

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

**Análise da Transferência de Calor por Convecção
Mista Utilizando o Método de Elementos Finitos com
a Técnica de Petrov-Galerkin**

Autor: Paulo Mohallem Guimarães

Orientador: Prof. Dr. Genésio José Menon

Itajubá, Março de 2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

**Análise da Transferência de Calor por Convecção
Mista Utilizando o Método de Elementos Finitos com
a Técnica de Petrov-Galerkin**

Autor: Paulo Mohallem Guimarães

Orientador: Prof. Dr. Genésio José Menon

Curso: Doutorado em Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Conservação de Energia

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Itajubá, Março de 2007

M.G. – Brasil

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB_6/1700

G947a

Guimarães, Paulo Mohallem

Análise da transferência de calor por convecção mista utilizando o método de elementos finitos com a Técnica de Petrov-Galerkin / Paulo Mohallem Guimarães. -- Itajubá, (MG): UNIFEI, 2007.

234 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Genésio José Menon.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Transferência de calor. 2. Convecção mista. 3. Petrov_Galerkin. 4. Elementos finitos. I. Menon, Genésio José, orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

CDU 536.2(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

**Análise da Transferência de Calor por Convecção
Mista Utilizando o Método de Elementos Finitos com
a Técnica de Petrov-Galerkin**

Autor: **Paulo Mohallem Guimarães**

Orientador: **Prof. Dr. Genésio José Menon**

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Edson Luiz Zapparoli - ITA

Prof^a. Dra. Cláudia Regina de Andrade - ITA

Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira - UNIFEI

Prof. Dr. Waldir de Oliveira – UNIFEI

Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho – UNIFEI

Prof. Dr. Rogério José da Silva – Presidente – UNIFEI

Prof. Dr. Genésio José Menon – Orientador - UNIFEI

Dedicatória

Aos meus pais Carlos e Haydée

e irmãos

Sheila, Ângela (in memoriam), Carlos e Eduardo.

Agradecimentos

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Genésio José Menon, pela competência, dedicação, paciência e amizade.

À família acadêmica: ao Instituto de Engenharia Mecânica da UNIFEI, representado pelos seus dedicados Professores e Funcionários, pelo apoio concedido e aos amigos do curso de doutorado; aos amigos professores da Faculdade de Administração e Informática; aos meus amigos professores do Colégio Sucesso, especialmente Prof. José Gilberto e sua esposa Maria José, e ao Prof. Sebastião Fernandes, por acreditarem em mim e me apoiarem.

À CAPES, através do Programa de bolsas, pelo apoio financeiro.

Aos meus pais, Carlos e Haydée, que sempre me incentivaram na formação e no desenvolvimento educacional. Aos meus irmãos Sheila, Carlos e Eduardo, que sempre me apoiaram, dando-me amor e muito apoio nos momentos difíceis. Eu os amo.

Ao meu querido amigo Paulo Henrique Godoy, que durante meu curso de doutorado me incentivou a sempre caminhar em frente com carinho, dando-me exemplo de fortaleza, dedicação, seriedade e lealdade. E a todos os outros amigos que me são caros, que sempre se importaram em saber como eu estava durante o curso de doutorado.

E por último menciono novamente, meu irmão Prof. Dr. Carlos Alberto Mohallem Guimarães, mais conhecido na Universidade Federal de Itajubá como Prof. Mohallem. Um exemplo de fortaleza, de resignação e amor a Deus, de amor ao próximo, de honestidade e de luta. Meu irmão, eu o amo, e saiba que você sempre foi e sempre será um exemplo a ser seguido.

I do not know what I may appear to the world, but to myself I seem to have been only a poor boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.

Não sei como pareço aos olhos do mundo, mas eu mesmo me vejo como um pobre garoto que brincava na praia e se divertia em encontrar uma pedrinha mais lisa vez ou outra, ou uma concha mais bonita do que de costume, enquanto o grande oceano da verdade se estendia totalmente inexplorado diante de mim.

I. Newton (1642-1727), BREWSTER, *Memoirs of Newton*, II,27.

Resumo

GUIMARÃES, P. M. (2006), *Análise da Transferência de Calor por Convecção Mista Utilizando o Método de Elementos Finitos com a Técnica de Petrov-Galerkin*, Itajubá, 234 p. Tese (Doutorado em Conservação de Energia) - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Neste trabalho é apresentado um estudo numérico do escoamento laminar para convecção mista, empregando-se o Método de Elementos Finitos (MEF) utilizando elementos quadrilaterais com quatro nós, com as perturbações de Petrov-Galerkin nos termos convectivos, o método da penalidade nos termos de pressão e o esquema semi-implícito de Euler para avanço no tempo. Consideram-se escoamentos incompressíveis, bidimensionais e não-permanentes, sendo que os resultados são mostrados para o regime permanente em grande parte do trabalho. A formulação que governa os fenômenos físicos dos problemas baseia-se nas equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia. Foram realizadas comparações para a validação do código computacional e também um estudo do refinamento de malha. Quatro validações experimentais e numéricas são realizadas. Estudou-se a independência da malha e verificação da convergência dos resultados para todos os casos. Finalmente, para os campos de velocidades, temperaturas e números de Nusselt local e médio, são apresentados resultados para canal com degrau na entrada, canal curvo, canal inclinado com fontes discretas de calor e cavidade com um ou dois cilindros internos rotativos. Verifica-se que a transferência de calor é fortemente influenciada por: i) no caso de canal com degrau e canal curvo, pelas células de recirculação, separação e recolamento; ii) para o canal com fontes discretas, pelo número de fontes, distância entre as fontes e a inclinação do canal; iii) para cavidade com cilindro interno rotativo pelo sentido e velocidade de rotação.

Palavras-chave

Transferência de Calor, Convecção Mista, Petrov-Galerkin, Elementos Finitos.

Abstract

GUIMARÃES, P. M. (2006), *Mixed Convective Heat Transfer Analisis Using the Finite Element Method with the Petrov-Galerkin Technique*, Itajubá, 234 p. Thesis (Doctored in Energy Conservation) – Mechanical Engineering Department, Federal University of Itajubá.

In this work, a numerical study of laminar mixed convection is performed. The Finite Element Method (FEM) with four-node quadrilateral elements is used with the Petrov-Galerkin perturbations being applied to the convective terms and the Penalty formulation to the pressure terms. A semi-implicit Euler method is used to advance in time. Although most part of the result is shown in the steady state regime, the flows are considered two-dimensional, incompressible, and unsteady. The governing equations are the conservation of mass, momentum, and energy. Not only are comparisons carried out in order to validate the computational code, but also a mesh refinement is investigated. Thus, four comparisons are performed using experimental and numerical values from literature. For each case studied in this work, a mesh analysis is carried out to check convergence. Finally, results for velocity and temperature distributions and also the local and average Nusselt number behavior are analyzed for backward-facing step channels, curved channels, inclined channels with discrete heat sources, and cavities with one or two internal rotating cylinders. It is verified that heat transfer is strongly influenced: i) by recirculation, separation and reattachment cells in the case of backward-facing step and curved channels; ii) by the number and distance among the discrete heat sources and the channel inclination in the case of channels with discrete heat sources; iii) by the cylinder rotation direction and velocity in the case of cavities with rotating cylinders.

Keywords

Heat Transfer, Mixed Convection, Petrov-Galerkin, Finite Element.

Sumário

SUMÁRIO	i
LISTA DE FIGURAS	v
LISTA DE TABELAS	x
SIMBOLOGIA	xii
LETRAS LATINAS	xii
LETRAS GREGAS	xvii
SUPERESCRITOS	xviii
SUBSCRITOS	xix
SIGLAS	xx
CAPÍTULO 1	1
INTRODUÇÃO	1
1.1 – Considerações Iniciais -----	1
1.2 – Revisão da Literatura -----	2
1.2.1 – Método de Elementos Finitos -----	2
1.2.2 – Método de Petrov-Galerkin -----	4
1.2.3 – escoamento em Geometrias com Degraus -----	6
1.2.4 – escoamento em Geometrias com Curvaturas -----	7
1.2.5 – escoamento em Geometrias com Fontes de Calor -----	9
1.2.6 – escoamento em Geometrias com Cilindros Rotativos -----	12
1.3 – Casos Estudados -----	14
1.4 – Objetivos do Presente Trabalho -----	19
1.5 – Delineamento Deste Trabalho -----	19

CAPÍTULO 2	22
FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE PROBLEMAS DE CONVECÇÃO MISTA	22
2.1 – Introdução	22
2.2 – Análise Teórica	23
2.3 – Adimensionalização das Equações	25
2.4 – Casos Estudados neste Trabalho	28
2.4.1 – Caso 1-Convecção Mista em um Canal Horizontal com um Degrau na Entrada	28
2.4.2 – Caso 2-Convecção Mista em um Canal com uma Curva de 180°	30
2.4.3 – Caso 3-Convecção Mista em Canais com Fontes Discretas de Calor	31
2.4.4 – Caso 4-Convecção Mista em Cavidades com Cilindros Rotativos	34
CAPÍTULO 3	37
MÉTODO NUMÉRICO	37
3.1 – Introdução	37
3.2 – Generalização da Formulação	38
3.3 – Desenvolvimento	39
3.4 – Fluxograma do Código Computacional	54
CAPÍTULO 4	60
VALIDAÇÃO E ESTUDO DA INDEPENDÊNCIA DA MALHA	60
4.1.– Estudo da validação	60
4.1.1 – Introdução	60
4.1.2 – Validação 1: Transferência de Calor por Convecção Natural Numa Cavidade Quadrada	61
4.1.3 – Validação 2: Escoamento Bidimensional Laminar em Canais com Degrau na Entrada	63
4.1.4 – Validação 3: Escoamento de Poiseuille, Aquecido na Placa Inferior	65
4.1.5 – Validação 4: Troca de Calor Entre Cilindros Concêntricos Com o Cilindro Externo Rotativo	67
4.2 – Análise da Independência da Malha	71
4.2.1 – Introdução	71
4.2.2 – Estudo da Independência da Malha para o Caso 1	72
4.2.3 – Estudo da Independência da Malha para o Caso 2	75
4.2.4 – Estudo da Independência da Malha para os Casos 3.1, 3.2 e 3.3	77

4.2.5 – Estudo da Independência da Malha para o Caso 4.1 -----	80
4.2.6 – Estudo da Independência da Malha para o Caso 4.2 -----	84
CAPÍTULO 5 _____	87
RESULTADOS _____	87
5.1 – Introdução -----	87
5.2 – Caso 1: Convecção Mista em um Canal Horizontal com um Degrau na Entrada-----	88
5.3 – Caso 2: Convecção Mista em um Canal com uma Curva de 180° -----	93
5.4 – Caso 3: Convecção Mista em Canais com Fontes Discretas de Calor-----	102
5.4.1 – Caso 3.1: Canal Inclinado com Uma Fonte Discreta de Calor-----	102
5.4.2 – Caso 3.2: Canal Horizontal com Duas Fontes Discretas de Calor -----	112
5.4.3 – Caso 3.3: Canal Inclinado com Três Fontes Discretas de Calor-----	120
5.5 – Convecção Mista em uma Cavidade Quadrada com Cilindros Internos Rotativos ----	127
5.5.1 – Caso 4.1: Convecção Mista em Uma Cavidade Quadrada Inclinada com Um Cilindro Interno Rotativo -----	127
5.5.2 – Caso 4.2: Convecção Mista em Uma Cavidade Retangular Horizontal com Dois Cilindros Internos Rotativos -----	133
CAPÍTULO 6 _____	140
CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS UTILIZANDO O MÉTODO DE PETROV-GALERGIN _____	140
6.1 – Conclusões -----	140
6.2 – Sugestões para Trabalhos Futuros-----	143
APÊNDICE A _____	145
MÉTODO DE GALERKIN _____	145
A.1 – Introdução -----	145
A.2 – Desenvolvimento -----	145
APÊNDICE B _____	153
INTEGRAÇÃO NUMÉRICA _____	153
B.1 – Introdução-----	153
B.2 – A Fórmula da Quadratura-----	153
B.3 – A Construção das Funções de Forma-----	156
B.4 – A Quadratura Gaussiana -----	159
B.5 – Quadratura em Duas Dimensões-----	160

B.6 – Ordem Mínima e Ótima da Integração Numérica -----	162
B.7 – Integração Reduzida-----	163
APÊNDICE C _____	164
FORMULAÇÃO DO MÉTODO DA PENALIDADE _____	164
C.1 – Introdução-----	164
C.2 – Formulação do Método da Penalidade -----	165
C.3 – Aproximações por Elementos Finitos -----	173
C.4 – Cálculo da Pressão-----	175
C.5 – Fronteiras Abertas -----	175
APÊNDICE D _____	177
A TÉCNICA DE PETROV-GALERKIN _____	177
D.1 – Introdução -----	177
D.2 – Problema com Convecção-Difusão Unidimensional-----	177
D.3 – Método de Petrov-Galerkin Unidimensional-----	185
D.4 – Método de Petrov-Galerkin Bidimensional -----	190
APÊNDICE E _____	196
ESTUDO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA _____	196
E.1 – Introdução-----	196
E.2 – Formulação -----	197
APÊNDICE F _____	201
ESTUDO DAS INTEGRAIS DE LINHA PARA A PRESSÃO _____	201
F.1 – Introdução-----	201
F.2 – As Integrais -----	201
F.3 – Retenção das Integrais-----	202
APÊNDICE G _____	205
TEMPOS COMPUTACIONAIS E CONVERGÊNCIA _____	205
G.1 – Introdução -----	205
APÊNDICE H _____	215
ESTUDO DA CONVERGÊNCIA NO TEMPO _____	215
H.1 – Introdução -----	215
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS _____	223

Lista de Figuras

CAPÍTULO 1

Figura 1.1 – Canal horizontal com um degrau na entrada. -----	15
Figura 1.2 – Canal horizontal com uma curva de 180°. -----	15
Figura 1.3 – Canal inclinado com uma fonte discreta de calor. -----	16
Figura 1.4 – Canal horizontal com duas fontes discretas de calor. -----	16
Figura 1.5 – Canal inclinado com três fontes discretas de calor. -----	17
Figura 1.6 – Cavidade inclinada com um cilindro rotativo. -----	18
Figura 1.7 – Cavidade horizontal com dois cilindros rotativos. -----	18

CAPÍTULO 2

Figura 2.1 – Geometria geral dos casos estudados neste trabalho. -----	24
Figura 2.2 – Canal com um degrau na entrada. -----	28
Figura 2.3 – Canal com uma curva de 180°. -----	30
Figura 2.4 – Canal retangular com fontes de calor. -----	33
Figura 2.5 – Cavidade com cilindros rotativos. -----	35

CAPÍTULO 3

Figura 3.1 – Elemento geral quadrilateral com 4 nós em coordenadas globais. -----	41
Figura 3.2 – Transformação isoparamétrica de um elemento quadrilateral com 4 nós. -----	41
Figura 3.3a – Fluxograma do programa principal. -----	55
Figura 3.3b – Fluxograma do programa principal (continuação). -----	56

CAPÍTULO 4

Figura 4.1 – Geometria quadrada e malha com 6400 elementos utilizadas na validação 1. -----	61
Figura 4.2 – Isotermas e vetores velocidade para o caso da validação 1. -----	62

Figura 4.3 – Geometria e condições de contorno da validação 2. -----	63
Figura 4.4 – Malha com 6000 elementos utilizada na validação 2. -----	64
Figura 4.5 – Distâncias comparadas com resultados numéricos e experimentais. -----	64
Figura 4.6 – Geometria e condições de contorno para a terceira comparação. -----	65
Figura 4.7 – Malha estruturada com 4000 elementos utilizada na validação 2. -----	66
Figura 4.8 – Isotermas e vetores velocidade para a terceira comparação. -----	66
Figura 4.9 – Número de Nusselt médio medido ao longo da superfície superior versus tempo para o escoamento de Poiseuille aquecido por baixo. -----	67
Figura 4.10 – Geometria e condições de contorno e malha com 5976 elementos. -----	68
Figura 4.11 – Isotermas, linhas de corrente e vetores de velocidade. -----	69
Figura 4.12 – Comparação do número de Nusselt médio geral para cilindros concêntricos. -----	71
Figura 4.13 – Canal com degrau na entrada para estudo da independência da malha. -----	72
Figura 4.14 – Trechos das malhas utilizadas no estudo da independência da malha para o Caso 1. -----	74
Figura 4.15 – Canal com uma curva de 180° para estudo da independência da malha. -----	75
Figura 4.16 – Malhas utilizadas no estudo da independência da malha 2. -----	76
Figura 4.17 – Canal com fontes de calor para estudo da independência da malha. -----	77
Figura 4.18 – Malhas utilizadas no estudo do refinamento da malha 3. -----	79
Figura 4.19 – Cavidade quadrada com um cilindro rotativo para estudo da independência da malha. -----	81
Figura 4.20 – Malhas utilizadas no estudo da independência da malha 4. -----	82
Figura 4.21 – Cavidade retangular com dois cilindros rotativos para estudo da independência da malha. -----	85
Figura 4.22 – Malhas utilizadas no estudo da independência da malha 5. -----	85
CAPÍTULO 5	
Figura 5.1 – Geometria do canal e condições de contorno. -----	88
Figura 5.2 – Distribuição da temperatura ao longo do canal com Fr, Re, e Gr variando, respectivamente, de 1/75 a 1/300, 10 a 20, e $7,5 \times 10^3$ a $1,20 \times 10^5$. -----	90
Figura 5.3 – Número de Nusselt médio ao longo da parede fria versus número de Froude. -----	90
Figura 5.4 – Células de recirculação e térmicas com Fr, Re e Gr variando, respectivamente, de 1/75 a 1/300, 10 a 20, e $7,5 \times 10^3$ a $1,20 \times 10^5$. O canal é mostrado parcialmente. -----	91
Figura 5.5 – Nu calculado nas superfícies fria e quente versus o tempo τ para o caso 1.5. -----	92
Figura 5.6 – Geometria e condições de contorno do canal. -----	93

Figura 5.7 – Nu_5 , Nu_{15} e Nu_{20} versus Re .-----	94
Figura 5.8 – Nu_5 , Nu_{15} , Nu_{20} versus Gr para $Re = 10, 50, 100$ e 300 .-----	95
Figura 5.9 – Nu_5 , Nu_{15} , Nu_{20} versus Re para $1 \leq Gr \leq 1,2 \times 10^5$.-----	96
Figura 5.10 – Nu_5 , Nu_{15} , Nu_{20} versus tempo para $Re=50,100$ e $Gr=3 \times 10^4, 6 \times 10^4, 1,2 \times 10^5$.-----	98
Figura 5.11 – Nu_L sobre a superfície aquecida e $1 \leq X \leq 20$ para $Re = 100, Gr = 1,2 \times 10^5$.---	99
Figura 5.12 – Vetores velocidade e distribuições das isotermas para $1 \leq X \leq 5, \tau = 29,375,$ $\tau = 29,945, \tau = 30,505$ para $Fr = 1/12, Re = 100$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$.-----	100
Figura 5.13 – Isotermas e vetores velocidade para $Re=50,100,300,500$ com $Gr=1,2 \times 10^5$.-----	102
Figura 5.14 – Geometria do canal e condições de contorno.-----	103
Figura 5.15 – Isotermas: $Gr=10^3, 10^4, 10^5; Re=1,5,10;$ e $\gamma=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$.-----	104
Figura 5.16 – Vetores velocidade para $Gr = 10^5, \gamma = 0^\circ$ e $Re = (a) 1, (b) 5,$ e $(c) 10$.-----	105
Figura 5.17 – Distribuições da temperatura nos módulos para $Gr=10^5, \gamma=0^\circ$ e $Re=1,5,$ e 10 .--	105
Figura 5.18 – Vetores velocidade para $Gr = 10^5, \gamma = 45^\circ, Re = (a) 1, (b) 5$ e $(c) 10$.-----	106
Figura 5.19 – Distribuições de temperatura na fonte para $Gr = 10^5, \gamma = 45^\circ, Re = 1, 5,$ e 10 .--	107
Figura 5.20 – Vetores velocidade para $Gr = 10^5, \gamma = 90^\circ, Re = (a) 1, (b) 5$ e $(c) 10$.-----	108
Figura 5.21 – Distribuições de temperatura na fonte para $Gr = 10^5, \gamma = 90^\circ$ e $Re = 1, 5,$ e 10 .-----	109
Figura 5.22 – Nusselt médio versus Re para $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ, Gr = (a) 10^3, (b) 10^4$ e $(c) 10^5$.-----	109
Figura 5.23 – Nusselt médio versus γ para $1 \leq Re \leq 500$ e $Gr = (a) 10^3, (b) 10^4$ e $(c) 10^5$.-----	111
Figura 5.24 – Geometria do canal e condições de contorno.-----	112
Figura 5.25 – Isotermas para $Re = 1, 10, 100, 1000, \gamma = 0^\circ$ e $Gr = 10^5$.-----	113
Figura 5.26 – Vetores velocidade para $Gr = 10^5, Re = 1, 10, 100,$ e $d = 1, 2, 3$.-----	115
Figura 5.27 – Nusselt médio versus Reynolds, $d=1,2,3, Gr=10^3, 10^4, 10^5$ nas fontes 1 e 2.-----	116
Figura 5.28 – Temperatura nas fontes 1 e 2 para $d = 1, 2, 3; Re = 100, 1000$ e $Gr = 10^5$.-----	117
Figura 5.29 – Nu versus tempo para $Gr=10^5, Re=10,100,1000, d=1,2,3$ nas fontes 1 e 2.-----	119
Figura 5.30 – Geometria do canal e condições de contorno.-----	120
Figura 5.31 – Isotermas para $Gr = 10^5, Re = 1, 10, 50$ e 100 e $\gamma = 0^\circ, 45^\circ$ e 90° .-----	122
Figura 5.32 – Vetores velocidade para $Gr = 10^5, Re = 10$ e 100 e $\gamma = 0^\circ, 45^\circ$ e 90° .-----	123
Figura 5.33 – Nusselt versus número de Reynolds para $Gr=10^3, 10^4$ e 10^5 e $\gamma=0^\circ, 45^\circ$ e 90° .---	124
Figura 5.34 – Temperatura sobre as fontes para $Re=10,100,1000; Gr=10^5, \gamma=0^\circ, 45^\circ$ e 90° .---	124
Figura 5.35 – Nusselt médio nas fontes no tempo para $Re=10,100, Gr=10^3, 10^4, 10^5, \gamma=90^\circ$.----	126
Figura 5.36 – Geometria e condições de contorno do problema.-----	127
Figura 5.37 – Isotermas para $Gr = 10^5$ para o cilindro girando nos sentidos horário e anti-horário.-----	129

Figura 5.38 – Isotermas e linhas de corrente para $Gr = 10^5$ e $\gamma = 0^\circ$. -----	130
Figura 5.39 – Nusselt versus Reynolds $1 \leq Re \leq 500$ para $Gr = 10^3, 10^4, 10^5, \gamma = 0^\circ$. -----	131
Figura 5.40 – Isotermas para $Gr = 10^5$ e $\gamma = 45^\circ$.-----	132
Figura 5.41 – Geometria e condições de contorno. -----	133
Figura 5.42 – Casos estudados para uma cavidade com dois cilindros rotativos. -----	134
Figura 5.43 – Isotermas para $Re = 10, 100$ e $Gr = 10^5$.-----	135
Figura 5.44 – Nusselt médio para os casos da figura 5.37 versus Re e $Gr = 10^5$. -----	137
Figura 5.45 – Nusselt médio para os casos da figura 5.42 versus Reynolds e $Gr = 10^5$. -----	138
Figura 5.46 – Isotérmicas e linhas de corrente para o caso A1. -----	139
APÊNDICE B	
Figura B.1 – Elemento quadrilateral com quatro nós e a função de interpolação \mathcal{O}^e . -----	157
Figura B.2 – Local dos pontos de Gauss para a integração bi-dimensional para uma quadratura 2x2 em um quadrado $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$. -----	161
Figura B.3 – Elementos usados na integração numérica neste trabalho. -----	163
APÊNDICE C	
Figura C.1 – Análise da condição LBB para vários elementos. -----	170
Figura C.2 – Precisão versus parâmetro da penalidade. -----	171
APÊNDICE D	
Figura D.1 – Solução para (A4.1) com condições de contorno $\phi(0)=1, \phi(1)=0$, e $\gamma=10$. ---	181
Figura D.2 – Transporte convectivo sobre dois elementos consecutivos. -----	182
Figura D.3 – Solução para (A4.14) com condições de contorno $\phi(0)=1, \phi(1)=0$, e $\gamma=10$. -	183
Figura D.4 – α e α_{cr} como função de γ .-----	188
Figura D.5 – Elemento retangular com 4 nós. -----	191
Figura D.6 – Elemento quadrilateral geral. -----	195
APÊNDICE E	
Figura E.1 – Divergente para canal com degrau- $Re = 10, Gr = 7,5 \times 10^3$.-----	197
Figura E.2 – Divergente para canal com degrau- $Re = 20, Gr = 1,2 \times 10^5$. -----	198
Figura E.3 – Divergente para canal com curva de 180° - $Re = 50, Gr = 3 \times 10^4$. -----	198
Figura E.4 – Divergente para canal com curva de 180° - $Re = 100, Gr = 1,2 \times 10^5$. -----	198
Figura E.5 – Divergente para canal com 3 fontes de calor- $Re = 10, Gr = 10^5, \gamma = 0^\circ$. -----	198
Figura E.6 – Divergente para canal com 3 fontes de calor- $Re = 10, Gr = 10^5, \gamma = 45^\circ$.-----	199
Figura E.7 – Divergente para canal com 3 fontes de calor- $Re = 100, Gr = 10^5, \gamma = 45^\circ$. -----	199

Figura E.8 – Divergente para cavidade com um cilindro rotativo- $Re = 10$, $Gr = 1,2 \times 10^5$. -----	199
Figura E.9 – Divergente para cavidade com um cilindro rotativo- $Re = 500$, $Gr = 1,2 \times 10^5$. -----	200
Figura E.10 – Divergente para cavidade com dois cilindros rotativos- $Re = 10$, $Gr = 1,2 \times 10^5$. ---	200
Figura E.11 – Divergente para cavidade com dois cilindros rotativos- $Re = 500$, $Gr = 1,2 \times 10^5$. ---	200
APÊNDICE F	
Figura F.1 – Detalhe do elemento e de uma fronteira aberta qualquer. -----	202
Figura F.2 – Elemento e de uma fronteira aberta submetido à pressão constante nos lados. ---	203
Figura F.3 – Forças atuantes no lado do elemento e pertencente à fronteira aberta. -----	203
APÊNDICE G	
Figura G.1 – Resíduos Res_1 e Res_2 no tempo para canais com uma curva de 180° . -----	212
Figura G.2 – Resíduos Res_1 e Res_2 no tempo para canais com 3 fontes de calor. -----	213
Figura G.3 – Resíduos Res_1 e Res_2 no tempo para cavidades com dois cilindros rotativos. ----	214
APÊNDICE H	
Figura H.1 – Convergência no tempo para cavidade quadrada, $Gr = 20000$. -----	216
Figura H.2 – Convergência no tempo para canais com 3 fontes, $Re = 100$. -----	217
Figura H.3 – Convergência no tempo para canais com 3 fontes, $Re = 1000$. -----	218
Figura H.4 – Convergência no tempo para canais com curvas de 180° , $Re = 50$. -----	219
Figura H.5 – Convergência no tempo para canais com curvas de 180° , $Re = 100$. -----	220
Figura H.6 – Convergência no tempo para canais com curvas de 180° , $Re = 1000$. -----	221
Figura H.7 – Convergência no tempo para canais com degrau. -----	222

Lista de Tabelas

CAPÍTULO 3

Tabela 3.1 – Coeficientes para generalização das equações de conservação.----- 38

CAPÍTULO 4

Tabela 4.1 – Comparação do número de Nusselt médio Nu para o caso de convecção natural em uma cavidade quadrada, $Gr = 2000$ com valores da literatura. ----- 62

Tabela 4.2 – Comparação do número de Nusselt médio Nu para o caso de convecção natural em uma cavidade quadrada, para diversos Gr com valores da literatura.----- 62

Tabela 4.3 – Comparação dos resultados do presente trabalho com valores numéricos e experimentais para escoamentos em canais com um degrau na entrada. ----- 65

Tabela 4.4 – Números de Nusselt médios para a validação 4. ----- 70

Tabela 4.5 – Desvios do Nu médio na parede superior fria do canal.----- 74

Tabela 4.6 – Desvios do Nusselt médio na superfície superior aquecida da placa. ----- 76

Tabela 4.7 – Nusselt médios nas fontes para um canal com 3 fontes de calor, $Gr = 10^5$. ----- 80

Tabela 4.8 – Desvios para as malhas com 4354, 6046 e 8144 elementos e $Gr = 10^5$. ----- 83

Tabela 4.9 – Desvios do número de Nusselt médio para malhas com 5926 e 8176 elementos sendo $Re = 1, 10, 100, Gr = 10^3, 10^4, 10^5$.----- 86

CAPÍTULO 5

Tabela 5.1 – Parâmetros Fr, Re, Gr , e o número de Nusselt médio na parede superior.----- 89

APÊNDICE B

Tabela B.1 – Pontos de integração unidimensional e pesos para a quadratura Gaussiana com $n = 1$ e 2 . ----- 160

Tabela B.2 – Pontos de integração bidimensional e pesos para a quadratura Gaussiana com

n = 1 e 2. ----- 161

APÊNDICE E

Tabela E.1 – Casos estudados para a análise do divergente de velocidades. ----- 196

APÊNDICE G

Tabela G.1 – Tempo computacional e resíduos para canais com uma curva de 180°. ----- 207

Tabela G.2 – Tempo computacional e resíduos para canais retangulares com 2 fontes de calor. ----- 208

Tabela G.3 – Tempo computacional e resíduos para canais retangulares com 3 fontes de calor. ----- 209

Tabela G.4 – Tempo computacional e resíduos para cavidades com um cilindro interno rotativo. ----- 210

Tabela G.5 – Tempo computacional e resíduos para cavidades com dois cilindros internos rotativos. ----- 211

Simbologia

Letras Latinas

a	vetor que une os pontos intermediários dos lados opostos em um elemento quadrilateral
[a,b]	intervalo de integração
A	matriz massa
A^e	área do elemento e
b	vetor que une os pontos intermediários dos lados opostos em um elemento quadrilateral
B	matriz que contém termos viscosos e termos da penalidade
B	largura das fontes de calor
B_x	forças de empuxo na direção x
B_y	forças de empuxo na direção y
c_i	concentração de espécies i
c_{i0}	concentração de referência de espécies i
c_n	coeficientes da função ϕ em $H^1(n, \Omega)$
C	matriz massa para a equação de energia
C_1	cilindro 1 (esquerdo)
C_2	cilindro 2 (direito)
D	coeficiente de difusão na lei de difusão de Fick
D	matriz de difusão de calor
d	distância entre as fontes para o canal com duas fontes de calor ou distância entre os cilindros rotativos

d	vetor contendo as velocidades U e V
$\dot{\mathbf{d}}$	derivadas no tempo de d
det J	determinante do Jacobiano
$E_n(\mathbf{g})$	erro devido à aproximação numérica de uma integral
$E(\mathbf{x}^n)$	erros associados com a fórmula de quadratura
<i>e</i>	espessura da placa para o caso do canal com uma curva de 180°
f^*	soma das forças devido à pressão e forças gravitacionais
f_1	integral das forças gravitacionais em X
f_2	integral das forças gravitacionais em Y
F_1	termos de força em X
F_2	termos de força em Y
Fr	número de Froude ($Fr = Re^2 / Gr$)
F(θ)	vetor das forças gravitacionais e/ou condições de contorno prescritas
<i>g</i>	aceleração da gravidade
$g(x)$	uma função em x
G(d, θ)	vetor que contém termos convectivos e as contribuições das condições de contorno na equação da energia
Gr	número de Grashof ($Gr = \beta g \Delta T H^3 / \nu^2$)
H	altura de um canal ou de uma cavidade ou comprimento característico
H_d	altura do canal na segunda validação
H_u	altura da abertura do canal na segunda validação
H_d	altura do degrau na entrada para o caso do canal com degrau na entrada
H_e	altura da abertura na entrada para o caso do canal com degrau na entrada
$H^1(\Omega)$	espaço Sobolev das funções definidas sobre Ω
$H^1(n, \Omega)$	sub-espaço finito de dimensão n
$H_0^1(\Omega)$	sub-espaço do espaço Sobolev $H^1(\Omega)$
$H_0^1(n, \Omega)$	sub-espaço finito de dimensão n
<i>h</i>	altura total para o caso do canal com uma curva de 180°, tamanho característico de um elemento
h_1	projeção do vetor a na direção do escoamento dentro do elemento
h_2	projeção do vetor b na direção do escoamento dentro do elemento

\bar{h}	tamanho médio do elemento
I	integral
I_n	aproximação numérica de uma integral
J	Jacobiano da transformação
k	condutividade térmica
k_j	coeficiente da perturbação de Petrov-Galerkin
K	matriz de rigidez
K₁	matriz de rigidez
K₂	matriz de rigidez
L	comprimento de um canal ou de uma cavidade ou operador linear
ℓ	grau do polinômio das derivadas das funções de forma
L_x	comprimento em x de um elemento quadrilateral
L_y	comprimento em y de um elemento quadrilateral
$L^2(\Omega)$	espaço de funções definidas em Ω cujos quadrados são integráveis sobre Ω
$M(x,y)$	funções diferenciáveis
M	matriz massa para a equação de quantidade de movimento
M_k	funções de forma para pressão
n	direção normal a uma superfície S
\bar{n}	direção normal adimensional a uma superfície S
$N(x,y)$	funções diferenciáveis
n_y	direção normal ao eixo y
n_x	direção normal ao eixo x
n₁	termos convectivos perturbados da equação da quantidade de movimento
n₂	termos convectivos perturbados da equação da quantidade de movimento
N_e	número de nós no elemento
N(d)	vetor que contém os termos convectivos não-lineares na equação da quantidade de movimento
Nu_5	número de Nusselt médio para $1 \leq X \leq 5$ no estudo do canal em U (180°)
Nu_{15}	número de Nusselt médio para $1 \leq X \leq 15$ no estudo do canal em U (180°)
Nu_{20}	número de Nusselt médio para $1 \leq X \leq 20$ no estudo do canal em U (180°)
Nu_{C1}	número de Nusselt médio no cilindro 1 no caso de uma cavidade com dois cilindros rotativos
Nu_{C2}	número de Nusselt médio no cilindro 2 no caso de uma cavidade com dois

	cilindros rotativos
Nu_{CQ}	número de Nusselt médio na superfície do cilindro aquecido no caso de cavidade com um cilindro rotativo
N_i	função de forma do nó i para elementos com 4 nós
$\{N_j\}_{j=1}^n$	conjunto de funções em $H_0^1(\Omega)$ que constitui uma base para $H^1(n, \Omega)$
Nu	número de Nusselt médio em uma superfície S
Nu_F	número de Nusselt médio na superfície fria no caso de uma cavidade com dois cilindros rotativos
Nu_{FQ1}	número de Nusselt médio na primeira fonte
Nu_{FQ2}	número de Nusselt médio na segunda fonte
Nu_{FQ3}	número de Nusselt médio na terceira fonte
Nu_i	número de Nusselt médio na superfície do cilindro interno na validação utilizando cilindros concêntricos
Nu_o	Número de Nusselt médio na superfície do cilindro externo na validação utilizando cilindros concêntricos
Nu_L	números de Nusselt locais em uma superfície S
Nu_Q	número de Nusselt médio na superfície quente no caso de uma cavidade com dois cilindros rotativos
p_1	integral das condições de contorno na superfície aberta em X
p_2	integral das condições de contorno na superfície aberta em Y
p	pressão dimensional
p_s	componente hidrostática da pressão
P	pressão adimensional
Pe	número de Péclet ($Pe = RePr$)
P^*	pressão aproximada pelo método dos mínimos quadrados ou pressão modificada na formulação do método da penalidade
P_{ij}	perturbações de Petrov-Galerkin
$P_n(x)$	polinômio de interpolação de grau n
Pr	número de Prandtl ($Pr = \nu / \alpha$)
q	fluxo de calor adimensional
q''	fluxo de calor dimensional imposto na superfície S_{FQ}
r	raio dos cilindros
R	integração reduzida

Ra	número de Rayleigh ($Ra = GrPr$)
RA	razão de aspecto (L/H)
Re	número de Reynolds ($Re = U_0H/\nu$)
$R(\phi, x, y)$	resíduo
S	termo fonte
S_{CF}	superfície isotérmica fria cilíndrica
S_{CQ}	superfície isotérmica quente cilíndrica
S_E	superfície de entrada
S_F	superfície isotérmica fria
S_{FQ}	superfícies das fontes de calor
S_I	superfície isolada termicamente
S_Q	superfície isotérmica quente
S_S	superfície de saída
T	temperatura dimensional
T	matriz de transformação
t	tempo dimensional
T_0	temperatura de referência
T_c	temperatura dimensional baixa
T_h	temperatura dimensional alta
u	componente de velocidade dimensional na direção x
U	componente de velocidade adimensional na direção X
U_0	velocidade de referência igual a velocidade média na entrada do canal
\bar{U}	velocidade média dimensional na entrada do canal
v	componente de velocidade dimensional na direção y
V	componente de velocidade adimensional na direção Y
$ V $	velocidade média no elemento
x	coordenada dimensional na direção horizontal
X	coordenada adimensional na direção horizontal
ΔX	incremento em X
X_i	coordenada adimensional local em X do nó i do elemento e
x_1, x_2, x_3	distâncias das fontes de calor
X_r	distância de recolamento do escoamento na superfície inferior
X_s	distância de separação do escoamento na superfície superior

X_{rs}	distância de recolamento do escoamento na superfície superior
W	largura do canal
w	função de ponderação na minimização residual
w_i	pesos da quadratura Gaussiana
w^*	funções de ponderação na formulação de resíduos ponderados para as equações de Navier-Stokes na direção x
w^{**}	funções de ponderação na formulação de resíduos ponderados para as equações de Navier-Stokes na direção y
y	coordenada dimensional na direção vertical
Y	coordenada adimensional na direção vertical
ΔY	incremento em Y
Y_i	coordenada adimensional local em Y do nó i do elemento e

Letras Gregas

α	difusividade térmica do fluido ou difusão de equilíbrio nas perturbações de Petrov-Galerkin
α°	ângulo interno nos cilindros rotativos
α_{cr}	valor crítico da difusão de equilíbrio
α_j	difusão de equilíbrio
β	coeficiente de expansão térmica do fluido
β_i	coeficiente de expansão volumétrica associado com as espécies i
γ	inclinação de um canal ou de uma cavidade ou número de Péclet do elemento
γ_j	número de Péclet do elemento
Γ	fronteira em geral
Γ_1	fronteira com condição de contorno de Dirichlet ou essencial
Γ_2	fronteira com condição de contorno de Neumann ou natural
Δt	incremento de tempo adimensional
∇_{st}	operador de gradiente no sistema de coordenadas s - t
∇_{xy}	operador de gradiente no sistema de coordenadas x - y
ΔT	diferença de temperaturas alta e baixa ($T_h - T_c$)

ε_j	coeficientes do número de Péclet do elemento
ε_1	coeficiente da equação da quantidade de movimento em X e Y
ε_2	coeficiente da equação da energia
η	coordenada local adimensional
θ	temperatura adimensional
θ_s	temperatura adimensional na superfície
$\dot{\theta}$	derivada no tempo de θ
θ	vetor contendo as temperaturas adimensionais
λ	parâmetro da penalidade na integral reduzida
μ	viscosidade dinâmica
$\bar{\mu}$	segundo coeficiente da viscosidade
ν	viscosidade cinemática
ξ	coordenada local adimensional
ρ	massa específica
ρ_0	massa específica de referência do fluido
τ	tempo adimensional
ϕ	variável dependente qualquer
ϕ_{sol}	espaço de soluções para uma variável ϕ
ω	velocidade angular na superfície dos cilindros rotativos
Ω	domínio computacional

Superescritos

1	índice referente ao espaço Sobolev
2	índice referente ao espaço de funções com quadrados integráveis
e	elemento da malha computacional
n	enésima potência
”	referente ao fluxo de calor dimensional
°	Referente ao ângulo de inclinação ou ângulo de curvatura de um canal

Subscritos

1	índice que indica cilindro esquerdo, valores na direção X
2	índice que indica cilindro direito, valores na direção Y
5	distância entre $1 \leq X \leq 5$
15	Distância entre $1 \leq X \leq 15$
20	distância entre $1 \leq X \leq 20$
C1, C2	cilindros 1 e 2 no caso de cavidade com 2 cilindros
CF, CQ	superfícies cilíndricas fria e aquecida
cr	valor crítico
d	degrau
e	elemento da malha computacional, entrada de um canal
E	superfície de entrada
F, Q	superfície fria, superfície quente
FQ1,2,3	Superfície fria da primeira, segunda ou terceira fonte
i	indica os pontos nodais, o número de pontos nodais e da função de forma
I	superfície isolada
i1	índice das perturbações de Petrov-Galerkin na equação da quantidade de movimento, índice das concentrações de espécies i
i2	índice das perturbações de Petrov-Galerkin na equação da energia
j	indica os pontos nodais ou o número de pontos nodais do elemento
k, p	índice dos pontos Gaussianos
L	local
n	número de coeficientes de uma função \emptyset
o	sub-espaco, cilindro externo, parâmetro de referência
r	recolamento do escoamento
rs	recolamento do escoamento na superfície superior
s	separação do escoamento
st	sistema de coordenadas locais
x	direção x
y	direção y

Siglas

ET	erro de truncamento
LBB	condição de Ladyzhenskaya, Babusca e Aziz, e Brezzi
MDF	método de diferenças finitas
MEF	método de elementos finitos
MVF	método de volumes finitos
NASTRAN	NASA STRuctural ANalysis
SAP	Structural Analysis Program
SUPG	Streamline Upwind Petrov-Galerkin

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Um grande número de aplicações na engenharia utiliza escoamento com convecção mista. Com um melhor entendimento do processo envolvido, é possível melhorar o desempenho de muitas aplicações industriais como, por exemplo, sistemas de refrigeração para equipamentos eletrônicos, câmaras de combustão, trocadores de calor de alto desempenho, equipamentos de processos químicos, sistemas de controle ambiental, passagens de resfriamento em pás de turbinas e coletores solares.

No presente trabalho estuda-se o comportamento da transferência de calor por convecção mista considerando escoamentos laminares, bidimensionais e não permanentes em diversos casos utilizando o método de elementos finitos com elementos quadrilaterais com quatro nós. Juntamente com o método de elementos finitos, utiliza-se a técnica de Petrov-Galerkin nos termos convectivos e o método da penalidade nos termos de pressão.

No item seguinte são apresentados os casos estudados neste trabalho.

1.2 – REVISÃO DA LITERATURA

Será feita adiante uma revisão bibliográfica do método de elementos finitos, do método de Petrov-Galerkin e de alguns problemas encontrados na literatura referentes ao estudo realizado neste trabalho que estão relacionados a geometrias de canais com degrau, com curva de 180° e com fontes de calor e de cavidades com cilindros rotativos.

1.2.1 – Método de Elementos Finitos

Os fundamentos matemáticos do método de elementos finitos (MEF) não se iniciam com o advento da era digital. Analisando-se o desenvolvimento dos fundamentos matemáticos e a teoria de base do MEF, verifica-se que sua maior parte ocorreu no final do século XIX.

Um dos primeiros elaboradores dos fundamentos do MEF foi Lord Rayleigh (1877). Rayleigh obteria respostas a muitos problemas práticos relacionados ao projeto de estruturas, especialmente pontes de ferrovias e juntas de armação, usando minimização dos princípios de energia. Embora o conceito de minimização não fosse novo, Rayleigh foi capaz de expandir o conceito original. Entretanto, problemas de geometrias complexas eram difíceis de serem solucionados, ficando reduzidos então a geometrias simples para se conseguir obter uma solução analítica.

Ritz (1909) estendeu o princípio de minimização de energia incluindo o uso de funções independentes múltiplas e chegou perto de estabelecer o conceito dos elementos finitos. Independentemente do trabalho de Ritz (1909), Galerkin (1915) publicou seu trabalho com respeito ao conceito de integral do método de resíduos ponderados (MRP). Este trabalho se tornaria base teórica da técnica MEF.

Courant (1943) publicou um artigo que demonstrava o uso de regiões triangulares e aproximações finitas. Ele examinou diferentes regiões geométricas, usou funções de aproximação locais e construiu uma solução global, com base no princípio de energia potencial total, previamente formulada por Ritz (1909).

A primeira aparição de uma forma mais moderna do MEF está no trabalho de Turner et al. (1956). Os autores estudaram a análise estrutural de partes de aeronaves construídas na

Boeing Aircraft. Entretanto, o nome "elemento finito" foi utilizado primeiramente no artigo de Clough (1960). Igualmente, Argyris e Kelsey (1960) publicaram um trabalho descrevendo o desenvolvimento desta técnica matemática para os problemas estruturais. No final dos anos 60, o termo "método de elementos finitos" havia se tornado usual.

A necessidade da álgebra matricial se tornou evidente com o uso da técnica de elementos finitos. Uma conferência sediada na Wright-Patterson Air Force Base (1966) enfatizou a aplicação da técnica de elementos finitos e as técnicas de álgebra matricial nos problemas estruturais, como também a necessidade de recursos computacionais. Nesta época, iniciou-se o desenvolvimento de computadores de maior porte para a ciência e para a engenharia. Como resultado da disponibilidade destes grandes computadores e com seus avanços contínuos, juntamente com inúmeros artigos aparecendo em toda a década de 60 sobre MEF, pouco depois estaria disponível o primeiro programa comercial de elementos finitos NASTRAN. Logo depois, apareceu o programa de análise estrutural SAP, que foi um programa de MEF desenvolvido por um aluno de Clough. O programa de elementos finitos ANSYS foi, inicialmente, desenvolvido para o uso na indústria nuclear.

No começo dos anos 70, a indústria automotiva iniciou o uso do MEF na análise estrutural, relacionada ao projeto e a segurança dos automóveis. O MEF não estava mais somente confinado à indústria aeronáutica. O livro texto publicado por Cook (1974) tornou os princípios de elementos finitos e suas capacidades mais prontamente acessíveis a um grande número de engenheiros. Hoje, podem ser encontrados inúmeros livros-texto que discutem a teoria básica e história do MEF, sendo que a maioria aplica o MEF aos problemas estruturais.

Como as análises estruturais usando MEF se tornaram mais rotineiras, os pesquisadores começaram a aplicar o método em outras áreas, particularmente no estudo de escoamento de fluido. Os primeiros trabalhos de simulação numérica em escoamentos de fluidos com o método de elementos finitos foram publicados na metade dos anos 60. Uma revisão abrangente do método foi apresentada por Zienkiewicz e Taylor (1989, 1991). Atualmente, o MEF é largamente utilizado na simulação de escoamento de fluidos, tendo como métodos alternativos, o método de diferenças finitas (MDF) e o método de volumes finitos (MVF).

Segundo Felippa (2001), o método de elementos finitos (MEF) surgiu como um dos mais poderosos métodos numéricos até agora criados. Entre os atributos mais básicos do método, que o levaram a esta larga aceitação e uso, são a facilidade de modelagem de

geometrias complexas, o tratamento consistente das condições de contorno envolvendo gradientes e a possibilidade de ser programado em um formato flexível e de propósito geral.

1.2.2 – Método de Petrov-Galerkin

A aproximação padrão por elementos finitos está baseada na formulação de Galerkin do método de resíduos ponderados. Esta formulação provou ser eminentemente bem sucedida na aplicação de problemas da mecânica dos sólidos, da mecânica estrutural e condução de calor. A razão para este sucesso é que, quando aplicado em problemas governados por equações diferenciais parciais parabólicas e auto-adjuntas ou elípticas, o método de elementos finitos de Galerkin conduz a matrizes de rigidez simétricas. Neste caso, a diferença (isto é, o resíduo) entre a solução por elementos finitos e a solução exata é minimizada com respeito à norma da energia, por exemplo, Strang e Fix (1973). Na prática, a formulação de Galerkin é ótima em problemas governados por equações auto-adjuntas. Em tais casos, existe um funcional quadrático, cujo mínimo corresponde a satisfazer a equação diferencial parcial governante do problema em questão.

O sucesso do método de elementos finitos de Galerkin, na mecânica estrutural, condução de calor e outros problemas do tipo potencial, forneceu no começo dos anos 70, um forte ímpeto à utilização do método na simulação de problemas da dinâmica dos fluidos. Pensou-se que as vantagens significativas adquiridas nos problemas de mecânica estrutural e de difusão iriam se aplicar na simulação do escoamento de fluidos. Na verdade, isto provou ser um ponto de vista otimista, especialmente com relação à modelagem de fenômenos de transporte dominados pela convecção.

A principal dificuldade encontrada foi devida à presença de operadores convectivos na formulação de escoamentos, baseados em descrições cinemáticas diferentes da lagrangiana. Os operadores convectivos são, de fato, não-simétricos e assim, a propriedade de melhor aproximação pelo método de Galerkin, que é a base para o sucesso nos casos simétricos, é perdida quando a convecção domina o processo de transporte.

Na prática, soluções pelo método de Galerkin, de problemas de transporte dominados pela convecção, freqüentemente, apresentam oscilações espúrias. Estas oscilações só podem ser removidas usando-se intenso refinamento da malha e redução do incremento de tempo, o

que muitas vezes inviabiliza o uso do método. Isto tem motivado o desenvolvimento de alternativas para a formulação padrão de Galerkin que evitam oscilações, sem requerer um refinamento intenso de malha e redução do incremento de tempo. Tais alternativas são chamadas de técnicas de estabilização e têm fornecido soluções para a modelagem por elementos finitos de problemas da dinâmica dos fluidos.

Em condições transientes, um outro fato importante é garantir o acoplamento apropriado entre a aproximação temporal e espacial. Na verdade, uma representação espacial estável e precisa será rapidamente destruída, se o algoritmo usado para transportar a solução no tempo, não tiver precisão compatível. O acoplamento espaço-tempo é na verdade, particularmente crucial quando a convecção domina o processo de transporte, devido ao caráter direcional da propagação da informação em problemas hiperbólicos. Um progresso significativo tem sido atingido em anos recentes, no desenvolvimento de algoritmos precisos, para encontrar a solução transiente de problemas de transporte altamente convectivos.

A técnica de estabilização usada neste trabalho é a de Petrov-Galerkin que se constitui basicamente na introdução de novas funções de ponderação na formulação fraca de Galerkin. Estas funções foram primeiramente propostas por Hughes e Brooks (1979) e Kelly et al. (1980). Muitos outros esquemas baseados nas funções de forma perturbadas têm sido propostos na literatura. Uma revisão da literatura sobre o assunto pode ser encontrada nos trabalhos de Heinrich e Zienkiewicz (1979).

No contexto do método de elementos finitos, a maioria dos esforços para solucionar problemas de difusão-convecção tem usado formulações "upwind" apresentada via métodos de Petrov-Galerkin, o que pode ser visto nos trabalhos de Heinrich et al. (1977) e Heinrich e Zienkiewicz (1979a). Brooks e Hughes, (1982) verificaram que os procedimentos "upwind" no MEF, como no método de diferenças finitas, tinham a tendência de produzir soluções sobre-difusas em situações multidimensionais e transientes.

Um maior avanço foi obtido com o desenvolvimento do método "Streamline Upwind Petrov-Galerkin" (SUPG), também conhecido como "Dissipação de Balanço Anisotrópico", citado em Brooks e Hughes (1982) e Kelly et al. (1980). Neste método, o procedimento "upwind" é somente considerado na direção do escoamento e, assim, a quantidade de difusão numérica é consideravelmente reduzida. Entretanto, oscilações podem ocorrer próximas a camadas limites finas.

O método SUPG foi melhorado com a adição dos "Termos de Captura da Descontinuidade", com o uso de mecanismos não-lineares, conforme apresentado nos trabalhos de Hughes e Mallet (1986 a e b) e Galeão e Carmo (1988). Nos problemas transientes, as primeiras tentativas do uso do SUPG mostraram soluções sobre-difusas.

Melhores resultados para situações transientes foram obtidos por Yu e Heinrich (1986), com uma formulação Petrov-Galerkin dependente do tempo. Estes autores usaram funções de ponderação quadráticas no tempo e lineares no espaço.

Sampaio (1990) apresentou um novo método de Petrov-Galerkin para tratar com problemas de difusão-convecção. A formulação é derivada do conceito do uso de uma função modificadora para tornar o operador diferencial auto-adjunto. O assim chamado parâmetro "upwind" ótimo surge naturalmente do processo da aproximação das funções de modificação.

O livro de Donea e Huerta (2003) traz uma excelente revisão dos fundamentos dos métodos de elementos finitos estabilizados, para a análise de problemas permanentes e não-permanentes de dinâmica dos fluidos e de convecção-difusão.

Finalmente, existem muitas variantes da técnica de Petrov-Galerkin. Neste trabalho, utiliza-se a técnica de Petrov-Galerkin SUPG que será apresentada no apêndice D.

1.2.3 – escoamento em Geometrias com Degraus

Os problemas de convecção laminar em geometrias com degraus, considerando convecção forçada e mista, têm sido investigados extensivamente, tanto numericamente quanto experimentalmente. A razão para tal é que a separação, o recolamento e a recirculação no escoamento são influenciados por uma forte mudança na geometria e também pelas condições térmicas. Este tipo de problema apresenta grande interesse no estudo de transferência de calor em sistemas de refrigeração para equipamentos eletrônicos, câmaras de combustão, trocadores de calor de alto desempenho, equipamentos de processos químicos, sistemas de controle ambiental e passagens de resfriamento em pás de turbinas.

A seguir são apresentados alguns trabalhos relacionados ao assunto.

Primeiramente, Lin et al. (1991) estudaram a convecção mista em escoamentos com expansões em dutos inclinados. Os resultados indicaram que para algumas condições de escoamentos convectivos em geometrias com expansões, efeitos de empuxo e do ângulo de inclinação apresentam um papel importante.

Giovannini e Bortulus (1997) analisaram a transferência de calor na zona de recolamento após um degrau. Foi observado que nas recirculações, o coeficiente de transferência de calor, que foi máximo na zona de recolamento, não correspondeu em posição com o ponto de recolamento médio. Uma análise geral mostrou o papel fundamental das recirculações no que diz respeito ao escoamento e transferência de calor. Mecanismos de impacto e varredura carregaram o fluido frio externo em direção à parede sólida quente. Durante um ciclo de formação e descolamento de um vórtice, a influência de um dos mecanismos citados anteriormente, determina a posição relativa dos pontos de recolamento e máxima transferência de calor.

Os movimentos espacial-temporais dos pontos de recolamento e separação em um escoamento bidimensional com degrau e uma parede inferior oscilante foram estudados por Huteau et al. (2000). Os resultados mostraram que ambos os pontos de recolamento e separação, se aproximaram e se afastaram do degrau, durante o movimento para cima e para baixo da parede inferior, respectivamente. As variações das distâncias destes pontos são fortemente vinculadas à oscilação da parede.

Finalmente, foi examinado experimentalmente por Abu-Mulaweh et al. (2002), o efeito da altura dos degraus em escoamentos com convecção mista turbulenta, ao longo de placas planas verticais. Os resultados revelaram que a intensidade turbulenta das flutuações transversais e longitudinais e a intensidade das flutuações de temperatura ao longo do escoamento, aumentaram à medida que a altura do degrau aumentou.

1.2.4 – Escoamento em Geometrias com Curvaturas

O problema de escoamento laminar com convecção forçada e mista em geometrias com curvaturas tem sido investigado extensivamente, numericamente e experimentalmente. Muitas geometrias podem ter cantos e bordas como sistemas eletrônicos, câmaras de combustão e passagens de resfriamento em pás de turbinas, etc. Estes tipos de escoamentos são complexos

porque envolvem separações, recolamentos e recirculações que são causadas por mudanças repentinas na geometria do escoamento e pelas condições térmicas. Este comportamento tem um papel importante no projeto de tais dispositivos. Um tipo de problema com alta relevância é o estudo da transferência de calor devido ao escoamento não-permanente separado ao redor de placas de circuitos eletrônicos.

Ghaddar et al. (1986), sendo motivados pela importância do resfriamento de placas de circuitos integrados, estudaram o escoamento periódico laminar em canais corrugados. Eles verificaram que a transferência de calor pode aumentar até 15% se a oscilação for subcrítica.

Kim et al. (1997) estudaram a convecção forçada em torno de dois blocos aquecidos colocados em um canal com escoamento pulsante. Eles utilizaram um escoamento de entrada com oscilação para aumentar a troca de calor. Os autores encontraram uma frequência particular de oscilação que produziu a máxima troca de calor.

Alguns estudos de escoamentos ao redor de curvas de 180° têm se focalizado em altos números de Reynolds, $Re \geq 10^4$. Metzger e Sahm (1986) estudaram a transferência de calor ao redor de curvas em canais retangulares. Chyu (1991) estudaram a transferência de calor local em canais com duas e três passagens em curva de 180°. Hirota et al. (1999) realizaram um estudo no qual foram analisadas as características de transferência de calor e massa em canais com duas passagens em curva de 180°. Mochizuki et al. (1999) realizaram medidas em passagens de serpentinas com restrições locais em curva de 180°. Liou et al. (2000) realizaram medidas não-intrusivas no escoamento de fluido próximo à parede e determinaram a troca de calor numa passagem com formato de serpentina.

Chung et al. (2003) estudaram numericamente o escoamento ao redor de uma curva de 180° considerando este escoamento como um modelo do escoamento ao redor de placas de circuitos eletrônicos. Simulações de transferência de calor convectiva laminar não-permanente foram realizadas para números de Reynolds variando de 50 até 1000. Foi mostrado que o escoamento permaneceu estável até $Re \approx 600$ e para $Re > 600$, o escoamento se tornou oscilante com grandes vórtices, os quais surgiram com o desvio do escoamento na borda. Além disso, oscilações do escoamento causaram uma redução significativa no comprimento de recolamento do escoamento e um aumento considerável na transferência de calor. À medida que os vórtices se moveram ao longo do canal, o número de Nusselt na

parede quente oscilou significativamente. Os resultados desse trabalho mostraram que existe uma forte correlação entre a estrutura do escoamento e o processo de transferência de calor.

1.2.5 – Escoamentos em Geometrias com Fontes de Calor

Problemas de convecção forçada, natural e mista com fontes discretas de calor têm recebido uma atenção considerável devido às suas aplicações práticas como, por exemplo, o resfriamento de equipamentos eletrônicos, ajudando a controlar mecanismos em áreas como telecomunicações, onde a confiabilidade em longo prazo é um critério importantíssimo, e aparelhos eletrônicos domésticos onde o ruído acústico pode se tornar indesejável. Um outro uso seria o resfriamento em gabinetes de computador. É importante então entender a interação entre escoamento induzido pelo empuxo e o escoamento forçado em cavidades e canais.

Kennedy e Zebib (1983) apresentaram resultados sobre os efeitos de um escoamento laminar de convecção forçada e natural num canal horizontal com uma fonte discreta de calor localizada na parede superior ou na inferior, e também o caso com duas fontes de calor localizadas em ambas as paredes. Eles sugeriram várias disposições das fontes para projetos térmicos de dispositivos eletrônicos.

Convecção mista conjugada em uma fonte discreta ou múltiplas fontes em uma cavidade retangular foi investigada por Papanicolau e Jaluria (1990,1991). Os autores verificaram que os campos de velocidades e temperaturas podem ser oscilatórios, dependendo da posição relativa das fontes no interior da cavidade. Verificaram ainda que a posição das fontes na parede vertical foi mais favorável em termos de resfriamento.

Mahaney et al. (1990) fizeram um trabalho numérico e experimental da transferência de calor por convecção mista numa placa com fontes de calor discretas num canal retangular horizontal. As experiências e os cálculos computacionais considerando um modelo tridimensional foram desenvolvidos para se verificar a convecção mista numa placa com um arranjo de 4 filas, sendo que cada fila continha 12 fontes de calor quadradas, montadas na parte inferior do canal. As medidas experimentais englobaram os regimes laminares de transferência de calor caracterizados pelas convecções forçada, natural e mista, e também pelo início de transições para a turbulência. A variação do número de Nusselt médio das filas, com o número de Reynolds, exibiu um mínimo, sugerindo que, devido às forças de empuxo, a

transferência de calor pode ser melhorada. Parâmetros de escala apropriados foram introduzidos para se caracterizar o escoamento secundário induzido por forças de empuxo.

Choi e Ortega (1993) investigaram numericamente os efeitos do escoamento de convecção forçada e natural entre placas planas paralelas com uma fonte de calor discreta. Na análise numérica foi utilizado o método de diferenças finitas. Foi dada ênfase na influência da velocidade de entrada do escoamento, no ângulo de inclinação do canal e no empuxo induzido pela fonte discreta. Os resultados indicaram que, de uma maneira geral, o número de Nusselt nas fontes depende fortemente da inclinação do canal. Por outro lado, as mudanças no número de Nusselt e na temperatura máxima nas fontes foram desprezíveis quando o canal está inclinado entre 45° e 90° . Para um dado número de Reynolds fixo, com o aumento do número de Grashof, verificou-se um refluxo de ar na saída do canal, para o caso em que o escoamento foi favorável às forças de empuxo.

Bessaih e Kadja (2000) apresentaram uma simulação numérica de convecção conjugada natural - turbulenta onde três componentes cerâmicos iguais e aquecidos foram colocados em um canal vertical de paredes adiabáticas. Um modelo de transferência de calor conjugada bidimensional e um modelo de turbulência κ - ϵ padrão foram usados para se obter os campos de velocidades e temperaturas. Foi estudado o efeito do espaçamento entre os componentes eletrônicos. Também foi estudado o efeito do desligamento de fontes. O desligamento de fontes foi parcialmente vantajoso somente quando os componentes desligados foram montados entre os componentes ligados.

Madhavan e Sastri (2000) realizaram um estudo paramétrico da convecção natural com fontes de calor dentro de uma cavidade. Esta situação em particular teve relevância direta no resfriamento de equipamentos eletrônicos. Verificou-se que o número de Rayleigh, o número de Prandtl e as condições de contorno afetaram fortemente o escoamento do fluido e a transferência de calor. Foram apresentadas correlações numéricas para a temperatura máxima nas fontes e para o número de Nusselt, numa larga faixa de números de Prandtl e Rayleigh. Concluiu-se que a temperatura adimensional foi máxima para número de Prandtl igual a 150.

Rao et al. (2002) apresentaram os resultados de uma análise numérica de um problema bidimensional com convecção mista, permanente, incompressível e laminar, com radiação na superfície num canal com placas paralelas verticais e com uma fonte geradora de calor embutida em cada parede. As temperaturas médias e máximas locais decresceram com o

aumento da emissividade da superfície. A temperatura máxima da parede decresceu aproximadamente 50%, ou até mais, à medida que a superfície da parede mudou de boa refletora para boa emissora. Estas temperaturas também aumentaram com o aumento da razão de aspecto. A temperatura máxima aumentou à medida que a posição da fonte de calor foi alterada em direção à entrada até a saída do canal.

Yu e Joshi (2002) investigaram a transferência de calor em componentes com dissipadores de calor. A placa com dissipadores de calor foi fixada sobre o componente aquecido, o qual foi embutido na base de uma cavidade. A troca de calor foi significativa entre a fonte com dissipadores e o fluido confinado na cavidade. Observou-se também que a radiação contribuiu de maneira importante para a transferência de calor global. Resultados experimentais mostraram que o aumento da troca de calor foi bem diferente quando a orientação do canal foi vertical ou horizontal.

Bae e Hyun (2003) conduziram um estudo sobre o resfriamento do ar em um problema de convecção natural laminar não-permanente numa cavidade vertical retangular com três fontes discretas embutidas na parede. Os resultados mostraram a influência da condição térmica da fonte inferior, nas temperaturas das fontes posteriores. A análise transiente dos campos de velocidades e temperaturas mostrou a estrutura física dos escoamentos. O estudo enfatizou que as temperaturas transientes nas fontes excederam os valores correspondentes a situações de regime permanente.

Kurokawa et al. (2005) apresentaram uma solução numérica para um problema de convecção natural conjugada numa cavidade quadrada com três fontes de calor protuberantes, igualmente espaçadas, montadas numa parede vertical. Todas as paredes da cavidade foram mantidas isoladas termicamente, exceto a parede vertical direita que foi mantida resfriada com temperatura constante. A análise numérica utilizou o método de elementos finitos com esquema de Galerkin. O resfriamento da fonte de calor foi somente garantido pela convecção natural, caracterizando um mecanismo de transferência de calor isento das falhas que ocorrem nos sistemas resfriados por convecção forçada. A melhor disposição do conjunto de fontes foi obtida quando a fonte de calor de maior potência estava localizada na posição superior. Foi verificado que a razão entre as condutividades térmicas da fonte e do fluido não afetaram o desempenho do sistema.

1.2.6 – Escoamento em Geometrias com Cilindros Rotativos

O estudo da convecção natural em cavidade tem sido desenvolvido durante décadas, devido a sua importância nas aplicações da engenharia, tais como, sistemas de coletores solares, resfriamento passivo de equipamentos eletrônicos, etc. Vários estudos de convecção mista, numéricos e experimentais, são encontrados na literatura. Como aplicações práticas, podem ser citadas, o escoamento e a troca de calor entre tubos concêntricos, sendo um dos tubos rotativo; e o escoamento de um fluido no interior de uma cavidade quadrada com um cilindro rotativo no seu interior.

No trabalho de Fu et al. (1994), foi investigado o melhoramento da convecção natural numa cavidade retangular com as paredes verticais esquerda e direita sendo aquecida e resfriada, respectivamente. As paredes horizontais foram mantidas isoladas termicamente. Um cilindro rotativo é localizado próximo à parede vertical quente na altura de sua metade. Na análise numérica foi utilizado o método de elementos finitos com o método da penalidade. Os autores concluíram que o sentido de rotação do cilindro rotativo tem um papel importante na transferência de calor por convecção natural. Apenas o cilindro rotativo girando no sentido anti-horário contribuiu de modo significativo para o aumento da taxa de transferência de calor.

Nguyen et al. (1996) investigaram numericamente a transferência de calor não-permanente do escoamento em torno de um cilindro rotativo que incluiu os efeitos devido às forças de empuxo. As equações baseadas na vorticidade e função corrente foram solucionadas, juntamente com a equação da energia, por um esquema espectral. A análise considerou números de Grashof até 2×10^4 , números de Reynolds até 200, e uma faixa de velocidade de rotação adimensional de $-0,5$ até $+0,5$. Os resultados mostraram que o escoamento de vórtices foi promovido pela rotação do cilindro, mas foi eliminado pela presença das forças de empuxo. Nos casos de escoamentos contrários ao empuxo, as correntes de escoamento contrário causaram uma grande expansão das linhas de corrente e das isotermas na direção normal ao escoamento livre. Estas mudanças na estrutura dos campos do escoamento e da temperatura modificaram fortemente o fluxo de calor ao longo da superfície do cilindro. Conseqüentemente, a taxa de transferência de calor ficou significativamente dependente do número de Reynolds, do número de Grashof, da velocidade de rotação e da

direção da gravidade. O número de Nusselt variou periodicamente devido às oscilações do escoamento.

Yoo (1998) estudou numericamente a convecção mista em tubos concêntricos horizontais com número de Prandtl igual a 0,7. O cilindro interno foi aquecido e o cilindro externo resfriado. O escoamento forçado foi induzido pelo cilindro externo que gira com rotação constante. As investigações foram realizadas para números de Rayleigh (Ra), números de Reynolds (Re), e para várias razões de aspecto (RA), sendo $Ra \leq 5 \times 10^4$, $Re \leq 1500$ e $0,5 \leq RA \leq 5$. Os padrões de escoamento foram categorizados em três tipos, de acordo com o número de vórtices do escoamento: com nenhum, 1 ou 2 vórtices. O número de Reynolds de transição entre escoamentos com um ou dois vórtices para pequenos números de Rayleigh, não foi significativamente afetado pela razão de aspecto. A circulação do fluido na direção da rotação do cilindro diminuiu, à medida que o número de Rayleigh foi aumentado. À medida que a rotação do cilindro aumentou, os pontos dos fluxos de calor local máximo e mínimo, em ambos os cilindros, se moveram na mesma direção da rotação do cilindro, para baixos números de Rayleigh. Entretanto, para altos números de Rayleigh, estes pontos nem sempre se moveram na mesma direção. De uma maneira geral, a transferência de calor na parede decresceu rapidamente à medida que o número de Reynolds se aproximou do Reynolds de transição entre os escoamentos de 1 e 2 vórtices.

Lin and Yan (2000) conduziram um estudo experimental em um cilindro rotativo com seu eixo inclinado. Foram realizadas medições de temperaturas para investigar as características térmicas induzidas pela interação entre as forças de empuxo, as forças de Coriolis induzidas pela rotação e as forças centrífugas. Os resultados foram obtidos variando-se o número de Rayleigh térmico, o número de Rayleigh rotacional, o número de Taylor, e o ângulo de inclinação. As medidas experimentais sugeriram que quando o cilindro estivesse parado, o escoamento guiado por forças de empuxo seria oscilatório para ângulos de inclinação menores que 60° . A rotação do cilindro desestabilizou o campo de temperaturas quando a rotação foi menor que 60 rpm, e estabilizou quando a rotação foi maior que 60 rpm.

1.3 – CASOS ESTUDADOS

Como parte da motivação encontrada para desenvolver este trabalho, os seguintes casos a serem estudados são escolhidos:

Caso 1 – Convecção mista em um canal horizontal com um degrau na entrada,

Caso 2 – Convecção mista em um canal com uma curva de 180°,

Caso 3 – Convecção mista em canais inclinados com fontes discretas de calor,

Caso 3.1 – Convecção mista em canais inclinados com uma fonte discreta de calor,

Caso 3.2 – Convecção mista em canais horizontais com duas fontes discretas de calor,

Caso 3.3 – Convecção mista em canais inclinados com três fontes discretas de calor,

Caso 4 – Convecção mista em cavidades inclinadas com cilindros internos rotativos,

Caso 4.1 – Convecção mista em cavidades inclinadas com um cilindro interno rotativo,

Caso 4.2 – Convecção mista em cavidades inclinadas com dois cilindros internos rotativos.

As figuras 1.1 a 1.5 apresentam os casos estudados neste trabalho. Elas mostram um esquema da geometria sem especificação das condições de contorno. Nos capítulos seguintes, estas figuras serão mostradas com mais detalhes.

A figura 1.1 mostra um problema de convecção mista com escoamento num canal horizontal com um degrau na entrada. O fluido entra no canal com um perfil linear de temperaturas e com um perfil parabólico de velocidades totalmente desenvolvido. As paredes superior e inferior são, respectivamente, resfriada e aquecida uniformemente. A parede vertical do degrau é isolada. Na saída do canal, têm-se condições de contorno com fronteira aberta. Em todas as paredes se considera a condição de não-escorregamento, isto é, as velocidades são nulas nas paredes.

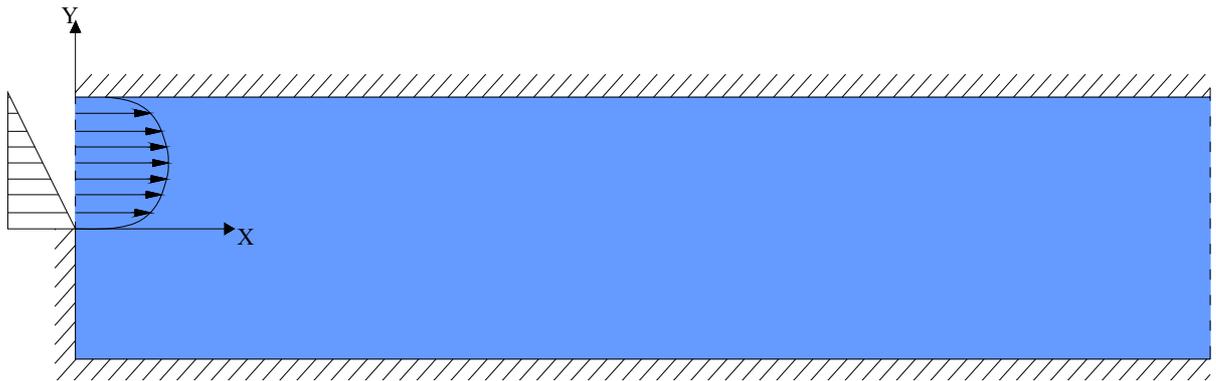


Figura 1.1 - Canal horizontal com um degrau na entrada (Caso 1).

A figura 1.2 mostra um problema de convecção mista num canal com uma curva de 180° . No canal inferior, o fluido entra com um perfil parabólico de velocidades e um perfil de temperatura baixa uniforme. O fluido contorna uma placa com superfície superior aquecida e inferior resfriada mudando de direção de 180° . A parede superior do canal superior é adiabática e as paredes restantes são resfriadas com temperatura uniforme. Para esta geometria estudada, a condição de não-escorregamento é aplicada em todas as paredes. As condições de fronteira aberta são aplicadas na saída do canal.

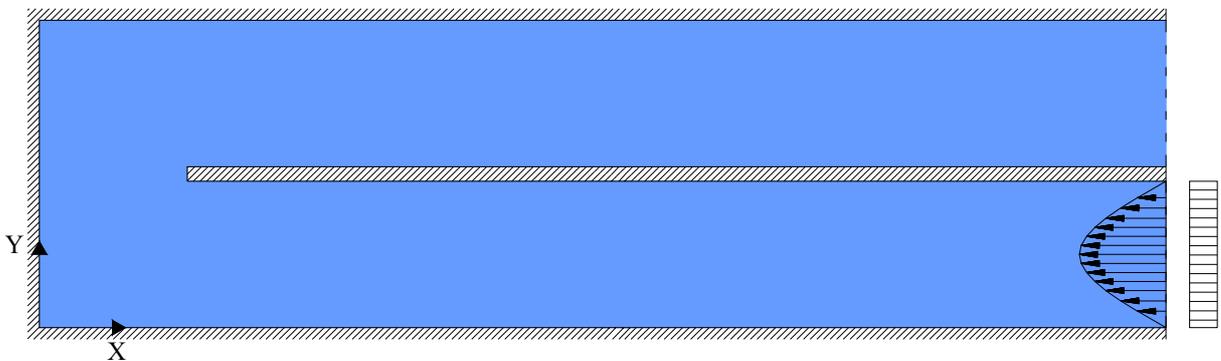


Figura 1.2 - Canal horizontal com uma curva de 180° (Caso 2).

As figuras 1.3, 1.4 e 1.5 mostram geometrias dos problemas de convecção mista em canais retangulares com uma, duas e três fontes de calor, respectivamente, fixadas nas superfícies inferiores dos canais. Em todos estes casos, o fluido entra com perfis uniformes de temperatura baixa e velocidade. As superfícies inferiores são mantidas adiabáticas, exceto nas superfícies das fontes de calor, onde fluxos de calor são prescritos. As superfícies superiores são mantidas resfriadas com temperatura constante. Nas saídas dos canais, aplicam-se condições de contorno de fronteira aberta.

No caso da figura 1.3, o efeito do ângulo de inclinação na transferência de calor é investigado. Já no caso da figura 1.4, o canal é horizontal, mas as distâncias entre as fontes são variadas. E, finalmente, na figura 1.5, a inclinação do canal é variada, mantendo-se fixadas as posições das fontes.

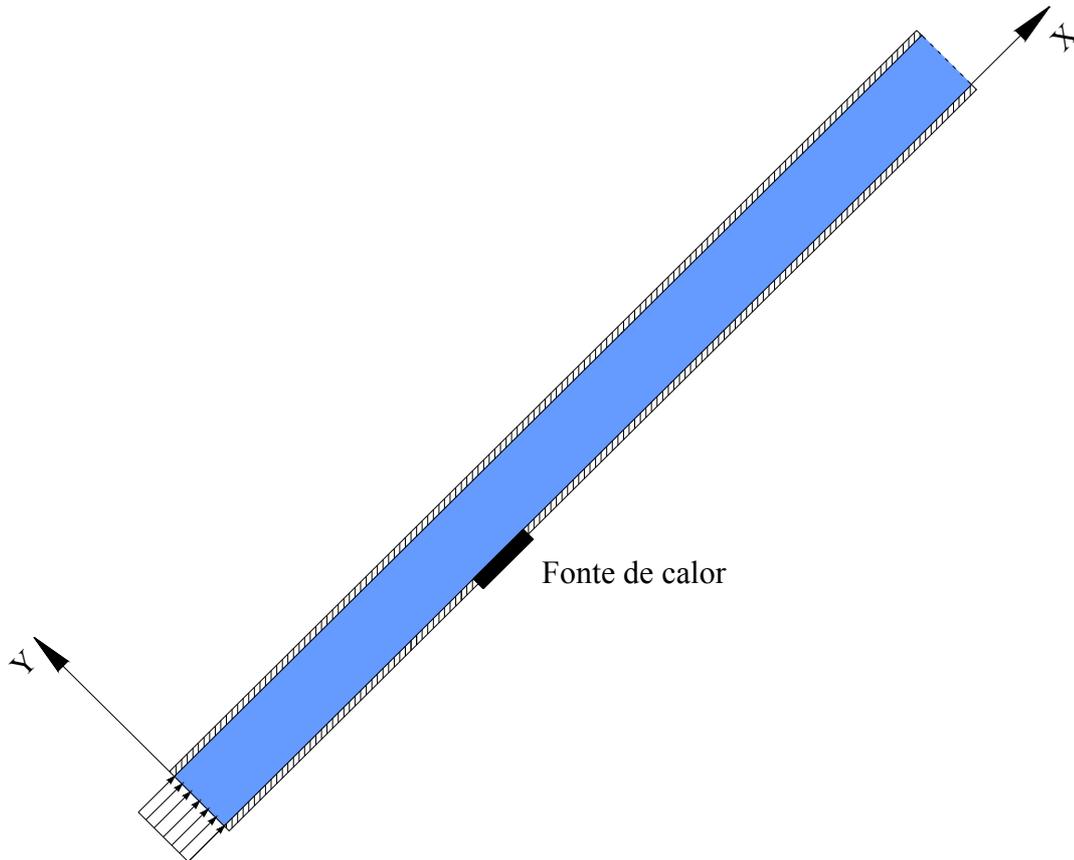


Figura 1.3 - Canal inclinado com uma fonte discreta de calor (Caso 3.1).

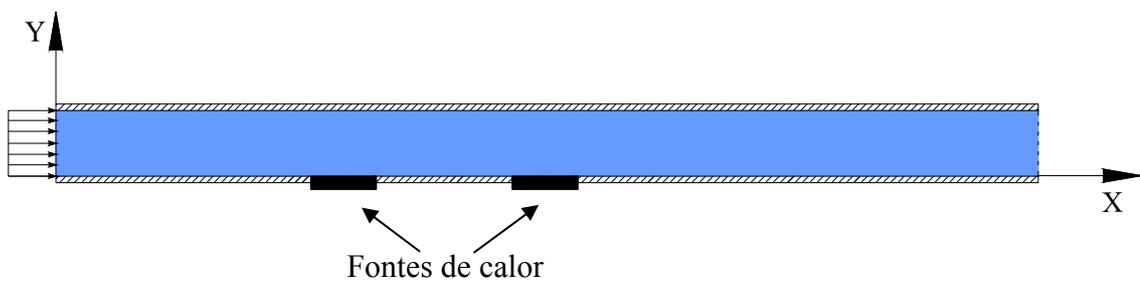


Figura 1.4 - Canal horizontal com duas fontes discretas de calor (Caso 3.2).

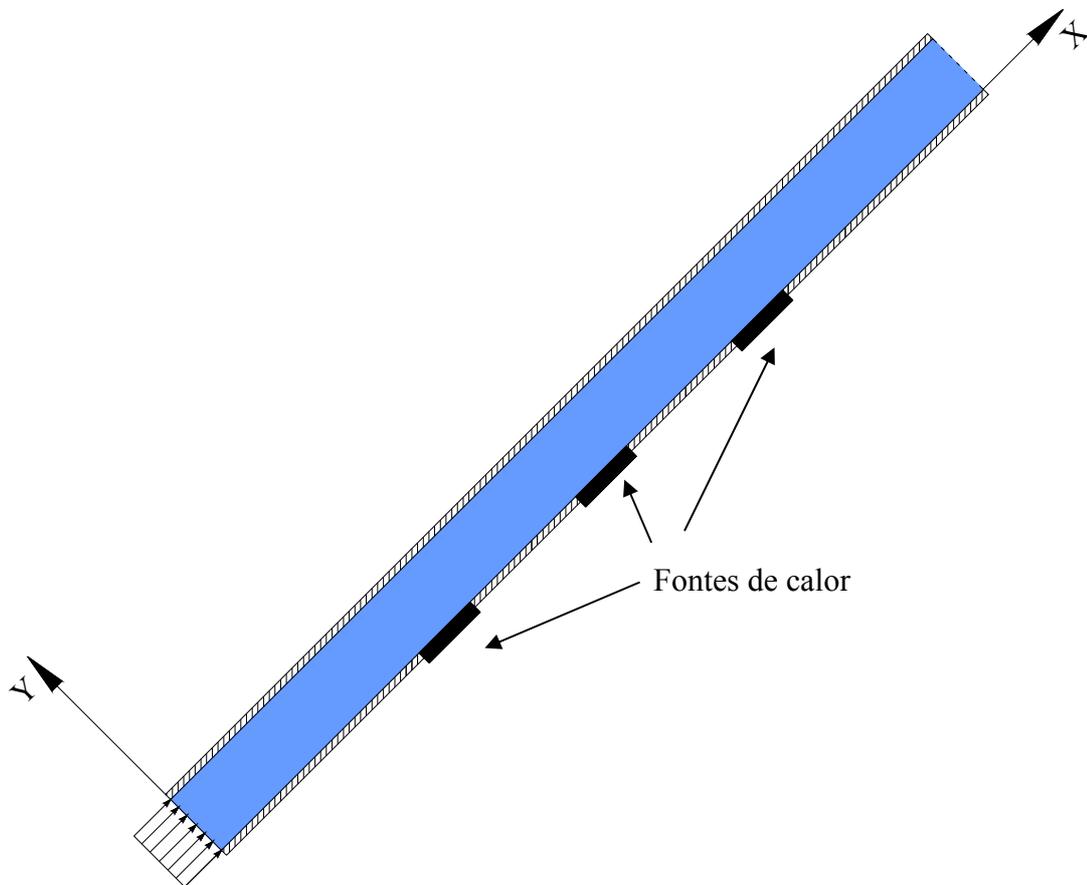


Figura 1.5 - Canal inclinado com três fontes discretas de calor (Caso 3.3).

As figuras 1.6 e 1.7 apresentam casos de cavidades quadrada e retangular, com cilindros internos rotativos cujas superfícies são mantidas isotérmicas fria ou quente. As superfícies superiores e inferiores das cavidades são isoladas termicamente, enquanto que as superfícies isotérmicas do lado esquerdo e direito têm, respectivamente, temperaturas baixa e elevada. A figura 1.6 apresenta a cavidade quadrada inclinada com um cilindro rotativo, sendo que o cilindro é aquecido e tem uma velocidade tangencial no sentido anti-horário. A figura 1.7 mostra o caso para uma cavidade retangular horizontal com dois cilindros rotativos. Várias situações são analisadas para a cavidade com dois cilindros, combinando-se os sentidos horário e anti-horário de rotação e as superfícies dos cilindros com temperaturas baixa ou alta.

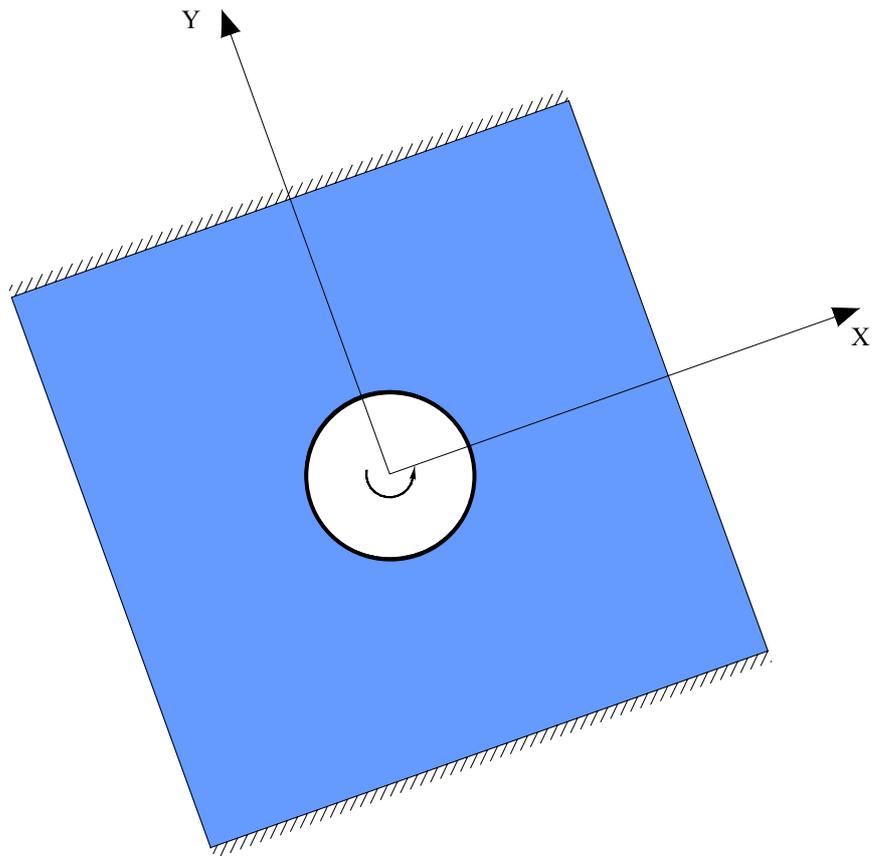


Figura 1.6 - Cavidade inclinada com um cilindro rotativo (Caso 4.1).

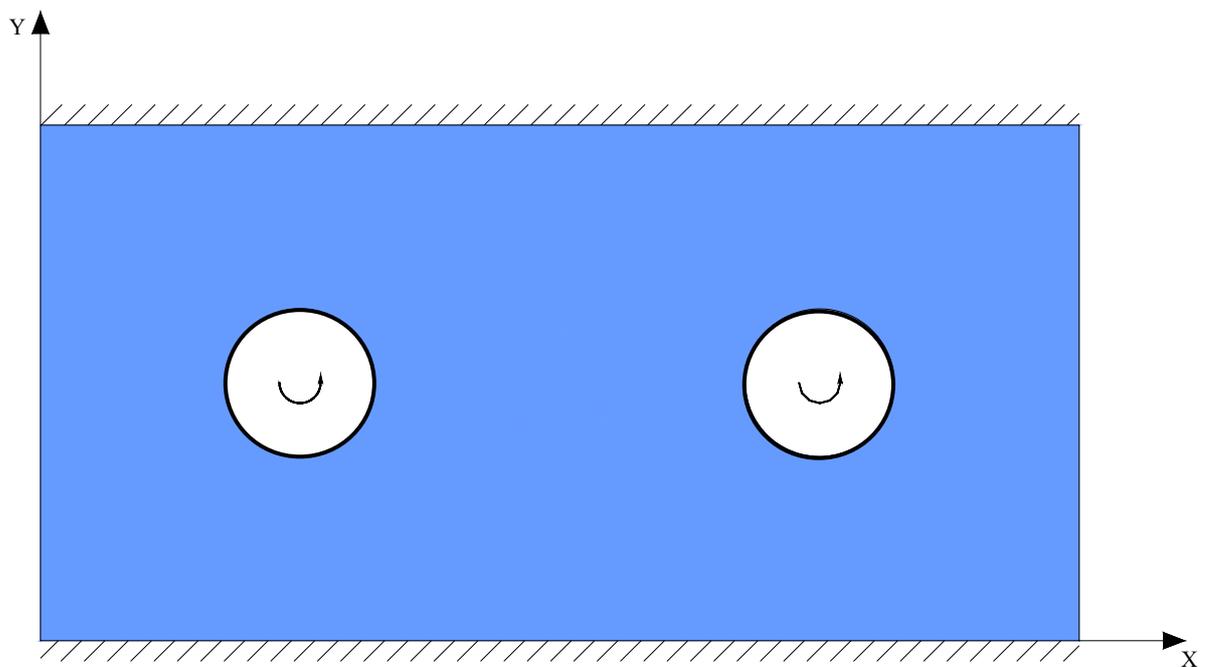


Figura 1.7 - Cavidade horizontal com dois cilindros rotativos (Caso 4.2).

1.4 – OBJETIVOS DO PRESENTE TRABALHO

Desenvolver o estudo numérico da convecção mista, laminar, bidimensional, em regime não-permanente, em diversas geometrias, utilizando o método de elementos finitos com a técnica de Petrov-Galerkin e o método da penalidade. Estabelecer relações entre os coeficientes de transferência de calor médio e local em função de parâmetros térmicos e geométricos. Mostrar o comportamento das isothermas, das linhas de corrente e dos vetores velocidades. Visualizar separações, recolamentos e recirculações do escoamento, os quais influenciam bastante na transferência de calor.

Em canais horizontais com degrau na entrada, aquecidos na superfície inferior, analisar o comportamento do escoamento que é influenciado fortemente por células de recirculação, separação e recolamento.

Determinar a taxa de troca de calor em canais com curva de 180°. Verificar a existência de oscilações do escoamento e quais suas correlações com os campos de velocidades e temperaturas.

Nos casos de canais com fontes discretas de calor, estudar os efeitos do número de fontes, a distância entre as fontes e a inclinação do canal.

Finalmente, nas cavidades com um ou dois cilindros rotativos internos, estudar o efeito do sentido e velocidade de rotação dos cilindros, no comportamento do escoamento e da transferência de calor.

1.5 – DELINEAMENTO DESTE TRABALHO

A apresentação do trabalho é dividida da seguinte forma:

Capítulo 1 - Introdução

Esse capítulo apresenta a revisão bibliográfica, os casos estudados, os objetivos do presente trabalho e o delineamento do trabalho.

Capítulo 2 - Formulação

Esse capítulo apresenta as equações governantes dos problemas de convecção mista, como também suas condições iniciais e de contorno.

Capítulo 3 - Método Numérico

Esse capítulo apresenta o desenvolvimento numérico para se obter soluções aproximadas das equações de conservação usando o método de elementos finitos, a técnica de Petrov-Galerkin e o método da penalidade.

Capítulo 4 - Validação e Estudo da Independência da Malha

Com a finalidade de validar o código computacional, esse capítulo faz várias comparações de resultados encontrados pelo código desenvolvido com resultados encontrados na literatura. É feito um estudo do refinamento da malha para verificar a convergência dos resultados.

Capítulo 5 - Resultados

Vários resultados são apresentados nesse capítulo, variando-se parâmetros térmicos e geométricos. As distribuições de temperatura, velocidade e outras características do escoamento são analisadas, como também os gradientes de temperatura médios e locais junto a diferentes superfícies.

Capítulo 6 - Conclusões e Sugestões

São apresentados os principais comentários e conclusões do trabalho referentes aos resultados obtidos e ao comportamento do método e malhas utilizados neste trabalho, como também sugestões para trabalhos futuros.

Apêndice A - Método de Galerkin

Nesse apêndice é desenvolvida a formulação fraca das equações de conservação através do uso dos resíduos ponderados no regime não-permanente e bidimensional.

Apêndice B - Integração Numérica

Devido às dificuldades de se integrar analiticamente funções racionais, é apresentada aqui uma técnica de integração capaz de avaliar integrais bastante complexas que surgem na avaliação das matrizes dos elementos. Apresentam-se também alguns pontos básicos que aparecem com o uso desta técnica, e em seguida o conceito de integração reduzida é abordado.

Apêndice C - Formulação do Método da Penalidade

Neste apêndice é mostrado o método da penalidade utilizado para aproximar o termo devido a pressão nas equações de Navier-Stokes. Foi utilizada a técnica dos mínimos quadrados para evitar-se oscilações numéricas.

Apêndice D - A Técnica de Petrov-Galerkin

Um estudo unidimensional e bidimensional da técnica de Petrov-Galerkin é apresentado para o regime permanente para a equação de convecção-difusão. Esta técnica visa contornar dificuldades específicas na solução numérica.

Apêndice E – Estudo da Conservação da Massa

O comportamento do divergente da velocidade é mostrado para vários casos e vários valores do número de Re, número de Grashof e inclinações. Um mapeamento do divergente é mostrado em todo o domínio.

Apêndice F – Estudo das Integrais de Linha para a Pressão

O tratamento da pressão na fronteira aberta é mostrado neste apêndice.

Apêndice G – Custos Computacionais e Convergência

Aqui são mostrados os tempos computacionais para vários casos, juntamente com os resíduos mínimos no tempo para a velocidade e temperatura.

Apêndice H – Estudo da Independência do Incremento de Tempo

Um estudo da convergência no que diz respeito à variação do incremento de tempo é realizado para diversas situações.

Capítulo 2

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE PROBLEMAS DE CONVECÇÃO MISTA

2.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas as equações de conservação que governam o escoamento laminar e bidimensional com convecção mista, como também as equações para os números de Nusselt local e médio para os casos apresentados anteriormente, ou seja, convecção mista em um canal horizontal com um degrau na entrada, convecção mista em um canal com uma curva de 180°, convecção mista em canais inclinados com uma, duas ou três fontes discretas de calor e, finalmente, convecção mista em cavidades inclinadas com um ou dois cilindros internos rotativos.

Inicialmente, mostra-se um esquema com as superfícies com condição de contorno prescrita, como também uma formulação geral dos casos na forma dimensional. Em seguida é feita uma adimensionalização geral, surgindo, portanto alguns números típicos do problema de transferência de calor por convecção mista, como o número de Reynolds (Re), número de Froude (Fr) e o número de Prandtl (Pr). Dando continuidade, cada caso é apresentado separadamente, dando-se ênfase nas condições iniciais, de contorno e nos parâmetros geométricos fixos e variados.

2.2 – ANÁLISE TEÓRICA

Todos os problemas aqui considerados tratam da convecção mista, laminar e não-permanente em diversas geometrias utilizando o ar como fluido. A figura 2.1 mostra um esquema geral dos casos estudados com os parâmetros geométricos e superfícies de contorno, sendo a altura H , o comprimento L e a inclinação γ , com as superfícies submetidas a diferentes condições de contorno. Posteriormente, os casos serão discriminados detalhadamente. As superfícies de contorno ficam definidas do seguinte modo:

S_{CF} → superfície cilíndrica isotérmica fria,

S_{CQ} → superfície cilíndrica isotérmica quente,

S_E → superfície de entrada,

S_F → superfície isotérmica fria,

S_{FQ} → superfícies da fonte de calor,

S_I → superfície isolada termicamente,

S_Q → superfície isotérmica quente,

e

S_S → superfície de saída.

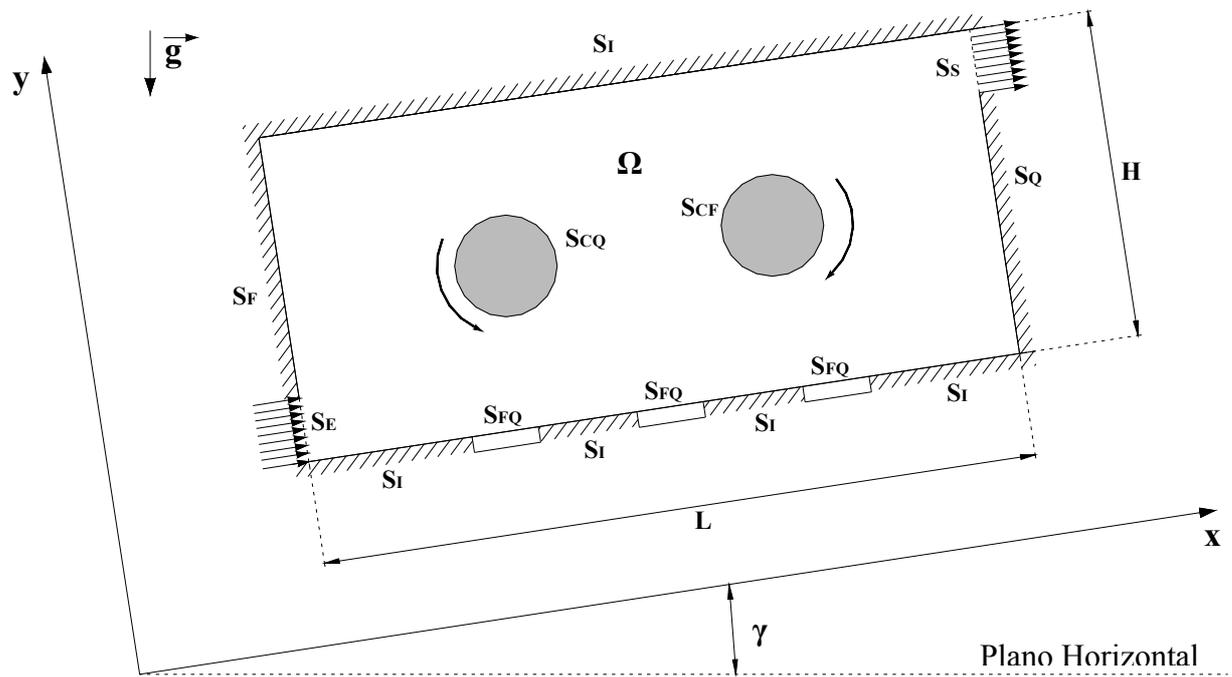


Figura 2.1 - Geometria geral dos casos estudados neste trabalho.

As seguintes considerações são feitas:

- i) regime não-permanente,
- ii) escoamento bidimensional e laminar,
- iii) escoamento incompressível,
- iv) as propriedades físicas do fluido são constantes com a temperatura, exceto a massa específica nos termos de empuxo,
- v) a função de dissipação que representa a taxa de dissipação da energia mecânica devido às tensões viscosas foi desprezada na equação da energia.

As equações governantes de conservação para a situação geral na figura 2.1, podem ser escritas da seguinte forma:

Equação de conservação da massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

Equação de conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + [1 + \beta(T - T_0)] g \sin(\gamma), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + [1 + \beta(T - T_0)] g \cos(\gamma), \quad (2.3)$$

Equação de conservação da energia:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (2.4)$$

sendo u e v as componentes de velocidades nas direções x e y , respectivamente, T a temperatura, T_0 a temperatura de referência ($T_0 = T_c$), g a aceleração da gravidade, p a pressão, t o tempo, γ o ângulo de inclinação da geometria, ν a viscosidade cinemática do fluido, ρ_0 a massa específica do fluido, α a difusividade térmica do fluido e β o coeficiente de expansão térmica do fluido, dado por $\beta = (\rho - \rho_0) / [\rho_0(T - T_0)]$.

2.3 – ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Generalizando-se a análise teórica, os seguintes parâmetros adimensionais são definidos:

$$X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{u}{U_0}, \quad V = \frac{v}{U_0}, \quad P = \frac{p}{\rho_0 U_0^2}, \quad \tau = \frac{t}{(H/U_0)}, \quad \theta = \frac{(T - T_0)}{\Delta T}, \quad (2.5)$$

sendo H o comprimento característico; U e V as componentes de velocidades adimensionais nas direções X e Y , respectivamente; U_0 a velocidade de referência; ΔT a diferença de

temperaturas de referência; P a pressão adimensional; τ o tempo adimensional e θ a temperatura adimensional.

Para os casos onde existe fontes de calor com fluxo de calor q'' imposto na superfície S_{FQ} , ΔT é definido da seguinte forma:

$$\Delta T = \frac{q'' H}{k}, \quad (2.6)$$

sendo k a condutividade térmica do fluido.

Para os casos restantes sem fontes de calor, ΔT é definido como:

$$\Delta T = T_h - T_c, \quad (2.7)$$

sendo que T_c é a temperatura baixa constante e T_h é a temperatura alta constante.

Portanto, substituindo as equações (2.5) em (2.1) a (2.4), as equações de conservação adimensionalizadas podem ser escritas da seguinte forma:

Equação de conservação da massa:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (2.8)$$

Equação de conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \frac{\theta}{\text{Fr}} \text{sen}(\gamma), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{\theta}{\text{Fr}} \text{cos}(\gamma), \quad (2.10)$$

Equação de conservação da energia:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right), \quad (2.11)$$

sendo

$$\text{Fr o número de Froude:} \quad \text{Fr} = \frac{\text{Re}^2}{\text{Gr}}, \quad (2.12)$$

$$\text{Pr o número de Prandtl:} \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad (2.13)$$

$$\text{Gr o número de Grashof:} \quad \text{Gr} = \frac{\beta g \Delta T H^3}{\nu^2}, \quad (2.14)$$

$$\text{Re o número de Reynolds:} \quad \text{Re} = \frac{U_0 H}{\nu}. \quad (2.15)$$

O número de Nusselt local em uma superfície S qualquer é definido como:

$$\text{Nu}_L = - \frac{H}{\Delta T} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_S, \quad (2.16)$$

sendo n a direção da normal à superfície S.

Substituindo os parâmetros adimensionais dados pela equação (2.5) e a diferença de temperaturas de referência dadas por (2.6) ou (2.7), segue que os números de Nusselt locais são:

$$\text{Nu}_L = - \frac{1}{\theta_s} \quad (\text{casos com fonte de calor}), \quad (2.17)$$

$$\text{Nu}_L = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} \right|_S \quad (\text{casos sem fonte de calor}). \quad (2.18)$$

Assim sendo, os números de Nusselt médios ao longo de S podem ser escritos como:

$$\text{Nu} = - \frac{1}{S} \int_S \frac{1}{\theta} ds \quad (\text{casos com fonte de calor}), \quad (2.19)$$

$$\text{Nu} = - \frac{1}{S} \int_S \frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} ds \quad (\text{casos sem fonte de calor}). \quad (2.20)$$

2.4 – CASOS ESTUDADOS NESTE TRABALHO

São eles:

Caso 1 - Convecção mista em um canal horizontal com um degrau na entrada,

Caso 2 - Convecção mista em um canal com uma curva de 180°,

Caso 3 - Convecção mista em canais inclinados com fontes discretas de calor,

Caso 4 - Convecção mista em canais inclinados com fontes de calor.

2.4.1 – Caso 1: Convecção Mista em um Canal Horizontal com um Degrau na Entrada

A figura 2.2 mostra a geometria e as superfícies com condições de contorno prescritas. Trata-se de um canal horizontal ($\gamma = 0^\circ$). A origem do eixo está localizada no topo do degrau sendo H a altura, L o comprimento, H_e a altura da abertura na entrada e H_d a altura do degrau.

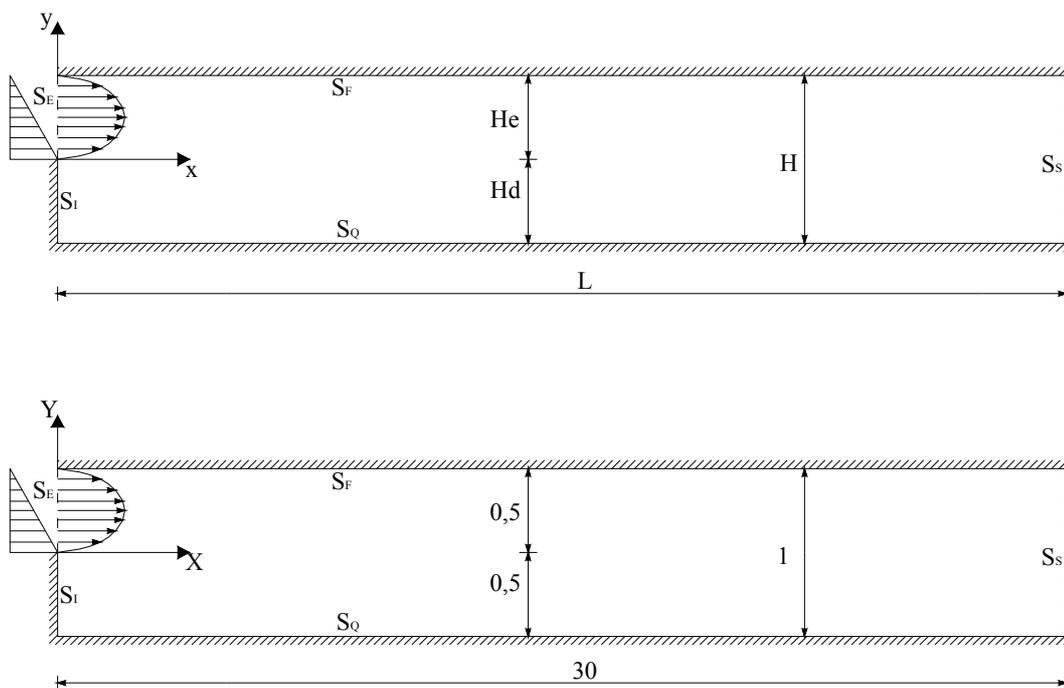


Figura 2.2 - Canal com um degrau na entrada.

Para todos os casos estudados neste problema, os valores dos parâmetros geométricos H , H_e , H_d e L quando adimensionalizados são iguais a 1; 0,5; 0,5 e 30, respectivamente. A parede superior é resfriada a uma temperatura uniforme T_c , enquanto que a parede inferior é aquecida a uma temperatura uniforme T_h . A parede do degrau é isolada. Na entrada, o escoamento tem um perfil parabólico de velocidades totalmente desenvolvido e um perfil de temperatura linear. Na saída do canal, o escoamento é considerado ser totalmente desenvolvido. Portanto, neste trabalho, os gradientes de velocidade e temperatura são nulos na fronteira. Um tratamento especial é dado à pressão na saída em cada passo de tempo. Isso é mencionado no capítulo 3 quando integrais de linha de pressão aparecem no equacionamento e explicado em detalhes no apêndice F. Em todas as paredes se considera a condição de não-eskorregamento, isto é, as velocidades são nulas nas paredes.

As condições iniciais e de contorno adimensionais são dadas por:

i) Condições iniciais ($\tau = 0$):

$$\text{Em } \Omega: \quad P = 1, U = V = 0, \theta = 0, \quad (2.21)$$

ii) Condições de contorno ($\tau > 0$):

$$\text{Em } S_E: \quad U = 24Y(0,5-Y), V = 0, \theta = 1 - 2Y,$$

$$\text{Em } S_F: \quad U = V = 0, \theta = 0,$$

$$\text{Em } S_Q: \quad U = V = 0, \theta = 1, \quad (2.22)$$

$$\text{Em } S_I: \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0,$$

$$\text{Em } S_S: \quad \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0,$$

sendo a velocidade de referência U_0 igual a velocidade média do fluido na entrada.

2.4.2 – Caso 2: Convecção Mista em um Canal com uma Curva 180°

Neste problema estuda-se a convecção mista em uma curva horizontal ($\gamma = 0^\circ$) de 180° com os parâmetros geométricos e superfícies de contorno mostrados na figura 2.3. O domínio tem altura H , comprimento L e largura W (não mostrada na figura). O comprimento L é tomado longo, $L = 20H$, para ser possível estudar a recuperação do escoamento. Os ramos superior e inferior têm altura H . A espessura da placa é e . Os parâmetros geométricos h , L , H , e e são, respectivamente, iguais a 2,1; 20; 1 e 0,1, depois da adimensionalização. A razão $e/H = 0,1$ é pequena e pode ser tomada, por exemplo, como representativa para um valor de um sistema eletrônico típico. Os valores W/e e W/H são suficientemente altos para garantir que o escoamento na região central possa ser considerado como bidimensional. Para esta geometria estudada, a condição de não escorregamento é aplicada em todas as paredes. Um perfil parabólico de velocidades $u = 6yU_0(1-y)$, onde U_0 é a velocidade média, é aplicado na entrada do canal inferior. A pressão é retida na formulação para se considerar a condição de contorno na saída. Para as condições de contorno térmicas, a parede superior do canal superior é adiabática. A parede superior da placa intermediária está sujeita a uma temperatura uniforme de aquecimento T_h , e as paredes restantes a uma temperatura uniforme de resfriamento T_c . Um perfil de temperatura uniforme igual a T_c é aplicado na entrada do canal.

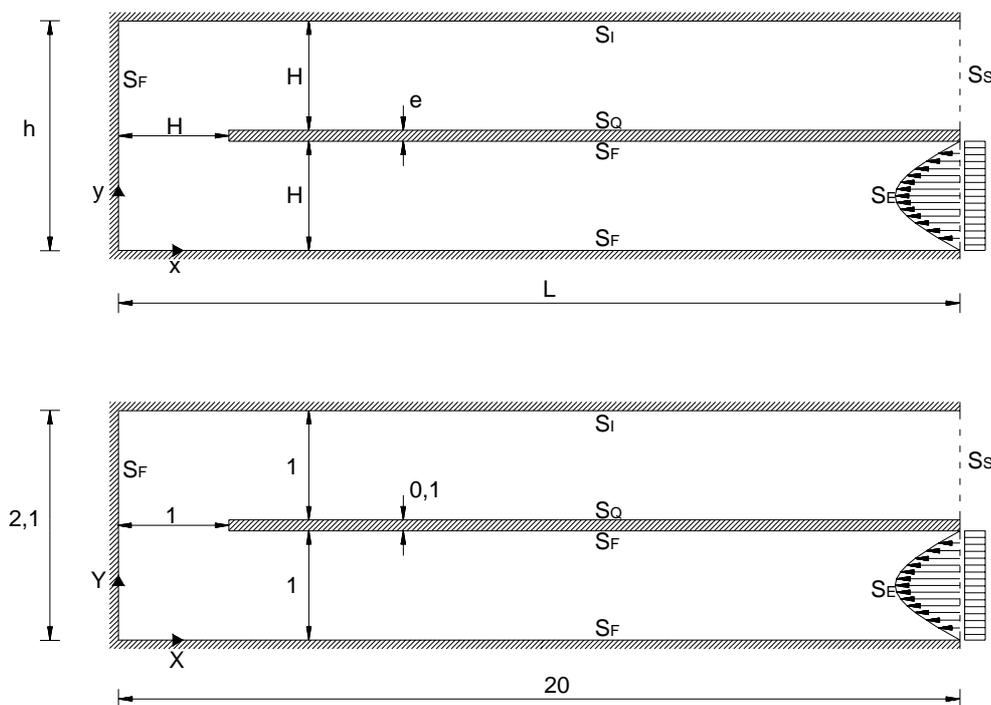


Figura 2.3 - Canal com uma curva de 180°.

As condições iniciais e de contorno adimensionais são dadas por:

i) Condições iniciais ($\tau = 0$):

$$\text{Em } \Omega: \quad P = 1, U = V = 0, \theta = 0, \quad (2.23)$$

ii) Condições de contorno ($\tau > 0$):

$$\text{Em } S_E: \quad U = 6Y(1-Y), V = 0, \theta = 0,$$

$$\text{Em } S_F: \quad U = V = 0, \theta = 0,$$

$$\text{Em } S_Q: \quad U = V = 0, \theta = 1, \quad (2.24)$$

$$\text{Em } S_I: \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0,$$

$$\text{Em } S_S: \quad \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0,$$

sendo a velocidade de referência U_0 igual a velocidade média.

2.4.3 – Caso 3: Convecção Mista em Canais com Fontes Discretas de Calor

Estuda-se a convecção mista em canais retangulares com altura H e comprimento L com fontes de calor na superfície inferior. A figura 2.4 mostra uma situação geral. Entretanto, tanto os parâmetros geométricos, quanto o número e posição das fontes serão variados no estudo. Na entrada são impostos perfis uniformes de velocidade e temperatura, U_0 e $T_0 = T_c$, respectivamente. A superfície inferior é mantida adiabática, exceto nos locais das fontes de calor onde um fluxo de calor q'' é prescrito. A superfície superior tem uma temperatura uniforme baixa T_c . Na saída o escoamento é considerado totalmente desenvolvido. A razão de aspecto RA é definida como L/H . Três situações são consideradas conforme a variação do número de fontes:

Caso 3.1 - Canal inclinado com uma fonte discreta de calor: Uma fonte de calor constante q'' de comprimento B está localizada em x_1 na superfície inferior do canal. Em todo o estudo deste problema, a geometria apresenta $x_1 = 5H$, $B = H$ e $L = 15H$.

Caso 3.2 - Canal horizontal com duas fontes discretas de calor: A inclinação γ é nula, ou seja, nesta situação o canal é horizontal. Duas fontes de calor constantes q'' de comprimento B são colocadas nas distâncias x_1 e x_2 na superfície inferior do canal. Em todo este caso, a geometria estudada tem $x_1 = 5H$, $x_2 = 7H, 8H, \text{ e } 9H$, caracterizando então três distâncias para a segunda fonte, sendo $B = H$ e $L = 15H$.

Caso 3.3 - Canal inclinado com três fontes discretas de calor: Três fontes de calor constantes q'' de comprimento B estão localizadas na parede inferior em x_1 , x_2 e x_3 . Neste caso, a geometria estudada tem $x_1 = 6,75H$, $x_2 = 14,50H$, $x_3 = 22,25H$, $B = H$ e $L = 30$.

As condições iniciais e de contorno adimensionais são dadas por:

i) Condições iniciais ($\tau = 0$):

$$\text{Em } \Omega: \quad P = 1, U = V = 0, \theta = 0, \quad (2.25)$$

ii) Condições de contorno ($\tau > 0$):

$$\text{Em } S_E: \quad U = 1, V = 0, \theta = 0,$$

$$\text{Em } S_I: \quad U = V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0,$$

$$\text{Em } S_{FQ}: \quad U = V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = -1, \quad (2.26)$$

$$\text{Em } S_F: \quad U = V = 0, \theta = 0,$$

$$\text{Em } S_S: \quad \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0,$$

sendo a velocidade de referência U_0 igual a velocidade de entrada do canal.

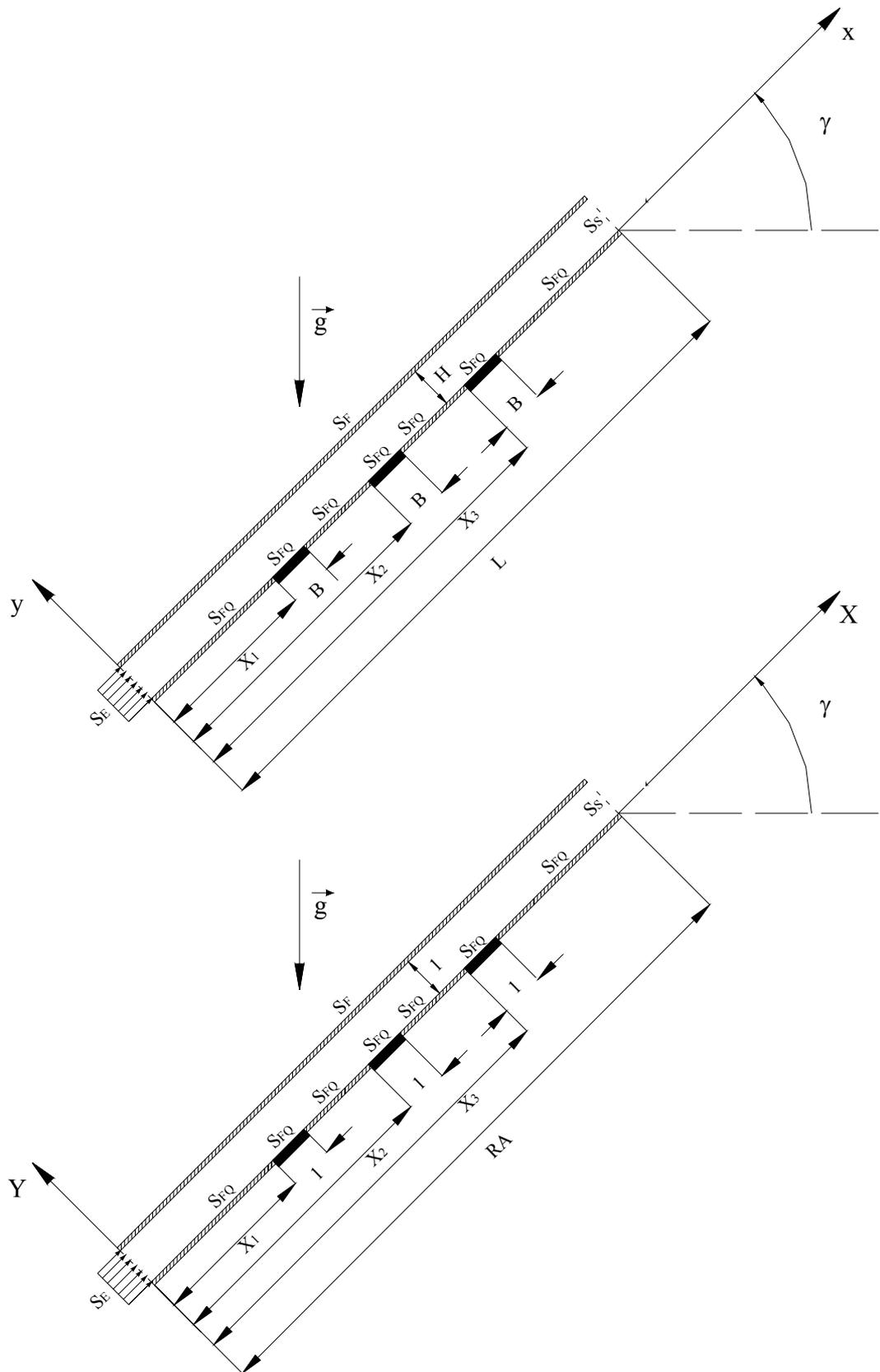


Figura 2.4 - Canal retangular com fontes de calor.

2.4.4 – Caso 4: Convecção Mista em Cavidades com Cilindros Rotativos

A figura 2.5 apresenta uma geometria geral para o estudo da convecção mista em cavidades com cilindros rotativos com superfícies isotérmicas. A cavidade tem altura H e comprimento L . As superfícies superior e inferior são isoladas termicamente, enquanto que as superfícies isotérmicas verticais esquerda e direita têm, respectivamente, temperaturas baixa e quente. Neste problema, o número de cilindros varia (1 ou 2), como também a razão de aspecto $RA = L/H$ (1 ou 2) e o ângulo de inclinação γ . As superfícies isotérmicas cilíndricas são mantidas quente ou fria. No capítulo referente a resultados, serão apresentadas as combinações realizadas. No momento, é importante mostrar as duas situações no que diz respeito ao número de cilindros, que são:

Caso 4.1 - Convecção mista em uma cavidade quadrada inclinada com um cilindro interno rotativo:

Neste problema somente o cilindro aquecido será considerado. A razão de aspecto (RA) é igual a 1. O sentido da velocidade tangencial é anti-horário. Leva-se aqui em consideração o estudo do efeito do ângulo de inclinação γ .

Caso 4.2 - Convecção mista em uma cavidade retangular horizontal com dois cilindros internos rotativos:

Nesta situação um cilindro tem superfície isotérmica a uma temperatura alta T_h e o outro a uma temperatura baixa T_c . Os cilindros estão distanciados de d . Os sentidos de rotação dos cilindros como também suas temperaturas são combinadas, gerando portanto outros problemas. Isto está mostrado no capítulo de resultados (capítulo 5). A razão de aspecto RA é igual a 2. Aqui o ângulo de inclinação γ é igual a 0° .

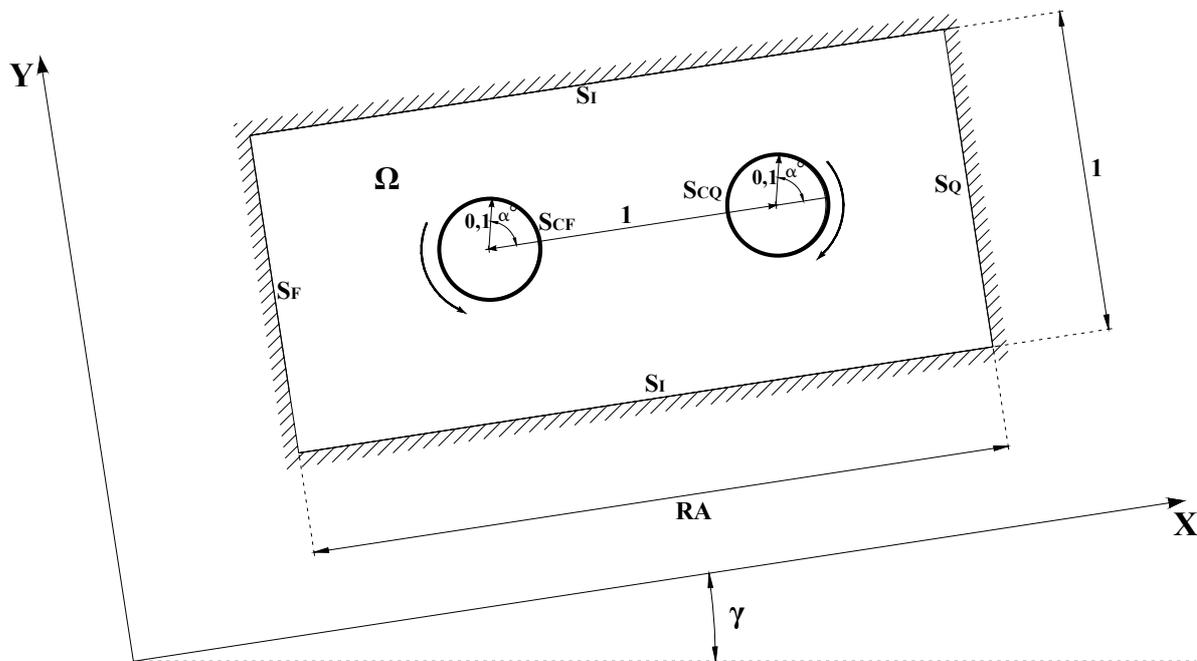
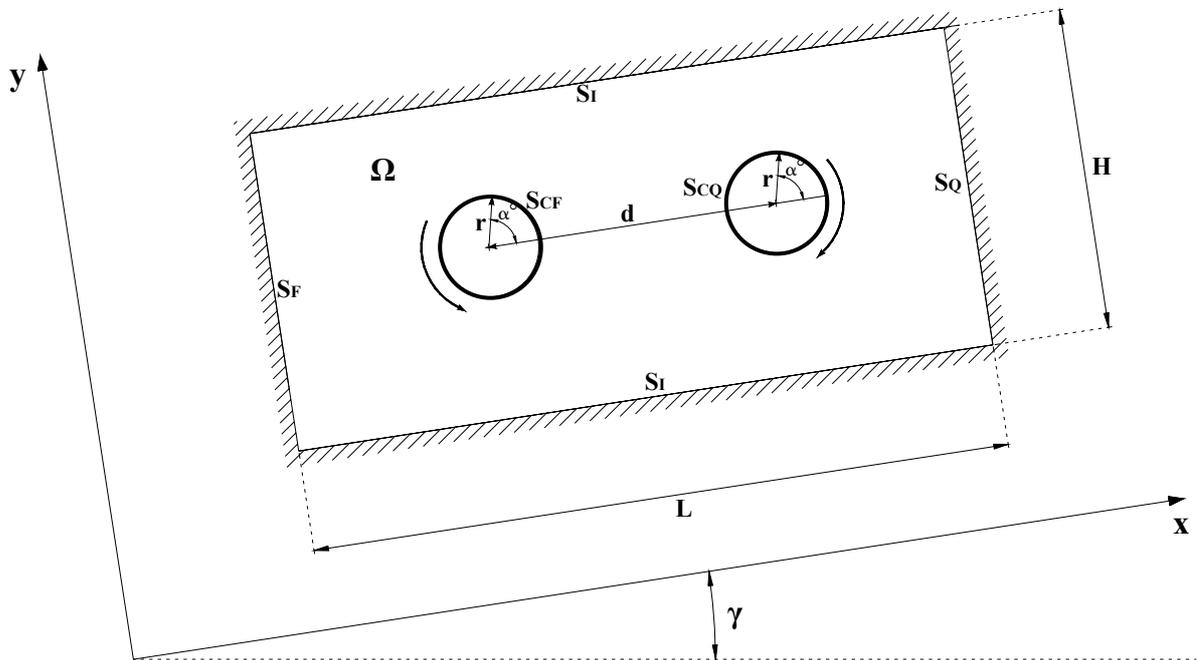


Figura 2.5 - Cavidade com cilindros rotativos.

As condições iniciais e de contorno adimensionais são dadas por:

i) Condições iniciais ($\tau = 0$):

$$\text{Em } \Omega: \quad P = 1, U = V = 0, \theta = 0, \quad (2.27)$$

ii) Condições de contorno ($\tau > 0$):

$$\text{Em } S_I: \quad U = V = 0, \partial\theta/\partial Y = 0,$$

$$\text{Em } S_F: \quad U = V = 0, \theta = 0,$$

$$\text{Em } S_Q: \quad U = V = 0, \theta = 1, \quad (2.28)$$

$$\text{Em } S_{CF}: \quad \theta = 0, U = +\sin \alpha^\circ, V = -\cos \alpha^\circ \quad (\text{sentido horário}),$$

$$\text{Em } S_{CQ}: \quad \theta = 1, U = -\sin \alpha^\circ, V = +\cos \alpha^\circ \quad (\text{sentido anti-horário}),$$

sendo a velocidade de referência $U_0 = r\omega$, r o raio do cilindro e ω a velocidade angular dos cilindros. As condições de contorno em S_{CF} e S_{CQ} para as velocidades U e V fazem com que o módulo da resultante sobre a superfície cilíndrica seja sempre igual a 1. Portanto, a variação do número Re de Reynolds reflete a mudança também da intensidade da velocidade de rotação do cilindro. Este procedimento pode ser encontrado no artigo de Fu et al. (1994).

Capítulo 3

MÉTODO NUMÉRICO

3.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo será desenvolvido o método numérico para a solução das equações obtidas no capítulo 2, isto é, as equações (2.8) a (2.11). O método numérico utilizado é o método de elementos finitos com aplicação das perturbações de Petrov-Galerkin nos termos convectivos das equações de conservação da quantidade de movimento e da energia, como também a aplicação da técnica da penalidade para se aproximar os termos de pressão nas equações de conservação da quantidade de movimento em termos de velocidades somente. Também será apresentada a técnica da integração numérica, pois as integrais que surgem apresentam cálculos analíticos impraticáveis. Este capítulo faz uso da aproximação de Galerkin, da integração reduzida, da aproximação pelo método da penalidade, da técnica de Petrov-Galerkin e da retenção das integrais de linha para a pressão. Estes cinco assuntos estão discutidos nos apêndices A, B, C, D e F, respectivamente, e têm por objetivo:

Apêndice A – utilizar o teorema de Green para diminuir a ordem das derivadas nas equações de conservação da quantidade de movimento e da energia, resultando em uma formulação fraca. Finalmente, as mesmas funções usadas nas aproximações das variáveis, são também usadas nos resíduos ponderados.

Apêndice B – para cada elemento, solucionar numericamente integrais cujos integrandos possuem funções racionais cujas soluções analíticas geralmente são impossíveis.

Apêndice C – desenvolver a formulação da função da penalidade utilizada no cálculo da pressão nas equações de quantidade de movimento utilizando a lei de viscosidade de Stokes. Portanto, o termo de pressão passa a não constar mais na formulação. Comentar sobre o método dos mínimos quadrados utilizado na solução das possíveis ocorrências de pressões oscilatórias.

Apêndice D – contornar as dificuldades específicas na solução numérica de equações diferenciais cujos termos convectivos apresentam uma natureza não simétrica.

Apêndice F – mostrar um tratamento dado às equações de conservação da quantidade de movimento que apresentam integrais de linha para as condições de contorno de pressão nas fronteiras abertas, quando na obtenção da formulação fraca. Esse procedimento é referido na literatura como retenção das integrais de linha para a pressão na formulação.

3.2 – GENERALIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO

As equações de conservação adimensionais que governam os problemas a serem estudados neste trabalho podem ser escritas como:

Equação de conservação da massa:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (3.1)$$

Equação de conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + F_1, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + F_2, \quad (3.3)$$

Equação de conservação da energia:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \varepsilon_2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right), \quad (3.4)$$

sendo ε_1 , ε_2 , F_1 e F_2 parâmetros adimensionais que estão mostrados na tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Coeficientes para generalização das equações de conservação.

Casos	ε_1	ε_2	F_1	F_2
1	$\frac{1}{Re}$	$\frac{1}{Re Pr}$	0	$\frac{Gr}{Re^2} \theta$
2	$\frac{1}{Re}$	$\frac{1}{Re Pr}$	0	$\frac{Gr}{Re^2} \theta$
3	$\frac{1}{Re}$	$\frac{1}{Re Pr}$	$\frac{Gr}{Re^2} \theta \text{sen}(\gamma)$	$\frac{Gr}{Re^2} \theta \text{cos}(\gamma)$
4	$\frac{1}{Re}$	$\frac{1}{Re Pr}$	$\frac{Gr}{Re^2} \theta \text{sen}(\gamma)$	$\frac{Gr}{Re^2} \theta \text{cos}(\gamma)$

Caso 1 - Convecção mista em um canal horizontal com um degrau na entrada,

Caso 2 - Convecção mista em um canal com uma curva de 180°,

Caso 3 - Convecção mista em canais inclinados com fontes discretas de calor,

Caso 4 - Convecção mista em cavidades inclinadas com cilindros internos rotativos.

No caso 4, o número de Reynolds será redefinido no capítulo 5, quando os resultados forem apresentados. Por enquanto, para que haja simplificação na formulação, ele será considerado o mesmo para todos os casos.

3.3 – DESENVOLVIMENTO

Empregando-se agora a aproximação de Galerkin (apêndice A), a integração reduzida (apêndice B), a aproximação pelo método da penalidade (apêndice C) e a técnica de Petrov-Galerkin (apêndice D), nas equações de conservação (3.1) a (3.4), obtém-se a seguinte formulação fraca:

$$\int_{\Omega} \left[N_i \frac{\partial U}{\partial \tau} + \varepsilon_1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega}^R \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left[(N_i + P_{i1}) \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + N_i F_1 \right] d\Omega - \int_{\Gamma_0} N_i P n_x d\Gamma, \quad (3.5)$$

$$\int_{\Omega} \left[N_i \frac{\partial V}{\partial \tau} + \varepsilon_1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega}^R \lambda \frac{\partial N_i}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left[(N_i + P_{i1}) \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + N_i F_2 \right] d\Omega - \int_{\Gamma_0} N_i P n_y d\Gamma, \quad (3.6)$$

$$\int_{\Omega} \left[N_i \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right] d\Omega = \int_{\Omega} (N_i + P_{i2}) \left(U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_1} N_i q d\Gamma, \quad (3.7)$$

com as seguintes relações:

$$P_{ij} = k_j \left(U \frac{\partial N_i}{\partial X} + V \frac{\partial N_i}{\partial Y} \right) \text{ com } j = 1, 2, \quad (3.8)$$

$$k_j = \frac{\alpha_j \bar{h}}{|\mathbf{V}|}, \quad (3.9)$$

$$\alpha_j = \coth \frac{\gamma_j}{2} - \frac{2}{\gamma_j}, \quad (3.10)$$

$$\gamma_j = \frac{|\mathbf{V}| \bar{h}}{\varepsilon_j}; \quad \varepsilon_1 \text{ e } \varepsilon_2 \text{ conforme tabela 3.1,} \quad (3.11)$$

sendo P_{ij} as perturbações de Petrov-Galerkin, α_j a difusão de equilíbrio, $|\mathbf{V}|$ a velocidade média no elemento, \bar{h} o tamanho médio do elemento, N_i as funções de forma dos nós, P as pressões adimensionais nas fronteiras abertas e q os fluxos adimensionais nas fontes.

Pode-se notar que até agora foram usadas coordenadas globais conforme mostrado na figura 3.1. Seria extremamente trabalhoso o desenvolvimento de um código computacional utilizando coordenadas globais. Para contornar essa dificuldade foi adotado o conceito de transformação isoparamétrica introduzida primeiramente por Taig (1961) e depois generalizada por Irons (1966).

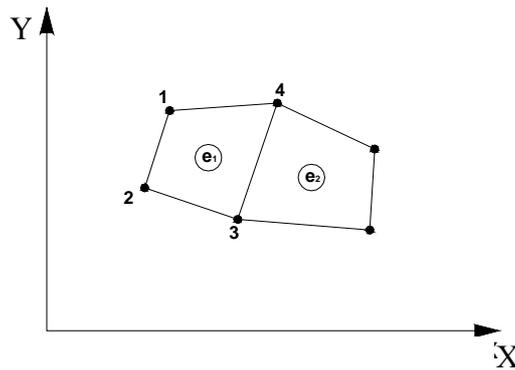


Figura 3.1 - Elemento geral quadrilátero com 4 nós em coordenadas globais.

A figura 3.2 mostra a transformação do sistema de coordenadas globais para coordenadas locais, utilizando elemento quadrilátero com 4 nós.

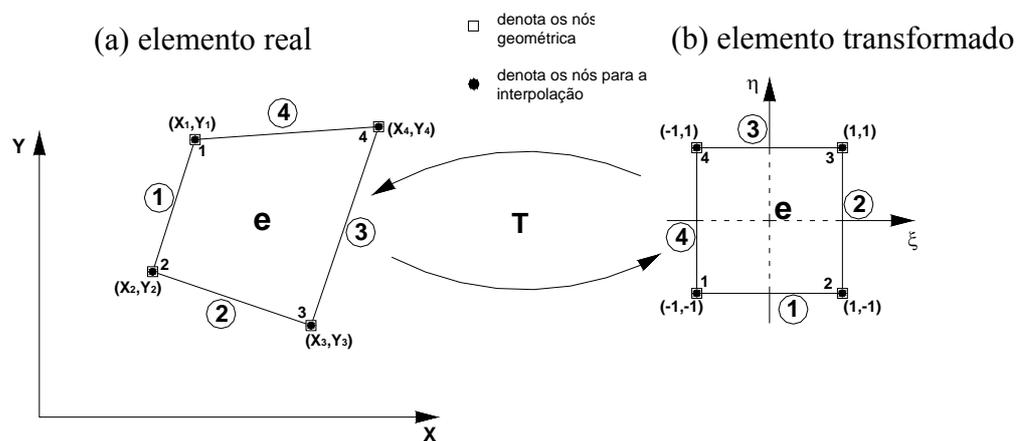


Figura 3.2 - Transformação isoparamétrica de um elemento quadrilátero com 4 nós.

As integrais que aparecem nas equações (3.5) a (3.7) podem ser transformadas de tal maneira que:

$$\iint_e F \left(U(X, Y), V(X, Y), \frac{\partial U}{\partial X}, \frac{\partial U}{\partial Y}, \frac{\partial V}{\partial X}, \frac{\partial V}{\partial Y} \right) dXdY = \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} F \left(U(X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)), V(X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)), \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial X(\xi, \eta)}, \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial Y(\xi, \eta)}, \frac{\partial V(\xi, \eta)}{\partial X(\xi, \eta)}, \frac{\partial V(\xi, \eta)}{\partial Y(\xi, \eta)} \right) |\det J| d\xi d\eta. \quad (3.12)$$

A transformação isoparamétrica T pode ser obtida fazendo-se:

$$T \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_e} N_i(\xi, \eta) \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} \text{ ou,} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{N_e} N_i(\xi, \eta) X_i, \\ Y &= \sum_{i=1}^{N_e} N_i(\xi, \eta) Y_i, \end{aligned} \quad (3.14)$$

sendo N_e o número de nós no elemento e e $N_i(\xi, \eta)$ as funções de forma para o elemento transformado no quadrado $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$.

Existem algumas vantagens muito importantes neste procedimento: uma vez que as coordenadas do sistema global (X_i, Y_i) e as funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ estiverem definidas, o elemento fica definido e dada qualquer função $\phi(X, Y)$, pode-se descobrir as derivadas de ϕ com respeito a X e Y no sistema transformado imediatamente. Entretanto precisa-se das derivadas no plano XY . Para obtê-las, aplica-se a regra da cadeia. Dada uma função ϕ qualquer em um ponto dentro do elemento, vem que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \xi}, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \eta}.$$

Na forma matricial, a equação (3.15) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial X} \\ \frac{\partial \phi}{\partial Y} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

A matriz do Jacobiano da transformação é definida como sendo:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Como o que é de interesse são as derivadas com relação às coordenadas em X e Y, logo:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial X} \\ \frac{\partial \phi}{\partial Y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \eta} & -\frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial X}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

ou

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{1}{\det J} \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right), \quad (3.19)$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{1}{\det J} \left(-\frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right).$$

Observando os elementos da figura 3.2, a transformação isoparamétrica é dada por:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) X_i \\ \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) Y_i \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

As funções de forma, conforme apêndice B, para o elemento transformado são:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pode-se notar que:

$$\begin{bmatrix} X(-1,-1) \\ Y(-1,-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Logo, o nó 1 no elemento transformado é mapeado para o nó 1 no elemento real, e assim por diante para os nós 2, 3 e 4. Examinando o efeito da transformação nos lados dos

elementos, seja $\eta = -1$, o que sugere a linha entre os nós 1 e 2 no elemento transformado. Portanto, a transformação se reduz a:

$$X = \frac{1}{2}(1 - \xi)X_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)X_2$$

e

$$Y = \frac{1}{2}(1 - \xi)Y_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)Y_2.$$
(3.23)

Manipulando (3.23) e eliminando ξ , vem:

$$\text{Lado 1}(1 - 2, \eta = -1) \quad Y = \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right) X + \frac{X_2 Y_1 - X_1 Y_2}{X_2 - X_1}.$$
(3.24)

A equação (3.24) é a equação da linha reta entre os pontos (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) . Fazendo-se o mesmo para os outros nós vem:

$$\text{Lado 2}(2 - 3, \xi = 1) \quad Y = \left(\frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2} \right) X + \frac{X_3 Y_2 - X_2 Y_3}{X_3 - X_2},$$
(3.25)

$$\text{Lado 3}(3 - 4, \eta = 1) \quad Y = \left(\frac{Y_3 - Y_4}{X_3 - X_4} \right) X + \frac{X_3 Y_4 - X_4 Y_3}{X_3 - X_4},$$
(3.25)

$$\text{Lado 4}(4 - 1, \xi = -1) \quad Y = \left(\frac{Y_4 - Y_1}{X_4 - X_1} \right) X + \frac{X_4 Y_1 - X_1 Y_4}{X_4 - X_1}.$$
(3.26)

Se for tomado, por exemplo, o ponto $(\xi, \eta) = (0, 0)$, no elemento quadrilateral, ele é mapeado para o centróide do elemento real $\left[(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4, (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)/4 \right]$. Portanto, todo o interior do elemento transformado pode ser mapeado para o interior do elemento real.

Assim, o Jacobiano da transformação e as derivadas das funções de forma são encontrados. Então:

$$J = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} X_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} X_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} Y_i \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

de tal maneira que

$$\det J = \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} X_i \right) \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} Y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Y_i \right) \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} X_i \right). \quad (3.28)$$

Logo, as derivadas de uma função ϕ podem ser escritas, trocando-se os índices i por j , por conveniência, como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{1}{\det J} \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{1}{\det J} \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (3.29)$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = -\frac{1}{\det J} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} X_i \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{1}{\det J} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} X_i \right) \frac{\partial \phi}{\partial \eta}. \quad (3.30)$$

A função ϕ pode ser U, V, θ, P^* onde:

$$U = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) U_i, \quad (3.31)$$

$$V = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) V_i, \quad (3.32)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \theta_i, \quad (3.33)$$

$$P^* = \sum_{i=1}^4 M_i(\xi, \eta) P_i. \quad (3.34)$$

Retomando as equações (3.5) a (3.7), lembrando que no caso bidimensional $d\Omega = dXdY$, as integrais dos elementos a serem calculadas são:

$$\text{Integrais da Massa} \begin{cases} I_1 = \iint_e N_i \frac{\partial U}{\partial \tau} \det J d\xi d\eta, \\ I_2 = \iint_e N_i \frac{\partial V}{\partial \tau} \det J d\xi d\eta, \\ I_3 = \iint_e N_i \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \det J d\xi d\eta, \end{cases} \quad (3.35)$$

$$\text{Integrais da rigidez} \begin{cases} I_4 = \iint_e \varepsilon_1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \det J d\xi d\eta, \\ I_5 = \iint_e \varepsilon_1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \det J d\xi d\eta, \\ I_6 = \iint_e \varepsilon_2 \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \det J d\xi d\eta, \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\text{Integrais dos termos convectivos} \begin{cases} I_7 = \iint_e \left[(N_i + P_{i1}) \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] \det J d\xi d\eta, \\ I_8 = \iint_e \left[(N_i + P_{i1}) \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] \det J d\xi d\eta, \\ I_9 = \iint_e \left[(N_i + P_{i2}) \left(U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right] \det J d\xi d\eta, \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\text{Integrais de Redução} \begin{cases} I_{10} = \int^R \int_e \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \det J d\xi d\eta, \\ I_{11} = \int^R \int_e \lambda \frac{\partial N_i}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \det J d\xi d\eta, \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\text{Integrais das Forças de Campo} \begin{cases} I_{12} = \iint_e N_i F_1 \det J d\xi d\eta, \\ I_{13} = \iint_e N_i F_2 \det J d\xi d\eta. \end{cases} \quad (3.39)$$

As integrais que contêm as contribuições originadas das forças gravitacionais podem ser escritas como:

$$I_{12} = \iint_e N_i F_1 dXdY = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i F_1 \det J d\xi d\eta \quad (3.40)$$

e

$$I_{13} = \iint_e N_i F_2 dXdY = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i F_2 \det J d\xi d\eta. \quad (3.41)$$

F_1 e F_2 são coeficientes dados na tabela 3.1 e eles dependem dos valores das temperaturas nos nós, que são obtidos através da equação da energia.

A discretização espacial das equações (3.5) a (3.7), conduz a um sistema global de equações diferenciais ordinárias dadas por:

Equação de conservação da quantidade de movimento:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{N}(\mathbf{d}), \quad (3.42)$$

Equação de conservação da energia:

$$\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{D}\boldsymbol{\theta} = -\mathbf{G}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\theta}), \quad (3.43)$$

sendo que:

\mathbf{d} é o vetor global contendo as velocidades U e V que pode ser escrito como:

$$\mathbf{d} = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ \dots \ U_n \ V_1 \ V_2 \ V_3 \ \dots \ V_n]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Para um elemento com 4 nós, vem:

$$\mathbf{d}^e = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4]^T. \quad (3.45)$$

\mathbf{M} e \mathbf{C} são as matrizes de massa para as equações de conservação da quantidade de movimento e energia, respectivamente, ou seja:

$$\mathbf{M} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

sendo \mathbf{A} uma matriz 4 x 4 tirada de I_1 , I_2 , e I_3 dada por:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i N_j \det J \, d\xi d\eta \right]. \quad (3.47)$$

$\boldsymbol{\theta}$ é o vetor global e $\boldsymbol{\theta}^e$ o vetor no elemento contendo as temperaturas, dados por:

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots \theta_n]^T \text{ e } \boldsymbol{\theta}^e = [\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4]^T. \quad (3.48)$$

\mathbf{K} é a matriz de rigidez que pode ser escrita como:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

sendo que a matriz \mathbf{B} contém os termos viscosos e os termos da penalidade, ou seja, ela contém termos das integrais I_4 , I_5 , I_{10} e I_{11} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{11} = [\mathbf{b}_{ij}]_{11} = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varepsilon_i}{\det J} \left\{ \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \right. \\ & \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] + \left[\left(- \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \\ & \left[- \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \left. \right\} d\xi d\eta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\lambda}{\det J} \left\{ \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \right\} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{12} = [\mathbf{b}_{ij}]_{12} = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\lambda}{\det J} \left\{ \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \left[- \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \right\} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{21} = [\mathbf{b}_{ij}]_{21} = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\lambda}{\det J} \left\{ \left[\left(- \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \right\} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{22} = [\mathbf{b}_{ij}]_{22} = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varepsilon_1}{\det J} \left\{ \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \right. \\
& \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] + \left[\left(-\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \\
& \left[\left(-\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \left. \right\} d\xi d\eta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\lambda}{\det J} \left\{ \left[\left(-\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \left[-\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \right\} d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

\mathbf{D} é a matriz de difusão de calor tirada da integral I_6 , ou seja:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} = [\mathbf{d}_{ij}] = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varepsilon_2}{\det J} \left\{ \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] + \left[\left(-\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \right. \\
& \left. \left[\left(-\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \right\} d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$ contém as contribuições das forças gravitacionais e as integrais de linha da pressão são retidas na formulação como mostrado no apêndice F. Portanto,

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 + \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{f}_2 + \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i F_1 \det J d\xi d\eta + \int_{\Gamma_0} N_i P n_x d\Gamma \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i F_2 \det J d\xi d\eta + \int_{\Gamma_0} N_i P n_y d\Gamma \end{bmatrix}. \tag{3.55}$$

$\mathbf{N}(\mathbf{d})$ é o vetor que contém os termos convectivos não-lineares na equação da quantidade de movimento que são extraídos das integrais I_7 e I_8 , ou seja:

$$\mathbf{N}(\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{bmatrix}, \tag{3.56}$$

sendo:

$$\mathbf{n}_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N_i + P_{i1}) \left\{ \sum_{i=1}^4 N_i U_i \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} U_i - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} U_i \right] + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^4 N_i V_i \left[- \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} V_i + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} V_i \right] \right\} d\xi d\eta, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{n}_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N_i + P_{i1}) \left\{ \sum_{i=1}^4 N_i U_i \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} V_i - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} V_i \right] + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^4 N_i V_i \left[- \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} V_i + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} V_i \right] \right\} d\xi d\eta. \quad (3.58)$$

É importante notar que os valores das velocidades U e V em (3.57) e (3.58) são obtidas no passo de tempo anterior.

$\mathbf{G}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\theta})$ é o vetor que contém os termos convectivos tirados da integral I_9 e as contribuições das condições de contorno na equação da energia:

$$\mathbf{G}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\theta}) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N_i + P_{i2}) \left\{ \sum_{i=1}^4 N_i U_i \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \theta_i - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \theta_i \right] + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^4 N_i V_i \left[- \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \theta_i + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \theta_i \right] \right\} d\xi d\eta + \int_{\Gamma_1} N_i q d\Gamma. \quad (3.59)$$

É importante notar que os valores das temperaturas em (3.55) e (3.59) são obtidas no passo de tempo anterior.

Aplicando-se a integração numérica e a integração numérica reduzida, estudadas no apêndice B, vem que:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{ij}] = \left[\sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^n N_i(\xi_p, \eta_k) N_j(\xi_p, \eta_k) \det J W_p W_k \right], \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} = [\mathbf{d}_{ij}] = & \sum_{p=1}^4 \sum_{k=1}^4 \frac{\varepsilon_2}{\det J} \left\{ \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \right. \right. \\
& - \left. \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] + \left[\left(- \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \\
& \left. \left[\left(- \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \right\} W_p W_k,
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 + \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{f}_2 + \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^4 \sum_{k=1}^4 N_i F_1 \det J W_p W_k + \int_{\Gamma_0} N_i P n_x d\Gamma \\ \sum_{p=1}^4 \sum_{k=1}^4 N_i F_2 \det J W_p W_k + \int_{\Gamma_0} N_i P n_y d\Gamma \end{bmatrix}, \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_1 = & \sum_{p=1}^4 \sum_{k=1}^4 (N_i + P_{i1}) \left\{ \sum_{i=1}^4 N_i U_i \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} U_i - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} U_i \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^4 N_i V_i \left[- \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} V_i + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} V_i \right] \right\} W_p W_k,
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_2 = & \sum_{p=1}^4 \sum_{k=1}^4 (N_i + P_{i1}) \left\{ \sum_{i=1}^4 N_i U_i \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} V_i - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} V_i \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^4 N_i V_i \left[- \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} V_i + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} V_i \right] \right\} W_p W_k,
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\theta}) = & \sum_{p=1}^4 \sum_{k=1}^4 (N_i + P_{i2}) \left\{ \sum_{i=1}^4 N_i U_i \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \theta_i - \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \theta_i \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^4 N_i V_i \left[- \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \theta_i + \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \right) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \theta_i \right] \right\} W_p W_k + \int_{\Gamma_1} N_i q d\Gamma,
\end{aligned} \tag{3.69}$$

sendo que as velocidades e temperaturas nas equações anteriores foram aproximadas pelas equações (3.31) a (3.33), cujas derivadas com relação a ξ e η são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i U_i}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} U_i , \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i U_i}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} U_i , \\ \frac{\partial V}{\partial \xi} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i V_i}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} V_i , \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i V_i}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} V_i , \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i \theta_i}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \theta_i , \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i \theta_i}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \theta_i . \end{aligned} \tag{3.70}$$

Fazendo-se as aproximações das derivadas temporais em (3.42) e (3.43), vem que:

$$\dot{\theta}_{n+1}^{(i+1)} = \frac{(\theta_{n+1}^{(i+1)} - \theta_n^{(i)})}{(\Delta\tau)} \tag{3.71}$$

e

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1}^{(i+1)} = \frac{(\mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)} - \mathbf{d}_n^{(i)})}{(\Delta\tau)} . \tag{3.72}$$

Com base nas equações (3.71) e (3.72), algoritmo para avanço no tempo é procedido da seguinte forma, usando-se um pseudo-transiente:

1. No tempo $\tau = \tau_n$, \mathbf{d}_n e θ_n são conhecidos:

2. Calcular o campo de velocidades:

$$(\mathbf{M} + \Delta\tau \mathbf{K}) \mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{M} \mathbf{d}_n^{(i)} + \Delta\tau \left[\mathbf{F}(\theta_{n+1}^{(i)}) - \mathbf{N}(\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}) \right], \quad (3.73)$$

3. Calcular o campo de temperatura:

$$(\mathbf{C} + \Delta\tau \mathbf{D}) \theta_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{C} \theta_n^i - \Delta\tau \mathbf{G}(\mathbf{d}_n^{(i)}, \theta_n^i), \quad (3.74)$$

sendo que os sobrescritos indicam a iteração e os subscritos o passo de tempo.

Os termos convectivos não-lineares e os termos forças de campo são calculados explicitamente no lado direito usando os últimos valores disponíveis das variáveis dependentes. Isto tem uma vantagem de que o sistema de matrizes $(\mathbf{M} + \Delta\tau \mathbf{K})$ e $(\mathbf{C} + \Delta\tau \mathbf{D})$ no lado esquerdo é constante através do cálculo.

3.4 – FLUXOGRAMA DO CÓDIGO COMPUTACIONAL

As figuras 3.3a e 3.3b mostram o fluxograma do código computacional desenvolvido em FORTRAN para solucionar as equações de conservação.

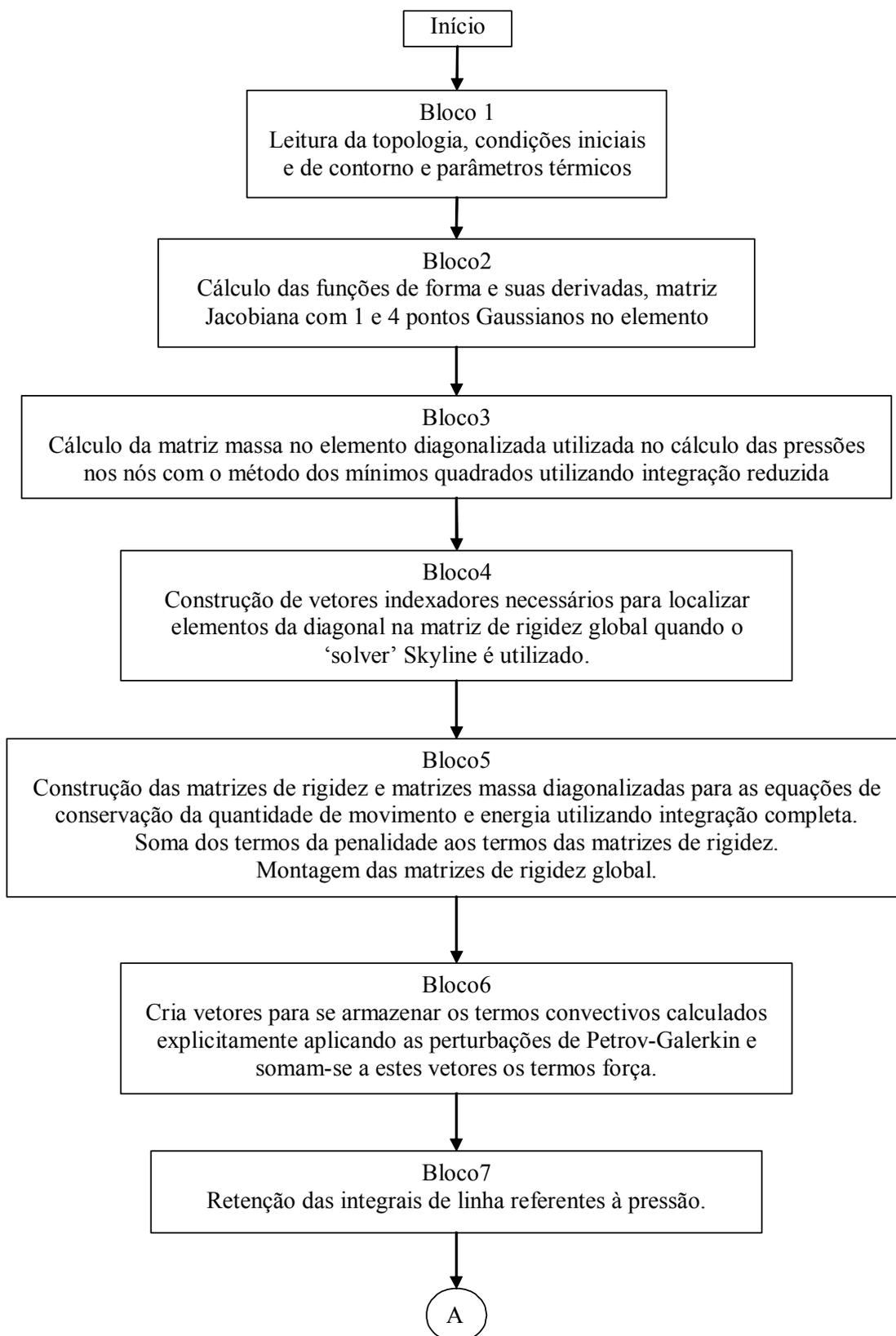


Figura 3.3a - Fluxograma do programa principal.

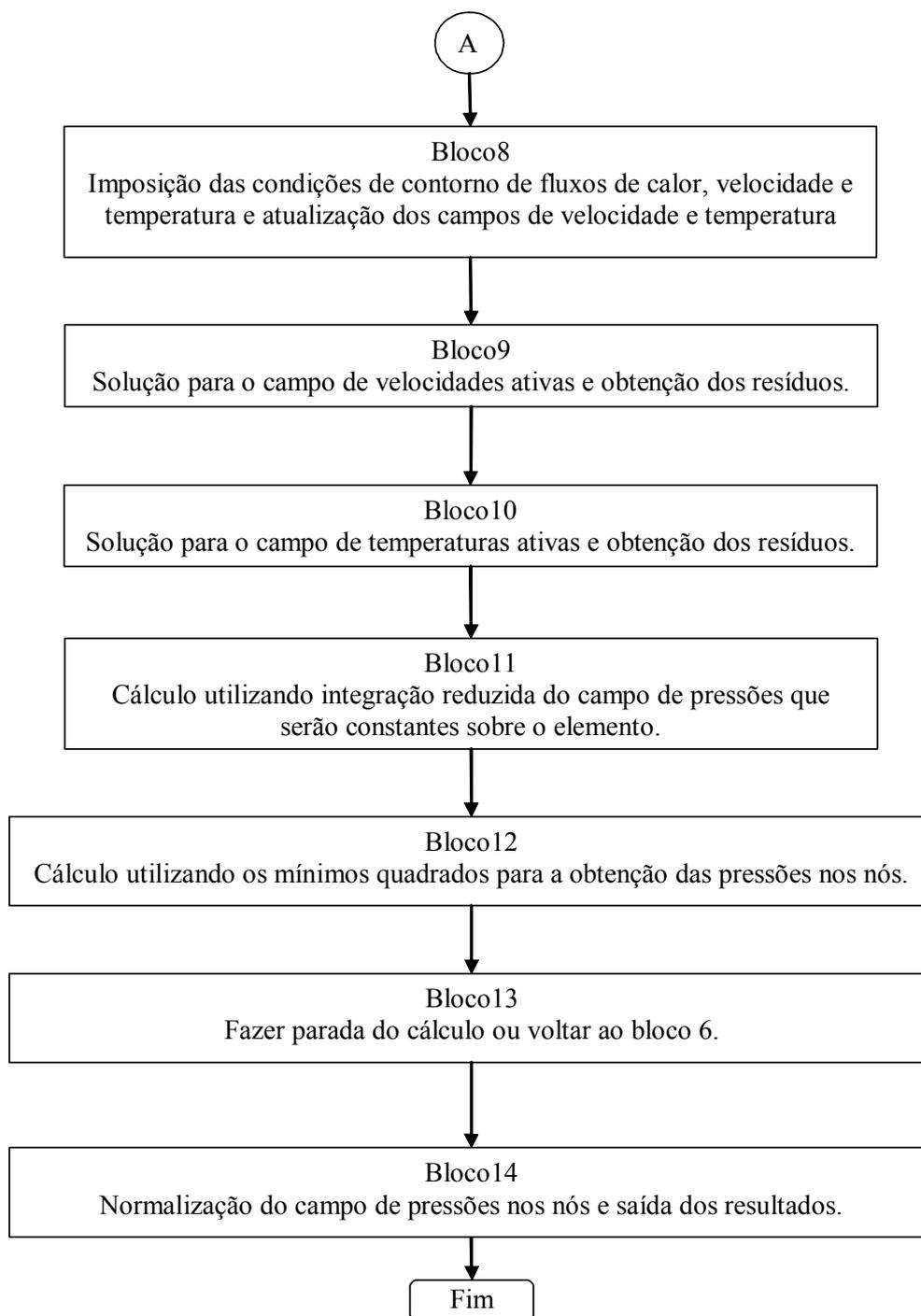


Figura 3.3b - Fluxograma do programa principal (continuação).

A seguir serão descritos os procedimentos em cada bloco do fluxograma.

1) Bloco 1:

Leitura do tipo de problema, número máximo de passos de tempo, número de elementos na fronteira aberta, incremento de tempo, dos parâmetros físicos que caracterizam convecção mista (Re , Pr , Fr , Pe) e também do parâmetro da penalidade (λ). Além disso, lê-se a topologia gerada por softwares externos, as condições iniciais e de contorno para U , V e T , o número de elementos da fronteira aberta.

2) Bloco 2:

Chamada de subrotina para se calcular para o elemento suas funções de forma e suas derivadas, matriz Jacobiana e o determinante do Jacobiano com 1 e 4 pontos Gaussianos.

3) Bloco 3:

Cálculo da matriz massa diagonalizada no elemento utilizada no cálculo das pressões nos nós do elemento com o método dos mínimos quadrados. Usar a integração reduzida com um ponto Gaussiano para fazer este cálculo.

4) Bloco 4:

Preparação de vetores necessários para a localização dos elementos da diagonal na matriz de rigidez global. Isto é feito para utilizar estes vetores no 'solver' Skyline.

5) Bloco 5:

Neste bloco, faz-se a chamada de subrotinas para a construção das matrizes de rigidez e matrizes massa diagonalizadas utilizando a integração com quatro pontos Gaussianos. Os termos penalizados com o parâmetro λ aos termos das matrizes de rigidez. Faz-se em seguida a montagem das matrizes de rigidez global.

6) Bloco 6:

Chamada de subrotina para armazenar os termos convectivos calculados explicitamente aplicando as perturbações de Petrov-Galerkin e somam-se a estes vetores os termos força.

7) Bloco 7:

Chamada de sub-rotina para retenção das integrais de linha. Este procedimento é mostrado no apêndice F.

8) Bloco 8:

Imposição das condições de contorno de fluxos de calor, velocidade e temperatura e atualização dos campos de velocidade e temperatura calculados no passo de tempo anterior.

9) Bloco 9:

Chamada de sub-rotina para obtenção do campo de velocidades para o próximo passo de tempo. Colocar a solução em uma nova disposição e calcular os residuais e atualizar as velocidades.

10) Bloco 10:

Chamada de sub-rotina para obtenção do campo de temperaturas para o próximo passo de tempo, colocar a solução em uma nova disposição e calcular os residuais e atualizar as temperaturas.

11) Bloco 11:

Chamada de sub-rotina para calcular a pressão usando a integração reduzida no elemento.

12) Bloco 12:

Chamada de subrotina para se calcular as pressões nos nós utilizando o método dos mínimos quadrados.

13) Bloco 13:

Incrementa-se a iteração e o tempo. Faz-se então uma checagem para o campo de velocidade em todo o domínio computacional. Assim que todos estes valores em todo o domínio tenham atingido um desvio menor ou igual a 0,00001, ou se o número máximo estipulado de iterações for ultrapassado, o programa continua e checa a conservação de massa através do divergente de velocidades. Este balanço, para alguns casos, está mostrado no apêndice E. Se uma das condições anteriores não for satisfeita, volta-se ao bloco 6.

14) Bloco 14:

Normalizar o campo de pressão usando uma pressão de referência em um ponto nodal imprimir os resultados para o arquivo que será utilizado no pacote Tecplot. Faz-se também a saída do campo do divergente das velocidades para estudo da conservação de massa que está apresentado no apêndice E.

Capítulo 4

VALIDAÇÃO E ESTUDO DA INDEPENDÊNCIA DA MALHA

4.1 – ESTUDO DA VALIDAÇÃO

4.1.1 – Introdução

O código computacional é validado considerando vários resultados experimentais e numéricos padrões da literatura, como listados abaixo:

Validação 1: Transferência de calor por convecção natural numa cavidade quadrada,

Validação 2: Escoamento bidimensional laminar em canais com degrau na entrada,

Validação 3: Escoamento de Poiseuille aquecido na placa inferior,

Validação 4: Troca de calor entre cilindros concêntricos com o cilindro externo rotativo.

Estes estudos validam o código computacional usado para a obtenção dos resultados apresentados no capítulo 5. As malhas estruturadas geradas em todo o trabalho foram obtidas pelo software EMC2. As malhas não-estruturadas foram geradas pelo software GID que segue como critério um ângulo máximo e mínimo para as arestas, tentando, portanto, colocar estes ângulos o mais próximo de 90°. Além disso, o usuário entra com uma dimensão mínima para as arestas. Superfícies curvas, portanto, têm um refinamento automático da malha. Em todo o estudo da validação, uma análise do incremento de tempo $\Delta\tau$ é realizada de tal modo que os passos de tempo citados oferecem um desvio dos números de Nusselt menor que 10^{-5} .

Os valores dos desvios estão em módulo e sempre são dados pela razão entre a diferença do resultado do trabalho da literatura e o do presente estudo pelo resultado do trabalho da literatura. Todos os resultados desta tese utilizam um pseudo-gradiente no tempo.

4.1.2 – Validação 1: Transferência de Calor por Convecção Natural Numa Cavidade Quadrada

A figura 4.1 mostra um caso clássico usado em comparações para validação de códigos computacionais que se trata da convecção natural em uma cavidade quadrada com as paredes esquerda e direita, sendo resfriada e aquecida, respectivamente. As paredes horizontais são adiabáticas. A malha usada nesta comparação tem 80 x 80 elementos, ou seja, 6400 elementos. Os passos de tempo variam entre 10^{-3} e 5×10^{-5} . Este caso foi considerado com escoamento bidimensional, laminar e incompressível. As condições iniciais são de velocidades e temperaturas nulas e pressão igual a 1 em todo o domínio.

A figura 4.2 mostra as isotermas juntamente com os vetores velocidade nesta cavidade para $Gr = 20000$ e $Pr = 0,733$. Pode-se perceber o escoamento girando no sentido anti-horário causado por forças de empuxo devido às diferenças de temperatura entre as paredes verticais.

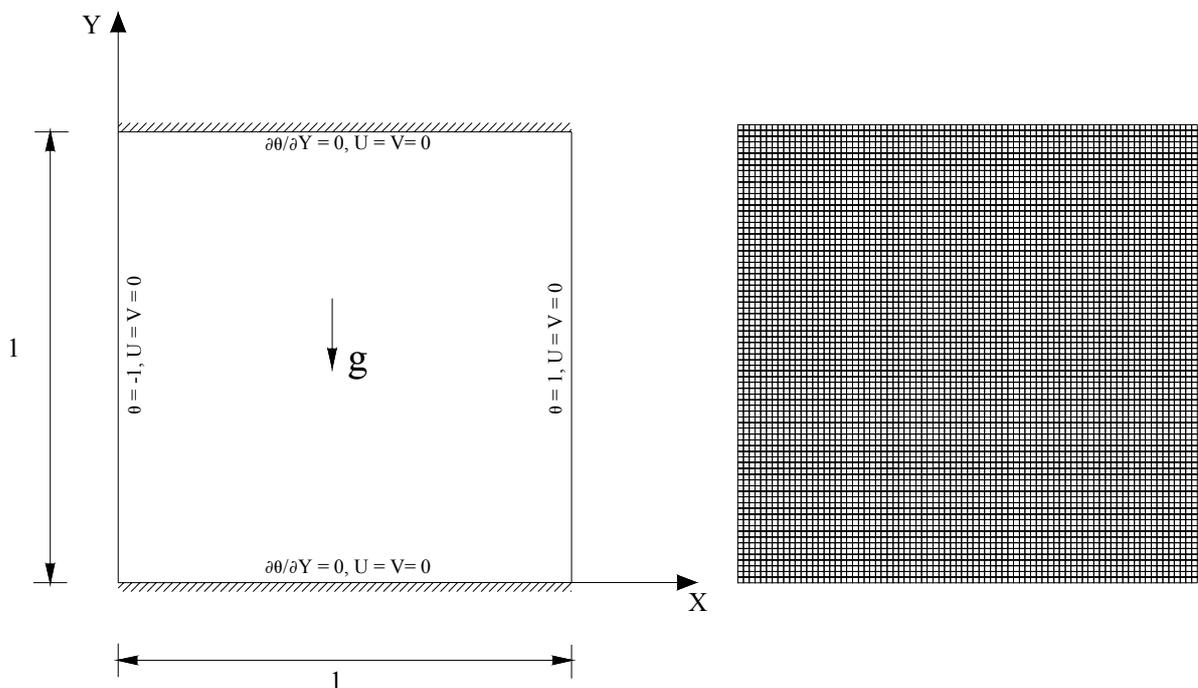


Figura 4.1 - Geometria quadrada e malha com 6400 elementos utilizadas na validação 1.

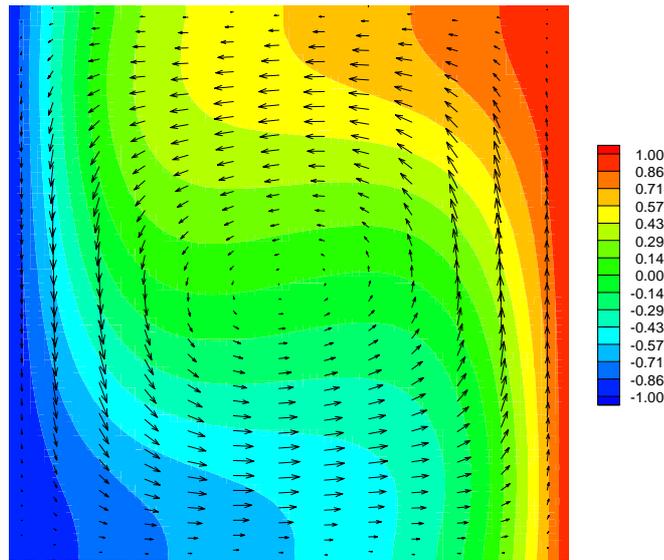


Figura 4.2 - Isotermas e vetores velocidade para o caso da validação 1.

Tabela 4.1 - Comparação do número de Nusselt médio Nu para o caso de convecção natural em uma cavidade quadrada, $Gr = 20000$ com valores da literatura.

Referência	Nu	Desvio	Método numérico
Presente trabalho	2,528	—	Elementos Finitos (6400 elementos)
Brito (2005)	2,569	1,60%	Elementos Finitos(3362 elementos)
Ozoe e outros (1974)	2,740	7,74%	Valor Experimental
Tabarrok e Lin (1977)	2,695	6,20%	Elementos Finitos
Wilkes e Churchill (1966)	2,516	0,48%	Diferenças Finitas (20x20)

Tabela 4.2 - Comparação do número de Nusselt médio Nu para o caso de convecção natural em uma cavidade quadrada, para diversos Gr com valores da literatura.

Referência	Figueiredo ¹ et al. (1986)	Wong e Raithby ² (1979)	Brito ³ (2005)	Presente Trabalho ⁴
Gr	Nu	Nu	Nu	Nu
34110	2,884 (3,05%)	2,972 (0,002%)	3,023 (1,69%)	2,972
60000	3,468 (1,64%)	—	3,588 (1,76%)	3,525
100000	4,160 (1,13%)	—	4,190 (1,84%)	4,113
136430	4,686 (3,63%)	4,51 (0,13%)	4,602 (1,87%)	4,516
341070	—	5,92 (0%)	6,033 (1,87%)	5,920

- 1 - Resultado para malha 21x21,
- 2 - Resultado para malha 22x22,
- 3 - MEF com 42x42 (3362 elementos),
- 4 - MEF com Petrov-Galerkin com 6400 elementos quadrilaterais lineares.

As tabelas 4.1 e 4.2 mostram os valores dos desvios dos números de Nusselt médios com valores experimentais e numéricos encontrados na literatura para o caso de convecção natural e uma geometria quadrada com condições de contorno mostradas na figura 4.1. Observa-se uma boa concordância entre os resultados.

4.1.3 – Validação 2: Escoamento Bidimensional Laminar em Canais com Degrau na Entrada

Esta comparação é realizada não somente com resultados experimentais apresentados por Lee e Mateescu (1998) e Armaly et al. (1983), mas também com resultados numéricos encontrados por Lee e Mateescu (1998), Gartling (1990), Kim e Moin (1985) e Sohn (1988). O escoamento do ar, na presente análise de comparação, é bidimensional, laminar, incompressível e não-permanente. O domínio é um canal horizontal com um degrau na entrada, onde está imposta a condição de perfil de velocidade totalmente desenvolvido dado pela expressão $U = 24Y(0,5 - Y)$ e $V = 0$, sendo $U = u/\bar{U}$, e \bar{U} a velocidade média na entrada do canal. O domínio computacional e as condições de contorno estão mostrados na figura 4.3. As condições iniciais são de velocidades e temperaturas nulas e pressão igual a 1 em todo o domínio.

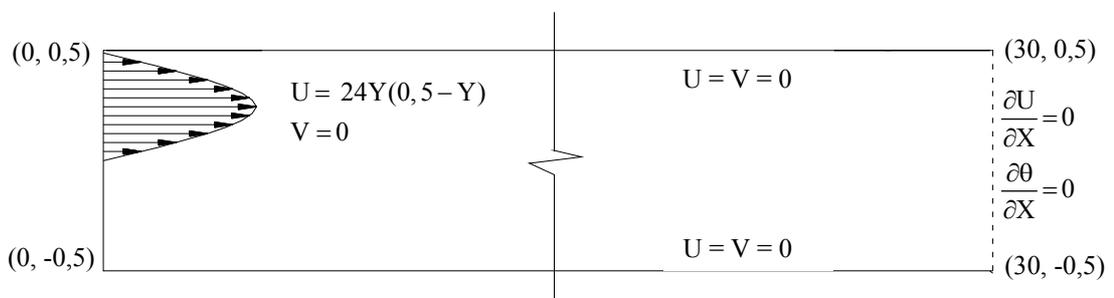
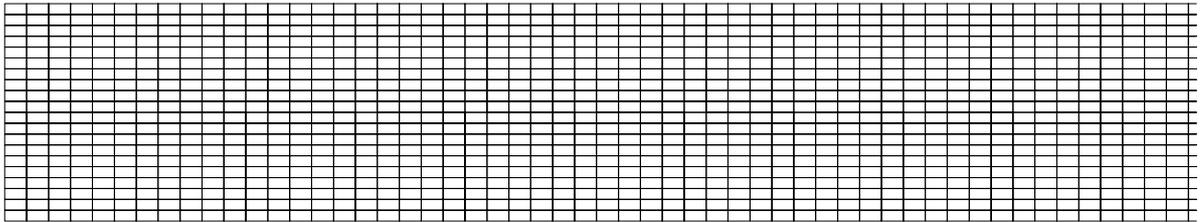


Figura 4.3 - Geometria e condições de contorno da validação 2.



a) Visão parcial da malha



b) Visão detalhada de uma pequena parte na entrada do canal

Figura 4.4 - Malha com 6000 elementos utilizada na validação 2.

A figura 4.4 apresenta a malha estruturada utilizada para gerar os resultados para a validação 2. São utilizados 6000 elementos quadrilaterais com quatro nós com incrementos em X e Y de $\Delta X = 0,1$ e $\Delta Y = 0,05$, respectivamente, e passo de tempo $\Delta \tau = 0,05$. A figura 4.5 mostra as distâncias X_s , X_{rs} e X_r medidas para comparação. Somente parte do canal é mostrada.

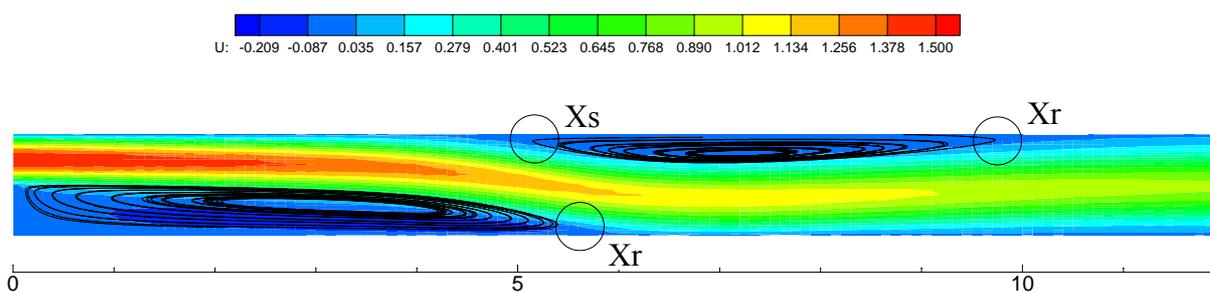


Figura 4.5 - Distâncias comparadas com resultados numéricos e experimentais.

A tabela 4.3 mostra os resultados da segunda comparação para as distâncias de separação X_s , as distâncias de recolamento na parede superior X_{rs} e as distâncias de recolamento na parede inferior X_r . H_d e H_u são as alturas do canal e da abertura na entrada, respectivamente. Como pode ser visto, os resultados do presente trabalho concordam razoavelmente bem com os da literatura para a malha utilizada.

Tabela 4.3 - Comparação dos resultados do presente trabalho com valores numéricos e experimentais para escoamentos em canais com um degrau na entrada.

		Resultados experimentais		Resultados numéricos				
		Lee and Mateescu (1998)	Armaly et al. (1983)	Presente trabalho	Gartling (1990)	Kim & Moin (1985)	Lee and Mateescu (1998)	Sohn (1988)
Parede Inferior	x_r	6,45 (10,85%)	7,0 (17,86%)	5,75	6,1 (9,33%)	6,0 (4,17%)	6,0 (4,17%)	5,8 (0,86%)
Parede Superior	x_s	5,15 (3,88%)	5,7 (13,16%)	4,95	4,85 (2,06%)	-	4,8 (3,13%)	-
Parede Superior	x_{rs}	10,25 (3,41%)	10,0 (1%)	9,9	10,48 (5,53%)	-	10,3 (3,88%)	-
	$x_{rs}-x_s$	5,1 (2,94%)	4,3 (15,12%)	4,95	5,63 (12,09%)	5,75 (13,91%)	5,5 (10%)	4,63 (6,91%)
Reynolds		805	800	800	800	800	800	800
Hd/Hu		2	1,94	2	2	2	2	2

4.1.4 – Validação 3: Escoamento de Poiseuille, aquecido na placa inferior

A figura 4.6 denota a geometria e condições de contorno da terceira comparação, cujos resultados serão comparados com os resultados de Comini et al. (1997). O estudo de comparação é realizado considerando um problema envolvendo convecção mista em um canal com placas paralelas com perfil parabólico de velocidades totalmente desenvolvidas na entrada $U = 6Y(1-Y)$ e $V = 0$, sendo $U = u/\bar{U}$, e \bar{U} a velocidade média na entrada do canal. O escoamento é considerado bidimensional, laminar, incompressível e não-permanente. Os seguintes valores são atribuídos: $Re = 10$, $Pr = 0,67$ e $Fr = 1/150$. As condições iniciais são de velocidades e temperaturas nulas e pressão igual a 1 em todo o domínio.

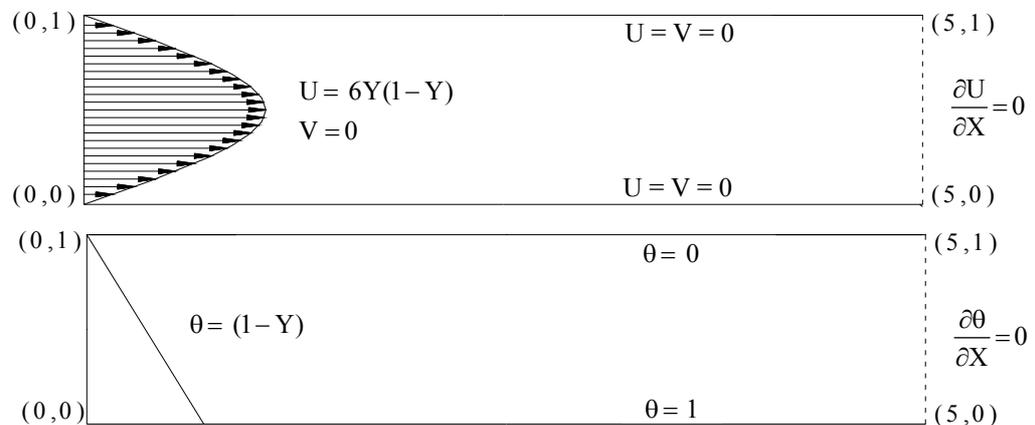


Figura 4.6 - Geometria e condições de contorno para a terceira comparação.

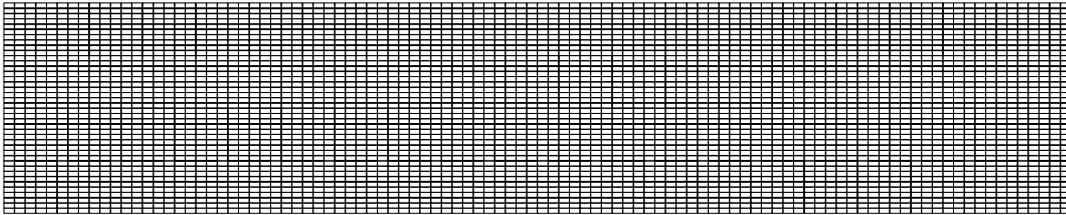


Figura 4.7 - Malha estruturada com 4000 elementos utilizada na validação 2.

A malha tem 4000 elementos quadrilaterais com quatro nós $\Delta X = 0,1$ e $\Delta Y = 0,15$, $\Delta \tau = 0,01$, como mostra a figura 4.7. Pode-se notar na figura 4.8 a distribuição das temperaturas ao longo do canal e os vetores velocidade. Células de recirculação caminham ao longo do canal e um escoamento principal passa por entre estas células.

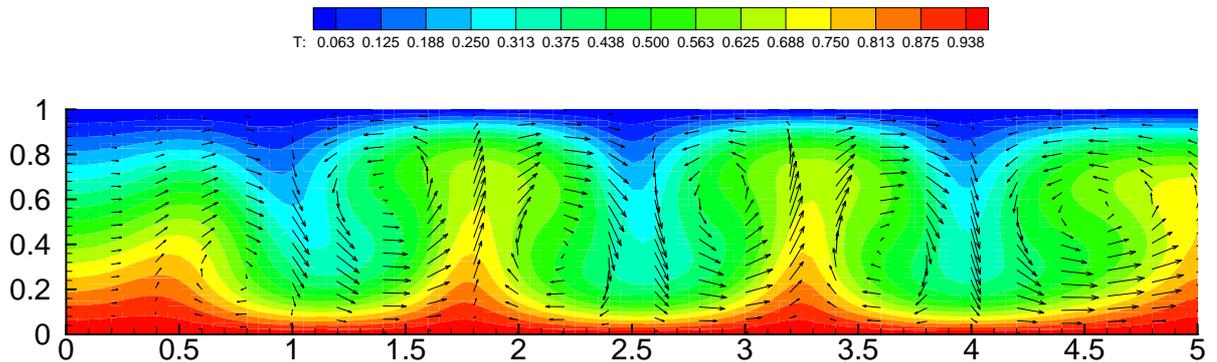


Figura 4.8 - Isotermas e vetores velocidade para a terceira comparação.

A figura 4.9 mostra o número de Nusselt médio na superfície superior versus o tempo. Aproximadamente após a iteração 500, um comportamento quase-periódico é observado para o número de Nusselt médio na parede superior, oscilando ao redor de um valor médio de 2,44. Este valor concorda bem com o valor encontrado por Comini et al. (1997) de 2,34, caracterizando um desvio de aproximadamente de 4%.

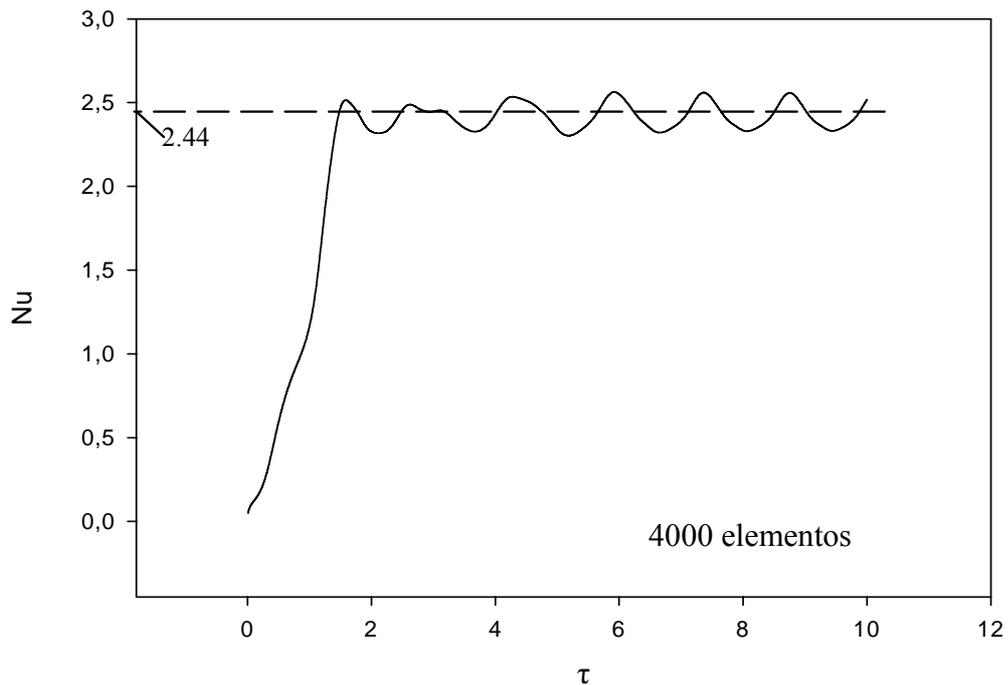


Figura 4.9 - Número de Nusselt médio medido ao longo da superfície superior versus tempo para o escoamento de Poiseuille, aquecido por baixo.

4.1.5 – Validação 4: Troca de Calor Entre Cilindros Concêntricos com o Cilindro Externo Rotativo

Concluindo as comparações, a figura 4.10 mostra o quarto caso estudado para validação do código computacional. A convecção mista do ar entre dois cilindros concêntricos com o cilindro externo rotativo e resfriado isotermicamente é analisada. Os seguintes parâmetros são considerados: $Pr = 0,7$, $Re = 10, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350$ e 500 e $Ra = 10^4, 2 \times 10^4$ e 5×10^4 . O domínio é espacialmente discretizado com uma malha não-estruturada com 5976 elementos quadrilaterais com quatro nós. O gerador de malha utilizado foi GID. Os elementos quadrilaterais gerados tiveram seus ângulos variando entre $26,7^\circ$ e $89,5^\circ$, como mostra a figura 4.11, com um tamanho médio dos lados dos elementos de 0,05. As condições iniciais são de velocidades e temperaturas nulas e pressão igual a 1 em todo o domínio.

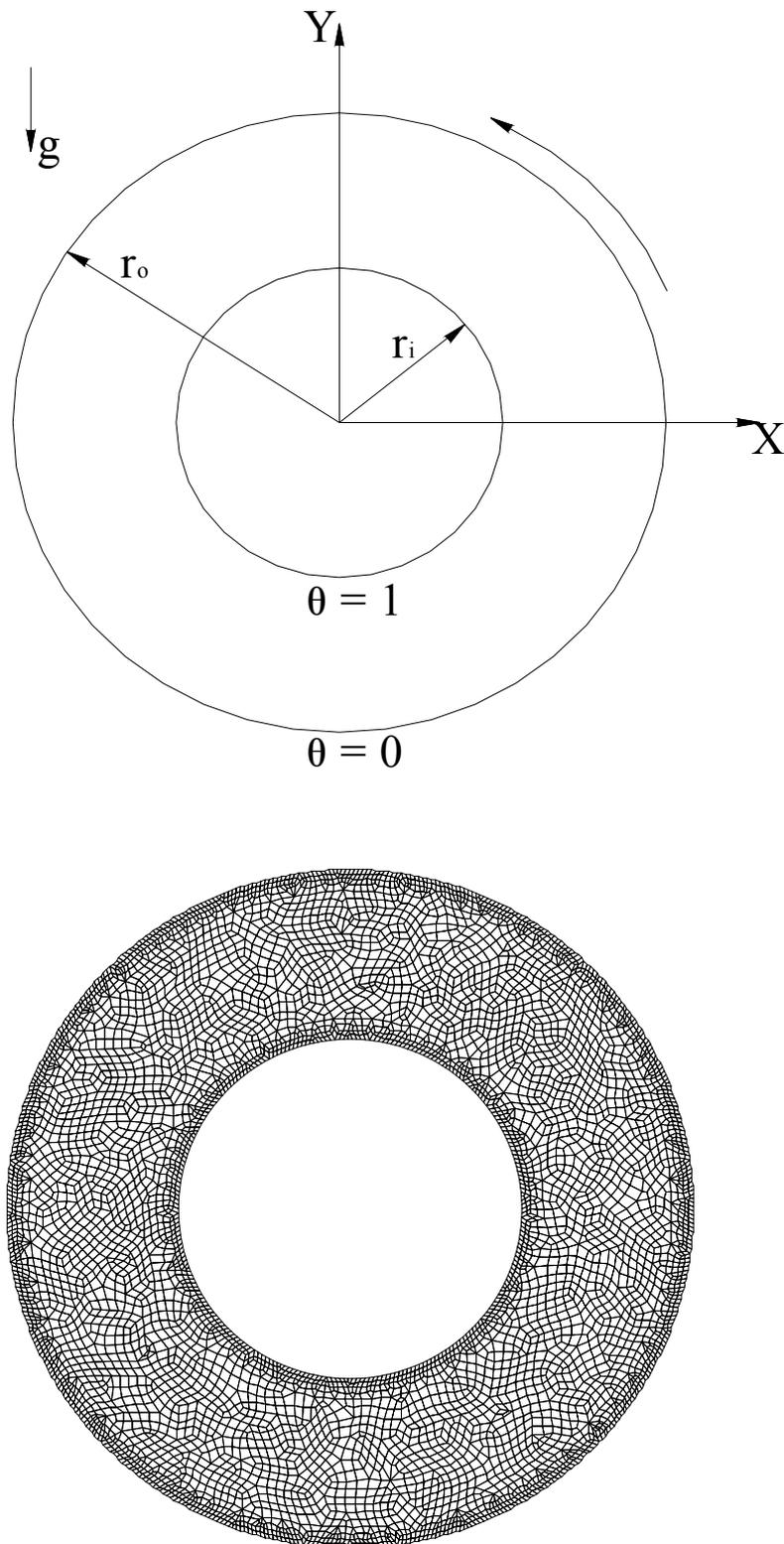


Figura 4.10 - Geometria e condições de contorno e malha com 5976 elementos.

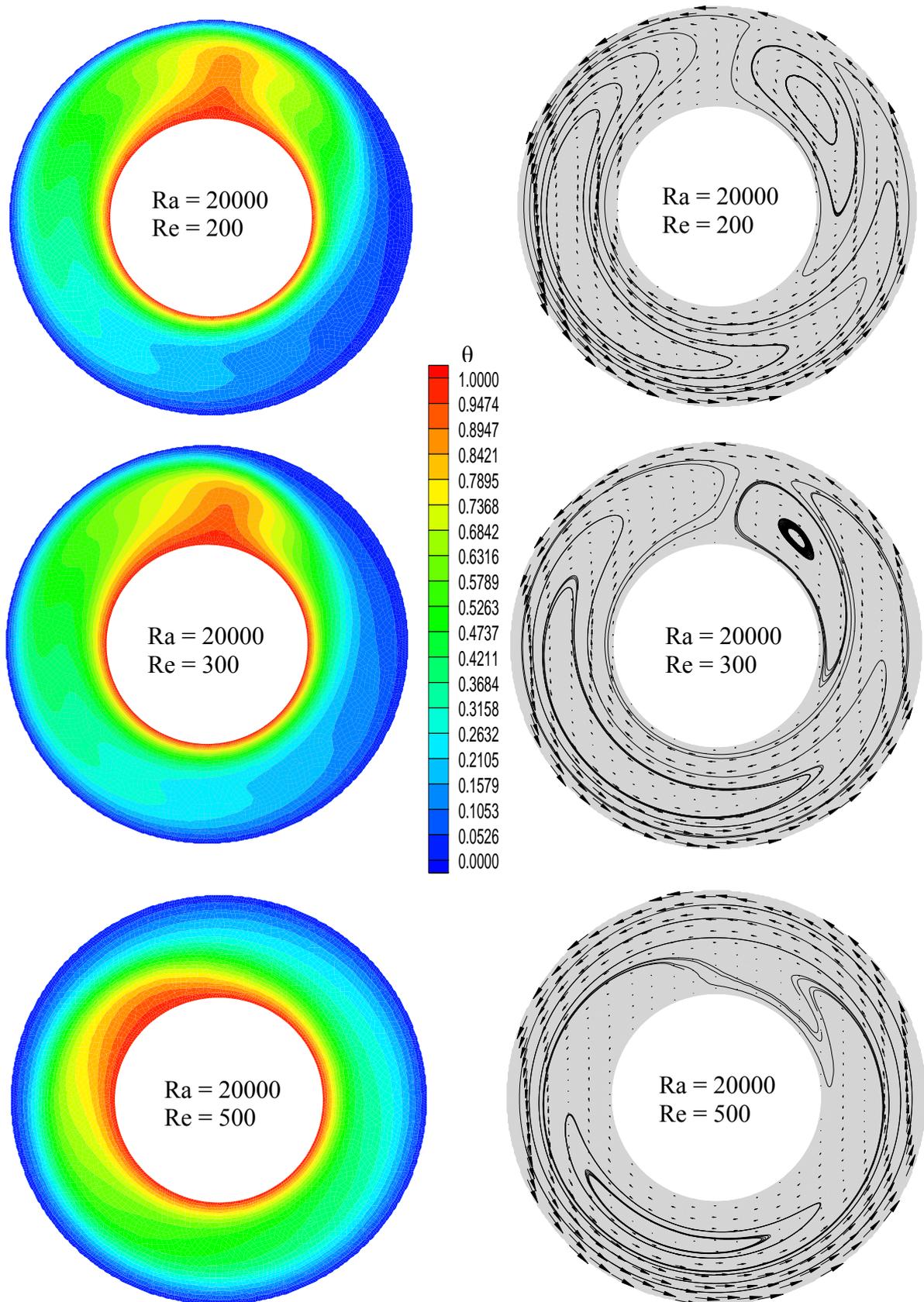


Figura 4.11 - Isotermas, linhas de corrente e vetores de velocidade.

A figura 4.11 mostra as isotermas, linhas de corrente e vetores de velocidade para alguns casos investigados para a geometria com cilindros concêntricos utilizados na comparação da validação 4. O número de Rayleigh para todos os casos desta figura é igual a 20000 e os números de Reynolds iguais a 200, 300 e 500. São apresentados na tabela 4.4 os números de Nusselt médios para as superfícies dos cilindros interno e externo, Nu_i e Nu_o , respectivamente. Além disso, ela mostra o número de Nusselt médio geral ($Nu=Nu_i+Nu_o/2$). Estes valores são comparados com aqueles encontrados em Yoo (1998). Neste artigo, utiliza-se uma malha (radial angular) de (65 x 64) pontos e um esquema de diferenças finitas. Os resultados desta análise comparados com os resultados de Yoo (1998) podem ser vistos na figura 4.12. Os resultados do presente trabalho são maiores, apresentando aproximadamente um desvio de aproximadamente 10%. O incremento de tempo varia entre 0,005 e 0,01. O número de iterações varia de 10^4 a 3×10^4 .

Tabela 4.4 - Números de Nusselt médios para a validação 4.

Rayleigh	Reynolds	Froude	Peclet	Nu_i	Nu_o	Nu
10000	50	0,175	35	2,6000	1,3221	1,9611
10000	100	0,7	70	2,5622	1,3029	1,9326
10000	150	1,575	105	2,4538	1,2506	1,8522
10000	200	2,8	140	2,2697	1,1598	1,7147
10000	250	4,375	175	2,0386	1,0426	1,5406
10000	300	6,3	210	1,6269	0,8364	1,2317
10000	350	8,575	245	1,4824	0,7629	1,1227
10000	500	17,5	350	1,4374	0,7409	1,0892
20000	100	0,35	70	3,1361	1,5964	2,3662
20000	150	0,7875	105	3,0715	1,5645	2,3180
20000	200	1,4	140	2,9515	1,5051	2,2283
20000	250	2,1875	175	2,7821	1,4204	2,1013
20000	300	3,15	210	2,5824	1,3206	1,9515
20000	350	4,2875	245	2,3793	1,2168	1,7980
20000	500	8,75	350	1,7730	0,9109	1,3420
50000	100	0,14	70	3,9867	2,0324	3,0095
50000	150	0,315	105	3,9587	2,0193	2,9890
50000	200	0,56	140	3,8806	1,9798	2,9302
50000	250	0,875	175	3,7695	1,9234	2,8465
50000	300	1,26	210	3,6443	1,8616	2,7530
50000	350	1,715	245	3,5035	1,7931	2,6483
50000	500	3,5	350	3,0044	1,5373	2,2708

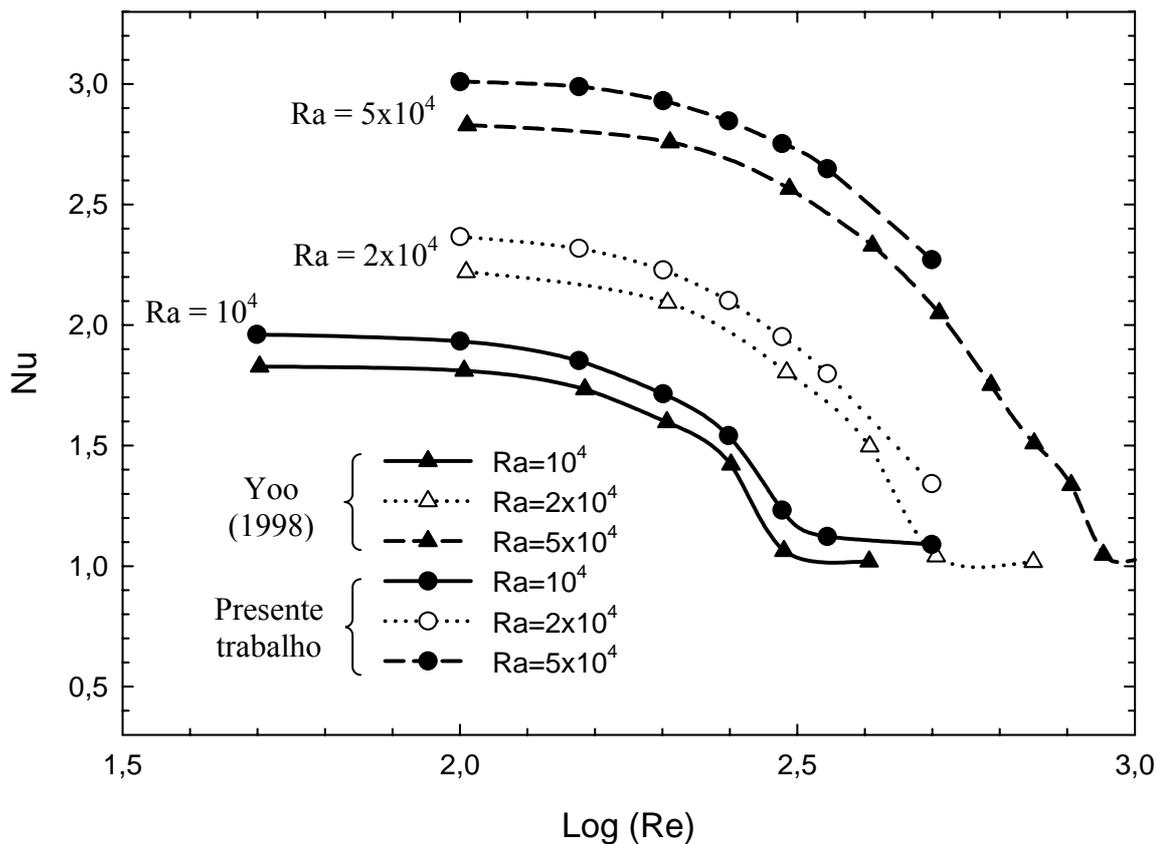


Figura 4.12 - Comparação do número de Nusselt médio geral para cilindros concêntricos.

4.2 – ANÁLISE DA INDEPENDÊNCIA DA MALHA

4.2.1 – Introdução

Alguns testes são realizados para estudar o efeito do aumento do número de elementos da malha sobre a convergência dos resultados para os casos que serão apresentados no capítulo 5. Os testes sempre envolvem problemas cujos parâmetros fornecem altos gradientes no domínio, possibilitando assim observar o comportamento da malha nestes casos. Os desvios apresentados são sempre calculados em relação à malha anterior.

Este estudo será feito considerando os seguintes problemas:

Caso 1 – Convecção mista em um canal horizontal com um degrau na entrada,

Caso 2 – Convecção mista em um canal com uma curva de 180° ,

Caso 3 – Convecção mista em canais inclinados com fontes discretas de calor,

Caso 3.1 – Convecção mista em canais inclinados com uma fonte discreta de calor,

Caso 3.2 – Convecção mista em canais horizontais com duas fontes discretas de calor,

Caso 3.3 – Convecção mista em canais inclinados com três fontes discretas de calor,

Caso 4 – Convecção mista em cavidades inclinadas com cilindros internos rotativos,

Caso 4.1 – Convecção mista em cavidades inclinadas com um cilindro interno rotativo,

Caso 4.2 – Convecção mista em cavidades inclinadas com um cilindro interno rotativo.

4.2.2 – Estudo da Independência da Malha para o Caso 1

A figura 4.13 mostra a geometria e as superfícies do contorno do problema para a análise.

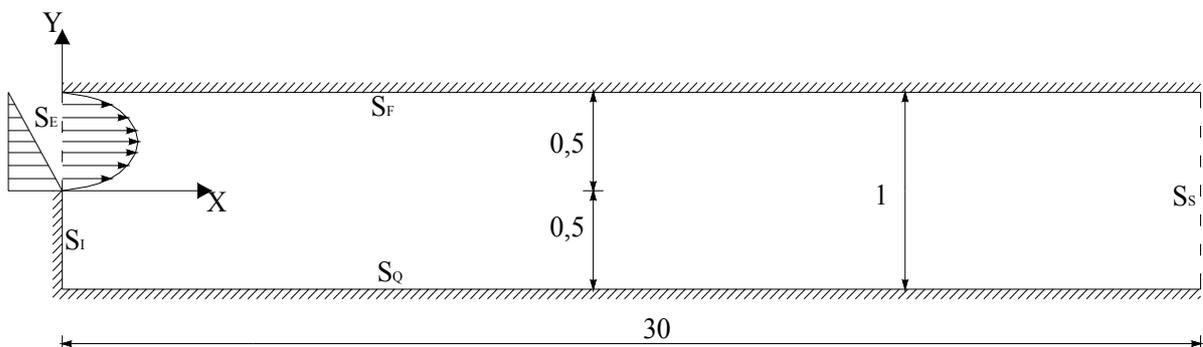


Figura 4.13 - Canal com degrau na entrada para estudo da independência da malha.

As condições iniciais e de contorno adimensionais são dadas por:

i) Condições iniciais ($\tau = 0$):

$$\text{Em } \Omega: \quad P = 1, U = V = 0, \theta = 0, \quad (4.1)$$

ii) Condições de contorno ($\tau > 0$):

$$\text{Em } S_E: \quad U = 24Y(0,5-Y), V = 0, \theta = 1 - 2Y,$$

$$\text{Em } S_F: \quad U = V = 0, \theta = 0,$$

$$\text{Em } S_Q: \quad U = V = 0, \theta = 1, \quad (4.2)$$

$$\text{Em } S_I: \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0,$$

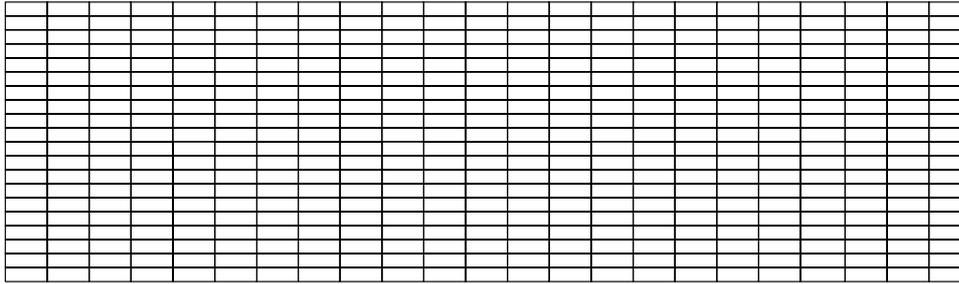
$$\text{Em } S_S: \quad \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0,$$

sendo a velocidade de referência U_0 igual a velocidade média na entrada.

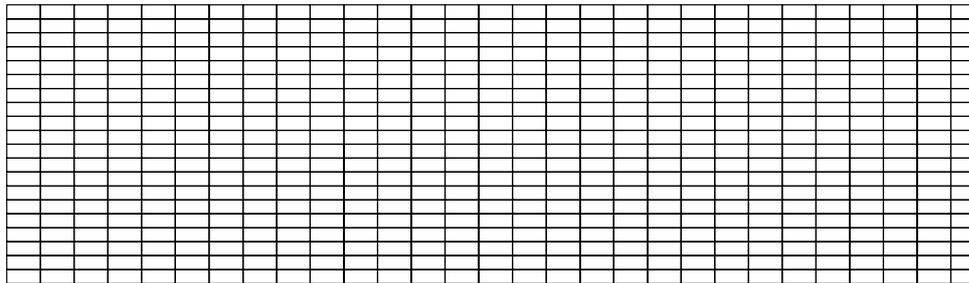
A figura 4.14 apresenta três tipos de malhas utilizadas no estudo da independência da malha para o problema de convecção mista laminar em um canal horizontal com um degrau na entrada. Todas as malhas são estruturadas contendo elementos quadrilaterais. As malhas estão mostradas parcialmente. A quantidade de elementos varia de 4000 até 6000 elementos.

A tabela 4.5 mostra os desvios dos números de Nusselt para casos com $Re = 20$ e $Fr = 1/75, 1/150$ e $1/300$ para as três malhas da figura 4.14. Considera-se que a malha com 6000 elementos apresenta desvios pequenos em relação à malha com 5000 elementos e é suficiente para ser utilizada na obtenção dos resultados para o presente problema.

4000 elementos - $\Delta X = 0,15$ e $\Delta Y = 0,05$



5000 elementos - $\Delta X = 0,12$ e $\Delta Y = 0,05$



6000 elementos - $\Delta X = 0,10$ e $\Delta Y = 0,05$

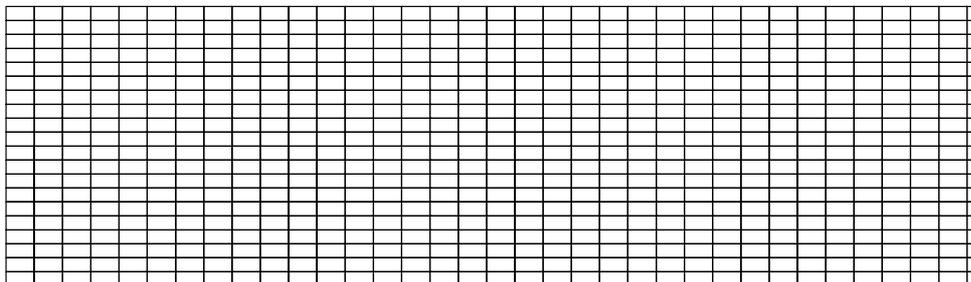


Figura 4.14 – Detalhes das malhas utilizadas no estudo da independência da malha no Caso 1.

Tabela 4.5 - Desvios do Nu médio na parede superior fria do canal.

Número de Elementos	Número de Nusselt médio na parede fria Nu_F		
	Re = 20		
	Fr = 1/75	Fr = 1/150	Fr = 1/300
4000	2,7907	2,9575	3,1965
5000	2,815 (0,86%)	3,096 (4,47%)	3,226 (0,90%)
6000	2,8469 (1,12%)	3,1655 (2,20%)	3,2585 (0,10%)

4.2.3 – Estudo da Independência da Malha para o Caso 2

O próximo problema a ser considerado no estudo da independência da malha é o de convecção mista laminar em um canal com uma curva de 180° com várias superfícies com condições de contorno, como mostra a figura 4.15.

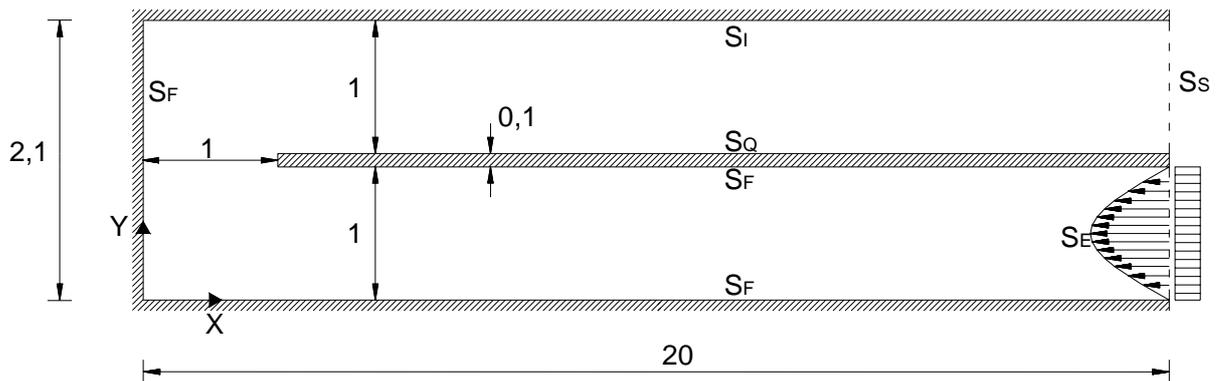


Figura 4.15 - Canal com uma curva de 180° para estudo da independência da malha.

As condições iniciais e de contorno adimensionais são dadas por:

i) Condições iniciais ($\tau = 0$):

$$\text{Em } \Omega: \quad P = 1, U = V = 0, \theta = 0, \quad (4.3)$$

ii) Condições de contorno ($\tau > 0$):

$$\text{Em } S_E: \quad U = 6Y(1-Y), V = 0, \theta = 0,$$

$$\text{Em } S_F: \quad U = V = 0, \theta = 0,$$

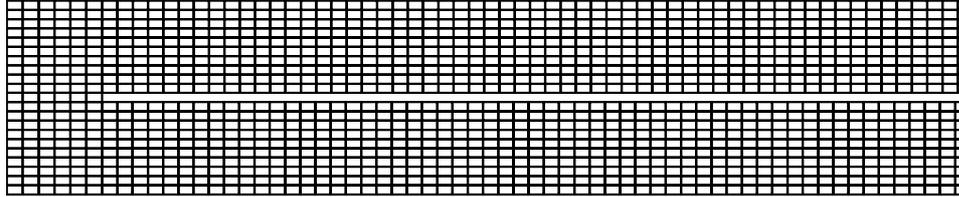
$$\text{Em } S_Q: \quad U = V = 0, \theta = 1, \quad (4.4)$$

$$\text{Em } S_I: \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0,$$

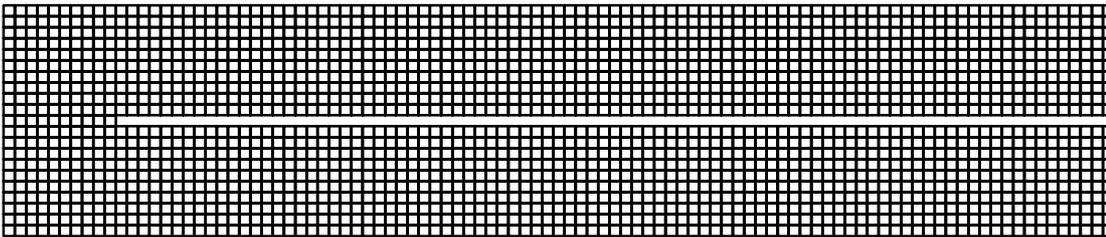
$$\text{Em } S_S: \quad \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0,$$

sendo a velocidade de referência U_0 igual a uma velocidade média na entrada.

2506 elementos- $\Delta X \approx 0,166$ e $\Delta Y = 0,1$



4010 elementos- $\Delta X = 0,1$ e $\Delta Y = 0,1$



8241 elementos- $\Delta X \approx 0,049$ e $\Delta Y = 0,1$

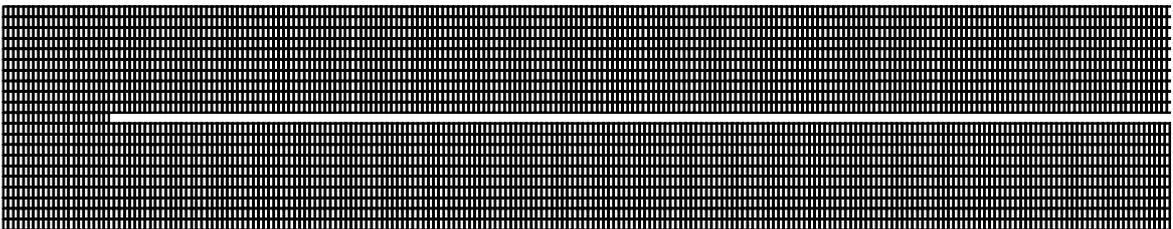


Figura 4.16 - Malhas utilizadas no estudo da independência da malha no Caso 2.

Tabela 4.6 - Desvios do Nusselt médio na superfície superior aquecida da placa.

Elementos	Re = 50	Re = 100	Re = 1000
	Nu	Nu	Nu
2506	1,5200	2,6225	2,4650
4010	1,5790 (3,74%)	2,8595 (8,23%)	2,4110 (2,24%)
8241	1,6214 (2,62%)	3,019 (5,28%)	2,4275 (0,68%)

A tabela 4.6 mostra os desvios do número de Nusselt médio em toda a superfície superior aquecida da placa para $Gr = 1,2 \times 10^5$. Devido ao custo computacional, a malha com 4010 elementos quadrilaterais é escolhida para investigar os resultados da transferência de calor nesta geometria.

4.2.4 – Estudo da Independência da Malha para os Casos 3.1, 3.2, 3.3

Apesar de serem problemas com números de fontes diferentes, somente um caso será escolhido para fazer o estudo da independência da malha. Por ser mais abrangente e por envolver maiores temperaturas, será escolhido o problema de convecção mista em um canal inclinado com três fontes de calor discreta, como mostra a figura 4.17.

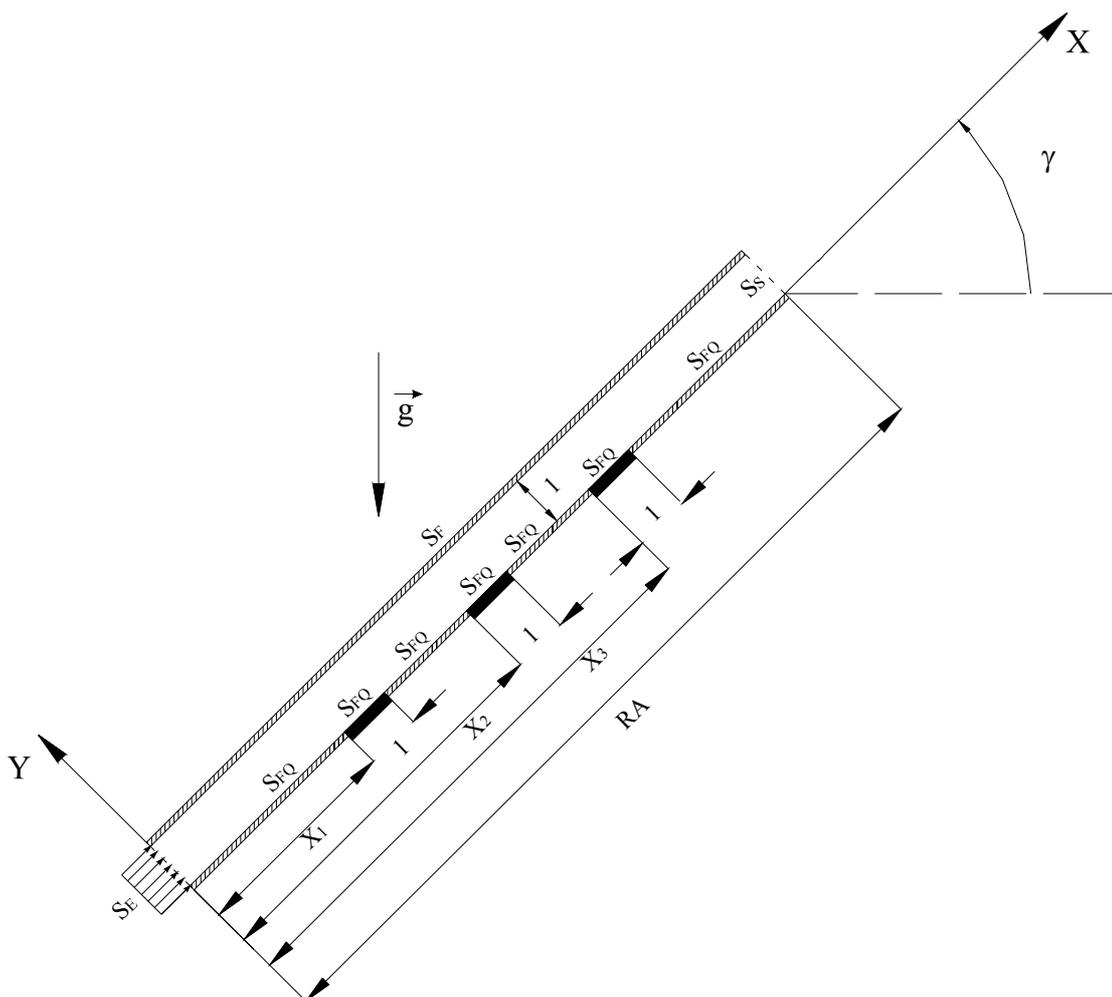


Figura 4.17 - Canal com fontes de calor para estudo da independência da malha.

A figura 4.18 mostra visões parciais das três malhas estruturadas utilizadas para fazer a análise da independência da malha.

As condições iniciais e de contorno adimensionais são dadas por:

i) Condições iniciais ($\tau = 0$):

$$\text{Em } \Omega: \quad P = 1, U = V = 0, \theta = 0, \quad (4.5)$$

ii) Condições de contorno ($\tau > 0$):

$$\text{Em } S_E: \quad U = 1, V = 0, \theta = 0,$$

$$\text{Em } S_I: \quad U = V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0,$$

$$\text{Em } S_{FQ}: \quad U = V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = -1, \quad (4.6)$$

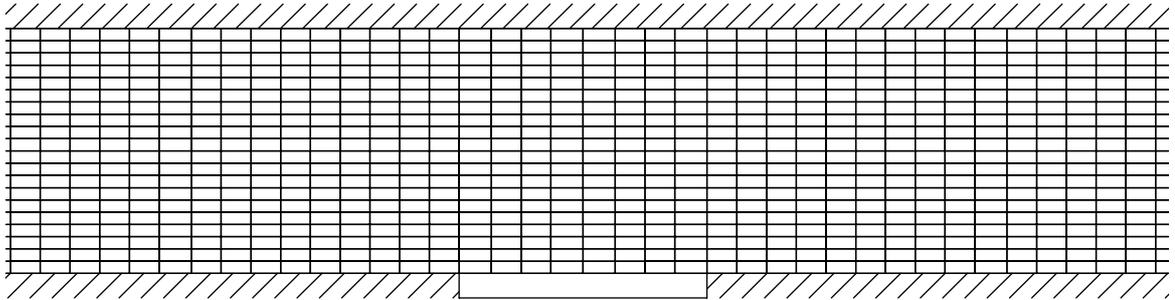
$$\text{Em } S_F: \quad U = V = 0, \theta = 0,$$

$$\text{Em } S_S: \quad \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0,$$

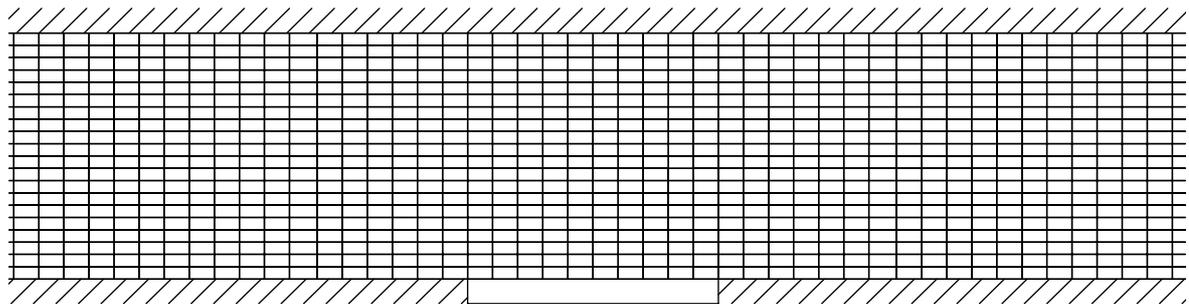
sendo a velocidade de referência U_0 igual a velocidade de entrada do canal.

A tabela 4.7 mostra os resultados dos números de Nusselt médio nas três fontes, Nu_{FQ1} , Nu_{FQ2} e Nu_{FQ3} , para números de Reynolds $Re = 1, 100$ e 1000 , onde malhas com 4980, 6000 e 7060 elementos são comparadas. Nota-se que existe uma convergência dos resultados à medida que se refina a malha. A malha com 6000 elementos é escolhida para gerar resultados dos três problemas de convecção mista em canais inclinados e com fontes discretas de calor.

5000 elementos - $\Delta X = 0,1$ e $\Delta Y = 0,05$



6000 elementos - $\Delta X = 0,1$ e $\Delta Y = 0,05$



7060 elementos - $\Delta X = 0,08$ e $\Delta Y = 0,05$

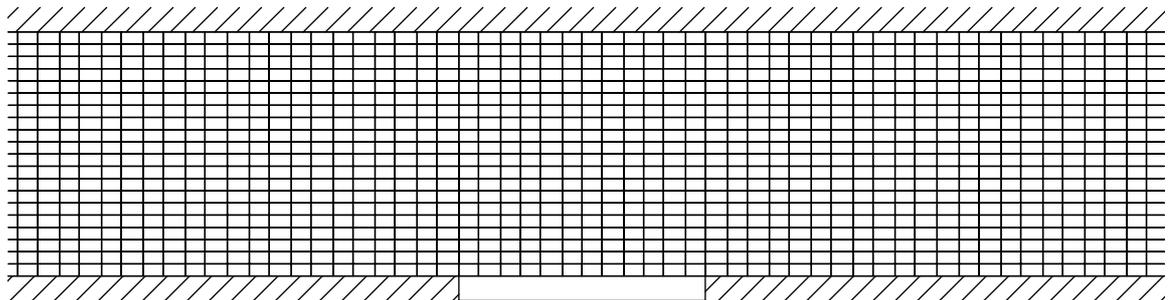


Figura 4.18 - Malhas utilizadas no estudo da independência da malha nos Casos 3.1, 3.2 , 3.3.

Tabela 4.7 - Nusselt médios nas fontes para um canal com 3 fontes de calor, $Gr = 10^5$.

Malha		$\gamma = 0^\circ$			$\gamma = 90^\circ$		
		Re = 1	Re = 100	Re = 1000	Re = 1	Re = 100	Re = 1000
4980	Nu _{FQ1}	5,2373	6,7783	13,7493	5,8639	7,4428	13,7701
	Nu _{FQ2}	5,2365	5,8323	11,8869	5,2497	6,7257	11,9405
	Nu _{FQ3}	5,2366	5,3356	10,9598	5,0177	6,2511	11,0379
6000	Nu _{FQ1}	5,2653 (0,53%)	6,8065 (0,41%)	13,7579 (0,06%)	5,8641 (0,003%)	7,4574 (0,20%)	13,7782 (0,06%)
	Nu _{FQ2}	5,2646 (0,53%)	5,8456 (0,23%)	11,8939 (0,06%)	5,2405 (0,18%)	6,7339 (0,12%)	11,9466 (0,05%)
	Nu _{FQ3}	5,2644 (0,53%)	5,3448 (0,17%)	10,9920 (0,29%)	5,0067 (0,22%)	6,2560 (0,08%)	11,0421 (0,04%)
7060	Nu _{FQ1}	5,2826 (0,34%)	6,8208 (0,21%)	13,7635 (0,04%)	5,8566 (0,13%)	7,4662 (0,12%)	13,7833 (0,04%)
	Nu _{FQ2}	5,2819 (0,33%)	5,8534 (0,13%)	11,8979 (0,03%)	5,2304 (0,19%)	6,7391 (0,08%)	11,9502 (0,03%)
	Nu _{FQ3}	5,2819 (0,33%)	5,3506 (0,11%)	10,9685 (0,21%)	4,9981 (0,17%)	6,2597 (0,06%)	11,0453 (0,03%)

4.2.5 – Estudo da Independência da Malha para o Caso 4.1

A figura 4.19 mostra, para a análise, a geometria e as superfícies do contorno do problema.

As condições iniciais e de contorno adimensionais são dadas por:

i) Condições iniciais ($\tau = 0$):

$$\text{Em } \Omega: \quad P = 1, U = V = 0, \theta = 0, \quad (4.7)$$

ii) Condições de contorno ($\tau > 0$):

$$\begin{aligned}
 \text{Em } S_I: \quad & U = V = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, \\
 \text{Em } S_F: \quad & U = V = 0, \quad \theta = 0, \\
 \text{Em } S_Q: \quad & U = V = 0, \quad \theta = 1, \\
 \text{Em } S_{CQ}: \quad & \theta = 1, \quad \begin{cases} U = \sin \alpha, \quad V = -\cos \alpha - \text{sentido horário,} \\ U = -\sin \alpha, \quad V = \cos \alpha - \text{sentido anti-horário,} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

sendo a velocidade de referência $U_0 = r\omega$ e ω a velocidade tangencial do cilindro. As condições de contorno em S_{CF} e S_{CQ} para as velocidades U e V fazem com que o módulo da resultante sobre a superfície cilíndrica seja sempre igual a 1.

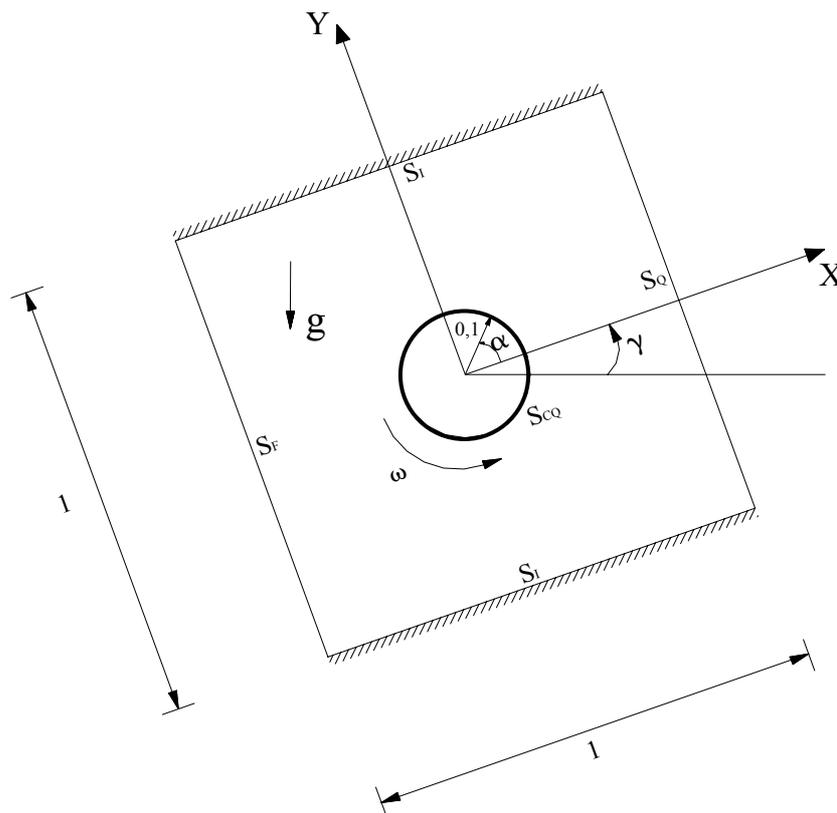
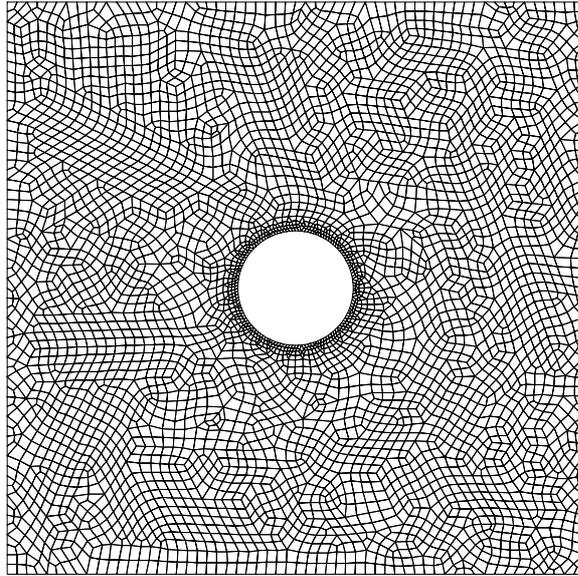


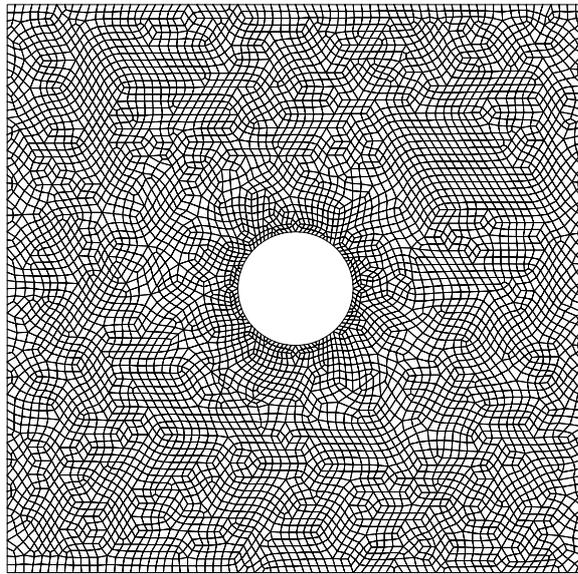
Figura 4.19 - Cavidade quadrada com um cilindro rotativo para estudo da independência da malha.

A independência da malha é analisada considerando três malhas não-estruturadas mostradas na figura 4.20, como segue:

4354 elementos



6046 elementos



8144 elementos

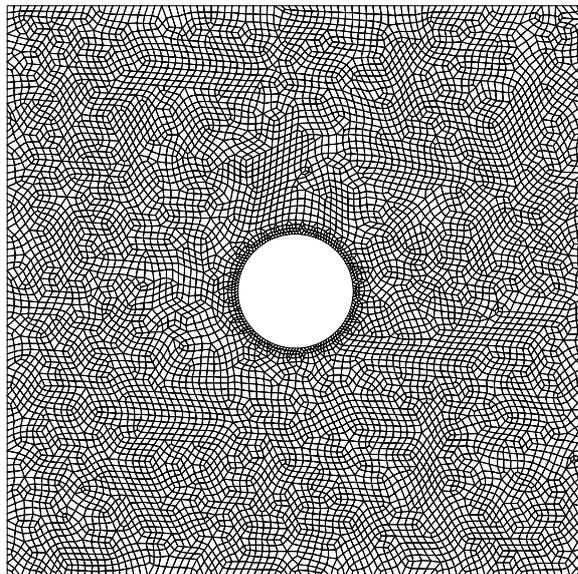


Figura 4.20 - Malhas utilizadas no estudo da independência da malha para o Caso 4.1.

A tabela 4.8 mostra os números de Nusselt médios para as superfícies fria (Nu_F), quente (Nu_Q) e do cilindro (Nu_{CQ}) para $Gr = 10^5$ e números de Reynolds iguais a 1, 10, 100 e 1000 para as malhas da figura 4.20. Os dois sentidos opostos de rotação do cilindro são também considerados. Como se pode notar, à medida que o número de elementos aumenta, os desvios tendem à decrescer. O desvio mínimo encontrado para o número de Nusselt médio é de 0,006% para o casos onde $Re = 100$ com o cilindro girando no sentido anti-horário para a malha com 8144 elementos. O maior desvio é de 8,4% para a malha com 6046 elementos na superfície fria para o caso de sentido horário. No geral, pode ser notada uma boa concordância não somente com os casos com o cilindro girando no sentido horário, mas também com aqueles com o cilindro girando no sentido anti-horário. A malha com 8144 elementos é escolhida para discretizar o problema de convecção natural em uma cavidade com um cilindro rotativo interno.

Tabela 4.8 - Desvios para as malhas com 4354, 6046 e 8144 elementos e $Gr = 10^5$.

Horário - CWR									
	4354 elementos			6046 elementos			8144 elementos		
Re	Nu_F	Nu_Q	Nu_{CQ}	Nu_F	Nu_Q	Nu_{CQ}	Nu_F	Nu_Q	Nu_{CQ}
1	5,7776	2,7676	4,1315	5,6246 (2,72%)	2,8326 (2,29%)	4,2351 (2,45%)	5,5367 (1,59%)	2,8317 (0,03%)	4,2711 (0,84%)
10	5,7943	2,7754	4,1552	5,6518 (2,52%)	2,8423 (2,36%)	4,2602 (2,46%)	5,5589 (1,67%)	2,8414 (0,03%)	4,2999 (0,92%)
100	5,3126	2,6429	3,6425	5,1827 (2,51%)	2,7183 (2,77%)	3,7135 (1,91%)	5,0839 (1,94%)	2,7148 (0,13%)	3,7524 (1,04%)
1000	3,5262	1,5343	2,8640	3,2291 (9,20%)	1,4501 (5,81%)	2,6952 (6,26%)	3,1447 (2,68%)	1,4400 (0,70%)	2,8435 (5,52%)
Anti-horário - CCWR									
1	5,7705	2,7647	4,1225	5,6149 (2,77%)	2,8293 (2,28%)	4,2254 (2,4%)	5,5281 (1,57%)	2,8285 (0,03%)	4,2607 (0,83%)
10	5,7236	2,7483	4,0641	5,5560 (3,02%)	2,8116 (2,22%)	4,1620 (2,35%)	5,4746 (1,49%)	2,8105 (0,04%)	4,1943 (0,77%)
100	5,1766	2,8585	3,0054	4,9339 (4,92%)	2,9360 (2,64%)	3,0039 (0,05%)	4,8711 (1,29%)	2,9362 (0,01%)	3,0542 (1,65%)
1000	5,3368	3,2304	2,7259	5,0144 (6,43%)	3,3066 (2,30%)	2,7023 (0,87%)	4,9917 (0,46%)	3,3266 (0,60%)	2,7510 (1,77%)

4.2.6 – Estudo da Independência da Malha para o Caso 4.2

A figura 4.21 apresenta a geometria e as superfícies do contorno do problema para a análise. As condições iniciais e de contorno adimensionais são dadas por:

i) Condições iniciais ($\tau = 0$):

$$\text{Em } \Omega: \quad P = 1, U = V = 0, \theta = 0, \quad (4.9)$$

ii) Condições de contorno ($\tau > 0$):

$$\text{Em } S_I: \quad U = V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0,$$

$$\text{Em } S_F: \quad U = V = 0, \theta = 0,$$

$$\text{Em } S_Q: U = V = 0, \theta = 1, \quad (4.10)$$

$$\text{Em } S_{CF}: \quad \theta = 0, \begin{cases} U = \sin \alpha, & V = -\cos \alpha - \text{sentido horário}, \\ U = -\sin \alpha, & V = \cos \alpha - \text{sentido anti-horário}, \end{cases}$$

$$\text{Em } S_{CQ}: \quad \theta = 1,$$

sendo a velocidade de referência $U_0 = r\omega$ e ω a velocidade tangencial dos cilindros. As condições de contorno em S_{CF} e S_{CQ} para as velocidades U e V fazem com que o módulo da resultante sobre a superfície cilíndrica seja sempre igual a 1.

A figura 4.22 mostra duas malhas não-estruturadas as quais são usadas para conduzir o estudo da convergência dos resultados quanto à independência da malha usando malhas com 5926 e 8176 elementos quadrilaterais com quatro nós. Para ambas as malhas, os incrementos de tempo são: $\Delta\tau = 0,01$ para $Gr = 10^3$ e 10^4 . Para $Gr = 10^5$, quando a malha tem 5926 elementos, usou-se $\Delta\tau = 0,005$ e quando a malha tem 8176 elementos usou-se $\Delta\tau = 0,001$, em geral. O número de iterações varia de aproximadamente 500 a 100000 para atingir uma convergência aceitável dos números de Nusselt com uma precisão de 10^{-4} .

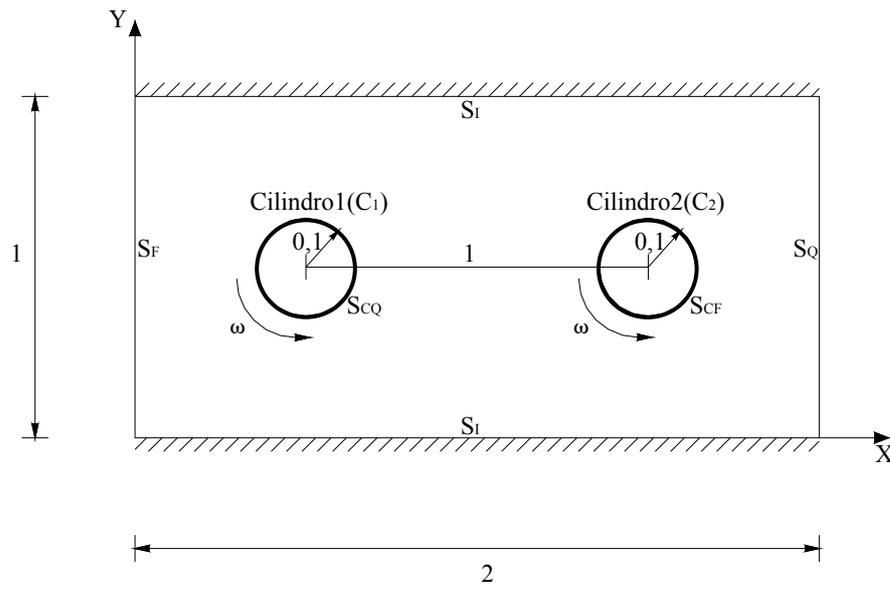
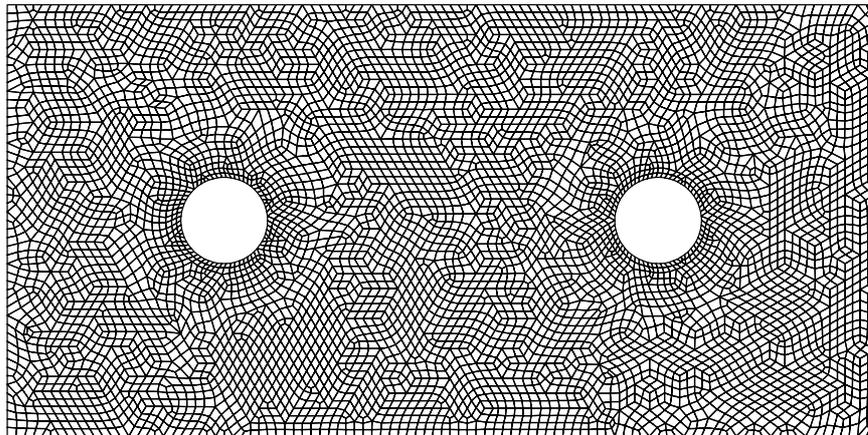


Figura 4.21 - Cavidade com dois cilindros rotativos para estudo da independência da malha.

5926 elementos



8176 elementos

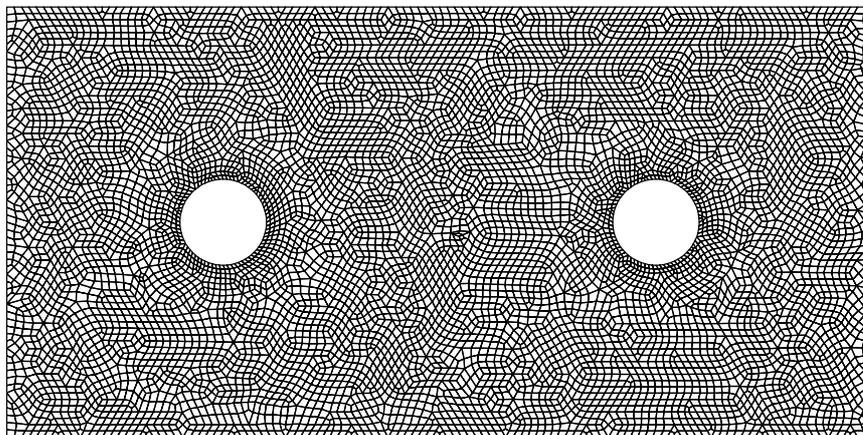


Figura 4.22 - Malhas utilizadas no estudo da independência da malha para o Caso 4.2.

O desvio varia de 0% a 9%, o que pode ser considerado bom para a convergência dos resultados à medida que a malha é refinada. A malha com 8176 elementos é escolhida para obter os resultados para o estudo da convecção natural em uma cavidade com dois cilindros rotativos no capítulo 5.

Tabela 4.9 - Desvios do número de Nusselt médio para malhas com 5926 e 8176 elementos sendo $Re = 1, 10, 100$, $Gr = 10^3, 10^4, 10^5$.

		5926 elementos				8176 elementos			
Re	Gr	Nu _F	Nu _Q	Nu _{C1}	Nu _{C2}	Nu _F	Nu _Q	Nu _{C1}	Nu _{C2}
1	10 ³	1,7374	1,7451	3,5427	3,5332	1,7348 (0,15%)	1,7322 (0,74%)	3,5691 (0,74%)	3,5558 (0,64%)
10	10 ³	1,9323	1,9439	3,5692	3,5684	1,9291 (0,17%)	1,9269 (0,88%)	3,6106 (1,15%)	3,6020 (0,93%)
100	10 ³	2,5102	2,5314	3,6442	3,6600	2,5312 (0,83%)	2,5252 (0,25%)	3,7158 (1,93%)	3,7022 (1,14%)
1	10 ⁴	2,2012	2,2198	4,1624	4,1488	2,1976 (0,16%)	2,1921 (1,26%)	4,2114 (1,16%)	4,1904 (0,99%)
10	10 ⁴	2,3687	2,3877	4,0012	4,0020	2,3645 (0,18%)	2,3598 (1,18%)	4,0664 (1,60%)	4,0599 (1,43%)
100	10 ⁴	2,6432	2,6661	3,6763	3,6916	2,6597 (0,62%)	2,6528 (0,50%)	3,745 (1,83%)	3,7311 (1,06%)
1	10 ⁵	4,3935	4,4463	6,6572	6,6343	4,3934 (0%)	4,3745 (1,64%)	6,7587 (1,50%)	6,6837 (0,74%)
10	10 ⁵	4,3674	4,4197	6,5408	6,5302	4,3648 (0,06%)	4,3477 (1,66%)	6,6549 (1,71%)	6,5921 (0,94%)
100	10 ⁵	3,5188	3,5649	4,1121	4,1150	3,5219 (0,01%)	3,5053 (1,70%)	4,1516 (0,95%)	4,1363 (0,52%)

Capítulo 5

RESULTADOS

5.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados das distribuições de temperaturas, velocidades e números de Nusselt locais e médios para os quatro casos apresentados no Capítulo 2, ou seja:

Caso 1 - Convecção mista em um canal horizontal com um degrau na entrada,

Caso 2 - Convecção mista em um canal com uma curva de 180°,

Caso 3 - Convecção mista em canais inclinados com fontes discretas de calor,

Caso 4 - Convecção mista em cavidades inclinadas com cilindros internos rotativos.

Os casos terão seus sub-casos e a nomenclatura para referenciá-los, no momento apropriado, será caso a.b, onde a e b significam o caso e seu sub-caso correspondente, respectivamente. Todos os casos apresentados aqui têm escoamento bidimensional laminar e não-permanente, embora vários resultados sejam apresentados após ter atingido o regime permanente, sendo que o ar é tido como fluido do escoamento. Um pseudo-transiente é usado em todo o trabalho. Foi feito um estudo dos custos computacionais e da convergência no apêndice G, para vários casos estudados deste trabalho. Ainda, resíduos dos campos de velocidade e temperatura são tabelados no apêndice G, mostrando assim a ordem da convergência. O apêndice E apresenta um estudo da conservação de massa para casos do presente trabalho, com valores extremos de parâmetros físicos utilizados neste trabalho.

5.2 – CASO 1: CONVECÇÃO MISTA EM CANAL HORIZONTAL COM UM DEGRAU NA ENTRADA

A figura 5.1 mostra a geometria e as condições de contorno adimensionais em um canal com degrau e com perfis de velocidade e temperatura na entrada e, também, com a superfície superior sendo resfriada e a inferior aquecida.

A tabela 5.1 mostra os parâmetros adimensionais adotados neste problema e os números de Nusselt médios na parede superior do canal. Estes resultados são obtidos para diferentes passos de tempo; sendo eles: $\Delta\tau = 0,01$ (casos 1.1 e 1.2), $\Delta\tau = 0,005$ (casos 1.3 e 1.4), $\Delta\tau = 0,002$ (caso 1.5) e $\Delta\tau = 0,0015$ (caso 1.6). A figura 5.2 apresenta a distribuição de temperatura ao longo do canal para todos os casos da tabela 5.1. Para todas as situações estudadas neste caso, as plumas térmicas estão presentes, como pode ser notado na figura 5.2. Uma pluma térmica tem a forma de um cogumelo e este formato é fortemente caracterizado pelo tipo de recirculação do escoamento dentro do cogumelo caracterizado por forças de empuxo. No centro da pluma térmica se encontra o fluido mais quente vindo da placa aquecida inferior. Nos lados externos da pluma está o fluido mais frio vindo da placa resfriada superior. Para números de Reynolds extremamente baixos, este comportamento é chamado de convecção de Rayleigh-Bernard. Pode ser observado que as isotermas têm um comportamento repetitivo ao longo do canal caracterizado pela presença de plumas térmicas e que cujos tamanhos aumentam à medida que o escoamento forçado na entrada do canal fica mais forte. Este comportamento está relacionado a uma troca de calor mais intensa ao longo da parede, como pode ser notado na figura 5.3, onde o número de Nusselt médio na parede fria é plotado variando-se os números de Froude ($Fr = 1/300, 1/150, 1/75$) e Reynolds ($Re = 10$ e 20).

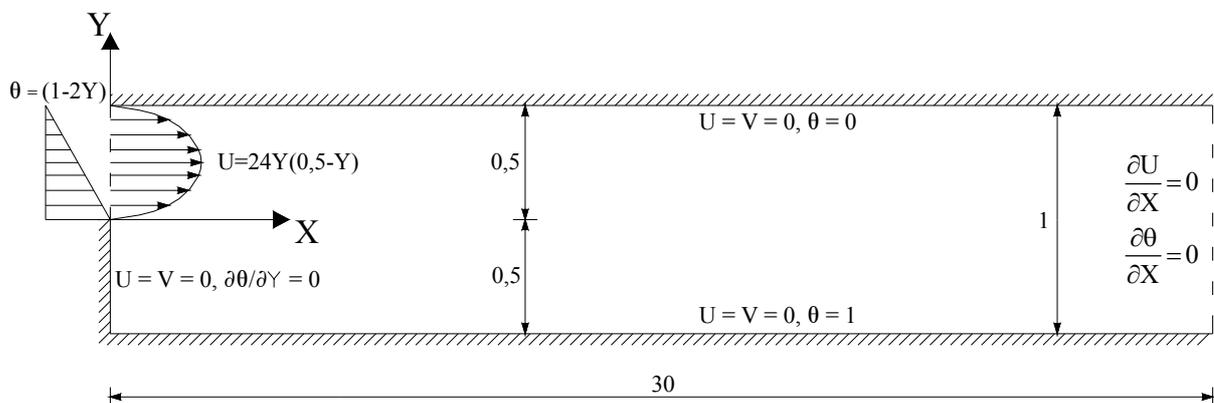


Figura 5.1 - Geometria do canal e condições de contorno.

Tabela 5.1 - Parâmetros Fr, Re, Gr, e o número de Nusselt médio na parede superior.

	Pr	Fr	Re	Gr	Nu
Caso 1.1	0,7	1/75	10	$7,5 \times 10^3$	2,0485
Caso 1.2	0,7	1/150	10	$1,5 \times 10^4$	2,4824
Caso 1.3	0,7	1/300	10	$3,0 \times 10^4$	2,6981
Caso 1.4	0,7	1/75	20	$3,0 \times 10^4$	2,8447
Caso 1.5	0,7	1/150	20	$6,0 \times 10^4$	3,1655
Caso 1.6	0,7	1/300	20	$1,2 \times 10^5$	3,2585

Como mencionado anteriormente, pode ser visto na figura 5.4 que as células térmicas ficam maiores à medida que Fr decresce e Re aumenta. Observa-se claramente que as isothermas ficam mais próximas umas das outras na parede superior aproximadamente no meio de cada pluma térmica, considerando-se os casos isoladamente. Por outro lado, este mesmo comportamento é encontrado próximo à parede inferior, mas entre duas plumas térmicas consecutivas. Nestas duas regiões de linhas de temperaturas mais próximas umas das outras, encontram-se maiores gradientes de temperatura, caracterizando maiores taxas de transferência de calor local nestas mesmas regiões. Comparando-se os casos 1.1, 1.2 e 1.3, à medida que Fr decresce, as isothermas ficam até mesmo mais próximas nas regiões mencionadas anteriormente. O mesmo acontece para cada par de casos tais como (1.1-1.4), (1.2-1.5) e (1.3-1.6). Tomando como referência o tamanho da célula de recirculação do caso 1.1, aquelas presentes nos casos 1.2 e 1.3 são 20% e 60% maiores, respectivamente. Além disso, se o tamanho da célula de recirculação do caso 1.4 é agora tomada como referência, aquelas nos casos 1.5 e 1.6 são aproximadamente 55% e 145% maiores, respectivamente. Tal comportamento é aproximadamente o mesmo para as plumas térmicas. O caso 1.6 é o caso que exibe o maior número de Nusselt. As células de recirculação se expandem horizontalmente e verticalmente, forçando o escoamento principal a passar por passagens menores. Assim, o escoamento é fortemente caracterizado pela recirculação. É importante mencionar o fato de que o desenvolvimento do escoamento é caracterizado por células de recirculação sendo transportadas ao longo do canal, alternando seus sentidos de rotação nas células adjacentes.

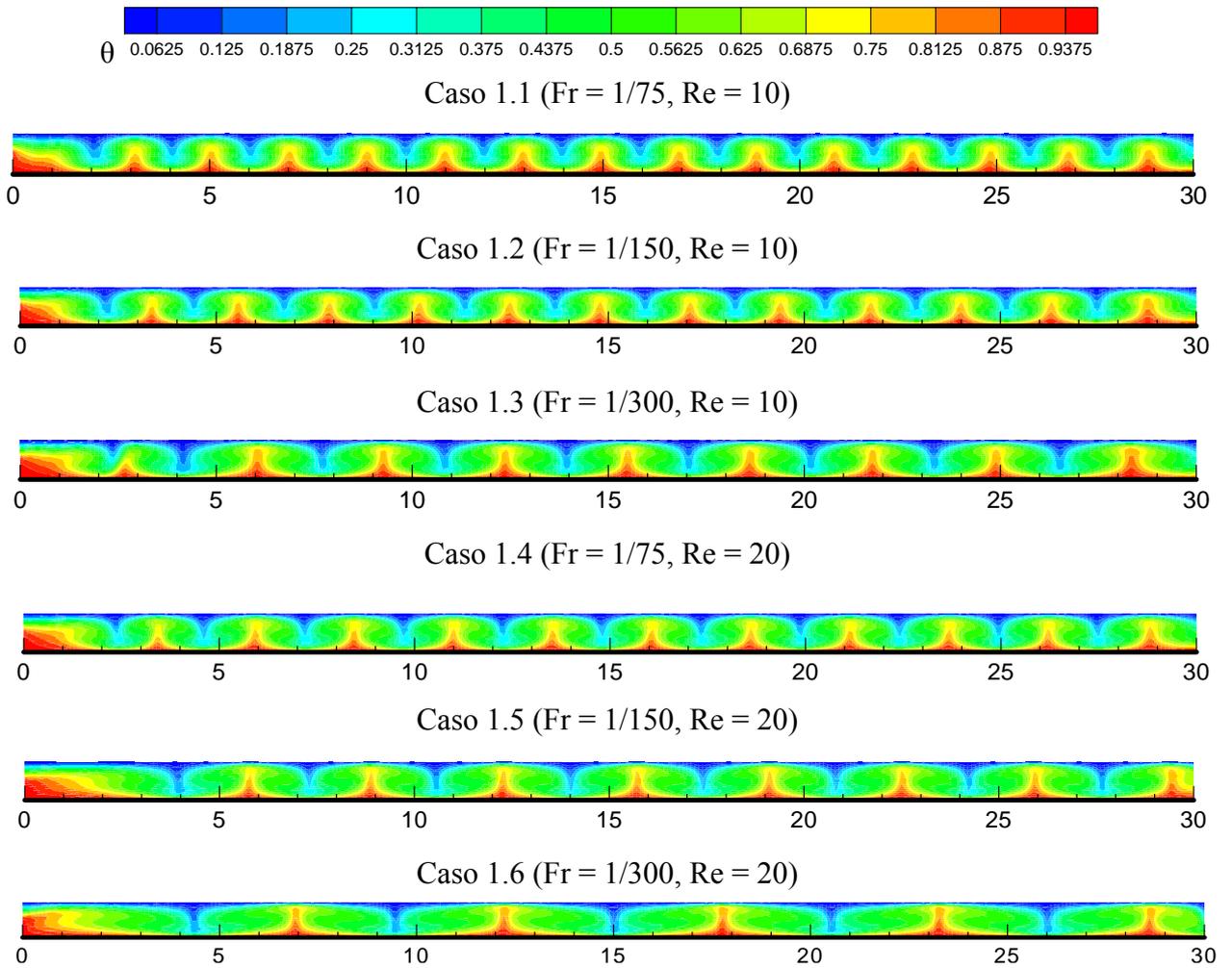


Figura 5.2 - Distribuição da temperatura ao longo do canal com Fr, Re, e Gr variando, respectivamente, de 1/75 a 1/300, 10 a 20, e $7,5 \times 10^3$ a $1,20 \times 10^5$.

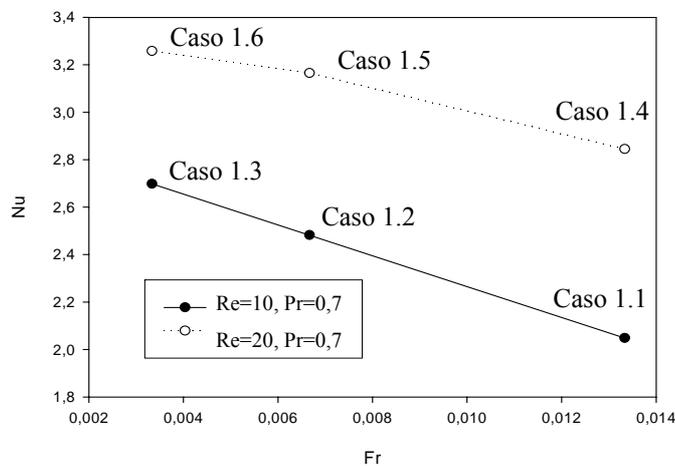


Figura 5.3 - Número de Nusselt médio ao longo da parede fria versus número de Froude.

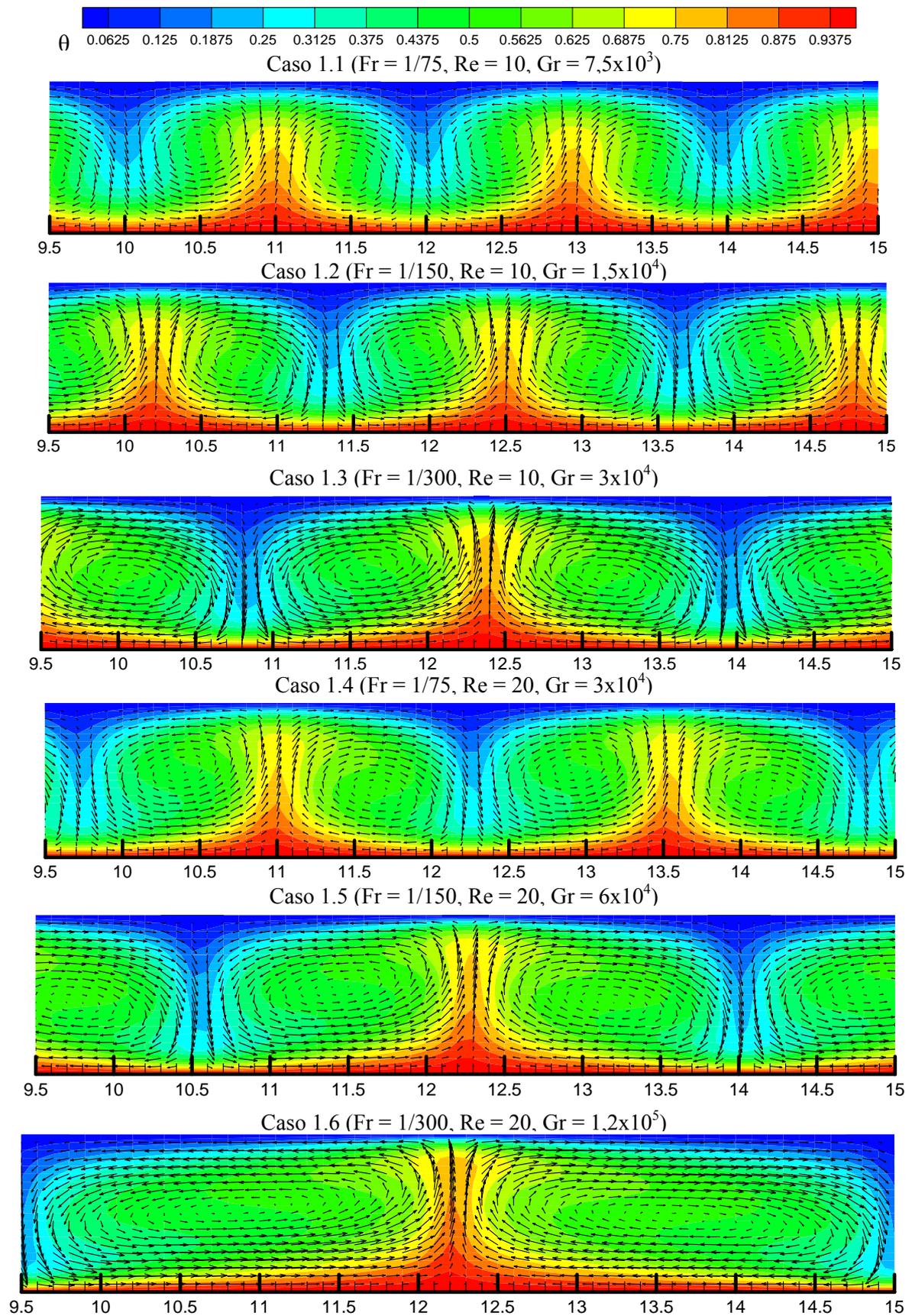


Figura 5.4 - Células de recirculação e térmicas com Fr , Re e Gr variando, respectivamente, de $1/75$ a $1/300$, 10 a 20 , e $7,5 \times 10^3$ a $1,20 \times 10^5$. O canal é mostrado parcialmente.

A figura 5.5 mostra a distribuição do número de Nusselt médio ao longo das superfícies superior e inferior para o caso 1.5, onde $Fr = 1/150$ e $Re = 20$. Este caso precisou de 32500 iterações com passos de tempo $\Delta\tau = 0,002$ para atingir o regime quase-periódico, quando aproximadamente τ for igual a 65. Os valores médios de Nu para cada curva estão próximos a 3.2, considerando $\tau \geq 65$.

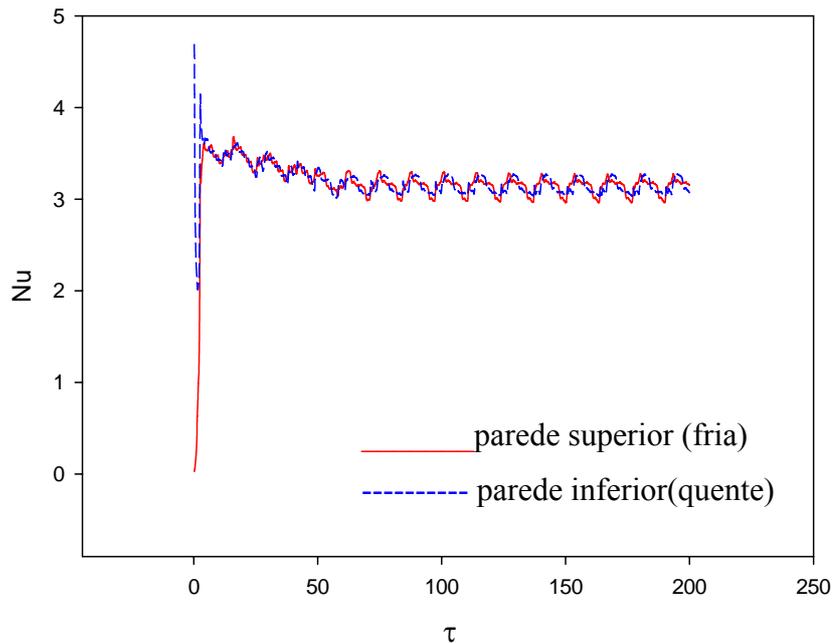


Figura 5.5 - Nu calculado nas superfícies fria e quente no tempo τ para o caso 1.5.

Conclui-se então o estudo da transferência de calor por convecção mista no canal com degrau aquecido na parede inferior. Verificou-se a influência do número de Froude (1/75, 1/150, 1/300) e do número de Reynolds (10 e 20). Como esperado, o número de Nusselt aumentou à medida que se aumentou Reynolds. Para o caso 1.6, onde $Fr = 1/300$, $Re = 20$ e $Gr = 6 \times 10^4$, o escoamento foi principalmente caracterizado por células de recirculação maiores. Ambos os tamanhos das células térmicas e de recirculação para o caso 1.3 ($Fr = 1/300$, $Re = 10$, $Gr = 3 \times 10^4$) e o caso 1.6 ($Fr = 1/300$, $Re = 20$, $Gr = 1,2 \times 10^5$) tiveram seus tamanhos aumentados de mais de 100% de acordo com seus casos de referência, como por exemplo, caso 1.1 ($Fr=1/75$, $Re = 10$, $Gr = 7,5 \times 10^3$) e caso 1.4 ($Fr=1/75$, $Re = 20$, $Gr = 3 \times 10^4$).

5.3 – CASO 2: CONVECÇÃO MISTA EM UM CANAL COM UMA CURVA DE 180°

A figura 5.6 mostra a geometria e as condições de contorno adimensionais num canal com curva de 180° e com perfis de velocidade e temperatura na entrada (canal inferior). As superfícies inferior e superior do canal superior são, respectivamente aquecida e isolada. As demais superfícies são resfriadas. Neste tipo de problema, células de recirculação geralmente aparecem depois da curva devido à presença de maiores gradientes de pressão que o escoamento encontra nesta região que podem ser originados tanto por condições térmicas como também por condições geométricas. Estas separações do escoamento implicam em recolamento de fluido frio na parede aquecida, melhorando trocas de calor nestas regiões. Posteriormente, este fenômeno físico será mais bem entendido.

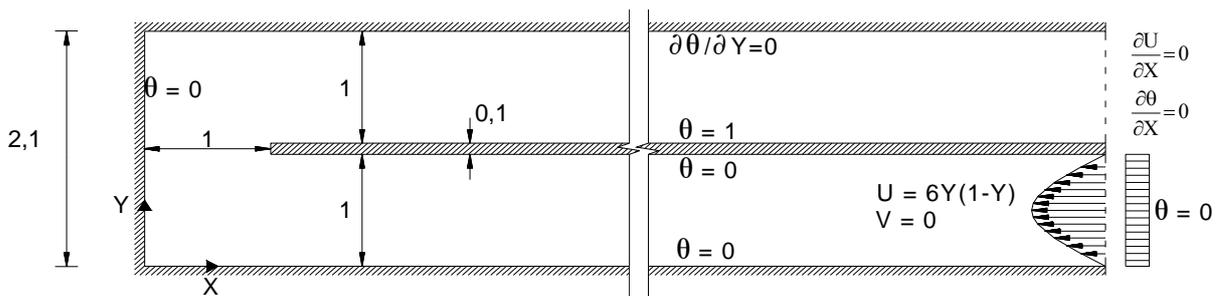


Figura 5.6 - Geometria e condições de contorno do canal.

A figura 5.7 mostra o número de Nusselt médio Nu como função do número de Reynolds Re . O número de Nusselt médio é calculado sobre a superfície $Y = 1,1$, fazendo X ser variado ao longo de três distâncias, isto é, Nu_5 em $1 \leq X \leq 5$, Nu_{15} em $1 \leq X \leq 15$, e Nu_{20} em $1 \leq X \leq 20$. Nu_5 , Nu_{15} e Nu_{20} são obtidos para Re igual a 10, 50, 100, 300, 500, 700, 800 e 1000; e Gr igual a 3×10^4 , 6×10^4 e $1,2 \times 10^5$. Pode ser notado que para Re até aproximadamente 300 que o processo de transferência de calor é afetado mais significativamente nas três faixas de distâncias.

A análise da transferência de calor mantendo Re constante e variando Gr é apresentada na figura 5.8, onde para cada valor de Re , isto é, $Re = 10, 50, 100$, e 300, o número de Grashof tem os seguintes valores: $Gr = 1, 10^3, 5 \times 10^3, 3 \times 10^4, 6 \times 10^4$ e $1,2 \times 10^5$. Para os casos onde $Re = 300$, a influência predominante da convecção forçada sobre a convecção natural é evidente. Praticamente, Nu_5, Nu_{15} e Nu_{20} não variam e existe uma tendência de que

para $Re = 300$, o recolamento do escoamento na superfície aquecida, $Y = 1,1$, ocorra mais próximo à saída do canal superior, aumentando assim a troca de calor nesta região.

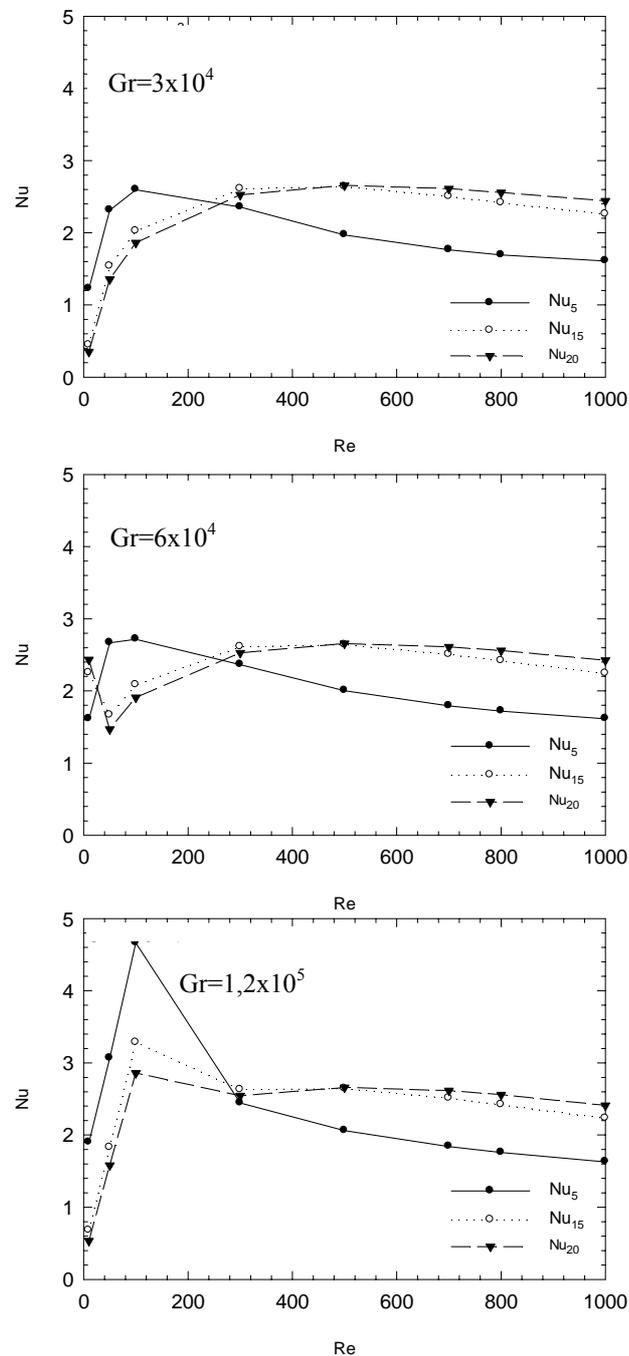


Figura 5.7 - Nu_5 , Nu_{15} e Nu_{20} versus Re .

Ainda com relação à figura 5.8, para a mesma faixa de Re , $300 \leq Re \leq 1000$, Nu_5 apresenta o menor valor, caracterizando a posição de recolamento estar mais distante da faixa sobre a qual Nu_5 é integrado. Para $Re \leq 300$, uma intensificação da convecção ocorre à

medida que a convecção forçada diminui. É observado que para $Re = 100$, o alto valor para Nu_5 quando $Gr = 1,2 \times 10^5$ é igual a 4,665. Para $Re = 300$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$, Nu_5 , decresce mais fortemente. Mais adiante, este fato será novamente mencionado, quando as distribuições de velocidades, juntamente com as isothermas, forem apresentadas, dando assim mais esclarecimento à relação entre os campos do escoamento e da temperatura.

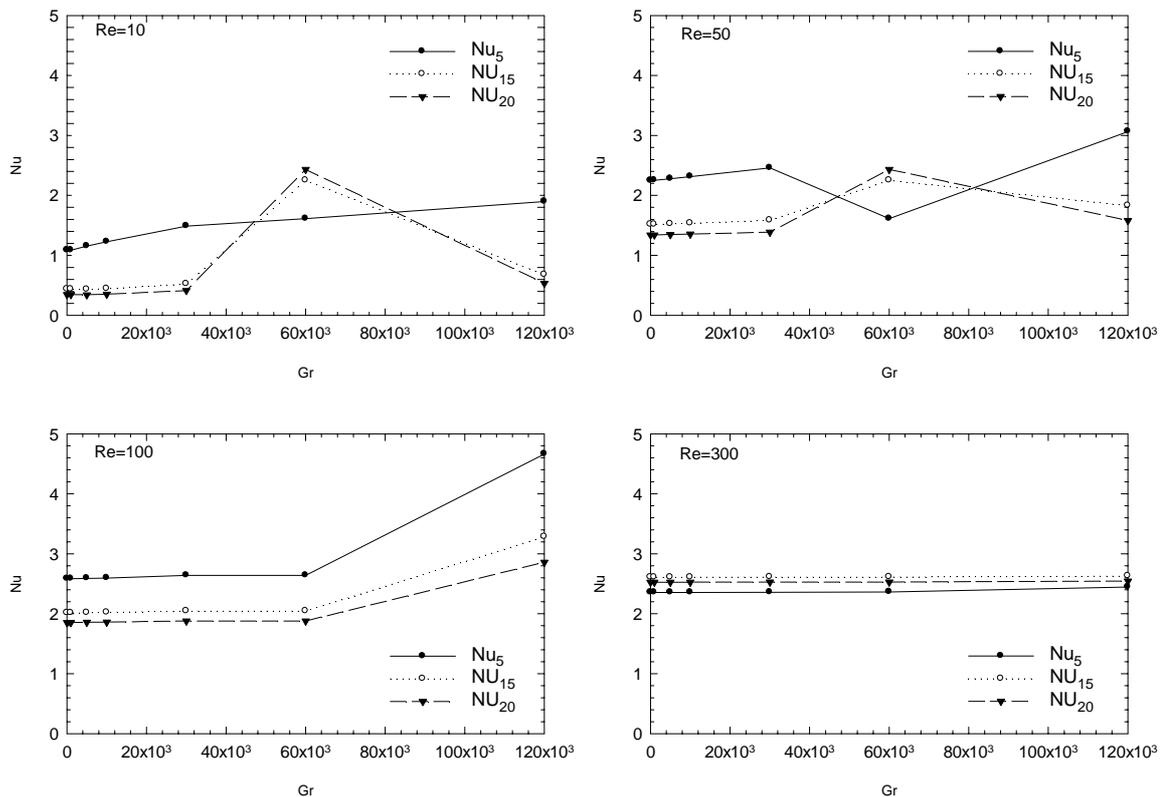


Figura 5.8 - Nu_5 , Nu_{15} , Nu_{20} versus Gr para $Re = 10, 50, 100$ e 300 .

Até agora, os números de Nusselt foram estudados para $Y = 1,1$ em três regiões na direção X , isto é, Nu_5 em $1 \leq X \leq 5$, Nu_{15} em $1 \leq X \leq 15$ e Nu_{20} em $1 \leq X \leq 20$. Estes valores foram comparados extensivamente uns com os outros. A figura 5.9 traz uma perspectiva diferente para o estudo de Nu_5 , Nu_{15} e Nu_{20} versus Re , onde em cada caso o número de Grashof Gr tem os valores $1, 10^3, 5 \times 10^3, 10^4, 3 \times 10^4, 6 \times 10^4$ e $1,2 \times 10^5$. Agora, observa-se claramente que para Nu_5, Nu_{15}, Nu_{20} e Re igual a 300 , o comportamento da convecção não muda significativamente. Novamente, para baixos Re , a transferência de calor varia mais fortemente em cada caso, ao passo que para $Re = 100$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$, a transferência de calor atinge um valor máximo. Este comportamento será estudado posteriormente. É também interessante notar que para $Re = 50$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$, Nu_{15} e Nu_{20} são significativamente menores que Nu_5 , caracterizando maior contato do fluido frio nesta última região.

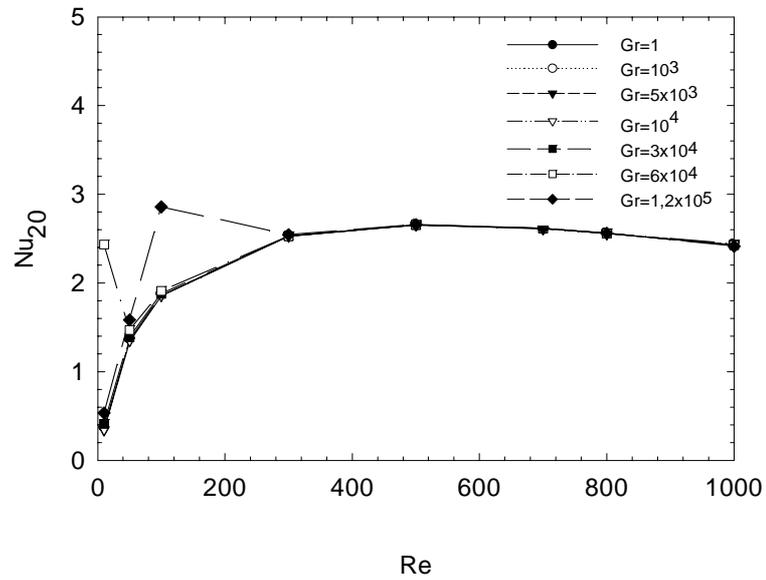
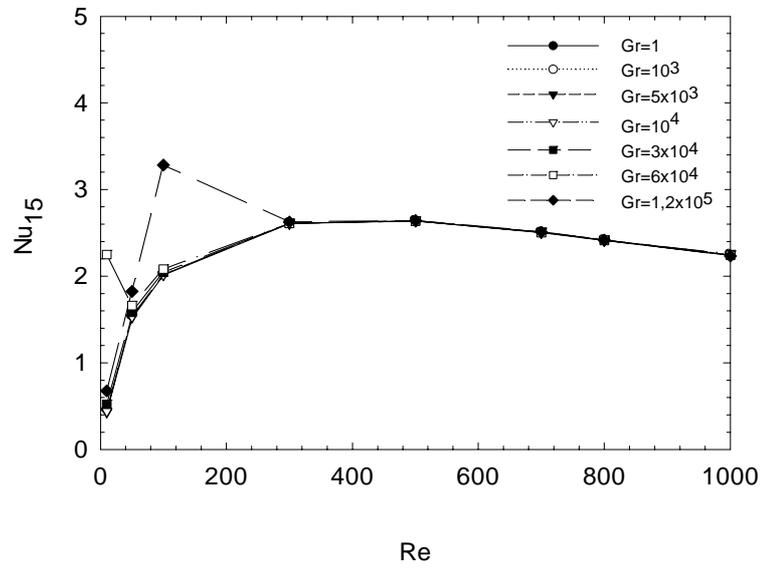
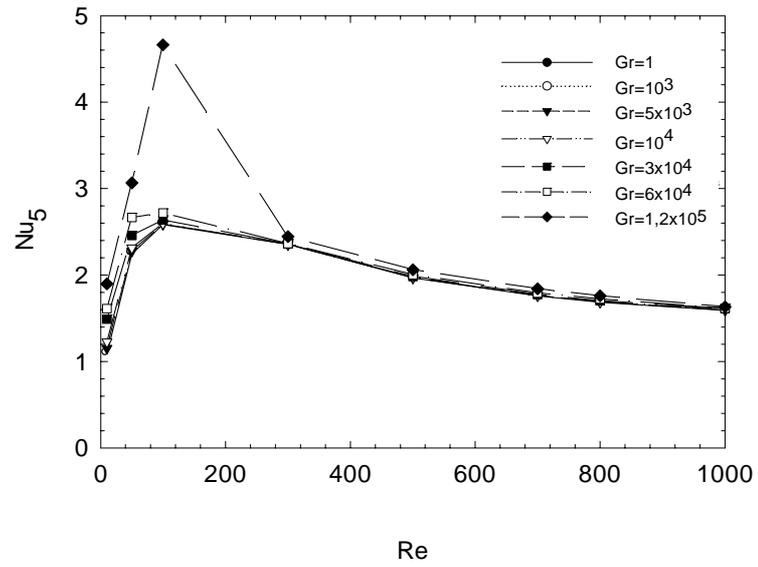


Figura 5.9 - Nu_5 , Nu_{15} , Nu_{20} versus Re para $1 \leq Gr \leq 1,2 \times 10^5$.

Até o momento todos os resultados foram mostrados para o regime permanente, embora as equações sejam apresentadas para o regime não-permanente. A figura 5.10 apresenta a variação de Nu_5 , Nu_{15} e Nu_{20} para $Re = 50, 100$; e $Gr = 3 \times 10^4, 6 \times 10^4, 1,2 \times 10^5$ no tempo adimensional τ . Praticamente, em todos os casos existem oscilações em Nu_5 , Nu_{15} e Nu_{20} no começo do tempo. Estas oscilações são causadas por instabilidades de escoamento no início do tempo. Estas condições iniciais são mais intensas para $Re = 50$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$, mas elas acabam quase desaparecendo à medida que o tempo avança e o escoamento vai se tornando mais estável. Uma grande mudança acontece entre os casos onde $Re = 100$ e $Gr = 6 \times 10^4$ e $1,2 \times 10^5$. Este último caso para $Re = 100$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$, Nu_5 , Nu_{15} e Nu_{20} atingem um regime quase-periódico, sendo que para Nu_5 , este comportamento é mais intenso. Este regime quase-periódico é atingido devido às fortes oscilações físicas do escoamento que permanecem durante todo o tempo. Isto também acontece nos casos onde $Re = 50$ e $Gr = 6 \times 10^4$ e $1,2 \times 10^5$ para Nu_{15} e Nu_{20} . Entretanto, o regime quase-periódico é quase desprezível se for comparado aos casos onde esse comportamento é mais intenso. Embora não mostrado aqui, é interessante mencionar que para $Re = 300, 500, 700, 800, 1000$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$, este comportamento quase-periódico no tempo para Nu_5 , Nu_{15} e Nu_{20} desaparece. Este regime oscilatório acontece porque no começo do escoamento, forças de empuxo dominam a convecção no domínio. À medida que o tempo aumenta, estas forças de empuxo originadas pelo fluido aquecido na placa, $Y = 1,1$, dá lugar àquelas causadas pela convecção forçada. O fluido que tenta subir é empurrado pelo fluido que é forçado a se deslocar para uma direção diferente. Assim, ao longo do tempo, os regimes quase-periódicos de Nu_5 , Nu_{15} , e Nu_{20} são suavizados à medida que Re aumenta. Uma vez que o caso onde $Re = 100$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$ mostrou um comportamento interessante para Nu_5 , a próxima análise a ser feita é a verificação do número de Nusselt local Nu_L para este caso, na região $1 \leq X \leq 5$, para se estudar o regime quase-periódico para o número de Nusselt médio Nu_5 .

A figura 5.11 mostra o número de Nusselt local sobre a superfície aquecida em três instantes de tempo $\tau = 29,375$, $\tau = 29,945$ e $\tau = 30,505$, para $Re = 100$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$. Como pode ser visto na figura 5.10, o problema já atinge o regime quase-periódico três tempos adimensionais. Estes três momentos no tempo mencionados anteriormente se referem, respectivamente, aos pontos onde Nu_5 é máximo, médio e mínimo em um comprimento de onda retirado da curva de Nu_5 da figura 5.10 para $Re = 100$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$.

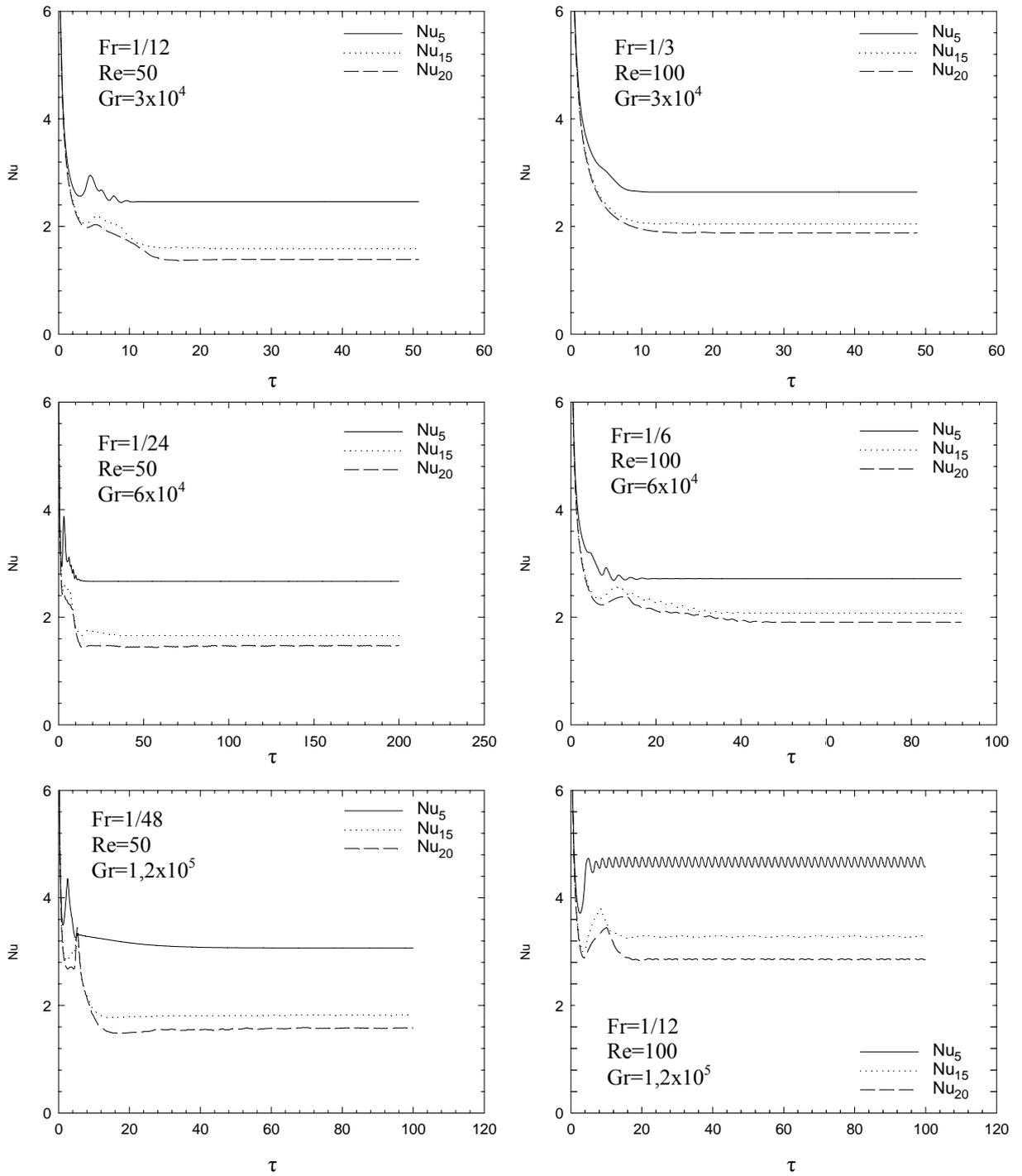


Figura 5.10 - Nu_5 , Nu_{15} , Nu_{20} versus tempo para $Re = 50, 100$ e $Gr = 3 \times 10^4, 6 \times 10^4, 1,2 \times 10^5$.

A figura 5.12 mostra o comportamento do escoamento e das isothermas para os casos da figura 5.11. Podem ser notadas as distribuições dos vetores velocidade juntamente com as isothermas ao longo da superfície aquecida nos tempos adimensionais mencionados anteriormente, $\tau = 29,375$, $\tau = 29,945$ e $\tau = 30,505$ para $Re = 100$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$. Observa-se que células de recirculação emanam durante o tempo e caminham a favor da corrente no canal superior. Existe também uma separação do escoamento na superfície adiabática ao redor da posição, $Y = 2,1$ e $X = 5$. A partir deste ponto, o fluido tende a ser aquecido de uma maneira geral, diminuindo assim a oscilação do número de Nusselt local Nu_L ao longo da superfície aquecida superior da placa.

A figura 5.13 mostra as distribuições das isothermas e vetores velocidade em todo o domínio para números de Reynolds iguais a 50, 100 300 e 500. O número de Grashof é mantido constante e igual a $1,2 \times 10^5$. Para números de Reynolds $Re = 50$ e 100, oscilações do campo de temperatura aparecem. Uma oscilação forte do escoamento pode ser observada para $Re = 100$. Em todos os casos, existe uma separação do fluido depois da curva em ambas as superfícies do canal superior. Logicamente, os pontos de recolamento destas separações caracterizam uma maior troca de calor nestas regiões.

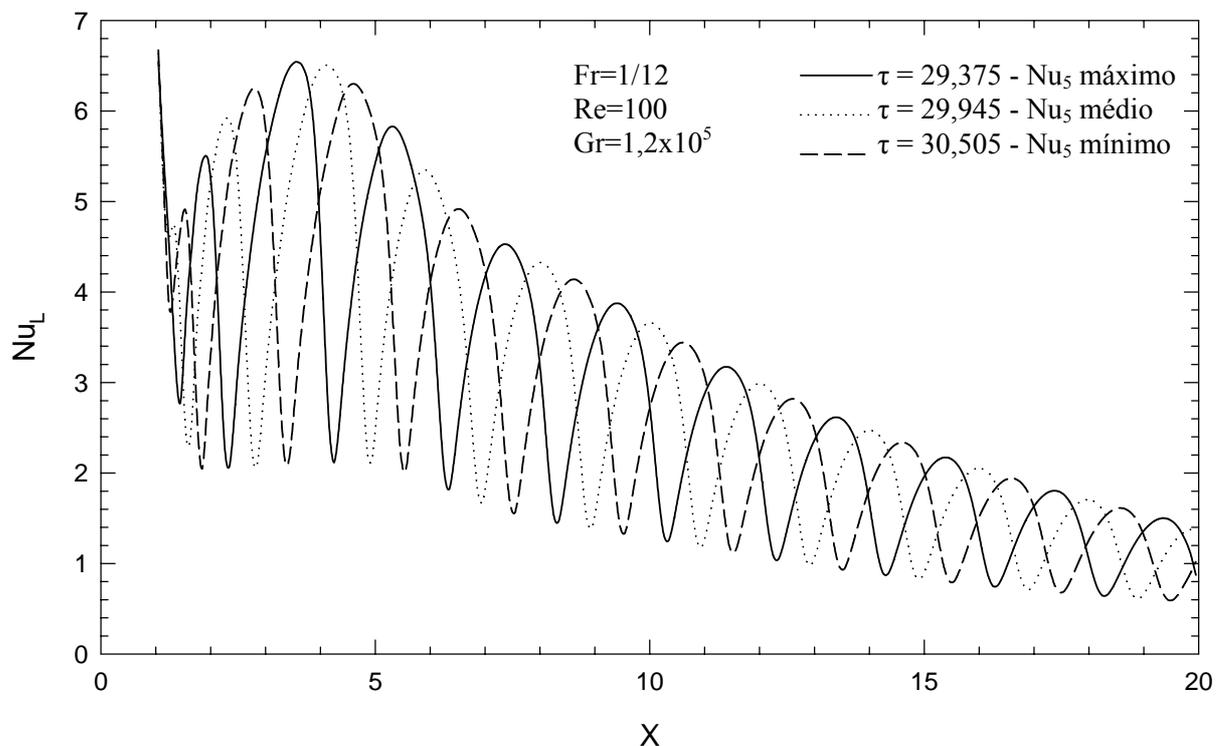


Figura 5.11 - Nu_L sobre a superfície aquecida e $1 \leq X \leq 20$ para $Re = 100$, $Gr = 1,2 \times 10^5$.

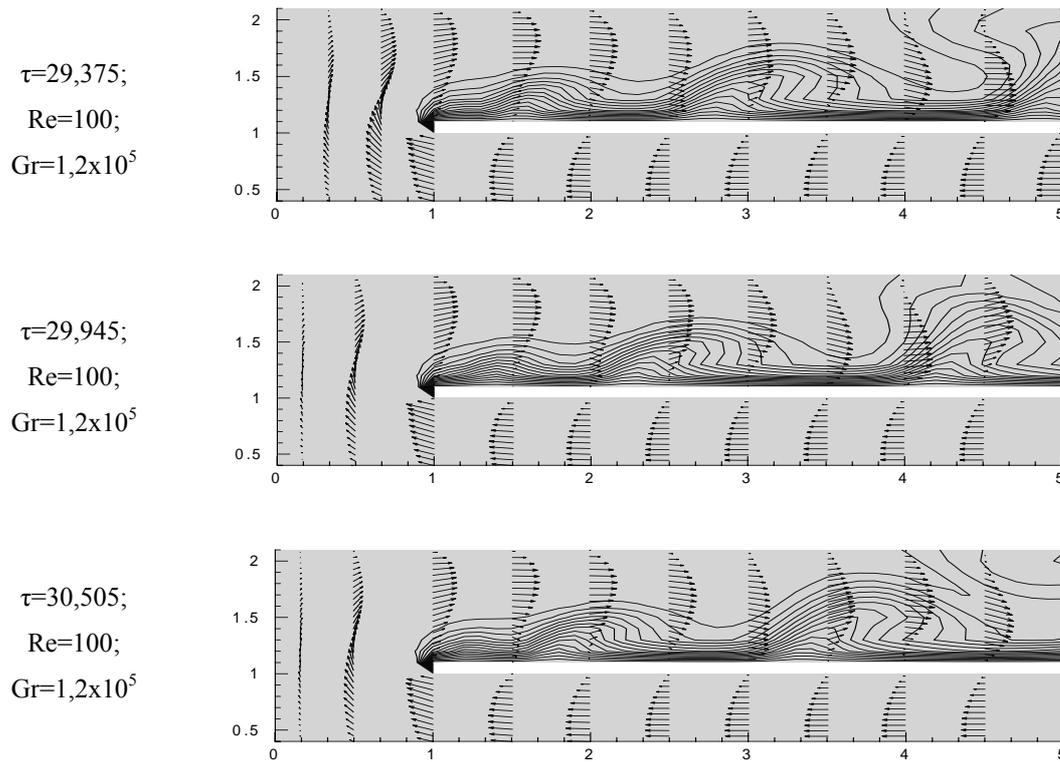


Figura 5.12 - Vetores velocidade e distribuições das isothermas para $1 \leq X \leq 5$, $\tau = 29,375$, $\tau = 29,945$, $\tau = 30,505$ para $Fr = 1/12$, $Re = 100$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$.

Concluindo a análise deste problema, alguns casos foram analisados variando-se o número de Reynolds de $10 \leq Re \leq 1000$ e o número de Grashof de $1 \leq Gr \leq 1,2 \times 10^5$, tendo-se o ar como fluido. Foi observado que o escoamento está fortemente correlacionado com o campo de temperatura. O caso onde $Re = 100$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$, mostrou-se uma mudança dramática no escoamento e na transferência de calor comparado a todos os casos estudados neste problema. Ele caracterizou oscilações fortes dos campos de temperatura e velocidade ao longo da placa depois da curva que contribuíram para o aumento da transferência de calor. Células de recirculação emanaram depois da curva, como também a separação e recolamento do escoamento influenciando na troca de calor. Uma oscilação mais forte foi observada ao longo da distância $1 \leq X \leq 5$ e $Y = 1,1$, que corresponde à parte inicial da placa depois da curva. Um regime quase-periódico foi atingido para alguns casos, mas foi mais intenso para o caso onde $Re = 100$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$.

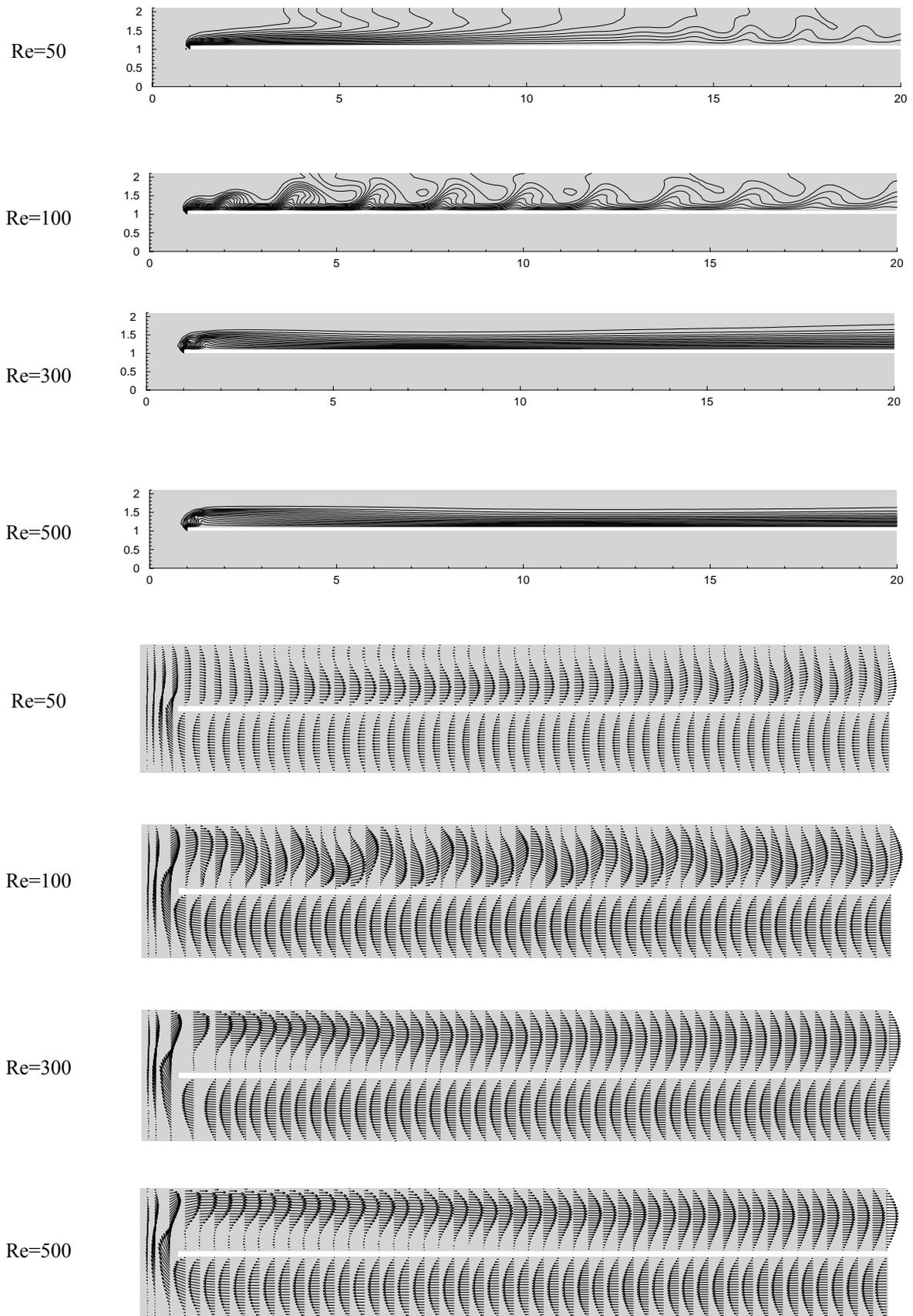


Figura 5.13 - Isotermas e vetores velocidade para $Re = 50, 100, 300$ e 500 com $Gr = 1,2 \times 10^5$.

5.4 – CASO 3: CONVECÇÃO MISTA EM CANAIS COM FONTES DISCRETAS DE CALOR

Agora, três sub-casos serão analisados: com uma, duas e três fontes de calor.

5.4.1 – Caso 3.1: Canal Inclinado com uma Fonte Discreta de Calor

A figura 5.14 mostra a geometria e as condições de contorno adimensionais em um canal com uma fonte discreta de calor e com perfis de velocidade e temperatura na entrada. A superfície superior é resfriada e a inferior é isolada termicamente, a não ser a fonte que tem fluxo constante de calor. Todas as paredes têm condição de não-escorregamento.

A figura 5.15 mostra as distribuições da temperatura variando-se o número de Reynolds Re , o número de Grashof Gr e o ângulo de inclinação, respectivamente como, $1 \leq Re \leq 10$, $10^3 \leq Gr \leq 10^5$, e $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$. Observando a figura 5.15, a orientação do canal tem um efeito significativo na distribuição da temperatura para baixos valores de Re , isto é, para $Re = 1, 5$ e 10 . Este efeito é ainda maior quando se aumenta Gr . Por outro lado, para Re maiores que aproximadamente 50 (não mostrado aqui), o ângulo de inclinação tem um efeito mais fraco nas distribuições de temperatura.

A figura 5.16 apresenta o efeito de uma fonte de calor nas distribuições de velocidade para os casos com $\gamma = 0^\circ$ e $Re = 1, 5, 10$ e $Gr = 10^5$. Na região da pluma térmica existem duas células de recirculação de sentidos opostos. Além disso, à medida que Re aumenta, as recirculações se movem e se alargam na direção do escoamento. Este comportamento caracteriza o enfraquecimento da convecção natural dando lugar à convecção mista. Se Re é aumentado ainda mais, por exemplo, $Re \geq 100$ (não mostrado aqui), a convecção forçada domina o comportamento do escoamento e também o processo de transferência de calor.

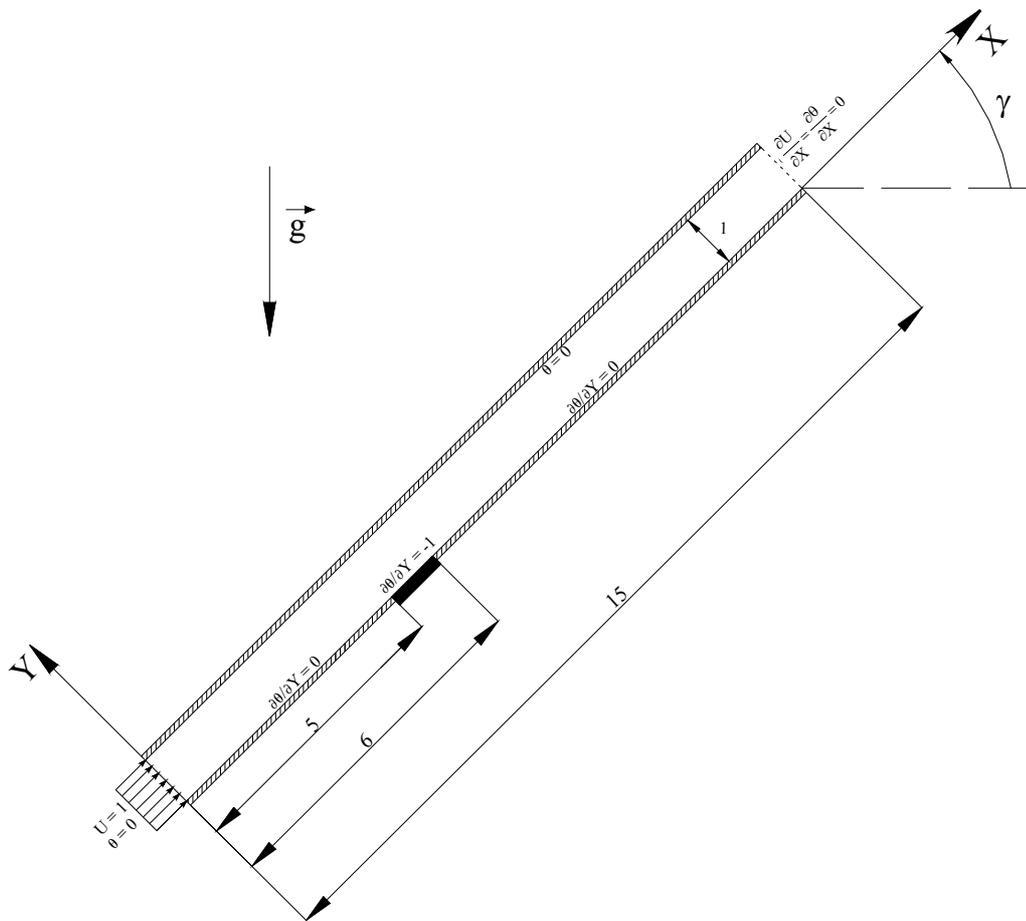


Figura 5.14 - Geometria do canal e condições de contorno.

Pode-se notar na distribuição de temperatura ao longo da fonte na figura 5.17, para $Gr = 10^5$, $Re = 1, 5, 10$ e $\gamma = 0^\circ$, a transição do processo de convecção natural para convecção mista. À medida que Re aumenta, a temperatura máxima no módulo decresce. Isto acontece pelo fato de que quando velocidades maiores estão presentes, a célula de recirculação se afasta do módulo permitindo um maior contato do fluido frio com o módulo.

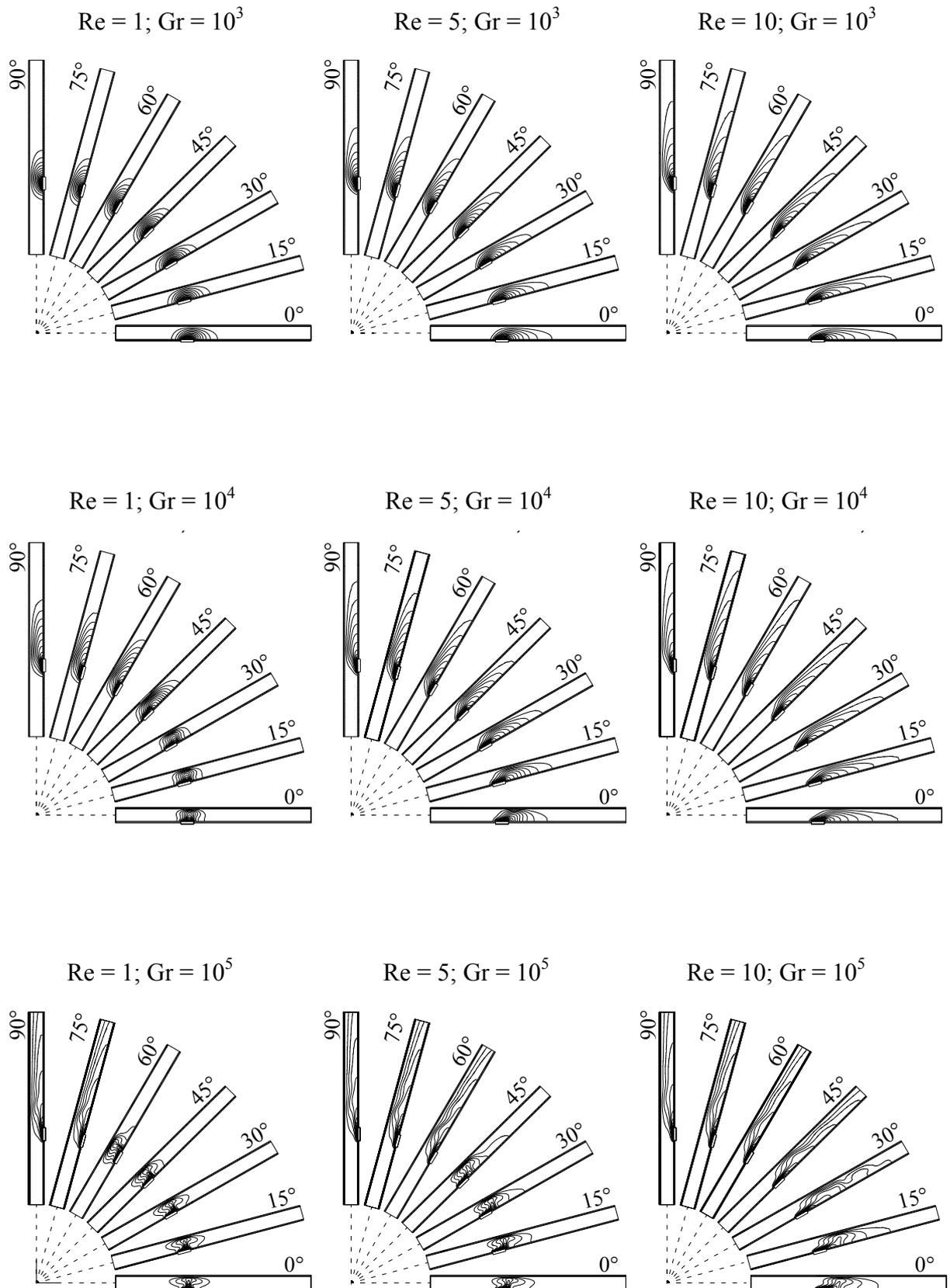


Figura 5.15 - Isotermas: $Gr = 10^3, 10^4, 10^5$; $Re = 1, 5, 10$ e $\gamma = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$.

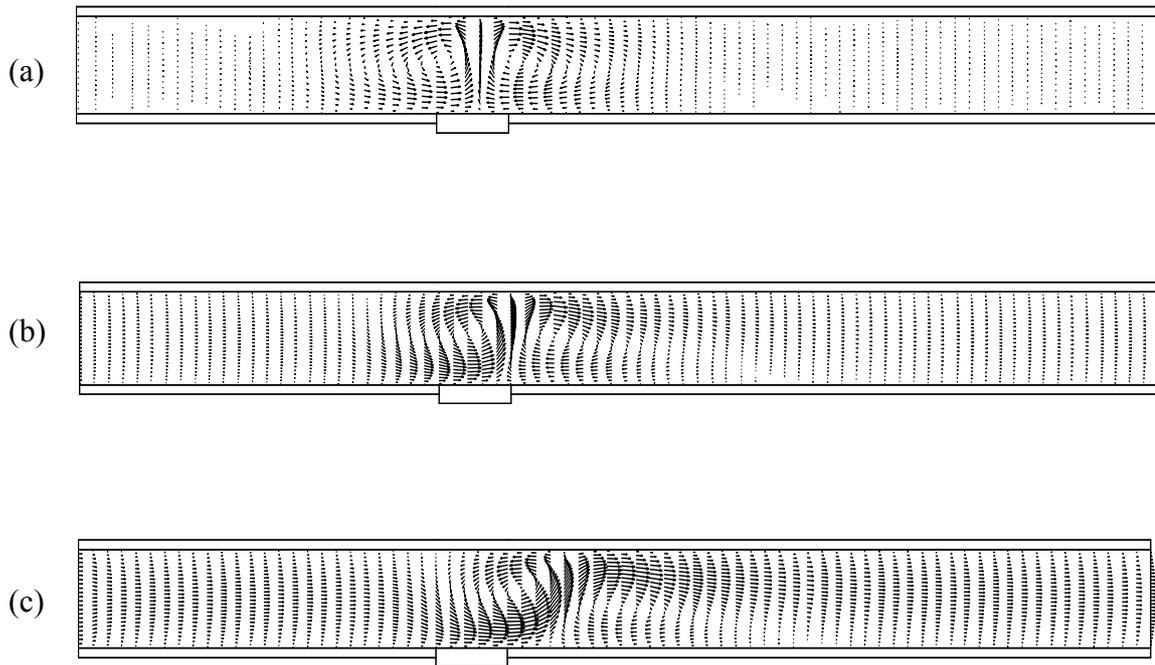


Figura 5.16 - Vetores velocidade para $Gr = 10^5$, $\gamma = 0^\circ$ e (a) $Re = 1$, (b) $Re = 5$, e (c) $Re = 10$.

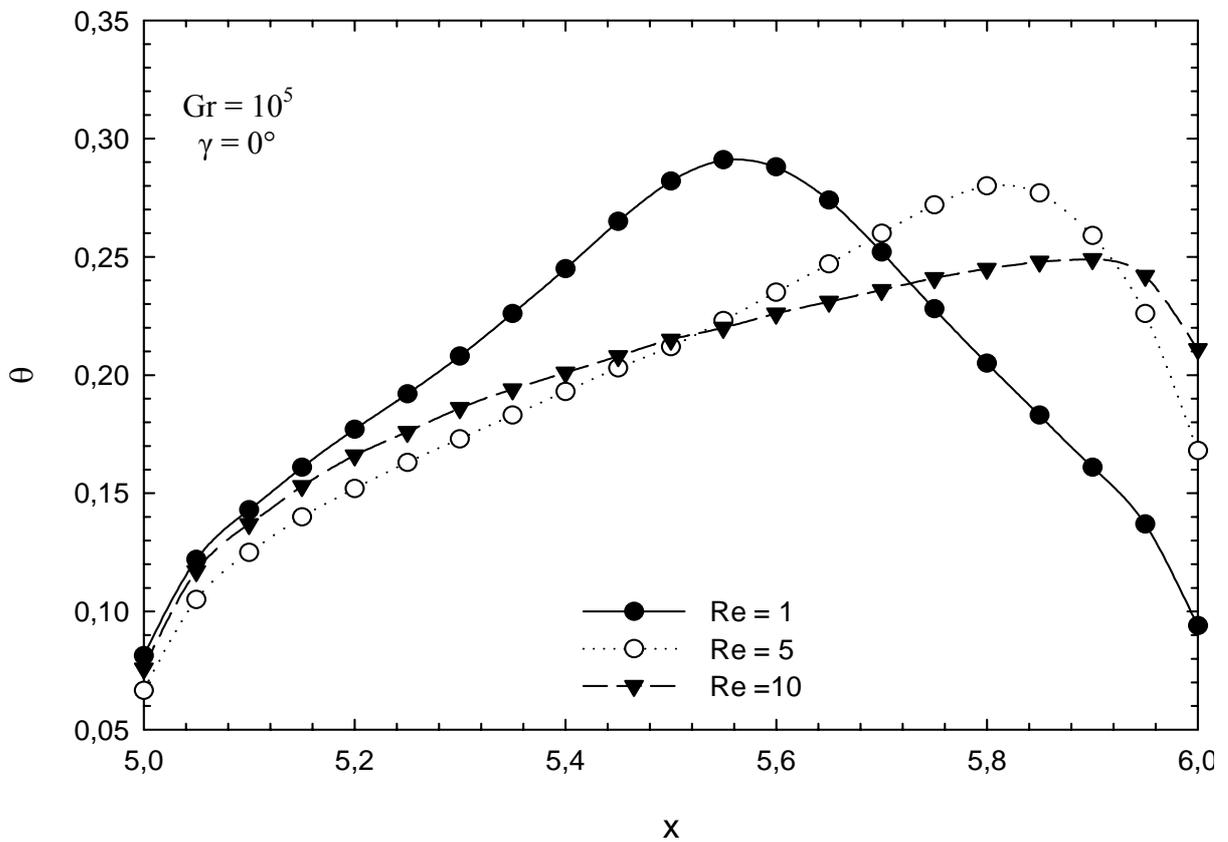


Figura 5.17 - Distribuições da temperatura nos módulos - $Gr = 10^5$, $\gamma = 0^\circ$ e $Re = 1, 5$, e 10 .

A figura 5.18 mostra os vetores velocidade para $Gr = 10^5$, $\gamma = 45^\circ$ e $Re = 1, 5, 10$. À medida que Re aumenta, a célula de recirculação no sentido horário tende a desaparecer, ao passo que aquelas no sentido anti-horário dominam de tal maneira que um fluxo reverso aparece na saída. A presença deste fluxo reverso não implica necessariamente no aumento da transferência de calor no módulo. É interessante observar a formação de células de recirculação secundárias na figura 5.18c resultando nas oscilações apresentadas pelas isothermas mostradas na figura 5.15 para o caso correspondente. Na figura 5.18b, inicia-se o fluxo reverso na saída do canal. Comparando a figura 5.18 com a 5.16, existe uma diferença no comportamento dos vetores velocidade, mostrando então o efeito da inclinação do canal. Um maior efeito pode ser notado no caso (c) onde $Re = 10$.

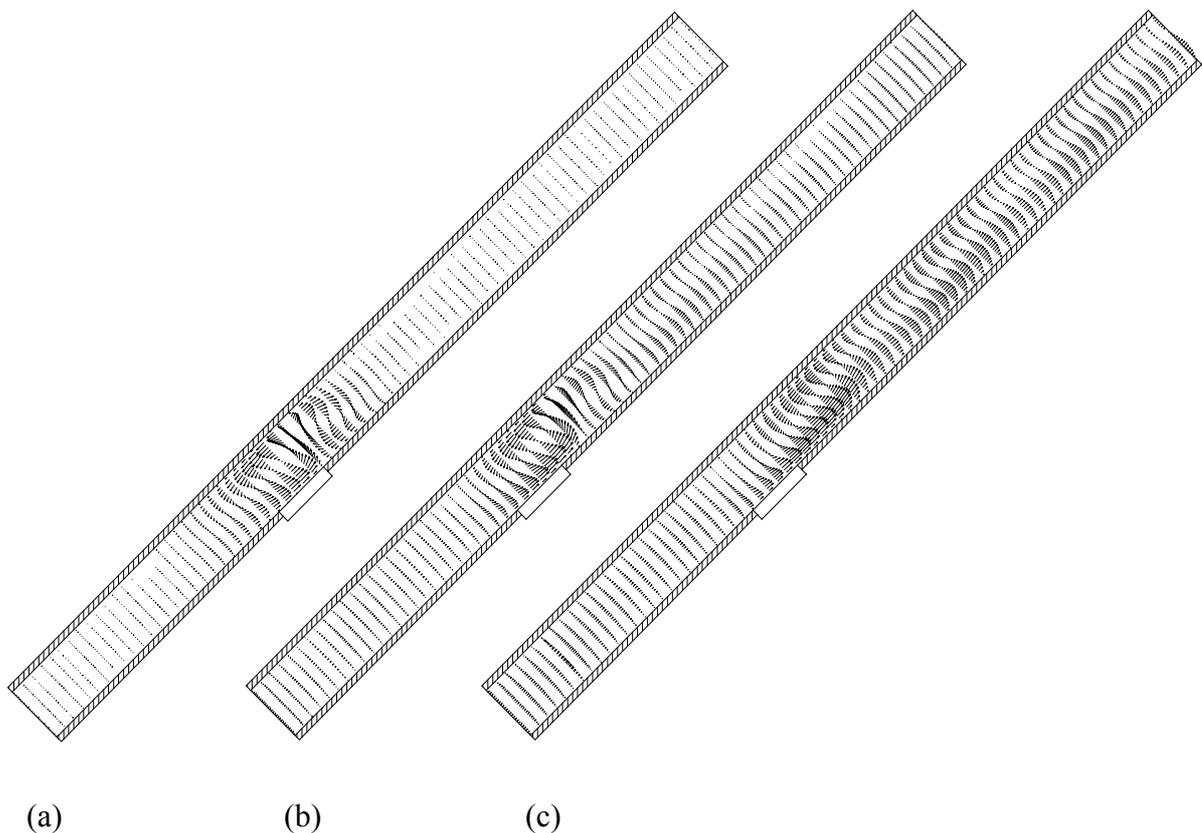


Figura 5.18 - Vetores velocidade para $Gr = 10^5$, $\gamma = 45^\circ$, (a) $Re = 1$, (b) $Re = 5$ e (c) $Re = 10$.

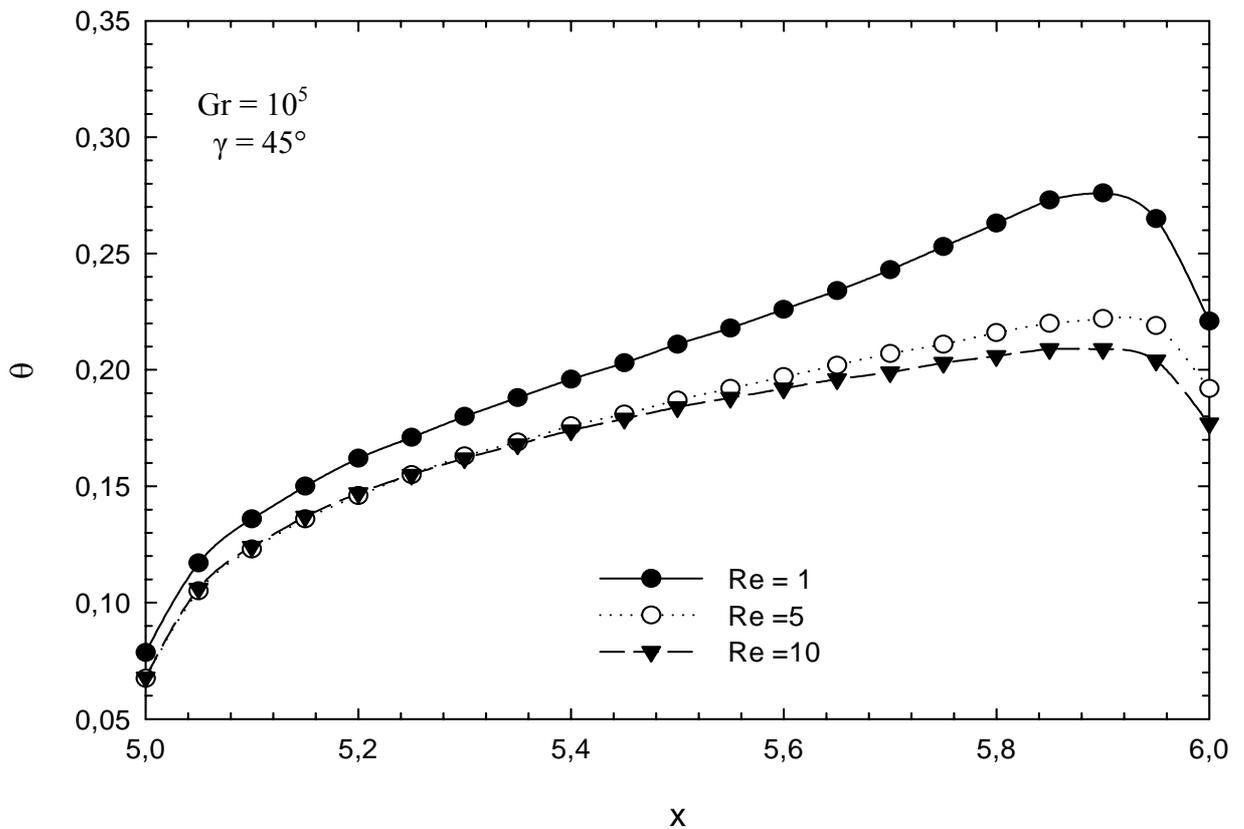


Figura 5.19 - Distribuições de temperatura na fonte para $Gr = 10^5$, $\gamma = 45^\circ$, $Re = 1, 5$, e 10 .

Na figura 5.19, as distribuições de temperatura ao longo do módulo são mostradas para os casos da figura 5.18. Em geral, a temperatura máxima no módulo decresce comparando-se com os respectivos casos onde $\gamma = 0^\circ$. O aumento do ângulo de inclinação de 0° para 45° fornece menores valores para a temperatura máxima caracterizando assim melhores condições de funcionamento de equipamentos com placas de circuitos eletrônicos.

A figura 5.20 apresenta as distribuições de velocidade para $Gr = 10^5$, $Re = 1, 5$ e 10 , mas agora com o canal na posição vertical, $\gamma = 90^\circ$. Pode ser notado que para todos os valores de Re , existe um escoamento reverso na saída que é mais forte do que aquele que aparece para $\gamma = 45^\circ$. Para cada um destes três casos da figura 5.20, existe uma célula de recirculação secundária.

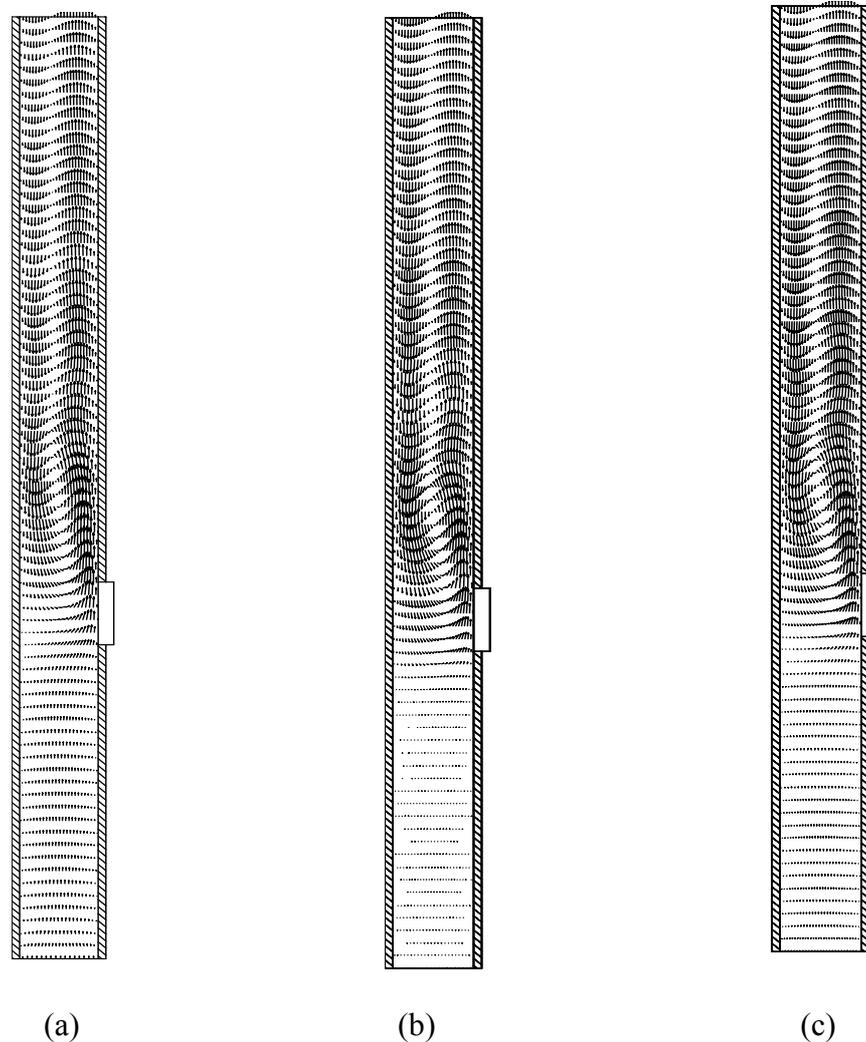


Figura 5.20 - Vetores velocidade para $Gr = 10^5$, $\gamma = 90^\circ$, (a) $Re = 1$, (b) $Re = 5$ e (c) $Re = 10$.

A figura 5.21 revela que não existe uma diferença significativa na temperatura do módulo entre os valores de $Re = 1, 5, 10$; $Gr = 10^5$ e $\gamma = 90^\circ$.

Já a figura 5.22 faz uma comparação dos números de Nusselt para $1 \leq Re \leq 500$, $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ e números de Grashof $Gr = 10^3, 10^4$ e 10^5 . A convecção mista está aproximadamente dentro das faixas $1 < Re < 50$ para $Gr = 10^3$, $5 < Re < 100$ para $Gr = 10^4$, e $10 < Re < 500$ para $Gr = 10^5$. Pode ser notado que as aproximações das curvas para altos Re caracterizam a diminuição dos efeitos de empuxo e conseqüentemente a influência do ângulo de inclinação, à medida que a convecção forçada domina.

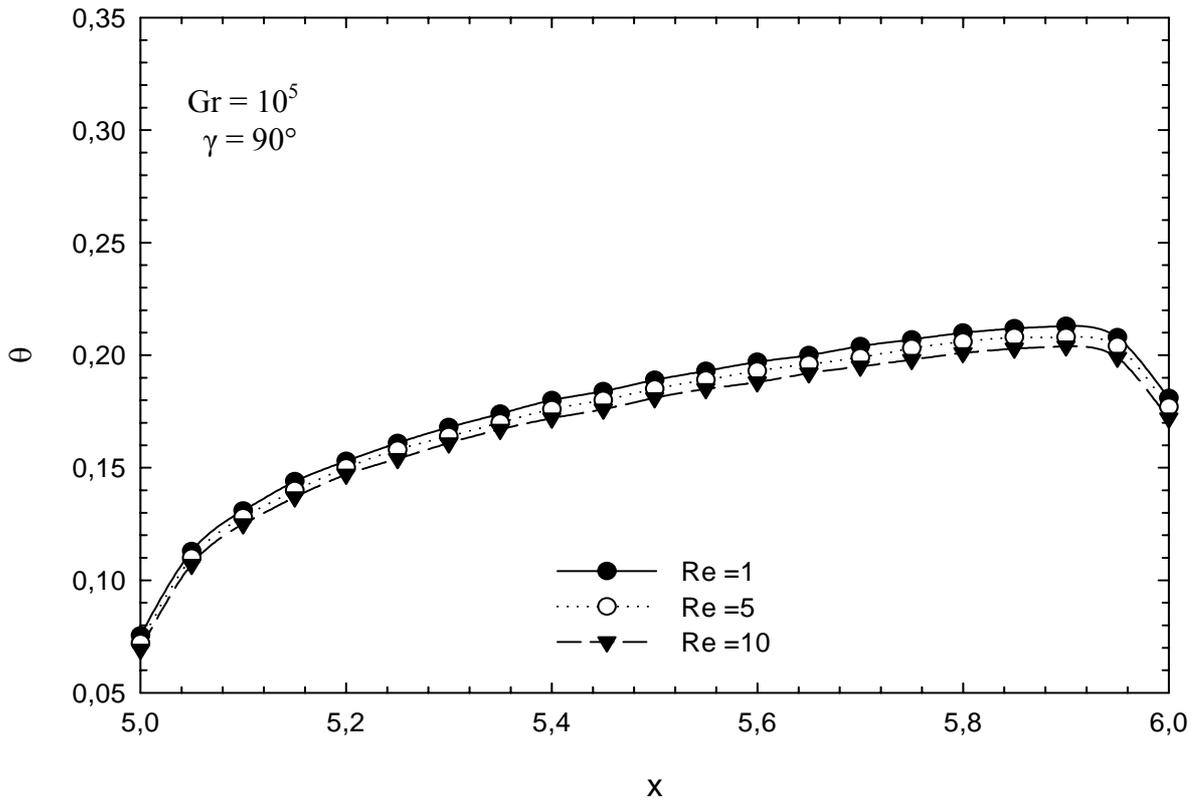


Figura 5.21 - Distribuições de temperatura na fonte para $Gr = 10^5$, $\gamma = 90^\circ$ e $Re = 1, 5, e 10$.

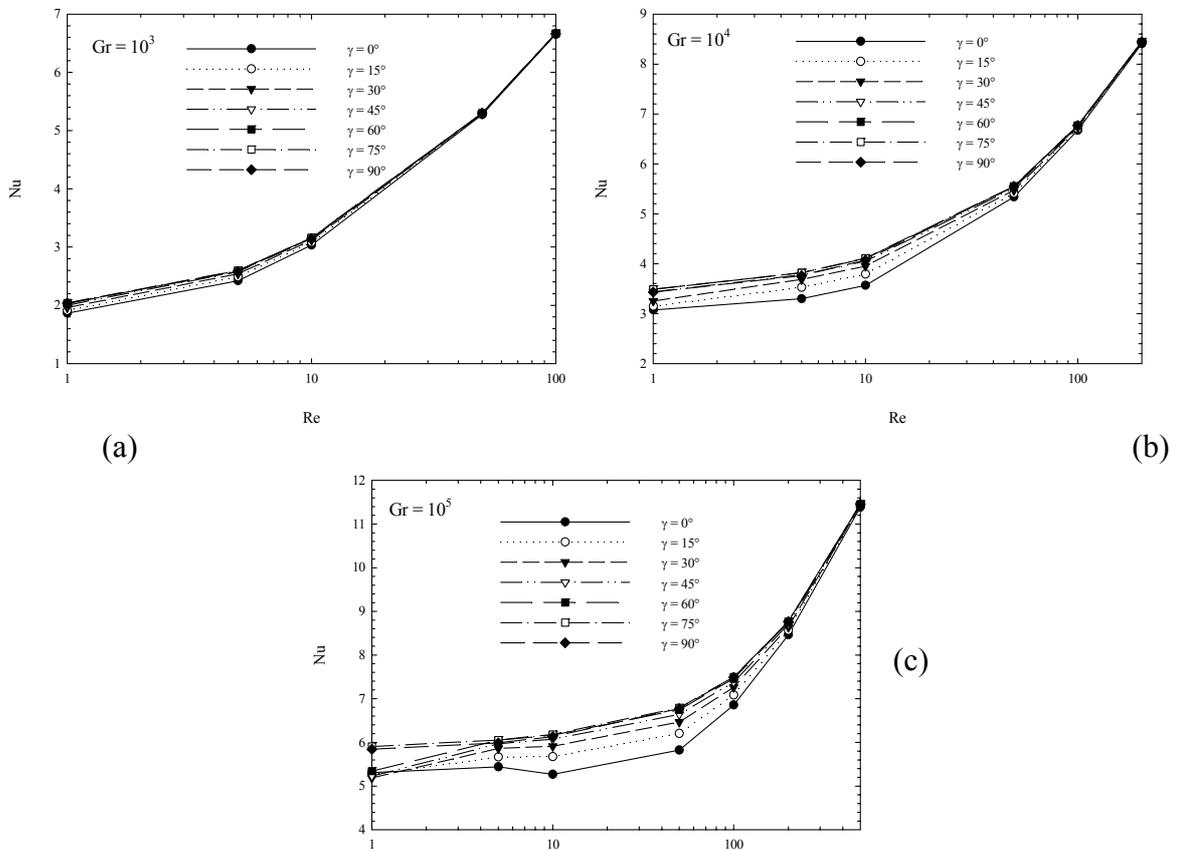


Figura 5.22 - Nusselt médio versus Re para $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$, $Gr =$ (a) 10^3 , (b) 10^4 e (c) 10^5 .

A figura 5.23 mostra a influência do ângulo de inclinação na transferência de calor para todos os casos estudados neste problema, isto é, $Re = 1, 5, 10, 50, 100, 200, 500$; $\gamma = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ e $Gr = 10^3, 10^4$ e 10^5 . De uma maneira geral, Nu é fortemente dependente da orientação do canal entre os limites dos escoamentos predominadas pela convecção natural e convecção forçada. Por exemplo, quando $Gr = 10^3$, as células de convecção natural não são suficientemente fortes para influenciar o escoamento e os campos de temperatura (figura 5.15), o que significa que a transferência de calor é altamente caracterizada pela convecção natural. À medida que Gr aumenta, as variações no Nu são mais significativas para baixos Re . No trabalho de Choi e Ortega (1993), é citado que de um modo geral nas convecções natural e mista, que a situação mais apropriada para o resfriamento da fonte é tida quando o canal está entre $45^\circ < \gamma < 90^\circ$. Analisando a figura 5.23, existe ainda uma situação mais favorável dentro da faixa proposta por Choi e Ortega (1993), a qual está entre 60° e 75° . Uma situação que deveria ser evitada seria quando $\gamma = 0^\circ$ nas convecções mista e natural. Um caso particular que fornece um aumento mais intenso no Nu , devido à variação da inclinação, acontece para $Gr = 10^5$ e $Re = 1$ com $60^\circ \leq \gamma \leq 75^\circ$. Isto também pode ser notado na figura 5.15 nas distribuições das isotermas. Aqui, γ igual a 75° apresenta uma situação mais interessante quando o resfriamento é alvo do projeto, com pequena diferença quando $\gamma = 90^\circ$.

Concluindo, a convecção mista foi estudada neste problema em um canal simples considerando o efeito do ângulo de inclinação e alguns parâmetros físicos. As variações consideradas foram: $1 \leq Re \leq 500$, $10^3 \leq Gr \leq 10^5$, e $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$. Foi observado que o efeito do ângulo de inclinação nas distribuições de temperatura e velocidade tem um papel importante na transferência de calor para baixos Re e altos Gr . Para altos Re , o efeito da orientação do canal foi desprezível. Quando é dito que um valor é baixo ou alto, se considera que o valor está na região correspondente aos limites inferior e superior considerados, respectivamente. Em geral, também foi verificado que o ângulo de inclinação entre 60° e 75° forneceu as condições de trabalho mais favoráveis quando o resfriamento é objetivado. Este escoamento reverso não implicou no aumento de transferência de calor no módulo, embora ele tenha modificado os campos de temperatura e velocidade significativamente.

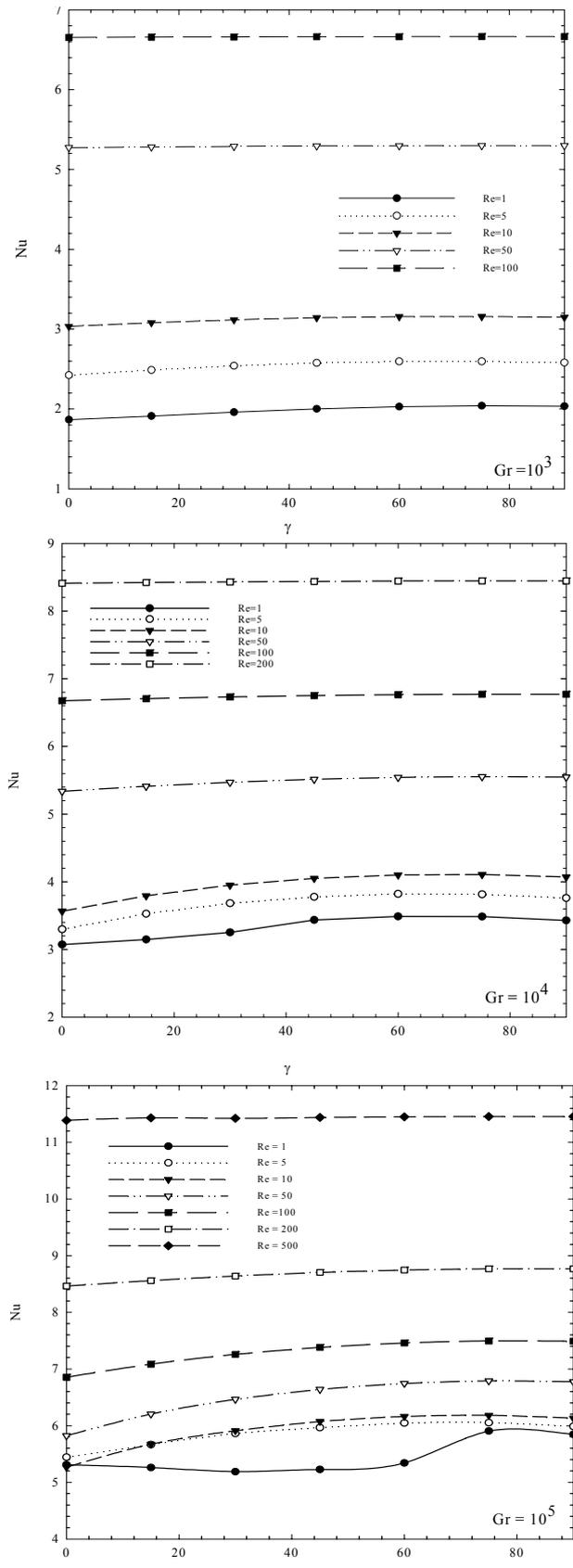


Figura 5.23 - Nusselt médio versus γ : $1 \leq Re \leq 500$ e (a) $Gr = 10^3$, (b) $Gr = 10^4$ e (c) $Gr = 10^5$.

5.4.2 – Caso 3.2: Canal Horizontal com Duas Fontes Discretas de Calor

A figura 5.24 mostra a geometria e as condições de contorno adimensionais em um canal horizontal com duas fontes discretas de calor com perfis de velocidade e temperatura na entrada. A superfície superior é resfriada e a inferior é isolada termicamente, exceto nas fontes de calor. Todas as paredes têm condição de não-escorregamento.

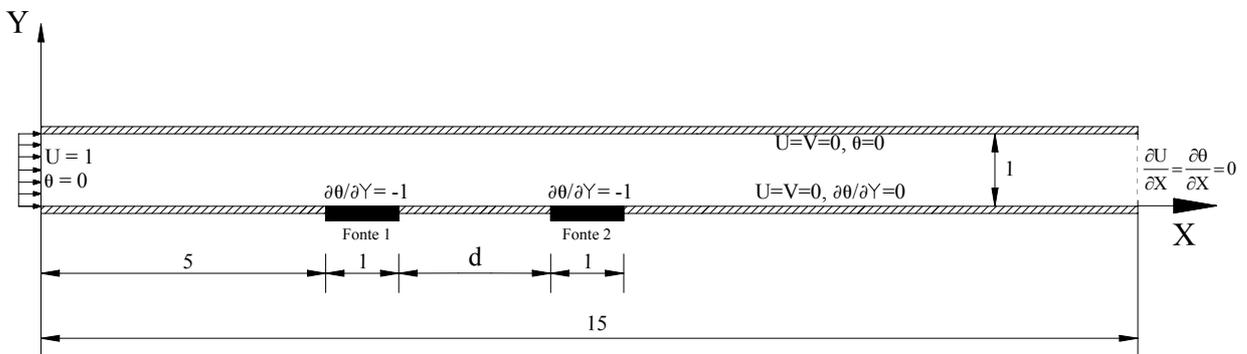


Figura 5.24 - Geometria do canal e condições de contorno.

A figura 5.25 mostra as distribuições das isotermas para números de Reynolds $Re = 1$, 10, 50, 100, 1000, para as distâncias entre as fontes $d = 1, 2$ e 3 e número de Grashof $Gr = 10^5$. Pode ser notado que quando o problema é predominantemente de convecção natural, ou seja, por exemplo, $Re = 1$, as fontes de calor nos casos onde $d = 1$ e 2 se afetam mutuamente, ao passo que para o caso $d = 3$, isto não acontece. Para todos os casos onde $Re = 1$ existem plumas térmicas localizadas nas proximidades das fontes. Para $Re = 1$ e $d = 1$, os dois cogumelos estão se misturando, deixando claro que esta distância faz com que os campos de temperatura das fontes se atinjam. Embora isto também seja verdadeiro quando $Re = 1$ e $d = 2$, as plumas estão mais espaçadas uma da outra. Para $Re = 1$ e $d = 3$, as plumas são quase independentes. Será visto mais adiante que este comportamento na fonte 1 e $Re = 1$ pouco afeta o número de Nusselt Nu quando $Gr = 10^5$ e que para $Gr = 10^3$ e 10^4 , o espaço entre os módulos não interfere na transferência de calor. Por outro lado, quando a fonte 2 é tomada em consideração, o espaçamento das fontes melhora Nu para $Gr = 10^3, 10^4$ e 10^5 . Para $Re = 10$, uma oscilação do escoamento acontece para todas as distâncias entre as fontes de calor. As distribuições de temperatura na figura 5.25, onde $Re = 10$ e $d = 1, 2$ e 3 são plotadas para três tempos $\tau = 15, 30$ e 50, respectivamente.

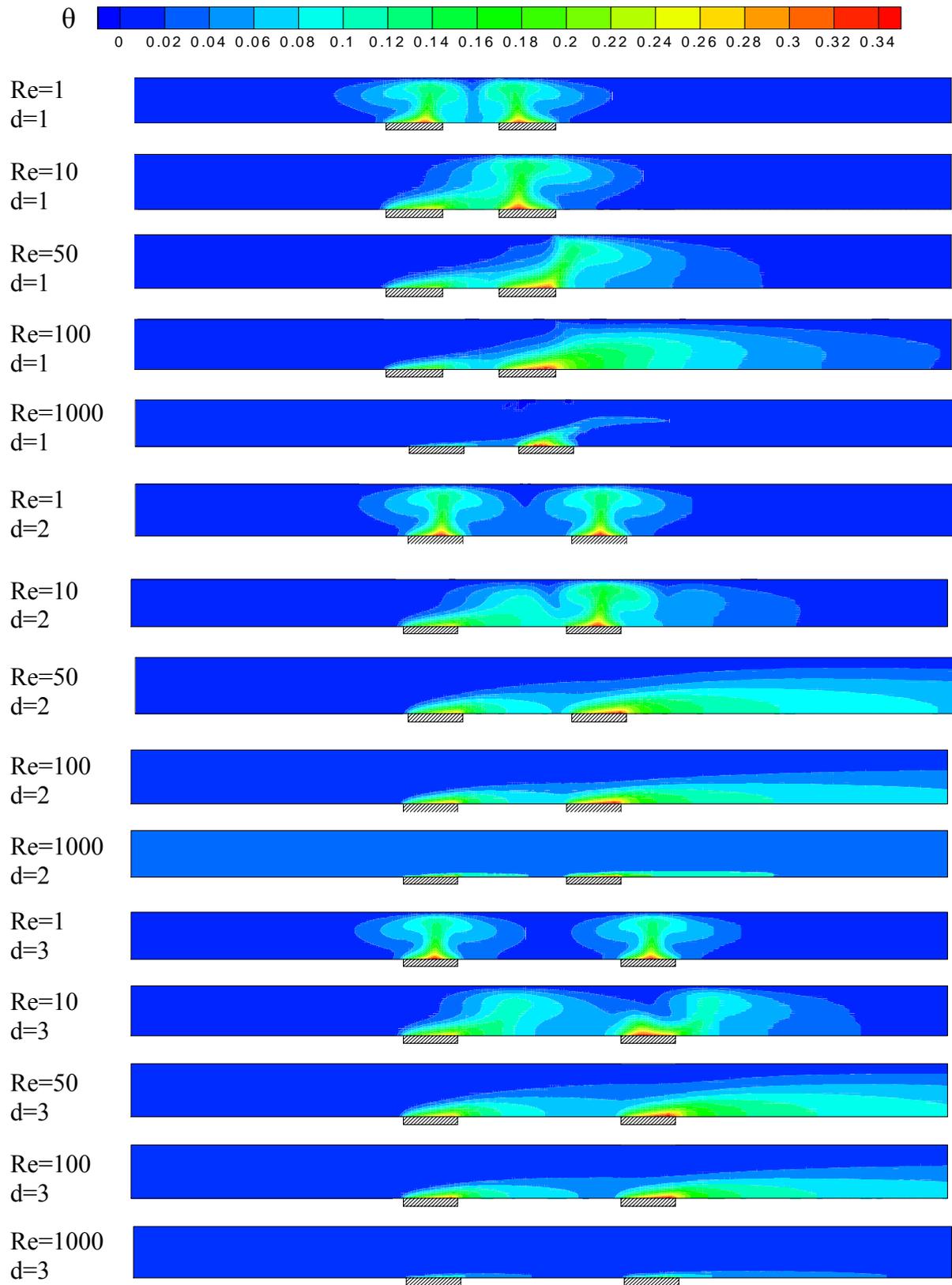


Figura 5.25 - Isotermas para $Re = 1, 10, 50, 100, 1000$, $\gamma = 0^\circ$ e $Gr = 10^5$.

Podem ser notados maiores valores de temperatura no segundo módulo. Este aumento de temperatura tende a enfraquecer à medida que Re aumenta. O aumento da temperatura na região próxima à fonte 2 é devido à esteira térmica vinda da fonte 1. Pode ser notado que para Re constante, a distância d tem um papel considerável no aquecimento da segunda fonte. Por exemplo, isto acontece no caso onde $Re = 1000$ e $d = 1$ e 2 .

A figura 5.26 apresenta as distribuições dos vetores velocidade para $Gr = 10^5$, $Re = 1, 10, 100$ e $d = 1, 2$ e 3 . No caso em que $Re = 1$, recirculações quase simétricas aparecem e elas são responsáveis pelas plumas térmicas. À medida que os módulos são dispostos mais distantes uns dos outros, a recirculação entre as fontes é intensificada e assim maiores velocidades estão presentes no escoamento, não implicando numa grande diferença na temperatura nas duas fontes. De um modo geral, à medida que Re aumenta, as recirculações tendem a cessarem, tornando possível ao fluido frio estar mais em contato com as superfícies dos módulos e assim aumentando a transferência de calor. Para altos Re , a distância d tem uma pequena influência nos perfis de velocidade. Como mencionado antes, para $Re = 10$, um comportamento oscilatório das recirculações geradas pelas forças de empuxo próximas aos módulos é observado. Estas oscilações refletem uma tentativa do escoamento ser controlado por uma convecção predominante, isto é, uma tentativa de equilíbrio entre as velocidades forçadas e de empuxo. A primeira fonte desenvolve uma esteira que atinge a segunda, aquecendo-a ainda mais. A recirculação originada no segundo módulo se torna mais intensa, e isto faz com que exista um aumento da pressão do fluido vindo a montante. Assim, a pressão atinge um ponto sendo forte o suficiente para forçar esta “barreira” para frente. Neste momento, o escoamento principal começa a se desenvolver e todo o processo se repete. Conseqüentemente, oscilações de Nu no tempo na fonte 2 começam a aparecer, o que será visto posteriormente.

A figura 5.27 denota o efeito do número de Reynolds na transferência de calor nas fontes para $Gr = 10^3, 10^4$ e 10^5 , $Re = 1, 10, 100, 1000$, e $d = 1, 2, 3$. Esta figura mostra alguns pontos que já foram discutidos anteriormente tais como o efeito da distância entre os módulos, o qual é quase desprezível para a fonte 1 e moderado para a fonte 2. De um modo geral, a distância $d = 3$ é aquela que oferece melhores condições de trabalho, já que os números de Nusselt são maiores.

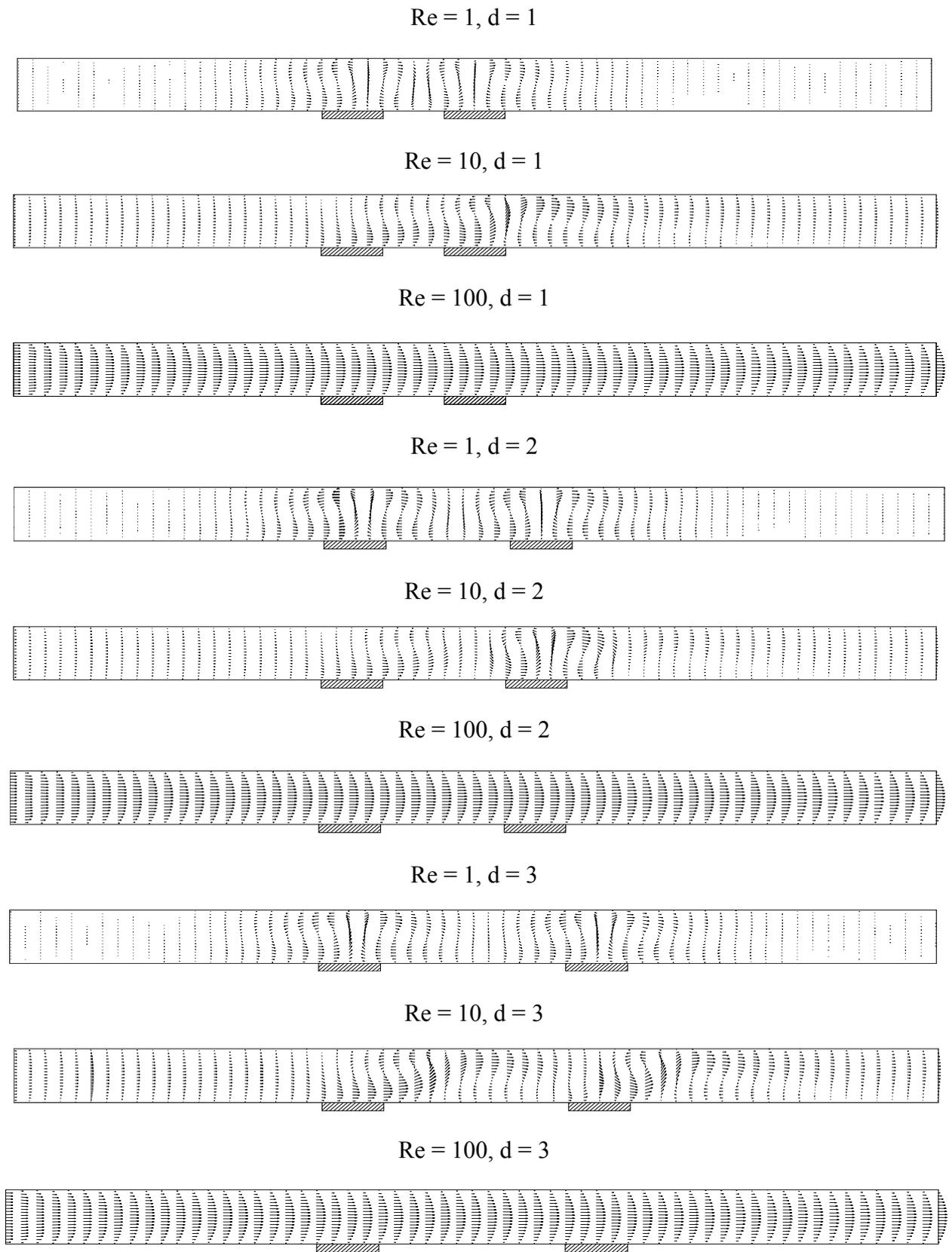


Figura 5.26 - Vetores velocidade para $Gr = 10^5$, $Re = 1, 10, 100$, e $d = 1, 2, 3$.

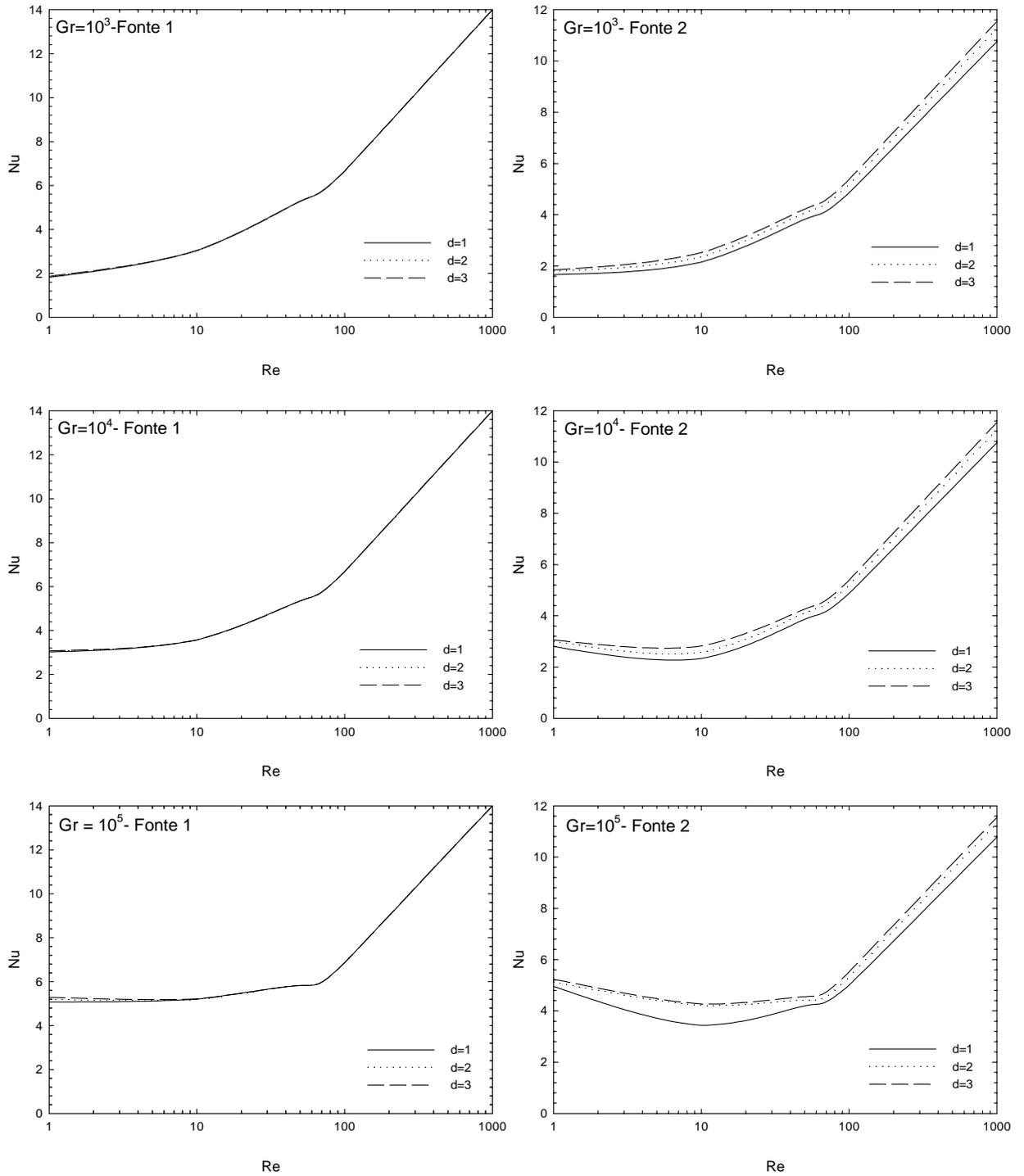


Figura 5.27 - Nusselt médio versus Reynolds, $d = 1, 2, 3$, $Gr = 10^3, 10^4$ e 10^5 nas fontes 1 e 2.

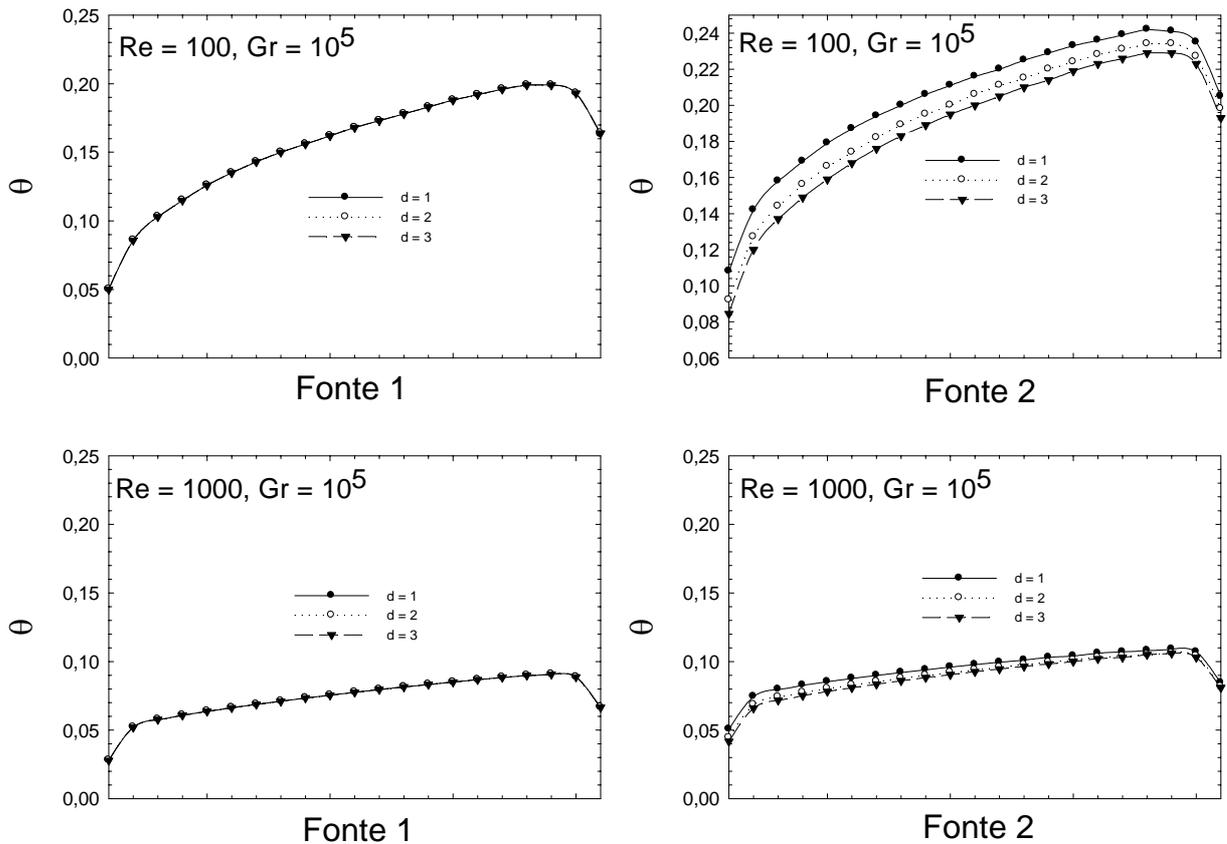


Figura 5.28 - Temperatura nas fontes 1 e 2 para $d = 1, 2, 3$; $Re = 100, 1000$ e $Gr = 10^5$.

A figura 5.28 apresenta as distribuições de temperatura θ na fonte 1 e 2 para $Re = 100$ e 1000 ; $d = 1, 2, e 3$ e $Gr = 10^5$. A distância entre os módulos não afeta a temperatura na fonte 1 ao passo que este efeito pode ser distintamente visto na fonte 2. Então existe uma distância ótima na qual duas fontes de calor podem ser dispostas de tal maneira que tenham temperaturas menores, como é o caso de $d = 3$, embora $d = 2$ também não apresenta uma mudança significativa na temperatura. Isto, de certa maneira, leva a um melhor entendimento de um layout de fontes de calor dispostas em linha.

Finalmente, a distribuição no tempo do número de Nusselt médio ao longo das fontes 1 e 2 para $Gr = 10^5$, $Re = 10, 100$ e 1000 , $d = 1, 2, e 3$, está mostrada na figura 5.29. Em todos os casos, como esperado, o primeiro módulo está submetido a uma transferência de calor maior já que ela está sendo constantemente atingida pelo fluido frio. Por outro lado, pode ser visto novamente que a esteira de fluido vindo da primeira fonte atinge a segunda, sendo o motivo pelo qual a curva se bifurca em um dado momento. Portanto, pode-se notar o tempo gasto pelo fluido quente vindo da primeira fonte na trajetória até a segunda fonte. Por

exemplo, para $Re = 100$ e $d = 1, 2, e 3$, os tempos são, respectivamente, ao redor de $\tau = 1,4; 3,0$ e $4,0$. Entretanto, os valores de Nu convergidos para estes últimos casos são quase iguais. Como foi visto anteriormente, oscilações quase-periódicas aparecem para $Re = 10$.

Concluindo, um estudo da convecção mista em um canal retangular com duas fontes de calor montadas na parede inferior foi realizado neste problema. A parede superior do canal foi mantida a uma temperatura alta constante e suas partes remanescentes foram mantidas adiabáticas. A transferência de calor foi estudada variando-se alguns parâmetros geométricos tais como: os números de Reynolds $Re = 1, 10, 50, 100, e 1000$; as distâncias entre as fontes $d = 1, 2 e 3$, e finalmente, os números de Grashof $Gr = 10^3, 10^4 e 10^5$. Para baixos Re ($Re = 1$), e distâncias $d = 1 e 2$, as forças de empuxo geraram plumas térmicas que se sobrepuseram. Para maiores Re , a temperatura na fonte 2 foi aumentada por uma esteira de fluido quente proveniente da fonte 1. Nos casos onde $Re = 10$ e $Gr = 10^5$, oscilações no escoamento apareceram e elas fortemente afetaram o escoamento. Para $Re = 100$ e 1000 , as distribuições de temperatura na fonte 1 não foram afetadas pelas distâncias entre as fontes. Ao passo que na fonte 2, esta influência já foi notória. Uma conclusão importante é que existiu uma distância ótima, na qual duas fontes de calor puderam ser distanciadas uma da outra, isto é, $d = 3$, embora que a distância $d = 2$, também não apresentou uma mudança significativa na temperatura.

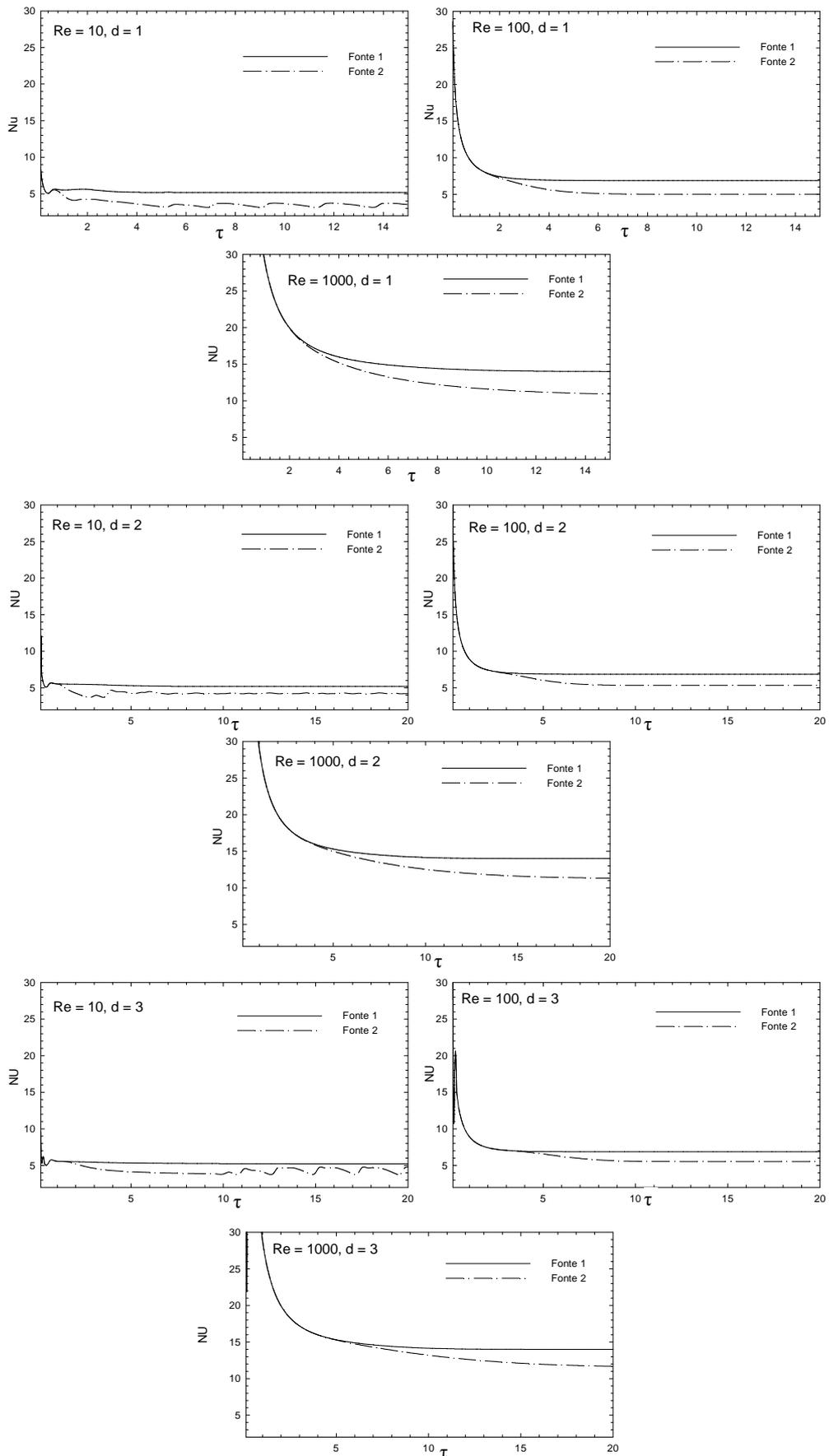


Figura 5.29 - Nu versus τ para $Gr = 10^5$, $Re = 10, 100, 1000$, $d = 1, 2, 3$ nas fontes 1 e 2.

5.4.3 – Caso 3.2: Canal Inclinado com Três Fontes Discretas de Calor

A figura 5.30 mostra a geometria e as condições de contorno adimensionais em um canal inclinado com três fontes discretas de calor com perfis de velocidade e temperatura na entrada. A superfície superior é resfriada e a inferior é isolada termicamente, exceto nas fontes de calor. Todas as paredes têm condição de não-escorregamento.

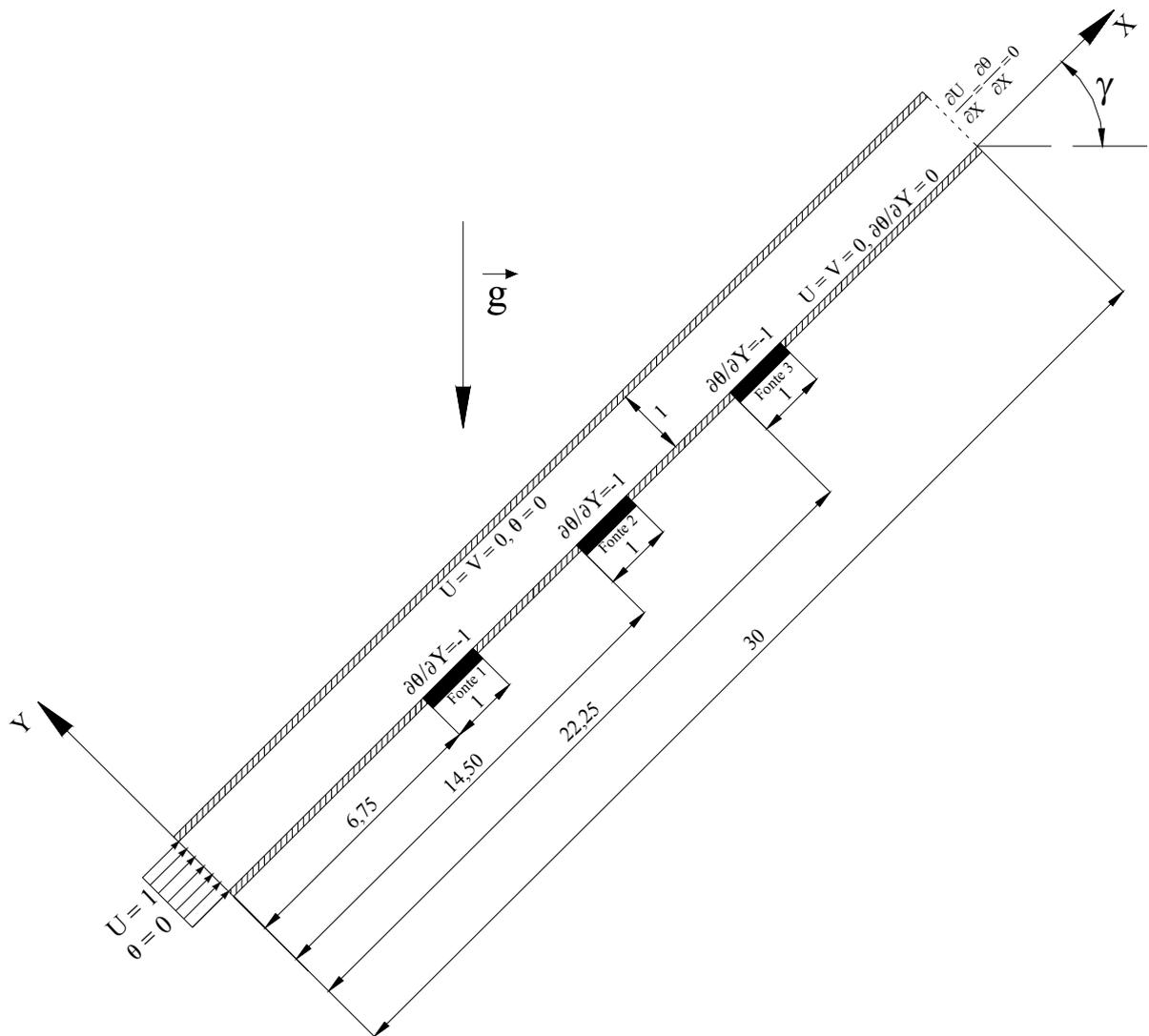


Figura 5.30 - Geometria do canal e condições de contorno.

A figura 5.31 mostra as distribuições das isotermas para números de Reynolds Re iguais a 1, 10, 50 e 100, número de Grashof Gr igual a 10^5 , inclinações γ iguais a 0° (horizontal), 45° e 90° (vertical). Para $Re = 1$ e $\gamma = 0^\circ, 45^\circ$, há formação de células térmicas, as quais estão localizadas em regiões bem próximas aos módulos das fontes. Para $Re = 1$, tem-se um problema predominante de convecção natural. À medida que se aumenta Re , estas células se alongam dando lugar à predominância da convecção forçada. Mantendo-se Re constante, a variação do ângulo de inclinação tem um papel importante na distribuição da temperatura. A influência de γ na temperatura é maior quando se tem menores velocidades do fluido. Por exemplo, onde $Re = 10$ para $\gamma = 0^\circ, 45^\circ$ e 90° , nota-se este comportamento, ou seja, para $\gamma = 0^\circ$, $Re = 10$, quase existe uma formação de célula térmica, já para $Re = 10$ e $\gamma = 45^\circ$, esta formação já desaparece. Este processo é ainda mais evidente para $Re = 1$ e $\gamma = 45^\circ$ e 90° . O fluido aquecido na primeira fonte atinge a segunda fonte e sendo novamente mais aquecido, atinge a terceira. Este fenômeno faz com que exista menor transferência de calor e assim maiores temperaturas nas fontes precedidas por outras fontes.

A figura 5.32 apresenta os vetores de velocidade para $Re = 10$ e 100 e $Gr = 10^5$ para $\gamma = 0, 45^\circ$ e 90° . Pode ser notado que para $Re = 10$ e $\gamma = 0^\circ, 45^\circ$ e 90° , aparecem recirculações geradas pelo fluido aquecido nas fontes. Para $Re = 10$ e $\gamma = 0^\circ$, existem três recirculações independentes. O espaçamento entre as fontes possibilita uma recuperação do escoamento até quando o fluido encontra a próxima fonte e a recirculação começa novamente. Já para $Re = 10$ e $\gamma = 45^\circ$ e 90° , existem dois tipos de recirculação, ou seja, uma recirculação primária ao longo de todo o canal que envolve outras recirculações secundárias localizadas logo após as fontes. Também para estes dois últimos casos há a presença de refluxo na saída do canal. À medida que se aumenta Re , mantendo-se γ constante, estas recirculações ficam menores até que desaparecem para Re mais elevados. Nitidamente, pode ser notado o efeito da inclinação sobre os vetores considerando $Re = 10$ e variando γ . A maior influência do ângulo de inclinação se encontra entre 0° e 45° do que entre 45° e 90° . Para baixos Re , o ângulo de inclinação tem maior influência nos vetores velocidade. Mais adiante será visto o efeito desta influência na troca de calor entre o fluido e as fontes. Conforme apêndice E, estes casos apresentam conservação de massa, apresentando valores do divergente de velocidades dentro da faixa de precisão dos cálculos realizados.

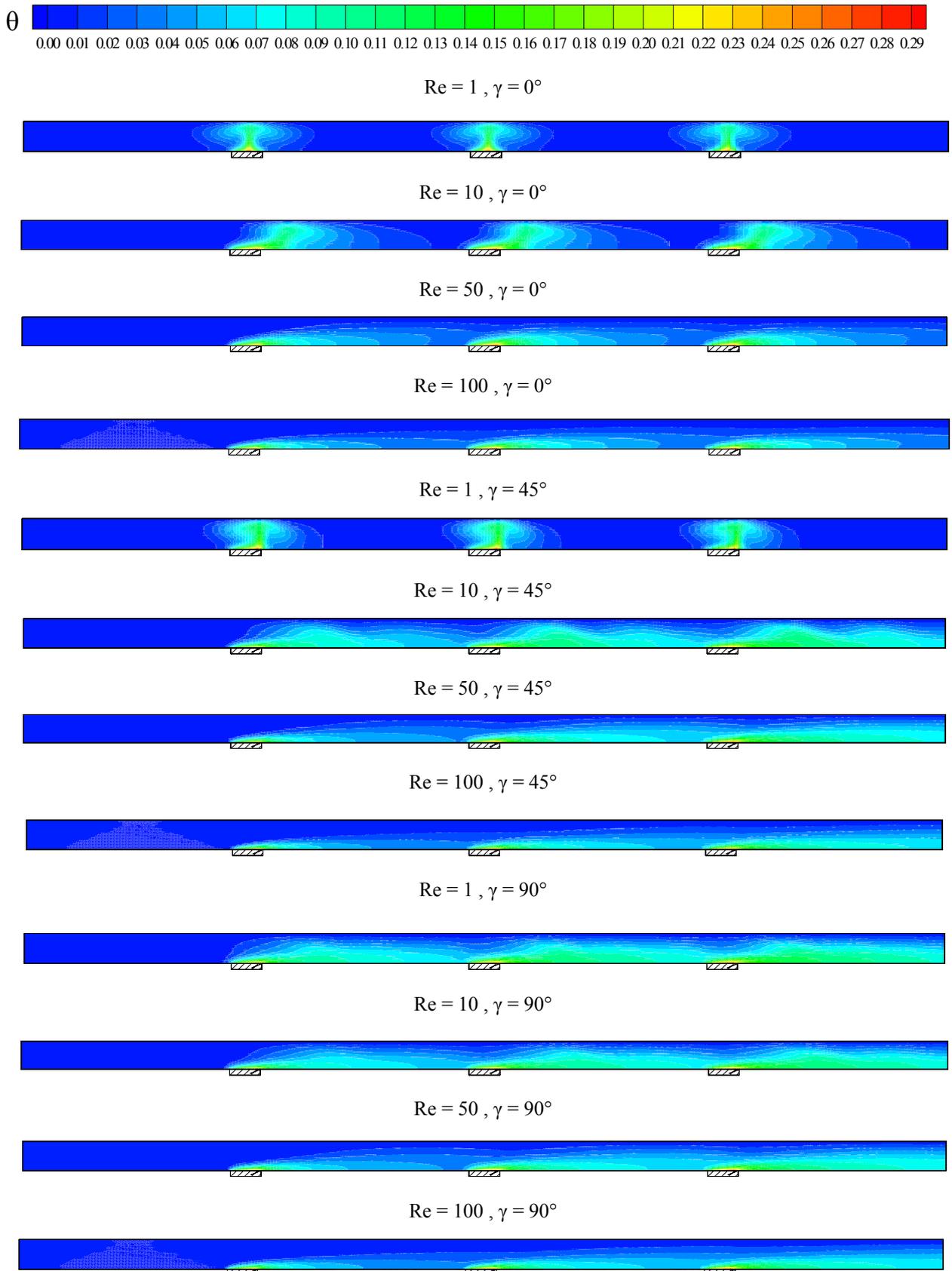


Figura 5.31 - Isotermas para $Gr = 10^5$, $Re = 1, 10, 50$ e 100 e $\gamma = 0^\circ, 45^\circ$ e 90° .

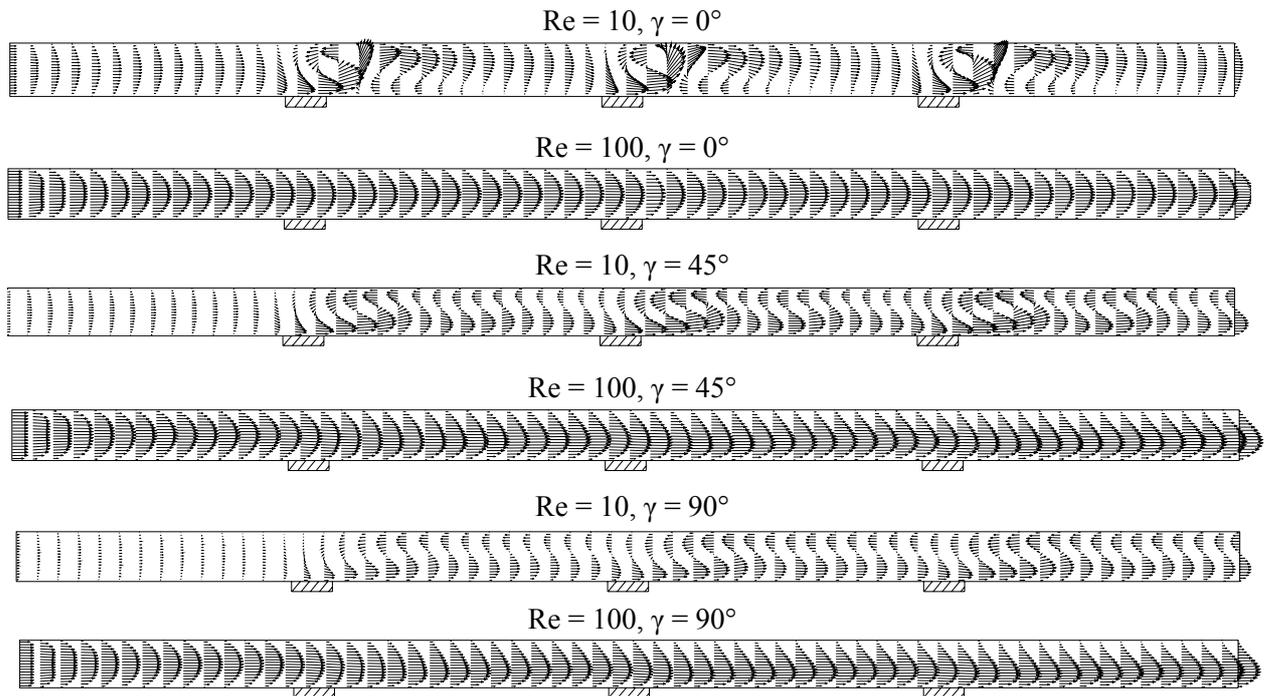


Figura 5.32 - Vetores velocidade para $Gr = 10^5$, $Re = 10$ e 100 e $\gamma = 0^\circ$, 45° e 90° .

A figura 5.33 mostra as distribuições dos números de Nusselt médio nas fontes 1, 2 e 3 para números de Reynolds $Re = 1, 10, 50, 100$ e 1000 , $Gr = 10^3, 10^4$ e 10^5 e, finalmente, para as inclinações $\gamma = 0^\circ, 45^\circ$ e 90° . De uma maneira geral, o número de Nusselt médio para cada uma das fontes aumenta com o aumento do número de Reynolds. Analisando cada gráfico isoladamente, pode ser observado que o Nusselt na fonte 1 tende a distanciar daqueles da fonte 2 e 3, à medida que se aumenta Reynolds, partindo de um valor praticamente igual para $Re = 1$; com exceção do caso onde $Gr = 10^5$, $\gamma = 90^\circ$ e $Re = 1$, onde os valores de Nu são diferentes. Este valor, praticamente igual no começo, significa que uma fonte não interfere na outra. Aqui se percebe melhor o fenômeno observado na figura 5.31, de uma fonte ser atingida por uma fonte antecedente. Por isso, Nu na fonte 1 apresenta maiores valores. Pode ser visto que de uma maneira geral que Nu nas fontes 2 e 3 têm valores mais próximos, sendo que à medida que se aumenta Re , seus valores também tendem a se distanciarem. De uma maneira geral, a maior influência no Nusselt está entre 0° e 45° . Praticamente em todos os casos, Nu aumenta entre 0° e 45° , ao passo que para $Gr = 10^5$ e $Re = 1000$, Nu nas fontes 2 e 3 decrescem. Levando em consideração que o caso ideal é aquele que apresenta maior número de Nusselt, os ângulos 45° e 90° são ideais, não havendo muita diferença entre eles. Uma exceção seria quando $Gr = 10^5$ e $Re = 1000$, onde $\gamma = 0^\circ$ seria o caso com maior número de Nusselt.

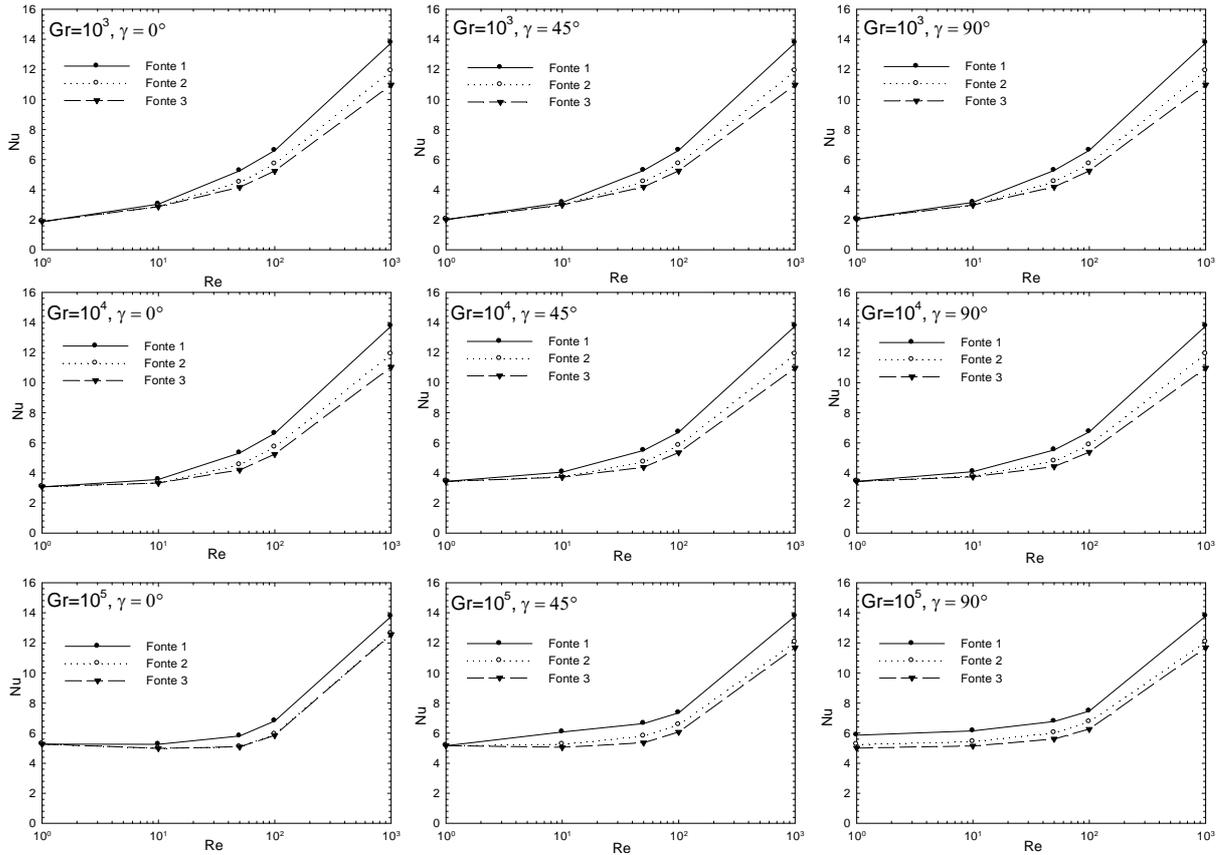


Figura 5.33 - Nusselt versus número de Reynolds para $Gr = 10^3, 10^4$ e 10^5 e $\gamma = 0^\circ, 45^\circ$ e 90° .

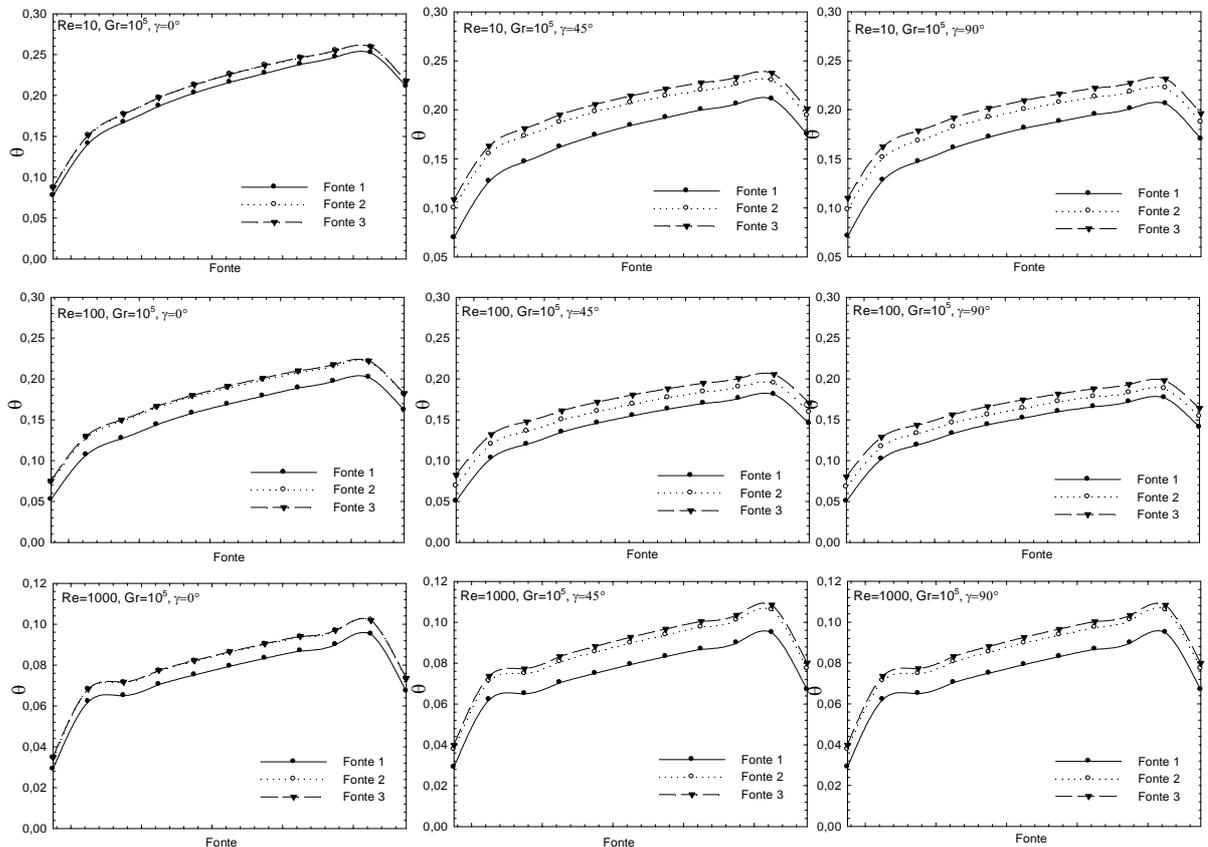


Figura 5.34 - Temperatura sobre as fontes para $Re = 10, 100, 1000$; $Gr = 10^5$, $\gamma = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

A figura 5.34 apresenta as distribuições de temperatura local adimensional nas três fontes para $Re = 10, 100$ e 1000 , $Gr = 10^5$ e $\gamma = 0^\circ, 45^\circ$, e 90° . Novamente aqui, pode ser notado que os casos em que $\gamma = 45^\circ$ e 90° e $Re = 10$ e 100 apresentam menores temperaturas quando $\gamma = 0^\circ$. Isso já não ocorre para $Re = 1000$, onde a posição horizontal do canal apresenta menores temperaturas ao longo dos módulos. Todos os casos em que $\gamma = 0^\circ$, a segunda e terceira fontes apresentam temperaturas iguais. Já a primeira fonte apresenta temperaturas menores. Esta última característica vale também para os outros casos. Como falado anteriormente, isto caracteriza o fluido sendo aquecido pela fonte anterior, prejudicando o resfriamento da fonte posterior.

A figura 5.35 mostra a variação do número de Nusselt médio nas fontes 1, 2 e 3, ao longo do tempo adimensional τ , considerando $Re = 10$ e 100 , $Gr = 10^3, 10^4, 10^5$ e $\gamma = 90^\circ$. No início do tempo todas as três fontes têm um mesmo comportamento, ou seja, os números de Nusselt médios nas fontes 1, 2 e 3, diminuem e têm um mesmo valor, considerando cada gráfico isoladamente. Estes valores estão convergindo. Mas mesmo após, ou antes de atingir a convergência, estes valores bifurcam no decorrer do tempo. Estas bifurcações denotam o momento em que o fluido aquecido em uma fonte afeta a fonte posterior.

Concluindo, a transferência de calor por convecção mista em um canal retangular inclinado com três fontes dispostas na parede inferior foi estudada. Foram verificados os efeitos do ângulo de inclinação γ ($0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$), do número de Reynolds ($1, 10, 50, 100, 1000$), do número de Grashof ($10^3, 10^4, 10^5$), na distribuição de temperatura no canal e sobre as fontes, no número de Nusselt médio e local nas fontes e nos vetores velocidade. De uma maneira geral, o ângulo de inclinação teve uma maior influência no escoamento e transferência de calor, quanto menores fossem os números de Reynolds, principalmente entre 0° e 45° . Nota-se pelas isoterms, que em alguns casos, as fontes foram atingidas pelo fluido aquecido em uma fonte anterior. É importante conhecer este fenômeno, uma vez que ele pode influenciar na troca de calor das fontes. Aparecem recirculações primárias e secundárias e refluxos no escoamento em algumas situações como, por exemplo, $Re = 10$ e $\gamma = 45^\circ$ e 90° . Em problemas de análise de transferência de calor em placas de circuitos eletrônicos, os casos que apresentam menores temperaturas nas fontes são os ideais. Portanto, ainda em concordância com o trabalho de Choi e Ortega (1993), os ângulos iguais a 45° e 90° foram os melhores, havendo pouca diferença entre eles. Uma exceção foi para o caso onde $Gr = 10^5$ e $Re = 1000$, sendo $\gamma = 0^\circ$ a melhor inclinação para o canal. Em geral, os resultados

apresentados para canais inclinados com fontes discretas de calor encorajam o uso de placas inclinadas em gabinetes. Entretanto isto merece mais atenção, porque alguns outros aspectos devem ser levados em consideração, tais como o arranjo geométrico das placas.

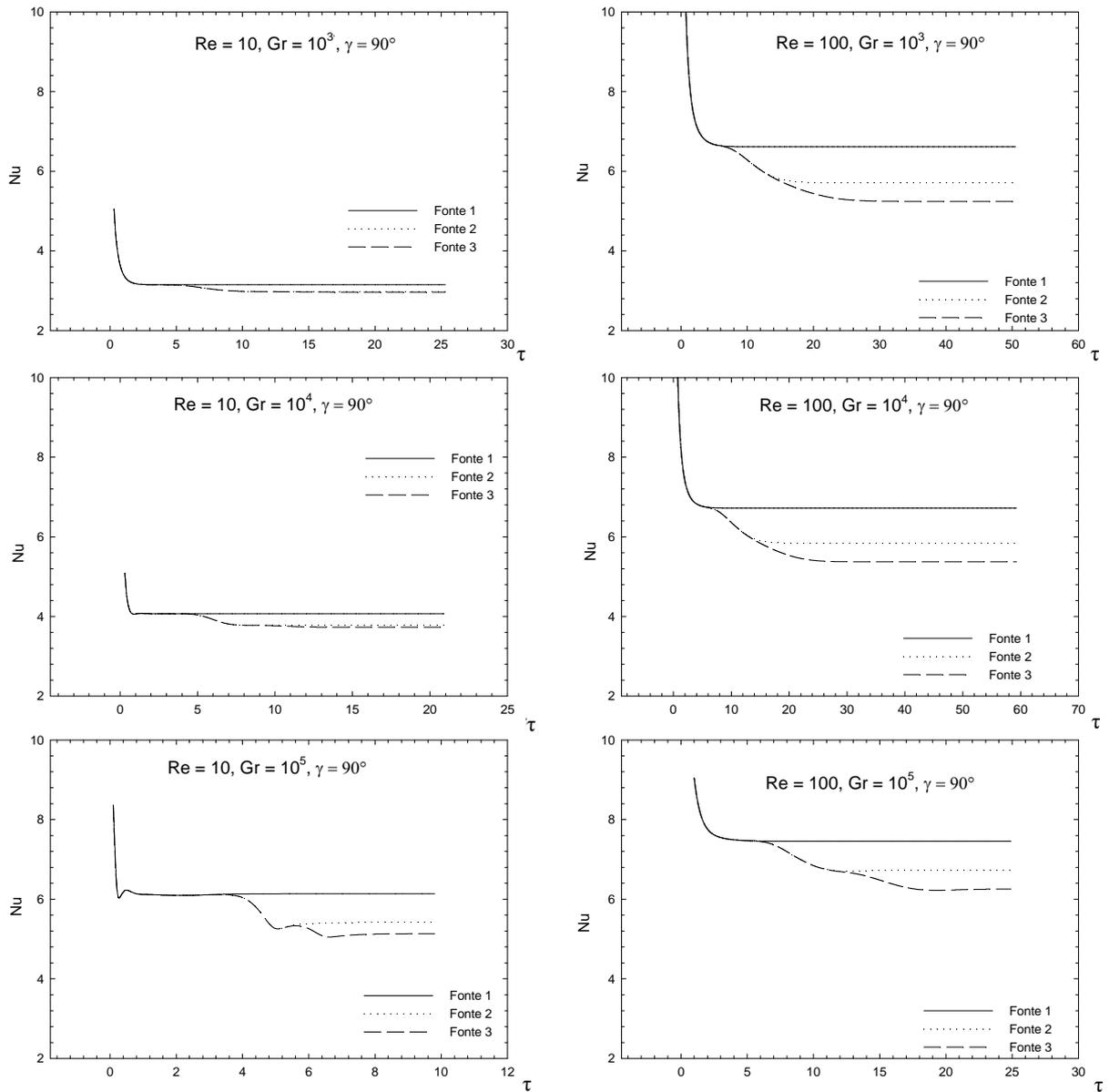


Figura 5.35 - Nusselt médio nas fontes no tempo para $Re = 10, 100$, $Gr = 10^3, 10^4, 10^5$ e $\gamma = 90^\circ$.

5.5 – Convecção Mista em uma Cavity Quadrada com Cilindros Internos Rotativos

O estudo de convecção mista em cavidades com cilindros rotativos será feito com $Re = \frac{u_{max} 2r}{\nu}$ e $u_{max} = r\omega$; sendo r o raio do cilindro, ω a velocidade angular da superfície cilíndrica e ν a viscosidade cinemática do fluido. Dois sub-casos serão analisados: Caso 4.1 - Convecção mista em uma cavidade quadrada inclinada com um cilindro rotativo; Caso 4.2 - Convecção mista em uma cavidade retangular horizontal com dois cilindros rotativos. As rotações dos cilindros ocasionam mudanças no escoamento por causa de tensões cisalhantes geradas que podem estar a favor ou contra as forças de empuxo geradas pelo aquecimento ou resfriamento do fluido pelos próprios cilindros e paredes laterais verticais isotérmicas. O número de Nusselt é avaliado para diversas situações e o fenômeno físico poderá ser observado através dos vetores velocidades e as distribuições de temperatura.

5.5.1 – Caso 4.1: Convecção Mista em uma Cavity Quadrada Inclinada com um Cilindro Interno Rotativo

A figura 5.36 apresenta uma cavidade quadrada inclinada contendo um cilindro interno rotativo aquecido superficialmente. As paredes paralelas ao eixo X são isoladas termicamente, e as paredes paralelas a Y , esquerda e direita, têm temperatura baixa e alta, respectivamente.

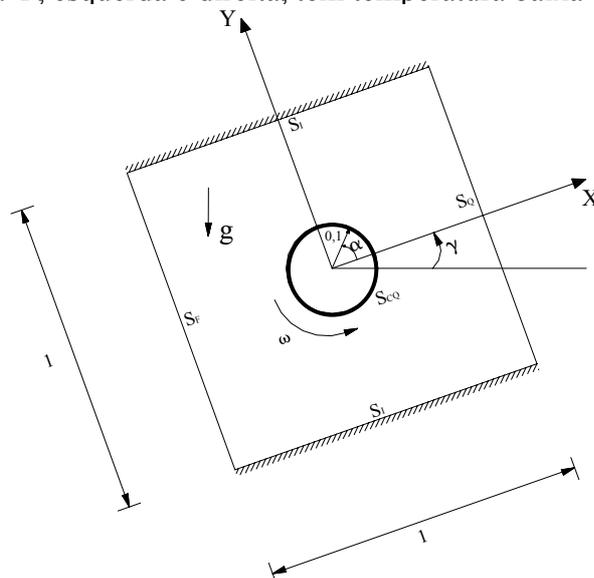


Figura 5.36 - Geometria e condições de contorno do problema.

A figura 5.37 mostra as distribuições de temperatura para número de Grashof $Gr = 10^5$ e o ângulo de inclinação $\gamma = 0^\circ$ e números de Reynolds iguais à $Re = 1, 10, 50, 100, e 500$. As isotermas são mostradas para os dois sentidos de rotação do cilindro. A variação do número de Reynolds está relacionada com a variação da velocidade angular ω do cilindro interno. Pode ser notada a influência da rotação do cilindro sobre as distribuições de temperatura. Até $Re = 10$, nenhuma mudança significativa é encontrada, comparando-se os casos com mesmos Re , mas com sentidos opostos de rotação; o que já não acontece para números de Reynolds acima de 10. Embora para $Re = 1$, exista fluido quente confinado na parte superior da cavidade, os gradientes de temperatura ao longo das paredes verticais e sobre a superfície do cilindro variam suficientemente, garantindo assim os maiores números de Nusselt de uma maneira geral para $Gr = 10^5$. À medida que a rotação do cilindro aumenta, para $Gr = 10^5$ no sentido horário, os gradientes de temperaturas geralmente decrescem, assim diminuindo os números de Nusselt. Fisicamente, isto é ocasionado pelas forças geradas pela rotação do cilindro que fazem com que o fluido junto à parede vertical quente perca velocidade, permanecendo mais tempo nesta região. Assim, uma região de fluido quente fica confinada nesta área. Isto poderá ser mais bem visualizado na figura 5.39. É interessante observar que para $Re = 500$ no sentido horário, o gradiente de temperatura ao longo da parede quente é baixo, aumentando assim a temperatura do fluido próximo à ela. Quando o resfriamento é desejado, este caso deve ser evitado.

São mostradas na figura 5.38 as linhas de corrente com as isotermas para $Gr = 10^5$, $\gamma = 0^\circ$, $Re = 1, 50 e 500$ nos sentidos opostos de rotação do cilindro. As linhas de corrente foram mostradas sem escala com a intenção de se poder analisar melhor o escoamento. À medida que Re aumenta, o escoamento dentro da cavidade é fortemente influenciado pelo escoamento gerado pela rotação do cilindro, caracterizando, portanto, um escoamento predominantemente forçado. O escoamento apresentado para $Re = 500$, com o cilindro girando no sentido horário, tem o pior comportamento quando se deseja o resfriamento. O motivo disto é o confinamento de fluido mais quente junto à parede quente. De um modo geral, os casos no sentido anti-horário são os melhores para $Gr = 10^5$.

O número de Nusselt médio ao longo da parede fria (Nu_F), da parede quente (Nu_Q) e da parede do cilindro (Nu_{CQ}), é mostrado na figura 5.39 em relação a Re , para $Gr = 10^3, 10^4 e 10^5$ e $\gamma = 0^\circ$. O caso em que $Gr = 10^3$ não apresenta mudança significativa quando sentidos opostos são considerados. Mas, à medida que Gr aumenta, os casos no sentido anti-horário

apresentam maiores números de Nusselt com exceção do caso onde $Gr = 10^5$ e Re menores que 500. De um modo geral, a parede quente é a superfície que apresenta a menor troca de calor. Somente para $Gr = 10^5$ e $Re = 500$, Nu_Q é maior do que Nu_{CQ} . Os gradientes na superfície cilíndrica não mudam significativamente para Gr pequenos ($Gr = 10^3$).

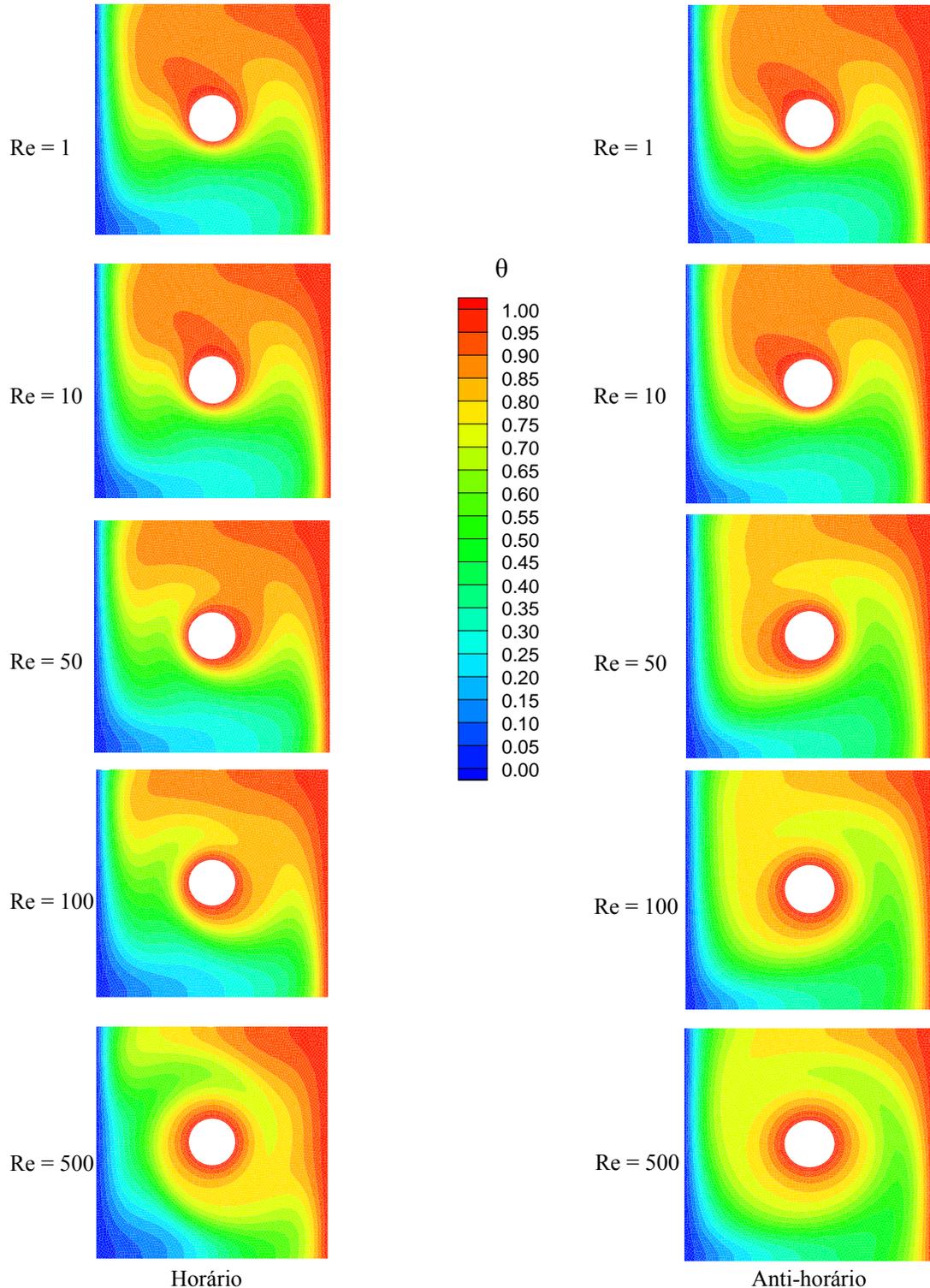


Figura 5.37 - Isotermas para $Gr = 10^5$ para o cilindro girando nos sentidos horário e anti-horário.

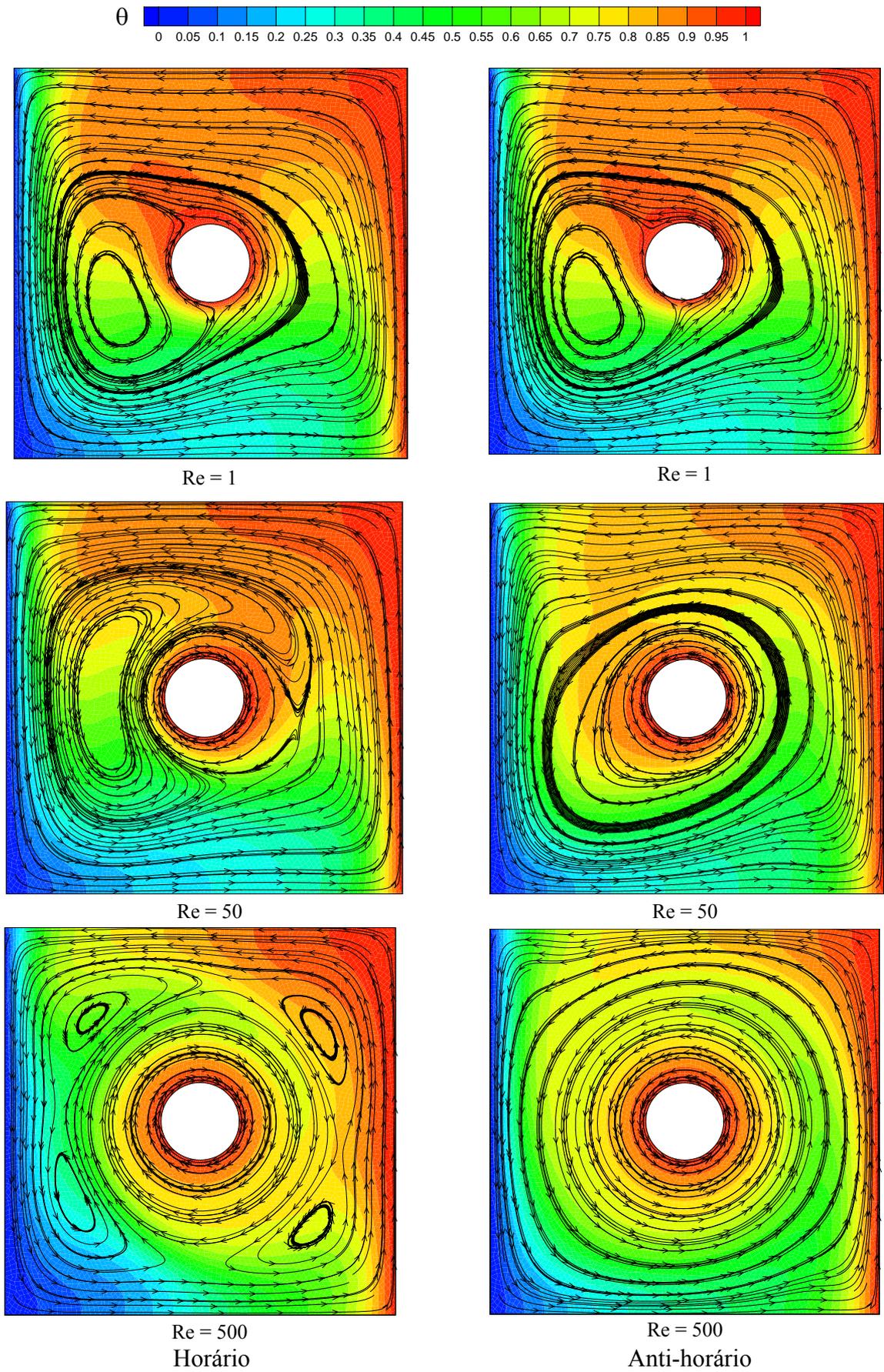


Figura 5.38 – Isotermas e linhas de corrente para $Gr = 10^5$ e $\gamma = 0^\circ$.

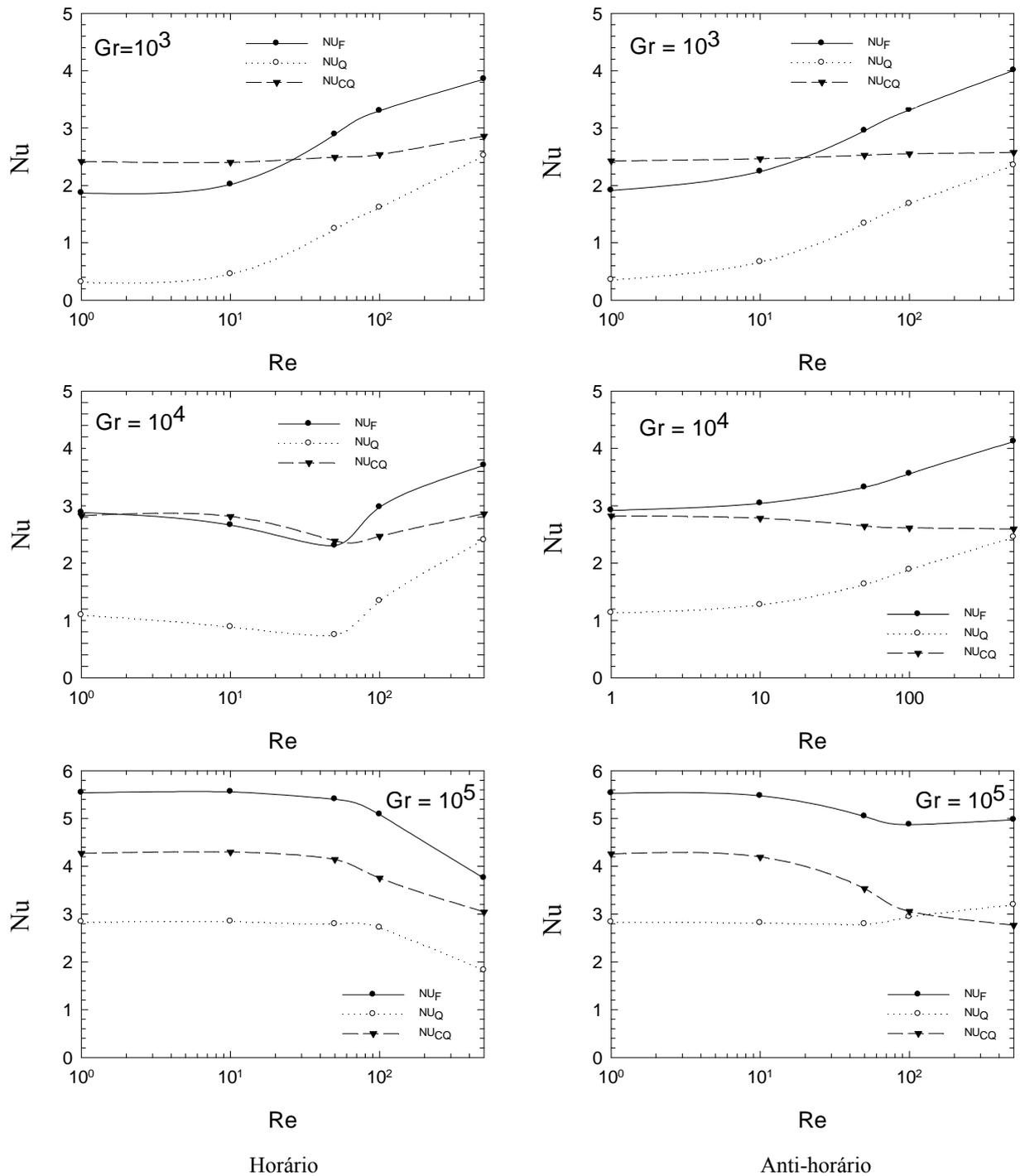


Figura 5.39 - Nusselt versus Reynolds $1 \leq Re \leq 500$ para $Gr = 10^3, 10^4, 10^5, \gamma = 0^\circ$.

A figura 5.40 mostra as isotermas para os casos onde $Gr = 10^5, Re = 1, 10, 50, 500$, e $\gamma = 45^\circ$ quando o cilindro estiver girando no sentido anti-horário. Como esperado, o fluido quente está concentrado na parte superior da cavidade, enfraquecendo assim significativamente a transferência de calor em todas as paredes de uma maneira geral, quando comparados aos respectivos casos da cavidade horizontal.

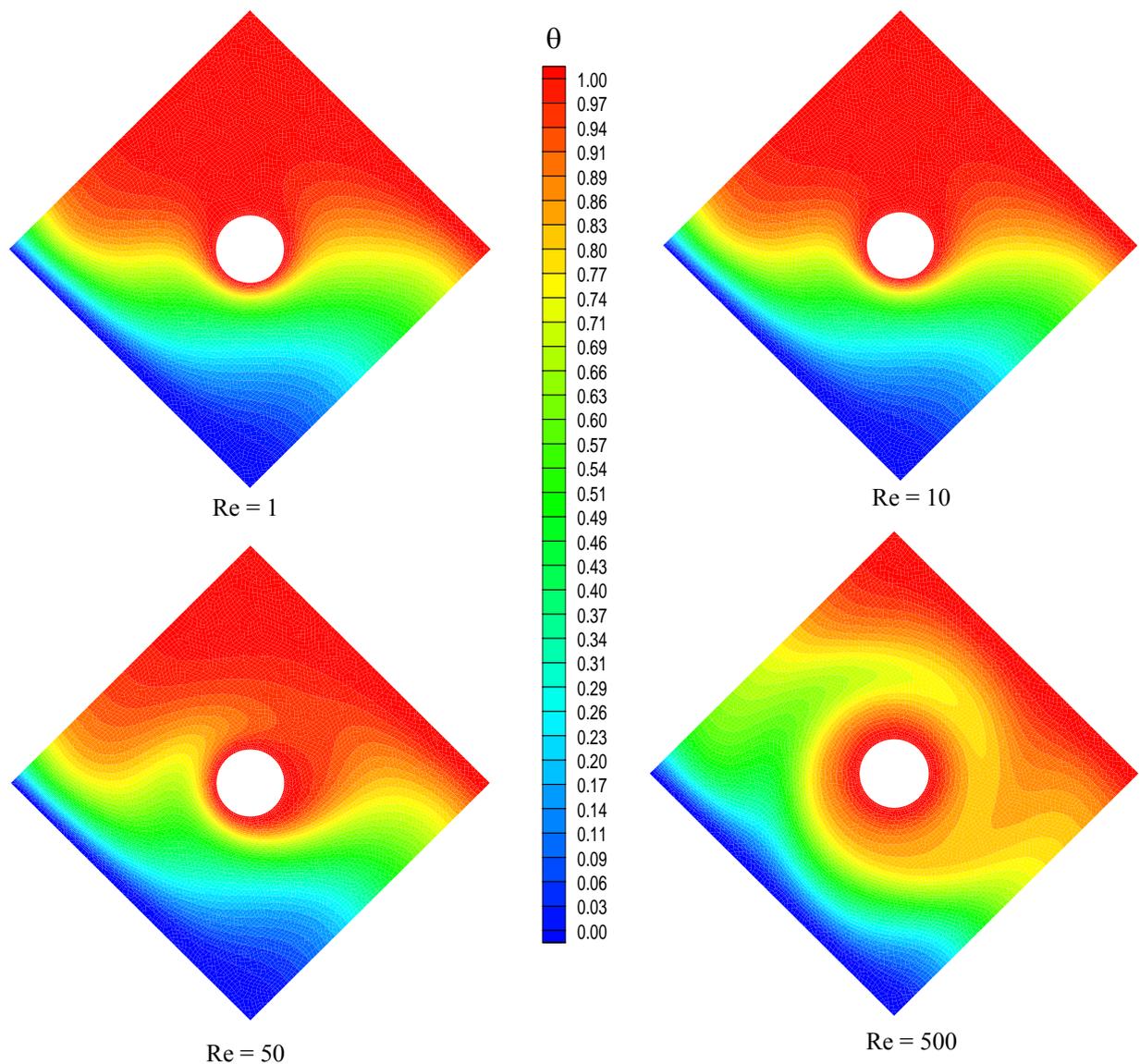


Figura 5.40 - Isotermas para $Gr = 10^5$ e $\gamma = 45^\circ$.

Concluindo a análise deste problema, a convecção mista foi estudada numa cavidade com um cilindro rotativo aquecido. Vários parâmetros foram variados para estudar o problema, tais como, o número de Reynolds $1 \leq Re \leq 500$, o número de Grashof $10^3 \leq Gr \leq 10^5$, e o ângulo de inclinação γ igual a 0° e 45° . Foi observado que os casos no sentido anti-horário produziram uma melhor taxa de transferência de calor do que aqueles no sentido horário, com exceção do caso onde $Re < 500$ e $Gr = 10^5$. Isto pode ser explicado pelo fato de que o movimento do cilindro interno no sentido anti-horário intensificou o escoamento, uma vez que este sentido está a favor das forças de empuxo geradas pela diferença de temperatura. Os casos de rotação para a cavidade de 45° no sentido anti-horário, significativamente, reduziram a troca de calor, comparados aos casos correspondentes para cavidades horizontais.

5.5.2 – Caso 4.2: Convecção Mista em uma Cavidade Retangular Horizontal com dois Cilindros Internos Rotativos

A figura 5.41 apresenta uma cavidade retangular horizontal contendo dois cilindros internos rotativos com superfícies isotérmicas. As paredes paralelas ao eixo X são isoladas termicamente, enquanto que, as paredes paralelas ao eixo Y têm temperatura baixa e alta, respectivamente.

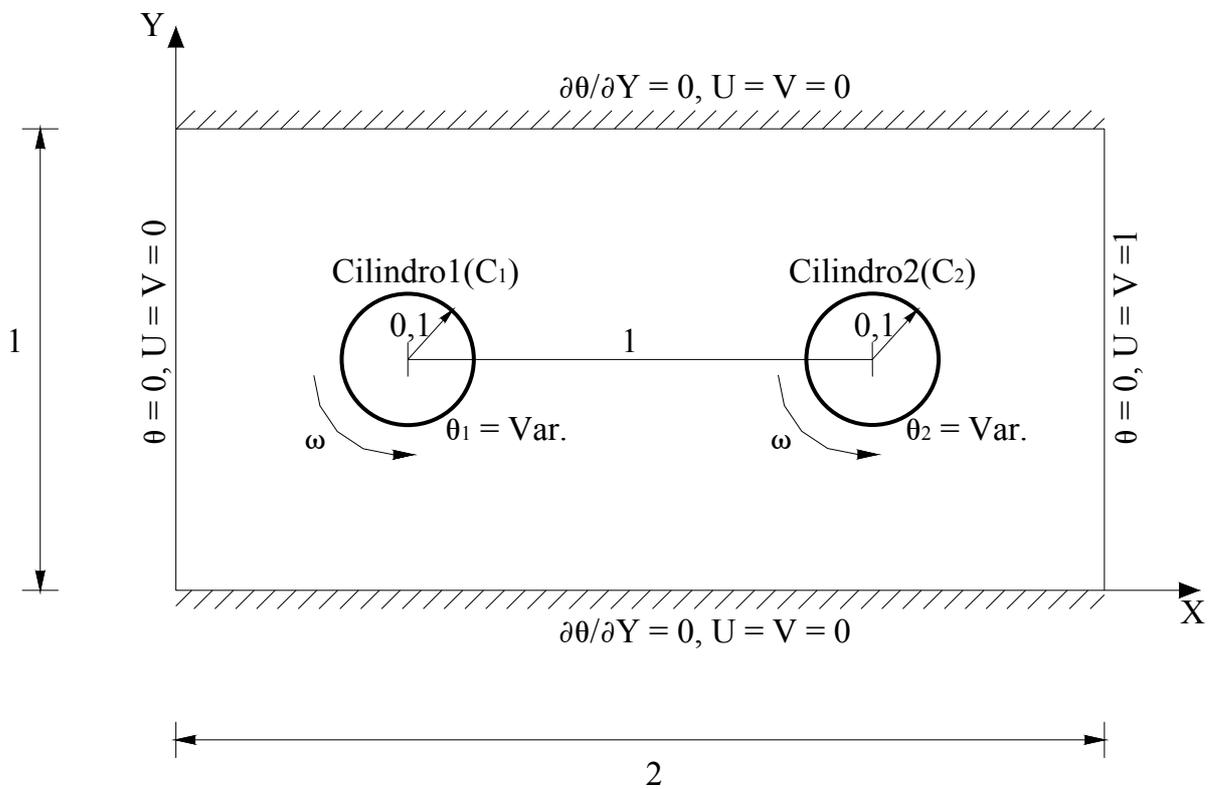


Figura 5.41 - Geometria e condições de contorno.

Na figura 5.42, podem ser notados casos combinados neste problema. Os cilindros C_1 e C_2 podem ter temperaturas 0 ou 1, enquanto que suas superfícies podem girar com velocidade angular ω nos sentidos anti-horário e horário.

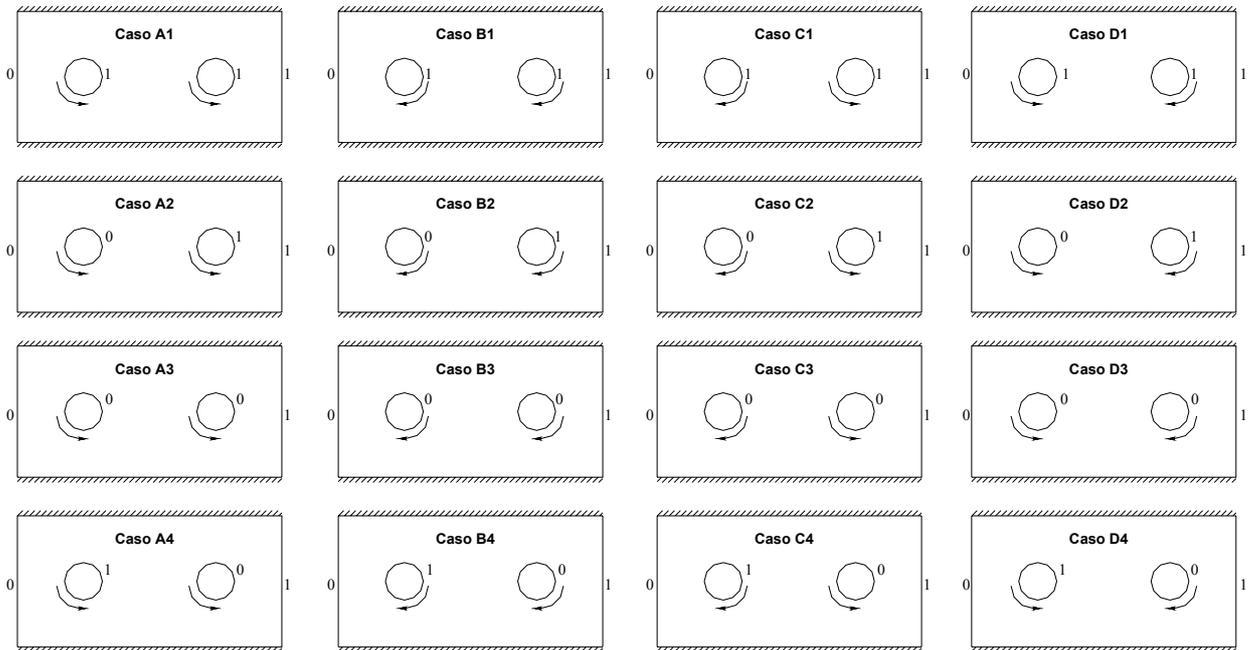


Figura 5.42 – Casos estudados para uma cavidade com dois cilindros rotativos.

Os casos da figura 5.42 são estudados considerando o número de Grashof $Gr = 10^5$ e números de Reynolds $Re = 10, 50, 100$ e 500 . Na figura 5.43, as distribuições de temperatura são mostradas para $Gr = 10^5$ e $Re = 10$ e 100 , considerando os casos A, B, C e D. Quando $Re = 10$, as forças de empuxo são mais dominantes do que aquelas geradas pelas velocidades dos cilindros. Qualquer que seja a direção da velocidade angular para $Re = 10$, as isotermas parecem não mudar significativamente nos casos em que as temperaturas dos cilindros não mudam, por exemplo, casos A1, B1, C1 e D1 e $Re = 10$. Entretanto, para $Re = 10$, se as direções das velocidades dos cilindros não variam, a temperatura imposta nas superfícies dos cilindros tem um papel importante no comportamento das isotermas e conseqüentemente na transferência de calor, por exemplo, casos A1, A2, A3 e A4 e $Re = 10$. Por outro lado, quando $Re = 100$, o que significa maiores velocidades nas superfícies dos cilindros, as direções das velocidades angulares influenciam mais fortemente nas distribuições de temperatura quando as temperaturas nas superfícies dos cilindros são mantidas as mesmas, por exemplo, casos A1, B1, C1 e D1 e $Re = 100$.

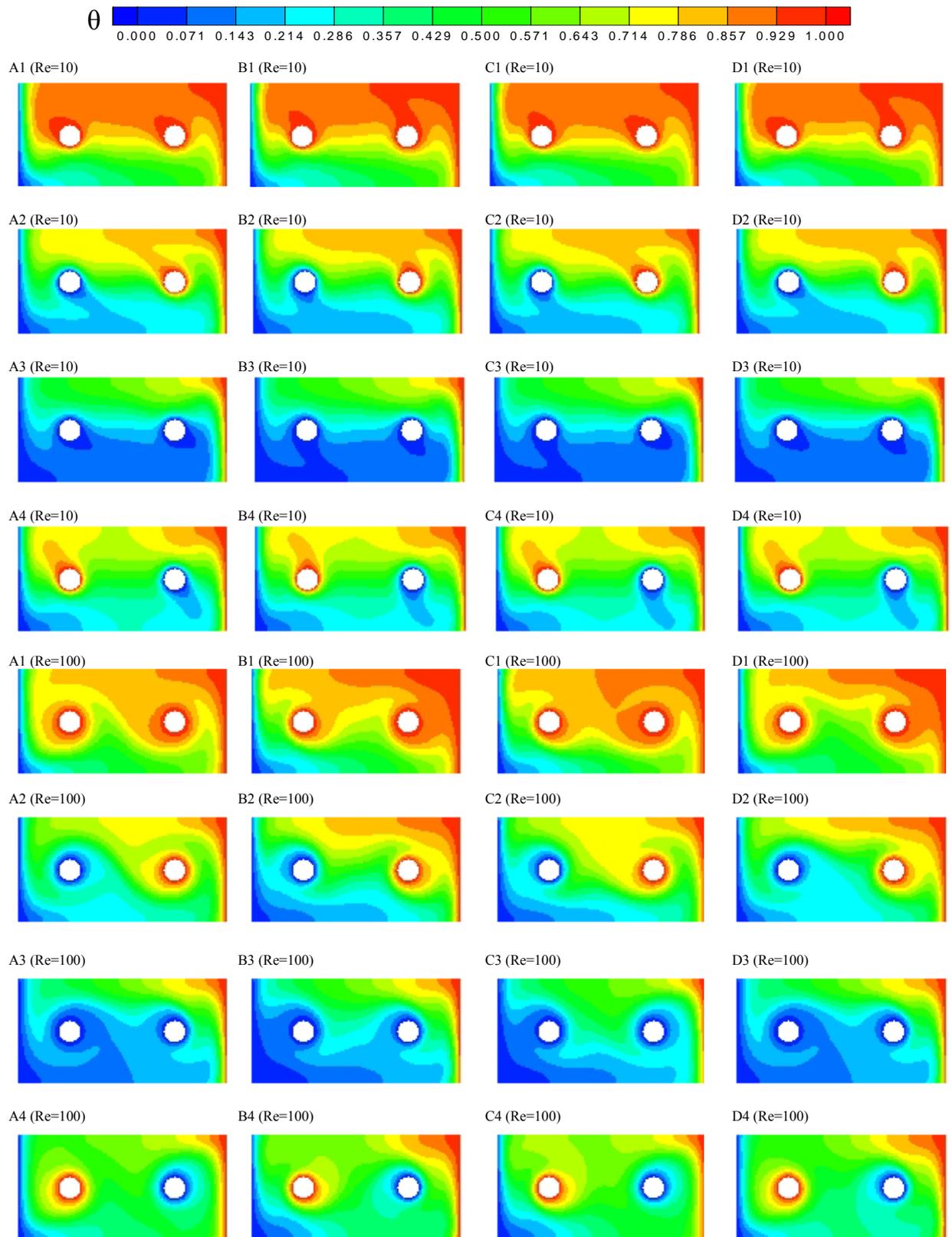


Figura 5.43 - Isothermas para $Re = 10, 100$ e $Gr = 10^5$.

As figuras 5.44 e 5.45 apresentam o comportamento do número de Nusselt médio ao longo das superfícies fria (Nu_F), quente (Nu_Q), cilindro 1 (Nu_{C1}), cilindro 2 (Nu_{C2}) para os casos da figura 5.42, onde $Gr = 10^5$ e $Re = 10, 50$ e 100 . Os conjuntos de casos (A1, B1, C1, D1), (A2, B2, C2, D2), (A3, B3, C3, D3) e (A4, B4, C4, D4), representam a influência do sentido somente de giro do cilindro. Enquanto que os conjuntos (A1, A2, A3, A4), (B1, B2, B3, B4), (C1, C2, C3, C4) e (D1, D2, D3, D4), denotam a variação da temperatura da superfície do cilindro. Vários resultados podem ser retirados das figuras 5.44 e 5.45. Entretanto, somente alguns deles serão mencionados. No caso B4 na figura 5.44, pode-se notar uma forte influência na transferência de calor para $Re = 50$ e 100 , comparados ao caso A4, com exceção dos números de Nusselt médios nos cilindros. Também é interessante observar na figura 5.44, a proximidade do número de Nusselt nos cilindros e nas paredes aquecidas e resfriadas em (A2, B2). Além disso, em (C2, D2) e (C4, D4) na figura 5.45, existem inversões do comportamento do número de Nusselt. Por exemplo, em C2, $Nu_{C1} > Nu_{C2}$ e $Nu_Q > Nu_F$. Por outro lado, em D2, $Nu_{C1} < Nu_{C2}$ e $Nu_Q < Nu_F$.

O efeito do escoamento na distribuição de temperatura pode ser visto claramente na figura 5.46 para número de Grashof $Gr = 10^5$ e números de Reynolds $Re = 10, 50, 100$ e 500 . É importante dizer que as linhas de corrente são traçadas sem escala somente para uma melhor visualização. Pode-se observar uma mudança de um problema quase naturalmente convectivo ($Re = 10$) para um problema principalmente dominado pela convecção forçada ($Re = 500$). Para baixos Re , existem recirculações geradas por forças de empuxo. De uma forma diferente, para altos Re , as recirculações originadas pelos cilindros estão concentradas ao redor dos mesmos. Na verdade, para o número de Grashof estudado aqui $Gr = 10^5$, os escoamentos principais dentro das cavidades para números de Reynolds altos são gerenciados pela velocidade dos cilindros. Em outras palavras, o sentido de giro dos cilindros controla o escoamento principal.

Concluindo, estudou-se neste problema a convecção mista dentro de uma cavidade com cilindros internos girando com imposição de temperaturas em suas superfícies. O número de Grashof foi considerado igual a 10^5 em todo este problema. Uma variedade de casos foi estudada aqui em se combinando as temperaturas dos cilindros e os sentidos de giro dos mesmos. Entretanto, algo importante que deve ser ressaltado: é o comportamento quando altas velocidades angulares estão presentes, controlando o escoamento principal.

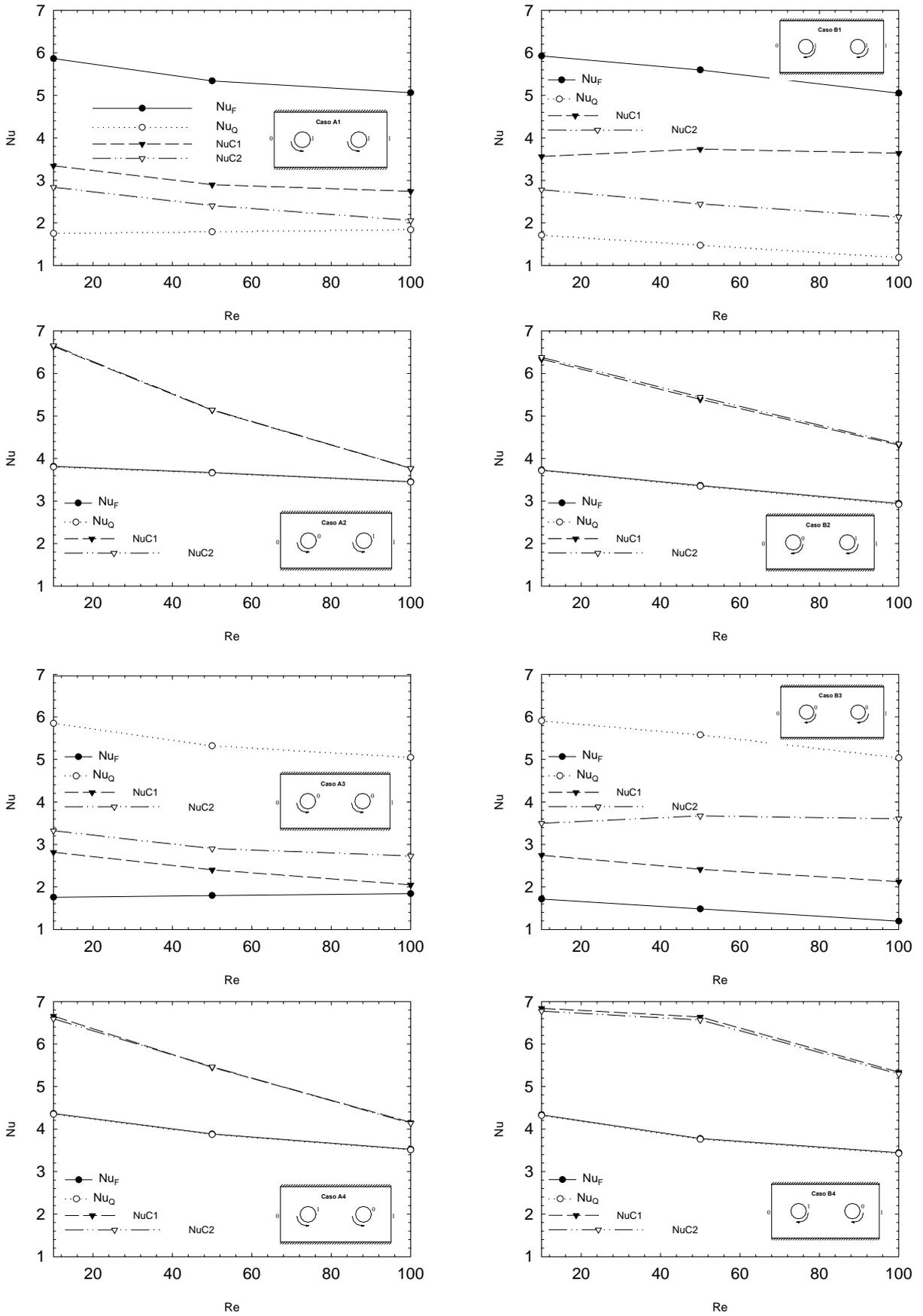


Figura 5.44 - Nusselt médio para os casos da figura 5.37 versus Re e $Gr = 10^5$.

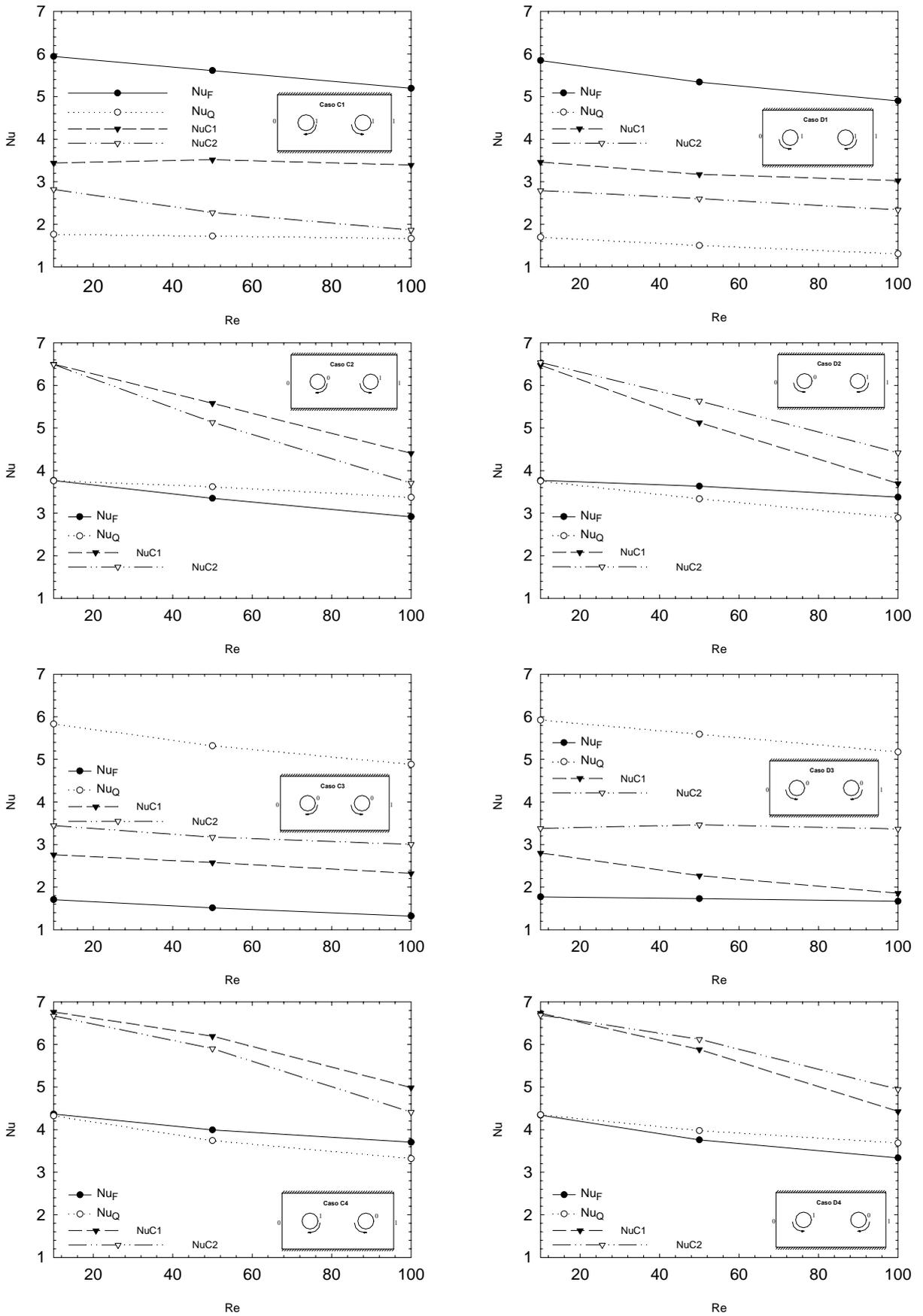


Figura 5.45 - Nusselt médio para os casos da figura 5.42 versus Reynolds e $Gr = 10^5$.

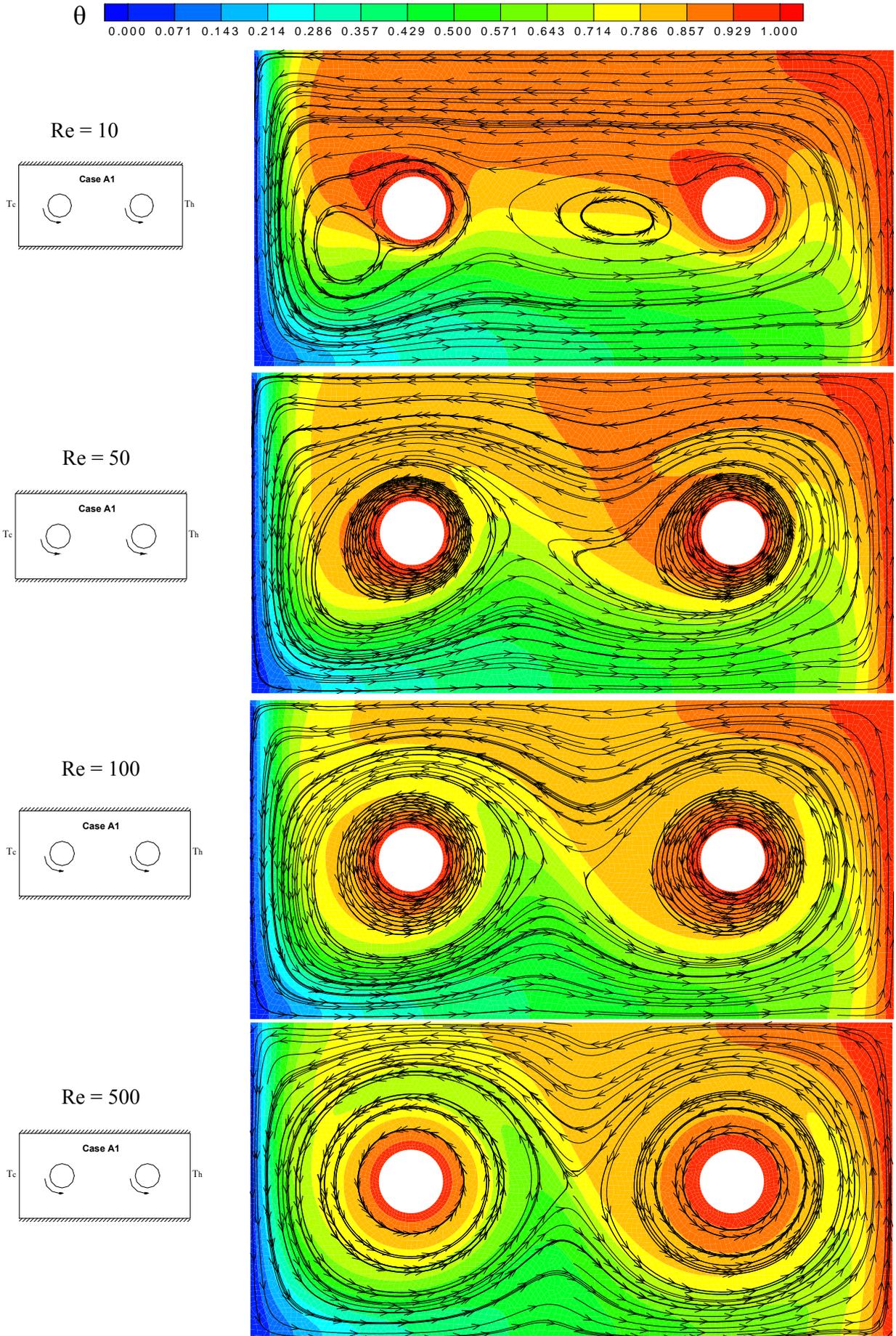


Figura 5.46 - Isothermas e linhas de corrente para o caso A1.

Capítulo 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1 – CONCLUSÕES

Foi realizado um estudo numérico da convecção mista empregando-se o Método de Elementos Finitos (MEF) com as perturbações de Petrov–Galerkin, o método da penalidade e o método semi-implícito de Euler para avanço no tempo. Foram considerados escoamentos laminares, incompressíveis, bidimensionais e não-permanentes, sendo que a maioria dos resultados foi mostrada para o regime permanente, sendo o ar, o fluido utilizado em todo o estudo com o número de Prandtl igual a 0,7 ou 0,733. A discretização espacial empregou malhas estruturadas e não-estruturadas. A formulação que governa os fenômenos físicos dos problemas baseou-se nas equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia. Na análise, variáveis primitivas de velocidade, temperatura e pressão foram obtidas numericamente utilizando-se o esquema de Galerkin com elementos quadriláteros lineares. Para a integração numérica, utilizou-se quatro pontos Gaussianos na integração completa e um ponto Gaussiano na integração reduzida.

Foram realizadas comparações para a validação do código computacional e também um estudo do refinamento de malha para verificar a convergência dos resultados. Quatro validações foram realizadas no presente trabalho. Os resultados numéricos foram comparados com resultados experimentais e numéricos da literatura, mostrando que há uma boa

concordância entre eles. O estudo da convergência no refinamento da malha foi abordado para cada caso. Um estudo da conservação da massa (apêndice E) foi realizado mostrando-se o mapeamento do divergente da velocidade para vários casos estudados neste trabalho. Os valores dos divergentes se apresentaram na faixa de precisão dos cálculos.

Finalmente, resultados para vários casos de relevância na engenharia foram obtidos para os campos de velocidades e temperaturas, bem como para as taxas de transferência de calor local e média. Estes resultados foram obtidos observando-se os custos computacionais e convergência (apêndice G) e os passos de tempo obtidos no estudo da independência do passo de tempo (apêndice H).

O primeiro estudo realizado foi o de um canal com degrau aquecido por baixo. Na entrada, o escoamento tinha um perfil de velocidade parabólico totalmente desenvolvido e uma variação linear da temperatura. Verificou-se a influência do número de Froude (1/75, 1/150, 1/300) e do número de Reynolds (10 e 20). Como esperado, o número de Nusselt aumentou à medida que se aumentou Reynolds. Para o caso onde $Fr = 1/300$, $Re = 20$ e $Gr = 6 \times 10^4$, o escoamento foi principalmente caracterizado por células de recirculação maiores. Ambos os tamanhos das células térmicas e de recirculação para os casos onde $Fr = 1/300$, $Re = 10$ e $Gr = 3 \times 10^4$ e o $Fr = 1/300$, $Re = 20$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$, tiveram seus tamanhos quase que dobrados em relação aos seus casos de referência, como por exemplo, os casos em que $Fr = 1/75$, $Re = 10$, e $Gr = 7,5 \times 10^3$ e $Fr = 1/75$, $Re = 20$ e $Gr = 3 \times 10^4$, respectivamente.

Em seguida, estudou-se a convecção em uma curva de 180° considerando um escoamento laminar bidimensional não-permanente. Alguns casos foram analisados variando-se o número de Reynolds de $10 \leq Re \leq 1000$ e o número de Grashof de $1 \leq Gr \leq 1,2 \times 10^5$. Observou-se que o escoamento está fortemente correlacionado com o campo de temperatura. O caso em que $Re = 100$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$, mostrou uma mudança significativa no escoamento e na transferência de calor comparado a todos os casos estudados para este problema. Oscilações fortes apareceram ao longo da placa depois da curva, o que contribuiu para o aumento da transferência de calor. Células de recirculação, separação e recolamento do escoamento surgiram após a curva, aumentando a troca de calor. Observou-se uma oscilação mais forte ao longo da distância $1 \leq X \leq 5$ e $Y = 1,1$, que corresponde à parte inicial da placa

depois da curva. Um regime quase-periódico foi atingido para alguns casos, mas foi mais intenso para os casos onde $Re = 100$ e $Gr = 1,2 \times 10^5$.

Um outro caso estudado tratou da convecção mista num canal com uma fonte de calor, considerando o efeito do ângulo de inclinação e de alguns parâmetros físicos. As variações consideradas são: $1 \leq Re \leq 500$, $10^3 \leq Gr \leq 10^5$, e $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$. Observou-se que o efeito do ângulo de inclinação nas distribuições de temperatura e velocidade teve um papel importante na transferência de calor para baixos Re e altos Gr . Para altos Re , o efeito da inclinação do canal foi desprezível. Em geral, também foi verificado que o ângulo de inclinação próximo de 60° e 75° forneceu condições mais favoráveis quando o resfriamento é objetivado. Constatou-se no trabalho de Choi e Ortega (1993) que a inclinação ótima seria de 90° , apesar da pouca diferença na taxa de transferência de calor com os casos onde $\gamma = 45^\circ$. Alguns casos apresentaram o fluxo reverso para baixos Re e altos Gr . Este escoamento reverso não influenciou notavelmente a transferência de calor na fonte, embora ele tenha modificado os campos de temperatura e velocidade significativamente.

Dando continuidade, a convecção mista em um canal retangular horizontal com duas fontes de calor montadas na parede inferior foi estudada. A parede superior do canal foi mantida a uma temperatura fria constante e suas partes restantes adiabáticas. Foram variados alguns parâmetros geométricos e físicos, tais como: as distâncias entre as fontes $d = 1, 2$ e 3 , o número de Reynolds $Re = 1, 10, 50, 100$, e 1000 ; e o número de Grashof $Gr = 10^3, 10^4$ e 10^5 . Para baixos números de Reynolds ($Re = 1$), e distâncias $d = 1$ e 2 , as forças de empuxo geraram plumas térmicas que se sobrepuseram parcialmente. Para maiores Re , a temperatura na segunda fonte foi aumentada por uma esteira de fluido quente proveniente da primeira fonte. Para $Re = 10$ e $Gr = 10^5$, oscilações no escoamento apareceram afetando-o fortemente, mas o número de Nusselt médio não pareceu mudar significativamente. Para $Re = 100$ e 1000 , as distribuições de temperatura na primeira fonte não foram afetadas pelas distâncias entre as fontes. Ao passo que na segunda fonte, esta influência já foi notória. Uma conclusão importante é que existiu uma distância ótima, $d = 3$, embora a distância $d = 2$ também não apresentasse uma mudança importante na temperatura.

Terminado o estudo com fontes localizadas, a convecção mista em um canal retangular inclinado com três fontes dispostas na parede inferior foi estudada. Foram verificados os efeitos do ângulo de inclinação γ ($0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$), do número de Reynolds ($1, 10, 50, 100$,

1000), do número de Grashof (10^3 , 10^4 , 10^5), na distribuição de temperatura no canal e sobre as fontes, no número de Nusselt médio e local nas fontes e nos vetores velocidades. De uma maneira geral, o ângulo de inclinação teve uma maior influência no escoamento e transferência de calor, quanto menores fossem as velocidades forçadas, principalmente entre 0° e 45° . Notou-se também que, em alguns casos, as fontes foram atingidas pela esteira térmica gerada por uma fonte anterior. Apareceram recirculações primárias e secundárias e refluxos no escoamento em algumas situações como, por exemplo, $Re = 10$ e $\gamma = 45^\circ$ e 90° . Em problemas de análise de transferência de calor em placas de circuitos eletrônicos, os casos que apresentam menores temperaturas nas fontes são os ideais. Portanto, ainda em concordância com o trabalho de Choi e Ortega (1993), os ângulos 45° e 90° foram os melhores, havendo pouca diferença entre eles. Uma exceção foi para o caso onde $Gr = 10^5$ e $Re = 1000$ e $\gamma = 0^\circ$, onde as fontes apresentaram melhor troca de calor.

Os resultados dos estudos realizados para canais com fontes discretas de calor estimulam o uso de placas inclinadas em gabinetes. Entretanto, alguns outros aspectos deveriam ser levados em consideração, tais como a disposição e a quantidade das fontes, etc.

Finalmente, estudou-se a convecção mista dentro de uma cavidade com cilindros internos girando com imposição de temperaturas em suas superfícies com número de Grashof $Gr = 10^5$. Vários resultados foram obtidos combinando as temperaturas dos cilindros e os sentidos de giro dos mesmos. Algo importante que deve ser ressaltado foi o comportamento quando altas velocidades angulares estão presentes. Esta é uma situação que controla o escoamento principal. Na verdade, há algumas situações que devem ser evitadas, quando se objetiva o resfriamento.

6.2 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS COM O USO DA TÉCNICA DE PETROV-GALERKIN

- 1) Implementação de um modelo tridimensional laminar com elementos lineares com oito nós.

No presente trabalho foram estudados problemas bidimensionais com elementos lineares com quatro nós. Como extensão natural a esse trabalho, propõe-se o estudo

de problemas tridimensionais com elementos lineares com oito nós. Nessa proposta podem ser estudados problemas de convecção natural, forçada e mista.

- 2) Implementação de um modelo tridimensional turbulento para os casos estudados nesse trabalho.

A turbulência é um fenômeno tridimensional. Os modelos bidimensionais apresentam limitações ao descrever os escoamentos turbulentos reais. Assim, é necessário o desenvolvimento de códigos computacionais tridimensionais para se obter melhores resultados.

- 3) Comparar os esquemas de Petrov-Galerkin, Taylor-Galerkin e outras técnicas de estabilização.

Fazer comparação dos diversos esquemas com relação à estabilidade numérica, convergência e tempo computacional, para os vários casos padrões da literatura.

- 4) Estudar problemas de convecção natural em cavidades com fontes discretas de calor fixadas sobre as paredes.

Esse estudo apresenta grande interesse no resfriamento de componentes eletrônicos, no interior de cavidades, visando à otimização de projetos térmicos.

Apêndice A

MÉTODO DE GALERKIN

A.1 – INTRODUÇÃO

Neste apêndice é desenvolvido o método de Galerkin para aproximar as equações de conservação da quantidade de movimento e da energia no regime laminar não-permanente e bidimensional. Primeiramente, um estudo dos resíduos ponderados é apresentado, seguido da utilização do teorema de Green para diminuir a ordem das derivadas, resultando em uma formulação fraca. Finalmente, as mesmas funções usadas nas aproximações das variáveis, são também usadas nos resíduos ponderados, gerando assim o método de Galerkin.

A.2 – DESENVOLVIMENTO

Sejam as equações de conservação da quantidade de movimento e energia abaixo na forma dimensional e também já com a aproximação de Boussinesq para a massa específica nos termos de empuxo:

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta(T - T_0)], \quad (\text{A.1})$$

Equação de Navier-Stokes na direção x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \sin \gamma g [1 + \beta(T - T_0)], \quad (\text{A.2})$$

Equação de Navier-Stokes na direção y:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \cos \gamma g [1 + \beta(T - T_0)], \quad (\text{A.3})$$

Energia:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (\text{A.4})$$

sendo ρ a massa específica, ρ_0 a massa específica de referência, β o coeficiente de expansão térmica, T a temperatura, T_0 a temperatura de referência, ν a viscosidade cinemática e α o coeficiente de difusão térmica.

Sejam agora dois tipos de fronteiras do domínio denotadas por Γ_1 e Γ_2 neste trabalho, sendo que:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ (toda a fronteira),}$$

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = 0 \text{ (as fronteiras não se sobrepõem).}$$

Γ_1 = condição de contorno de Dirichlet ou essencial, onde à variável dependente é atribuído um valor prescrito. Por exemplo, no caso deste trabalho, um valor de temperatura ou velocidade.

Γ_2 = fronteira com condição de contorno de Neumann ou natural, onde um valor normal à fronteira é prescrito. Por exemplo, um fluxo de calor.

Usando uma notação matemática mais geral, as equações (A.2) a (A.4) podem ser interpretadas como operadores lineares que agem nas funções $\phi(x, y)$ definidas sobre um domínio correspondente Ω e que satisfazem um conjunto de condições de contorno em Γ :

$$L\phi = f^* \quad (x, y) \in \Omega, \quad (\text{A.5})$$

$$\phi = g_1(x, y) \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (\text{A.6})$$

$$D_T \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} = g_2(x, y) \quad (x, y) \in \Gamma_2. \quad (\text{A.7})$$

O operador em (A.2) torna-se:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} - v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \right], \quad (\text{A.9})$$

$$f^* = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x} + B_x, \quad (\text{A.10})$$

sendo $B_x = \text{sen} \gamma g [1 + \beta(T - T_o)]$.

O operador em (A.3) torna-se:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} - v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \right], \quad (\text{A.11})$$

$$f^* = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial y} + B_y, \quad (\text{A.12})$$

sendo $B_y = \text{cos} \gamma g [1 + \beta(T - T_o)]$.

O operador em (A.4) torna-se:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} - \beta \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \right], \quad (\text{A.13})$$

$$f^* = 0. \quad (\text{A.14})$$

Agora serão apresentadas as classes de funções reais sobre as quais os operadores lineares agem e aquelas que serão necessárias para achar as soluções por elementos finitos.

Sejam as seguintes definições:

$L^2(\Omega)$, o espaço de funções definidas em Ω , cujos quadrados são integráveis sobre Ω , isto é:

$$L^2(\Omega) = \left\{ f(x, y) / \int_{\Omega} (f(x, y))^2 d\Omega < \infty \right\}, \quad (\text{A.15})$$

$H^1(\Omega)$, o espaço de Sobolev das funções definidas sobre Ω , de tal maneira que tanto as funções, quanto suas derivadas primeiras estejam em $L^2(\Omega)$, isto é:

$$H^1(\Omega) = \left\{ f(x, y) / \int_{\Omega} \left[(f(x, y))^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega < \infty \right\}, \quad (\text{A.16})$$

$H_0^1(\Omega)$, o sub-espaço do espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ definido para cada problema em particular pelas funções de H^1 que são iguais a 0 em Γ_1 onde as condições de contorno de Dirichlet são impostas, isto é:

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ f(x, y) / f(x, y) \in H^1(\Omega) \text{ e } f(x, y) = 0 \text{ se } (x, y) \in \Gamma_1 \right\}. \quad (\text{A.17})$$

Em outras palavras, $H_0^1(\Omega)$ é o conjunto de funções que satisfazem as condições homogêneas de Dirichlet em Γ_1 .

Considerando essas definições, pode-se iniciar agora a formulação dos resíduos ponderados. Dada uma equação da forma (A.5), sua função residual é definida como:

$$R(\phi, x, y) \equiv L\phi(x, y) - f^*(x, y). \quad (\text{A.18})$$

Segue então que se ϕ_{sol} é a solução para a equação dada em (A.18), logo $R(\phi_{\text{sol}}, x, y) \equiv 0$. Mas, se ϕ é somente uma aproximação para a solução da equação (A.5), o residual fornece uma medida de erro.

Multiplicando-se (A.18) por uma função de ponderação w definida sobre Ω e fazendo-se a sua minimização, segue que:

$$\int_{\Omega} w(x, y) R(\phi, x, y) d\Omega = \int_{\Omega} w(L\phi - f^*) d\Omega = 0, \quad (\text{A.19})$$

que é chamada de fórmula dos resíduos ponderados de (A.5). É provado em Finlayson (1972) que para um ϕ fixo, a equação (A.19) é satisfeita para todos w em $H_0^1(\Omega)$. Desta maneira, $\phi = \phi_{\text{sol}}$, isto é, ϕ deve ser a solução para (A.5). Entretanto, (A.19) requer que a segunda derivada de ϕ exista em Ω . Esta condição é muito restrita, dificultando encontrar soluções. A seguir mostra-se um desenvolvimento para diminuir a ordem dos termos diferenciais em (A.19). Para simplificar este desenvolvimento, é considerada somente a equação da energia (A.4). Então sua forma residual ponderada é dada por:

$$\int_{\Omega} w \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \right] d\Omega = 0. \quad (\text{A.20})$$

Aplicando-se à equação (A.20), a fórmula de diferenciação

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} \right) = \phi_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_i^2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i}, \quad (\text{A.21})$$

e o teorema de Green à integral que possui derivadas de segunda ordem, ou seja, se Ω é uma região conectada com a fronteira Γ e $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são funções diferenciáveis definidas em Ω , então:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} (N dy + M dx). \quad (\text{A.22})$$

A equação (A.20) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \left[w \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + wu \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + wv \frac{\partial \Gamma}{\partial y} + \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \int_{\Gamma_2} [wq''] d\Gamma = 0, \quad (\text{A.23})$$

onde $q'' = -k \frac{\partial \Gamma}{\partial n}$.

A função w deve ser restrita ao subespaço $H_0^1(\Omega)$, ou seja, elas devem desaparecer na fronteira Γ_1 onde, as condições de Dirichlet são impostas. Isto é mostrado em Heinrich e Pepper (1999).

A solução ϕ_{sol} , que satisfaz (A.23), é chamada de solução fraca para as equações de (A.5) a (A.7). Hughes (1987) mostra que a solução fraca de (A.23) satisfaz (A.4), juntamente com as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann consideradas neste trabalho. Não é necessária a existência das derivadas de segunda ordem em Ω , mas somente que as derivadas parciais de primeira ordem estejam no espaço $L^2(\Omega)$.

Procedendo-se de forma análoga para as equações da quantidade de movimento, as formas fracas de (A.2) e (A.3) ficam:

$$\int_{\Omega} \left\{ w^* \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial w^*}{\partial x} p + v \left(\frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w^* B_x \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_2} w^* \left[\left(\frac{p}{\rho_0} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right) n_x + v \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right] d\Gamma = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\int_{\Omega} \left\{ w^{**} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial w^{**}}{\partial y} p + v \left(\frac{\partial w^{**}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w^{**}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + w^{**} B_y \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_2} w^{**} \left[\left(-\frac{p}{\rho_0} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_y + v \frac{\partial v}{\partial x} n_x \right] d\Gamma = 0, \quad (\text{A.25})$$

sendo que w^* e w^{**} são funções de ponderação na formulação dos resíduos ponderados para as equações da quantidade de movimento em x e y , respectivamente.

A partir da formulação fraca encontrada, ou seja, as equações (A.23) a (A.25), será construído um algoritmo de elementos finitos baseado somente nos aspectos necessários do método de Galerkin (Galerkin, 1915) e sua generalização, o método de Petrov-Galerkin (Anderssen e Mitchell, 1979).

Uma dificuldade básica encontrada na solução das equações (A.23) a (A.25) é que os espaços $H_0^1(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ são infinitos. A idéia do método de Galerkin está baseada nos dois passos a seguir:

Primeiro passo:

Substituir os espaços $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ pelos sub-espacos finitos correspondentes de dimensão n , $H^1(n, \Omega)$ e $H_0^1(n, \Omega)$, respectivamente.

Segundo passo:

Escolher um conjunto de funções $\{N_j\}_{j=1}^n$ em $H_0^1(\Omega)$, que constitui uma base para $H^1(n, \Omega)$, isto é, se ϕ está em $H^1(n, \Omega)$, então ϕ pode ser unicamente expressa como uma combinação linear das funções N_j na forma abaixo:

$$\phi = c_1 N_1 + c_2 N_2 + \dots + c_n N_n, \quad (\text{A.26})$$

e fazer as funções de ponderação w , w^* e w^{**} iguais às funções N_j . Os coeficientes c_j ($j = 1, \dots, n$) são obtidos pela formulação dos resíduos ponderados:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_i R(c_j, N_j) d\Omega &= 0, \\ \int_{\Omega} w_i^* R(c_j, N_j) d\Omega &= 0, \\ \int_{\Omega} w_i^{**} R(c_j, N_j) d\Omega &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

sendo $w_i, w_i^*, w_i^{**} = N_j$ para $i = j = 1, \dots, n$.

Claramente, as equações (A.27), separadamente, formam um sistema de n equações algébricas em n parâmetros desconhecidos c_j , $j = 1, \dots, n$. A solução destes três sistemas de equações gera a aproximação de Galerkin para a solução do problema.

Em (A.27) w_i, w_i^*, w_i^{**} são as chamadas funções-teste segundo Galerkin, ϕ as funções aproximadoras e N_j as funções de forma da formulação isoparamétrica do MEF.

A solução de (A.27) gera então, uma solução aproximada para o problema. Dois aspectos surgem então: a precisão da aproximação e a garantia de que a seqüência de soluções convergirá para a solução exata à medida que n é aumentado. A convergência ocorrerá se $\{N_j\}_{j=1}^n$ de $H^1(n, \Omega)$ for completa em $H^1(\Omega)$ a medida que $n \rightarrow \infty$, enquanto que a precisão da aproximação dependerá da escolha de N_j , gerando assim uma análise de erro, cujos aspectos matemáticos podem ser consultados em Strang e Fix (1973), Mitchell e Wait (1977), ou Carey e Oden (1983).

Apêndice B

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

B.1 – INTRODUÇÃO

Com a introdução do conceito dos elementos isoparamétricos, os quais permitem o uso de elementos com formato irregular, os integrandos nas formulações são mudados de polinômios simples para funções que envolvem funções racionais cujas soluções analíticas geralmente são impossíveis. É neste ponto que se faz o uso de uma técnica de integração numérica capaz de avaliar as integrais em cada elemento.

Serão discutidos neste apêndice alguns pontos mais básicos que surgem com o uso desta técnica, a construção das funções de forma para o elemento quadrilateral com quatro nós em coordenadas locais e em seguida o conceito de integração reduzida.

B.2 – A FÓRMULA DA QUADRATURA

Será apresentado em primeiro lugar, o desenvolvimento da integração numérica para o caso unidimensional e, em seguida, para o caso bidimensional. Seja a seguinte integral a ser avaliada numericamente:

$$I(g) = \int_a^b g(x) dx, \quad (\text{B.1})$$

sendo $g(x)$ uma função em x e $[a,b]$ um intervalo de integração.

Nas aproximações por elementos finitos, as integrais serão calculadas em cada elemento, separadamente, no sistema local de coordenada natural $-1 \leq \xi \leq 1$. Então integrais da seguinte forma serão encontradas:

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi. \quad (\text{B.2})$$

Sejam agora consideradas aproximações para (B.1) da forma

$$I_n(g) \cong \sum_{i=1}^n w_i g(x_i), \quad (\text{B.3})$$

sendo que x_i são as abscissas dos pontos da quadratura e w_i são os pesos da quadratura.

A expressão (B.3) é chamada de quadratura numérica ou fórmula de integração numérica.

Seja agora a definição do erro devido à aproximação de (B.1) através de (B.3):

$$E_n(g) = I(g) - I_n(g). \quad (\text{B.4})$$

Portanto, os pontos i de coordenadas x_i e os pesos w_i da quadratura devem ser escolhidos de tal forma que $I_n(g)$ seja uma boa aproximação para $I(g)$, de tal modo que $E_n(g)$ seja pequeno.

Para se investigar os erros associados com a fórmula de quadratura, o grau de precisão de uma fórmula de integração é definido como um inteiro máximo m de tal modo que:

$$E(x^n) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots, m \quad \text{e} \quad E(x^{m+1}) \neq 0.$$

Assim, a fórmula de quadratura com grau de precisão m integra exatamente polinômios de grau menor ou igual a m . As provas para se estimar os erros estão baseadas nas expressões

das séries de Taylor e na teoria dos polinômios ortogonais. Para uma análise matemática completa, o livro de Isaacson e Keller (1966) e suas referências internas podem ser consultadas. Aqui são apresentados os resultados principais, à medida que os mesmos são aplicados à metodologia de elementos finitos.

A fórmula mais comum usada nas aproximações por elementos finitos recai na categoria das quadraturas interpolatórias. Elas são encontradas da seguinte maneira:

- a) subdividindo o intervalo $a \leq x \leq b$ em $n+1$ pontos, isto é:

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b ,$$

- b) construindo o polinomial de interpolação $P_n(x)$ de grau n , tal que:

$$g(x_i) \equiv P_n(x_i) \quad i=1,2,\dots,n+1.$$

A integral $I(g)$ é então aproximada por:

$$I_{n+1}(g) \equiv \int_a^b P_n(x) dx , \quad (\text{B.5})$$

que é prontamente avaliada usando-se funções de forma.

Logo

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n+1} N_j^n(x) g(x_j) , \quad (\text{B.6})$$

Substituindo (B.6) em (B.5), segue que:

$$I_{n+1}(g) = \sum_{i=1}^{n+1} w_i^{n+1} g(x_i) , \quad (\text{B.7})$$

com

$$w_i^{n+1} = \int_a^b N_i^n(x) dx. \quad (\text{B.8})$$

Assim, os pesos w_i^{n+1} da quadratura são determinados completamente para os pontos 1, 2, 3, ..., n+1 de coordenadas, respectivamente.

B.3 – CONSTRUÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA

Segerlind (1984) avalia as funções de forma para elementos lineares, triangulares e retangulares. Em cada caso, um sistema de equações é solucionado para alguns coeficientes desconhecidos. Estes coeficientes são, então, substituídos em equações de interpolação, que por sua vez são rearranjadas para se obter as funções de forma. Este procedimento se torna mais difícil quando o número de coeficientes desconhecidos aumenta.

Um procedimento alternativo para se obter nas funções de forma é considerar que cada função de forma é um produto de duas funções:

$$N_i = F_i G_i, \quad (\text{B.9})$$

onde F_i é uma função que vale zero em nós especificados, e G_i é obtida de tal forma que N_i tenha a mesma potência das variáveis de coordenada na equação de interpolação.

O método é baseado nas seguintes propriedades:

1. Cada função de forma tem um valor igual a 1 em seu próprio nó e é igual a 0 nos outros nós.
2. As funções de forma para os elementos bidimensionais são nulas ao longo de cada lado, no qual o nó não pertence.
3. Cada função de forma é um polinômio com o mesmo grau da equação de interpolação.

As funções de forma são desenvolvidas neste trabalho usando-se um sistema de coordenadas locais (ξ, η) .

A equação de interpolação para o elemento quadrático quadrilateral com quatro nós na figura B.1 é:

$$\varnothing^e = a_1 + a_1\xi + a_1\eta + a_1\xi\eta, \quad (\text{B.10})$$

onde \varnothing^e é uma grandeza dentro do elemento (e), podendo ser velocidade, temperatura ou outra grandeza qualquer, a_i são coeficientes e (ξ, η) são as coordenadas locais.

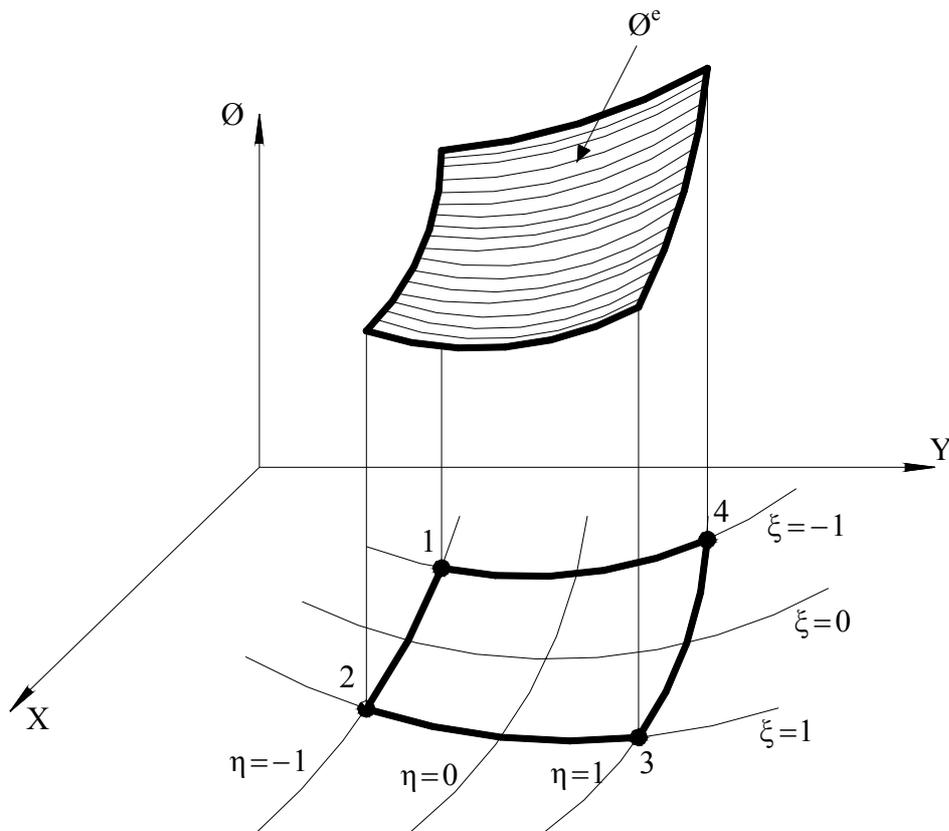


Figura B.1 – Elemento quadrilateral com quatro nós e a função de interpolação \varnothing^e .

O procedimento é ilustrado avaliando a função de forma N_1 . Desde que o nó 1 não toca os lados 2-3 ou 3-4, então:

$$F_1(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta) = 1 - \xi - \eta + \xi\eta. \quad (\text{B.11})$$

A função $G_1 = (\xi, \eta)$ deve conter 1 termo porque a condição para N_1 no nó 1 não foi satisfeita. A equação para $G_1 = (\xi, \eta)$ é:

$$G_1(\xi, \eta) = C_1, \quad (\text{B.12})$$

a qual não possui as coordenadas locais (ξ, η) de tal maneira que o produto de F_1 e G_1 contenha a potência correta de ξ e η . A condição nodal fica:

$$N_1 = 1 \text{ quando } \xi = -1 \text{ e } \eta = -1. \quad (\text{B.13})$$

Substituindo a equação (B.13) em (B.12), vem que:

$$C_1 = 1.$$

Procedendo da mesma forma, sabendo que:

$$F_2(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 - \eta) = 1 + \xi - \eta - \xi\eta, \quad (\text{B.14})$$

$$F_3(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 + \eta) = 1 + \xi + \eta + \xi\eta, \quad (\text{B.15})$$

$$F_4(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 + \eta) = 1 - \xi + \eta - \xi\eta, \quad (\text{B.16})$$

e as constantes $C_2 = C_3 = C_4 = 1$, as funções de forma podem ser escrita da seguinte maneira:

$$N_1(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta), \quad (\text{B.17})$$

$$N_2(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 - \eta), \quad (\text{B.18})$$

$$N_3(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 + \eta), \quad (\text{B.19})$$

$$N_4(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 + \eta). \quad (\text{B.20})$$

B.4 – A QUADRATURA GAUSSIANA

O grau máximo de precisão que se pode atingir com uma quadratura que utiliza n pontos de integração é $m = 2n-1$ e a quadratura que atinge esta precisão é conhecida como a quadratura Gaussiana.

Quando as quadraturas de Gauss são usadas, é conveniente mapear o intervalo $[a,b]$ para o intervalo $[-1,1]$ por meio da transformação:

$$\xi = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}. \quad (\text{B.21})$$

Então, as integrais são desenvolvidas no intervalo $-1 \leq \xi \leq 1$, como na equação (B.2) e a técnica de integração é chamada de quadratura de Gauss-Legendre.

Os pontos de integração são dados pelos zeros dos polinômios de Legendre (ortogonais) de grau n no intervalo $[-1,1]$. Os fundamentos na teoria de polinômios ortogonais são encontrados em muitos livros, como por exemplo, em Greenberg (1978) e O'Neil (1983).

Os pesos são obtidos pela fórmula:

$$w_j = \frac{1}{P_n'(\xi_j)} \int_{-1}^1 \frac{P_n(\xi)}{\xi - \xi_j} d\xi \quad j=1,2,\dots,n, \quad (\text{B.22})$$

sendo $P_n(\xi)$, o polinômio de Legendre de grau n no intervalo $-1 \leq \xi \leq 1$ e ξ_j são as coordenadas dos pontos de integração.

A tabela B.1 mostra os valores das coordenadas dos pontos de integração e os correspondentes pesos para a quadratura Gaussiana no caso unidimensional para alguns valores de n .

Tabela B.1 - Pontos de integração unidimensional e pesos para a quadratura Gaussiana com

$$n = 1 \text{ e } 2.$$

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i)$$

n	ξ_i	w_i
1	0,0	2,0
2	$-0,57735026918963 = -1/\sqrt{3}$	1,0
	$0,57735026918963 = 1/\sqrt{3}$	1,0

B.5 – A QUADRATURA EM DUAS DIMENSÕES

Neste caso a integral dupla será considerada:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (\text{B.23})$$

A maneira mais fácil de estender os conceitos já estabelecidos no caso unidimensional para o caso com duas dimensões é avaliar as variáveis uma a uma, mantendo as outras constantes. Na equação (B.23) fixando η e definindo:

$$F(\eta) \equiv \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta) \cong \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi. \quad (\text{B.24})$$

Agora,

$$\int_{-1}^1 F(\eta) d\eta \cong \sum_{j=1}^m w_j \left(\sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta_j) \right). \quad (\text{B.25})$$

Logo

$$I_{nm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i w_j f(\xi_i, \eta_j), \quad (\text{B.26})$$

sendo que m e n não são necessariamente iguais.

A fórmula de quadratura é obtida usando a quadratura de Gauss com $n = 2$ em cada direção, ou seja:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong I_{22} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j f(\xi_i, \eta_j), \quad (B.27)$$

onde os pontos de integração (ξ_i, η_j) em cada direção e os pesos w_i são mostrados na tabela 2.2. A figura B.2 mostra a posição (símbolo x) dos pontos de Gauss para $n=m=2$.

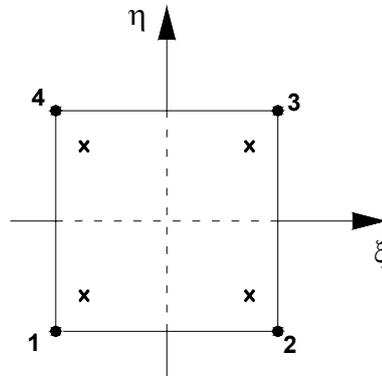


Figura B.2 - Local dos pontos de Gauss para a integração bidimensional para uma quadratura 2 x 2 em um quadrado $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$.

Tabela B.2 - Pontos de integração bidimensional e pesos para a quadratura Gaussiana com $n = 1$ e 2.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j f(\xi_i, \eta_j)$$

n	ξ_i	η_i	w_i
1	0,0	0,0	2,0
2	$\xi_1 = \xi_4 = -0,57735026918963 = -1/\sqrt{3}$ $\xi_2 = \xi_3 = 0,57735026918963 = 1/\sqrt{3}$	$\eta_1 = \eta_2 = -0,57735026918963 = -1/\sqrt{3}$ $\eta_3 = \eta_4 = 0,57735026918963 = 1/\sqrt{3}$	1

B.6 – ORDEM MÍNIMA E ÓTIMA DA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A questão é pensar em uma ordem mínima de integração (poucos pontos) que garanta a convergência das aproximações por elementos finitos e talvez uma ordem ótima que garanta a maior taxa de convergência e precisão possível juntamente com uma minimização do custo computacional.

De acordo com Heinrich e Pepper (1999), seja o seguinte critério para garantir a taxa ótima de convergência:

“Os quadrados das derivadas de primeira ordem de todas as funções de forma devem ser integrados exatamente pela regra da quadratura.”

Foi mostrado por Irons (1966) e também por Strang e Fix (1973), que quando elementos isoparamétricos são usados e as funções a serem integradas não são mais polinômios, é suficiente a avaliação da área $\int_{\Omega} d\Omega$ corretamente. Assim, se uma transformação isoparamétrica é usada, o algoritmo deve ser capaz de integrar exatamente a expressão:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det J d\xi d\eta. \quad (\text{B.28})$$

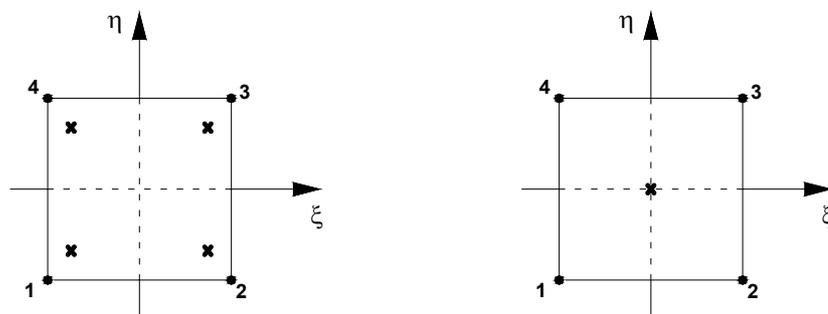
Devido ao fato de que o determinante da transformação contém produtos de derivadas das funções de forma, o critério estabelecido acima também será aplicado aos elementos isoparamétricos.

No caso do presente trabalho, conforme o critério mencionado acima, de uma fórmula de quadratura com grau de precisão de pelo menos $m = 2l$, onde l é o grau do polinômio das derivadas das funções de forma que é igual a 1. Portanto, o elemento da figura B.2 satisfaz o critério de integração para uma taxa ótima de convergência.

B.7 – INTEGRAÇÃO REDUZIDA

A ordem de integração vista anteriormente será chamada de integração completa quando uma quadratura de Gauss com pelo menos o número de pontos necessários para garantir o grau de precisão $2l$, for usada. Se a quadratura de Gauss com grau de precisão menor que $2l$ for usada, então a integração será chamada de integração reduzida. Se a integração completa requer n pontos Gaussianos, a integração reduzida, normalmente, requer $n-1$ pontos Gaussianos em cada direção. A necessidade desta técnica está exemplificada no próximo apêndice, que trata da formulação do método da penalidade. Mas em resumo, ela visa estabelecer uma relação que garanta com que os espaços de velocidade e pressão sejam consistentes, evitando assim travamento da solução numérica.

A figura B.3 mostra os elementos usados na integração completa e na integração reduzida.



(a) integração numérica completa (b) integração numérica reduzida

Figura B.3 - Elementos usados na integração numérica neste trabalho.

A técnica de integrar termos diferentes usando regras de quadratura com elementos diferentes, se chama integração reduzida seletiva. Este tipo de integração será usado nos algoritmos do método da penalidade para a solução das equações da quantidade de movimento.

Apêndice C

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DA PENALIDADE

C.1 – INTRODUÇÃO

Neste apêndice será desenvolvida a formulação da função da penalidade utilizada no cálculo da pressão nas equações de quantidade de movimento.

Primeiramente, a pressão é escrita pela lei de viscosidade de Stokes. Faz-se uma análise do parâmetro λ , como também um comentário sobre a compatibilidade entre os elementos usados na aproximação dos espaços das velocidades e das pressões.

Em seguida, é comentado sobre o método dos mínimos quadrados utilizado na solução das possíveis ocorrências de pressões oscilatórias.

Finalmente, são realizadas aproximações por elementos finitos para as equações de quantidade de movimento aproximando-se a pressão através da técnica da penalidade. As integrais de linha que contêm os termos de pressão são retidas na formulação dos resíduos ponderados para se contornar as dificuldades associadas às fronteiras abertas.

C.2 – FORMULAÇÃO DO MÉTODO DA PENALIDADE

Os métodos da penalidade podem ser derivados diretamente da lei de viscosidade de Stokes escrita da forma:

$$p = p_s - \left(\bar{\mu} + \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{V} , \quad (\text{C.1})$$

sendo que p_s denota a componente hidrostática da pressão, p é a pressão média e $\bar{\mu}$ é o segundo coeficiente da viscosidade.

Stokes propôs que p e p_s devem ser iguais e assim $\bar{\mu} = -\frac{2}{3} \mu$. Isto foi mostrado ser verdadeiro para alguns gases; entretanto, a experiência com líquidos mostrou que λ é uma quantidade positiva muito maior que μ , conforme White (1974). O coeficiente λ , chamado de “bulk viscosity” é definido por:

$$\lambda = \left(\bar{\mu} + \frac{2}{3} \mu \right) . \quad (\text{C.2})$$

Se o fluido for incompressível, grandes mudanças na pressão produzem mudanças muito pequenas no volume, fazendo com que λ seja um número grande, como também um número que tende ao infinito, à medida que o fluido seja considerado perfeitamente incompressível.

O método da penalidade se baseia em expressar a pressão através de uma relação da forma:

$$p = p_s - \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} , \quad (\text{C.3})$$

sendo λ um número grande. A equação (C.3), que será chamada de formulação da penalidade, é então substituída na equação da quantidade de movimento com algumas simplificações para facilitar o desenvolvimento:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\frac{\partial p_s}{\partial X} + \lambda \frac{\partial}{\partial X} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{U}, \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{\partial p_s}{\partial Y} + \lambda \frac{\partial}{\partial Y} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{V}. \quad (\text{C.5})$$

As discretizações das equações (C.4) e (C.5) resultam na solução de um sistema de equações que envolve somente o problema de Stokes para a pressão. Além disso, não existe ocorrência de elementos com diagonal zero na matriz linear final, embora o sistema permaneça mal condicionado devido ao alto valor do parâmetro da penalidade.

Para escoamentos com massa específica constante, a componente estática p_s na equação (C.3) é eliminada através da redefinição da pressão, de tal maneira que a pressão hidrostática devido a gravidade é cancelada. Neste caso, a formulação da penalidade pode ser escrita como:

$$p = -\lambda \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (\text{C.6})$$

a qual é a fórmula padrão encontrada na maioria das referências. Entretanto, esta forma do método da penalidade está incorreta quando aplicada a escoamentos estratificados, como será discutido mais adiante.

Para ilustrar a análise, as soluções permanentes para as equações da quantidade de movimento, que satisfazem a condição de incompressibilidade (C.6), podem ser escritas como:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{C.7})$$

e

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (\text{C.8})$$

Portanto, a formulação da penalidade usando Galerkin (apêndice A), para as equações (C.7) e (C.8), resulta em:

$$\left[\int_{\Omega} \mu \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \mathbf{u}_j \, d\Omega \right] + \left[\int_{\Omega} \lambda \frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \mathbf{u}_j + \frac{\partial N_j}{\partial y} \mathbf{v}_j \right) d\Omega \right] = 0, \quad (\text{C.9})$$

$$\left[\int_{\Omega} \mu \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \mathbf{v}_j \, d\Omega \right] + \left[\int_{\Omega} \lambda \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \mathbf{u}_j + \frac{\partial N_j}{\partial y} \mathbf{v}_j \right) d\Omega \right] = 0, \quad (\text{C.10})$$

sendo que todas as integrais de linha são retiradas somente agora, já que elas são irrelevantes para a discussão. O sistema final de equações lineares pode ser escrito como:

$$[\mu \mathbf{K}_1 + \lambda \mathbf{K}_2] \mathbf{d} = \mathbf{F}, \quad (\text{C.11})$$

sendo que o vetor \mathbf{F} é gerado das condições de contorno e, neste caso, o vetor \mathbf{d} contém somente as velocidades. Considerando agora que a matriz \mathbf{K}_2 não seja singular e que λ seja aumentado mais e mais no esforço de satisfazer melhor a incompressibilidade e que μ e \mathbf{K}_1 permanecem constantes à medida que λ aumenta, tornando-se então desprezíveis, a solução para a equação (C.9) pode ser escrita como:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{F}. \quad (\text{C.12})$$

Devido que \mathbf{K}_2 e \mathbf{F} também serem constantes, notamos que $\mathbf{d} \rightarrow 0$ a medida que $\lambda \rightarrow \infty$. Este fenômeno é chamado de “locking” (travamento) e está diretamente relacionado à satisfação da condição de LBB, cujo nome é dado em honra a Ladyzhenskaya (1969), Babuska e Aziz (1972) e Brezzi (1974). A condição LBB estabelece uma relação que garante que os espaços de velocidade e pressão sejam consistentes. Não é objetivo deste trabalho entrar em detalhes desta condição. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências anteriores. Neste caso, o espaço das pressões discretas não é compatível com o espaço das velocidades, e assim o único elemento deste espaço é $\mathbf{V} = 0$.

Deve-se garantir que a matriz que contém o termo da penalidade, \mathbf{K}_2 seja singular. Consegue-se isto usando a integração reduzida seletiva do termo da penalidade e a regra da quadratura com grau de precisão mais baixo do que o necessário para garantir uma taxa de

convergência ótima na matriz \mathbf{K}_1 . Técnicas matemáticas para analisar os elementos a serem utilizados na integração reduzida do termo da penalidade foram desenvolvidas por Oden (1982), Oden et al. (1982), Carey e Krishnan (1982), e Idelsohn et al. (1995). Os resultados estão mostrados na figura C.1. Fica evidente nesta figura que quando a integração completa é usada no termo da penalidade (casos 1, 3 e 6), o método sempre trava. Os elementos mais usados são dos casos 2 e 7, ambos propensos a produzirem uma “pressão oscilatória” (“checkboard pressure”). Foi mostrado por Carey e Krishnan (1982,1984) que no método da penalidade, a velocidade calculada utilizando elementos com quatro nós e um ponto de integração reduzida e a velocidade calculada nos elementos com nove nós com quatro pontos de integração reduzida, convergem com taxas ótimas, desde que os parâmetros do problema sejam suaves. Caso contrário, a pressão calculada usando estes elementos pode ser oscilatória. Neste caso, um simples procedimento de suavização da pressão usando-se os mínimos quadrados pode ser usado para eliminar as oscilações. Este método será descrito agora.

A ocorrência da pressão oscilatória pode então ser resolvida em se utilizando uma pressão calculada nos nós usando-se o método dos mínimos quadrados.

Seja $P(x, y) = \sum_j N_j(x, y)P_j$ a interpolação linear da pressão, onde P_j são os valores da pressão nos nós, e $p(x, y) = \sum_k M_k(x, y)p_k$ as pressões calculadas, constantes nos elementos.

As funções M_k são tais que:

$$M_k = \begin{cases} 1 & \text{no ponto nodal } k, \\ 0 & \text{em todos os outros pontos,} \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

e p_k é o valor da pressão no elemento k . Agora construindo o funcional:

$$J = \int_{\Omega} (P - p)^2 d\Omega, \quad (\text{C.14})$$

e minimizando-o com respeito aos valores de P_i , sendo que o índice i aqui representa um só valor tomado ($i = 1, 2, 3$ ou 4), as condições para o mínimo são:

$$\frac{\partial J}{\partial P_i} = 2 \int_{\Omega} N_i \left[\sum_j N_j P_j - \sum_k M_k p_k \right] d\Omega = 0, \quad (\text{C.15})$$

o que resulta em um sistema de equações da forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{B}, \quad (\text{C.16})$$

para os valores de pressão P_i , sendo \mathbf{A} a matriz massa usual:

$$[a_{ij}] = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega. \quad (\text{C.17})$$

O vetor do lado direito \mathbf{B} é dado por

$$[b_i] = \int_{\Omega} N_i \sum_k M_k p_k. \quad (\text{C.18})$$

O método pode claramente ser estendido para outras interpolações no espaço; em particular, para o caso das velocidades biquadráticas-pressão bilinear, o qual também exibe um modo “checkboard”.

Usando a técnica do agrupamento na matriz massa (“mass lumping”), este procedimento utilizando elementos isoparamétricos quadrilaterais com quatro nós, resulta que a pressão no nó é apenas igual à pressão no elemento dividido por quatro.

Os aspectos matemáticos do método da penalidade têm sido analisados em grande detalhe através dos anos. Particularmente importante é o teorema de equivalência de Malkus e Hughes (1978). Eles provaram que as soluções obtidas utilizando o método misto com elementos bilineares e pressão constante, e aqueles obtidos com o método da penalidade usando elementos bilineares e integração reduzida com um ponto de Gauss no termo da

penalidade, são os mesmos. Uma revisão do método da penalidade por Heinrich e Vionnet (1995 a,b) dá uma lista enorme de referências na história, teoria e prática do método.

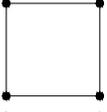
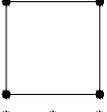
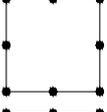
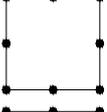
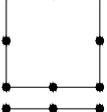
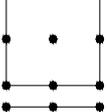
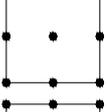
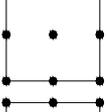
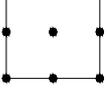
Caso	Elemento	Regra da Quadratura aplicada à k_2	Propriedades de convergência
1			Travamento para altos λ
2			Pressão oscilatória
3			Travamento para altos λ
4			Pressão oscilatória
5			Convergência sub-ótima
6			Travamento para altos λ
7			Pressão oscilatória
8			Convergência ótima
9			Convergência sub-ótima

Figura C.1 - Análise da condição LBB para vários elementos.

Para selecionar o valor do parâmetro da penalidade λ , deve-se levar em consideração a forma específica na qual as equações da quantidade de movimento são escritas e a ordem de precisão adotada nos cálculos. A primeira dessas considerações, indica que se é desejável formular as equações usando formas não dimensionais que melhor balançam os coeficientes dos termos viscosos e convectivos, e também outros termos que serão introduzidos

posteriormente. A segunda consideração implica que o parâmetro da penalidade deva ser escolhido aproximadamente $O(10^{k/2})$ onde k é a precisão no sistema decimal.

A experiência computacional mostra que os cálculos contendo o método da penalidade devem ser desenvolvidos usando “double-precision 64 bit words”. Sob estas circunstâncias, um parâmetro da penalidade λ entre 10^7 e 10^9 será adequado na maioria das situações práticas. O valor de λ é independente do problema, desde que a variação dos parâmetros governantes não varie muito. Bercovier e Engelman (1979) e Carey e Krishnan (1982) estudaram o efeito do parâmetro da penalidade. Um esquema do comportamento típico da solução em termos do número N de dígitos de precisão versus $\log \lambda$ está mostrado na figura C.2.

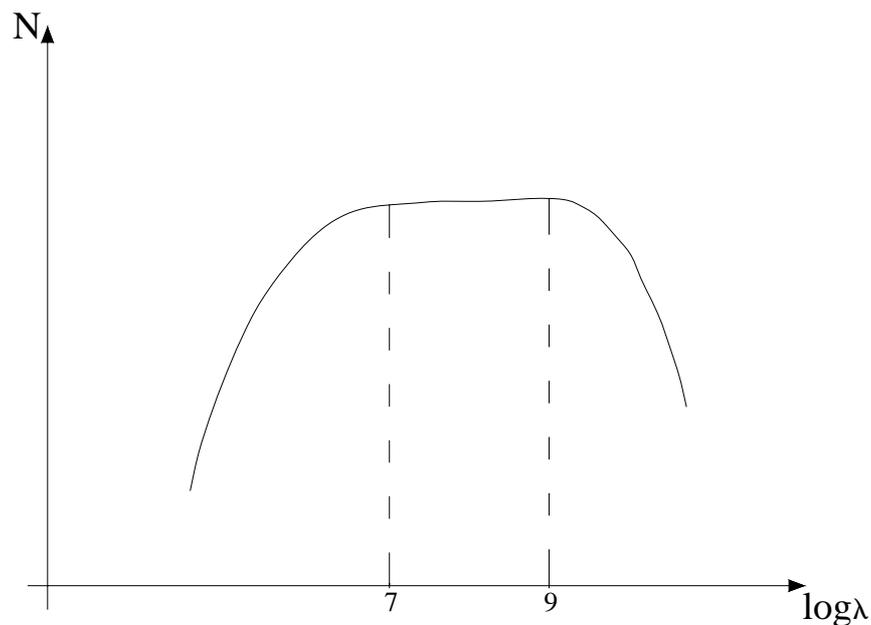


Figura C.2 - Precisão versus parâmetro da penalidade.

Existe uma grande variedade de escoamentos importantes que são incompressíveis, mas que nos quais as mudanças na massa específica devido à temperatura ou concentração de espécies devem ser levadas em consideração porque elas oferecem as forças que dirigem o movimento do fluido. A maneira padrão para modelar estes tipos de escoamento é usar a aproximação de Boussinesq. Esta aproximação consiste em manter a massa específica constante, igual à massa específica de referência na derivada total da velocidade, mas se

permitindo uma massa específica variável na força do corpo, a qual é dada por uma equação de estado da forma,

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \beta(T - T_0) + \beta_1(c_1 - c_{1_0}) + \beta_2(c_2 - c_{2_0}) + \dots \right], \quad (\text{C.19})$$

sendo que T é a temperatura e c_i denota a concentração de espécies i ; β é o coeficiente de expansão térmica e β_i é o coeficiente de expansão volumétrica associado com as espécies i . Os sub-escritos “0” denotam os valores do estado de referência.

Será considerado somente o escoamento dependente do tempo com a equação do estado $\rho = \rho_0 [1 + \beta(T - T_0)]$ e também que o vetor gravidade aponta para a direção negativa de y . As equações governantes são então escritas na forma dimensional como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (\text{C.20})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (\text{C.21})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - g [1 + \beta(T - T_0)], \quad (\text{C.22})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (\text{C.23})$$

sendo $\nu = \mu / \rho_0$ a viscosidade cinemática. Note que o vetor força de campo é dado pela equação abaixo:

$$\frac{\rho}{\rho_0} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \\ \mathbf{B}_y \end{bmatrix} = \frac{\rho}{\rho_0} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}. \quad (\text{C.24})$$

A seguir será apresentado o método da penalidade com a técnica de Petrov-Galerkin.

C.3 – APROXIMAÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS

Neste trabalho, os elementos quadrilaterais são usados para interpolar ambas as componentes de velocidades e temperatura. É construída uma formulação Petrov-Galerkin para as equações do movimento e energia em que as funções de peso de Petrov-Galerkin são aplicadas somente para os termos convectivos. Isso é feito pelas seguintes razões:

a) A solução para problemas dependentes do tempo usando matriz massa consistente pode oscilar durante os primeiros passos de tempo, a menos que um passo de tempo pequeno seja usado. Isto foi observado ser verdade para o caso da equação da energia. O problema é que as temperaturas oscilatórias aparecem no lado direito das equações da quantidade de movimento e todo o cálculo pode se tornar instável. Para evitar isto, escolhe-se usar o agrupamento da matriz massa (“mass lumping”), eliminando assim o efeito da ponderação Petrov-Galerkin na matriz massa, a qual pode ser construída usando-se funções de forma não perturbadas.

b) Um problema de estabilidade similar é observado em casos quando o termo força de corpo é ponderado usando funções Petrov-Galerkin. As razões para o comportamento instável não são investigadas. Para se evitar este problema, as ponderações de Petrov-Galerkin nos termos de força de corpo também não são usadas.

c) Nos termos viscosos, somente as derivadas transversais da ponderação de Petrov-Galerkin são não nulas. Resultados numéricos não mostram diferença significativa nos resultados entre as formulações usando Galerkin e as funções de peso de Petrov-Galerkin. Além disso, o custo computacional se torna bem mais elevado ao se usar Petrov-Galerkin nos

termos de difusão, porque se introduz uma nova não linearidade nas equações. Assim, aqui também são usadas as funções de forma de Galerkin, ou seja, sem perturbações.

Para se obter a forma de resíduos ponderados das equações (C.21) a (C.23), primeiro se separa a componente estática da pressão usando a equação (C.3), reescrita como:

$$p = p_s + P, \quad (C.25)$$

sendo que p_s denota a componente de pressão que está sempre em equilíbrio com o campo de gravidade conservativo e P é o termo chamado pressão modificada, ou a porção dinâmica da pressão. Na formulação da penalidade, tem-se:

$$P = -\lambda \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (C.26)$$

As equações residuais ponderadas considerando um termo de força de corpo geral são:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\mathbf{U} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) + \mathbf{v} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} P d\Omega = \\ & \int_{\Omega} \mathbf{U} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \beta_x - \frac{\partial p_s}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{U} \left[\left(p_s - p + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) \mathbf{n}_x + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \mathbf{n}_y \right] d\Gamma, \end{aligned} \quad (C.27)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\mathbf{V} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) + \mathbf{v} \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} P d\Omega = \\ & \int_{\Omega} \mathbf{V} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \beta_y - \frac{\partial p_s}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{V} \left[\left(p_s - p + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) \mathbf{n}_y + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \mathbf{n}_x \right] d\Gamma, \end{aligned} \quad (C.28)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\mathbf{W} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \right) + \mathbf{D}_T \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \\ & \int_{\Omega} \mathbf{D}_T \mathbf{W} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \mathbf{n}_x + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \mathbf{n}_y \right) d\Gamma, \end{aligned} \quad (C.29)$$

sendo que \int_{Ω}^R foi usada para denotar integração reduzida e U, V e W para denotar as funções de ponderação para cada uma das equações. Nesta formulação, U e V são sempre iguais, e iguais também às funções de forma dos elementos quadrilaterais, exceto no termo convectivo, onde uma perturbação Petrov-Galerkin é somada. A função W é a função de forma do elemento quadrilateral, exceto quando aplicada nos termos convectivos, onde uma perturbação Petrov-Galerkin diferente daquela usada em u e v é utilizada. As perturbações somente diferem em magnitude do parâmetro α (difusão de equilíbrio) por causa da diferença entre a viscosidade cinemática e a difusividade térmica.

C.4 – CÁLCULO DA PRESSÃO

Na formulação da penalidade, a pressão P pode ser recuperada da equação (C.26) sem se preocupar se P representa a pressão modificada ou a pressão total. Para a interpolação linear das velocidades, tem-se que:

$$P^e = -\frac{\lambda}{A^e} \int_e^R \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) de, \quad (C.30)$$

sendo A^e a área do elemento. Neste caso, uma fórmula de quadratura de integração reduzida usando um ponto de integração é empregada para avaliar a equação (C.30).

C.5 – FRONTEIRAS ABERTAS

Muitas das dificuldades associadas com as fronteiras abertas e com a pressão estática surgem do uso das funções de interpolação de baixa ordem para as velocidades e pressões constantes nos elementos. Por esta razão, o teorema de Gauss é aplicado nos gradientes de pressão nas equações de conservação de momento. Isto leva ao surgimento das integrais de linha da pressão ao longo das superfícies abertas como nas equações (C.27) e (C.28).

As condições de contorno nas fronteiras abertas têm sido tratadas por muitos autores. Uma análise feita por Heinrich et al. (1996) estudou casos em que condições de contorno na pressão não foram aplicadas diretamente, mas somente uma pressão de referência foi prescrita em algum ponto no domínio. Assim, as dificuldades das superfícies abertas puderam também ser eliminadas removendo a pressão da condição de contorno. Para conseguir isto, as integrais de linha:

$$\int_{\Gamma} U p n_x d\Gamma \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma} V p n_y d\Gamma \quad , \quad (\text{C.31})$$

nas equações (C.27) e (C.28), devem ser discretizadas e retidas na formulação de resíduos ponderados. Este procedimento é mostrado no Apêndice F.

Apêndice D

A TÉCNICA DE PETROV-GALERKIN

D.1 – INTRODUÇÃO

A presença da convecção introduz dificuldades específicas na solução numérica de equações diferenciais. Dificuldades estas que serão discutidas neste apêndice. Estas dificuldades aparecem por causa da natureza não simétrica e direcional dos termos convectivos.

Primeiramente, serão explicados os problemas numéricos que surgem com a presença dos termos convectivos usando a equação convecção-difusão unidimensional. Uma solução será proposta e então estendida e desenvolvida para as equações convecção-difusão bidimensionais.

D.2 – PROBLEMA COM CONVECÇÃO-DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL

Considere um fluido movendo-se com uma velocidade constante u na direção x , que carrega uma variável ϕ que obedece a lei de difusão de Fick. O fluxo de ϕ devido à convecção é dado por $u\phi$, e o fluxo difusivo por $-Dd\phi/dx$, onde D é o coeficiente de

difusão. Se estes são os únicos mecanismos de transporte, na ausência de fontes ou sumidouros, a equação da conservação da variável ϕ torna-se:

$$-\frac{d}{dx} \left(D \frac{d\phi}{dx} \right) + u \frac{d\phi}{dx} = 0. \quad (D.1)$$

Cabem aqui algumas considerações para esta equação:

- É definido um intervalo $0 < x < L$ com condições de contorno apropriadas.
- Se $u = 0 \rightarrow$ problema de valor de contorno puramente elíptico.
- Se $D = 0 \rightarrow$ problema de valor inicial de primeira ordem.
- Se $D \neq 0 \rightarrow$ problema de valor de contorno. Entretanto, se $u \gg D$, ela se comportará principalmente como uma equação hiperbólica.

A questão entre a equação ser hiperbólica e elíptica é uma fonte de problemas que surgem nas soluções numéricas. Quando u domina D , geralmente existem ainda regiões locais onde o termo de segunda ordem é importante, tais como, frentes agudas, camadas limite ou camadas limite internas. É necessário, então, observar as mudanças nas escalas dominantes em diferentes partes do domínio. No Apêndice A, foi visto o método de resíduos ponderados.

Aplicando-o à equação (D.1), surge a formulação fraca:

$$\int_0^L \left(D \frac{dw}{dx} \frac{d\phi}{dx} + wu \frac{d\phi}{dx} \right) dx + w \left(-D \frac{d\phi}{dx} \right) \Big|_0^L = 0, \quad (D.2)$$

sendo que w denota a função de ponderação. Discretizando o intervalo $0 < x < L$ usando elementos lineares de tamanho $\Delta x = h$ e aplicando o método de Galerkin à equação (D.1) (Apêndice A), a matriz de rigidez do elemento resultante e a matriz de rigidez global são, respectivamente:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{D}{h} - \frac{u}{2} & -\frac{D}{h} + \frac{u}{2} \\ -\frac{D}{h} - \frac{u}{2} & \frac{D}{h} + \frac{u}{2} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{D}{h} - \frac{u}{2} & -\frac{D}{h} + \frac{u}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{D}{h} - \frac{u}{2} & \frac{2D}{h} & -\frac{D}{h} + \frac{u}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{h} - \frac{u}{2} & \frac{2D}{h} & -\frac{D}{h} + \frac{u}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{D}{h} - \frac{u}{2} & \frac{2D}{h} & -\frac{D}{h} + \frac{u}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{D}{h} - \frac{u}{2} & \frac{D}{h} + \frac{u}{2} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.4})$$

A matriz em (D.4) tem dois aspectos importantes:

- A assimetria por causa dos termos convectivos.
- Se a convecção for dominante e $u/2 > D/h$, a matriz não é mais diagonalmente dominante.

Da equação (D.4), segue que a equação para um nó interior da matriz tem a forma:

$$\left(-\frac{D}{h} - \frac{u}{2}\right)\phi_{i-1} + \frac{2D}{h}\phi_i + \left(-\frac{D}{h} + \frac{u}{2}\right)\phi_{i+1} = 0. \quad (\text{D.5})$$

Seja o número de Péclet da célula definido por:

$$\gamma = \frac{uh}{D}. \quad (\text{D.6})$$

Reescrevendo a equação (D.5) segue que:

$$\left(-1 - \frac{\gamma}{2}\right)\phi_{i-1} + 2\phi_i + \left(-1 + \frac{\gamma}{2}\right)\phi_{i+1} = 0. \quad (\text{D.7})$$

Em Isaacson e Keller (1966), pode-se encontrar uma metodologia geral para se encontrar soluções para a equação (D.7). A solução para esta equação é dada por:

$$\phi_i = A + B \left(\frac{2+\gamma}{2-\gamma}\right)^i, \quad (\text{D.8})$$

sendo A e B constantes que dependem das condições de contorno.

Comparando a equação (D.8) com a solução exata para a equação (D.1), dada por:

$$\phi(x) = c_1 + c_2 e^{\frac{u}{D}x}, \quad (\text{D.9})$$

pode-se observar que a equação (D.8) representa corretamente o termo exponencial na equação (D.9). Conforme Varga (1962), o termo exponencial da equação (D.9) pode ser escrito como:

$$e^{\frac{u}{D}x_i} = e^{\gamma_i} \cong \left(\frac{2+\gamma}{2-\gamma}\right) + O(h^3), \quad (\text{D.10})$$

com $x_i = ih$. Entretanto, se $\gamma > 2$ nas equações (D.8) e (D.10), o denominador se torna negativo e a solução numérica se torna oscilatória. Isto está claramente ilustrado na figura D.1, onde a solução para a equação (D.1), usando 10 elementos lineares e as condições de contorno $\phi(0)=1$, $\phi(1)=0$, é mostrada para $\gamma=10$.

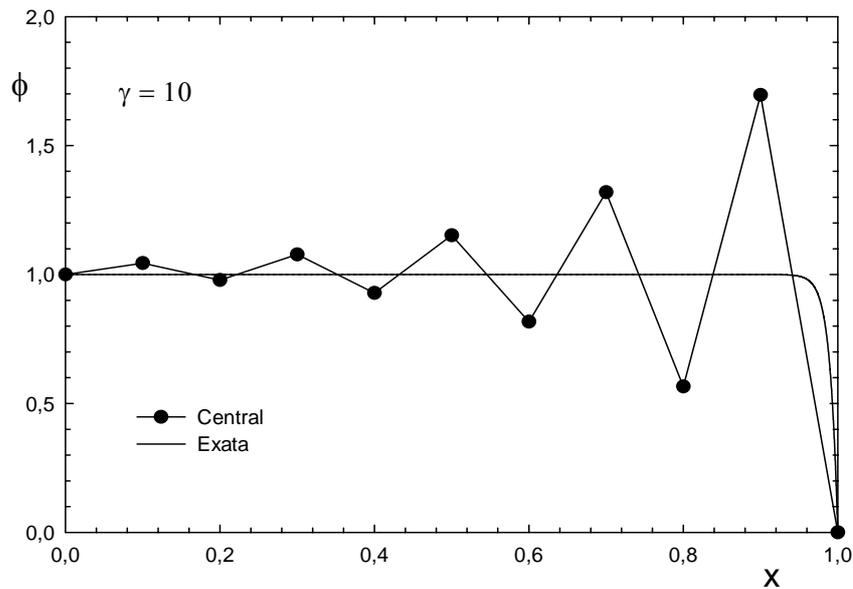


Figura D.1 - Solução para (D.1) com condições de contorno $\phi(0)=1$, $\phi(1)=0$, e $\gamma=10$.

A linha sólida e a linha com pontos representam, respectivamente, a solução analítica e a solução pelo método de elementos finitos com esquema de Galerkin.

Entretanto, a medida que $|\gamma|$ se torna maior, a equação (D.10) exibe um comportamento assintótico incorreto. Para ilustrar isto, a equação (D.7) é reescrita como:

$$\frac{1}{\gamma}(-\phi_{i-1} + 2\phi_i - \phi_{i+1}) + \frac{1}{2}(\phi_{i+1} + \phi_{i-1}) = 0; \quad (\text{D.11})$$

e tomando o limite a medida que $\gamma \rightarrow \infty$, a equação (D.11) fica reduzida a:

$$\phi_{i+1} = \phi_{i-1},$$

e resulta em uma solução na qual os nós ímpares têm um valor e os nós pares podem ter um valor diferente. Os valores particulares devem ser determinados pelas condições de contorno. Assim, a condição de contorno em $x = L$ afeta a solução à esquerda de $x = L$, mas não existe significado físico da propagação à esquerda quando u é positivo.

Na prática, os valores de γ são geralmente grandes, isto é, geralmente na ordem $O(10^4)$. Isto impõe uma condição restritiva no tamanho de h para satisfazer a desigualdade $\gamma < 2$.

Quando γ é alto, fisicamente significa estar lidando com uma escala de comprimento da malha que é muito grande comparada à escala de comprimento da difusão. A figura D.2 mostra dois elementos consecutivos de tamanho h e uma velocidade positiva u .

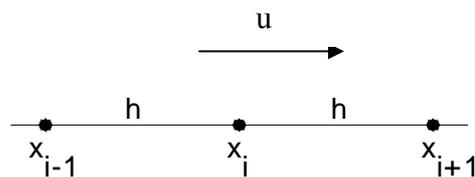


Figura D.2 - Transporte convectivo sobre dois elementos consecutivos.

A aproximação de Galerkin para o termo convectivo na Eq. (D.5) fica:

$$u \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=x_i} \cong \frac{u}{2} (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}). \quad (\text{D.12})$$

A equação (D.12) afirma que o valor de ϕ no nó x_i depende do valor no nó x_{i+1} , o que não é plausível se a velocidade convectiva está transportando um fluido de x_i para x_{i+1} .

Esta representação numérica inadequada fisicamente pode ser somente remediada se h é tomado como menor do que a escala de comprimento da difusão, isto é, $\gamma < 2$, para fazer com que seja possível o efeito das perturbações em x_{i+1} sejam captadas em x_i .

A equação (D.5), resultante da discretização linear por elementos finitos da equação (D.1), é idêntica à aproximação por diferença finita central da mesma equação. Quando no desenvolvimento do método de diferenças finitas, os usuários já encontravam este problema com as equações convectivas. Isto acarretou o desenvolvimento dos algoritmos de diferenças finitas *'upwind'* (Roache, 1972), onde o termo com derivada primeira na equação (D.1) é

aproximado pela derivada para traz com respeito à direção da velocidade, como mostrado a seguir:

$$u \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=x_i} \cong \begin{cases} \frac{u}{h}(\phi_i - \phi_{i-1}) & u > 0, \\ \frac{u}{h}(\phi_i - \phi_{i+1}) & u < 0. \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

Considerando novamente que $u > 0$, esta aproximação gera uma equação de diferença para x_i da forma:

$$(1+\gamma)\phi_{i-1} - (2+\gamma)\phi_i + \phi_{i+1} = 0, \quad (\text{D.14})$$

cuja solução encontrada em Isaacson e Keller (1966) é igual a:

$$\phi_i = A + B(1+\gamma)^i. \quad (\text{D.15})$$

A equação (D.15) é estável para todos os valores de γ . O esquema “Upwind” forneceu uma solução simples para este problema numérico. Entretanto, aproximações numéricas, embora estáveis, se tornam inaceitavelmente imprecisas, a menos que o tamanho da malha h seja muito pequeno. A figura D.3 ilustra isto para o mesmo exemplo da figura D.2.

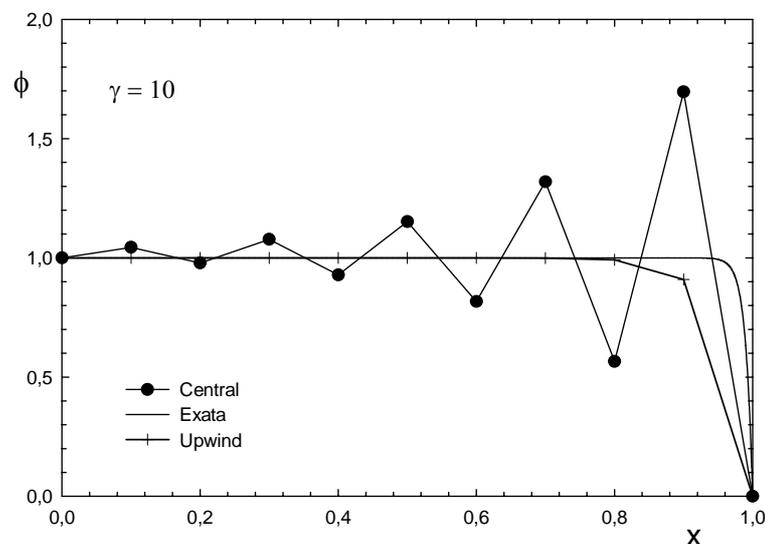


Figura D.3 - Solução para (D.14) com condições de contorno $\phi(0)=1$, $\phi(1)=0$, e $\gamma=10$.

A linha sólida, a linha com pontos e a linhas com cruzeiros representam respectivamente a solução analítica, a solução pelo método de elementos finitos com esquema de Galerkin e a solução pelo esquema “Upwind”.

Uma análise de erro de truncamento fornece a expressão:

$$\left[\left(-D \frac{d^2 \phi}{dx^2} + u \frac{d\phi}{dx} \right)_{x=x_i} - \left\{ \frac{D}{h^2} (-\phi_{i-1} + 2\phi_i - \phi_{i+1}) + \frac{u}{h} (\phi_i - \phi_{i-1}) \right\} \right] = \frac{uh}{2} \phi_i^{(2)} - \frac{h^2}{6} \left[u \phi_i^{(3)} + \frac{D}{2} \phi_i^{(4)} \right] + \text{TAO} , \quad (\text{D.16})$$

sendo $\phi_i^{(n)} \equiv d^n \phi / dx^n |_{x=x_i}$ e TAO uma sigla para os termos de alta ordem.

Para se interpretar a aproximação corretamente (Roache, 1972), deve-se mover o primeiro termo do erro de truncamento na equação (D.16) para o lado esquerdo e levar em consideração a equação (D.14) de diferenças finitas, como uma aproximação de segunda ordem para a equação modificada, assim vem:

$$-\left(D + \frac{uh}{2} \right) \frac{d^2 \phi}{dx^2} + u \frac{d\phi}{dx} = 0 , \quad (\text{D.17})$$

sendo que o termo $uh/2$ é chamado como difusão numérica artificial e que será, no geral, bem maior que D .

Da discussão acima, fica claro que o método de diferenças finitas ‘upwind’ atingiu estabilidade por meio da soma de uma difusão numérica artificial para o sistema. Por outro lado, as soluções numéricas obtidas pelo método de Galerkin com $\gamma < 2$ resultam em aproximações que são sempre *sub-difusas*. Este fato indica que os métodos numéricos do tipo elementos finitos introduz uma difusão numérica artificial quando ambos transportes por convecção e difusão aparecem nas equações. Isto será a base para o desenvolvimento do método de Petrov-Galerkin.

D.3 – MÉTODO DE PETROV-GALERKIN UNIDIMENSIONAL

Para se obter melhores algoritmos com soluções precisas para valores maiores de γ , será considerada uma solução de Galerkin da equação de convecção-difusão modificada:

$$-\left(D + \frac{\alpha u h}{2}\right) \frac{d^2 \phi}{dx^2} + u \frac{d\phi}{dx} = 0, \quad (\text{D.18})$$

sendo α um parâmetro tal que $0 \leq \alpha \leq 1$. Se:

$\alpha=0 \Rightarrow$ A solução de Galerkin é sub-difusa,

$\alpha=1 \Rightarrow$ A solução “Upwind” é sobre-difusa.

Assim, existe um valor de α entre 0 e 1 para a solução correta deste problema. O termo $\alpha u h / 2$ é chamado de *difusão de balanceamento* (ou difusão de equilíbrio).

A discretização de Galerkin da equação (D.18) usando elementos lineares com $\Delta x = h$ resulta na seguinte equação de diferença:

$$\left[1 + \frac{\gamma}{2}(\alpha + 1)\right] \phi_{i-1} - 2 \left[1 + \frac{\alpha \gamma}{2}\right] \phi_i + \left[1 + \frac{\gamma}{2}(\alpha - 1)\right] \phi_{i+1} = 0, \quad (\text{D.19})$$

com a solução:

$$\phi_i = A + B \left[\frac{2 + \gamma(\alpha + 1)}{2 + \gamma(\alpha - 1)} \right]^i, \quad (\text{D.20})$$

sendo que a condição para a qual a solução não seja oscilatória é:

$$\alpha \geq 1 - \frac{2}{\gamma}. \quad (\text{D.21})$$

O valor de α para o qual existe a igualdade é chamado de valor crítico de α e é dado por:

$$\alpha_{cr} \equiv 1 - \frac{2}{\gamma}. \quad (D.22)$$

Para melhor se investigar este algoritmo, o erro de truncamento ET é avaliado usando-se expressões da série de Taylor. ET fica definido como:

$$ET \equiv \left[-\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{\gamma}{h} \frac{d\phi}{dx} \right]_{x=x_i} - \frac{1}{h^2} \left\{ -\left[1 + \frac{\gamma}{2}(\alpha + 1) \right] \phi_{i-1} + 2 \left(1 + \frac{\alpha\gamma}{2} \right) \phi_i - \left[1 + \frac{\gamma}{2}(\alpha - 1) \right] \phi_{i+1} \right\}. \quad (D.23)$$

Então, usando-se expressões da série de Taylor para ϕ_{i+1} e ϕ_{i-1} , a equação (D.23) pode ser escrita como:

$$ET \equiv \frac{\alpha\gamma}{2} \phi_i^{(2)} + \frac{2}{h^2} \left(1 + \frac{\alpha\gamma}{2} \right) \left[\frac{h^4}{4!} \phi_i^{(4)} + \frac{h^6}{6!} \phi_i^{(6)} + \frac{h^8}{8!} \phi_i^{(8)} + \dots \right] - \frac{\gamma}{h^2} \left[\frac{h^3}{3!} \phi_i^{(3)} + \frac{h^5}{5!} \phi_i^{(5)} + \frac{h^7}{7!} \phi_i^{(7)} + \dots \right]. \quad (D.24)$$

Agora se reescreve a equação (D.1) na forma:

$$\phi_i^{(2)} = \frac{\gamma}{h} \phi_i^{(1)}, \quad (D.25)$$

para se expressar as derivadas de ordem maior por meio da relação recursiva, usa-se:

$$\phi_i^{(n)} = \left(\frac{\gamma}{h} \right)^{n-2} \phi_i^{(2)}, \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (D.26)$$

Substituindo (D.26) na equação (D.24), fica:

$$ET = \left\{ \frac{\alpha\gamma}{2} + 2 \left(1 + \frac{\alpha\gamma}{2} \right) \left[\frac{\gamma^2}{4!} + \frac{\gamma^4}{6!} + \frac{\gamma^6}{8!} + \dots \right] - \gamma \left[\frac{\gamma}{3!} + \frac{\gamma^3}{5!} + \frac{\gamma^5}{4!} + \dots \right] \right\} \phi_i^{(2)}. \quad (D.27)$$

Assim, o erro de truncamento total pode ser expresso como uma difusão numérica. Manipulando-se a equação (D.27), se obtém:

$$ET = \left[\frac{1}{\gamma^2} \left\{ 2 \left(1 + \frac{\alpha\gamma}{2} \right) \operatorname{tanh} \frac{\gamma}{2} - \gamma \right\} \operatorname{senh} \gamma \right] \phi_i^{(2)}, \quad (D.28)$$

que é o erro de discretização total na aproximação.

Se $\alpha=0$ na equação (D.28), ter-se-á o erro no método de Galerkin. A função

$$f(\gamma) = \left(2 \operatorname{tanh} \frac{\gamma}{2} - \gamma \right) \frac{\operatorname{senh} \gamma}{\gamma^2}, \quad (D.29)$$

pode ser escrita na forma:

$$f(\gamma) = \left(\frac{\operatorname{tanh} \gamma/2}{\gamma/2} - 1 \right) \frac{\operatorname{senh} \gamma}{\gamma},$$

sendo $(\operatorname{senh}(\gamma))/\gamma > 0$ e $\frac{\operatorname{tanh} \gamma/2}{\gamma/2} - 1 < 0$ para todos γ . Assim $f(\gamma) < 0$ para todos os γ , e o método de Galerkin é sub-difuso.

Se ET for igual a zero, resolve-se a equação resultante para α , obtendo-se:

$$\alpha = \cot \operatorname{tanh} \frac{\gamma}{2} - \frac{2}{\gamma}. \quad (D.30)$$

Este valor de α é freqüentemente chamado de valor ótimo, já que ele fornece a quantidade exata da difusão de equilíbrio. Este valor será chamado simplesmente de α .

Para se calcular α através da equação (D.30), um custo computacional adicional de cálculo é introduzido. A figura D.4 mostra α e α_{cr} como função de γ .

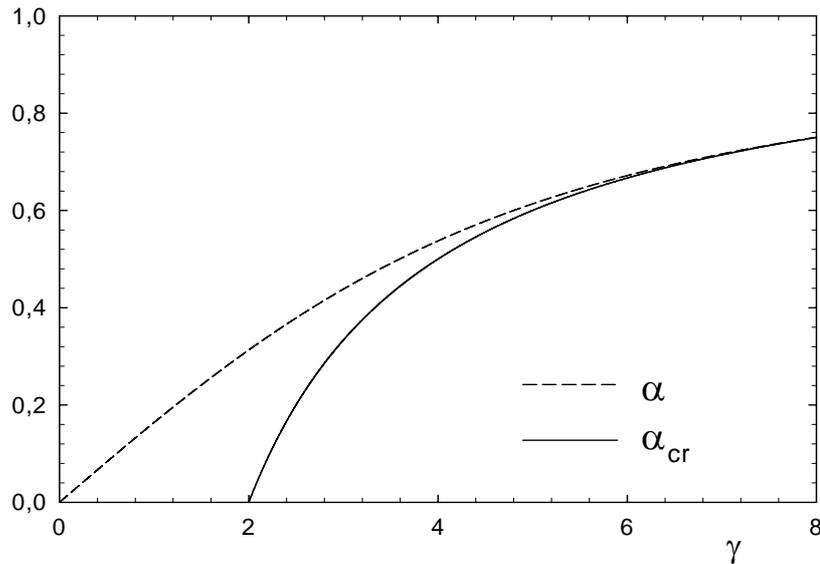


Figura D.4 - α e α_{cr} como função de γ .

À medida que γ aumenta, α se aproxima de α_{cr} muito rapidamente. Na verdade, para $\gamma > 8$, a difusão numérica extra introduzida usando-se α_{cr} , ao invés de α , é menor que 0,1%. Além disso, a medida que γ se aproxima de 0, quando $\gamma < 0,1$, a quantidade de difusão de equilíbrio requerida na equação (D.18) é novamente menor do que 0,1%. Assim, uma equação de cálculo para α , em faixas determinadas por experiência em cálculo numérico, é dada por:

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{para } \gamma < 0,1, \\ \cot \operatorname{gh} \frac{\gamma}{2} - \frac{2}{\gamma} & \text{para } 0,1 < \gamma < 8, \\ 1 - \frac{2}{\gamma} & \text{para } \gamma > 8. \end{cases} \quad (\text{D.31})$$

O nome Petrov-Galerkin é dado aos algoritmos que utilizam as funções de ponderação que são diferentes das funções de forma na formulação dos resíduos ponderados. Para se obter uma formulação de Petrov-Galerkin dos conceitos de difusão de equilíbrio discutidos anteriormente, é necessário escrever a forma fraca de Galerkin da equação (D.18) como:

$$\int_0^L \left\{ D \frac{dN_i}{dx} \frac{d\phi}{dx} + u \left(N_i + \frac{\alpha h}{2} \frac{dN_i}{dx} \right) \frac{d\phi}{dx} \right\} dx = 0, \quad (\text{D.32})$$

sendo definida a função de ponderação perturbada (modificada) como:

$$w_i = N_i + \frac{\alpha h}{2} \frac{dN_i}{dx}. \quad (\text{D.33})$$

A forma fraca (D.32) pode agora ser escrita como:

$$\int_0^L \left\{ D \frac{dw_i}{dx} \frac{d\phi}{dx} + u w_i \frac{d\phi}{dx} \right\} dx = 0, \quad (\text{D.34})$$

com a função de ponderação perturbada w_i dada pela equação (D.33).

As funções de ponderação na equação (D.33) foram primeiramente propostas por Hughes e Brooks (1979) e Kelly et al. (1980). Muitos outros esquemas baseados em funções de forma perturbadas ou modificadas têm sido propostos na literatura; uma revisão destes é encontrada nos trabalhos de Heinrich e Zienkiewicz (1979a,b). Aqui, esta forma em particular será mantida por causa de sua interpretação física direta em termos de inclusão de uma difusão de equilíbrio em um esquema numérico e também por causa da simplicidade da formulação em termos das funções de forma e suas derivadas.

É interessante notar que a equação (D.34) pode ser escrita diretamente da equação (D.32) somente para os elementos lineares, para os quais as derivadas de segunda ordem das funções de forma se anulam. Estudos teóricos das propriedades da convergência dos métodos de Petrov-Galerkin usando as funções de perturbações quadráticas contínuas, primeiramente introduzidas por Christie et al. (1976), foram realizados por Griffiths e Lorenz (1978) que mostraram convergências assintóticas de segunda ordem, fazendo $\alpha \rightarrow 0$ e $h \rightarrow 0$. Novos estudos matemáticos foram feitos por Barret e Morton (1980) e por Babuska e Szymczak (1982).

Para elementos quadráticos, os métodos de Petrov-Galerkin têm sido estudados por Heinrich (1980); Heinrich e Zienkiewicz (1977). Estes elementos requerem o cálculo de dois

parâmetros para se obter as soluções ótimas e são, em geral, dispendiosos e não práticos para problemas de difusão-convecção. Isto é um contraste com o caso de difusão pura, onde os elementos quadráticos são quase ótimos. Os métodos de Petrov-Galerkin para elementos cúbicos foram desenvolvidos por Christie e Mitchell (1978). Por causa da excelente precisão que pode ser atingida com elementos lineares, o uso de elementos de ordem mais alta nas equações de difusão-convecção torna-se desnecessário.

Considerando agora a equação (D.1) com um termo fonte S , ou seja:

$$-\frac{d}{dx} \left(D \frac{d\phi}{dx} \right) + u \frac{d\phi}{dx} = S ,$$

sua forma residual ponderada fraca torna-se:

$$\int_0^L \left(D \frac{dw}{dx} \frac{d\phi}{dx} + wu \frac{d\phi}{dx} \right) dx + w \left(-D \frac{d\phi}{dx} \right) \Big|_0^L = \int_0^L w S dx . \quad (D.35)$$

Na formulação de Galerkin, as funções de ponderação serão escolhidas iguais às funções de forma, isto é, $w=N_i$, enquanto que na formulação de Petrov-Galerkin são escolhidas funções de ponderação modificadas dada pela equação (D.33).

D.4 – MÉTODO DE PETROV-GALERKIN BIDIMENSIONAL

Seja a equação no regime permanente da convecção-difusão na forma:

$$-\nabla^T \mathbf{D} \nabla \phi + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi + 0 , \quad (D.36)$$

sendo ∇ o operador gradiente em coordenadas cartesianas,

$$\nabla_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix},$$

e a matriz de difusão para um material isotrópico igual a,

$$\mathbf{D} = D \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.37})$$

sendo

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

o vetor velocidade considerado constante, sem perda de generalidade.

Considere um elemento retangular mostrado na figura D.5, onde \mathbf{V} representa a velocidade média do fluido dentro do elemento.

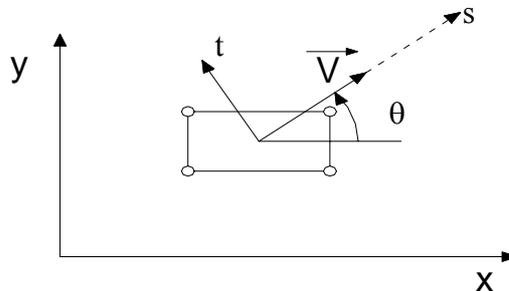


Figura D.5 - Elemento retangular com 4 nós.

Uma rotação local do operador na equação (D.36) para um novo sistema de coordenadas s-t é introduzida de tal maneira que s esteja alinhado com a direção da velocidade \mathbf{V} e t é ortogonal a s. No novo sistema de coordenadas, a equação (D.36) se torna:

$$-\nabla_{st}^T \mathbf{D} \nabla_{st} \phi + |\mathbf{V}| \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0, \quad (\text{D.38})$$

sendo $|\mathbf{V}|$ a magnitude do vetor velocidade. Os operadores gradientes nos dois sistemas de coordenadas estão relacionados por:

$$\nabla_{st} = \mathbf{T} \nabla_{xy}, \quad (\text{D.39})$$

sendo \mathbf{T} a matriz rotação, dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{D.40})$$

Reescrevendo a equação (D.38) na forma:

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{D} \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) + |\mathbf{V}| \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{D} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right), \quad (\text{D.41})$$

pode ser visto que neste sistema de coordenadas existe um problema de difusão-convecção na direção s somente. Assim, uma difusão de equilíbrio deve ser somada somente na direção do escoamento. Logo, uma difusão de equilíbrio anisotrópica da forma abaixo deve ser introduzida:

$$\mathbf{D}^1 = \mathbf{D}^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\alpha |\mathbf{V}| \bar{h}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.42})$$

sendo que o comprimento \bar{h} é a dimensão média do elemento que será apresentado adiante.

Claramente, o parâmetro α será determinado como antes da equação (D.30) ou (D.31), onde o parâmetro γ é agora dado por

$$\gamma = \frac{|\mathbf{V}| \bar{h}}{\mathbf{D}}. \quad (\text{D.43})$$

No sistema s - t , se obtém que:

$$-\nabla^T (\mathbf{D} + \mathbf{D}^1) \nabla \phi + |\mathbf{V}| \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0. \quad (\text{D.44})$$

Depois de se rotacionar de volta para o sistema de coordenadas x - y , tem-se:

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\alpha u \bar{h}}{2} \left(\frac{u}{|\mathbf{V}|} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{v}{|\mathbf{V}|} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\alpha v \bar{h}}{2} \left(\frac{u}{|\mathbf{V}|} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{v}{|\mathbf{V}|} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] \right\} + \\
& + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{D.45}$$

A formulação fraca de Galerkin pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[D \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\alpha u \bar{h}}{2|\mathbf{V}|} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left[D \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\alpha v \bar{h}}{2|\mathbf{V}|} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] + N_i \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right\} d\Omega - \\
& \int_{\Gamma} N_i D \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = 0.
\end{aligned} \tag{D.46}$$

Reorganizando vem:

$$\int_{\Omega} \left\{ D \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + u w_i \frac{\partial \phi}{\partial x} + v w_i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} d\Omega - \int_{\Gamma} N_i D \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = 0, \tag{D.47}$$

sendo que os pesos de Petrov-Galerkin tomam a forma:

$$w_i = N_i + \frac{\alpha \bar{h}}{2|\mathbf{V}|} \left(u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right). \tag{D.48}$$

Está claro que as funções de ponderação na equação (D48) fornecem uma extensão natural do caso unidimensional. Se $v = 0$, a equação (D.48) se reduz a (D.35), e o mesmo é verdade se $u = 0$ e a convecção fica paralela ao eixo y .

Quando o teorema de Green no plano é aplicado à equação (D.45), a função de ponderação perturbada completa deveria aparecer na integral de linha da equação (D.46). Entretanto, a perturbação para a função de forma foi omitida, fazendo com que os pesos de Petrov-Galerkin agissem somente no interior do domínio Ω . As razões para isto estão explicadas por Hughes e Brooks (1982) e são consistentes com o fato de que as perturbações são funções que não agem ao longo das fronteiras.

A característica mais importante do método de Petrov-Galerkin presente é que ele não introduz nenhuma difusão transversal ao escoamento, isto é, difusão na direção ortogonal ao escoamento, o que é um sério problema com a maioria dos esquemas de diferença finita “upwind” e outros esquemas de elementos finitos. No presente método, a difusão de equilíbrio é introduzida somente na direção do escoamento e por esta razão ele é chamado em inglês de “Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin Method”, ou método SUPG.

Nos cálculos bidimensionais, é mais prático usar os pesos de Petrov-Galerkin nos termos convectivos e fonte, enquanto que no termo de difusão usar as funções de forma. Embora isto não faça diferença em uma dimensão, em duas dimensões as derivadas transversais das funções de forma não são nulas, mas constantes no elemento. Assim a forma resultante da equação discretizada não será a mesma. As diferenças, entretanto, não são importantes e não afetam a precisão das aproximações.

A dimensão média do elemento \bar{h} na direção do escoamento é dado por (Heinrich e Yu, 1988):

$$\bar{h} = \frac{1}{|\mathbf{V}|} (|h_1| + |h_2|), \quad (\text{D.49})$$

sendo que

$$h_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{V} \quad \text{e} \quad h_2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{V}, \quad (\text{D.50})$$

e os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} são dados por:

$$\mathbf{a} = a_1 \hat{\mathbf{e}}_x + a_2 \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (\text{D.51})$$

$$\mathbf{b} = b_1 \hat{\mathbf{e}}_x + b_2 \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (\text{D.52})$$

sendo

$$a_1 = \frac{1}{2} (x_2 + x_3 - x_1 - x_4),$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3 - y_1 - y_4), \quad (\text{D.53})$$

$$b_1 = \frac{1}{2}(x_3 + x_4 - x_1 - x_2),$$

$$b_2 = \frac{1}{2}(y_3 + y_4 - y_1 - y_2).$$

Os vetores **a** e **b** são os vetores que unem os pontos intermediários dos lados opostos em um elemento quadrilateral, como mostrado na figura D.6; h_1 e h_2 são as projeções destes vetores na direção do escoamento.

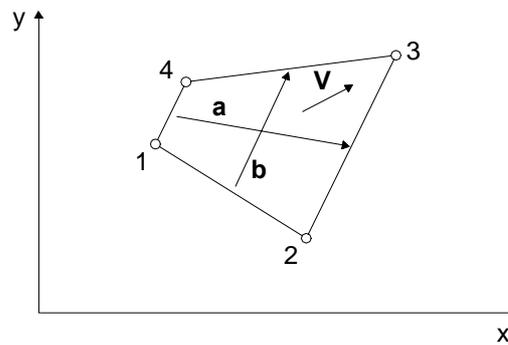


Figura D.6 - Elemento quadrilateral geral.

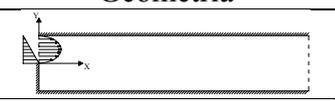
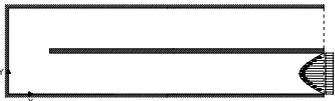
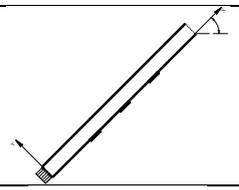
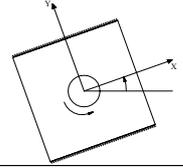
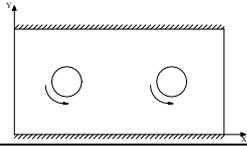
Apêndice E

ESTUDO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

E.1 – INTRODUÇÃO

Será feito neste apêndice o estudo da influência do parâmetro λ na conservação da massa. Vários testes serão realizados para os seguintes casos:

Tabela E.1 – Casos estudados para a análise do divergente de velocidades.

Geometria	Teste	Gr	Re	γ
	1	$7,5 \times 10^3$	10	0°
	2	$1,2 \times 10^5$	20	0°
	3	3×10^4	50	0°
	4	$1,2 \times 10^5$	100	0°
	5	10^5	10	0°
	6	10^5	10	45°
	7	10^5	100	45°
	8	$1,2 \times 10^5$	10	0°
	9	$1,2 \times 10^5$	500	0°
	10	$1,2 \times 10^5$	10	0°
	11	$1,2 \times 10^5$	500	0°

E.2 – FORMULAÇÃO

A conservação de massa será verificada ponto a ponto da malha utilizando a equação da continuidade. Do Apêndice C, tem-se que:

$$P = -\lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (\text{E.1})$$

logo

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\frac{P}{\lambda} \quad (\text{E.2})$$

A pressão P acima é primeiramente calculada constante no elemento. Em seguida, as pressões nos nós são calculadas utilizando o método dos mínimos quadrados descrito no apêndice C, o que resulta que a pressão no nó é igual a pressão no elemento dividido por quatro, quando elementos quadriláteros com quatro nós e a diagonalização da matriz massa são utilizados. Assim, cada nó recebe uma contribuição dos elementos aos quais ele pertence.

As figuras a seguir mostram as distribuições destas pressões para os casos da tabela E.1. Convém lembrar, portanto, que as faixas mostradas nas legendas das figuras abaixo, devem ser multiplicadas por 10^{-9} , considerando que o valor do parâmetro da penalidade considerado neste trabalho é 10^9 . O código computacional trabalha sempre com dupla precisão.

Como será visto a seguir, em todos os casos, o divergente de velocidades é muito pequeno, da ordem de 10^{-8} a 10^{-9} . Para os testes 2 e 6, o divergente é da ordem de 10^{-7} a 10^{-8} . Portanto, pelo mapeamento do divergente mostrado nas figuras seguintes, pode-se considerar que a massa foi preservada, pois o divergente apresenta valores na faixa de precisão dos cálculos realizados.

Teste 1

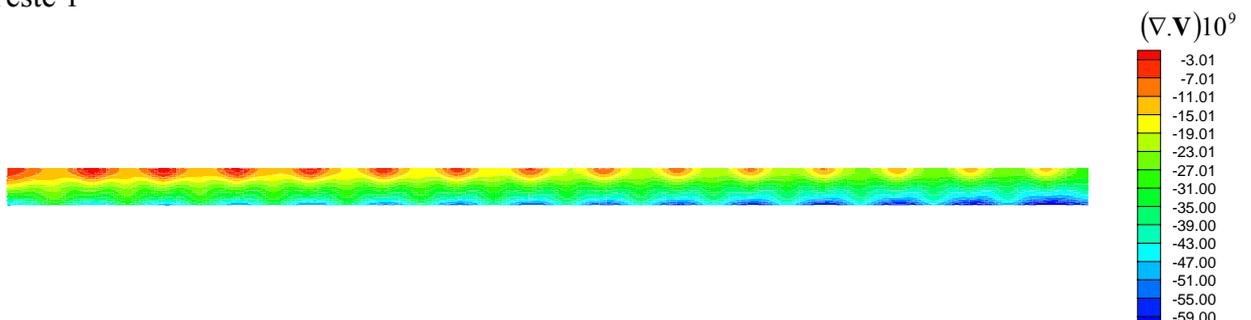


Figura E.1 – Divergente para canal com degrau – $Re = 10$, $Gr = 7,5 \times 10^3$.

Teste 2

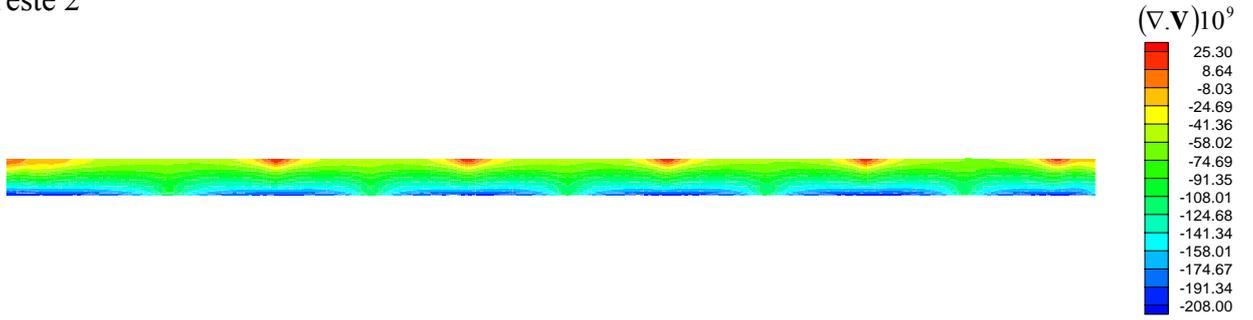


Figura E.2 – Divergente para canal com degrau – $Re = 20$, $Gr = 1,2 \times 10^5$.

Teste 3

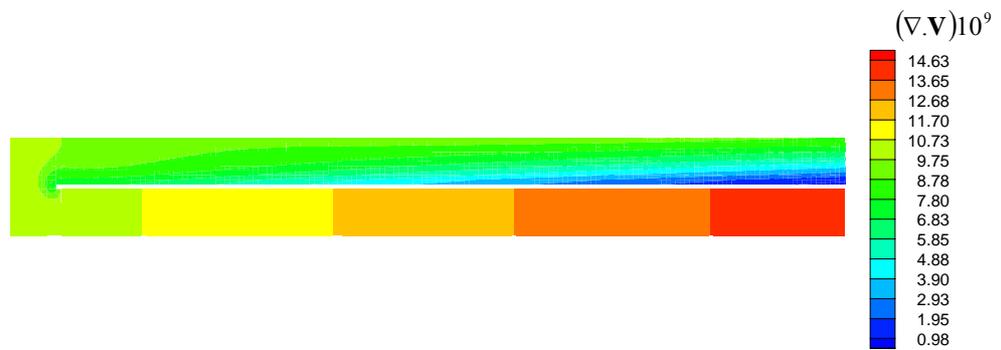


Figura E.3 – Divergente para canal com curva 180° – $Re = 50$, $Gr = 3 \times 10^4$.

Teste4

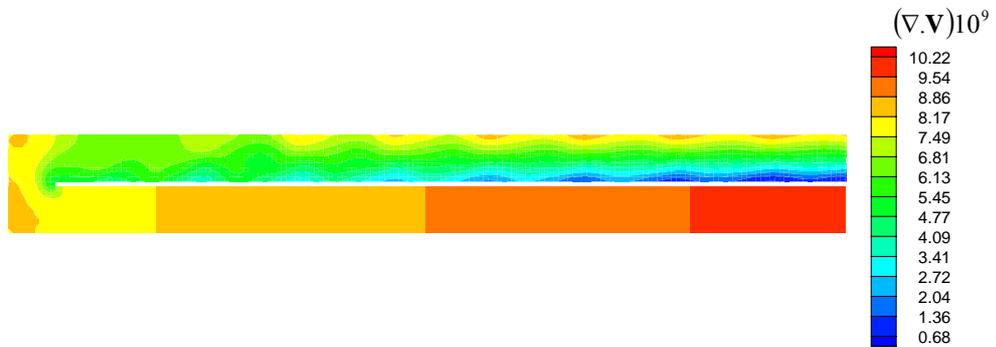


Figura E.4 – Divergente para canal com curva 180° – $Re = 100$, $Gr = 1,2 \times 10^5$.

Teste5

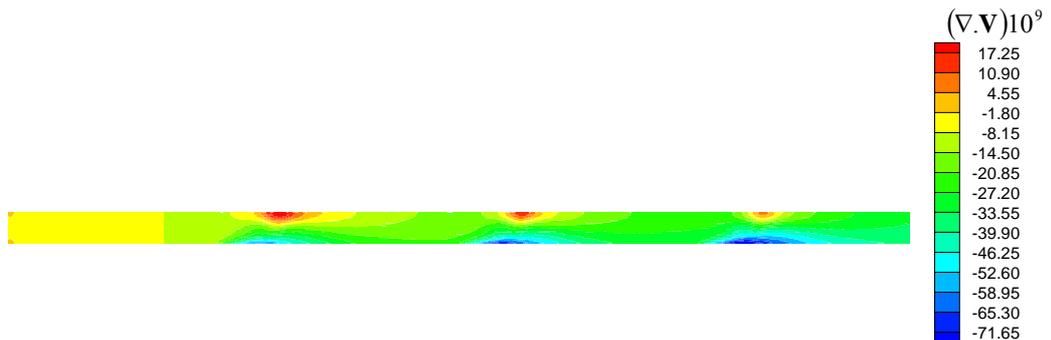


Figura E.5 – Divergente para canal com 3 fontes de calor – $Re = 10$, $Gr = 10^5$, $\gamma = 0^\circ$.

Teste 6

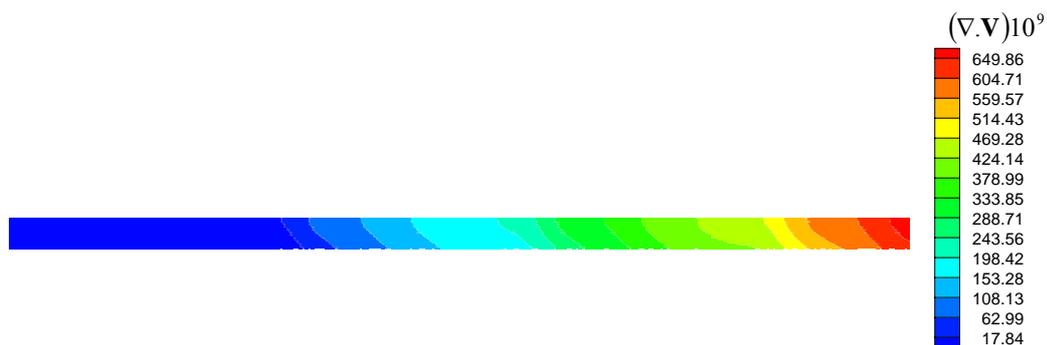


Figura E.6 – Divergente para canal com 3 fontes de calor – $Re = 10$, $Gr = 10^5$, $\gamma = 45^\circ$.

Teste 7

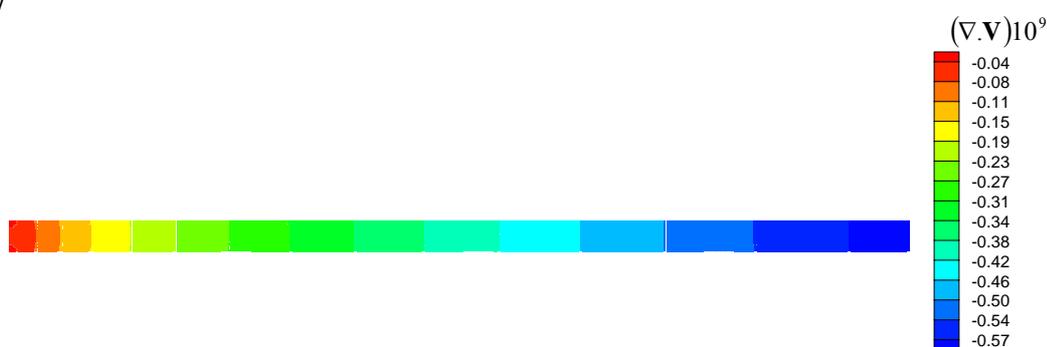


Figura E.7 – Divergente para canal com 3 fontes de calor – $Re = 100$, $Gr = 10^5$, $\gamma = 45^\circ$.

Teste 8

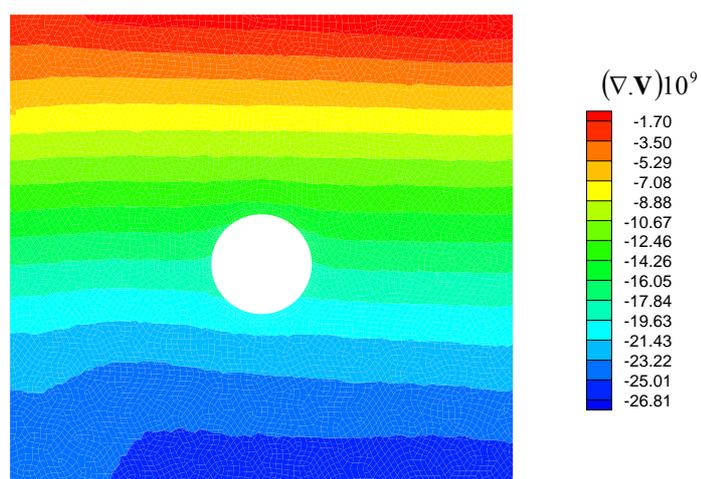


Figura E.8 – Divergente para cavidade com um cilindro rotativo – $Re = 10$, $Gr = 1,2 \times 10^5$,
 $\gamma = 0^\circ$.

Teste 9

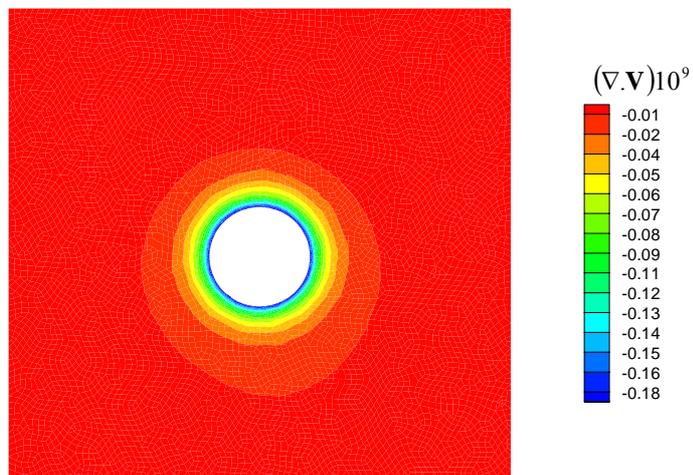


Figura E.9 – Divergente para cavidade com um cilindro rotativo – $Re = 500$, $Gr = 1,2 \times 10^5$,
 $\gamma = 0^\circ$.

Teste 10

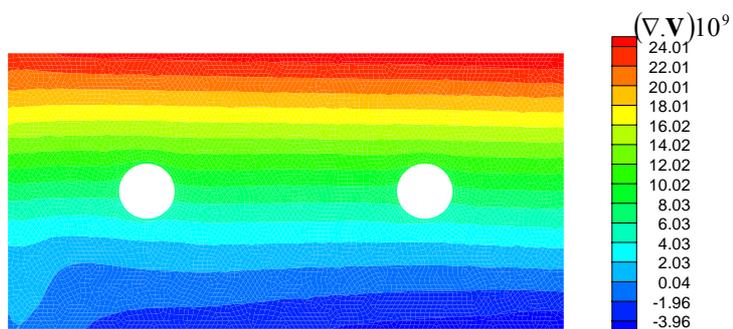


Figura E.10 – Divergente para cavidade com dois cilindros rotativos – $Re = 10$,
 $Gr = 1,2 \times 10^5$.

Teste 11

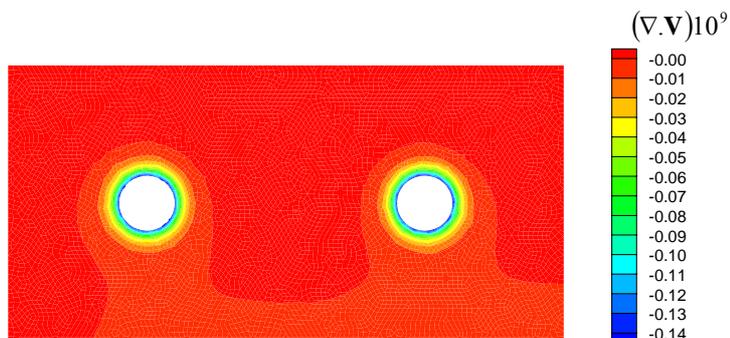


Figura E.11 – Divergente para cavidade com dois cilindros rotativos – $Re = 500$,
 $Gr = 1,2 \times 10^5$.

Apêndice F

ESTUDO DAS INTEGRAIS DE LINHA PARA A PRESSÃO

F.1 – INTRODUÇÃO

Na obtenção da formulação fraca para as equações de conservação da quantidade de movimento, aparecem integrais de linha para as condições de contorno de pressão nas fronteiras abertas. Este apêndice mostra um tratamento dado a elas, que é referido na literatura como retenção das integrais de linha para a pressão na formulação.

F.2 – AS INTEGRAIS

As integrais de pressão a serem retidas e calculadas explicitamente, aparecem na equação (3.55) e são dadas por:

$$\int_{\Gamma_0} N_i P n_x d\Gamma \text{ na direção X,} \quad (\text{F.1})$$

$$\int_{\Gamma_0} N_i P n_y d\Gamma \text{ na direção Y.} \quad (\text{F.2})$$

F.3 – RETENÇÃO DAS INTEGRAIS

Suponha uma fronteira aberta (FA) mostrada na figura F.1, abaixo:

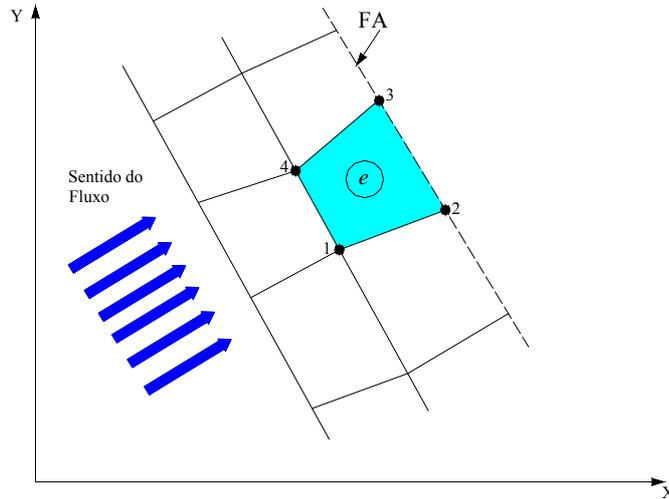


Figura F.1 – Detalhe do elemento e de uma fronteira aberta qualquer.

Sabe-se que pela metodologia empregada neste trabalho que a pressão é constante no elemento e e que as pressões nos nós são calculadas através dos mínimos quadrados, como está mostrado no Apêndice C.

Seja o elemento e com pressão constante como mostra a figura F.2. A pressão calculada no instante τ explicitamente é dada pela expressão:

$$P_{(\tau)}^e = \frac{\lambda}{A^e} \int^R \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) de . \quad (F.3)$$

Todos os lados do elemento e estão submetidos a uma pressão $P_{(\tau)}^e$. A retenção se faz somando as componentes das forças (F_{2x} , F_{3x} , F_{2y} , F_{3y}) que são aplicadas na fronteira aos termos correspondentes de força do equacionamento da quantidade de movimento. A figura F.3 mostra a seqüência da esquerda para a direita de como estas forças são calculadas. O lado 2-3 está submetido a uma pressão constante $P_{(\tau)}^e$. Esta pressão é multiplicada pelo dado Lb gerando a força Fb que é decomposta nas forças F_{2x} , F_{3x} , F_{2y} e F_{3y} .

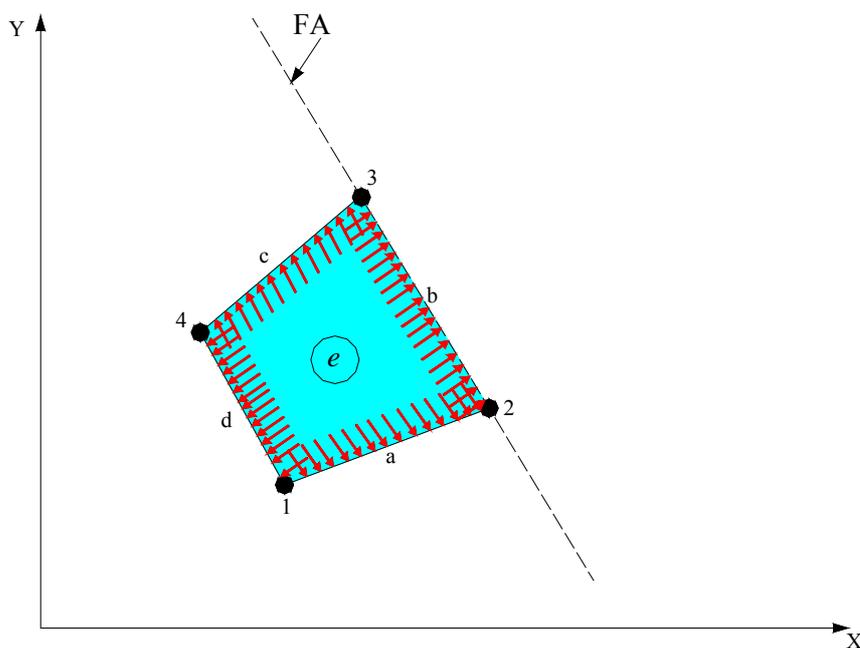


Figura F.2 – Elemento e de uma fronteira aberta submetido à pressão constante nos lados

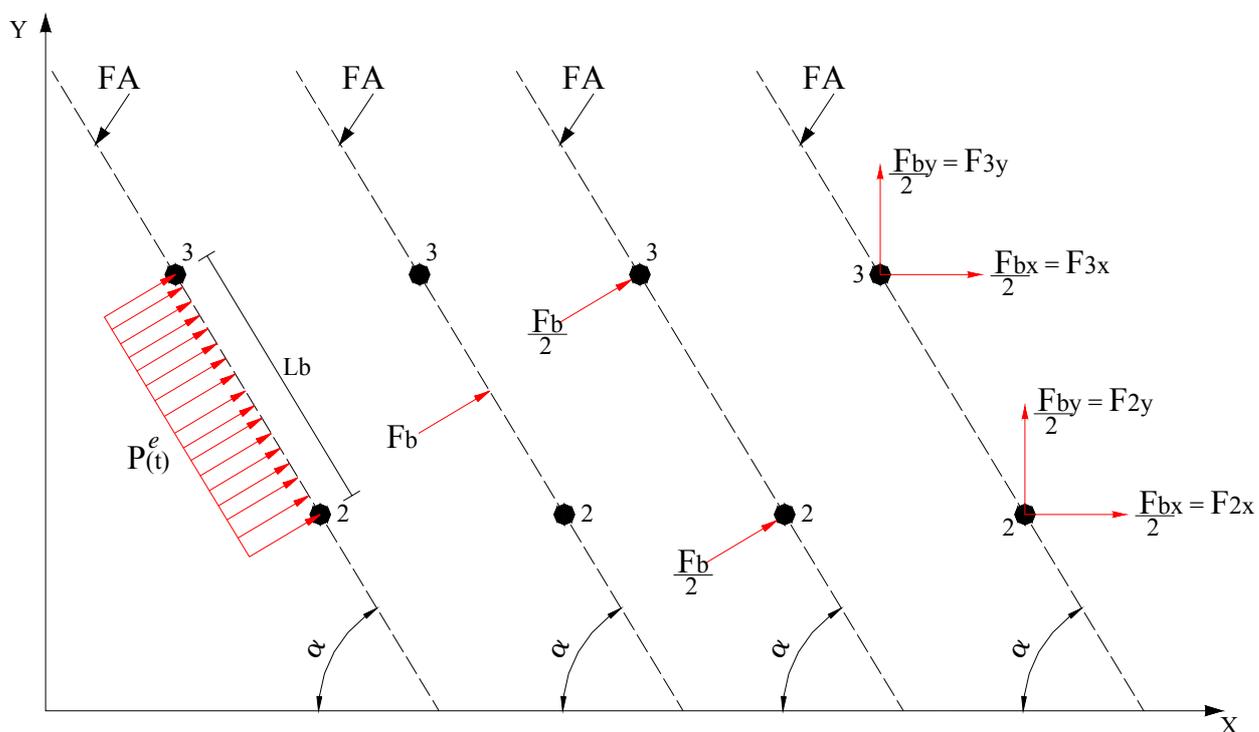


Figura F.3 – Forças atuantes no lado do elemento e pertencente à fronteira aberta.

Então,

$$F_b = P_{(\tau)}^e Lb . \quad (\text{F.4})$$

As componentes de forças nos nós são dadas por:

$$F_{2x} = F_{3x} = \frac{\text{sen}(\alpha) P_{(\tau)}^e Lb}{2} \quad (\text{F.5})$$

e

$$F_{2y} = F_{3y} = \frac{\text{cos}(\alpha) P_{(\tau)}^e Lb}{2} , \quad (\text{F.6})$$

Estas forças são somadas às forças gravitacionais, como foi mostrado na equação (3.55), ou seja:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} f_1 + p_1 \\ f_2 + p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i F_1 \det J d\xi d\eta + F_{ix} \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i F_2 \det J d\xi d\eta + F_{iy} \end{bmatrix} , \quad (\text{F.7})$$

onde F_{ix} representa a força no nó i na direção x e F_{iy} representa a força no nó i na direção y .

Para um novo campo de pressões calculado pela expressão (F.3), novamente se calcula novas forças na fronteira. Este procedimento equivale a dizer que, indiretamente, as condições de contorno para a pressão na fronteira são impostas em cada instante de tempo que se obtém um novo campo de pressões.

Apêndice G

TEMPOS COMPUTACIONAIS E CONVERGÊNCIA

G.1 – INTRODUÇÃO

Neste apêndice são mostrados os tempos computacionais para alguns casos desta tese, como também os gráficos de convergência dos resultados. Tanto nas tabelas, como nos gráficos, as abreviações Res_1 e Res_2 significam os maiores resíduos nodais encontrados em todo o domínio, calculados a cada vinte iterações para a velocidade e temperatura, respectivamente. Estes resíduos representam as variações de velocidade e temperatura no tempo, dados pelas seguintes fórmulas:

$$Res_1 = \frac{|V^i - V^{i-1}|}{\Delta\tau} \quad (G.1)$$

e

$$Res_2 = \frac{|\theta^i - \theta^{i-1}|}{\Delta\tau}, \quad (G.2)$$

onde V representa as velocidades adimensionais U e V , $\Delta\tau$ o incremento de tempo, θ a temperatura adimensional e o índice superior i a iteração.

É importante mencionar que foi utilizado um falso transiente, ou seja, cada iteração representa um avanço no tempo. O maior incremento de tempo utilizado foi 0,05. No Apêndice H é apresentado um estudo da influência do incremento de tempo.

A convergência foi verificada para o campo de velocidades somente, ou seja, o programa parava quando o maior valor de Res_1 fosse menor que 10^{-5} . Em alguns casos, isto ocorreu, mas em outros casos a convergência foi verificada visualmente através de gráficos do histórico da convergência, como mostrado mais adiante neste mesmo apêndice. A escolha do campo de velocidades para o critério de parada do programa se deve ao fato de que sua convergência é mais crítica do que do campo de temperatura. Este fato pode ser notado pelos valores mais altos do resíduo para a velocidade (linha vermelha).

O equipamento utilizado nas simulações numéricas foi um computador Pentium 4, com um processador de 2,8 GHz e 512 MB de memória RAM.

Praticamente todos os casos convergiram para um valor, o que se identifica com a tendência de Res_1 e Res_2 ao valor zero. Aqueles casos que não se aproximaram de zero correspondem àqueles que apresentaram uma oscilação física no escoamento, como foi o caso do canal com curva de 180° e Re igual a 50 e 100.

Tabela G.1 – Tempo computacional e resíduos para canais com uma curva de 180°.

Re	Gr	$\Delta\tau$	Iterações	Res ₁	Res ₂	Tempo (s)
10	1	0,05	20000	0,1124E-04	0,1201E-07	1271,98
50	1	0,05	820	0,7167E-05	0,1377E-06	53,22
100	1	0,05	900	0,9844E-05	0,5360E-06	58,28
300	1	0,025	2460	0,8661E-05	0,6179E-05	156,28
500	1	0,025	3720	0,8848E-05	0,5379E-05	417,45
700	1	0,025	5400	0,9701E-05	0,3125E-05	331,86
800	1	0,025	4440	0,7874E-05	0,5629E-04	272,42
1000	1	0,025	4620	0,8734E-05	0,1792E-03	290,58
10	10 ³	0,05	480	0,8866E-05	0,6143E-05	31,47
50	10 ³	0,05	700	0,9514E-05	0,1498E-05	45,52
100	10 ³	0,05	640	0,9822E-05	0,2593E-03	41,68
300	10 ³	0,025	2740	0,9620E-05	0,9984E-06	173,96
500	10 ³	0,025	3340	0,9754E-05	0,1296E-04	206,85
700	10 ³	0,025	7400	0,8812E-05	0,3478E-06	454,01
800	10 ³	0,025	4240	0,9267E-05	0,7853E-04	261,38
1000	10 ³	0,025	4400	0,8499E-05	0,2383E-03	276,81
10	5X10 ³	0,05	520	0,8747E-05	0,1083E-05	9,09
50	5X10 ³	0,05	760	0,8625E-05	0,1259E-06	49,43
100	5X10 ³	0,05	840	0,9450E-05	0,2417E-05	54,34
300	5X10 ³	0,025	2520	0,9160E-05	0,3918E-05	160,33
500	5X10 ³	0,025	8785	0,7546E-05	0,5836E-05	224,05
700	5X10 ³	0,025	4340	0,7906E-05	0,2400E-04	268,49
800	5X10 ³	0,025	4740	0,9146E-05	0,3392E-04	290,77
1000	5X10 ³	0,025	4800	0,5626E-05	0,1412E-03	302,03
10	10 ⁴	0,05	480	0,9859E-05	0,1285E-05	31,47
50	10 ⁴	0,05	940	0,8921E-05	0,9805E-07	60,76
100	10 ⁴	0,05	820	0,9885E-05	0,3634E-05	53,19
300	10 ⁴	0,0025	3300	0,6705E-05	0,1030E-05	209,70
500	10 ⁴	0,025	5100	0,8574E-05	0,6712E-06	315,34
700	10 ⁴	0,025	5820	0,9889E-05	0,2565E-05	357,32
800	10 ⁴	0,025	4500	0,8401E-05	0,5046E-04	277,05
1000	10 ⁴	0,025	4240	0,6710E-05	0,2924E-03	478,87
10	3X10 ⁴	0,025	1020	0,7386E-05	0,9628E-06	65,89
50	3X10 ⁴	0,025	2040	0,8865E-05	0,4241E-06	131,00
100	3X10 ⁴	0,025	1960	0,9640E-05	0,9725E-06	125,92
300	3X10 ⁴	0,025	2580	0,6531E-05	0,1809E-05	164,10
500	3X10 ⁴	0,025	3900	0,9774E-05	0,2682E-05	241,46
700	3X10 ⁴	0,025	4320	0,7472E-05	0,2407E-04	266,29
800	3X10 ⁴	0,025	4460	0,9526E-05	0,5298E-04	274,38
1000	3X10 ⁴	0,025	4380	0,7816E-05	0,2422E-03	275,86
10	6X10 ⁴	0,01	3040	0,7961E-05	0,4697E-07	195,36
50	6X10 ⁴	0,01	20000	0,2334E+01	0,3771E+00	1274,66
100	6X10 ⁴	0,01	9180	0,8264E-05	0,1663E-05	588,45
300	6X10 ⁴	0,01	5800	0,8012E-05	0,8359E-05	367,44
500	6X10 ⁴	0,01	7960	0,9842E-05	0,1673E-04	490,84
700	6X10 ⁴	0,01	11340	0,8566E-05	0,1491E-04	696,19
800	6X10 ⁴	0,02	5400	0,8608E-05	0,6501E-04	334,16
1000	6X10 ⁴	0,025	4720	0,9548E-05	0,1538E-03	296,27
10	1,2X10 ⁵	0,005	6460	0,8850E-05	0,6457E-07	412,15
50	1,2X10 ⁵	0,005	20000	0,3662E+01	0,3681E+00	1274,80
100	1,2X10 ⁵	0,005	20000	0,4394E+01	0,1945E+01	1274,70
300	1,2X10 ⁵	0,01	20000	0,3506E-01	0,8529E-01	1270,52
500	1,2X10 ⁵	0,01	7900	0,9434E-05	0,1378E-04	496,54
700	1,2X10 ⁵	0,01	10120	0,9867E-05	0,3540E-04	629,87
800	1,2X10 ⁵	0,01	11260	0,9624E-05	0,4438E-04	698,01
1000	1,2X10 ⁵	0,01	14700	0,9225E-05	0,3228E-04	929,07

Tabela G.2 – Tempo computacional e resíduos para canais retangulares com duas fontes de calor.

d	Re	Gr	$\Delta\tau$	Iterações	Res ₁	Res ₂	Tempo (s)
1	1	10 ³	0,01	400	0,9918E-05	0,5896E-06	42,13
1	10	10 ³	0,01	6000	0,4769E-04	0,9954E-08	623,51
1	50	10 ³	0,01	10000	0,4788E-04	0,6719E-07	1055,28
1	100	10 ³	0,01	5000	0,7037E-04	0,3941E-07	530,52
1	1000	10 ³	0,01	5000	0,6056E-04	0,2424E-05	521,44
1	1	10 ⁴	0,01	500	0,7307E-05	0,2041E-07	52,49
1	10	10 ⁴	0,01	1000	0,8201E-01	0,6662E-02	104,62
1	50	10 ⁴	0,01	3000	0,4064E-04	0,7829E-07	317,53
1	100	10 ⁴	0,01	4000	0,5725E-04	0,4456E-07	426,26
1	1000	10 ⁴	0,01	5000	0,5496E-04	0,2423E-05	520,85
1	1	10 ⁵	0,001	2000	0,2231E-02	0,5425E-05	208,35
1	10	10 ⁵	0,001	15000	0,3956E+01	0,8235E-01	1603,62
1	50	10 ⁵	0,001	5000	0,5346E+00	0,5219E-01	560,46
1	100	10 ⁵	0,001	15000	0,5099E-02	0,3312E-02	1618,57
1	1000	10 ⁵	0,001	20000	0,2268E-02	0,9646E-03	2167,81
2	1	10 ³	0,01	400	0,8923E-05	0,5438E-06	44,65
2	10	10 ³	0,01	10000	0,4670E-04	0,6244E-08	1096,95
2	50	10 ³	0,01	15000	0,4074E-04	0,6722E-07	1672,95
2	100	10 ³	0,01	15000	0,7095E-04	0,5752E-07	1667,03
2	1000	10 ³	0,01	15000	0,1190E-03	0,2335E-07	1653,81
2	1	10 ⁴	0,01	380	0,9462E-05	0,6752E-07	42,28
2	10	10 ⁴	0,01	6000	0,6108E-04	0,7319E-08	660,13
2	50	10 ⁴	0,01	10000	0,7752E-04	0,3474E-07	1118,42
2	100	10 ⁴	0,01	10000	0,8720E-04	0,5223E-07	1115,60
2	1000	10 ⁴	0,01	10000	0,8556E-04	0,7470E-07	1100,38
2	1	10 ⁵	0,001	10000	0,5403E-04	0,1111E-06	1103,90
2	10	10 ⁵	0,001	30000	0,1821E+02	0,3797E+00	3276,36
2	50	10 ⁵	0,001	20000	0,5039E-04	0,3899E-05	2286,51
2	100	10 ⁵	0,001	20000	0,4019E-03	0,2375E-03	2264,09
3	1	10 ³	0,01	460	0,9967E-05	0,5678E-07	48,09
3	10	10 ³	0,01	5000	0,5265E-04	0,1311E-07	511,84
3	50	10 ³	0,01	10000	0,8254E-04	0,5483E-07	1034,32
3	100	10 ³	0,01	5000	0,4952E-04	0,7079E-07	525,04
3	1000	10 ³	0,01	10000	0,7300E-04	0,3764E-07	1022,69
3	1	10 ⁴	0,01	360	0,9023E-05	0,1479E-06	37,34
3	10	10 ⁴	0,01	5000	0,4872E-04	0,1682E-07	511,70
3	50	10 ⁴	0,01	10000	0,1019E-03	0,1236E-06	1036,37
3	100	10 ⁴	0,01	10000	0,6770E-04	0,4773E-07	1035,55
3	1000	10 ⁴	0,01	10000	0,1524E-03	0,2517E-07	1024,38
3	1	10 ⁵	0,001	20000	0,5973E-04	0,1270E-06	2050,28
3	10	10 ⁵	0,01	5000	0,1263E+02	0,4130E+00	514,54
3	50	10 ⁵	0,01	3000	0,8003E-04	0,7195E-07	312,14
3	100	10 ⁵	0,01	5000	0,8297E-04	0,4192E-07	519,67
3	1000	10 ⁵	0,01	5000	0,1723E-03	0,1947E-05	513,56

Tabela G.3 – Tempo computacional e resíduos para canais retangulares com três fontes de calor.

γ	Re	Gr	$\Delta\tau$	Iterações	Res ₁	Res ₂	Tempo (s)
0°	1	10 ³	0,01	340	0,8583E-05	0,2743E-05	35,7915
0°	10	10 ³	0,01	1900	0,9246E-05	0,6144E-04	201,03
0°	50	10 ³	0,01	3700	0,9358E-05	0,1352E-04	392,16
0°	100	10 ³	0,01	4240	0,6240E-05	0,1942E-04	450,71
0°	1000	10 ³	0,01	7000	0,2363E-04	0,2424E-04	727,83
0°	1	10 ⁴	0,01	5000	0,1347E-04	0,1077E-06	525,19
0°	10	10 ⁴	0,01	2000	0,1177E-03	0,5242E-04	214,32
0°	50	10 ⁴	0,01	7000	0,1862E-04	0,1064E-07	745,62
0°	100	10 ⁴	0,01	7000	0,9909E-05	0,1988E-04	447,10
0°	1000	10 ⁴	0,01	4720	0,9680E-05	0,2564E-03	494,60
0°	1	10 ⁵	0,001	7000	0,3305E-03	0,6393E-06	734,61
0°	10	10 ⁵	0,001	15000	0,4017E-01	0,5931E-03	1584,29
0°	50	10 ⁵	0,001	10000	0,4378E-01	0,6211E-02	1069,53
0°	100	10 ⁵	0,001	15000	0,2736E-02	0,2344E-02	1588,36
0°	1000	10 ⁵	0,001	20000	0,7898E-02	0,8801E-03	2071,90
45°	1	10 ³	0,001	10000	0,2816E-04	0,5353E-06	1038,19
45°	10	10 ³	0,001	10000	0,1378E-02	0,1872E-02	1054,17
45°	50	10 ³	0,01	4620	0,8985E-05	0,1391E-07	491,04
45°	100	10 ³	0,01	5040	0,8715E-05	0,3000E-06	533,39
45°	1000	10 ³	0,01	6700	0,8896E-05	0,3664E-04	696,71
45°	1	10 ⁴	0,01	2880	0,8777E-05	0,7406E-07	299,73
45°	10	10 ⁴	0,01	2460	0,9322E-05	0,2627E-07	260,15
45°	50	10 ⁴	0,01	3820	0,9960E-05	0,9823E-07	404,68
45°	100	10 ⁴	0,01	5020	0,9162E-05	0,5548E-07	533,92
45°	1000	10 ⁴	0,01	9960	0,9568E-05	0,6905E-07	1035,76
45°	1	10 ⁵	0,001	20000	0,3445E-03	0,8395E-06	2083,53
45°	10	10 ⁵	0,001	30000	0,1934E-03	0,1596E-05	3171,38
45°	50	10 ⁵	0,001	30000	0,5445E-04	0,6439E-06	3172,92
45°	100	10 ⁵	0,001	30000	0,3691E-03	0,8447E-04	3177,57
45°	1000	10 ⁵	0,001	30000	0,2905E-02	0,4994E-03	3103,71
90°	1	10 ³	0,01	400	0,7445E-05	0,5488E-06	42,14
90°	10	10 ³	0,01	2540	0,8692E-05	0,3844E-05	268,53
90°	50	10 ³	0,01	4480	0,9427E-05	0,2415E-07	474,40
90°	100	10 ³	0,01	5060	0,9785E-05	0,2522E-06	535,73
90°	1000	10 ³	0,01	8320	0,6527E-05	0,2644E-05	863,14
90°	1	10 ⁴	0,01	520	0,7244E-05	0,4448E-07	55,01
90°	10	10 ⁴	0,01	2100	0,9647E-05	0,1200E-06	222,18
90°	50	10 ⁴	0,01	6280	0,7149E-05	0,1028E-07	665,69
90°	100	10 ⁴	0,01	5940	0,8411E-05	0,1117E-07	630,29
90°	1000	10 ⁴	0,01	9740	0,9702E-05	0,1168E-06	1011,21
90°	1	10 ⁵	0,001	30000	0,1425E-01	0,6175E-05	3161,54
90°	10	10 ⁵	0,001	30000	0,2122E-03	0,1073E-05	3165,96
90°	50	10 ⁵	0,001	30000	0,4346E-04	0,5587E-06	3184,86
90°	100	10 ⁵	0,001	30000	0,6587E-03	0,6386E-04	3175,83
90°	1000	10 ⁵	0,001	30000	0,2869E-02	0,4941E-03	3115,83

Tabela G.4 – Tempo computacional e resíduos para cavidades com um cilindro interno rotativo.

Re	Sentido	Gama	$\Delta\tau$	Iterações	Gr	Res ₁	Res ₂	Tempo(s)
1	CWR	0°	0,01	219	10 ³	0,5879E-05	0,2821E-04	19
10	CWR	0°	0,01	6240	10 ³	0,9159E-05	0,3009E-07	472
50	CWR	0°	0,05	30000	10 ³	0,4252E-04	0,3124E-05	2260
100	CWR	0°	0,01	100000	10 ³	0,2184E-03	0,1724E-05	7476
500	CWR	0°	0,002	100000	10 ³	0,6504E-03	0,5566E-03	7496
1000	CWR	0°	0,002	250000	10 ³	0,7888E-03	0,1054E-03	18687
1	CWR	0°	0,01	199	10 ⁴	0,7715E-05	0,4524E-05	18
10	CWR	0°	0,01	1879	10 ⁴	0,9222E-05	0,9724E-06	146
50	CWR	0°	0,05	50000	10 ⁴	0,4713E-04	0,8981E-06	3785
100	CWR	0°	0,01	20000	10 ⁴	0,2440E-03	0,1708E-05	1507
50	CWR	0°	0,05	10000	10 ⁵	0,3937E-04	0,3937E-04	750
500	CWR	0°	0,004	100000	10 ⁵	0,1475E-02	0,2889E-04	7547
1	CCWR	0°	0,01	219	10 ³	0,4766E-05	0,2290E-04	19
10	CCWR	0°	0,01	1879	10 ³	0,9911E-05	0,4419E-05	147
50	CCWR	0°	0,05	20000	10 ³	0,4594E-04	0,1468E-05	1519
100	CCWR	0°	0,01	20000	10 ³	0,2697E-03	0,1480E-05	1504
500	CCWR	0°	0,004	100000	10 ³	0,8140E-03	0,1719E-04	7616
1	CCWR	0°	0,01	200	10 ⁴	0,7436E-05	0,4423E-05	17
10	CCWR	0°	0,01	3420	10 ⁴	0,9784E-05	0,1560E-07	263
50	CCWR	0°	0,05	20000	10 ⁴	0,4012E-04	0,4043E-05	1526
100	CCWR	0°	0,01	20000	10 ⁴	0,3271E-03	0,1860E-05	1529
500	CCWR	0°	0,004	100000	10 ⁴	0,8988E-03	0,1631E-04	7591
50	CCWR	0°	0,05	15000	10 ⁵	0,3079E-04	0,2688E-05	1132
500	CCWR	0°	0,004	100000	10 ⁵	0,1150E-02	0,1768E-04	7633
1	CWR	45°	0,01	220	10 ³	0,7753E-05	0,2434E-04	79
10	CWR	45°	0,01	1440	10 ³	0,7878E-05	0,1145E-03	466
50	CWR	45°	0,05	5000	10 ³	0,3296E-04	0,1382E-05	1601
100	CWR	45°	0,01	25000	10 ³	0,2817E-03	0,2276E-05	7984
1	CWR	45°	0,01	240	10 ⁴	0,2893E-05	0,1142E-05	85
10	CWR	45°	0,01	1980	10 ⁴	0,8890E-05	0,1595E-05	638
1	CWR	45°	0,01	280	10 ⁵	0,5200E-05	0,1517E-06	98
10	CWR	45°	0,01	2700	10 ⁵	0,9604E-05	0,2289E-07	870
50	CWR	45°	0,05	15000	10 ⁵	0,4283E-04	0,1291E-05	4791
100	CWR	45°	0,01	20000	10 ⁵	0,3729E-03	0,4356E-05	1564
500	CWR	45°	0,004	100000	10 ⁵	0,8918E-03	0,2763E-04	7607

Tabela G.5 – Tempo computacional e resíduos para cavidades com dois cilindros internos rotativos.

Casos	Re	Gr	$\Delta\tau$	Iterações	Res ₁	Res ₂	Tempo (s)
CAVIA1 1	10	10 ⁵	0,01	2140	0,7822E-05	0,1738E-05	150,17
CAVIA1 2	50	10 ⁵	0,01	25000	0,1036E-03	0,5031E-06	1739,06
CAVIA1 3	100	10 ⁵	0,01	50000	0,2011E-03	0,2208E-05	3529,36
CAVIA1 4	500	10 ⁵	0,005	100000	0,4218E-03	0,5311E-04	7034,84
CAVIA2 1	10	10 ⁵	0,01	2140	0,9967E-05	0,4096E-06	150,22
CAVIA2 2	50	10 ⁵	0,01	25000	0,1399E-03	0,1847E-05	1760,91
CAVIA2 3	100	10 ⁵	0,01	25000	0,4848E-03	0,9134E-05	1755,11
CAVIA2 4	500	10 ⁵	0,005	100000	0,3786E-03	0,3605E-04	7020,88
CAVIA3 1	10	10 ⁵	0,01	2580	0,6945E-05	0,6329E-07	179,75
CAVIA3 2	50	10 ⁵	0,01	25000	0,4757E-03	0,1513E-05	1746,08
CAVIA3 3	100	10 ⁵	0,01	15000	0,2338E-03	0,8424E-05	1050,02
CAVIA4 1	10	10 ⁵	0,01	2120	0,7406E-05	0,2122E-05	148,45
CAVIA4 2	50	10 ⁵	0,01	10000	0,1446E-03	0,1935E-05	698,92
CAVIA4 3	100	10 ⁵	0,01	15000	0,2282E-03	0,1449E-04	1051,52
CAVIB1 1	10	10 ⁵	0,01	2520	0,6894E-05	0,1624E-06	175,52
CAVIB1 2	50	10 ⁵	0,01	10000	0,7721E-04	0,8777E-06	697,19
CAVIB1 3	100	10 ⁵	0,01	15000	0,1432E-03	0,1092E-04	1047,72
CAVIB2 1	10	10 ⁵	0,01	1880	0,9042E-05	0,2463E-05	132,31
CAVIB2 2	50	10 ⁵	0,01	10000	0,8858E-04	0,1320E-05	698,28
CAVIB2 3	100	10 ⁵	0,01	15000	0,2094E-03	0,4741E-05	1049,08
CAVIB3 1	10	10 ⁵	0,01	2060	0,9523E-05	0,1319E-05	144,20
CAVIB3 2	50	10 ⁵	0,01	10000	0,8644E-04	0,6221E-06	697,89
CAVIB3 3	100	10 ⁵	0,01	15000	0,1474E-03	0,5494E-05	1047,59
CAVIB4 1	10	10 ⁵	0,01	2040	0,9254E-05	0,2210E-05	142,95
CAVIB4 2	50	10 ⁵	0,01	10000	0,5610E-04	0,2156E-05	697,61
CAVIB4 3	100	10 ⁵	0,01	15000	0,7796E-04	0,7431E-05	1047,30
CAVIC1 1	10	10 ⁵	0,01	2100	0,9325E-05	0,2144E-05	588,57
CAVIC1 2	50	10 ⁵	0,01	15000	0,1093E-03	0,7106E-06	4233,54
CAVIC1 3	100	10 ⁵	0,01	15000	0,1668E-03	0,1573E-04	4256,79
CAVIC2 1	10	10 ⁵	0,01	1900	0,9373E-05	0,2158E-05	520,13
CAVIC2 2	50	10 ⁵	0,01	10000	0,4231E-03	0,6308E-05	2753,78
CAVIC2 3	100	10 ⁵	0,01	15000	0,1747E-03	0,8826E-05	4127,17
CAVIC3 1	10	10 ⁵	0,01	1800	0,9356E-05	0,6371E-05	494,10
CAVIC3 2	50	10 ⁵	0,01	10000	0,6189E-04	0,4163E-06	2745,62
CAVIC3 3	100	10 ⁵	0,01	15000	0,2304E-03	0,6187E-05	4140,70
CAVIC4 1	10	10 ⁵	0,01	2180	0,9388E-05	0,1203E-05	597,22
CAVIC4 2	50	10 ⁵	0,01	10000	0,7219E-04	0,1324E-05	2807,12
CAVIC4 3	100	10 ⁵	0,01	15000	0,6848E-03	0,1197E-04	4261,21
CAVID1 1	10	10 ⁵	0,01	2320	0,7101E-05	0,5530E-06	161,59
CAVID1 2	50	10 ⁵	0,01	10000	0,8164E-04	0,9324E-06	696,42
CAVID1 3	100	10 ⁵	0,01	15000	0,1356E-03	0,1318E-04	1050,27
CAVID2 1	10	10 ⁵	0,01	2000	0,8025E-05	0,1103E-05	140,25
CAVID2 2	50	10 ⁵	0,01	10000	0,1038E-03	0,8658E-06	697,92
CAVID2 3	100	10 ⁵	0,01	15000	0,2033E-03	0,9144E-05	1050,55
CAVID3 1	10	10 ⁵	0,01	1980	0,9849E-05	0,2243E-05	138,14
CAVID3 2	50	10 ⁵	0,01	15000	0,6923E-04	0,9121E-06	697,91
CAVID3 3	100	10 ⁵	0,01	15000	0,1461E-03	0,7645E-05	1048,28
CAVID4 1	10	10 ⁵	0,01	2380	0,8278E-05	0,3656E-06	166,75
CAVID4 2	50	10 ⁵	0,01	10000	0,8284E-04	0,3452E-05	702,11
CAVID4 3	100	10 ⁵	0,01	25000	0,1406E-03	0,4140E-05	1747,66

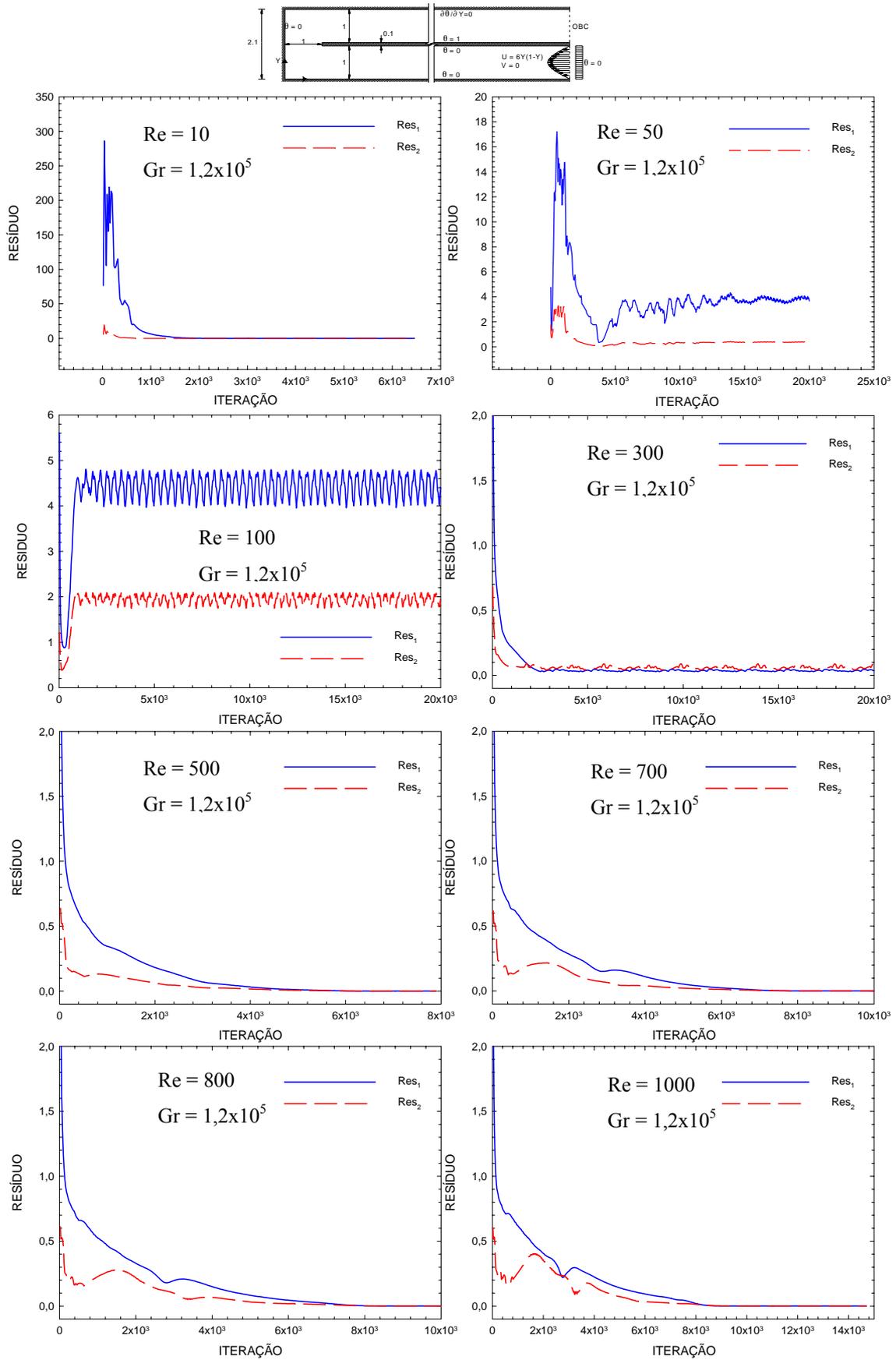


Figura G.1 – Resíduos Res_1 e Res_2 no tempo para canais com uma curva de 180° .

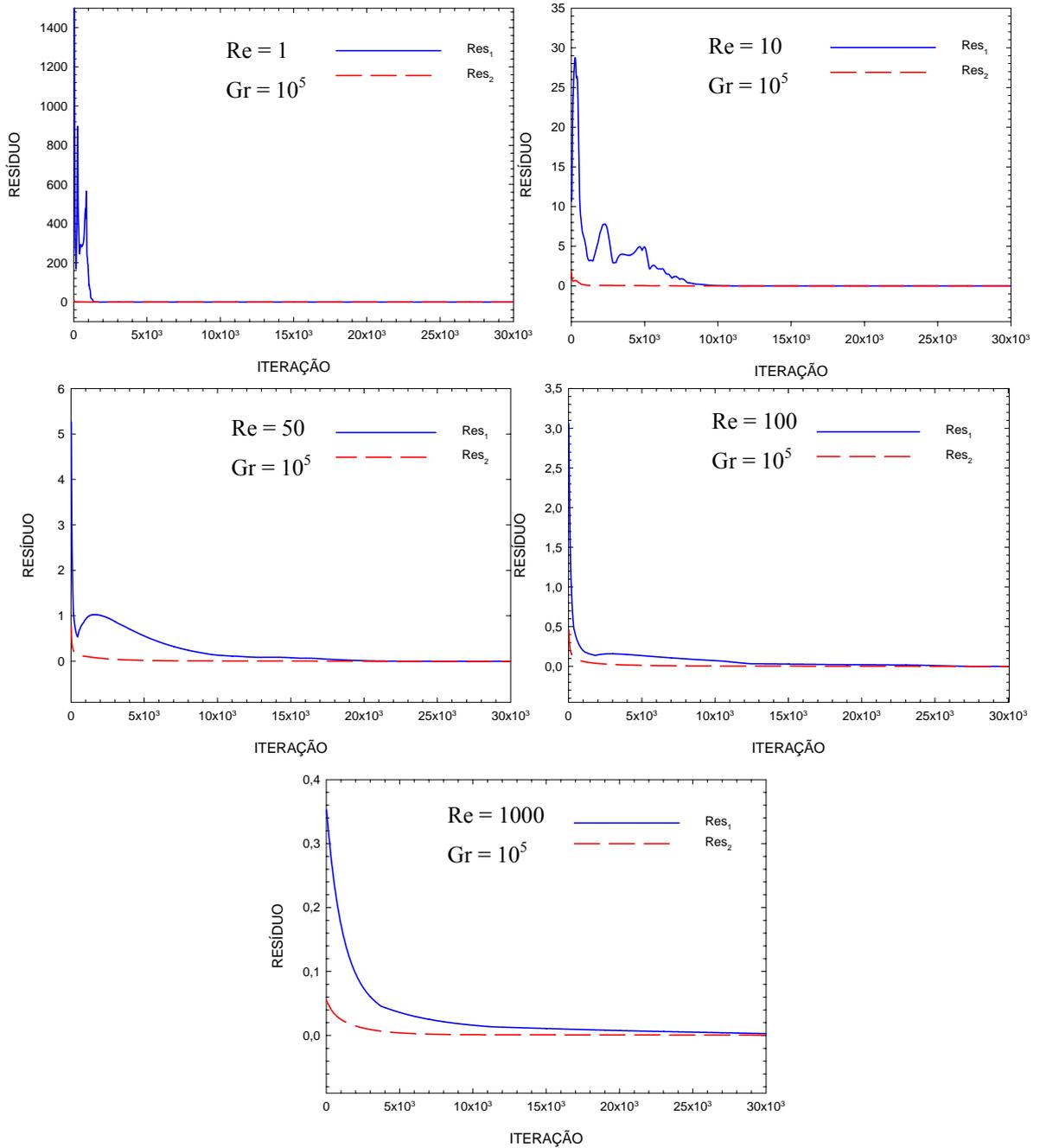
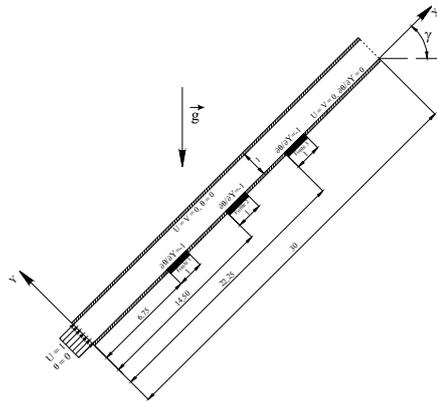


Figura G.2 – Resíduos Res_1 e Res_2 no tempo para canais retangulares com 3 fontes de calor.

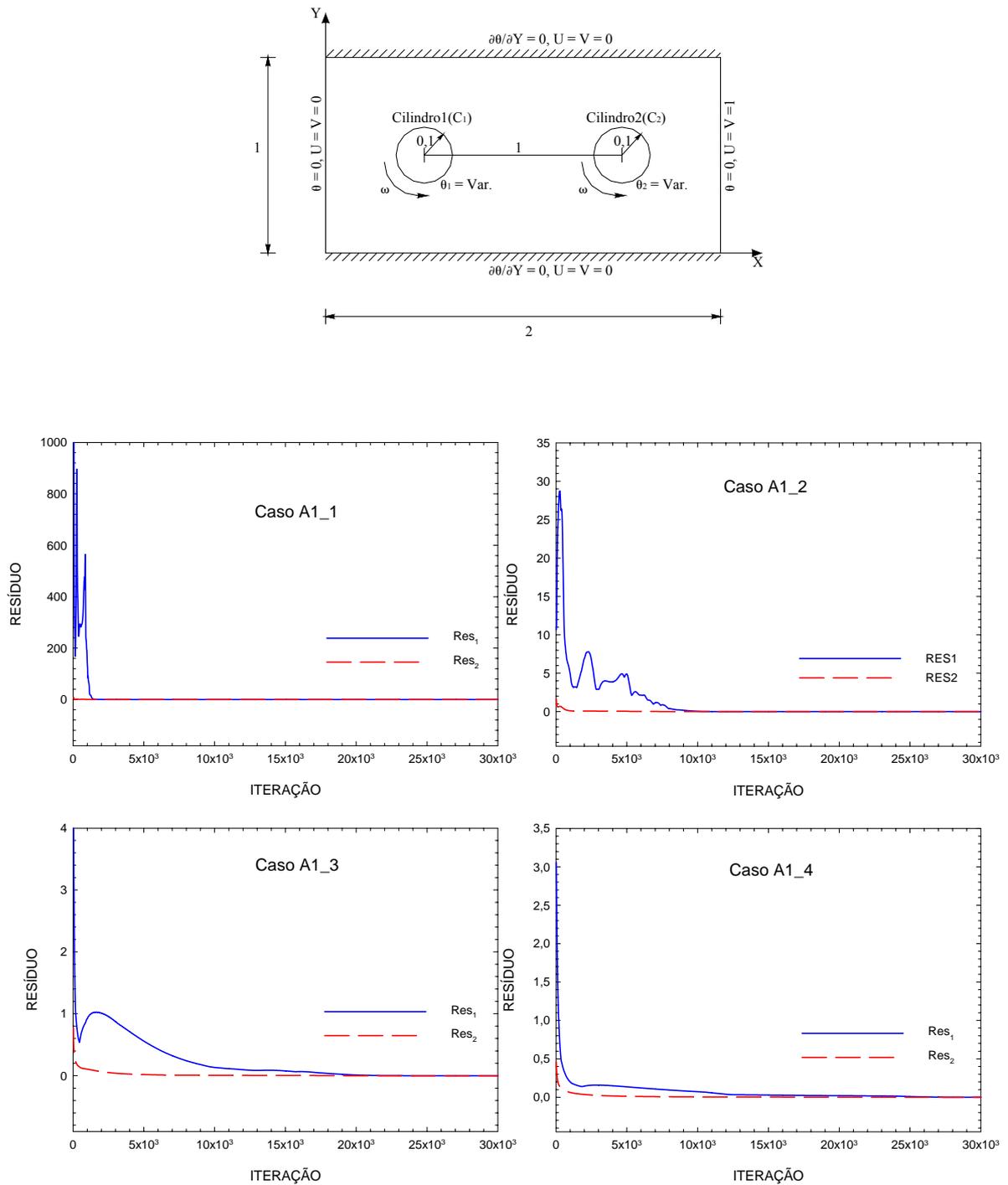


Figura G.3 – Resíduos Res₁ e Res₂ no tempo para cavidades com dois cilindros internos rotativos.

Apêndice H

ESTUDO DA CONVERGÊNCIA NO TEMPO

H.1 – INTRODUÇÃO

Este apêndice mostra o estudo da independência do incremento de tempo com relação ao número de Nusselt. Vários casos foram considerados. São eles:

Caso	Gr	Re	γ
Cavidade Quadrada	2×10^4	-	0°
Canal com 3 Fontes Discretas de Calor	10^5	100, 1000	0°
Canal com Curva de 180°	$1,2 \times 10^5$	50, 100, 1000	0°
Canal com Degrau	$6 \times 10^4, 1,2 \times 10^5$	20	0°

As figuras a seguir mostram a variação do número de Nusselt ao longo do tempo, sendo que o incremento de tempo $\Delta\tau$ é variado.

Todos os casos com 3 fontes discretas de calor e os casos com curva de 180° para $Re = 50$, figuras H.2, H.3, H.4 e H.6, apresentam praticamente os mesmos resultados para todos os $\Delta\tau$, sendo que aqueles para $Re = 100$ e $\Delta\tau \leq 0,0010$ mostram-se já convergidos.

O caso de cavidade quadrada, figura H.1, apresenta convergência em todo instante de tempo para valores $\Delta\tau \leq 0,0010$.

Já para o caso com degrau na entrada, figura H.7, apesar dos valores do número de Nusselt oscilarem em cada instante de tempo, suas médias parecem ser próximas.

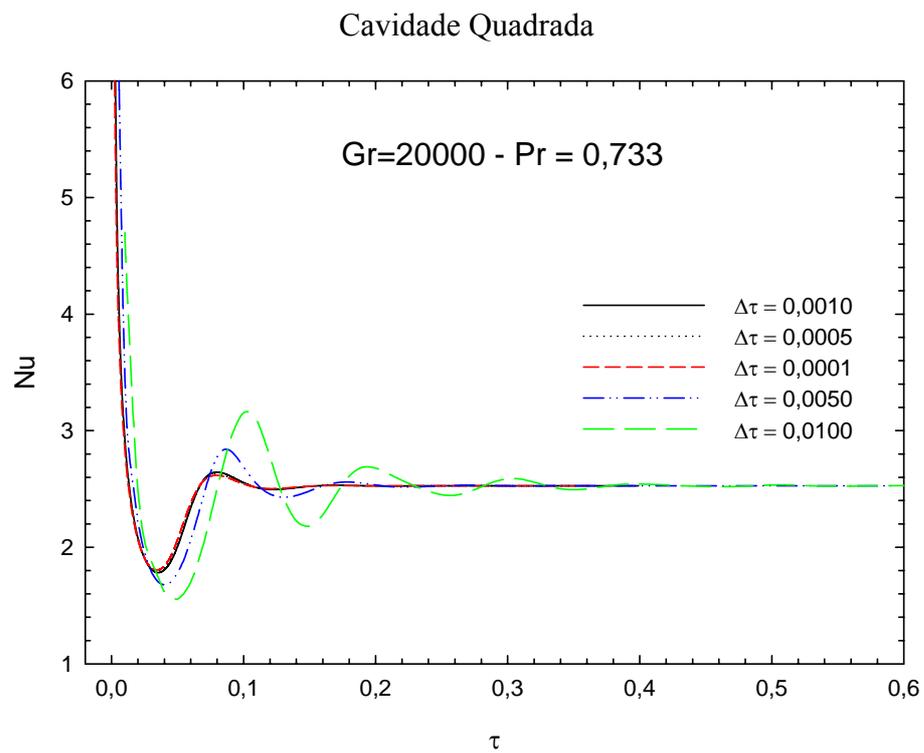
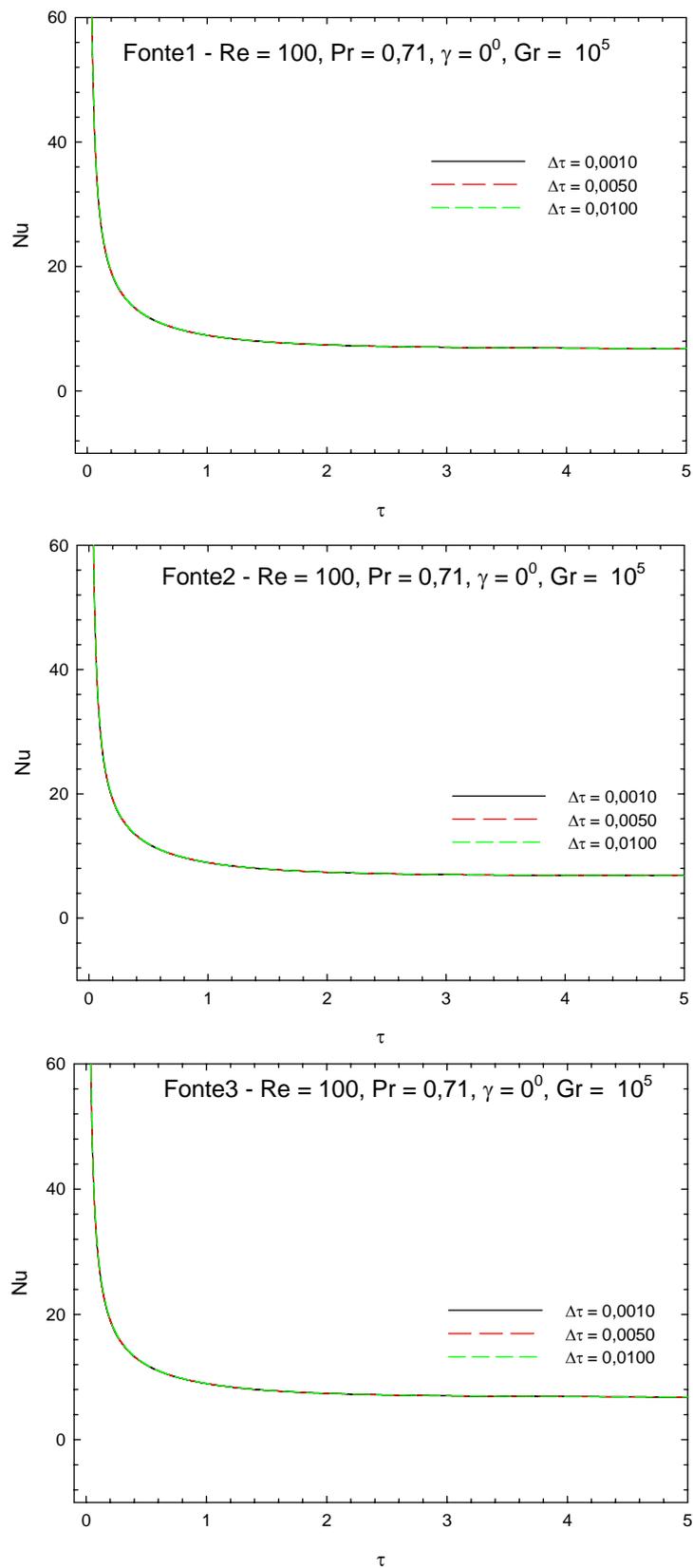
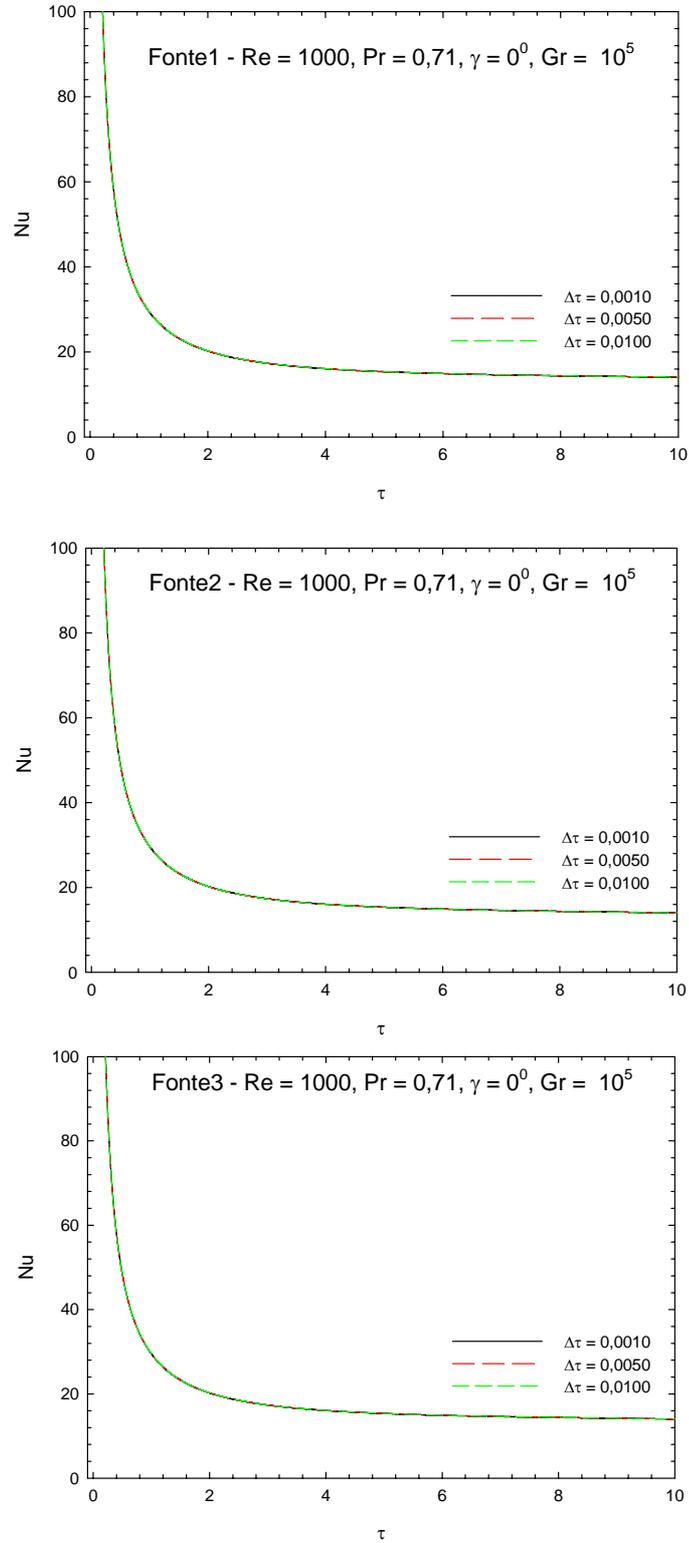


Figura H.1 – Convergência no tempo para cavidade quadrada, Gr = 20000.

Canais com 3 Fontes Discretas de Calor

Figura H.2 – Convergência no tempo para canais com 3 fontes, $Re = 100$.

Canais com 3 Fontes Discretas de Calor

Figura H.3 – Convergência no tempo para canais com 3 fontes, $Re = 1000$.

Canal com Curva de 180°

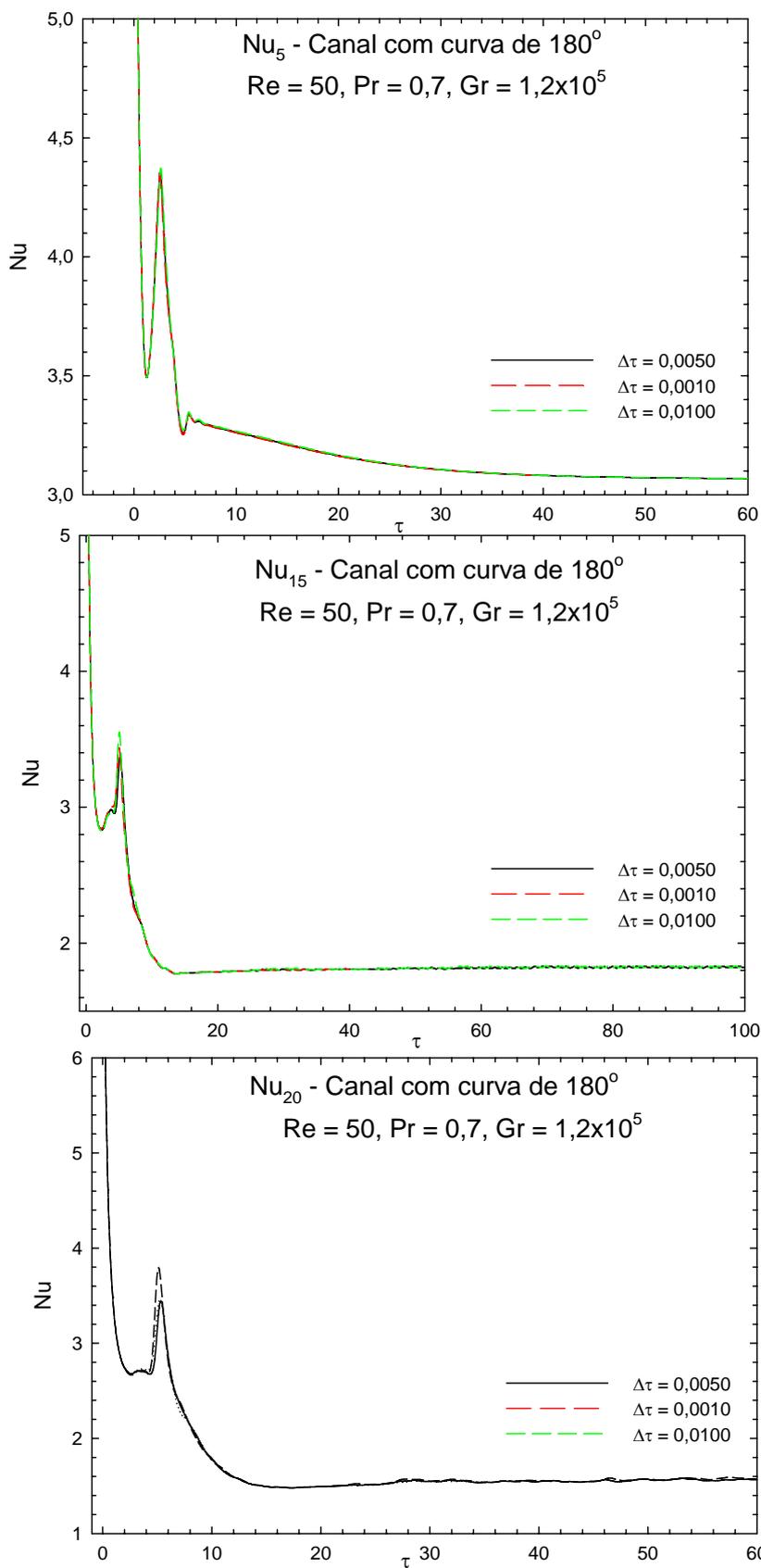


Figura H.4 – Convergência no tempo para canais com curvas de 180° $Re = 50$.

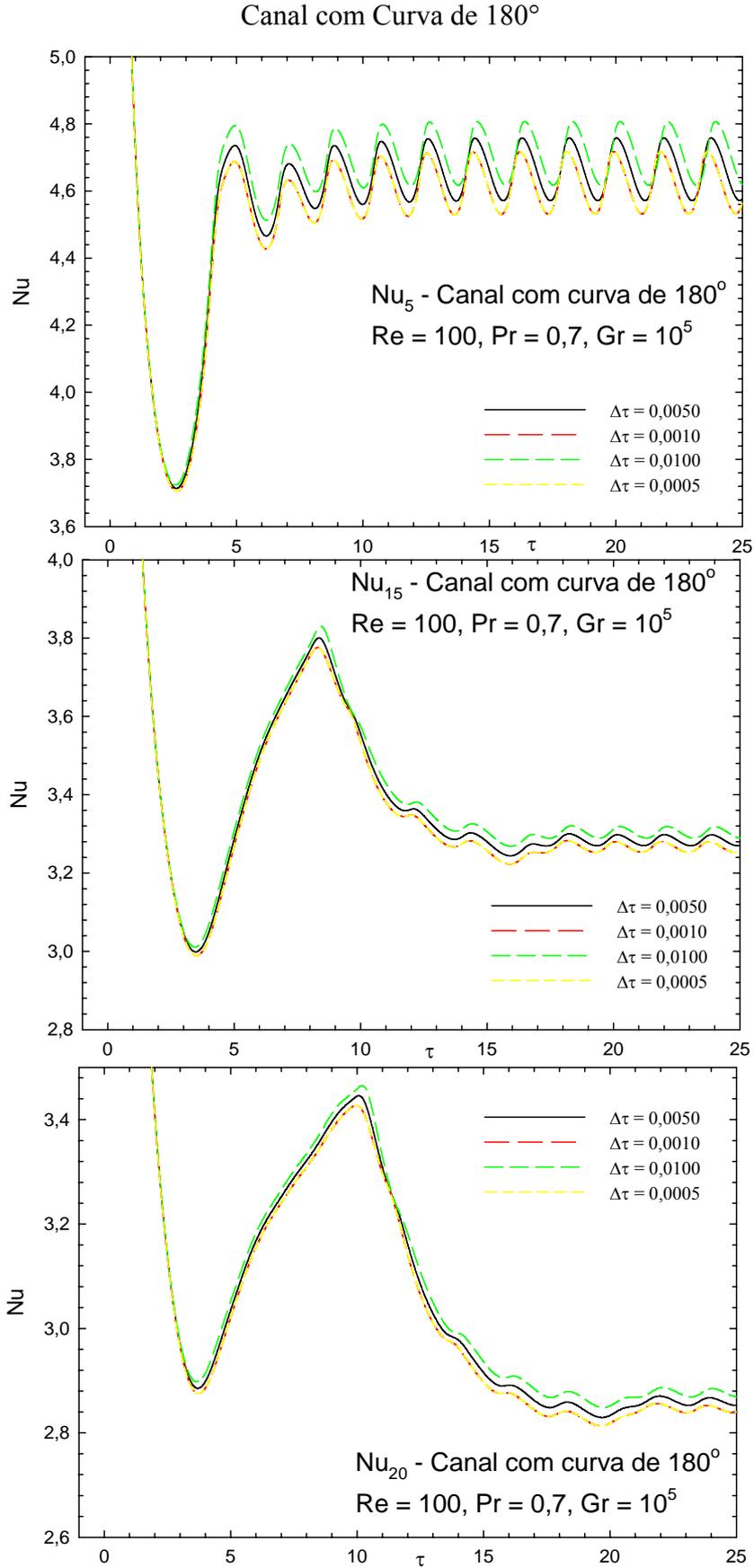


Figura H.5 – Convergência no tempo para canais com curvas de 180° $Re = 100$.

Canal com Curva de 180°

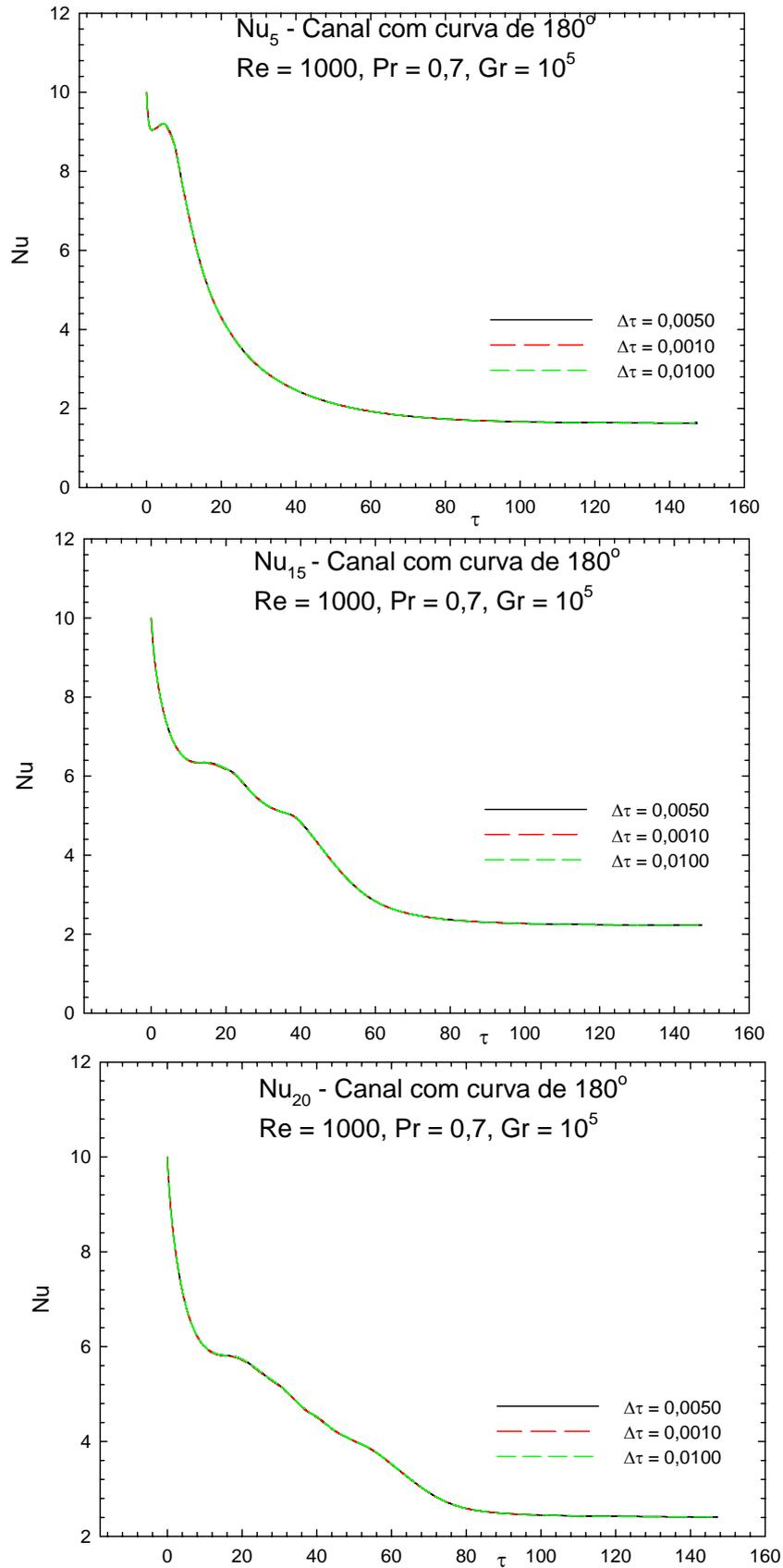


Figura H.6 – Convergência no tempo para canais com curvas de 180° $Re = 1000$.

Canal com Degrau

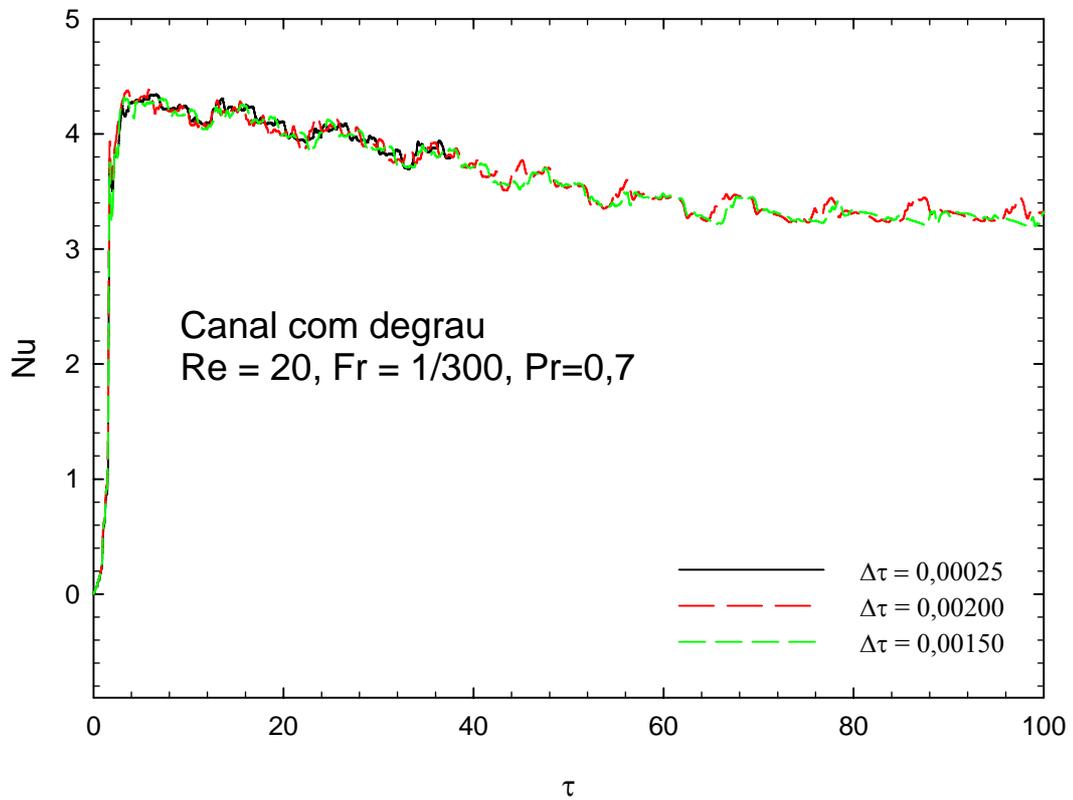
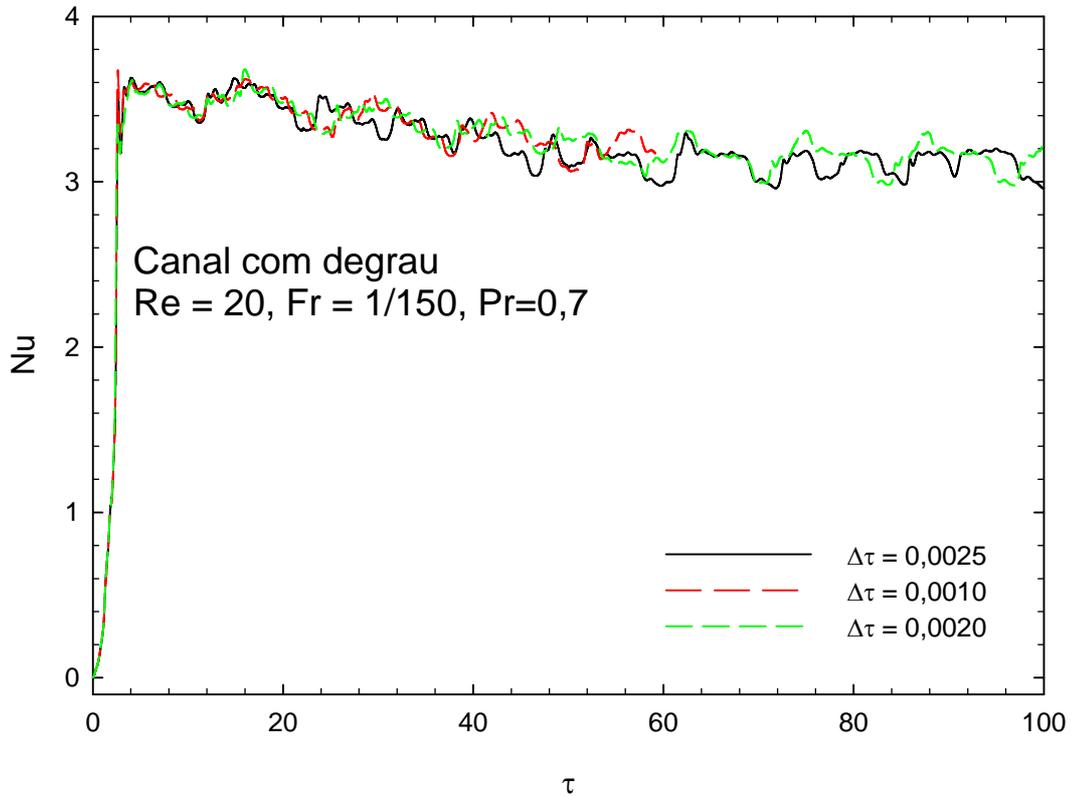


Figura H.7 – Convergência no tempo para canais com degrau.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABU-MULAWEH, H. I., CHEN T. S., ARMALY, B. F. (2002)**, “Turbulent Mixed Convection Flow Over a Backward-Facing Step – The Effect of the step Heights”, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 23, pp. 758-765.
- ANDERSSEN, R. S., MITCHELL, A. R. (1979)**, “The Petrov-Galerkin Method”, *Math. Methods Appl. Sci.*, Vol. 1, pp. 3-15.
- ARGYRIS, J. H. e KELSEY, S. (1960)**, “Energy Theorems and Structural Analysis”, *London: Butterworth Scientific Publications*.
- ARMALY, B. F., DURST, F., PEREIRA, J. C. F., SCHONUNG, B. (1983)**, “Experimental and Theoretical Investigation of Backward-Facing Step Flow”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 127, pp. 473-496.
- BABUSKA, I., AZIZ, A. K. (1972)**, “Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method”, pp. 5-359 in *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, (A. K. Aziz, editor), New York: Academic Press.
- BABUSKA, I., SZYMCZAK, W. G. (1982)**, “An Error Analysis for the Finite Element Method Applied to Convection Diffusion Problems”, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 31, pp. 19-42.
- BAE, J.H., HYUN, J.M. (2003)**, “Time-Dependent Buoyant Convection in an Enclosure With Discrete Heat Sources”, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 43, pp. 3-11.

- BARRET, J. W., MORTON, K. W. (1980)**, “Optimal Finite Element Solutions to Diffusion-Convection Problems in One Dimension”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 14, pp. 1457-1474.
- BEITELMAL, A.H., SAAD, M. A., PATEL, C. D. (2000)**, “The Effect of Inclination on the Heat Transfer Between a Flat Surface and an Impinging Two-Dimensional Air Jet”, *International Journal of Heat Fluid Flow*, Vol. 21, pp. 156-163.
- BERCOVIER, M., ENGELMAN, M. (1979)**, “A Finite Element for the Numerical Solution of Viscous Incompressible Flow”, *J. Comput. Phys.*, Vol. 30, pp. 181-201.
- BESSAIH, R., KADJA, M. (2000)**, “Turbulent Natural Convection Cooling of Electronic Components Mounted on a Vertical Channel”, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 20, pp. 141-154.
- BREZZI, F. (1974)**, “On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle Point Problems Arising from Lagrangian Multipliers”, *Rev. Fr. Autom. Inf. Rech. Oper. Numer. Avel*, R 2, pp. 129-151.
- BRITO, R. F. (2005)**, “Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos Não Isotérmicos Utilizando o Método de Elementos Finitos”, UNIFEI, Itajubá, Brasil.
- BROOKS, A. N., HUGHES, T. J. R. (1982)**, “Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 32 (1-3), pp. 199-259.
- CAREY, G. F., KRISHMAN (1982)**, “Penalty Approximation of Stokes Flow”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* Vol. 35, pp. 169-206.
- CAREY, G. F., KRISHMAN (1984)**, “Penalty Finite Element Method for Navier-Stokes Equations”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 42, pp. 183-224.

- CAREY, G. F., ODEN, J. T. (1983)**, “*Finite Elements: A Second Course*”, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.
- CHOI C.Y., ORTEGA A. (1993)**, “Mixed Convection in an Inclined Channel With a Discrete Heat Source”, *International Journal of Heat Fluid Flow*, Vol. 36, pp. 3119-3134.
- CHRISTIE, I., GRIFFITHS, D. R., MITCHELL, A. R., ZIENKIEWICZ, O. C. (1976)**, “Finite Element Methods for Second Order Differential Equation with Significant First Derivatives”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 10, pp. 1389-1396.
- CHRISTIE, I., MITCHELL, A. R. (1978)**, “Upwinding of High Order Galerkin Methods in Conduction-Convection Problems”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 12, pp 1764-1771.
- CHUNG, Y.M., LUO, K.H., SANDHAM, N.D. (2002)**, “Numerical Study of Momentum and Heat Transfer in Unsteady Impinging Jets”, *International Journal of Heat Fluid Flow*, Vol. 23, 592-600.
- CHUNG, Y.M., LUO, K.H., SANDHAM, N.D., WILLIAMS, J.J.R (2001a)**, “*Direct Numerical Simulation of an Impinging Jet.*” In: Lindborg, E., Johansson, A., Eaton, J. Humphrey, J. Kasagi, N., Leschziner, M., Sommerfeld, M. (Eds.), *Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Vol. 2.
- CHUNG, Y.M., TUCKER, P. G., ROYCHOWDHURY, D. G. (2003)**, “Unsteady Laminar Flow and Convective Heat Transfer in a Sharp 180° Bend”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 24, pp. 67-76.
- CHYU, M.K. (1991)**, “Regional Heat Transfer in Two-Pass and Three-Pass Passages With 180° Sharp Turn”, ASME: *Journal of Heat Transfer*, Vol. 113, pp. 63-70 Clough, R. W., 1960, "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis", *J. Struc. Div. ASCE, Proc. Conf. Electronic Comput.*, 2nd, pp. 345-378.

- COMINI, G., MANZAM M., CORTELLA G. (1997)**, “Open Boundary Conditions for the Streamfunction – Vorticity Formulation of Unsteady Laminar Convection”, *Numerical Heat Transfer*, Part B, Vol. 31, pp. 217-234.
- COOK, R. D. (1974)**, “Concepts and Applications of Finite Element Analysis”. New York: John Wiley and Sons Ltd.
- COURANT, R. D. (1943)**, “Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 49, pp. 1-43.
- DONEA, J., HUERTA, A. (2003)**, “*Finite Element Methods for Flow Problems*”, Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
- FELIPPA, C. A. (2001)**, “A Historical Outline of Matrix Structural Analysis: a Play in Three Acts”, *Comput. Struct.*, Vol. 79, pp. 1313-1324.
- FIGUEIREDO, J. R., GANZAROLLI, M. M., ALMEIDA, P.I.F. (1986)**, “Convecção Natural em Cavidades Retangulares - Solução Numérica”, In: II Congresso Latino-Americano de Transferência de Calor e Matéria, São Paulo, pp. 62-73.
- FINLAYSON, B. A. (1972)**, “*The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*”, New York: Academic Press.
- FU, W.S., CHENG, C.S. SHIEH, W. J. (1994)**, “Enhancement of Natural Convection Heat Transfer of an Enclosure by a Rotating Circular Cylinder”, *International Journal of Heat Fluid Flow*, Vol. 37, No. 13, pp. 1885-1897.
- GALEÃO, A. C., CARMO, E. G. D. (1988)**, “A Consistent Approximate Upwind Petrov-Galerkin Method for Convection Dominated Problems”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 68(1), pp. 83-95.
- GALERKIN, B. G. (1915)**, “Series Ocurring in Some Problems of Elastic Stability of Rods and Plates”, *Eng. Bull.*, Vol. 19, pp. 897-908.

- GARTLING, D. K. (1990)**, “A Test Problem for Outflow Boundary Conditions – Flow over a Backward-Facing Step”, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 11, pp. 953-967.
- GHADDAR, N.K., KARCZAK, K. Z., MIKIC, B.B., PATERA, A. T. (1986)**, “Numerical Investigation Flow in Grooved Channels.” Part 1: Stability and Self-Sustained Oscillations”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 163, pp. 99-127.
- GIOVANNINI A. e BORTOLUS M. V.(1997)**, “Transfert de Chaleur au Voisinage du Point de Recollement en Aval d’une Marche Descendante”, *Rev. Gén. Therm.*, Vol. 37, pp. 89-102.
- GREENBERG, M. D. (1978)**, “*Foundations of Applied Mathematics*”, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall.
- GRIFFITHS, D. F., LORENZ, J. (1978)**, “An Analysis of the Petrov-Galerkin Finite Element Method”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol 14, pp. 39-64.
- HEINRICH, J. C. (1980)**, “On Quadratic Elements in Finite Element Solutions of Steady-State Convection Diffusion Equation”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 15, pp. 1041-1052.
- HEINRICH, J. C., ZIENKIEWICZ, O.C. (1979)**, “The Finite Element Method and "Upwinding" Techniques in the Numerical Solution of Convection Dominated Flow Problems”, in T. J. R.
- HEINRICH, J. C., PEPPER, D W. (1999)**, “*Intermediate Finite Element Method*”, Ed. Taylor & Francis, USA.
- HEINRICH, J. C., HUYAKORN, P. S., ZIENKIEWICS, O. C., MITCHELL, A. R. (1977)**, “An "Upwind" Finite Element Scheme for Two-Dimensional Convective Transport Equation”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 11, 131-143.

- HEINRICH, J. C., IDELSON, S. R. OÑATE, E., VIONNET, C. A. (1996)**, “Boundary Conditions for Finite Element Simulations of Convective Flows with Artificial Boundaries”, *Int. J. Num. Mech. Engr.*, Vol. 39, pp. 1053-1071.
- HEINRICH, J. C., VIONNET, C. A. (1995a)**, “On Boundary Conditions for Unbounded Flows”, *Comm. Numer. Methods Eng.*, Vol. 11, pp. 179-185.
- HEINRICH, J. C., VIONNET, C. A. (1995b)**, “The Penalty Method for the Navier-Stokes Equations”, *Arch. of Comput. Methods Eng.*, Vol. 2, pp. 51-65.
- HEINRICH, J. C., ZIENKIEWICZ, O. C. (1979a)**, “*The Finite Element Method and 'Upwinding' Techniques in the Numerical Solution of Convection Dominated Flow Problems*”, pp. 105-126 in *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, (T.J. R. Hughes, editor). AMD-Vol. 34, New York: ASME.
- HEINRICH, J. C., ZIENKIEWICZ, O. C. (1979b)**, “*Solution of Non-Linear Second Order Equations with Significant First Derivatives by a Petrov-Galerkin Method*”, *Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems* (P. Hemker and J. J. Miller, editors). London: Academic Press.
- HEINRICH, J. C., YU, C.C. (1988)**, “Finite Element Simulations of Buoyancy Driven Flows with Emphasis on Natural Convection in a Horizontal Circular Cylinder”, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 69, pp. 1-27.
- HIROTA, M., FUJITA, H., SYUHADA, A., ARAKI, S., YOSHIDA, T., TANAKA, T. (1999)**, “Heat / Mass Transfer Characteristics in Two-Pass Smooth Channels With Sharp 180° Turn”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 3757-3770.
- HRENKOFF, A. (1941)**, “Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method”, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 8, pp. 169-175.
- HUGHES, T. J. R. (1987)**, “*The Finite Element Method*”, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

- HUGHES, T. J. R., BROOKS, A. (1979)**, “A Multidimensional Upwind Scheme with no Crosswind Diffusion”, in T. J. R. Hughes, ed., *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, AMD - Vol. 34, *Presented at the Winter Annual Meeting of the ASME, Ame. Soc. Mech. Engrs.* (ASME), New York, pp. 19-35.
- HUGHES, T. J. R., BROOKS, A. (1982)**, “A Theoretical Frame Work for Petrov-Galerkin Methods with Discontinuous Weighting Functions: Application to the Streamline Upwind Procedure”, pp. 47-65 in *Finite Elements in Fluids*, Vol. 4 (R. Gallagher, et al. editors). Wiley & Sons.
- HUGHES, T. J. R. e MALLETT, M. (1986a)**, “A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics. III. The Generalized Streamline Operator for Multidimensional Advective-Diffusive Systems”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 58, pp. 305-328.
- HUGHES, T. J. R. e MALLETT, M. (1986b)**, “A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics. IV. A Discontinuity-Capturing Operator for Multidimensional Advective-Diffusive Systems”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 58(3), pp. 329-336.
- HUTEAU, F., LEE T., MATEESCU, D. (2000)**, “Flow Past a 2-D Backward-Facing Step with an Oscillating Wall”, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 14, pp. 691-696.
- IDELSOHN, S., STORTI, M., NIGRO, N. (1995)**, “Stability Analysis of Mixed Finite Element Formulations with Special Mention of Equal-Order Interpolate”, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 20, pp. 1003-1022.
- IRONS, B. M. (1966)**, “Engineering Applications of Numerical Integration in Stiffness Methods”, *AIAA J.*, Vol. 4, pp. 2035-2037.
- ISAACSON, E., KELLER, H. B. (1966)**, “*Analysis of Numerical Methods*”, New York: John Wiley and Sons.

- KELLY, D. W., NAKAZAWA, S. ZIENKIWICZ, O.C., HEINRICH, J. C. (1980)**, “A Note of Upwinding and Anisotropic Balancing Dissipation in Finite Element Approximation to Convective Diffusion Problems”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 15(9), 1705-1711.
- KENNEDY, K.J. e ZEBIB, A. (1983)**, “Combined Free and Forced Convection Between Horizontal Parallel Planes: Some Case Studies”, *International Journal of Heat Fluid Flow*, Vol. 26, pp. 471-474.
- KIM, J., MOIN, P. (1985)**, “Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 59, pp. 308-323.
- KIM, S.Y., KANG, B.H., HYUN, J.M. (1997)**, “Forced Convection Heat Transfer From Two Heated Blocks in Pulsating Channel Flow”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, pp. 625-634.
- KUROKAWA, F. Y., ZAPAROLI, E. L., ANDRADE, C. R. (2005)**, “Conjugate Natural Convection Applied to the Electronic Component Cooling”, *Proceedings of the 18th International Congress of Mechanical Engineering, Ouro Preto, MG*, pp. 1-8.
- LADYZHENSKAYA, O. A. (1969)**, “*The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows*”, 2nd. ed. New York: Pergamon Press.
- LEE, J., KANG, S. H., SON, Y. S. (1999)**, “Experimental Study of Double-Diffusive Convection in a Rotating Annulus with Lateral Heating”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 821-832.
- LEE, T., MATEESCU, D. (1998)**, “Experimental and Numerical Investigation of 2-D Backward-Facing Step Flow”, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 12, pp. 703-716.
- LIN, D. e YAN, W. M. (2000)**, “Experimental Study of Unsteady Thermal Convection in Heated Rotating Inclined Cylinders”, *International Journal of Heat Fluid Flow*, Vol. 43, pp. 3359-3370.

- LIN, J. T., ARMALY B. F., CHEN T. S. (1991)**, “Mixed Convection Heat Transfer in Inclined Backward-Facing Step Flows”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 34, pp. 1568-1571.
- LIU, T.M., CHEN, C.C, TZENG, Y.Y., TSAI, T.W. (2000)**, “Non- Intrusive Measurements of Near-Wall Fluid Flow and Surface Heat Transfer in a Serpentine Passage”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 3233-3244.
- MADHAVAN, P.N., SASTRI, V.M.K. (2000)**, “Conjugate Natural Convection Cooling of Protruding Heat Sources Mounted on a Substrate Placed Inside an Enclosure: a Parametric Study”, *Comput. Methods Appl. Mech Engrg.*, Vol. 188, pp. 187-202.
- MAHANEY, H. V., INCROPERA F. P., RAMADHYANI, S. (1990)**, “Comparison of Predicted and Measured Mixed Convection Heat Transfer from an Array of Discrete Sources in a Horizontal Rectangular Channel”, *International Journal of Heat Fluid Flow*, Vol. 33, pp. 1233-1245.
- MALKUS, D. S., HUGHES, T. J. R. (1978)**, “Mixed Finite Element Methods - Reduced and Selective Integration Techniques: A Unification of Concepts”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 15, pp. 63-81.
- METZGER, D.E., SAHM, M.K. (1986)**, “Heat Transfer Around Sharp 180° Turns in Smooth Rectangular Channels”, ASME: *Journal of Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 500-506.
- MITCHELL, A. R., WAIT, R. (1977)**, “*The Finite Element Method in Partial Differential Equations*”, New York: John Wiley and Sons.
- MOCHIZUKI, S., MURATA, A., SHIBATA, R., YANG, W. J. (1999)**, “Detailed Measurements of Local Heat Transfer Coefficients in Turbulent Flow Through Smooth and Rib-Roughened Serpentine Passages With a 180° Sharp Bend”, *International Journal of Heat Fluid Flow*, Vol. 42, pp. 1925-1934.

- NGUYEN, H. D., PAIK, S., DOUGLASS, R. W. (1996)**, “Unsteady Mixed Convection About a Rotating Circular Cylinder With Small Fluctuations in the Free-Stream Velocity”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39, pp. 511-525.
- ODEN, J. T. (1982)**, “RIP Methods for Stokesian Flows”, pp. 305-318 in *Finite Elements in Fluids*, Vol. 4 (R.H. Gallagher, D. H. Norrie, J. T. Oden, and O. C. Zienkiewicz, editors). New York: Wiley.
- ODEN, J. T., KIKUCHI, N., SONG, Y. J. (1982)**, “Penalty-Finite Element Methods for the Analysis of Stokesian Flows”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 31, pp. 183-224.
- O'NEIL, P. V. (1983)**, “*Advanced Engineering Mathematics*”, Belmont, Calif.: Wadsworth Publishing.
- OZOE, H., YAMAMOTO, K., SAYAMA, H., CHURCHILL, S. W. (1974)**, “Natural Circulation in an Inclined Rectangular Channel Heated on One Side and Cooled on the Opposing Side”, *International Journal of Heat Fluid Flow*, Vol. 17, pp. 1209-1217.
- PAPANICOLAU E., JALURIA Y. (1990)**, “Conjugated Mixed Convection From Thermal Sources in a Rectangular Cavity”, *Proc. ASME Winter Annual Meeting*, Vol. HTD-57, pp. 29-40.
- PAPANICOLAU E., JALURIA Y. (1991)**, “Forced and Mixed Convective Cooling of Multiple Electronic Components in an Enclosure”, *Proc. ASME/A.I.Ch.E. natl Conf.*, Vol. HTD-171, pp. 20-37.
- RAO, C. G., BALAJI, C., VENKATESHAN, S. P. (2002)**, “Effect of Surface Radiation on Conjugate Mixed Convection in a Vertical Channel with a Discrete Heat Source in Each Wall”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 3331-3347.
- RAYLEIGH, J. W. S. (1877)**, “*Theory of Sound*”, 1st rev. ed., New York: Dover.

- RITZ, W. (1909)**, “Über eine Neue Methode zur Lösung Gewisses Variations-Probleme der Mathematischen Physik.”, *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 135, pp 1-61.
- ROACHE, P. J. (1972)**, “*Computational Fluid Dynamics.*” Albuquerque, N. M.: Hermosa Publishers.
- SAMPAIO, P. A. B. (1990)**, “A Petrov-Galerkin / Modified Operator Formulation for Convection-Diffusion Problems”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, pp. 331-347.
- SEGERLIND, L. J., (1984)**, “*Applied Finite Element Analysis*”, John Wiley & Sons Inc., 2^a ed., New York, 448 p.
- SOHN, J. (1988)**, “Evaluation of FIDAP on Some Classical Laminar and Turbulent Benchmarks”, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, pp. 1469-1490.
- SOONG, C. Y., TZENG P. Y., HSIEH C. D. (2001)**, “Numerical Study of Bottom-Wall Temperature Modulation Effects on Thermal Instability and Oscillatory Cellular Convection in Rectangular Enclosure”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 44, pp. 3855-3868.
- SPARROW, E. M., EICHHORN, R., GREGG J.L. (1959)**, “Combined Forced and Free Convection in a Boundary Layer”, *Phys. Fluids*, Vol. 2, pp. 319-329.
- STRANG, G, FIX, G. J. (1973)**, “*An Analysis of the Finite Element Method*”, Prentice Hall Series in Automatic Computation, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- TABARROK, B., LIN, R. C. (1977)**, “Finite Element Analysis of Free Convection Flow”, *International Journal of Heat Fluid Flow*, Vol. 20, pp. 945-952.
- TAIG, I. C. (1961)**, “*Structural Analysis by the Matrix Displacement Method*”, English Electric Aviation, Report S017.

- TURNER, M., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. H., TOPP, L. (1956)**, “Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures”, *J. Aero. Sci.* , Vol. 23, pp. 805-823.
- VARGA, R. S. (1962)**, “*Matrix Iterative Analysis*”, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.
- WHITE, F. M. (1974)**, “*Viscous Fluid Flow*”, New York: McGraw-Hill.
- WILKES, J. O., CHURCHILL, S. W. (1966)**, “The Finite - Difference in Rectangular Enclosures”, *AIChE Journal*, Vol. 12, pp. 161-166.
- WONG, H. H., RAITHBY G. D. (1979)**, “Improved Finite - Difference Methods Based on a Critical Evaluation of the Approximation Errors”, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 2, pp. 139-163.
- WRIGHT-PATTERSON AIR FORCE BASE (1966)**, “*Proc. Matrix Meth. Struc. Mech. Conf.* ”, AFFDL-TR-66-80.
- YOO, J. (1998)**, “Mixed Convection of Air Between Two Horizontal Concentric Cylinders with a Cooled Rotating Outer Cylinder”, *International Journal of Heat Fluid Flow*, Vol. 41, pp. 293-302.
- YU, C-C, HEINRICH J. C. (1986)**, “Petrov-Galerkin Methods for the Time-Dependent Convective Transport Equation”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 23, pp. 883-901.
- YU, E., JOSHI, Y. (2002)**, “Heat Transfer Enhancement from Enclosed Discrete Components Using Pin-Fin Heat Sinks”, *International Journal of Heat Fluid Flow*, Vol. 45, pp. 4957-4966.
- ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. (1989)**, “*The Finite Element Method*”, Vol. 1, Basic Formulation and Linear Problems, London: McGraw-Hill.
- ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. (1991)**, “*The Finite Element Method*”, Vol. 2, Solid and Fluid Mechanics, London: McGraw-Hill.



Ministério da Educação
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
Criada pela Lei nº 10435, de 24 de abril de 2002

PRONUNCIAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA DE TESE DE DOUTORADO

A Comissão Examinadora nomeada pela Portaria nº 152 de 07 de março de 2007, cumpridas todas as etapas da Sessão de Defesa de Tese previstas no Regulamento do Curso de Doutorado em Engenharia Mecânica, se posiciona favoravelmente à **“Aprovação”** da Tese de Doutorado intitulada: **“Análise da Transferência de Calor por Convecção Mista Utilizando o Método de Elementos Finitos com a Técnica de Petrov-Galerkin”** e emite instrução para que o Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Itajubá, tome as providências necessárias junto ao DRA (Departamento de Registro Acadêmico) para a expedição do título de **Doutor em Ciências em Engenharia Mecânica**, na **Área de Concentração: Conversão de Energia**, desde que atendidas as demais exigências regimentais, a **Paulo Mohallem Guimarães**.

Itajubá, 09 de março de 2007.

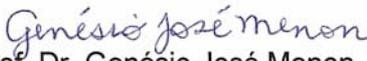

Profª. Drª. Cláudia Regina de Andrade
1º Examinador – ITA

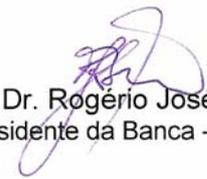

Prof. Dr. Edson Luiz Zapparoli
2º Examinador – ITA


Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho
3º Examinador - UNIFEI


Prof. Dr. Waldir de Oliveira
4º Examinador – UNIFEI


Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira
5º Examinador – UNIFEI


Prof. Dr. Genésio José Menon
6º Examinador – UNIFEI - Orientador


Prof. Dr. Rogério José da Silva
Presidente da Banca - UNIFEI



Ministério da Educação
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
Criada pela Lei nº 10435, de 24 de abril de 2002

FOLHA DE JULGAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA DE TESE DE DOUTORADO

Título da Tese: **“Análise da Transferência de Calor por Convecção Mista Utilizando o Método de Elementos Finitos com a Técnica de Petrov-Galerkin”**

Autor: **Paulo Mohallem Guimarães**

JULGAMENTO

Examinadores	Conceito	Rubrica
1º	A	
2º	A	
3º	A	
4º	A	
5º	A	
6º	A	

Resultado Médio: Conceito: A , ou seja, APROVADO .

Observações: _____

Itajubá, 09 de março de 2007.

Profª. Drª. Cláudia Regina de Andrade
1º Examinador – ITA

Prof. Dr. Edson Luiz Zaparoli
2º Examinador – ITA

Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho
3º Examinador - UNIFEI

Prof. Dr. Waldir de Oliveira
4º Examinador – UNIFEI

Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira
5º Examinador – UNIFEI

Prof. Dr. Genésio José Menon
6º Examinador – UNIFEI - Orientador

Prof. Dr. Rogério José da Silva
Presidente da Banca - UNIFEI