenas as propriedades médias do sistema. Na mecânica estatística, essas propriedades são determinadas através do ensemble de sistemas [21]. Por definição, ensemble é uma ferramenta matemática para obtermos a física de um sistema térmico por meio de experimentos mentais. Há três diferentes ensembles mais usados na literatura - microcanônico, canônico e grão-canônico. Lançaremos mão de um desses (microcanônico) para auxiliar este trabalho. No ensemble microcanônico, os sistemas são sistemas fechados, ou seja, não interagem com o meio externo. Além disso, esses sistemas são cópias idênticas- possuem o mesmo número de graus de liberdade, suas Hamiltonias possuem a mesma forma funcional, têm o mesmo volume V e energia total E . Contudo, os sistemas em geral não possuem o mesmo estado em um dado instante t [21–23].

Inicialmente, dividiremos nosso estudo em duas teorias, clássica (mecânica clássica) e quântica (mecânica quântica). A seguir, trataremos o ensemble microcanônico na visão de ambas.

A.1 Ensemble Microcanônico Clássico

Antes de mostrarmos como obtemos a termodinâmica de um sistema térmico com o ensemble microcanônico clássico, vamos definir o que é o espaço de fase.

Na mecânica clássica, determinamos o estado de uma partícula, em um dado instante t qualquer, por meio da sua posição \mathbf{r} e momentum \mathbf{p} [21]. Assim, se nosso sistema é composto por N partículas, teremos $2(D-1)N$ graus de liberdade. O espaço $2(D-1)N$ -dimensional formado por (\mathbf{r}, \mathbf{p}) é o espaço de fase e o denotamos pela letra grega Γ [21]. Cada ponto em Γ é um ponto representativo que representa todas as coordenadas (\mathbf{r}, \mathbf{p}) de todas as partículas do sistema em um determinado instante t . Uma dada hamiltoniana $H(p, r)$ governa os movimentos das partículas e a evolução do sistema é descrita pelas equações de Hamilton-Jacobi:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} \quad (\text{A.1})$$

e

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (\text{A.2})$$

O ponto representativo traça uma trajetória com a evolução do tempo. Como temos uma única solução para as equações Eq.(A.1) e Eq.(A.2), essa trajetória não se intercepta [21].

No nosso sistema não temos forças externas dependente do tempo, a hamiltoniana H não possui dependência explícita no tempo, logo $H = E$, sendo E a energia total do sistema que é constante de movimento [21]. Portanto, temos uma superfície¹ de mesma energia E , superfície onde se encontra todos os pontos no espaço Γ que satisfazem a condição $H(p, q) = E$ [22], como mostra a figura a seguir.

¹Mais precisamente uma hipersuperfície.

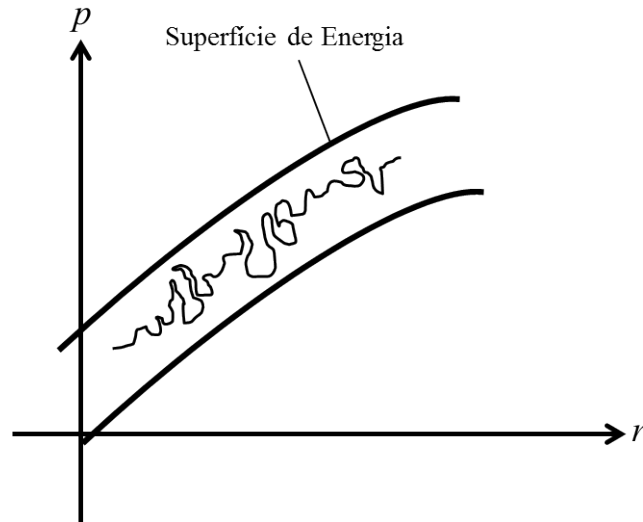


Figura A.1: No espaço Γ , a evolução de um sistema de N partículas é representada por uma trajetória em uma superfície de mesma energia $(2(D - 1)N - 1)$ -dimensional E [21].

Outra maneira de representar o estado do sistema é especificar os estados de cada partícula no espaço de fase $2(D - 1)$ dimensional de uma única partícula gerado por (\mathbf{p}, \mathbf{r}) . A esse espaço denominamos de espaço μ e esse espaço é dividido em K células, cada célula tem uma quantidade de partículas com a mesma energia [21]. A figura a seguir mostra esse espaço μ .

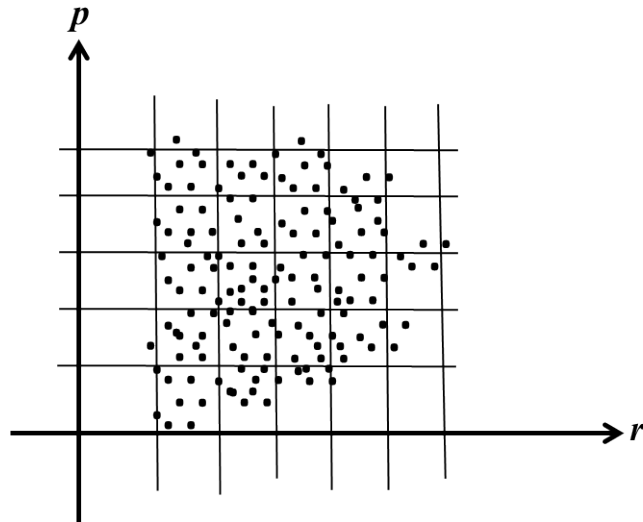


Figura A.2: Espaço μ [21]. No espaço μ , a evolução de um sistema de N partículas é representada por um conjunto de N pontos em um espaço $2(D - 1)$ dimensional [21].

Temos que a função distribuição na célula i é dada por:

$$f_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i) = \frac{n_i}{h^{D-1}}, \quad (\text{A.3})$$

onde n_i é o número de partículas na i -ésima célula e h^{D-1} é o volume de cada célula do espaço μ . Consideramos que o sistema já atingiu o estado de equilíbrio termodinâmico, portanto a função distribuição não depende do tempo t .

No ensemble microcanônico, a termodinâmica de um sistema térmico é determinada a partir da entropia, definida pela Eq.(2.2) [22]. Para encontrarmos a entropia, necessariamente devemos encontrar $\Gamma(E)$.

Um novo estado do sistema, ou seja, um outro ponto no espaço de fase é criado mudando as posições das N partículas no espaço μ . No entanto, essas permutações não mudam o conjunto distribuição $\{n_i\}$, onde n_i é o número de partículas na i -ésima célula de volume h . Esse conjunto distribuição ocupa um volume no espaço de fase denotado por $\Omega(\{n_i\})$ (número de estados) [21]. Para obtermos o volume total no espaço de fase entre duas superfícies de energia E e $E + \Delta$ ($\Delta \ll E$), $\Gamma(E)$, devemos agora somar sobre todos os conjuntos ocupacionais $\{n_i\}$:

$$\Gamma(E) \propto \sum_{\{n_i\}} \Omega(\{n_i\}). \quad (\text{A.4})$$

$\Omega(\{n_i\})$ é calculado pelo número de maneiras que podemos arranjar N partículas nas K células do espaço μ considerando que as partículas são distinguíveis e dado um conjunto ocupação $\{n_i\}$. Desse modo, teremos que²

$$\Omega(\{n_i\}) \propto \prod_{i=1}^K \frac{1}{n_i!}. \quad (\text{A.5})$$

No entanto, há um conjunto ocupação $\{\bar{n}_i\}$ mais provável que maximiza $\Omega(\{n_i\})$, tornando os outros números de estados desprezíveis se comparados com $\Omega(\{\bar{n}_i\})$. Sabendo disso, podemos escrever que:

$$\Gamma(E) \propto \Omega(\{\bar{n}_i\}). \quad (\text{A.6})$$

Logo, basta encontrarmos o número de estados da distribuição mais provável para termos a entropia Eq.(2.2), com $\Gamma(E)$ dado por Eq.(A.6). Substituindo a Eq.(A.6) na Eq.(2.2) encontramos que a entropia a menos de uma constante é dada por

$$S(E) = k \ln \Omega(\{\bar{n}_i\}) = -k \sum_{i=1}^K \ln \bar{n}_i!. \quad (\text{A.7})$$

Considerando $\bar{n}_i \gg 1$, podemos usar a aproximação de Stirling [24],

$$\ln \bar{n}_i! \approx \bar{n}_i \ln \bar{n}_i - \bar{n}_i + \ln \sqrt{2\pi \bar{n}_i}. \quad (\text{A.8})$$

²Usamos a contagem correta de Boltzmann, ou seja, dividimos pelo fatorial do número total de partículas, $N!$.

Assim, a menos de uma constante, a entropia é dada por

$$S(E) \approx -k \sum_{i=1}^K \bar{n}_i \ln \bar{n}_i. \quad (\text{A.9})$$

Para calcularmos a distribuição mais provável basta maximizarmos $\ln \Omega(\{n_i\})$ usando o método dos multiplicadores de Lagrange e os vínculos associados ao número de partículas e a energia total dados por, respectivamente,

$$N = \sum_{i=1}^K n_i \quad (\text{A.10})$$

e

$$E = \sum_{i=1}^K n_i \epsilon_i \quad (\text{A.11})$$

onde, como já vimos, K é o número de células no espaço μ . Sendo assim, dados os vínculos Eq.(A.10) e Eq.(A.11) qual seria a distribuição que maximiza $\ln \Omega(\{n_i\})$ [22]? Tomando a variação de $\ln \Omega(\{n_i\})$,

$$\delta \left[\ln \Omega(\{n_i\}) + \alpha \sum_{i=1}^K n_i - \beta \sum_{i=1}^K n_i \epsilon_i \right] \Big|_{n_i = \bar{n}_i} = 0, \quad (\text{A.12})$$

encontramos a distribuição mais provável \bar{n}_i dada em função dos multiplicadores de Lagrange α e β como mostra a equação a seguir:

$$\bar{n}_i = e^\alpha e^{-\beta \epsilon_i}. \quad (\text{A.13})$$

Definiremos o potencial químico μ por

$$\alpha = \beta \mu. \quad (\text{A.14})$$

Substituindo a Eq.(A.13) na Eq.(A.9) calculamos que a entropia é dada por

$$S = -k \sum_{i=1}^K (\alpha - \beta \epsilon_i) e^\alpha e^{-\beta \epsilon_i}. \quad (\text{A.15})$$

Se considerarmos que as células no espaço μ possuem volume infinitesimal h^{D-1} , podemos transformar a soma de Riemann na Eq.(A.15) em integral. Assim, a entropia torna-se

$$S = -\frac{k}{h^{D-1}} \int (\alpha - \beta \epsilon_p) e^\alpha e^{-\beta \epsilon_p} d^{D-1} p d^{D-1} r, \quad (\text{A.16})$$

onde h^{D-1} é o volume das células no espaço μ .

Substituindo a Eq.(A.13) nas Eq.(A.10) e Eq.(A.11) encontramos, respectivamente, que

$$N = e^\alpha \sum_{i=1}^K e^{-\beta\epsilon_i} \quad (\text{A.17})$$

e

$$E = e^\alpha \sum_{i=1}^K e^{-\beta\epsilon_i} \epsilon_i. \quad (\text{A.18})$$

Com essas duas últimas equações podemos escrever a entropia Eq.(A.15) em função de U ³, N e V , logo,

$$S = k\beta U - k\alpha N. \quad (\text{A.19})$$

Usando a definição de temperatura da termodinâmica,

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V, \quad (\text{A.20})$$

encontramos que

$$\frac{1}{T} = -kN \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} \right)_{V,N} + kU \left(\frac{\partial \beta}{\partial U} \right)_{V,N} + k\beta, \quad (\text{A.21})$$

mas da Eq.(A.17), temos que

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} \right)_{V,N} = \frac{U}{N} \left(\frac{\partial \beta}{\partial U} \right)_{V,N}. \quad (\text{A.22})$$

Substituindo Eq.(A.22) na Eq.(A.21) mostramos que

$$\beta = \frac{1}{kT}. \quad (\text{A.23})$$

Para obtermos a entropia devemos conhecer a energia ϵ_p . Pois essa depende do problema físico estudado.

Contudo sabemos que a terceira Lei da Termodinâmica não é bem reproduzida usando mecânica clássica. Portanto, para contornar esse problema somos obrigados a usar a mecânica quântica.

A.2 Ensemble Microcanônico Quântico

Compreendendo que o mundo microscópico é melhor descrito através da mecânica quântica, nessa seção consideraremos o protocolo do ensemble microcanônico usando a teoria quântica. Isto é, nossos cálculos levarão em conta a indistinguibilidade das partículas, como também

³Resolvendo E em termos de S e V veremos que $U(S, V) \equiv E(S, V)$ [22].

a quantização das grandezas físicas. Novamente consideraremos um sistema isolado com energia total E de N partículas no volume V . Devemos ressaltar que no Universo há dois tipos de sistemas de partículas: os férmions e os bósons. A entropia continua sendo definida pela Eq.(2.2). Porém, $\Gamma(E)$ não é mais o volume do espaço de fase. $\Gamma(E)$ é o número de estados do sistema com energia entre E e $E + \Delta$ [22,23]. O espectro de energia é dividido em estados (células) como mostra a figura a seguir. Cada célula i tem uma energia média ϵ_i e g_i estados, que pode ser considerado a degenerescência da célula [22].



Figura A.3: Divisão em células do espectro de energia [22].

Portanto, matematicamente $\Gamma(E)$ é definido por

$$\Gamma(E) = \sum_{\{n_i\}} W(\{n_i\}), \quad (\text{A.24})$$

onde $W(\{n_i\})$ é o número de estados correspondendo ao conjunto ocupação $\{n_i\}$ [22] definido por:

$$W(\{n_i\}) = \prod_i w_i \quad (\text{A.25})$$

com w_i sendo o número de maneiras de acomodar n_i partículas na i -ésima célula com g_i estados [22]. Logo, encontramos $W(\{n_i\})$ se calcularmos w_i . Para bósons, qualquer estado pode ter qualquer número de partículas. Já para férmions, há uma única partícula em cada estado. Portanto, os números de maneiras de acomodar n_i partículas, bósons e férmions, na célula i , respectivamente, são:

$$w_i = \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!} \quad (\text{A.26})$$

e

$$w_i = \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}, \quad (\text{A.27})$$

onde $g_i - 1$ é o número de divisões da célula i com g_i subestados e $g_i - n_i$ é o número de subestados vazios. Portanto, a Eq.(A.25), para bósons e férmions, é reescrita e transforma-se em, respectivamente:

$$W(\{n_i\}) = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!} \quad (\text{A.28})$$

e

$$W(\{n_i\}) = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}. \quad (\text{A.29})$$

Como no caso clássico, há um conjunto ocupação $\{\bar{n}_i\}$ mais provável que maximiza $W(\{n_i\})$, tornando outros número de estados desprezíveis se comparados a $W(\{\bar{n}_i\})$. Sabendo isso, podemos escrever:

$$\Gamma(E) = W(\{\bar{n}_i\}). \quad (\text{A.30})$$

Assim, a Eq.(2.2) torna-se:

$$S = k \ln W(\{\bar{n}_i\}). \quad (\text{A.31})$$

A distribuição mais provável \bar{n}_i é encontrada maximizando $\ln W(\{n_i\})$ pelo método dos multiplicadores de Lagrange e usando os vínculos Eq.(A.10) e Eq.(A.11),

$$\delta \left[\ln W(\{n_i\}) + \alpha \sum_{i=1}^K n_i - \beta \sum_{i=1}^K n_i \epsilon_i \right] \Big|_{n_i = \bar{n}_i} = 0. \quad (\text{A.32})$$

Ao resolvermos a Eq.(A.32) usando a aproximação de Stirling, Eq.(A.8), encontramos a distribuição mais provável \bar{n}_i dada em função dos multiplicadores de Lagrange α e β ,

$$\bar{n}_i = \frac{g_i}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_i} \pm 1}, \quad (\text{A.33})$$

onde $z = e^\alpha$ é denominada de fugacidade, os sinais positivo e negativo correspondem as distribuições mais prováveis de férmions e de bósons, respectivamente. Substituindo a Eq.(A.33) na Eq.(A.28) e por fim a última na Eq.(A.31), usando, novamente, a aproximação de Stirling, Eq.(A.8) e considerando que $g_i \gg 1$, encontramos que a entropia do sistema dada por:

$$\begin{aligned} S &= k \sum_i g_i \left[\frac{\beta \epsilon_i - \ln z}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_i} \pm 1} \pm \ln (1 \pm z e^{-\beta \epsilon_i}) \right] \\ &= k \sum_{\mathbf{p}} \left[\frac{\beta \epsilon_{\mathbf{p}} - \ln z}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_{\mathbf{p}}} \pm 1} \pm \ln (1 \pm z e^{-\beta \epsilon_{\mathbf{p}}}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Substituindo a Eq.(A.33) nas Eq.(A.10) e Eq.(A.11) teremos, respectivamente,

$$N = \sum_{i=1} \frac{g_i}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_i} \pm 1} \quad (\text{A.35})$$

e

$$E = \sum_{i=1} \frac{g_i \epsilon_i}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_i} \pm 1}. \quad (\text{A.36})$$

Substituindo as Eq.(A.35) e Eq.(A.36) na Eq.(A.34) e lembrando que a energia pode ser considerada igual a energia interna do sistema $E = U$, teremos que

$$S = k\beta U - k\alpha N \pm k \sum_i g_i \ln (1 \pm z e^{-\beta \epsilon_i}). \quad (\text{A.37})$$

Usando a definição de temperatura Eq.(A.20), temos que

$$\frac{1}{T} = -kN \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} \right)_{V,N} + kU \left(\frac{\partial \beta}{\partial U} \right)_{V,N} + k\beta \pm k \sum_i g_i \frac{\pm \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} \right)_{V,N} \mp \left(\frac{\partial \beta}{\partial U} \right)_{V,N} \epsilon_i}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_i} \pm 1}. \quad (\text{A.38})$$

Da Eq.(A.38) fica claro que $\beta = 1/kT$.

A termodinâmica do sistema é calculada tomando o limite do contínuo. Ou seja,

$$\sum_{\mathbf{p}} \rightarrow \frac{1}{h^{D-1}} \int d^{D-1} r d^{D-1} p, \quad (\text{A.39})$$

onde h é a constante de Planck. Porém, devemos conhecer a Hamiltoniana do sistema e para isso precisamos saber as condições físicas do sistema. Uma vez conhecendo a Hamiltoniana, a termodinâmica do sistema é determinada a partir da entropia, Eq.(A.37), e dos vínculos, Eq.(A.35) e Eq.(A.36) usando a Eq.(A.39).

Apêndice B

Função de Bessel Modificada de Segunda Espécie $K_\nu(x)$

Neste apêndice, revisaremos rapidamente a função de Bessel modificada de segunda espécie $K_\nu(x)$ como também algumas das suas propriedades que foram utilizadas neste trabalho.

A função de Bessel modificada de segunda espécie ou função de Macdonald $K_\nu(x)$ é uma das soluções da equação diferencial de Bessel modificada de segunda espécie [34]. Para ordens não inteiras a função de Bessel modificada de segunda espécie pode ser escrita como [34]:

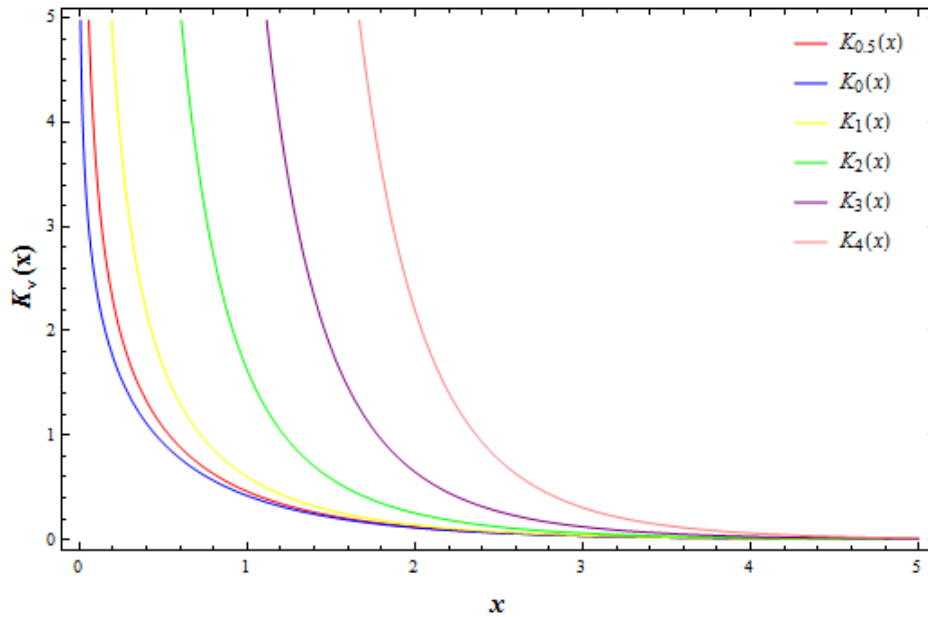
$$K_\nu(x) = \frac{\pi [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]}{2\text{sen}(\pi\nu)}, \quad (\text{B.1})$$

com $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Sendo $I_\nu(x)$ é a função de Bessel de primeira espécie. Para ordens inteiras devemos tomar o seguinte limite:

$$K_\nu(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\pi [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]}{2\text{sen}(\pi\nu)}, \quad (\text{B.2})$$

onde $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Esse limite deve ser tomado, porque o lado direito da Eq.(B.1) é indeterminado para ν inteiro [34].

Para ilustrar, a seguir apresentamos a representação gráfica da função de Bessel modificada de segunda espécie em ordens diferentes.


 Figura B.1: Função de Bessel modificada de segunda espécie $K_\nu(x)$.

Essa função possui uma grande variedade de representações. Aqui, apresentaremos apenas duas das representações integrais, pois essas foram usadas nesse trabalho, para mais detalhes veja Gradshteyn & Ryzhik [35]. Assim, as representações integrais usadas foram [35]:

$$K_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-x\text{ch}\omega} \text{sh}^{2\nu}\omega d\omega \quad (\text{B.3})$$

com $\text{Re}(\nu) > -1/2$ e $\text{Re}(x) > 0$. E

$$K_\nu(x) = \int_0^\infty e^{-x\text{ch}\omega} \text{ch}(\nu\omega) d\omega \quad (\text{B.4})$$

com $|\arg x| < \pi/2$ ou $\text{Re}(x) = 0$ e $\nu = 0$.

Neste trabalho, houve necessidade em relacionar funções de Bessel modificada de segunda espécie de ordens diferentes. Para isso usamos a seguinte propriedade [35]:

$$xK_{\nu-1}(x) - xK_{\nu+1}(x) = -2\nu K_\nu(x). \quad (\text{B.5})$$

Os cálculos das grandezas termodinâmicas exigiu que derivássemos a função de Bessel modificada de segunda espécie e para isso foi utilizadas as seguintes propriedades:

$$K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2\frac{d}{dx}K_\nu(x), \quad (\text{B.6})$$

$$x\frac{d}{dx}K_\nu(x) + \nu K_\nu(x) = -xK_{\nu-1}(x) \quad (\text{B.7})$$

e

$$x\frac{d}{dx}K_\nu(x) - \nu K_\nu(x) = -xK_{\nu+1}(x), \quad (\text{B.8})$$

Elas são igualmente válidas. Porém, para diferentes cálculos, usamos a melhor que convi-
nha.

Para calcular os limites não relativísticos e ultra-relativístico usamos a expansão da $K_\nu(x)$ em séries para argumentos grande ($x \gg 1$) e pequeno ($x \ll 1$), respectivamente. No caso não relativístico temos que o argumento da Bessel é muito grande, ou seja, $x \rightarrow \infty$. Nessa situação podemos escrever que [36]:

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + \frac{4\nu^2 - 1^2}{1!8x} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right], \quad (\text{B.9})$$

para $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$. No caso ultra-relativístico temos que o argumento da Bessel é muito pequeno, ou seja, $x \rightarrow 0$. Nessa situação podemos escrever que [35]:

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^l (\nu - l - 1)!}{l! \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-2l}} + (-1)^{\nu+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2l}}{l! (\nu + l)!} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi(l+1) - \frac{1}{2}\psi(\nu + l + 1) \right], \quad (\text{B.10})$$

para $\nu + 1 \in \mathbb{N}$, onde

$$\psi(y) = \frac{d}{dy} \ln[\Gamma(y)] \quad (\text{B.11})$$

ou

$$\psi(y) = \ln y - \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{y+l} - \ln\left(1 + \frac{1}{y+l}\right) \right] \quad (\text{B.12})$$

e para $\nu + 1 \notin \mathbb{N}$ temos que [34]:

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \sum_{l=\pm 1} \Gamma(-l\nu) \left(\frac{x}{2}\right)^{l\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^j}{j!(1+l\nu)_j}. \quad (\text{B.13})$$

As equações acima foram essenciais na confecção deste trabalho. No entanto, não entraremos em detalhes sobre a função de Bessel modificada de segunda espécie, pois fugiríamos do contexto desse trabalho.

Apêndice C

Função Polilogarítmica $g_\nu(x)$

A função polilogarítmica $g_\nu(x)$ (ou $Li_\nu(x)$) é uma das funções especiais de ordem ν e argumento x . Em física, é uma função muito usada; em mecânica estatística, é usada nas equações das grandezas termodinâmicas do gás ideal quântico [22]. Pode ser definida por meio de uma série para l inteiro positivo [37]:

$$g_\nu(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^l}{l^\nu}, \quad (\text{C.1})$$

sendo $|x| < 1$ e $\nu \in \mathbb{C}$. Existem alguns casos particulares que a função polilogarítmica torna-se uma função elementar. A seguir, apresentamos alguns desses casos particulares:

- $\nu = 1$

$$g_1(x) = -\ln(1 - x). \quad (\text{C.2})$$

- $x = 1$

$$g_\nu(1) = \zeta(\nu) \quad (\text{C.3})$$

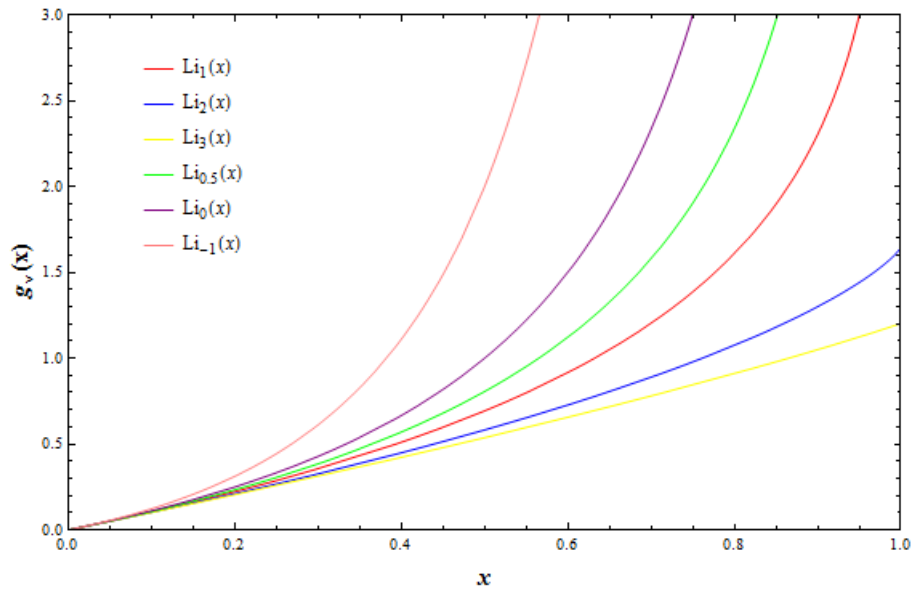
para $\text{Re}(\nu) > 1$, sendo $\zeta(\nu)$ a função zeta de Riemann.

- $x = -1$

$$g_\nu(-1) = (2^{1-\nu} - 1)\zeta(\nu) \quad (\text{C.4})$$

para $\nu \neq 1$, sendo $\zeta(\nu)$ a função zeta de Riemann.

A figura a seguir mostra o gráfico dessa função para diferentes ordens.


 Figura C.1: Função Polilogarítmica $g_\nu(x)$.

Vemos pela figura acima que essa função é nula quando o argumento tende a zero.

A derivada da função polilogarítmica com relação ao seu argumento resulta em outra função polilogarítmica de ordem menor [23],

$$x \frac{\partial}{\partial x} [g_\nu(x)] = g_{\nu-1}(x). \quad (\text{C.5})$$

Essa propriedade é importante na Física, por exemplo, quanto ao cálculo da capacidade térmica a volume constante para o gás não relativístico.

Um ponto importante, a acrescentar, é o fato dessa função estar relacionada com as integrais de Fermi-Dirac e de Bose-Einstein [38] como mostram, respectivamente, as equações abaixo:

$$g_{\nu+1}(-e^x) = -\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty \frac{\omega^\nu}{e^{\omega-x} + 1} d\omega \quad (\text{C.6})$$

com $\nu > -1$ e

$$g_{\nu+1}(e^x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty \frac{\omega^\nu}{e^{\omega-x} - 1} d\omega \quad (\text{C.7})$$

com $\nu > -1$, $x < 0$ ou $\nu > 0$, $x \leq 0$.

Bibliografia

- [1] P. M. A. Dirac, *The Quantum Theory of the Electron*, Proc. R. Soc. Lond. A, v. 117, p. 610-624, 1928.
- [2] C. D. Anderson, *The Apparent Existence of Easily Deflectable Positive*, Science, v. 76, p. 238-239, 1932.
- [3] C. D. Anderson, *The Positive Electron*, Phys. Review, v. 43, p. 491-499, 1933.
- [4] I. Bediaga, *A Antimatéria e o Universo*, Ciência Hoje, v.45, p. 46-51, 2010.
- [5] E. W. Kolb, *The Early Universe*, Redwood City: Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [6] H. R. Quinn, Y. Nir, *The Mystery of the Missing Antimatter*, Princeton: Princeton University Press, 2007.
- [7] A. D. Sakharov, *Violation of CP invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe*, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fis., v. 5, p. 32-35, 1967.
- [8] P. S. Coppi, *How Do We Know Antimatter Is Absent?*, SLAC Summer Institute on Particle Physics (SSI04), Ago. 2-13, 2004.
- [9] Y. Nir, *Charm and Anticharm-Not Quite the Same*, J. Ame. Phys. Soc., v. 5, p.1-3, 2012.
- [10] J. H. Christenson, *et al*, *Evidence for the 2π Decay of the K_2^0 Meson*, Phys. Rev. Lett., v. 13, p. 138-140, 1964.
- [11] ATHENA Experiment. Disponível em: <<http://athena.web.cern.ch/athena/>>. Acesso em: 3 Jan. 2015.

- [12] ALPHA Experiment. Disponível em: <<http://alpha.web.cern.ch/>>. Acesso em: 30 Jan. 2015.
- [13] H. E. Haber, H. A. Weldon, *Thermodynamics of an Ultrarelativistic Ideal Bose Gas*, Phys. Rev. Lett., v. 46, p. 1497-1500, 1981.
- [14] C. A. de Carvalho, S. G. Rosa Jr., *The relativistic Bose gas*, J. Phys. A: Math. Gen., v. 13, p. 3233-3241, 1980.
- [15] H. E. Haber, H. A. Weldon, *Finite-temperature breaking as Bose-Einstein condensation*, Phys. Rev. D, v. 25, p. 502-525, 1982.
- [16] S. Singh, P. N. Pandita, *Scaling and universality of thermodynamics and correlations of an ideal relativistic Bose gas with pair production*, Phys. Rev. A, v. 28, p. 1752-1761, 1983.
- [17] K. Kirsten, D. J. Toms, *Simple criterion for the occurrence of Bose-Einstein condensation and the Meissner-Ochsenfeld effect*, Phys. Rev. D, v. 55, p. 7797-7827, 1997.
- [18] M. Grether, M. de Llano, G. A. Baker, *Bose-Einstein Condensation in the Relativistic Ideal Bose Gas*, Phys. Rev. Lett., v. 99, p. 406-415, 2007.
- [19] V. V. Begun, M. I. Gorenstein, *Bose-Einstein Condensation in the Relativistic Pion Gas: Thermodynamic Limit and Finite Size Effects*, Phys. Rev. C, v.77, p. 064903-064923, 2008.
- [20] P. N. Pandita, *Critical Behavior of a Relativistic Bose Gas*, Phys. Rev. E, v.89, p. 1-3, 2014.
- [21] K. Huang, *Introduction to Statistical Mechanics*, Nova Iorque: Taylor & Francis, 2001.
- [22] K. Huang, *Statistical Mechanics*, 2. ed., Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1987.
- [23] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, 2. ed., Boston: Elsevier, 1996.
- [24] N. Batir, *Very Accurate Approximations for the Factorial Function*, Journal of Mathematical Inequalities, v. 4, p. 335-344, 2010.
- [25] J. L. Anderson, *Principles of Relativity Physics*, Nova Iorque: Academic Press, 1967.
- [26] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*, 3. ed., Berlim: Springer, 2000.

- [27] S. S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Dover Publication, 2005.
- [28] F. Briscece, *et al*, *Study of stability of relativistic ideal Bose-Einstein condensates*, Phys. Lett. A, v. 376, p. 2911-2916, 2012.
- [29] T. G. Ribeiro, *Radiação de Corpo Negro do Campo Escalar*. 2014. 72p. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade federal de Itajubá, Itajubá, 2014.
- [30] R. Beckmann, F. Karsch, D. E. Miller, *Analysis of Bose-Einstein condensation for an ideal relativistic Bose gas in d dimensions*, Phys. Lett. A, v. 25, p. 561-569, 1982.
- [31] D. J. Toms, *Bose-Einstein condensation of a charged relativistic ideal gas in a general homogeneous magnetic field*, Phys. Rev. D, v. 50, p. 6458-6468, 1994.
- [32] M.B. Altaie, E. Malkawi, *Bose-Einstein condensation of spin-1 field in an Einstein universe*, J. Phys. A: Math. Gen., v.33, p. 7093-7102, 2000.
- [33] Takeshi Fukuyama, Masahiro Morikawa, *Stagflation: Bose-Einstein condensation in the early universe*, Phys. Rev. D, v. 80, p. 063520-063538, 2009.
- [34] K. Oldham, J. Myland, J. Spanier, *An Atlas of Function with Equator, the Atlas Function Calculator*, 2. ed., Nova Iorque: Springer, 2009.
- [35] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, 7 ed., Burlington: Academic Press, 2007.
- [36] G. Arfken e H. Weber, *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*, Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- [37] H. Cohen, L. Lewin, D. Zagier, *A Sixteenth-order Polylogarithm Ladder*, J. Taylor & Francis, v. 1, p. 25-34, 1992.
- [38] M. A. Chaudhry, A. Qadir, A Tassaddiq, *A new generalization of the Riemann zeta function and its difference equation*, J. Adv. in Diff. Eq., v. 20, p. 1-13, 2011.