

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**  
**EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA**

**FENÔMENOS ELETRO-MAGNETO-ÓPTICOS**  
**EM MEIOS MATERIAIS**

**GUILHERME PEREIRA GOULART**

Itajubá, dezembro de 2007

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**  
**EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA**

**FENÔMENOS ELETRO-MAGNETO-ÓPTICOS**  
**EM MEIOS MATERIAIS**

**GUILHERME PEREIRA GOULART**

Dissertação de mestrado submetida ao programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada, da Universidade Federal de Itajubá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.

**ORIENTADOR: PROF. VITORIO A. DE LORENCI, Dr.**

Dezembro de 2007  
Itajubá, MG - Brasil

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –  
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB\_6/1700

G694f

Goulart, Guilherme Pereira

Fenômenos eletro-magneto-ópticos em meios materiais /  
Guilherme Pereira Goulart. -- Itajubá (MG) : [s.n.], 2007.  
62 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Vitorio Alberto de Lorenci.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Birrefringência. 2. Efeito Kerr. 3. Efeito Cotton-Mouton. 4.  
Efeito Jones. 5. Propagação de ondas. I. Lorenci, Vitorio Alberto  
de, orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

CDU 621.37(043)



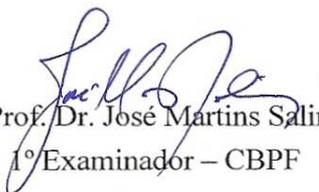
Ministério da Educação  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
Criada pela Lei nº 10.435, de 24 de abril de 2002

## ANEXO I

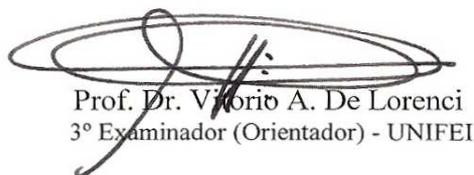
### PRONUNCIAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

A Banca Examinadora, abaixo assinada, nomeada pela Portaria nº 607 de 13 de dezembro de 2007, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Dissertação de Mestrado intitulada: **“Fenômenos Eletro-Magneto-Ópticos em Meios Materiais”**, apresenta pronunciamento no sentido de que o Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada da Universidade Federal de Itajubá solicite ao DRA (Departamento de Registro Acadêmico) a expedição do título de **Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada**, na Área de Concentração **Gravitação e Cosmologia** satisfeitas as demais exigências regimentais, a **Guilherme Pereira Goulart**.

Itajubá, 17 de dezembro de 2007.

  
Prof. Dr. José Martins Salim  
1º Examinador – CBPF

  
Prof. Dr. Renato Klippert Barcellos  
2º Examinador – UNIFEI

  
Prof. Dr. Vitorio A. De Lorenci  
3º Examinador (Orientador) - UNIFEI

“A coisa mais bela que o homem pode experimentar é o mistério. É esta a emoção fundamental que está na raiz de toda a ciência e arte ...

... o mecanismo do descobrimento não é lógico e intelectual, é uma ilusão subtânea, quase um êxtase ...

... a mente avança até o ponto onde pode chegar; mas depois passa para uma dimensão superior, sem saber como lá chegou. Todas as grandes descobertas realizaram esse salto.”

(A. Einstein)

# Dedicatória

*“Nihil fieri non potest nobiscum.”*

*“Nada está além de nosso alcance.”*

*Aos meus pais,  
Luiz Pereira Goulart e Maria Nadir  
Ribeiro Goulart.*

*E, à minha namorada  
e companheira, Priscila Cristiane  
de Souza.*

# Agradecimentos

Ao orientador, professor e amigo Vitorio A. De Lorenci, aquele que me ensinou muito mais que apenas um método, mas o verdadeiro sentimento de participar do processo da descoberta científica. Pela liderança, perseverança e jovialidade contagiante com que descortina os horizontes do desconhecido novo mundo;

Aos meus familiares, cuja expectativa de minha vitória sempre me valeu de grande incentivo;

Aos meus professores e amigos: Renato Klippert Barcellos, Edison de Souza Moreira Jr, Vladimir Demyanovich Pershin, Fabrício Augusto Barone Rangel, Newton de Figueiredo Filho, José Augusto Baeta Segundo por todos os agradáveis momentos que dividimos no decorrer destes anos;

Aos companheiros de classe: Adhimar Flávio Oliveira, Ana Paula Paiva Pereira, Baltazar Jonas Ribeiro Morais, Cristiane de Oliveira Costa, Dante Donizeti Pereira, Diogo Amaral de Magalhães, Elaine Aparecida Carvalho, Elcio da Silveira, Grasielle Batista dos Santos, Keeyne Rodrigues Borges, Leandro Aparecido Nogueira de Paula, Márcia Regina Guimarães Guedes, Miralvo Bispo de Menezes, Míriam Aparecida Rosa, Sebastião Alves de Souza, Sinval Ferreira Coelho e Vanessa Aparecida Ferreira pelo companheirismo e amizade dedicados ao longo destes anos que convivemos sob o teto da UNIFEI;

Às secretárias Cristina, Margarete, Maria Auta, Rita e Sônia por todo o carinho, compreensão e apoio junto à PRPPG;

À UNIFEI e à FAPEMIG pelo apoio financeiro concedido neste período.

# Resumo

Trabalhando com eletrodinâmica na aproximação da ótica geométrica, a propagação de ondas eletromagnéticas dentro de um meio material é examinada. As equações de campo gerais são apresentadas em termos das intensidades dos campos  $(E^\mu, B^\mu)$  e das quantidades  $\varepsilon^\mu{}_\nu$  e  $\mu^\mu{}_\nu$  que caracterizam as propriedades do meio onde a propagação acontece. Usando o método de Hadamard-Papapetrou, o conjunto de equações que governam a propagação de ondas é encontrado. Resolvendo a equação de Fresnel, as relações de dispersão são obtidas para alguns casos particulares onde o meio reage não linearmente à presença de campos externos. Como uma aplicação do formalismo, o fenômeno da birrefringência artificial associado à propagação de ondas eletromagnéticas em meios dielétricos em repouso, com os coeficientes dielétricos  $\varepsilon^\mu{}_\nu = \varepsilon^\mu{}_\nu(E, B)$  e  $\mu^\mu{}_\nu = \mu^\mu{}_\nu(E, B)$ , é examinado. A análise é restrita a modelos eletrodinâmicos locais, onde efeitos dispersivos são negligenciados. Apenas ondas monocromáticas são consideradas, evitando ambiguidades com respeito à definição da velocidade da onda.

Em primeira ordem de aproximação, o efeito Kerr eletro-óptico, o efeito Cotton-Mouton magneto-óptico e o efeito Jones eletro-magneto-óptico são recuperados (estes efeitos consistem na relação entre os índices de refração das duas ondas limites com a magnitude dos campos externos). Por último, a representação geométrica da trajetória dos raios de luz para alguns casos estudados é apresentada, bem como a estrutura métrica efetiva associada à propagação de ondas, para cada caso considerado.

# Abstract

Working with electrodynamics in the geometrical optics approximation is examined electromagnetic wave propagation inside a material medium. The general field equations are presented in terms of the field strengths  $(E^\mu, B^\mu)$  and the amounts  $\varepsilon^\mu{}_\nu$  and  $\mu^\mu{}_\nu$ , that characterize the properties of the medium where the propagation occurs. By using the Hadamard method the set of equations governing the wave propagation is derived. By solving the Fresnel equation the dispersion relations are obtained for some particular cases where the medium reacts nonlinearly to the presence of external fields. As an application of the formalism the artificial birefringence phenomena associated with the propagation of electromagnetic waves in dielectric media at rest, with the dielectric coefficients  $\varepsilon^\mu{}_\nu = \varepsilon^\mu{}_\nu(E, B)$  and  $\mu^\mu{}_\nu = \mu^\mu{}_\nu(E, B)$ , is examined. The analysis is restricted to local electrodynamical models, where dispersive effects are neglected. Only monochromatic waves are considered, avoiding ambiguities with the definition of the velocity of the wave.

As a first order of approximation the Kerr electro-optic effect, the Cotton-Mouton magneto-optic effect and the Jones electro-magneto-optic effect is recovered (these effects are the relationship between the refraction indexes of the two limiting waves with the magnitude of the external fields). Finally, the geometrical representation of the light paths for some studied cases as well as the effective metric structure associated to the propagation of waves is presented for each considered case.

# Sumário

Dedicatória . . . . .	vi
Agradecimentos . . . . .	vii
Resumo . . . . .	viii
Abstract . . . . .	ix
Sumário . . . . .	x
Notação e convenções . . . . .	1
<b>1 Introdução</b>	<b>4</b>
<b>2 Eletrodinâmica em meios materiais</b>	<b>10</b>
2.1 Campos em meios materiais . . . . .	11
2.2 Permissividade e permeabilidade . . . . .	11
2.3 Meios materiais naturalmente anisotrópicos . . . . .	13
2.4 Velocidade e índice de refração . . . . .	13
2.5 Lei de refração . . . . .	16
2.6 As equações de campo . . . . .	18
2.7 Propagação de ondas . . . . .	21
2.7.1 Ondas de choque . . . . .	21
2.7.2 Método de Hadamard . . . . .	22
2.8 Equação de autovalores . . . . .	22
2.9 Relação de dispersão . . . . .	26
<b>3 Birrefringência</b>	<b>32</b>
3.1 Descrição de casos associados ao fenômeno da birrefringência . . . . .	33
3.1.1 Efeito Kerr [ $\varepsilon = \varepsilon(E)$ e $\mu = \text{constante}$ ] . . . . .	33
3.1.2 Efeito Cotton-Mouton [ $\varepsilon = \text{constante}$ e $\mu = \mu(B)$ ] . . . . .	38

3.1.3	Birrefringência Magneto-Elétrica [ $\varepsilon = \varepsilon(E, B)$ e $\mu = \text{constante}$ ] . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>50</b>
<b>A</b>	<b>Método de Cayley-Hamilton</b>	<b>53</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>57</b>

# Lista de Figuras

- 2.1 Comportamento do raio extraordinário, representado pela linha vermelha, próximo a superfície  $S$  (linha horizontal) de separação entre um meio isotrópico e um meio uniaxial. (A) Local de onde parte o raio extraordinário; (O) Ponto de incidência no meio; (B) Local onde o raio extraordinário emerge do meio. A linha tracejada representa a normal à superfície  $S$  e a linha em azul representa o eixo óptico do meio uniaxial. . . . . 14
- 2.2 Frentes de onda dos raios ordinário e extraordinário propagando-se em um meio uniaxial, ao longo de uma direção que faz um ângulo  $\psi$  com seu eixo óptico. A circunferência representa a frente de onda do raio ordinário e a elipse representa a frente de onda do raio extraordinário. . . . . 15
- 3.1 Frentes de onda dos raios ordinário e extraordinário no efeito Kerr eletro-óptico, para  $\alpha > 0$  (figura à esquerda) e  $\alpha < 0$  (figura à direita). A circunferência representa a frente de onda do raio ordinário e a elipse representa a frente de onda do raio extraordinário. . . . . 36
- 3.2 Frentes de onda dos raios ordinário e extraordinário no efeito Cotton-Mouton magneto-óptico, para  $\beta > 0$  (figura à esquerda) e  $\beta < 0$  (figura à direita). A circunferência representa a frente de onda do raio ordinário e a elipse representa a frente de onda do raio extraordinário. . . . . 40
- 3.3 Frentes de onda dos raios ordinário e extraordinário para o caso de birrefringência magneto-elétrica, com  $|v_e^+| > |v_e^-|$ . A circunferência, indicada pela linha vermelha, representa a frente de onda do raio ordinário e a curva, indicada pela linha azul, representa a frente de onda do raio extraordinário. . . . . 46
- 3.4 Frentes de onda dos raios ordinário e extraordinário no efeito Jones eletro-magneto-óptico, para  $\gamma > 0$  (figura à esquerda) e  $\gamma < 0$  (figura à direita). A circunferência representa a frente de onda do raio ordinário e a elipse representa a frente de onda do raio extraordinário. 48

# Notação e convenções

- A velocidade da luz no vácuo é assumida de forma a apresentar o valor  $c = 1$ , exceto nos casos onde este símbolo aparecer explicitamente indicado;

- *Grandezas tridimensionais*

Os índices tensoriais tridimensionais são representados por letras latinas minúsculas ( $i, j, k, \dots$ ), com estas assumindo os valores 1, 2 e 3. Como exemplos, temos:

1. O vetor posição de uma partícula  $r^i = (x, y, z)$ ,
2. O potencial escalar e o potencial vetor  $\varphi$  e  $A^i$ ,
3. O vetor de onda  $q^i$ ,
4. A intensidade dos vetores campo elétrico e magnético  $E^i$  e  $H^i$  e suas induções  $D^i$  e  $B^i$ ,

- *Grandezas quadridimensionais*

Os índices tensoriais quadridimensionais são representados por letras gregas minúsculas ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ), com estas assumindo os valores 0, 1, 2 e 3. Como exemplos, temos:

1. O 4-vetor posição de uma partícula  $x^\mu = (t, x, y, z)$ ,
2. O 4-vetor potencial  $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ ,
3. O 4-vetor de onda  $k^\mu = (\omega, \vec{q})$ ,
4. A 4-velocidade  $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(1, \vec{v})$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ ,
5. O projetor sobre o 3-espaço:  $h^\alpha_\beta \doteq \delta^\alpha_\beta - V^\alpha V_\beta$
6. O 4-tensor campo eletromagnético:  $F^{\mu\nu} = V^\mu E^\nu - V^\nu E^\mu - \eta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} V^\alpha B^\beta$ ,

- Representamos por  $\eta_{\mu\nu}$ , a métrica do espaço-tempo de fundo, Minkowskiano, escrita em um sistema arbitrário de coordenadas. A representação em um sistema de coordenadas cartesiano é denotada por  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ .

- A operação de diferenciação parcial de um objeto qualquer,  $Q_\alpha$ , pode ser apresentada pelos seguintes símbolos:

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x^\mu} \doteq \partial_\mu Q_\alpha \equiv Q_{\alpha,\mu}.$$

Enquanto que a diferenciação covariante deste mesmo objeto, é definida por:

$$Q_{\mu;\nu} \equiv Q_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha Q_\alpha,$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (\eta_{\beta\mu,\nu} + \eta_{\beta\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu,\beta}),$$

e pode ser apresentada também sob as formas abaixo:

$$Q_{\alpha;\mu} \doteq \frac{DQ_\alpha}{Dx^\mu} \equiv D_\mu Q_\alpha.$$

- Os símbolos de simetrização e antissimetrização são definidos, respectivamente, por:

$$(A, B) \equiv AB + BA,$$

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

- Definimos a quantidade  $C^\alpha_\beta$  com relação à permissividade elétrica, como:

$$C^\alpha_\beta \doteq \varepsilon^\alpha_\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\mu}{\partial E^\beta} E^\mu.$$

- Definimos a quantidade  $H^\alpha_\beta$  com relação à permeabilidade magnética, como:

$$H^\alpha_\beta \doteq \mu^\alpha_\beta + \frac{\partial \mu^\alpha_\lambda}{\partial B^\beta} B^\lambda.$$

- Definimos o projetor  $I^\alpha_\beta$  sobre o subespaço ortogonal a direção de propagação, como:

$$I^\alpha_\beta \doteq h^\alpha_\beta + \frac{q^\alpha q_\beta}{q^2}.$$

- Definimos as operações “linha” e “ponto” como:

$$X' \doteq \frac{1}{E} \frac{\partial X}{\partial E},$$

$$\dot{X} \doteq \frac{1}{B} \frac{\partial X}{\partial B}.$$

- Definimos o produto escalar entre dois 4-vetores  $X$  e  $Y$  como:

$$X^\alpha Y_\alpha \doteq (XY)$$

- Definimos o produto misto entre três vetores  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  como:

$$\vec{X} \cdot (\vec{Y} \times \vec{Z}) \equiv -\eta^{\mu\nu\alpha\beta} X_\mu Y_\nu V_\alpha Z_\beta \doteq [XYVZ]$$

- Usualmente, por conveniência de notação, escreveremos o traço de um tensor qualquer,  $X_{\alpha\beta}$ , como:

$$X^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} \equiv X^\alpha{}_\alpha \equiv X.$$

Valendo a mesma regra para qualquer ordem tensorial, por exemplo, para um tensor de ordem 3,  $X_{\alpha\beta\gamma}$ :

$$X^{\alpha\beta\lambda} \eta_{\beta\lambda} \equiv X^{\alpha\beta}{}_\beta \equiv X^\alpha.$$

- Definimos a operação de descontinuidade de uma função arbitrária  $f(x^\mu)$  através de uma superfície  $\Sigma$ , denotada pelo símbolo  $[f(x^\mu)]_\Sigma$ , como:

$$[f(P_0)]_\Sigma \doteq \lim_{r \rightarrow 0^+} [f(P^+) - f(P^-)].$$

onde  $P^+$ ,  $P^-$  pertencem, respectivamente, aos subespaços  $U^+$  e  $U^-$  separados por  $\Sigma$  e  $P$  é um ponto desta superfície.

# Capítulo 1

## Introdução

Como é bem conhecido, a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética tem seu valor dependente dos estados de polarização do vácuo [1, 2]. Tais efeitos de polarização aparecem quando um campo muito intenso ( $E_{cr} \approx 1.3 \times 10^{18} \text{ V/m}$ ;  $B_{cr} = m_e^2 c^2 / e \hbar \approx 4.4 \times 10^{13} \text{ Gauss}$ ) é produzido em alguma determinada região do espaço. Uma das conseqüências mais importantes a respeito desse fato é o aparecimento do fenômeno de birrefringência, ou seja, a velocidade da onda eletromagnética depende do seu modo de polarização. Um método experimental para se detectar a birrefringência induzida no vácuo por um campo magnético intenso foi proposto em 1979 por Iacoppini e Zavattini [3]. Neste mesmo contexto, Bakalov e colaboradores [4], utilizando técnicas ópticas, detectaram efeitos de birrefringência na presença de um campo magnético intenso (experimento PVLAS).

A descrição teórica dos efeitos não lineares na propagação da luz foi estudada já a três décadas por Bialynicka-Birula e Bialynicki-Birula [1], onde foi calculada a probabilidade de um fóton se dividir na presença de um campo eletromagnético externo. O mesmo problema foi extensivamente estudado por Adler [2]. Outros importantes resultados a respeito do fenômeno de polarização do vácuo devido à presença de campos intensos, incluindo espaços curvos, podem ser encontrados em outras referências [5, 6, 7, 8, 9, 10].

Na última década, Dittrich e Gies [11], utilizando as técnicas da óptica geométrica, derivaram as condições sobre cones de luz para uma classe de soluções no contexto da eletrodinâmica quântica. Para obter as relações de dispersão, estes autores utilizaram a regra da média sobre os estados de polarização. Alguns importantes resultados, previamente obtidos por Latorre [5] e outros, foram generalizados no formalismo proposto. No entanto, o procedimento de tomar a média sobre os estados de polarização exclui a possibilidade de análise de fenômenos de

birrefringência.

A partir de um formalismo, desenvolvido [12], as condições sobre os cones de luz para teorias não lineares do eletromagnetismo (também dentro do limite de aproximação da óptica geométrica) foram obtidas sem fazer uso da expansão média sobre os estados de polarização. Neste formalismo as relações de dispersão são obtidas diretamente a partir das equações de Maxwell generalizadas e do método de Hadamard [13, 14, 15] para a propagação. Assim, fenômenos de birrefringência puderam ser investigados em situações não lineares, particularmente para o caso da eletrodinâmica quântica (EDQ).

Como exemplo ilustrativo, no caso da EDQ, a estrutura métrica efetiva que representa a propagação das ondas conduz às seguintes velocidades para as ondas eletromagnéticas [11, 12]:

$$v_+ = c(1 - 4\mu F^{\mu\alpha} F_{\alpha}{}^{\nu} K_{\mu} K_{\nu}) \quad (1.1)$$

$$v_- = c(1 - 7\mu F^{\mu\alpha} F_{\alpha}{}^{\nu} K_{\mu} K_{\nu}), \quad (1.2)$$

com  $K_{\mu}$  o 4-vetor de onda,  $F^{\mu\alpha}$  as componentes do tensor campo eletromagnético e

$$\mu = \frac{\alpha}{45\pi} \left( \frac{h}{m_e c} \right) \frac{1}{m_e c^2}, \quad (1.3)$$

onde  $\alpha$  é a constante de estrutura fina ( $\alpha = e^2/2hc\varepsilon_0 \approx 1/137.02$ ),  $h$  é a constante de Plank,  $m_e$  é a massa do elétron e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. As equações (1.1) e (1.2) mostram que haverá dois valores para a velocidade de propagação, cada qual dependendo do estado de polarização. Desta maneira, o efeito de birrefringência ocorre na EDQ [16]. Outros trabalhos com mais detalhes a respeito desse assunto podem ser encontrados [1, 7, 8, 9].

Um estudo comparativo entre os trabalhos de Bialynicka-Birula *et al.* [1] e De Lorenci *et al.* [12] mostra que as relações de dispersão derivadas nesses trabalhos são equivalentes.

A propagação de ondas em teorias não lineares para o eletromagnetismo tem, recentemente, despertado grande interesse na comunidade científica internacional. Uma revisão detalhada sobre assunto pode ser encontrada [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27].

O problema da propagação de ondas pode ser investigado, tanto no regime de campos eletromagnéticos intensos [1, 2, 16], como também no contexto de meios materiais [27, 28, 29, 30, 31, 32]. Em ambos os casos, as equações que governam os fenômenos eletrodinâmicos são não lineares. No primeiro, a teoria é construída como analogia de uma lagrangeana não linear a qual é função dos dois invariantes de Lorentz ( $F \doteq F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  e  $G \doteq F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}^*$ ) do campo eletromagnético [33]. No segundo, as equações de Maxwell devem ser complementadas

com relações constitutivas entre os campos externos aplicados e suas induções. Os campos de indução elétrica e magnética  $(\vec{D}, \vec{H})$  se relacionam com as suas respectivas intensidades  $(\vec{E}, \vec{B})$  através de relações constitutivas da forma

$$\vec{D} = \vec{f}_1(\vec{E}, \vec{B}), \quad (1.4)$$

$$\vec{H} = \vec{f}_2(\vec{E}, \vec{B}), \quad (1.5)$$

Neste caso, a estrutura de propagação será dependente das características do meio sob a ação de campos externos, através de certas funções que em geral, são não lineares (relações constitutivas lineares já foram consideradas [34]).

Como um exemplo simples, no caso particular de meios dielétricos onde os coeficientes apresentam valores fixos  $(\epsilon, \mu)$ , a velocidade da onda será dada por  $v = (\mu\epsilon)^{-1/2}$ , e pode-se associar uma geometria efetiva à propagação neste meio, definida por [28, 35]:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + (\mu\epsilon c^2 - 1)V^\mu V^\nu, \quad (1.6)$$

onde  $\eta^{\mu\nu}$  representa a métrica do espaço plano Minkowskiano e  $V^\mu$  representa o 4-vetor velocidade de um observador comóvel com o meio. Para outros casos, onde as funções que determinam as características do meio são mais gerais (meios anisotrópicos, meios magnéticos, etc.) foi apresentada na literatura uma descrição geral para tratar a propagação das ondas [27, 20, 28, 32, 36, 37, 38, 39], inclusive a descrição da propagação em meios em movimento [29, 40]. Particularmente, foram obtidas [27] as relações de dispersão que determinam a propagação das ondas em meios dielétricos locais anisotrópicos. A partir destes resultados foram construídos modelos análogos [30, 41] para soluções isotrópicas (FRW) e anisotrópicas (Bianchi-I) da cosmologia.

Neste trabalho, estaremos interessados em analisar a propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais, trabalhando com a teoria de Maxwell dentro da aproximação da óptica geométrica. O nosso interesse particular será investigar o fenômeno da birrefringência no contexto de meios dielétricos em repouso, caracterizados por coeficientes  $\epsilon^\alpha_\beta = \epsilon^\alpha_\beta(E, B)$  e  $\mu^\alpha_\beta = \mu^\alpha_\beta(E, B)$ . Birrefringência uniaxial é um efeito bem conhecido [42] em alguns materiais especiais (particularmente em cristais) que apresentam um eixo óptico. Este fenômeno pode também ocorrer artificialmente [28, 36, 43], como um efeito induzido em meios materiais: quando um campo externo é aplicado num meio, com propriedades dielétricas não triviais, um eixo óptico artificial pode aparecer. No caso de eletrodinâmica não linear, como já antecipamos, birrefringência ocorre quando o campo elétrico e (ou) o campo magnético tornam-se

comparáveis aos campos previstos pela EDQ [16], na produção de pares elétron-pósitron. A análise da propagação da luz em tal regime mostra que existe a probabilidade de um fóton se dividir sob a ação de um intenso campo eletromagnético externo [1, 2]. Um mecanismo pelo qual birrefringência pode ser controlada pela aplicação de um campo elétrico externo, foi previamente proposto [27]. O efeito da birrefringência pode também ser usado como uma técnica para investigar outras propriedades de alguns sistemas. Por exemplo, como uma ferramenta em estudos astrofísicos [44].

Usaremos, neste trabalho, o formalismo apresentado nas referências [27, 28, 29, 32] dentre outras, e recuperaremos três casos de birrefringência linear encontrados na literatura: o efeito Kerr eletro-óptico e o seu análogo magnético, o efeito Cotton-mouton magneto-óptico, e o efeito eletro-magneto-óptico conhecido como efeito Jones. O primeiro deles já foi tratado [28] com base neste formalismo (no contexto da teoria de Maxwell), para meios materiais com permissividade  $\varepsilon^{\alpha}_{\beta}(\vec{E})$ . O segundo deles, embora até então não fosse explicitamente obtido neste contexto, decorre imediatamente do primeiro considerando a rotação dual dos campos eletromagnéticos. Por fim, o terceiro caso mencionado constitui um tipo de birrefringência linear de investigação experimental recente e será, pela primeira vez, investigado com um formalismo tensorial covariante.

O efeito Kerr foi descoberto em 1875 onde foi encontrada uma relação entre óptica e campos eletrostáticos através da observação de birrefringência linear em vidros [45], induzida por campos elétricos, seguida por uma similar observação em líquidos [45]. Mais tarde, Cotton e Mouton [46] observaram um efeito fenomenologicamente idêntico para campos magnéticos em líquidos. Em todos esses casos, a birrefringência linear é quadrática na intensidade do campo externo aplicado e apresenta um eixo óptico paralelo à direção deste campo. Intuitivamente, pode-se esperar que um novo tipo de efeito combinado entre estes casos possa ser induzido, pela ação simultânea de campos elétricos e magnéticos. Desde então, birrefringência magneto-elétrica linear tem sido investigada em seus aspectos teóricos [47, 48, 49, 50, 51]. Nas últimas décadas, vários trabalhos experimentais realizados para se detectar este efeito, têm obtido êxito [52, 53].

Em 1948, R. Clark Jones [54], utilizando um formalismo matricial, deduziu a existência de um novo tipo de efeito eletro-magneto-óptico, o efeito Jones, assim chamado desde então. Jones mostrou que este novo efeito poderia existir apenas em um meio uniaxial, e que ele representa um caso adicional de birrefringência linear que acompanha a tradicional, no qual seu eixo

óptico intercepta os eixos provenientes da birrefringência padrão. Desde então, o formalismo de Jones tem sido reconhecido como uma ferramenta poderosa para descrever a propagação da luz, principalmente em meios que podem apresentar dois ou mais efeitos ópticos distintos. O efeito Jones permaneceu não observado até pouco tempo, e embora o formalismo de Jones nunca tenha sido contextado, a ausência de evidências experimentais levou a questionamentos a respeito da validade do mesmo. Recentemente, T. Roth e A. Rikken [52] obtiveram algum êxito nesta direção, embora ainda haja algumas discrepâncias entre as diferentes previsões para sistemas materiais nos quais o efeito poderia ocorrer.

Na década de 80, alguns trabalhos teóricos baseados em argumentos de simetria foram apresentados para dar suporte à existência do efeito Jones [48, 51] e estimativas a respeito da ordem de magnitude deste efeito foram realizadas. Foi mostrado, também, que este efeito não ocorre somente em meios uniaxiais, tais como algumas classes de cristais, conforme previsto por Jones, mas também poderia ocorrer induzido em fluidos pela ação de campos elétricos e magnéticos paralelos entre si e perpendiculares à direção de propagação da onda eletromagnética. Desta maneira, a birrefringência de Jones pode ser mais facilmente detectada neste caso do que em cristais naturalmente birrefringentes, uma vez que as intensidades dos campos aplicados podem ser facilmente controladas. A birrefringência de Jones acompanha as birrefringências tradicionais de Kerr e Cotton-Mouton, porém apresenta-se em menor intensidade do que as outras. A estimativa predita para esta birrefringência foi proposta como sendo proporcional ao produto das magnitudes dos campos [48, 51] e tem concordado com alguns experimentos realizados recentemente [52, 55].

Neste trabalho, vamos apresentar uma descrição teórica para o efeito Jones, na concepção de um efeito induzido em meios materiais por campos eletromagnéticos, na perspectiva da teoria de Maxwell dentro do limite da óptica geométrica. Apresentaremos as equações de campo gerais dependentes das magnitudes dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , considerando meios materiais dielétricos, e a partir delas obteremos as relações de dispersão que regem a propagação de ondas eletromagnéticas nestes meios. Dessa maneira, os efeitos Kerr, Cotton-Mouton e Jones aparecerão isolados em alguns casos e pela simetria das equações de propagação, iremos inferir os casos onde os primeiros dois efeitos seguirão acompanhados do efeito Jones. A análise será restrita a modelos eletrodinâmicos locais, onde efeitos dispersivos serão negligenciados. Somente ondas monocromáticas serão consideradas, a fim de evitar ambigüidades com respeito à definição da velocidade da onda. Ao longo de todo este trabalho, utilizaremos um formalismo covariante

[56, 57, 58], onde o espaço-tempo considerado será escolhido como sendo o espaço-tempo Minkowskiano em um sistema de coordenadas Cartesiano. A métrica de fundo será representada por  $\eta^{\mu\nu}$ , a qual será definida por  $diag(+1, -1, -1, -1)$ . Nos capítulos seguintes, as unidades serão escolhidas de tal forma que a velocidade da luz assumirá o valor  $c = 1$ , exceto quando explicitarmos o contrário.

# Capítulo 2

## Eletrodinâmica em meios materiais

As leis de Maxwell do eletromagnetismo [56, 59] descrevem os fenômenos elétricos e magnéticos, bem como a propagação de ondas eletromagnéticas, tais como a luz. Esta teoria baseia-se na existência dos campos elétrico  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$  e magnético  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ , bem como na noção de carga elétrica  $q$  e de corrente elétrica  $i$ . Assim, é conhecido que, na presença de campos externos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , um corpo carregado com carga  $q$  e velocidade  $\vec{v}$ , encontra-se sujeito à uma força, denominada força de Lorentz, expressa por

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.1)$$

Neste trabalho, estaremos interessados em buscar métodos analíticos para solucionar os problemas associados à propagação de ondas eletromagnéticas em situações não triviais, como ocorrem em meios materiais cujas propriedades dielétricas são dependentes da ação de campos eletromagnéticos externos. Esta dependência, em muitos casos, obedece a uma relação não linear. Apresentaremos, neste capítulo, as equações de campo gerais em termos de funções dependentes das propriedades do meio, sem fazer qualquer restrição às leis constitutivas, e obteremos a equação de auto-valores generalizada associada com a propagação de raios de luz em materiais isotrópicos. A solução formal encontrada para tal equação representa a equação geral, em termos das magnitudes dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , que governa a propagação dos raios de luz no meio. Dessa equação, resultam as relações de dispersão para os raios de luz, que representam os cones de luz para a propagação de ondas. Examinaremos também o problema da propagação desses raios em meios naturalmente anisotrópicos, para as situações onde o eixo óptico do meio está contido no plano de incidência dos raios de luz.

## 2.1 Campos em meios materiais

A presença de um meio material leva a uma complexidade maior na descrição dos campos do que quando se trata o mesmo problema na ausência de matéria. A força em uma carga de prova imersa em um determinado meio material é, em geral, diferente daquela verificada no vácuo. Em meios dielétricos podem aparecer vários efeitos [59] devido à presença de um campo eletromagnético, como por exemplo, a polarização do meio através da orientação de dipólos elétricos microscópicos, de onde surge a idéia de um momento de dipolo elétrico  $\vec{p}$ , definido como:

$$\vec{p} = q\vec{l}, \quad (2.2)$$

onde  $\vec{l}$  é a distância entre as duas cargas.

O momento de dipolo elétrico pode ser visto como uma medida da separação das cargas. Em um dado volume, podem haver muitos dipolos individuais induzidos, tal que, para distinguir uma situação macroscópica, uma nova quantidade chamada de polarização  $\vec{P}$  deve ser introduzida. A polarização mede o número de momentos de dipolos elétricos por unidade de volume. Assim,

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{p}}{\Delta V}. \quad (2.3)$$

Com este conceito, nós definimos o vetor deslocamento elétrico  $\vec{D}$  na forma:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (2.4)$$

Em meios magnéticos existem dipolos magnéticos análogos aos dipolos elétricos. A quantidade chamada de momento de dipolo magnético  $\vec{m}$ , também pode ser definida de modo análogo ao momento de dipolo elétrico. Assim, a quantidade macroscópica polarização magnética  $\vec{M}$  será dada por:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{m}}{\Delta V}. \quad (2.5)$$

Com este novo conceito, nós podemos definir a seguinte equação para o campo de indução magnética  $\vec{B}$ :

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}). \quad (2.6)$$

## 2.2 Permissividade e permeabilidade

Dentro de um meio material, a eletrodinâmica torna-se não-linear. Em tais situações, as equações de Maxwell devem ser complementadas com relações constitutivas que, em geral, são

não lineares e dependem das propriedades do meio, sujeito à ação de campos externos. Como consequência vários efeitos, não usuais no contexto da teoria de Maxwell linear, podem ser previstos, dentre os quais o fenômeno da birrefringência é o foco principal de atenção neste trabalho.

Para determinada classe de materiais, as relações (1.4) e (1.5) são lineares. Como exemplo disso, podemos ter casos particulares de meios dielétricos onde os vetores  $\vec{D}$  e  $\vec{H}$  se relacionam com os vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , por meio dos coeficientes  $\varepsilon$  e  $\mu$ , respectivamente. Entretanto, certas classes chamadas de materiais anisotrópicos permitem que  $\varepsilon$  ou  $\mu$  possam ser representados por matrizes para representar o fato de que uma única componente dos campos  $\vec{D}$  ou  $\vec{H}$  seja função de mais que uma componente dos campos  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$ . Neste caso, representamos as relações (1.4) e (1.5) como

$$D^\mu = \varepsilon^\mu_\alpha E^\alpha \quad (2.7)$$

$$H^\mu = \mu^\mu_\alpha B^\alpha, \quad (2.8)$$

onde  $\varepsilon^\mu_\alpha$  e  $\mu^\mu_\alpha$  representam as componentes da permissividade dielétrica e permeabilidade magnética, respectivamente. Estas expressões podem ser apresentadas na seguinte representação matricial,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ 0 & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

e,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ 0 & \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ 0 & \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Para o caso do vazio, onde  $\varepsilon^\mu_\alpha = \varepsilon_0 h^\mu_\alpha$  e  $\mu^\mu_\alpha = \mu_0^{-1} h^\mu_\alpha$  ( $\varepsilon_0$  e  $\mu_0$  são constantes), teremos que  $\varepsilon^i_j = \text{diag}(\varepsilon_0, \varepsilon_0, \varepsilon_0)$  e  $\mu^i_j = \text{diag}(\mu_0^{-1}, \mu_0^{-1}, \mu_0^{-1})$  para  $i, j = 1, 2, 3$ . Neste caso, as equações (2.7) e (2.8) se reduzem a forma vetorial:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.11)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}. \quad (2.12)$$

A quantidade  $h^\mu{}_\alpha$  que aparece acima, é definida por

$$h^\alpha{}_\beta \doteq \delta^\alpha{}_\beta - V^\alpha V_\beta, \quad (2.13)$$

onde  $V^\alpha$  é o 4-vetor velocidade de um observador em repouso no laboratório.  $h^\alpha{}_\beta$  pode ser interpretada como sendo um projetor sobre o 3-espaço, uma vez que  $h^\alpha{}_\alpha = 3$  e

$$\begin{aligned} h^\alpha{}_\tau h^\tau{}_\beta &= (\delta^\alpha{}_\tau - V^\alpha V_\tau)(\delta^\tau{}_\beta - V^\tau V_\beta) \\ &= \delta^\alpha{}_\beta - V^\alpha V_\beta \\ &= h^\alpha{}_\beta. \end{aligned} \quad (2.14)$$

## 2.3 Meios materiais naturalmente anisotrópicos

Determinados meios existentes na natureza apresentam uma característica peculiar. Quando ondas eletromagnéticas propagam-se através deles, podem existir diferentes velocidades associadas às diferentes direções de propagação e aos diferentes modos de polarização. Esses meios são chamados anisotrópicos (a maioria dos cristais apresenta essa característica [60]). Esse fenômeno está relacionado com a existência de um eixo óptico no meio material, que pode ou não ser um eixo de simetria do mesmo. Quando o meio possui um único eixo óptico ele é chamado de *uniaxial*. Embora exista meios mais complexos, chamados de *biaxiais*, estes não serão analisados neste trabalho.

Quando uma onda eletromagnética incide em um meio uniaxial, dependendo do seu modo de polarização ela pode se dividir em duas outras ondas, dando origem ao fenômeno conhecido como birrefringência. Uma delas propaga-se com velocidade independente da direção de propagação. Ela é chamada de *raio ordinário*. Já a outra tem sua velocidade variando de acordo com a direção de propagação e de sua polarização dentro do meio. Essa é chamada de *raio extraordinário*. Entretanto, quando a onda eletromagnética propaga-se na direção do eixo óptico, as duas ondas propagam-se com a mesma velocidade.

## 2.4 Velocidade e índice de refração

Vamos considerar a propagação do raio extraordinário na fronteira de um meio uniaxial [43, 60], ao longo de uma direção arbitrária que faz um ângulo  $\psi$  com o eixo óptico. Para isto,

consideremos o caso retratado na figura 2.1 no qual o raio extraordinário incide de um meio isotrópico com um ângulo  $\theta_i$  sobre a superfície de um meio uniaxial.

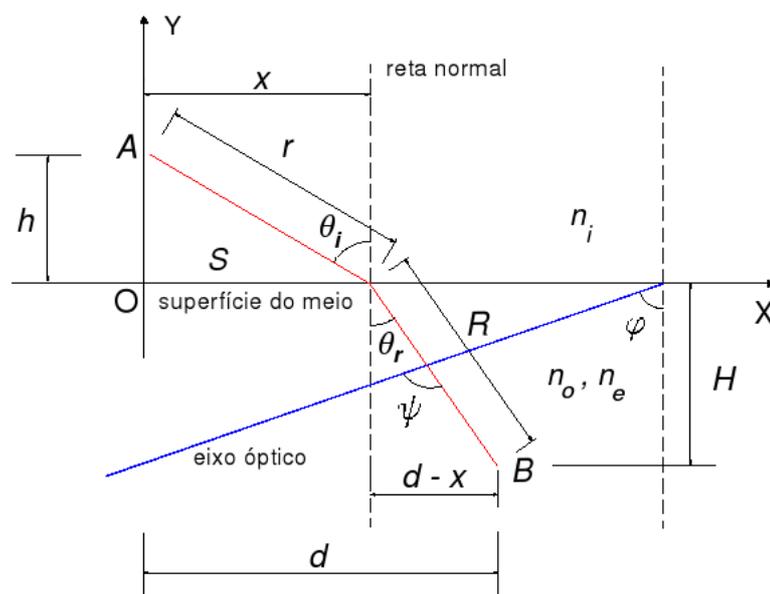


Figura 2.1: Comportamento do raio extraordinário, representado pela linha vermelha, próximo a superfície  $S$  (linha horizontal) de separação entre um meio isotrópico e um meio uniaxial. (A) Local de onde parte o raio extraordinário; (O) Ponto de incidência no meio; (B) Local onde o raio extraordinário emerge do meio. A linha tracejada representa a normal à superfície  $S$  e a linha em azul representa o eixo óptico do meio uniaxial.

O eixo óptico faz um ângulo  $\varphi$  com a normal à superfície do meio. Estamos considerando, nesta situação, que o raio incidente, o raio refratado e o eixo óptico estejam no mesmo plano. Uma vez que a velocidade do raio ordinário é a mesma, independentemente da sua direção de propagação, podemos então, representá-lo em um plano cartesiano como uma circunferência, cujo raio corresponde ao módulo da velocidade desta onda e cuja direção de propagação corresponde ao ângulo entre o seu raio e o eixo das ordenadas (eixo  $y$ ). Já o raio extraordinário tem sua velocidade variando com a direção de propagação dentro do cristal e, de acordo com a construção do elipsóide de Fresnell, essa velocidade tem seu módulo variando conforme a equação de uma elipse. Podemos representar este raio como uma elipse no plano cartesiano onde a distância da origem até um ponto desta representa o módulo da velocidade na direção de propagação determinada pelo ângulo  $\psi$  entre a reta que liga a origem até o ponto na elipse e o eixo das ordenadas. A figura 2.2 adiante ilustra esta situação.

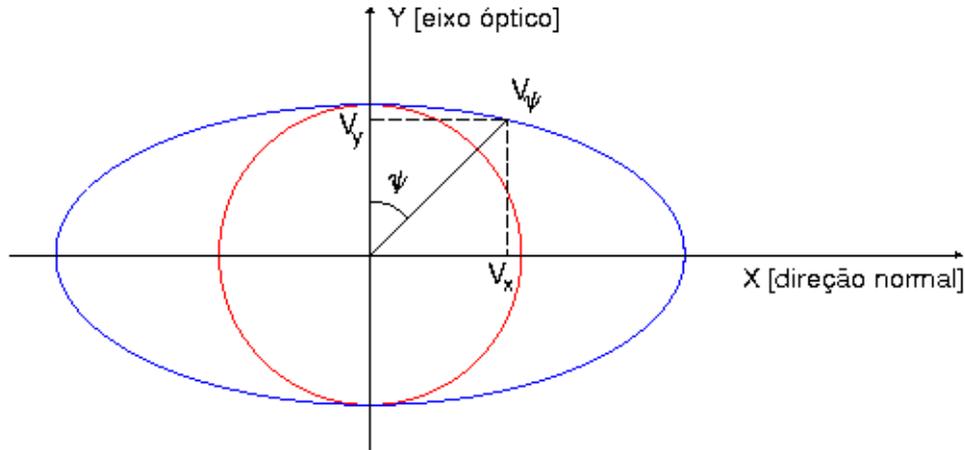


Figura 2.2: Frentes de onda dos raios ordinário e extraordinário propagando-se em um meio uniaxial, ao longo de uma direção que faz um ângulo  $\psi$  com seu eixo óptico. A circunferência representa a frente de onda do raio ordinário e a elipse representa a frente de onda do raio extraordinário.

A partir desta figura obtemos as seguintes expressões para as componentes  $v_x$  e  $v_y$  da velocidade do raio de luz com relação ao ângulo entre o eixo óptico e a direção de propagação:

$$\tan \psi = \frac{v_x}{v_y}. \quad (2.15)$$

Adicionalmente, da equação da elipse (representada na figura 2.2) obtemos:

$$\frac{v_y^2}{v_o^2} + \frac{v_x^2}{v_e^2} = 1, \quad (2.16)$$

onde (tomando  $c = 1$ )  $v_o = 1/n_o$  é a velocidade da onda ordinária e  $v_e = 1/n_e$  é velocidade máxima, quando o cristal for positivo [60] (ou mínima quando o cristal for negativo), da onda extraordinária. Desta forma, obtemos:

$$\frac{v_y^2}{(1/n_o)^2} + \frac{v_x^2}{(1/n_e)^2} = 1. \quad (2.17)$$

Introduzindo-se, então, a equação (2.15) na equação (2.17), resulta

$$v_y^2 (n_o^2 + n_e^2 \tan^2 \psi) = 1. \quad (2.18)$$

Por outro lado, da equação da velocidade de propagação da onda<sup>1</sup>  $v_\psi = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$ , temos:

$$\begin{aligned} v_\psi &= [v_y^2 (\tan^2 \psi + 1)]^{\frac{1}{2}} \\ &= v_y \sec \psi. \end{aligned} \quad (2.19)$$

<sup>1</sup>A equação para  $v_\psi$  pode ser obtida diretamente da figura 2.2.

Após isolarmos  $v_\psi$  de Eq. (2.18) e substituí-lo na última equação acima, teremos:

$$v_\psi = \frac{1}{\sqrt{n_o^2 \cos^2 \psi + n_e^2 \sin^2 \psi}}. \quad (2.20)$$

Assim, o índice de refração  $n_\psi = 1/v_\psi$  será dado por:

$$n_\psi = \sqrt{n_o^2 \cos^2 \psi + n_e^2 \sin^2 \psi}. \quad (2.21)$$

## 2.5 Lei de refração

Para a determinação da velocidade do raio extraordinário, utilizaremos o princípio de Fermat [42] que pode ser enunciado na forma:

*“A luz, ao se propagar entre dois pontos, sempre minimiza o tempo de percurso”.*

Da figura 2.1 temos as seguintes relações geométricas:

$$\psi = \theta_r + \varphi \quad (2.22)$$

$$r = \sqrt{h^2 + x^2} \quad (2.23)$$

$$R = \sqrt{H^2 + (d-x)^2} \quad (2.24)$$

$$\sin \theta_i = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} \quad (2.25)$$

$$\cos \theta_r = \frac{H}{\sqrt{H^2 + (d-x)^2}} \quad (2.26)$$

Uma vez que a velocidade do raio de luz é constante no meio em que ela se propaga, o tempo  $t_{AB}$  que o raio de luz leva para percorrer a distância  $AB$  será:

$$\begin{aligned} t_{AB} &= \frac{r}{v_i} + \frac{R}{v_r} \\ &= n_i \sqrt{h^2 + x^2} + n_\psi \sqrt{H^2 + (d-x)^2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Substituindo Eq. (2.22) em Eq. (2.21), encontramos:

$$n_\psi = \sqrt{n_o^2 (\cos \theta_r \cos \varphi - \sin \theta_r \sin \varphi)^2 + n_e^2 (\sin \theta_r \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta_r)^2}. \quad (2.28)$$

Mas, da equação (2.26), a equação (2.28) resulta:

$$\begin{aligned} n_\psi &= \left[ n_o^2 \left( \frac{H}{\sqrt{H^2 + (d-x)^2}} \cos \varphi - \frac{(d-x)}{\sqrt{H^2 + (d-x)^2}} \sin \varphi \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + n_e^2 \left( \frac{(d-x)}{\sqrt{H^2 + (d-x)^2}} \cos \varphi + \sin \varphi \frac{H}{\sqrt{H^2 + (d-x)^2}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Levando este resultado na equação (2.27), segue:

$$t_{AB} = n_i \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{n_o^2 [H \cos \varphi - (d - x) \sin \varphi]^2 + n_e^2 [(d - x) \cos \varphi + H \sin \varphi]^2} \quad (2.30)$$

Aplicando o princípio de Fermat, devemos impor que:

$$\frac{d}{dx} t_{AB} = 0. \quad (2.31)$$

Assim,

$$\frac{n_i x}{\sqrt{h^2 + x^2}} + \frac{n_o^2 [H \cos \varphi - (d - x) \sin \varphi] \sin \varphi + n_e^2 [(d - x) \cos \varphi + H \sin \varphi] (-\cos \varphi)}{\sqrt{n_o^2 [H \cos \varphi - (d - x) \sin \varphi]^2 + n_e^2 [(d - x) \cos \varphi + H \sin \varphi]^2}} = 0, \quad (2.32)$$

Dividindo-se e multiplicando-se ambos os lados desta última equação por  $R$ :

$$n_i \sin \theta_i + \frac{n_o^2 (\cos \theta_r \cos \varphi - \sin \theta_r \sin \varphi) \sin \varphi - n_e^2 (\sin \theta_r \cos \varphi + \cos \theta_r \sin \varphi) \cos \varphi}{\sqrt{n_o^2 (\cos \theta_r \cos \varphi - \sin \theta_r \sin \varphi)^2 + n_e^2 (\sin \theta_r \cos \varphi + \cos \theta_r \sin \varphi)^2}} = 0, \quad (2.33)$$

que pode ser reescrita como,

$$n_i \sin \theta_i + \frac{(n_o^2 - n_e^2) \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta_r - \sin \theta_r (n_o^2 \sin^2 \varphi + n_e^2 \cos^2 \varphi)}{\sqrt{n_o^2 \cos^2 (\theta_r + \varphi) + n_e^2 \sin^2 (\theta_r + \varphi)}} = 0. \quad (2.34)$$

Ou ainda, adicionando-se e subtraindo-se  $(n_o^2 - n_e^2) \sin^2 \varphi \sin \theta_r$  na equação acima e após um conveniente reagrupamento dos termos, teremos:

$$n_i \sin \theta_i + \frac{(n_o^2 - n_e^2) \sin \varphi \cos (\theta_r + \varphi) - n_e^2 \sin \theta_r}{\sqrt{n_o^2 \cos^2 (\theta_r + \varphi) + n_e^2 \sin^2 (\theta_r + \varphi)}} = 0. \quad (2.35)$$

A equação acima constitui uma generalização da lei de Snell para o caso de um meio uniaxial. Esta equação, juntamente com as condições iniciais, contém a informação a respeito de como o raio extraordinário irá se propagar em um meio anisotrópico. Para o caso em que só existe um índice de refração no meio ( $n_e = n_o$ ), ou seja, assumindo um meio material não birrefringente, esta equação se reduzirá à lei de Snell:

$$n_i \sin \theta_i = n_o \sin \theta_r. \quad (2.36)$$

O caso onde a incidência é normal à superfície foi tratado na referência [43] e corresponde a fazer  $\theta_i = 0$  na equação (2.35), resultando em:

$$\tan \theta_r = \frac{(n_o^2 - n_e^2) \sin \varphi \cos \varphi}{n_o^2 \sin^2 \varphi + n_e^2 \cos^2 \varphi}. \quad (2.37)$$

Uma descrição mais geral e detalhada da propagação de raios de luz em meios materiais naturalmente anisotrópicos, incluindo o caso onde os raios incidente e refratado e o eixo óptico não são coplanares, pode ser encontrada [29, 43].

## 2.6 As equações de campo

A eletrodinâmica em um meio material em repouso é determinada pelas equações de Maxwell. É conveniente, antes de mais nada, expressar estas equações em uma forma covariante, ou seja, uma forma que seja válida em todos os sistemas de coordenadas. Para fazer isso, nós definimos os tensores anti-simétricos  $F^{\mu\nu}$  e  $P^{\mu\nu}$  de forma a representar o campo eletromagnético. Eles podem ser expressos em termos das intensidades  $E$  e  $H$  e das induções  $D$  e  $B$  dos campos, elétrico e magnético, da forma

$$F^{\mu\nu} = V^\mu E^\nu - V^\nu E^\mu - \eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} V^\alpha B^\beta, \quad (2.38)$$

$$P^{\mu\nu} = V^\mu D^\nu - V^\nu D^\mu - \eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} V^\alpha H^\beta, \quad (2.39)$$

onde  $V_\mu$  representa o 4-vetor velocidade de um observador que, em coordenadas Galileanas é dado por  $V^\mu = \delta_0^\mu$ . A quantidade  $\eta^{\mu\nu\alpha\beta}$  é o pseudo-tensor unitário anti-simétrico de Levi-Civita definido em coordenadas galileanas de forma que  $\eta^{0123} = +1$ . Algumas relações úteis [56] associadas a este objeto seguem abaixo:

(i) Produto direto, sem contrações:

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} \eta_{\mu\nu\varphi\chi} = - \det \begin{pmatrix} \delta^\alpha_\mu & \delta^\alpha_\nu & \delta^\alpha_\varphi & \delta^\alpha_\chi \\ \delta^\beta_\mu & \delta^\beta_\nu & \delta^\beta_\varphi & \delta^\beta_\chi \\ \delta^\gamma_\mu & \delta^\gamma_\nu & \delta^\gamma_\varphi & \delta^\gamma_\chi \\ \delta^\lambda_\mu & \delta^\lambda_\nu & \delta^\lambda_\varphi & \delta^\lambda_\chi \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

(ii) Contraíndo-se um índice:

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} \eta_{\mu\nu\varphi\lambda} = - \det \begin{pmatrix} \delta^\alpha_\mu & \delta^\alpha_\nu & \delta^\alpha_\varphi \\ \delta^\beta_\mu & \delta^\beta_\nu & \delta^\beta_\varphi \\ \delta^\gamma_\mu & \delta^\gamma_\nu & \delta^\gamma_\varphi \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

(iii) Contraíndo-se dois índices:

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} \eta_{\mu\nu\gamma\lambda} = - 2 \det \begin{pmatrix} \delta^\alpha_\mu & \delta^\alpha_\nu \\ \delta^\beta_\mu & \delta^\beta_\nu \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

(iv) Contraíndo-se três índices:

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} \eta_{\mu\beta\gamma\lambda} = - 6 \delta^\alpha_\mu. \quad (2.43)$$

(v) Finalmente, contraindo-se todos os quatro índices:

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\lambda}\eta_{\mu\nu\gamma\lambda} = -24. \quad (2.44)$$

Por comodidade de notação, estaremos trabalhando em um sistema de coordenadas cartesianas. A generalização para um sistema curvilíneo pode ser alcançada a qualquer momento pelo requerimento da covariância.

Conforme já mencionamos anteriormente, dentro de um meio material as equações da eletrodinâmica precisam ser complementadas com as chamadas relações constitutivas. Assim, os vetores indução elétrica e magnética se relacionam com as intensidades dos campos através das seguintes relações constitutivas:

$$D^\alpha = \varepsilon^\alpha{}_\beta E^\beta, \quad (2.45)$$

$$H^\alpha = \mu^\alpha{}_\beta B^\beta, \quad (2.46)$$

onde os coeficientes  $\varepsilon^\alpha{}_\beta = \varepsilon^\alpha{}_\beta(\vec{E}, \vec{B})$  e  $\mu^\alpha{}_\beta = \mu^\alpha{}_\beta(\vec{E}, \vec{B})$  representam quantidades dielétricas que concentram toda a informação a respeito das propriedades eletromagnéticas do meio.

Em um sistema cartesiano, com  $x^\mu = (t, x, y, z)$ , o tensor de campo eletromagnético  $F^{\mu\nu}$  e o tensor de polarização  $P^{\mu\nu}$  podem ser apresentados, em termos de suas componentes, na forma

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [P^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & H_z & -H_y \\ -D_y & -H_z & 0 & H_x \\ -D_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Definimos, também, o tensor dual ao tensor  $F^{\mu\nu}$ , denotado por  $\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}$ , como:

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (2.48)$$

Substituindo  $F^{\alpha\beta}$  de Eq. (2.38) e utilizando a equação (2.42), segue

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = V^\mu B^\nu - V^\nu B^\mu + \eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} V^\alpha E^\beta, \quad (2.49)$$

que equivale a trocar  $\vec{E}$  por  $\vec{B}$  e  $\vec{B}$  por  $-\vec{E}$  em  $F^{\mu\nu}$ . Sua representação matricial é então:

$$[\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Assim, as equações de Maxwell podem ser apresentadas em uma forma compacta

$$P^{\mu\nu}{}_{;\nu} = J^\mu, \quad (2.51)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (2.52)$$

onde  $J^\mu \doteq (\rho, \vec{j})$  é o 4-vetor densidade de corrente,  $\rho$  é a densidade volumétrica de cargas e  $\vec{j}$  é o vetor densidade superficial de corrente elétrica<sup>2</sup>.

Em verdade, o conjunto de equações apresentadas em (2.52) podem ser equivalentemente obtidas através da relação

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0, \quad (2.53)$$

onde o tensor  $F_{\alpha\beta}$  está associado ao tensor  $F^{\alpha\beta}$  segundo a relação

$$F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.54)$$

Vamos agora, reescrever as equações (2.51) e (2.52) em termos das intensidades e das induções dos campos elétricos e magnéticos. De (2.39) e (2.49) temos

$$V^\mu D^\nu{}_{;\nu} - V^\nu D^\mu{}_{;\nu} - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha H_{\beta;\nu} = J^\mu, \quad (2.55)$$

$$V^\mu B^\nu{}_{;\nu} - V^\nu B^\mu{}_{;\nu} + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha E_{\beta;\nu} = 0, \quad (2.56)$$

As equações de Maxwell podem ser obtidas na forma vetorial, a partir de suas componentes, das expressões acima. De fato, de Eq. (2.51) ou Eq. (2.55), teremos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (2.57)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.58)$$

e de Eq. (2.52) ou Eq. (2.53), teremos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.59)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.60)$$

Por simplicidade, nós consideraremos as equações de Maxwell na ausência de fontes, isto é,  $\rho = 0$  e  $\vec{j} = \vec{0}$ . Neste caso, as equações (2.51) e (2.52), tornam-se

$$P^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (2.61)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (2.62)$$

---

<sup>2</sup>Note que, nas equações (2.51) e (2.52), a derivada covariante, representada pelo ponto e vírgula pode ser substituída pela derivada parcial, representada pela vírgula, uma vez que o sistema de coordenadas considerado é o cartesiano.

ou, equivalentemente, de Eq. (2.55) e Eq. (2.56):

$$V^\tau D^\alpha{}_{,\tau} + \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} V_\gamma H_{\lambda,\tau} = 0, \quad (2.63)$$

$$V^\tau B^\alpha{}_{,\tau} - \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} V_\gamma E_{\lambda,\tau} = 0. \quad (2.64)$$

Derivando as relações (2.45) e (2.46) com relação às coordenadas, obtemos

$$D^\alpha{}_{,\tau} = \varepsilon^\alpha{}_\beta E^\beta{}_{,\tau} + \frac{\partial \varepsilon^\alpha{}_\beta}{\partial E^\mu} E^\beta E^\mu{}_{,\tau} + \frac{\partial \varepsilon^\alpha{}_\beta}{\partial B^\mu} E^\beta B^\mu{}_{,\tau}, \quad (2.65)$$

$$H^\alpha{}_{,\tau} = \mu^\alpha{}_\beta B^\beta{}_{,\tau} + \frac{\partial \mu^\alpha{}_\beta}{\partial E^\mu} B^\beta E^\mu{}_{,\tau} + \frac{\partial \mu^\alpha{}_\beta}{\partial B^\mu} B^\beta B^\mu{}_{,\tau}. \quad (2.66)$$

As equações (2.63) a (2.66) são as equações que descrevem o campo eletromagnético dentro de um meio material arbitrário, cujas propriedades são determinadas pelas quantidades  $\varepsilon^\alpha{}_\beta$  e  $\mu^\alpha{}_\beta$ . Como vemos, elas são expressas em termos das derivadas primeiras dos campos.

## 2.7 Propagação de ondas

### 2.7.1 Ondas de choque

Consideremos uma partícula carregada, inicialmente em repouso, a qual é acelerada instantaneamente a partir de  $t = 0$ . O campo eletromagnético produzido por essa partícula será inicialmente independente do tempo, tornando-se depois, um campo variável. As duas regiões do espaço-tempo, nas quais o campo é independente do tempo ou variável, serão separadas por uma hipersuperfície  $\Sigma$ . Sabemos que uma carga acelerada emite radiação eletromagnética, assim, a hipersuperfície  $\Sigma$  será a frente de onda emitida pela partícula acelerada.

O potencial eletromagnético  $A^\mu$  é representado por

$$A^\mu \doteq (\varphi, \vec{A}), \quad (2.67)$$

onde  $\varphi$  e  $\vec{A}$  são o potencial escalar e o potencial vetor do campo eletromagnético, respectivamente. Do ponto de vista matemático, a hipersuperfície  $\Sigma$  é caracterizada pelo fato de que certas derivadas de segunda ordem do potencial eletromagnético  $A_\mu$  são descontínuas através de  $\Sigma$ . Segue, desse comentário, que todas as derivadas primeiras de  $A_\mu$  com respeito ao tempo serão iguais a zero nas vizinhanças passadas de  $\Sigma$  mas, para algumas outras derivadas de  $A_\mu$ , isso certamente será diferente de zero nas vizinhanças futuras de  $\Sigma$ . Essas discontinuidades se propagam ao longo de  $\Sigma$  de maneira determinada pelas equações de Maxwell. Dizemos, então, que há uma *onda de choque* na superfície  $\Sigma$ .

### 2.7.2 Método de Hadamard

A fim de descrever a propagação de ondas eletromagnéticas no limite da óptica geométrica (pequenos comprimentos de onda), recorreremos ao método de Hadamard-Papapetrou [13, 15]. Descontinuidades do campo eletromagnético (frentes de onda) são assumidas a pertencerem a uma hipersuperfície orientada  $\Sigma$  definida por  $\Sigma : \Phi(x^\mu) = 0$ . As duas regiões distintas do espaço-tempo, globalmente separadas pela superfície  $\Sigma$ , podem ser definidas de forma consistente. Para cada  $\Sigma$ , seja  $X^-$  o conjunto de pontos  $P^-$  do espaço-tempo, não pertencentes a  $\Sigma$ , no passado de  $P$  para cada  $P \in \Sigma$  e seja  $X^+$  o conjunto de pontos  $P^+$  do espaço-tempo, não pertencentes a  $\Sigma$ , no futuro de  $P$  para cada  $P \in \Sigma$ . Causalidade do espaço-tempo garante que  $X^+$  e  $X^-$  são disjuntos. Para qualquer ponto  $P_0 \in \Sigma$  dado (com  $P_0$  não pertencente ao conjunto dos eventuais pontos fronteira de  $\Sigma$ ), toda vizinhança  $U_{P_0}$  de  $P_0$  é particionada em três regiões disjuntas:  $U_{P_0}^- \subset X^-$ ,  $U_{P_0}^+ \subset X^+$  e  $U_{P_0}^0 \subset \Sigma$ . Seja  $r$  o raio desta vizinhança  $U_{P_0}$  e  $P$  um ponto arbitrário de  $U_{P_0}$ ,  $P \in U_{P_0}$ . Seja também  $P^- \in U_{P_0}^-$  e  $P^+ \in U_{P_0}^+$  dois pontos vizinhos quaisquer de  $P$  e situados em lados opostos de  $\Sigma$ . Se  $f$  é um tensor arbitrário definido em  $U_{P_0}$ , a descontinuidade de  $f$  em  $\Sigma$  é então definida como,

$$[f(P_0)]_\Sigma \doteq \lim_{r \rightarrow 0^+} [f(P^+) - f(P^-)]. \quad (2.68)$$

Hadamard provou que  $[f]_\Sigma = 0$  implica que  $[\nabla_\nu f]_\Sigma = \bar{f} K_\nu$ , onde o vetor  $K_\nu = \nabla_\nu \Phi$  é ortogonal à hipersuperfície  $\Sigma$ , e  $\bar{f}$  é um tensor de mesmo rank e com a mesma simetria algébrica de  $f$ .

## 2.8 Equação de autovalores

Visando determinar a propagação de ondas eletromagnéticas, consideraremos a aproximação eikonal da eletrodinâmica, fazendo uso do método de Hadamard para a propagação das descontinuidades dos campos. Assim, aplicando o mesmo procedimento anterior para o campo eletromagnético  $E^\mu$  e  $B^\mu$  e suas derivadas, teremos

$$[E^\mu]_\Sigma = 0, \quad (2.69)$$

$$[B^\mu]_\Sigma = 0, \quad (2.70)$$

$$[E^\mu{}_{,\tau}]_\Sigma = e^\mu K_\tau, \quad (2.71)$$

$$[B^\mu{}_{,\tau}]_\Sigma = b^\mu K_\tau. \quad (2.72)$$

onde  $e^\mu$  e  $b^\mu$  representam o valor das derivadas dos campos  $E^\mu$  e  $B^\mu$  na superfície  $\Sigma$  e

$$K_\mu \doteq \frac{\partial \Sigma}{\partial x^\mu}, \quad (2.73)$$

é um 4-vetor normal a esta superfície. Em outras palavras,  $e^\mu$  e  $b^\mu$  são os vetores de polarização dos campos elétrico e magnético cujas frentes de ondas são normais ao 4-vetor de onda  $K_\lambda$  definido pela equação acima.

Tomando a descontinuidade das equações (2.65) e (2.66) sobre a superfície  $\Sigma$  e aplicando as condições de contorno de Hadamard, obteremos:

$$[D^{\alpha, \tau}]_\Sigma = \left( \varepsilon^\alpha_\beta e^\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta}{\partial E^\mu} E^\beta e^\mu + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta}{\partial B^\mu} E^\beta b^\mu \right) K_\tau, \quad (2.74)$$

$$[H^{\alpha, \tau}]_\Sigma = \left( \mu^\alpha_\beta b^\beta + \frac{\partial \mu^\alpha_\beta}{\partial E^\mu} B^\beta e^\mu + \frac{\partial \mu^\alpha_\beta}{\partial B^\mu} B^\beta b^\mu \right) K_\tau. \quad (2.75)$$

Desta forma, as equações de campo, Eq. (2.63) e Eq. (2.64), tornam-se

$$\begin{aligned} & \omega \left( \varepsilon^\alpha_\beta e^\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta}{\partial E^\mu} E^\beta e^\mu + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta}{\partial B^\mu} E^\beta b^\mu \right) + \\ & + \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} V_\gamma \left( \mu_{\lambda\beta} b^\beta + \frac{\partial \mu_{\lambda\beta}}{\partial E^\mu} B^\beta e^\mu + \frac{\partial \mu_{\lambda\beta}}{\partial B^\mu} B^\beta b^\mu \right) K_\tau = 0, \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\omega b^\alpha - \eta^{\alpha\tau\gamma\beta} V_\gamma e_\beta K_\tau = 0, \quad (2.77)$$

onde  $\omega$  é definido por

$$\omega \doteq K^\tau V_\tau, \quad (2.78)$$

e representa a frequência angular da onda eletromagnética.

Podemos ainda, reescrever as equações acima na seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \omega \left( \varepsilon^\alpha_\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\mu}{\partial E^\beta} E^\mu \right) e^\beta + \omega \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\mu}{\partial B^\beta} E^\mu b^\beta + \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} K_\tau V_\gamma \left( \mu_{\lambda\chi} + \frac{\partial \mu_{\lambda\nu}}{\partial B^\chi} B^\nu \right) b^\chi + \\ & + \frac{\partial \mu_{\lambda\beta}}{\partial E^\mu} \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} K_\tau V_\gamma B^\beta e^\mu = 0, \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$b^\alpha = \frac{1}{\omega} \eta^{\alpha\tau\gamma\beta} V_\gamma K_\tau e_\beta = \frac{1}{\omega} \eta^{\alpha\varphi\omega\beta} K_\varphi V_\omega e_\beta. \quad (2.80)$$

Substituindo  $b^\alpha$  de Eq. (2.80) em (2.79), teremos

$$\begin{aligned} & \left[ \omega \left( \varepsilon^\alpha_\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\mu}{\partial E^\beta} E^\mu \right) + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\mu}{\partial B^\chi} \eta^{\chi\varphi\omega}_\beta E^\mu K_\varphi V_\omega + \frac{\partial \mu_{\lambda\nu}}{\partial E^\beta} \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} B^\nu K_\tau V_\gamma + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega} \left( \mu_{\lambda\chi} + \frac{\partial \mu_{\lambda\nu}}{\partial B^\chi} B^\nu \right) \eta^{\chi\varphi\omega}_\beta \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} K_\varphi V_\omega K_\tau V_\gamma \right] e^\beta = 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

A fim de colocarmos esta equação em uma forma tridimensional, vamos utilizar o projetor  $h^\alpha_\beta$  definido anteriormente pela equação (2.13). Antes disso, podemos reescrever  $K^\mu$  dado pela Eq. (2.73) na forma

$$K^\mu = (\omega, \vec{q}), \quad (2.82)$$

onde  $\vec{q}$  é o vetor de onda. Resulta dessa definição que,

$$\begin{aligned} K^2 &\doteq K^\mu K_\mu \\ &= K^0 K_0 + K^i K_i \\ &= (K^0)^2 - (K^i)^2 \\ &= \omega^2 - |\vec{q}|^2 \\ &= \omega^2 - q^2. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Da definição (2.13) acima, temos:

$$\begin{aligned} q^\alpha &\doteq h^\alpha_\beta K^\beta \\ &= K^\alpha - \omega V^\alpha. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Ou seja,  $q^\alpha = (0, \vec{q})$ <sup>3</sup>. Notemos também que

$$\begin{aligned} q^\alpha q_\alpha &= q^0 q_0 + q^i q_i \\ &= (q^0)^2 - |\vec{q}|^2 \\ &= -q^2. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Utilizando a equação (2.84), podemos reescrever Eq. (2.81) na forma tridimensional, simplesmente trocando  $K^\alpha$  por  $q^\alpha$ , uma vez que é nula a contribuição de  $V^\alpha$ , oriunda do segundo membro de Eq. (2.84), e portanto, a equação original não é alterada. Dessa forma, teremos

$$Z^\alpha_\beta e^\beta = 0, \quad (2.86)$$

onde definimos o tensor  $Z^\alpha_\beta$  como

$$\begin{aligned} Z^\alpha_\beta &\doteq \varepsilon^\alpha_\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\mu}{\partial E^\beta} E^\mu + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\mu}{\partial B^\chi} \eta^{\chi\varphi\omega}{}_\beta E^\mu q_\varphi V_\omega + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \mu_{\lambda\nu}}{\partial E^\beta} \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} B^\nu q_\tau V_\gamma + \\ &+ \frac{1}{\omega^2} H_\lambda^\chi \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} \eta_{\chi\varphi\omega\beta} q_\tau V_\gamma q^\varphi V^\omega, \end{aligned} \quad (2.87)$$

---

<sup>3</sup>Note que  $h^\alpha_\beta$  projeta a componente temporal de  $K^\alpha$  no espaço, uma vez que  $q^\alpha$  é um vetor do tipo espaço.

com

$$H^\alpha{}_\beta \doteq \mu^\alpha{}_\beta + \frac{\partial \mu^{\alpha\lambda}}{\partial B^\beta} B^\lambda. \quad (2.88)$$

Da equação (2.40), temos:

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} \eta_{\chi\varphi\omega\beta} &= - \det \begin{pmatrix} \delta^\alpha{}_\chi & \delta^\alpha{}_\varphi & \delta^\alpha{}_\omega & \delta^\alpha{}_\beta \\ \delta^\tau{}_\chi & \delta^\tau{}_\varphi & \delta^\tau{}_\omega & \delta^\tau{}_\beta \\ \boxed{\delta^\gamma{}_\chi} & \boxed{\delta^\gamma{}_\varphi} & \delta^\gamma{}_\omega & \boxed{\delta^\gamma{}_\beta} \\ \delta^\lambda{}_\chi & \delta^\lambda{}_\varphi & \delta^\lambda{}_\omega & \delta^\lambda{}_\beta \end{pmatrix} \\ &= - \det \begin{pmatrix} \delta^\alpha{}_\chi & \delta^\alpha{}_\varphi & \delta^\alpha{}_\beta \\ \delta^\tau{}_\chi & \delta^\tau{}_\varphi & \delta^\tau{}_\beta \\ \delta^\lambda{}_\chi & \delta^\lambda{}_\varphi & \delta^\lambda{}_\beta \end{pmatrix} \delta^\gamma{}_\omega + \text{termos sem contribuições, na equação} \\ &\quad \text{(2.87), representados por } \square. \\ &= - (\delta^\alpha{}_\chi \delta^\tau{}_\varphi \delta^\lambda{}_\beta + \delta^\alpha{}_\varphi \delta^\tau{}_\beta \delta^\lambda{}_\chi + \delta^\alpha{}_\beta \delta^\tau{}_\chi \delta^\lambda{}_\varphi + \\ &\quad - \delta^\alpha{}_\beta \delta^\tau{}_\varphi \delta^\lambda{}_\chi - \delta^\alpha{}_\chi \delta^\tau{}_\beta \delta^\lambda{}_\varphi - \delta^\alpha{}_\varphi \delta^\tau{}_\chi \delta^\lambda{}_\beta) \delta^\gamma{}_\omega + \dots \end{aligned} \quad (2.89)$$

Assim,  $Z^\alpha{}_\beta$  torna-se

$$\begin{aligned} Z^\alpha{}_\beta &= \varepsilon^\alpha{}_\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha{}_\mu}{\partial E^\beta} E^\mu + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \varepsilon^\alpha{}_\mu}{\partial B^\chi} \eta^{\chi\varphi\omega}{}_\beta E^\mu q_\varphi V_\omega + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \mu_{\lambda\nu}}{\partial E^\beta} \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} B^\nu q_\tau V_\gamma + \\ &+ \frac{1}{\omega^2} (q^2 H_\beta{}^\alpha + H_\lambda{}^\alpha q^\lambda q_\beta + H_\beta{}^\chi q_\chi q^\alpha - q^2 H_\chi{}^\alpha \delta^\alpha{}_\beta - H_\chi{}^\alpha q^\alpha q_\beta - H_\lambda{}^\alpha q^\lambda q_\chi \delta^\alpha{}_\beta). \end{aligned} \quad (2.90)$$

Desde de que  $e^\beta V_\beta = 0$ , segue que

$$\delta^\alpha{}_\beta e^\beta = h^\alpha{}_\beta e^\beta, \quad (2.91)$$

e a equação (2.90) pode, finalmente, ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} Z^\alpha{}_\beta &\doteq \varepsilon^\alpha{}_\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha{}_\mu}{\partial E^\beta} E^\mu + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \varepsilon^\alpha{}_\mu}{\partial B^\chi} \eta^{\chi\varphi\omega}{}_\beta E^\mu q_\varphi V_\omega + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \mu_{\lambda\nu}}{\partial E^\beta} \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} B^\nu q_\tau V_\gamma + \\ &+ \frac{1}{\omega^2} (q^2 I^\lambda{}_\beta H_\lambda{}^\alpha - q^2 H_\chi{}^\alpha I^\alpha{}_\beta + H_\beta{}^\chi q_\chi q^\alpha - H_\lambda{}^\alpha q^\lambda q_\chi h^\alpha{}_\beta), \end{aligned} \quad (2.92)$$

onde definimos,

$$I^\alpha{}_\beta \doteq h^\alpha{}_\beta + \frac{q^\alpha q_\beta}{q^2}. \quad (2.93)$$

que é o projetor no subespaço ortogonal à direção de propagação  $\hat{q}^\mu \doteq q^\mu/q$ .

A solução geral para a propagação dos raios de luz pode ser obtida a partir da equação de auto-valores (2.86), como

$$\det |Z^\alpha{}_\beta| = 0. \quad (2.94)$$

Esta condição é conhecida na literatura como equação generalizada de Fresnel [27, 20, 42] e resultam na descrição da propagação dos raios de luz em meios materiais.

Para várias configurações físicas as relações de dispersão oriundas das soluções de Eq. (2.94) podem ser escritas em uma forma sugestiva  $g_{\pm}^{\mu\nu} K_{\mu} K_{\nu} = 0$ , como será mostrado no capítulo seguinte.

## 2.9 Relação de dispersão

Nesta seção apresentaremos a solução formal para o problema da propagação dos raios de luz em meios materiais com coeficientes  $\varepsilon^{\alpha}_{\beta}$  e  $\mu^{\alpha}_{\beta}$  dependentes de campos elétricos e magnéticos externos. Especificamente, examinaremos meios materiais com coeficientes isotrópicos:

$$\varepsilon^{\alpha}_{\beta} = \varepsilon(E, B) h^{\alpha}_{\beta}, \quad (2.95)$$

$$\mu^{\alpha}_{\beta} = \mu^{-1}(E, B) h^{\alpha}_{\beta}. \quad (2.96)$$

Uma vez que estes coeficientes dependem das intensidades de ambos os campos elétrico e magnético, mas não das direções destes, os resultados que iremos encontrar serão naturalmente apropriados para tratar com meios materiais líquidos.

Das equações (2.95) e (2.96), obtemos:

$$\frac{\partial \varepsilon^{\alpha}_{\beta}}{\partial E^{\tau}} = \frac{\partial \varepsilon^{\alpha}_{\beta}}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial E^{\tau}} = -\frac{E_{\tau}}{E} \frac{\partial \varepsilon^{\alpha}_{\beta}}{\partial E} = -\frac{E_{\tau}}{E} \frac{\partial \varepsilon}{\partial E} h^{\alpha}_{\beta}, \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial \mu^{\alpha}_{\beta}}{\partial E^{\tau}} = \frac{\partial \mu^{\alpha}_{\beta}}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial E^{\tau}} = -\frac{E_{\tau}}{E} \frac{\partial \mu^{\alpha}_{\beta}}{\partial E} = -\frac{E_{\tau}}{E} \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial E} h^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{\mu^2} \frac{E_{\tau}}{E} \frac{\partial \mu}{\partial E} h^{\alpha}_{\beta}. \quad (2.98)$$

De modo análogo,

$$\frac{\partial \varepsilon^{\alpha}_{\beta}}{\partial B^{\tau}} = -\frac{B_{\tau}}{B} \frac{\partial \varepsilon}{\partial B} h^{\alpha}_{\beta}, \quad (2.99)$$

$$\frac{\partial \mu^{\alpha}_{\beta}}{\partial B^{\tau}} = \frac{1}{\mu^2} \frac{B_{\tau}}{B} \frac{\partial \mu}{\partial B} h^{\alpha}_{\beta}. \quad (2.100)$$

Definindo as operações “linha” e “ponto” como:

$$X' \doteq \frac{1}{E} \frac{\partial X}{\partial E}, \quad (2.101)$$

$$\dot{X} \doteq \frac{1}{B} \frac{\partial X}{\partial B}, \quad (2.102)$$

as equações (2.97) - (2.100) acima podem ser reescritas na forma:

$$\frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta}{\partial E^\tau} = -E_\tau \varepsilon' h^\alpha_\beta, \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial \varepsilon^\alpha_\beta}{\partial B^\tau} = -B_\tau \dot{\varepsilon} h^\alpha_\beta, \quad (2.104)$$

$$\frac{\partial \mu^\alpha_\beta}{\partial E^\tau} = +E_\tau \frac{\mu'}{\mu^2} h^\alpha_\beta, \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial \mu^\alpha_\beta}{\partial B^\tau} = +B_\tau \frac{\dot{\mu}}{\mu^2} h^\alpha_\beta. \quad (2.106)$$

Introduzindo estes resultados em (2.92), resulta

$$\begin{aligned} Z^\alpha_\beta &= \varepsilon h^\alpha_\beta - \varepsilon' E^\alpha E_\beta - \frac{1}{\omega} \dot{\varepsilon} E^\alpha \eta^{\chi\varphi\omega}{}_\beta B_\chi q_\varphi V_\omega + \frac{1}{\omega \mu^2} \mu' \eta^{\alpha\tau\gamma\lambda} B_\lambda q_\tau V_\gamma E_\beta + \\ &+ \frac{1}{\omega^2} \left[ \left( -\frac{q^2}{\mu} - \frac{\dot{\mu}}{\mu^2} q^2 I^{\mu\nu} B_\mu B_\nu \right) h^\alpha_\beta + \left( \frac{\dot{\mu}}{\mu^2} B^2 - \frac{1}{\mu} \right) q^\alpha q_\beta + \frac{\dot{\mu}}{\mu^2} q^2 B^\alpha B_\beta + \right. \\ &\left. + \frac{\dot{\mu}}{\mu^2} (qB) q^\alpha B_\beta + \frac{\dot{\mu}}{\mu^2} (qB) B^\alpha q_\beta \right], \end{aligned} \quad (2.107)$$

onde usamos

$$q^2 I^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta = (qB)^2 - q^2 B^2, \quad (2.108)$$

com a notação

$$(XY) \doteq X^\alpha Y_\alpha, \text{ para quaisquer 4-vetores } X \text{ e } Y \text{ dados.} \quad (2.109)$$

Assim, podemos reescrever a equação (2.107) como

$$\begin{aligned} Z^\alpha_\beta &= \Lambda h^\alpha_\beta - \varepsilon' E^\alpha E_\beta + \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\dot{\mu} B^2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu} \right) q^\alpha q_\beta + \frac{\dot{\mu} q^2}{\mu^2 \omega^2} B^\alpha B_\beta + \\ &+ \frac{\dot{\mu}}{\mu^2 \omega^2} (qB) q^\alpha B_\beta + \frac{\dot{\mu}}{\mu^2 \omega^2} (qB) B^\alpha q_\beta - \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \eta^{\varphi\gamma\tau}{}_\beta q_\varphi V_\gamma B_\tau E^\alpha + \\ &- \frac{\mu'}{\omega \mu^2} \eta^{\varphi\gamma\tau\alpha} q_\varphi V_\gamma B_\tau E_\beta, \end{aligned} \quad (2.110)$$

com  $\Lambda$  dado por

$$\Lambda \doteq \varepsilon - \frac{q^2}{\mu \omega^2} - \frac{\dot{\mu} q^2}{\mu^2 \omega^2} I^{\mu\nu} B_\mu B_\nu. \quad (2.111)$$

A fim de encontrar soluções para a equação de auto-valores (2.86), devemos proceder ou via método de Cayley-Hamilton [61] ou por expansão de  $e^\beta$  em uma base conveniente de vetores do espaço tri-dimensional. Por simplicidade, iremos, neste trabalho, utilizar o método de expansão numa base para encontrar a solução geral da propagação de raios em termos das magnitudes  $E$

e  $B$  dos campos elétrico e magnético, respectivamente. É importante salientar, neste ponto, que a equação geral de propagação proveniente da solução de Eq. (2.94) independe da escolha de qual método de resolução se utiliza para tratar o problema de auto-valor. Para tentar justificar esta liberdade de escolha, no apêndice A recuperaremos um caso simples, utilizando o método de Cayley-Hamilton, e mostraremos que os resultados lá obtidos coincidem com os que iremos obter a seguir via método de expansão em uma base de vetores.

Vamos, então, escolher a expansão do vetor polarização  $e^\beta$  em termos dos vetores  $E^\beta$ ,  $B^\beta$  e  $q^\beta$  como

$$e^\beta = a E^\beta + b B^\beta + c q^\beta. \quad (2.112)$$

Assim, das equações (2.86) e (2.110), nós obteremos:

$$\begin{aligned} & \left\{ a \left[ \Lambda + \varepsilon' E^2 - \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \eta^{\varphi\gamma\tau\beta} q_\varphi V_\gamma B_\tau E_\beta \right] + b [-\varepsilon'(EB)] + c [-\varepsilon'(qE)] \right\} E^\alpha + \\ & \left\{ a \left[ \frac{\dot{\mu} q^2 (EB)}{\mu^2 \omega^2} + \frac{\dot{\mu} (qB)(qE)}{\mu^2 \omega^2} \right] + b \left[ \Lambda - \frac{\dot{\mu} q^2 B^2}{\mu^2 \omega^2} + \frac{\dot{\mu} (qB)^2}{\mu^2 \omega^2} \right] \right\} B^\alpha + \\ & \left\{ a \left[ \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\dot{\mu} B^2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu} \right) (qE) + \frac{\dot{\mu} (qB)(EB)}{\mu^2 \omega^2} \right] + b \left[ \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\dot{\mu} B^2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu} \right) (qB) - \frac{\dot{\mu} B^2 (qB)}{\mu^2 \omega^2} \right] + \right. \\ & \left. c \left[ \Lambda - \frac{q^2}{\omega^2} \left( \frac{\dot{\mu} B^2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\dot{\mu} (qB)^2}{\mu^2 \omega^2} \right] \right\} q^\alpha + \\ & \left\{ a \left[ \frac{\mu' E^2}{\mu^2 \omega} \right] + b \left[ -\frac{\mu' (EB)}{\mu^2 \omega} \right] + c \left[ -\frac{\mu' (qE)}{\mu^2 \omega} \right] \right\} \eta^{\varphi\gamma\tau\alpha} q_\varphi V_\gamma B_\tau = 0. \end{aligned} \quad (2.113)$$

O termo

$$\eta^{\varphi\gamma\tau\alpha} q_\varphi V_\gamma B_\tau \doteq \chi^\alpha, \quad (2.114)$$

que aparece acima pode ser expandido em termos da base proposta  $E^\beta$ ,  $B^\beta$ ,  $q^\beta$  como

$$\chi^\beta = \alpha E^\beta + \beta B^\beta + \gamma q^\beta. \quad (2.115)$$

Mas, das identidades

$$\chi^\alpha q_\alpha = 0, \quad (2.116)$$

$$\chi^\alpha B_\alpha = 0, \quad (2.117)$$

obtemos

$$\beta = -\frac{(EIB)}{(BIB)} \alpha, \quad (2.118)$$

$$\gamma = \frac{1}{q^2} \left[ (qE) - (qB) \frac{(EIB)}{(BIB)} \right] \alpha, \quad (2.119)$$

onde definimos

$$(XIY) \doteq (XY) + \frac{(qX)(qY)}{q^2}. \quad (2.120)$$

Temos também que,

$$\begin{aligned} \chi^\alpha \chi_\alpha &= (\alpha E^\beta + \beta B^\beta + \gamma q^\beta) (\alpha E_\beta + \beta B_\beta + \gamma q_\beta) \\ &= -\alpha^2 E^2 - \beta^2 B^2 - \gamma^2 q^2 + 2\alpha\beta(EB) + 2\alpha\gamma(qE) + 2\beta\gamma(qB). \end{aligned} \quad (2.121)$$

Usando os resultados apresentados por Eq. (2.118) e Eq. (2.119) na equação (2.121) e após simplificações, teremos:

$$\chi^\alpha \chi_\alpha = \left[ (EIE) - \frac{(EIB)^2}{(BIB)} \right] \alpha^2. \quad (2.122)$$

Mas por outro lado, com o auxílio de Eq. (2.40) e da notação dada por Eq. (2.120), teremos:

$$\begin{aligned} \chi^\alpha \chi_\alpha &= \eta^{\varphi\gamma\tau\alpha} q_\varphi V_\gamma B_\tau \eta_{\beta\lambda\omega\alpha} q^\beta V^\lambda B^\omega \\ &= q^2 (BIB). \end{aligned} \quad (2.123)$$

Comparando os resultados apresentados nas equações Eq. (2.122) e Eq. (2.123), segue:

$$\alpha = \frac{q(BIB)}{\sqrt{(EIE)(BIB) - (EIB)^2}}. \quad (2.124)$$

E substituindo este resultado em Eq. (2.118) e Eq. (2.119):

$$\beta = \frac{-q(EIB)}{\sqrt{(EIE)(BIB) - (EIB)^2}}, \quad (2.125)$$

$$\gamma = \frac{(qE)(BIB) - (qB)(EIB)}{q\sqrt{(EIE)(BIB) - (EIB)^2}}. \quad (2.126)$$

Então, retornando à expressão (2.113) e utilizando os resultados acima, teremos

$$\begin{aligned} &\left\{ a \left[ \Lambda + \varepsilon' E^2 - \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \eta^{\varphi\gamma\tau\beta} q_\varphi V_\gamma B_\tau E_\beta + \frac{\alpha \mu' E^2}{\mu^2 \omega} \right] + b \left[ -\varepsilon' (EB) - \frac{\alpha \mu' (EB)}{\mu^2 \omega} \right] + \right. \\ &\quad \left. c \left[ -\varepsilon' (qE) - \frac{\alpha \mu' (qE)}{\mu^2 \omega} \right] \right\} E^\alpha + \\ &\left\{ a \left[ \frac{\dot{\mu} q^2 (EB)}{\mu^2 \omega^2} + \frac{\dot{\mu} (qB)(qE)}{\mu^2 \omega^2} + \frac{\beta \mu' E^2}{\mu^2 \omega^2} \right] + b \left[ \Lambda - \frac{\dot{\mu} q^2 B^2}{\mu^2 \omega^2} + \frac{\dot{\mu} (qB)^2}{\mu^2 \omega^2} - \frac{\beta \mu' (EB)}{\mu^2 \omega} \right] + \right. \\ &\quad \left. c \left[ -\frac{\beta \mu' (qE)}{\mu^2 \omega} \right] \right\} B^\alpha + \\ &\left\{ a \left[ \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\dot{\mu} B^2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu} \right) (qE) + \frac{\dot{\mu} (qB)(EB)}{\mu^2 \omega^2} + \frac{\gamma \mu' E^2}{\mu^2 \omega} \right] + b \left[ \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\dot{\mu} B^2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu} \right) (qB) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\dot{\mu} B^2 (qB)}{\mu^2 \omega^2} - \frac{\gamma \mu' (EB)}{\mu^2 \omega} \right] + \left[ \Lambda - \frac{q^2}{\omega^2} \left( \frac{\dot{\mu} B^2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\dot{\mu} (qB)^2}{\mu^2 \omega^2} - \frac{\gamma \mu' (qE)}{\mu^2 \omega} \right] \right\} q^\alpha = 0. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Desde que  $\{E^\alpha, B^\alpha, q^\alpha\}$  são tomados como sendo linearmente independentes, a solução para o sistema acima é obtida pelo anulamento de cada um dos seus coeficientes. Assim, as equações acima podem ser apresentadas em uma forma mais conveniente como:

$$\begin{aligned} & a \left\{ \varepsilon + \left( \varepsilon' + \frac{\alpha \mu'}{\mu^2 \omega} \right) E^2 - \frac{q^2}{\mu \omega^2} \left[ 1 + \frac{\dot{\mu}}{\mu} (BIB) \right] - \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} [qVBE] \right\} - \\ & b \left\{ (EB) \left( \varepsilon' + \frac{\alpha \mu'}{\mu^2 \omega} \right) \right\} - c \left\{ (qE) \left( \varepsilon' + \frac{\alpha \mu'}{\mu^2 \omega} \right) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.128)$$

$$a \left\{ \frac{\dot{\mu} q^2 (EIB)}{\mu^2 \omega^2} + \frac{\beta \mu' E^2}{\mu^2 \omega} \right\} + b \left\{ \varepsilon - \frac{q^2}{\mu \omega^2} - \frac{\beta \mu' (EB)}{\mu^2 \omega} \right\} - c \left\{ \frac{\beta \mu' (qE)}{\mu^2 \omega} \right\} = 0, \quad (2.129)$$

$$\begin{aligned} & a \left\{ \frac{\dot{\mu}}{\mu^2 \omega^2} [B^2 (qE) + (qB)(EB)] - \frac{(qE)}{\mu \omega^2} + \frac{\gamma \mu' E^2}{\mu^2 \omega} \right\} - b \left\{ \frac{(qB)}{\mu \omega^2} + \frac{\gamma \mu' (EB)}{\mu^2 \omega} \right\} + \\ & c \left\{ \varepsilon - \frac{\gamma \mu' (qE)}{\mu^2 \omega} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.130)$$

onde definimos:

$$[qVBE] \doteq \eta^{\varphi\gamma\tau\beta} q_\varphi V_\gamma B_\tau E_\beta. \quad (2.131)$$

Agora, por simplicidade, vamos escrever o conjunto de equações acima como:

$$a \{A_1\} - b \{B_1\} - c \{C_1\} = 0, \quad (2.132)$$

$$a \{A_2\} + b \{B_2\} - c \{C_2\} = 0, \quad (2.133)$$

$$a \{A_3\} - b \{B_3\} + c \{C_3\} = 0. \quad (2.134)$$

Eliminando  $c$  de Eq.(2.134) e introduzindo-o nas equações Eq. (2.132) e Eq. (2.133), obtemos:

$$a \left( A_1 + A_3 \frac{C_1}{C_3} \right) - b \left( B_1 + B_3 \frac{C_1}{C_3} \right) = 0, \quad (2.135)$$

$$a \left( A_2 + A_3 \frac{C_2}{C_3} \right) + b \left( B_2 - B_3 \frac{C_2}{C_3} \right) = 0. \quad (2.136)$$

Então, segue das duas equações:

$$(A_2 B_3 + A_3 B_2) C_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3) C_2 + (A_1 B_2 + A_2 B_1) C_3 = 0 \quad (2.137)$$

onde definimos:

$$A_1 \doteq \varepsilon + \left( \varepsilon' + \frac{\alpha \mu'}{\mu^2 \omega} \right) E^2 - \frac{q^2}{\mu \omega^2} \left[ 1 + \frac{\dot{\mu}}{\mu} (BIB) \right] - \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} [qVBE], \quad (2.138)$$

$$A_2 \doteq \frac{\dot{\mu} q^2 (EIB)}{\mu^2 \omega^2} + \frac{\beta \mu' E^2}{\mu^2 \omega}, \quad (2.139)$$

$$A_3 \doteq \frac{\dot{\mu}}{\mu^2 \omega^2} [B^2 (qE) + (qB)(EB)] - \frac{(qE)}{\mu \omega^2} + \frac{\gamma \mu' E^2}{\mu^2 \omega}, \quad (2.140)$$

$$B_1 \doteq (EB) \left( \varepsilon' + \frac{\alpha \mu'}{\mu^2 \omega} \right), \quad (2.141)$$

$$B_2 \doteq \varepsilon - \frac{q^2}{\mu \omega^2} - \frac{\beta \mu' (EB)}{\mu^2 \omega}, \quad (2.142)$$

$$B_3 \doteq \frac{(qB)}{\mu \omega^2} + \frac{\gamma \mu' (EB)}{\mu^2 \omega}, \quad (2.143)$$

$$C_1 \doteq (qE) \left( \varepsilon' + \frac{\alpha \mu'}{\mu^2 \omega} \right), \quad (2.144)$$

$$C_2 \doteq \frac{\beta \mu' (qE)}{\mu^2 \omega}, \quad (2.145)$$

$$C_3 \doteq \varepsilon - \frac{\gamma \mu' (qE)}{\mu^2 \omega}. \quad (2.146)$$

A equação (2.137) é a equação geral da propagação de raios de luz em meios materiais isotrópicos caracterizados pelas quantidades  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  e  $\mu^{\alpha\beta}$  dependentes das magnitudes  $E$  e  $B$  dos campos elétrico e magnético, que resulta nas relações de dispersão para os raios de luz. Devido à dificuldade de se tratar esta equação geral e, conseqüentemente a relação de dispersão geral dela proveniente, iremos no capítulo seguinte, restringir a análise a apenas alguns casos particulares de interesse.

# Capítulo 3

## Birrefringência

A partir de agora, estaremos interessados em recuperar alguns casos já apresentados na literatura, com o objetivo não apenas de aplicar o formalismo desenvolvido no capítulo anterior como também demonstrar a aplicabilidade do mesmo, uma vez que os resultados a serem encontrados já são previamente conhecidos. Todos os casos tratados aqui são provenientes da ação induzida de campos eletromagnéticos em meios materiais dielétricos.

Dois casos bastante conhecidos na literatura são os chamados, efeito Kerr eletro-óptico e seu análogo, o efeito Cotton-Mouton magneto-óptico. Esses dois efeitos constituem casos da birrefringência linear e apresentam intensidades consideravelmente altas, sendo por isso, facilmente observados em experimentos no laboratório. Um terceiro caso existente, porém menos intenso do que os dois primeiros, é o chamado efeito Jones. Este último efeito constitui um caso particular de birrefringência que acompanha os outros dois. Devido à baixa intensidade com que se apresenta, ele é geralmente ofuscado pela presença dos outros dois e por isso é muito difícil de ser observado. Em ambos os casos a birrefringência constitui um efeito de segunda ordem nos campos aplicados. No primeiro caso, a permissividade elétrica  $\varepsilon^{\alpha}_{\beta}$  é uma função dependente apenas do campo elétrico  $\vec{E}$ , no segundo, a permeabilidade magnética  $\mu^{\alpha}_{\beta}$  é uma função apenas do campo magnético  $\vec{B}$  e, no último caso, a permissividade elétrica  $\varepsilon^{\alpha}_{\beta}$  é dependente de ambos os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ .

Conforme já salientamos antes, estamos particularmente interessados em tratar apenas com a dependência de  $\varepsilon^{\alpha}_{\beta}$  e  $\mu^{\alpha}_{\beta}$  nas magnitudes (módulos) dos campos, e não em considerar o carácter vetorial completo dos mesmos. Assim, todos os três casos mencionados acima serão obtidos com esta restrição particular. Por fim, para complementar o capítulo, nós derivaremos a geometria efetiva associada à propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais

arbitrários, caracterizados por  $\varepsilon^\alpha_\beta(E, B)$  e  $\mu^\alpha_\beta(E, B)$ , para cada situação explorada. Neste capítulo nós apresentamos apenas uma situação particular onde cada efeito mencionado pode ocorrer, uma vez que objetivo prioritário no momento é somente recuperar os três casos de birrefringência clássicos, encontrados na literatura. Na conclusão deste trabalho comentaremos sobre outras possíveis aplicações e futuras investigações neste tema.

### 3.1 Descrição de casos associados ao fenômeno da birrefringência

#### 3.1.1 Efeito Kerr [ $\varepsilon = \varepsilon(E)$ e $\mu = \text{constante}$ ]

O efeito Kerr foi descoberto em 1875 por J. Kerr [45] e ocorre quando um material dielétrico, opticamente isotrópico, é submetido à um campo elétrico externo. Este efeito é devido ao alinhamento das moléculas do meio na direção do campo elétrico externo. Em tal situação, o material se comporta opticamente como se fosse um cristal uniaxial no qual o campo elétrico define o seu eixo óptico, cuja direção coincide com a deste último. A magnitude do efeito é proporcional ao quadrado do campo elétrico aplicado.

Para recuperarmos o efeito Kerr clássico descrito na literatura, introduziremos na equação (2.137), as condições apropriadas para  $\varepsilon^\alpha_\beta$  e  $\mu^\alpha_\beta$ . Em particular, restringiremos a análise apenas ao caso em que o efeito decorre da condição em que  $\varepsilon = \varepsilon(E)$  e  $\mu = \mu_c$ .<sup>1</sup> Deve-se salientar, no entanto, que esta escolha de  $\varepsilon$  e  $\mu$  não é a única que apresenta a birrefringência de Kerr. De fato, se colocarmos a dependência em  $E$  na permeabilidade magnética, juntamente com a mesma dependência na permissividade elétrica, isto é,  $\varepsilon = \varepsilon(E)$  e  $\mu = \mu(E)$ , o efeito continuará ocorrendo. Entretanto, se retirarmos a dependência de  $E$  em  $\varepsilon$  e a mantivermos em  $\mu$  [ $\varepsilon = \varepsilon_c$  e  $\mu = \mu(E)$ ] a birrefringência de Kerr desaparece. Dessa forma, podemos concluir que, pelo menos para o caso da dependência dos tensores  $\varepsilon^\alpha_\beta$  e  $\mu^\alpha_\beta$  nas magnitudes dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , a condição necessária e suficiente para que o efeito Kerr possa ocorrer é que o tensor permissividade elétrica seja função do campo elétrico, independentemente da dependência ou não da permeabilidade magnética neste campo.

Então, para o caso mencionado acima, a equação (2.137) resulta

$$\left[ \left( \varepsilon + \varepsilon' E^2 - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} \right) \varepsilon - \frac{\varepsilon' (qE)^2}{\mu_c \omega^2} \right] \left( \varepsilon - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} \right) = 0, \quad (3.1)$$

<sup>1</sup>O índice  $c$  em  $\mu_c$  serve para enfatizar que a variável indexada  $\mu$  é uma constante numérica.

com soluções:

$$\begin{cases} \varepsilon - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} = 0, \\ \left( \varepsilon + \varepsilon' E^2 - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} \right) \varepsilon - \frac{\varepsilon' (qE)^2}{\mu_c \omega^2} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Desde que a velocidade de fase é definida por  $v_\varphi^2 = \omega^2/q^2$ , nós obtemos de Eq. (3.2-a):

$$v_o^2 = \frac{1}{\mu_c \varepsilon} = \frac{1}{\mu_c \varepsilon(E)}, \quad (3.3)$$

que é uma velocidade isotrópica. Por outro lado, de Eq. (3.2-b):

$$\frac{q^2}{\omega^2} \left[ \frac{1}{\mu_c} + \frac{\varepsilon' (\hat{q} \cdot \vec{E})^2}{\varepsilon \mu_c} \right] = \varepsilon + E \frac{\partial \varepsilon}{\partial E} = \frac{\partial (\varepsilon E)}{\partial E}, \quad (3.4)$$

onde  $\hat{q} = \vec{q}/q$ . Então,

$$v_e^2 = \frac{1}{\mu_c \partial(\varepsilon E)/\partial E} \left[ 1 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} E^2 (\hat{q} \cdot \hat{E})^2 \right], \quad (3.5)$$

com  $\hat{E} = \vec{E}/E$ .

Ou ainda, lembrando da definição (2.102):

$$v_e^2 = \frac{1}{\mu_c \partial(\varepsilon E)/\partial E} \left[ 1 + \frac{E}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial E} (\hat{q} \cdot \hat{E})^2 \right]. \quad (3.6)$$

Notemos que, para o caso particular onde a propagação ocorre na direção do campo elétrico externo,

$$\hat{q} \cdot \hat{E} = 1, \quad (3.7)$$

obtemos de Eq. (3.6) que

$$v_{e\parallel}^2 = \frac{1}{\mu_c \varepsilon(E)}. \quad (3.8)$$

Nós designamos  $v_o$  como a velocidade do raio ordinário e  $v_e$  como aquela do raio extraordinário, a qual depende da direção de propagação. Em particular, para o caso onde a propagação ocorre paralelamente ao campo elétrico externo,  $v_e$  reduz-se à velocidade do raio ordinário dada pela equação (3.3).

A diferença entre os raios ordinário e extraordinário assume seu valor máximo quando  $\hat{q} \cdot \hat{E} = 0$ . Neste caso, de Eq. (3.6):

$$v_{e\perp}^2 = \frac{1}{\mu_c \partial(\varepsilon E)/\partial E}. \quad (3.9)$$

Para a maioria dos casos [49, 52, 53], a permissividade comporta-se como

$$\varepsilon(E) = \varepsilon_c + \alpha E^2, \quad (3.10)$$

onde  $\varepsilon_c$  e  $\alpha$  são constantes numéricas. Resulta que,

$$v_{e\parallel}^2 = \frac{1}{\mu_c \varepsilon_c (1 + \alpha E^2 / \varepsilon_c)}, \quad (3.11)$$

$$v_{e\perp}^2 = \frac{1}{\mu_c \varepsilon_c (1 + 3\alpha E^2 / \varepsilon_c)}. \quad (3.12)$$

Os correspondentes índices de refração são dados por (tomando  $c = 1$ ):

$$n_{\parallel} = \sqrt{\mu_c \varepsilon_c} (1 + \alpha E^2 / \varepsilon_c)^{\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\varepsilon_c \mu_c} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha E^2}{\varepsilon_c} \right), \quad (3.13)$$

$$n_{\perp} = \sqrt{\mu_c \varepsilon_c} (1 + 3\alpha E^2 / \varepsilon_c)^{\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\varepsilon_c \mu_c} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha E^2}{\varepsilon_c} \right). \quad (3.14)$$

A diferença

$$n_{\perp} - n_{\parallel} \approx \frac{n_0 \alpha}{\varepsilon_c} E^2. \quad (3.15)$$

é o resultado experimentalmente conhecido como efeito Kerr, onde  $n_0 = \sqrt{\mu_c \varepsilon_c}$  é o índice de refração do meio na ausência de campos externos.

O resultado acima foi também obtido para um meio opticamente anisotrópico [28]. Uma representação gráfica do efeito Kerr, segue adiante na figura 3.1.

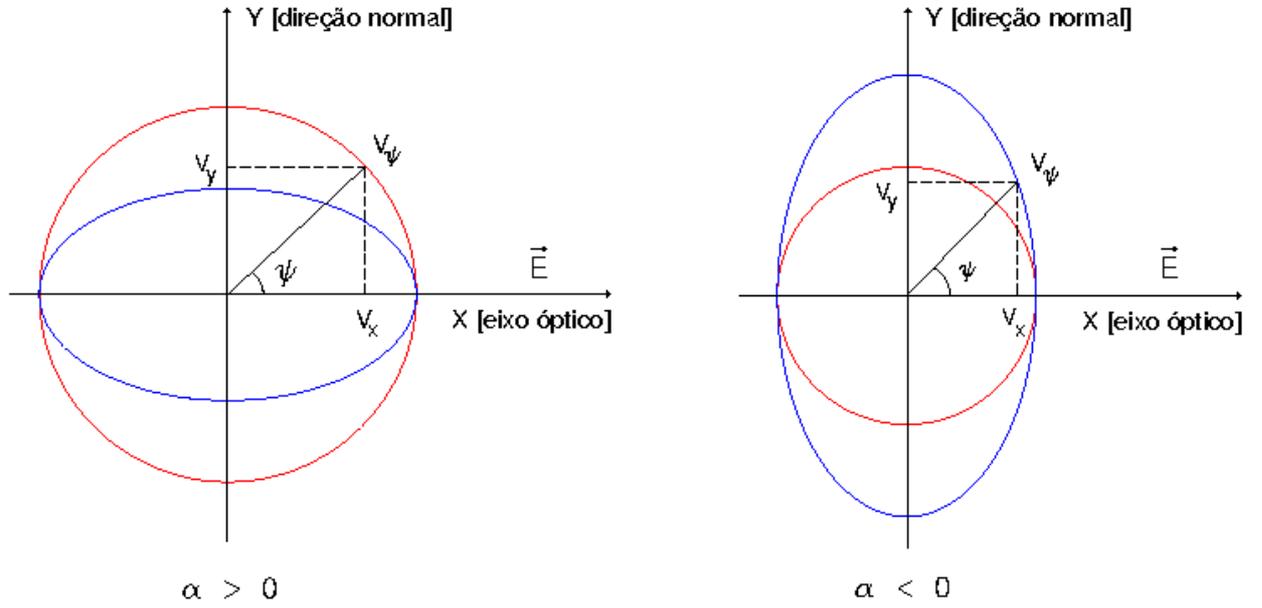


Figura 3.1: Frentes de onda dos raios ordinário e extraordinário no efeito Kerr eletro-óptico, para  $\alpha > 0$  (figura à esquerda) e  $\alpha < 0$  (figura à direita). A circunferência representa a frente de onda do raio ordinário e a elipse representa a frente de onda do raio extraordinário.

### Geometria efetiva no efeito Kerr:

As condições para a propagação, dadas por Eq. (3.2), podem ser apresentadas em uma forma mais atraente como,

$$g_{\pm}^{\mu\nu} K_{\mu}^{\pm} K_{\nu}^{\pm} = 0, \quad (3.16)$$

onde o tensor simétrico  $g_{\pm}^{\mu\nu}$  representa a geometria efetiva, também conhecida como métrica óptica, associada com a propagação de ondas eletromagnéticas no meio. Esta quantidade é vista pela onda eletromagnética como sendo a responsável pela curvatura do espaço-tempo efetivo, representado pelo meio material, no qual ela se propaga. O símbolo  $\pm$  indica que, em geral, poderão existir duas métricas distintas, cada uma correspondendo a um modo de polarização possível.

Destá maneira, a equação (3.16) mostra que os vetores  $K_{\mu}^{\pm}$  são tangentes as curvas geodésicas nulas nas correspondentes geometrias  $g_{\pm}^{\mu\nu}$ , o que constitui um desvio do espaço-tempo de fundo de Minkowski. Na verdade, pode-se mostrar [36] que  $K_{\mu}^{\pm}$  satisfaz a equação geodésica  $K_{\mu;\lambda} K^{\lambda} = 0$ , onde o ponto e vírgula denota a derivada covariante na geometria  $g^{\mu\nu}$ . Assim, desde que  $K_{\mu}$  é um vetor nulo em tal geometria, as curvas integrais de  $K_{\mu}$  serão geodésicas nulas.

<sup>2</sup>Por simplicidade de notação, omitiremos o sinal  $\pm$ .

A geometria efetiva para o efeito Kerr pode ser obtida a partir de Eq. (3.2), que representa, respectivamente, as condições sobre os cones de luz para os raios ordinário e extraordinário. Então, utilizando as relações (2.83) e (2.84), nós obteremos de Eq. (3.2), o seguinte:

$$\varepsilon \mu \omega^2 - \omega^2 + K^2 = 0, \quad (3.17)$$

$$\left[ \varepsilon + \varepsilon' E^2 - \frac{(\omega^2 - K^2)}{\mu \omega^2} \right] \varepsilon - \frac{\varepsilon'}{\mu} \frac{(K^\mu E_\mu)^2}{\omega^2} = 0. \quad (3.18)$$

Então, de Eq. (3.18), teremos:

$$\mu(\varepsilon + \varepsilon' E^2) V^\mu V^\nu K_\mu K_\nu - V^\mu V^\nu K_\mu K_\nu + \eta^{\mu\nu} K_\mu K_\nu - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} E^\mu E^\nu K_\mu K_\nu = 0. \quad (3.19)$$

Ou ainda,

$$\left\{ \eta^{\mu\nu} - [1 - \mu(\varepsilon + \varepsilon' E^2)] V^\mu V^\nu - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} E^\mu E^\nu \right\} K_\mu K_\nu = 0, \quad (3.20)$$

que pode ser apresentada na forma

$$g_e^{\mu\nu} K_\mu K_\nu = 0, \quad (3.21)$$

onde definimos a geometria efetiva para o raio extraordinário:

$$g_e^{\mu\nu} \doteq \eta^{\mu\nu} - [1 - \mu(\varepsilon + \varepsilon' E^2)] V^\mu V^\nu - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} E^\mu E^\nu = 0. \quad (3.22)$$

Para o raio ordinário, segue de Eq. (3.17), que:

$$[(1 - \mu \varepsilon) V^\mu V^\nu - \eta^{\mu\nu}] K_\mu K_\nu = 0, \quad (3.23)$$

ou ainda,

$$[\eta^{\mu\nu} - (1 - \mu \varepsilon) V^\mu V^\nu] K_\mu K_\nu = 0, \quad (3.24)$$

que pode ser apresentada como:

$$g_o^{\mu\nu} K_\mu K_\nu = 0, \quad (3.25)$$

onde definimos a geometria efetiva para o raio ordinário como:

$$g_o^{\mu\nu} \doteq \eta^{\mu\nu} - (1 - \mu \varepsilon) V^\mu V^\nu. \quad (3.26)$$

Os resultados apresentados nas equações (3.22) e (3.26) são os mesmos obtidos anteriormente [27, 28, 30, 32].

### 3.1.2 Efeito Cotton-Mouton [ $\varepsilon = \text{constante}$ e $\mu = \mu(B)$ ]

Este efeito constitui o análogo magnético do efeito Kerr. Ele foi descoberto por Cotton e Mouton no final do século XIX [46] e acontece devido ao alinhamento das moléculas do material na direção de um campo magnético externo. Assim como no efeito Kerr, ele é proporcional ao quadrado da magnitude do campo aplicado. Para recuperarmos o efeito Cotton-Mouton tradicional, existente na literatura, iremos retornar à equação (2.137) com a seguinte condição para  $\varepsilon^\alpha_\beta$  e  $\mu^\alpha_\beta$ :  $\varepsilon = \varepsilon_c$  e  $\mu = \mu(B)$ . De modo análogo ao efeito Kerr, este efeito pode ainda ser obtido considerando a dependência no módulo do campo magnético aplicado, tanto na permissividade elétrica como na permeabilidade magnética, ou seja,  $\varepsilon = \varepsilon(B)$  e  $\mu = \mu(B)$ . O caso onde  $\varepsilon = \varepsilon(B)$  e  $\mu = \mu_c$  não exhibe sequer o fenômeno da birrefringência, tão pouco o efeito Cotton-Mouton que é um caso particular deste. Logo, notamos que a condição necessária e suficiente para que este efeito possa ocorrer, é que o tensor permeabilidade magnética  $\mu^\alpha_\beta$  seja dependente do campo magnético aplicado, pelo menos no caso da dependência na magnitude deste campo.

Uma vez que o objetivo neste momento é apenas exibir o efeito em si, restringiremos a análise apenas ao primeiro caso mencionado. Os demais casos mencionados poderão ser obtidos seguindo o mesmo procedimento adotado para este caso.

Assim sendo, da equação (2.137), temos

$$\left\{ \varepsilon_c - \frac{q^2}{\mu\omega^2} \left[ 1 + \frac{\dot{\mu}}{\mu} \left( -B^2 + \frac{(qB)^2}{q^2} \right) \right] \right\} \left( \varepsilon_c - \frac{q^2}{\mu\omega^2} \right) \varepsilon_c = 0, \quad (3.27)$$

que resulta em:

$$\begin{cases} \left( \varepsilon_c - \frac{q^2}{\mu\omega^2} \right) \varepsilon_c = 0, \\ \varepsilon_c - \frac{q^2}{\mu\omega^2} \left\{ 1 + \frac{\dot{\mu}}{\mu} \left[ -B^2 + \frac{(qB)^2}{q^2} \right] \right\} = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Então, haverá duas velocidades de fase distintas, uma das quais é isotrópica (raio ordinário)

$$v_o^2 = \frac{1}{\varepsilon_c \mu(B)}, \quad (3.29)$$

resultante de Eq. (3.28-a), e outra dependente da direção de propagação (raio extraordinário)

$$v_e^2 = \frac{1}{\varepsilon_c \mu(B)} \left\{ 1 - \frac{\dot{\mu}}{\mu} B^2 \left[ 1 - (\hat{q} \cdot \hat{B})^2 \right] \right\}, \quad (3.30)$$

decorrente de Eq. (3.28-b), onde utilizamos que  $\vec{q} = q \hat{q}$  e  $\vec{B} = B \hat{B}$ .

A equação acima pode ainda, da Eq. (2.102), ser escrita como:

$$v_e^2 = \frac{1}{\varepsilon_c \mu(B)} \left\{ 1 - \frac{B}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial B} \left[ 1 - (\hat{q} \cdot \hat{B})^2 \right] \right\}. \quad (3.31)$$

Para os casos extremos onde

$$\hat{q} \cdot \hat{B} = 1 \quad \text{e} \quad \hat{q} \cdot \hat{B} = 0, \quad (3.32)$$

obtemos, respectivamente, de Eq. (3.31), o seguinte:

$$v_{e\parallel}^2 = \frac{1}{\varepsilon_c \mu(B)}, \quad (3.33)$$

$$v_{e\perp}^2 = \frac{1}{\varepsilon_c \mu(B)} \left( 1 - \frac{B}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial B} \right). \quad (3.34)$$

Para a maioria dos casos [49, 52, 53], a permeabilidade é dada como

$$\mu^{-1}(B) = \mu_c^{-1} + \beta B^2, \quad (3.35)$$

onde  $\mu_c$  e  $\beta$  são constantes numéricas. Resulta então, que:

$$v_{e\parallel}^2 = \frac{1 + \beta \mu_c B^2}{\mu_c \varepsilon_c}, \quad (3.36)$$

$$v_{e\perp}^2 = \frac{1 + 3\beta \mu_c B^2}{\mu_c \varepsilon_c}. \quad (3.37)$$

Os correspondentes índices de refração são dados por

$$n_{\parallel} = \sqrt{\mu_c \varepsilon_c} (1 + \beta \mu_c B^2)^{-\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\mu_c \varepsilon_c} \left( 1 - \frac{1}{2} \beta \mu_c B^2 \right), \quad (3.38)$$

$$n_{\perp} = \sqrt{\mu_c \varepsilon_c} (1 + 3\beta \mu_c B^2)^{-\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\mu_c \varepsilon_c} \left( 1 - \frac{3}{2} \beta \mu_c B^2 \right), \quad (3.39)$$

e

$$n_{\parallel} - n_{\perp} \approx \frac{n_0 \beta}{\mu_c^{-1}} B^2, \quad (3.40)$$

que é o efeito o conhecido efeito Cotton-Mouton, onde  $n_0 = \sqrt{\mu_c \varepsilon_c}$  é o índice de refração do meio na ausência de campos externos. Conforme já salientamos antes, este efeito é completamente análogo ao efeito Kerr e pode ser obtido a partir deste último, simplesmente considerando a rotação dual nos campos eletromagnéticos.

A representação gráfica do comportamento dos raios ordinário e extraordinário, para este caso, é dada pela figura 3.2 adiante.

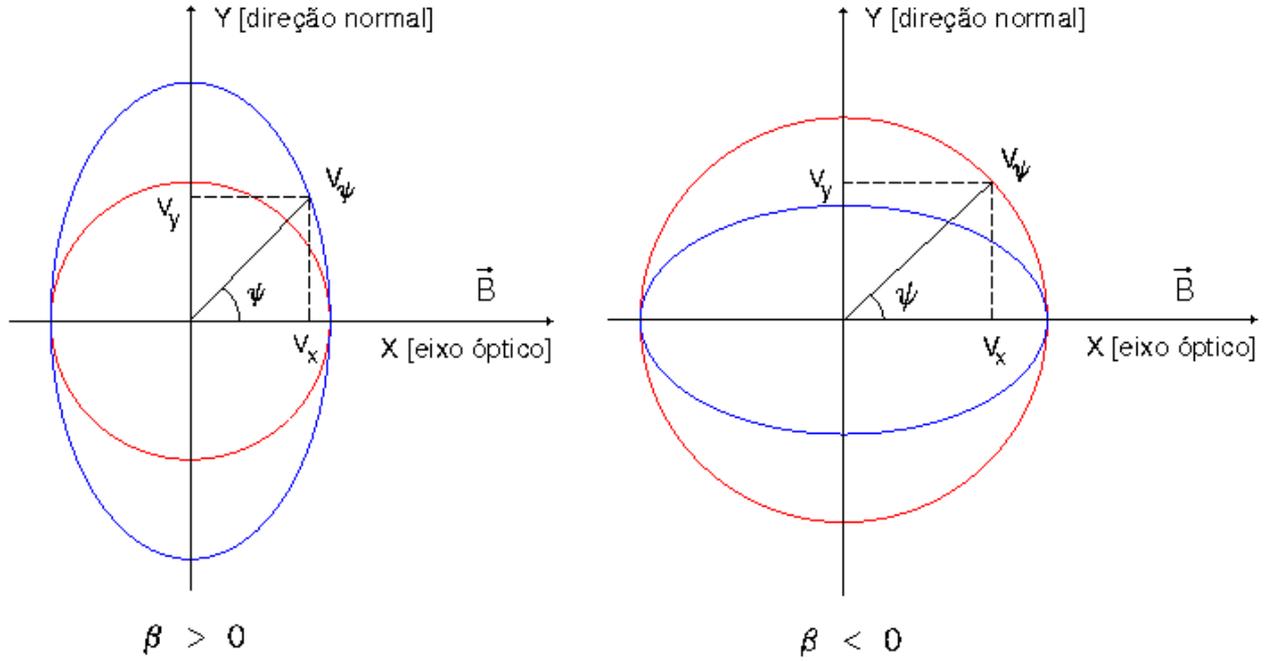


Figura 3.2: Frentes de onda dos raios ordinário e extraordinário no efeito Cotton-Mouton magneto-óptico, para  $\beta > 0$  (figura à esquerda) e  $\beta < 0$  (figura à direita). A circunferência representa a frente de onda do raio ordinário e a elipse representa a frente de onda do raio extraordinário.

### Geometria efetiva no efeito Cotton-Mouton:

A geometria efetiva para o efeito Cotton-Mouton pode ser obtida de maneira similar a do efeito Kerr. Assim, da equação (3.28), resulta:

$$\varepsilon \mu \omega^2 - \omega^2 + K^2 = 0, \quad (3.41)$$

$$\mu \varepsilon \omega^2 - \left\{ q^2 + \frac{\dot{\mu}}{\mu} [-B^2 q^2 + (qB)^2] \right\}. \quad (3.42)$$

Notemos que Eq. (3.41), é idêntica a equação (3.18). Assim, para o raio ordinário no efeito Cotton-Mouton, a geometria efetiva é dada pela Eq. (3.26)

$$g_o^{\mu\nu} \doteq \eta^{\mu\nu} - (1 - \mu\varepsilon) V^\mu V^\nu, \quad (3.43)$$

e portanto pode ser escrita na forma:

$$g_o^{\mu\nu} K_\mu K_\nu = 0. \quad (3.44)$$

Para o raio extraordinário, teremos de Eq. (3.42):

$$\mu \varepsilon V^\mu V^\nu K_\mu K_\nu - \frac{1}{\mu} (\mu + \dot{\mu} B^2) (V^\mu V^\nu K_\mu K_\nu - \eta^{\mu\nu} K_\mu K_\nu) - \frac{\dot{\mu}}{\mu} B^\mu B^\nu K_\mu K_\nu = 0. \quad (3.45)$$

Ou ainda,

$$\left[ \eta^{\mu\nu} - \left( 1 - \frac{\mu^2 \varepsilon}{\mu + \dot{\mu} B^2} \right) V^\mu V^\nu - \frac{\dot{\mu}}{\mu + \dot{\mu} B^2} B^\mu B^\nu \right] K_\mu K_\nu = 0, \quad (3.46)$$

que pode ser apresentada como:

$$g_e^{\mu\nu} K_\mu K_\nu = 0, \quad (3.47)$$

onde nós definimos a geometria efetiva para o raio extraordinário:

$$g_e^{\mu\nu} \doteq \eta^{\mu\nu} - \left( 1 - \frac{\mu^2 \varepsilon}{\mu + \dot{\mu} B^2} \right) V^\mu V^\nu - \frac{\dot{\mu}}{\mu + \dot{\mu} B^2} B^\mu B^\nu. \quad (3.48)$$

### 3.1.3 Birrefringência Magneto-Elétrica [ $\varepsilon = \varepsilon(E, B)$ e $\mu = \text{constante}$ ]

Birrefringência magneto-elétrica é um terceiro caso de birrefringência que pode ocorrer, quando ambos os campos elétrico e magnético estão presentes no meio material. Um caso particular deste tipo de birrefringência é o chamado efeito Jones [54]. Este último efeito foi proposto pela primeira em 1948 por R. Clark Jones, como consequência de um formalismo matricial por ele desenvolvido. o efeito Jones pode ser induzido em fluidos pela ação simultânea de um campo elétrico e magnético paralelos entre si e perpendiculares a direção de propagação da luz. Neste caso, o efeito obtido é linear no produto dos campos aplicados.

Da mesma forma que nos casos anteriores, existem também aqui várias possibilidades de escolha, para  $\varepsilon$  e  $\mu$ , onde efeitos de birrefringência magneto-elétrica, em particular o efeito Jones, podem aparecer. Por exemplo, podemos ter:  $\varepsilon(E, B)$ ,  $\mu(E, B)$ ;  $\varepsilon(E, B)$ ,  $\mu(E)$ ;  $\varepsilon(E, B)$ ,  $\mu(B)$  e  $\varepsilon(E, B)$  com  $\mu$  constante. Uma vez que o efeito Jones é um efeito de baixa intensidade que vem seguido de outros efeitos predominantes sobre ele, podemos concluir, de posse das condições discutidas anteriormente para a existência das birrefringências de Kerr e Cotton-Moutton, que nesse efeito pelo menos uma destas duas birrefringências devem acompanhá-lo. Assim, para o caso de  $\varepsilon(E, B)$  e  $\mu(E, B)$ , todos os três efeitos devem aparecer simultaneamente. Já para os casos onde,  $\varepsilon = \varepsilon(E, B)$  com  $\mu = \mu(E)$  e  $\varepsilon = \varepsilon(E, B)$  com  $\mu$  constante, apenas a birrefringência de Jones e a de Kerr podem aparecer. Os casos onde aparece a dependência de ambos os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  na permeabilidade magnética estão ainda em fase de estudo. No entanto, esperamos

que esses casos apresentem a mesma simetria. Assim, por exemplo, os casos onde  $\varepsilon$  é constante e  $\mu = \mu(E, B)$  e  $\varepsilon = \varepsilon(B)$  com  $\mu = \mu(E, B)$ , somente o efeito Cotton-Mouton deve aparecer acompanhado do efeito Jones. Assim, os casos onde  $\varepsilon = \varepsilon(E)$  e  $\mu = \mu(B)$ , apresentarão apenas os efeitos Kerr, e Cotton-Mouton, e para aqueles onde  $\varepsilon = \varepsilon(B)$  e  $\mu = \mu(E)$  nenhum dos três efeitos deverá ocorrer.

A fim de descrever o efeito Jones, consideraremos, nesta seção, o caso particular onde  $\varepsilon = \varepsilon(E, B)$  e  $\mu = \mu_c$ , onde mais uma vez estamos interessados apenas em apresentar o efeito como uma aplicação do formalismo, e não em explorar todas as possibilidades existentes. Até porque, uma vez que tanto o campo elétrico quanto o campo magnético estão presentes, a solução da equação (2.137) para os demais casos torna-se mais complicada e será deixada, então, para análise e trabalhos futuros.

Retornando, então, à equação (2.137) com a condição imposta sobre  $\varepsilon$  e  $\mu$ , teremos

$$\left[ \varepsilon (\varepsilon + \varepsilon' E^2) - \frac{\varepsilon}{\mu_c} \frac{q^2}{\omega^2} - \frac{\varepsilon'}{\mu_c} \frac{(qE)^2}{\omega^2} - \frac{\varepsilon \dot{\varepsilon} [qVBE]}{\omega} \right] \left( \varepsilon - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} \right) = 0, \quad (3.49)$$

que resulta em

$$\begin{cases} \varepsilon - \frac{q^2}{\mu_c \omega^2} = 0, \\ \varepsilon (\varepsilon + \varepsilon' E^2) - \frac{\varepsilon}{\mu_c} \frac{q^2}{\omega^2} - \frac{\varepsilon'}{\mu_c} \frac{(qE)^2}{\omega^2} - \frac{\varepsilon \dot{\varepsilon} [qVBE]}{\omega} = 0. \end{cases} \quad (3.50)$$

Logo, da Eq. (3.50-a), segue

$$v_o^2 = \frac{1}{\mu_c \varepsilon(E, B)} \quad (3.51)$$

a velocidade isotrópica (raio ordinário). Por outro lado, de Eq. (3.50-b), resulta

$$(\varepsilon + \varepsilon' E^2) v_e^2 - \dot{\varepsilon} [qVBE] v_e - \frac{1}{\mu_c} \left[ 1 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} (\hat{q} \cdot \vec{E})^2 \right] = 0, \quad (3.52)$$

que é a equação da velocidade do raio extraordinário, cuja solução é dada por

$$v_e^\pm = \frac{1}{2(\varepsilon + \varepsilon' E^2)} \left\{ \dot{\varepsilon} [qVBE] \pm \sqrt{\dot{\varepsilon}^2 [qVBE]^2 + \frac{4}{\mu_c} (\varepsilon + \varepsilon' E^2) \left[ 1 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} (\hat{q} \cdot \vec{E})^2 \right]} \right\}, \quad (3.53)$$

com  $\hat{q} = \vec{q}/q$ .

Então, a princípio, haverão três velocidades distintas. De fato, a equação acima contém dois valores possíveis para a velocidade do raio extraordinário. Assim, associado a uma dada direção, o raio extraordinário se propaga com velocidades diferentes em sentidos opostos. Este fato constitui uma sutileza inédita de um fenômeno óptico e constitui uma generalização do efeito de birrefringência magneto-elétrica apresentado na literatura. Isto mostra o sucesso do formalismo aqui apresentado, na descrição de fenômenos eletro-magneto-ópticos.

### Birrefringência magneto-elétrica linear

A análise de  $v_e^\pm$  acima, para o caso geral, constitui uma tarefa um tanto complicada e, por isso, ainda está sendo realizada. A fim de examinarmos algumas configurações particulares para o efeito de birrefringência magneto-elétrica, notemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
 [\hat{q} V B E] &= \eta^{\mu\gamma\tau\beta} \hat{q}_\mu V_\gamma B_\tau E_\beta \\
 &= -\eta^{\mu\tau\gamma\beta} \hat{q}_\mu B_\tau V_\gamma E_\beta \\
 &= -\left[ \hat{q}_\mu (\vec{B} \times \vec{E})^\mu \right] \\
 &= \hat{q} \cdot (\vec{B} \times \vec{E}).
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Desta forma, se considerarmos, por exemplo,  $\vec{E} = E \hat{y}$ ,  $\vec{B} = B (-\hat{z})$  e  $\hat{q} = \hat{x}$ , segue que:

$$[\hat{q} V B E] = EB. \tag{3.55}$$

e portanto, a equação (3.53) torna-se:

$$v_e^\pm = \frac{\dot{\epsilon} EB}{2(\epsilon + \epsilon' E^2)} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4(\epsilon + \epsilon' E^2)}{\mu_c (\dot{\epsilon} EB)^2}} \right]. \tag{3.56}$$

### Polarização

Os vetores de polarização associados aos raios ordinário [Eq. (3.51)] e extraordinário [Eq. (3.56)], para o caso de BME, podem ser obtidos a partir das equações (2.128) – (2.130), considerando-se que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são perpendiculares à direção de propagação, ou seja,  $(qE) = 0 = (qB)$ . Assim,

$$a \left\{ \left( \epsilon - \frac{q^2}{\mu\omega^2} \right) + \epsilon' E^2 - q EB \frac{\dot{\epsilon}}{\omega} \hat{q} \cdot \hat{E} \times \hat{B} \right\} = 0, \tag{3.57}$$

$$b \left\{ \left( \epsilon - \frac{q^2}{\mu\omega^2} \right) \right\} = 0, \tag{3.58}$$

$$c \{ \epsilon \} = 0. \tag{3.59}$$

Da equação (3.59) resulta que  $c = 0$  e da equação (3.58) segue que  $b$  é arbitrário. Desse modo, da Eq. (3.57), pode-se notar que o vetor de polarização será função apenas de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Assim da Eq. (3.57), escrevendo  $b$  em termos de  $a$ , teremos

$$b = -a \left\{ \frac{1}{EB\epsilon'} \left( \epsilon - \frac{q^2}{\mu\omega^2} \right) + \frac{E}{B} - \frac{q}{\omega} \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon'} \hat{q} \cdot \hat{E} \times \hat{B} \right\}. \tag{3.60}$$

Introduzindo-se este resultado na equação (2.112), teremos

$$e^\beta = a \left\{ E^\beta - \left[ \frac{1}{EB\epsilon'} \left( \epsilon - \frac{q^2}{\mu\omega^2} \right) + \frac{E}{B} - \frac{q}{\omega} \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon'} \hat{q} \cdot \hat{E} \times \hat{B} \right] B^\beta \right\}. \quad (3.61)$$

Então, para o caso particular de birrefringência magneto-elétrica que estamos tratando, obtemos os seguintes modos de polarização:

i) *Raio ordinário*: Neste caso, o termo entre parênteses da Eq. (3.61) é nulo, resultando

$$e_o^\beta = a \left\{ E^\beta - \left[ \frac{E}{B} - \frac{q}{\omega} \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon'} \hat{q} \cdot \hat{E} \times \hat{B} \right] B^\beta \right\}. \quad (3.62)$$

ii) *Raio extraordinário*: Neste caso, o termo entre colchetes da Eq. (3.61) é nulo, resultando

$$e_e^\beta = a E^\beta. \quad (3.63)$$

Note que sempre podemos escolher a constante  $a$  de forma que os vetores de polarização sejam normalizados.

Vamos agora analisar o comportamento dos dois raios acima. Para isso, consideremos que o coeficiente de permissividade seja expresso por

$$\epsilon = \epsilon_c + \alpha E^2 + \beta B^2 + \gamma EB. \quad (3.64)$$

Assim, decorre que:

$$\epsilon' E^2 = 2\alpha E^2 + \gamma EB, \quad (3.65)$$

$$\dot{\epsilon} EB = 2\beta EB + \gamma E^2. \quad (3.66)$$

Logo, a Equação (3.56) torna-se

$$\begin{aligned} v_e^\pm &= \frac{2\beta EB + \gamma E^2}{2(\epsilon_c + 3\alpha E^2 + \beta B^2 + 2\gamma EB)} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4(\epsilon_c + 3\alpha E^2 + \beta B^2 + 2\gamma EB)}{\mu_c (2\beta EB + \gamma E^2)^2}} \right] \\ &= \frac{2\beta EB + \gamma E^2}{2\epsilon_c \left( 1 + \frac{3\alpha E^2 + \beta B^2 + 2\gamma EB}{\epsilon_c} \right)} \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon_c \mu_c}} \frac{\left( 1 + \frac{3\alpha E^2 + \beta B^2 + 2\gamma EB}{2\epsilon_c} \right)}{\left( 1 + \frac{3\alpha E^2 + \beta B^2 + 2\gamma EB}{\epsilon_c} \right)} \\ &= \frac{2\beta EB + \gamma E^2}{2\epsilon_c [1 + \mathcal{O}(\alpha)]} \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon_c \mu_c}} \left( 1 - \frac{3\alpha E^2 + \beta B^2 + 2\gamma EB}{\epsilon_c} \right) \left( 1 + \frac{3\alpha E^2 + \beta B^2 + 2\gamma EB}{2\epsilon_c} \right) \\ &= \frac{1}{2\epsilon_c} (2\beta EB + \gamma E^2) \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon_c \mu_c}} \left( 1 - \frac{3\alpha E^2 + \beta B^2 + 2\gamma EB}{2\epsilon_c} \right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde os termos de ordem  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  foram desprezados, bem como os de ordem em  $\beta$  e  $\gamma$ . Podemos ainda, reescrever a equação (3.67), na seguinte maneira:

$$v_e^\pm = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_c \mu_c}} + \frac{1}{2\varepsilon_c} \left[ 2\beta EB + \gamma E^2 \mp \left( \frac{3\alpha E^2 + \beta B^2 + 2\gamma EB}{\sqrt{\varepsilon_c \mu_c}} \right) \right]. \quad (3.68)$$

Desta forma, temos que:

$$v_e^+ = + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_c \mu_c}} + \frac{1}{2\varepsilon_c} \left[ 2\beta EB + \gamma E^2 - \left( \frac{3\alpha E^2 + \beta B^2 + 2\gamma EB}{\sqrt{\varepsilon_c \mu_c}} \right) \right], \quad (3.69)$$

$$v_e^- = - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_c \mu_c}} + \frac{1}{2\varepsilon_c} \left[ 2\beta EB + \gamma E^2 + \left( \frac{3\alpha E^2 + \beta B^2 + 2\gamma EB}{\sqrt{\varepsilon_c \mu_c}} \right) \right]. \quad (3.70)$$

Ou ainda, definindo

$$A \doteq \frac{2\beta EB + \gamma E^2}{2\varepsilon_c}, \quad (3.71)$$

$$C \doteq \frac{3\alpha E^2 + \beta B^2 + 2\gamma EB}{2\varepsilon_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}}. \quad (3.72)$$

teremos

$$v_e^+ = + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_c \mu_c}} + (A - C), \quad (3.73)$$

e

$$v_e^- = - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_c \mu_c}} + (A + C). \quad (3.74)$$

Note que existe uma grande possibilidade de soluções para  $v_e^+$  e  $v_e^-$  apenas fixando valores para as variáveis  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon_c$ ,  $\mu_c$ ,  $B$  e  $E$ .

Assim, para o caso onde, por exemplo,  $A = C$ , com  $A$  e  $C$  positivos, teremos:

$$|v_e^+| > |v_e^-|. \quad (3.75)$$

com

$$|v_e^+| > |v_o| \quad \text{e} \quad |v_e^-| < |v_o|. \quad (3.76)$$

Desta forma, uma configuração possível para o efeito de birrefringência magneto-elétrica linear, seria por exemplo, a que está representada na figura 3.3 a seguir.

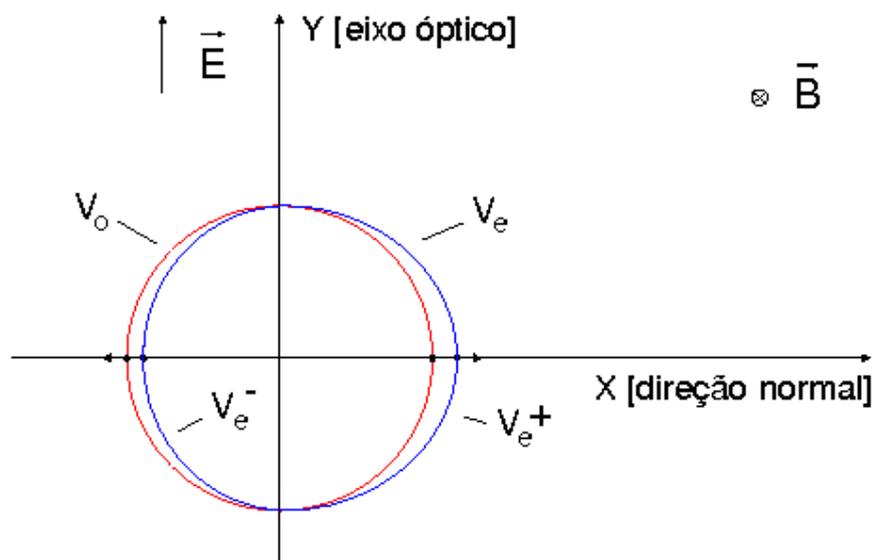


Figura 3.3: Frentes de onda dos raios ordinário e extraordinário para o caso de birrefringência magneto-elétrica, com  $|v_e^+| > |v_e^-|$ . A circunferência, indicada pela linha vermelha, representa a frente de onda do raio ordinário e a curva, indicada pela linha azul, representa a frente de onda do raio extraordinário.

É importante salientar neste ponto, que os coeficientes, permissividade elétrica e permeabilidade magnética, foram escolhidos de forma arbitrária. Um modelo mais realista para o Jones feito deve levar em consideração valores experimentais para estes coeficientes, para cada meio material em estudo.

**Efeito Jones** [ $\varepsilon = \varepsilon(E, B)$ ,  $\mu = \text{constante}$ ,  $\{\vec{E}, \vec{B}\} \perp \vec{q}$  e  $\vec{E} \parallel \vec{B}$ ]

O efeito Jones constitui um caso particular de birrefringência magneto-elétrica onde os vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são paralelos entre si e perpendiculares à direção de propagação. Assim sendo, segue que a equação (3.54) é idênticamente nula e com isso, a equação (3.56) pode ser reescrita na forma

$$v_e^2 = \frac{1}{\mu_c (\varepsilon + \varepsilon' E^2)}. \quad (3.77)$$

Assim, para o efeito Jones, temos apenas duas velocidades possíveis: raio ordinário, Eq. (3.51), e raio extraordinário, Eq. (3.77). Além disso, para o raio extraordinário a assimetria com relação ao sentido de propagação desaparece.

### Polarização

Para obtermos os vetores de polarização para o efeito Jones devemos tomar adicionalmente que,  $\hat{E} \times \hat{B} = 0$ . Dessa forma, das equações (3.62) e (3.63), teremos

i) *Raio ordinário:*

$$e_o^\beta = a \left\{ E^\beta - \frac{E}{B} B^\beta \right\}. \quad (3.78)$$

ii) *Raio extraordinário:*

$$e_e^\beta = a E^\beta. \quad (3.79)$$

A fim de obtermos somente o efeito Jones propriamente dito, iremos desprezar as contribuições para os efeitos Kerr e Cotton-Mouton, expandindo  $\varepsilon(E, B)$  da seguinte forma [49]:

$$\varepsilon(E, B) = \varepsilon_c + \gamma \vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (3.80)$$

Para o caso considerado,  $\vec{E} \cdot \vec{B} = EB$ . Assim, as equações (3.51) e (3.77), tornam-se:

$$v_o^2 = \frac{1}{\mu_c(\varepsilon_c + \gamma EB)}, \quad (3.81)$$

$$v_e^2 = \frac{1}{\mu_c(\varepsilon_c + 2\gamma EB)}. \quad (3.82)$$

Desse modo, os correspondentes índices de refração são dados por

$$n_o = \sqrt{\mu_c \varepsilon_c} \left( 1 + \gamma \frac{EB}{\varepsilon_c} \right)^{\frac{1}{2}} \approx n_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\gamma EB}{\varepsilon_c} \right), \quad (3.83)$$

$$n_e = \sqrt{\mu_c \varepsilon_c} \left( 1 + 2\gamma \frac{EB}{\varepsilon_c} \right)^{\frac{1}{2}} \approx n_0 \left( 1 + \frac{\gamma EB}{\varepsilon_c} \right). \quad (3.84)$$

Logo,

$$n_e - n_o = \frac{n_0 \gamma}{2 \varepsilon_c} EB. \quad (3.85)$$

O resultado acima representa o efeito Jones tradicional descrito na literatura [48, 52, 53, 54]. onde  $n_0 = \sqrt{\mu_c \varepsilon_c}$  é o índice de refração do meio na ausência de campos externos.

A representação gráfica para este caso é idêntica à obtida para o efeito Kerr, conforme mostra a figura 3.4 a seguir.

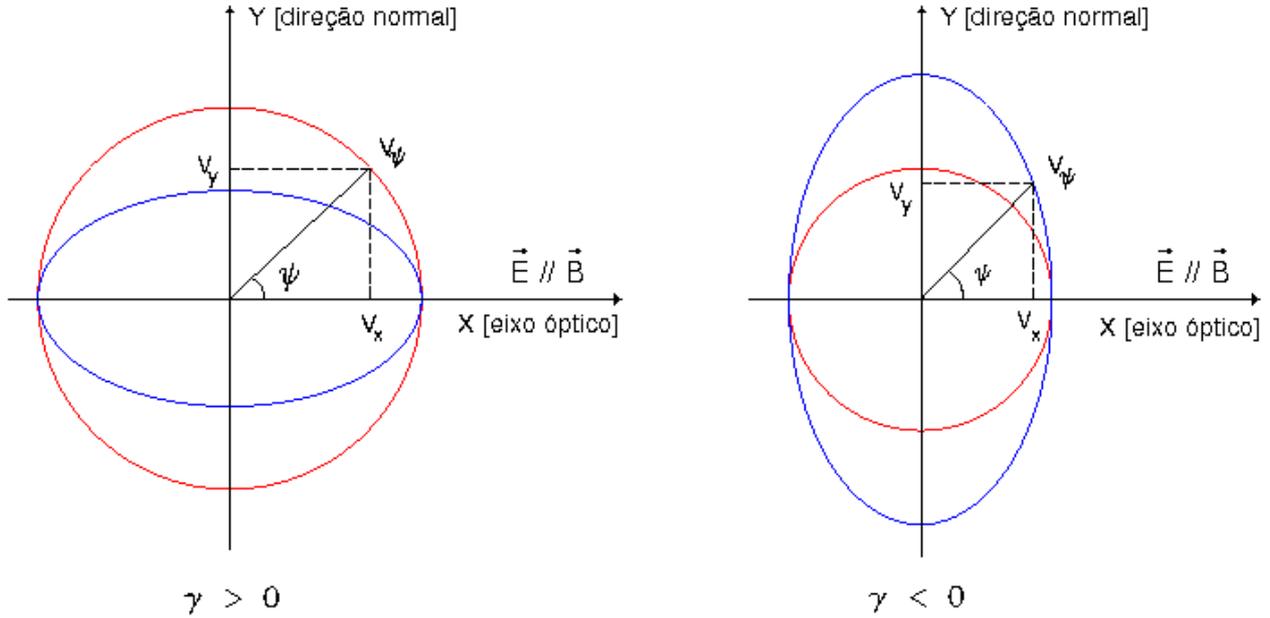


Figura 3.4: Frentes de onda dos raios ordinário e extraordinário no efeito Jones eletro-magneto-óptico, para  $\gamma > 0$  (figura à esquerda) e  $\gamma < 0$  (figura à direita). A circunferência representa a frente de onda do raio ordinário e a elipse representa a frente de onda do raio extraordinário.

### Geometria efetiva no efeito Jones:

Vamos agora derivar a geometria efetiva para o efeito Jones. Assim, de (3.50), resulta

$$\mu \varepsilon \omega^2 - \omega^2 + K^2 = 0, \quad (3.86)$$

e,

$$\mu (\varepsilon + \varepsilon' E^2) \omega^2 - q^2 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} (qE)^2 - \mu \dot{\varepsilon} \omega [qVBE] = 0. \quad (3.87)$$

Da Eq. (3.86), segue que a geometria efetiva para o raio ordinário no efeito Jones, é dada por

$$g_o^{\mu\nu} \doteq \eta^{\mu\nu} - (1 - \mu \varepsilon) V^\mu V^\nu, \quad (3.88)$$

que é idêntica as expressões obtidas anteriormente, Eq. (3.18) e Eq. (3.26), para o efeito Kerr e Cotton-Mouton. Portanto, a equação (3.88) pode ser escrita na forma:

$$g_o^{\mu\nu} K_\mu K_\nu = 0. \quad (3.89)$$

Para o raio extraordinário, lembrando das definições (2.83) e (2.131), teremos da Eq. (3.87)

$$K^2 - \left[ 1 - \mu \frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial E} \right] \omega^2 - \frac{1}{\varepsilon E} \frac{\partial \varepsilon}{\partial E} (K^\mu E_\mu)^2 - \frac{\mu}{B} \frac{\partial \varepsilon}{\partial B} (K^\nu V_\nu) \eta^{\varphi\gamma\tau\beta} q_\varphi V_\gamma B_\tau E_\beta = 0, \quad (3.90)$$

ou ainda,

$$\eta^{\mu\nu} K_\mu K_\nu - \left[ 1 - \mu \frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial E} \right] V^\mu V^\nu K_\mu K_\nu - \frac{1}{\varepsilon E} \frac{\partial \varepsilon}{\partial E} E^\mu E^\nu K_\mu K_\nu + \\ - \frac{\mu}{B} \frac{\partial \varepsilon}{\partial B} \eta^{\tau\gamma\beta\mu} V^\nu B_\tau V_\gamma E_\beta K_\mu K_\nu = 0. \quad (3.91)$$

Colocando  $K_\mu K_\nu$  em evidência

$$\left\{ \eta^{\mu\nu} - \left[ 1 - \mu \frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial E} \right] V^\mu V^\nu - \frac{1}{\varepsilon E} \frac{\partial \varepsilon}{\partial E} E^\mu E^\nu - \frac{\mu}{2B} \frac{\partial \varepsilon}{\partial B} \eta^{\tau\gamma\beta(\mu} V^{\nu)} B_\tau V_\gamma E_\beta \right\} K_\mu K_\nu = 0, \quad (3.92)$$

onde a notação  $(\mu\nu)$  representa a operação de simetrização sobre estes índices:  $a^{(\mu\nu)} = a^{\mu\nu} + a^{\nu\mu}$ .

Então, Eq. (3.92) pode ser apresentada na forma:

$$g_e^{\mu\nu} K_\mu K_\nu = 0, \quad (3.93)$$

onde definimos a geometria efetiva para o raio extraordinário:

$$g_e^{\mu\nu} \doteq \eta^{\mu\nu} - \left[ 1 - \mu \frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial E} \right] V^\mu V^\nu - \frac{1}{\varepsilon E} \frac{\partial \varepsilon}{\partial E} E^\mu E^\nu - \frac{\mu}{2B} \frac{\partial \varepsilon}{\partial B} \eta^{\tau\gamma\beta(\mu} V^{\nu)} B_\tau V_\gamma E_\beta. \quad (3.94)$$

Este resultado é exatamente o mesmo obtido anteriormente na literatura [28]. Note que para o caso particular de meios materiais isotrópicos e homogêneos, onde  $\varepsilon$  e  $\mu$  são constantes, a geometria efetiva acima, reduz-se a métrica de Gordon [35]:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + (\varepsilon \mu - 1) V^\mu V^\nu. \quad (3.95)$$

# Capítulo 4

## Conclusão

Neste trabalho, um formalismo tensorial foi apresentado com a finalidade de discutir a propagação de ondas eletromagnéticas monocromáticas em meios materiais, caracterizados por propriedades dielétricas não lineares representadas por  $\varepsilon^\alpha_\beta(E, B)$  e  $\mu^\alpha_\beta(E, B)$ , dentro do limite da óptica geométrica. A descrição detalhada do comportamento da propagação de raios de luz em tais meios nos possibilitou analisar o fenômeno da birrefringência. Como conseqüência, as condições sobre as descontinuidades dos campos eletromagnéticos nestes meios foram apresentadas, e a solução para o problema de auto-valores em meios gerais, proveniente da solução formal da equação generalizada de Fresnel, foi encontrada. Através desta solução, obtivemos a equação geral que rege a propagação de raios de luz no meio considerado. Como resultado, as relações de dispersão para os casos onde  $\varepsilon = \varepsilon(E, B)$  com  $\mu = \text{constante}$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(E)$  com  $\mu = \text{constante}$ , e  $\varepsilon = \text{constante}$  com  $\mu = \mu(B)$ , assim como as condições para o fenômeno da birrefringência aparecer, foram apresentadas.

Os resultados incluem a descrição do efeito Kerr eletro-óptico, do seu análogo magnético, o efeito Cotton-Mouton magneto-óptico, bem como do efeito Jones eletro-magneto-óptico. O formalismo aqui apresentado, possibilitou dar não apenas uma descrição teórica formal do efeito de birrefringência magneto-elétrica, dentro das condições especiais relatadas na literatura, como também, se mostrou uma poderosa ferramenta para investigar fenômenos eletro-magneto-ópticos intrinsecamente sutis. Com o procedimento adotado, o presente formalismo obteve grande sucesso proporcionando uma descrição do efeito Jones, incluindo alguns resultados ainda não relatados na literatura. Os resultados encontrados mostraram que a velocidade associada a um dado modo de polarização da onda eletromagnética, além de variar com a direção de propagação desta onda (raio extraordinário), também pode apresentar variação com relação ao

sentido de propagação ao longo desta direção. De modo geral, podem haver duas velocidades distintas para o raio extraordinário, uma associada à propagação em um sentido ao longo de uma dada direção e outra associada à propagação no sentido oposto. Uma vez que este efeito é estabelecido pela presença de três vetores tridimensionais,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{q}$ , várias configurações possíveis para o efeito podem ser apresentadas. Em particular, apresentamos uma configuração na qual a velocidade de propagação do raio extraordinário em um sentido, ao longo de cada dada direção, é menor do que a velocidade de propagação no outro sentido. Uma ilustração para este caso foi apresentada na figura 3.3. Este fato poderá ser objeto de verificação experimental a fim de comprovar predição do resultado encontrado.

Uma vez que os coeficientes  $\varepsilon^\alpha_\beta$  e  $\mu^\alpha_\beta$  foram considerados como sendo dependentes das magnitudes dos campos externos, os resultados aqui obtidos são naturalmente apropriados para tratar a propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais líquidos. Por fim, a estrutura métrica efetiva associada à propagação de ondas, foi derivada para cada situação explorada. Com tal descrição geométrica, apresentamos, aqui também, uma ferramenta para testar aspectos cinemáticos da gravitação em laboratório, algo que vem sendo freqüentemente utilizado no contexto de modelos análogos para a relatividade geral. Com esta concepção, podemos interpretar o meio material como equivalente, pelo menos sob o aspecto formal, a um espaço-tempo curvo no qual a onda eletromagnética se propaga descrito por uma geometria dependente das propriedades dielétricas deste meio.

Os casos mais complexos onde a equação de propagação geral envolve tanto a dependência de  $E$  na permeabilidade quanto a dependência de  $B$  na permissividade, estão ainda em fase de estudo. Embora estas equações não foram ainda totalmente analisadas para todos os casos existentes, a solução de tais equações para os efeitos Kerr e Cotton-Mouton sugere uma possível simetria nestes efeitos. Assim, por exemplo, a condição necessária e suficiente para que o efeito Kerr ocorra é que a permissividade elétrica seja dependente do campo elétrico. Da mesma forma, a condição necessária e suficiente para que ocorra o efeito Cotton-Mouton é que a permeabilidade magnética seja dependente do campo magnético. Por outro lado, do resultado encontrado para o efeito Jones exibido neste trabalho, uma condição suficiente para que este efeito ocorresse foi que a permissividade elétrica dependesse de ambos os campos. Como consequência da discussão anterior, apenas o efeito Kerr poderia vir acompanhado naquele caso. Por simetria, esperamos que o caso onde  $\varepsilon$  for constante e  $\mu = \mu(E, B)$  resulte no efeito Cotton-Mouton acompanhado do efeito Jones. O caso onde  $\varepsilon = \varepsilon(E)$  e  $\mu = \mu(B)$  apresenta portanto

apenas os efeitos Kerr e Cotton-Mouton. Por outro lado, para  $\varepsilon = \varepsilon(B)$  e  $\mu = \mu(E)$ , nenhum dos três efeitos deverão ocorrer.

# Apêndice A

## Método de Cayley-Hamilton

A técnica padrão de resolver a equação de auto-vetor de Fresnel [Eq. (2.86)], expandindo o auto-vetor  $e^\beta$  em uma base de vetores convenientemente escolhidos, embora simples, pode nos levar a questionar se o conjunto de vetores escolhidos é realmente linearmente independente. Para evitarmos sutilezas como esta, focaremos aqui, somente a estrutura algébrica da equação (2.86).

Neste apêndice iremos reproduzir um caso simples de birrefringência, já tratado anteriormente no capítulo 3, fazendo uso do método de Cayley-Hamilton. O assim chamado “método” de Cayley-Hamilton constitui, na verdade, um procedimento alternativo para tratar o problema de auto-valores, dado pela equação (2.86), sem fazer uso de nenhuma base de vetores do espaço 3-dimensional. Este método consiste em acoplar as fórmulas de traço para operadores lineares [61] com o teorema de Cayley-Hamilton [62, 63]. Como exemplo de aplicação deste método, recuperaremos o efeito Kerr, obtido anteriormente. Este procedimento servirá não apenas como uma apresentação da técnica de solucionar a equação de auto-valores (2.94), como também reforçará a validade o método de expansão em base do vetor de polarização.

A solução formal para o problema de auto-valor dado por Eq. (2.86), pode ser encontrada pela condição apresentada na equação (2.94), resultando, segundo o procedimento apresentado em Ref. [61], na equação que segue:

$$Z_1^3 - 3 Z_1 Z_2 + 2 Z_3 = 0, \tag{A.1}$$

onde  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$  são traços de  $Z^\alpha_\beta$ , definidos por:

$$Z_1 \doteq Z^\alpha_\alpha, \quad (\text{A.2})$$

$$Z_2 \doteq Z^\alpha_\tau Z^\tau_\alpha, \quad (\text{A.3})$$

$$Z_3 \doteq Z^\alpha_\tau Z^\tau_\gamma Z^\gamma_\alpha. \quad (\text{A.4})$$

Para meios não magnéticos, ou seja,  $\mu^\alpha_\beta = \mu^{-1} h^\alpha_\beta$ , a equação (2.92) se reduz a:

$$Z^\alpha_\beta \doteq C^\alpha_\beta + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\mu}{\partial B^\chi} \eta^{\chi\varphi\omega} E^\mu q_\varphi V_\omega - \frac{q^2}{\mu \omega^2} I^\alpha_\beta, \quad (\text{A.5})$$

onde definimos,

$$C^\alpha_\beta \doteq \varepsilon^\alpha_\beta + \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\mu}{\partial E^\beta} E^\mu. \quad (\text{A.6})$$

Adicionalmente, para recuperar o efeito Kerr, vamos considerar o caso no qual  $\varepsilon^\alpha_\beta = \varepsilon(E) h^\alpha_\beta$ . Portanto,

$$Z^\alpha_\tau = C^\alpha_\tau - \frac{q^2}{\mu \omega^2} I^\alpha_\beta. \quad (\text{A.7})$$

Vamos então calcular os traços  $Z_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  de  $Z^\alpha_\beta$ :

$$Z_1 = C_1 - 2 \frac{q^2}{\mu \omega^2}, \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} Z_2^\alpha_\beta &= \left( C^\alpha_\tau - \frac{q^2}{\mu \omega^2} I^\alpha_\tau \right) \left( C^\tau_\beta - \frac{q^2}{\mu \omega^2} I^\tau_\beta \right) \\ &= C_2^\alpha_\beta - \frac{q^2}{\mu \omega^2} C^\alpha_\tau I^\tau_\beta - \frac{q^2}{\mu \omega^2} C^\tau_\beta I^\alpha_\tau + \frac{q^4}{\mu^2 \omega^4} I^\alpha_\beta. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Então,

$$Z_2 = C_2 - 2 \frac{q^2}{\mu \omega^2} C^\alpha_\tau I^\tau_\alpha + 2 \frac{q^4}{\mu^2 \omega^4}, \quad (\text{A.10})$$

e

$$Z_3 = C_3 - 3 \frac{q^2}{\mu \omega^2} C_2^\alpha_\tau I^\tau_\alpha + 3 \frac{q^4}{\mu^2 \omega^4} C^\alpha_\tau I^\tau_\alpha - 2 \frac{q^6}{\mu^3 \omega^6}. \quad (\text{A.11})$$

Assim, substituindo estes resultados em Eq. (A.1) e após algumas simplificações, teremos:

$$C_1^3 - 3 C_1 C_2 + 2 C_3 - 6 \frac{1}{\mu \omega^2} C_2^\alpha_\tau q^\tau q_\alpha + 6 \frac{1}{\mu \omega^2} C_1 C^\alpha_\tau q^\tau q_\alpha - 6 \frac{1}{\mu^2 \omega^4} C^\alpha_\tau q^\tau q_\alpha = 0. \quad (\text{A.12})$$

A equação acima corresponde ao caso onde,

$$\varepsilon^\alpha_\beta = \varepsilon^\alpha_\beta(\vec{E}) \quad \text{e} \quad \mu^\alpha_\beta = \mu^{-1} h^\alpha_\beta. \quad (\text{A.13})$$

Na verdade, se  $\varepsilon^\alpha_\beta = \varepsilon^\alpha_\beta(\vec{E}, \vec{B})$ , nós poderíamos redefinir as variáveis, substituindo  $C^\alpha_\beta$  por  $D^\alpha_\beta$  dado por

$$D^\alpha_\beta = C^\alpha_\beta + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \varepsilon^\alpha_\mu}{\partial B^\chi} \eta^{\chi\varphi\omega}_\beta E^\mu q_\varphi V_\omega, \quad (\text{A.14})$$

e a solução formal para este novo problema, permanece a mesma como apresentada na equação (A.12). Continuando, vamos utilizar as definições:

$$v_\varphi^2 = \frac{\omega^2}{q^2}, \quad (\text{A.15})$$

e

$$\hat{q}^\alpha = \frac{q^\alpha}{q}, \quad (\text{A.16})$$

Então, de Eq. (A.12):

$$C_1^3 - 3C_1C_2 + 2C_3 - \mu^{-1}(C_2^{\alpha\beta} \hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta - C_1 C^{\alpha\beta} \hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta) v_\varphi^{-2} - \mu^{-2} C^{\alpha\beta} \hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta v_\varphi^{-4} = 0. \quad (\text{A.17})$$

Vamos também, a fim de simplificar a notação, definir as seguintes quantidades:

$$\alpha \doteq \frac{1}{6} (C_1^3 - 3C_1C_2 + 2C_3), \quad (\text{A.18})$$

$$\beta \doteq \mu^{-1} (C_2^{\alpha\beta} \hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta - C_1 C^{\alpha\beta} \hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta), \quad (\text{A.19})$$

$$\gamma \doteq \mu^{-2} C^{\alpha\beta} \hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta. \quad (\text{A.20})$$

Então,

$$\alpha v_\varphi^4 - \beta v_\varphi^2 - \gamma, \quad (\text{A.21})$$

cuja solução é dada por

$$(v_\varphi^\pm)^2 = \frac{1}{2\alpha} \left( \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right), \quad (\text{A.22})$$

onde  $v_\varphi^+$  e  $v_\varphi^-$  são as velocidades da onda eletromagnética dentro do meio material, associadas aos dois possíveis modos de polarização [36]. Notemos que birrefringência pode ocorrer [27] se as seguintes desigualdades forem verificadas, para alguma dada direção  $\hat{q}^\alpha$ :

$$-\frac{1}{4} < \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} < 0, \quad (\text{A.23})$$

$$\alpha\beta > 0. \quad (\text{A.24})$$

Para o caso particular onde  $\varepsilon^\alpha_\beta = \varepsilon h^\alpha_\beta$ , com  $\varepsilon$  constante, obteremos

$$\alpha = \varepsilon^3, \quad (\text{A.25})$$

$$\beta = 2\varepsilon^2/\mu, \quad (\text{A.26})$$

$$\gamma = -\varepsilon/\mu^2, \quad (\text{A.27})$$

e as duas velocidades se reduzirão ao valor bem conhecido:

$$v_\varphi^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}. \quad (\text{A.28})$$

Para as condições do efeito Kerr, mencionadas anteriormente, teremos que:

$$C^\alpha_\beta = \varepsilon h^\alpha_\beta - \varepsilon' E^\alpha E_\beta, \quad (\text{A.29})$$

e então,

$$C_1 \doteq C^\alpha_\alpha = 3\varepsilon + \varepsilon' E^2, \quad (\text{A.30})$$

$$C_2^\alpha_\beta \doteq C^\alpha_\tau C^\tau_\beta = \varepsilon^2 h^\alpha_\beta - (\varepsilon'^2 E^2 + 2\varepsilon\varepsilon') E^\alpha E_\beta, \quad (\text{A.31})$$

$$C_2 \doteq C_2^\alpha_\alpha = 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon\varepsilon' E^2 + \varepsilon'^2 E^4, \quad (\text{A.32})$$

$$C_3 \doteq C_2^\alpha_\gamma C^\gamma_\alpha = 3\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 \varepsilon' E^2 + 3\varepsilon\varepsilon'^2 E^4 + \varepsilon'^3 E^6. \quad (\text{A.33})$$

Com isto, resulta que:

$$\alpha = \varepsilon^2 (\varepsilon + \varepsilon' E^2), \quad (\text{A.34})$$

$$\beta = \frac{\varepsilon}{\mu} \left\{ (\varepsilon + \varepsilon' E^2) + \left[ \varepsilon + \varepsilon' (\hat{q} \cdot \vec{E})^2 \right] \right\}, \quad (\text{A.35})$$

$$\gamma = -\frac{1}{\mu^2} [(\varepsilon + \varepsilon' E^2)], \quad (\text{A.36})$$

e a equação (A.22), torna-se:

$$(v_\varphi^\pm)^2 = \frac{1}{2\varepsilon\mu} \left\{ (\varepsilon + \varepsilon' E^2) + \left[ \varepsilon + \varepsilon' (\hat{q} \cdot \vec{E})^2 \right] \pm \left[ (\varepsilon + \varepsilon' E^2) + \left( \varepsilon + \varepsilon' (\hat{q} \cdot \vec{E})^2 \right) \right] \right\}. \quad (\text{A.37})$$

Assim, temos as seguintes equações:

$$(v_\varphi^+)^2 \doteq v_o^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}, \quad (\text{A.38})$$

$$(v_\varphi^-)^2 \doteq v_e^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu} \frac{\varepsilon + \varepsilon' (\hat{q} \cdot \vec{E})^2}{\varepsilon + \varepsilon' E^2} = \frac{1}{\mu \partial(\varepsilon E)/\partial E} \left[ 1 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} (\hat{q} \cdot \vec{E})^2 \right], \quad (\text{A.39})$$

que são as mesmas expressões (3.3) e (3.5) obtidas no capítulo 3, usando o método de expansão numa base.

# Referências

- [1] Z. Bialynicka-Birula, I. Bialynicki-Birula, **Nonlinear effects in quantum electrodynamics: Photon propagation and photon splitting in an external field**, Phys. Rev. D 2, 2341-2345 (1970).
- [2] S. L. Adler, **Photon splitting and photon dispersion in a strong gravitational field**, Ann. Phys. 67, 599-647 (1971).
- [3] E. Iacopini, E. Zavattini, **Experimental method to detect the vacuum birefringence induced by a magnetic field**, Phys. Lett. B 85, 151-154 (1979).
- [4] D. Bakalov (et al), **PVLAS: Vacuum birefringence and production and detection of nearly massless, weakly coupled particles by optical techniques**, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 35, 180-182 (1994).
- [5] J. I. Latorre, P. Pascual, R. Tarrach, **Speed of light in non-trivial vacua**, Nuc. Phys. B 437, 60-82 (1995).
- [6] I. T. Drummond, S. J. Hathrell, **QED vacuum polarization in a background gravitational field and its effect on the velocity of photons**, Phys. Rev. D 22, 343-355 (1980).
- [7] G. M. Shore, **Faster than light photons in gravitational fields — Causality, anomalies and horizons**, Nuc. Phys. B 460, 379-394 (1996); R. D. Daniels, G. M. Shore, **Faster than light photons and charged black holes**, Nuc. Phys. B 425, 634-650 (1994).
- [8] K. Scharnhorst, **On propagation of light in the vacuum between plates**, Phys. Lett. B 236, 354-359 (1990).

- [9] G. Barton, **Faster-than-c light between parallel mirrors The Scharnhorst effect rederived**, Phys. Lett. B 237, 559-562 (1990).
- [10] G. M. Shore, **Faster than light photons in gravitational fields II.: Dispersion and vacuum polarization**, Nuc. Phys. B 633, 271 (2002).
- [11] W. Dittrich, H. Gies, **Light propagation in nontrivial QED vacua**, Phys. Rev. D 58, 025004 (1998); H. Gies, W. Dittrich, **Light propagation in non-trivial QED vacua**, Phys. Lett. B 431, 420 (1998).
- [12] V. A. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello, J. M. Salim, **Light propagation in nonlinear electrodynamics**, Phys. Lett. B 482, 134-140 (2000);
- [13] Y. Choquet-Bruhat, C. De Witt-Morette, M. Dillard-Bleick, **Analysis, Manifolds and Physics**, p. 455 (North-Holland Publishing, New York, 1977); J. Hadamard, **Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique**, (Ed. Hermann, Paris, 1903).
- [14] G. Boillat, **Nonlinear electrodynamics: Lagrangians and equations of motion**, J. Math. Phys. 11, 941-951 (1970).
- [15] A. Papapetrou, **Lectures on General Relativity**, D. Reidel, Dordrecht, Holland, (1974).
- [16] W. Heisenberg, H. Euler, Z. Phys. 98, 714 (1936); J. Schwinger, **On gauge invariance and vacuum polarization**, Phys. Rev. 82, 664-679 (1951).
- [17] G. W. Gibbons, **Aspects of Born-Infeld theory and string/M-theory**, Rev. Mex. Fis. 49, 19-29 (2003).
- [18] M. Novello, V. A. De Lorenci, J. M. Salim and R. Klippert, **Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics**, Phys. Rev. D 61, 45001 (2000).
- [19] G. M. Shore, **Quantum gravitational optics**, Contemp. Phys. 44, 503 (2003); **ibid, Causality and superluminal light**, gr-qc/0302116 (2003).
- [20] Y. N. Obukhov, G. F. Rubilar **Fresnel analysis of wave propagation in nonlinear electrodynamics**, Phys. Rev. D 66, 024042 (2002).

- [21] M. Marklund and P. K. Shukla, **Nonlinear collective effects in photon-photon and photon-plasma interactions**, Rev. Mod. Phys. 78 (2), 591 (2006).
- [22] Y. M. Cho, D. G. Pak and M. L. Walker, **Light propagation effects in QED: effective action approach**, Phys. Rev. D 73 (6), 065014 (2006).
- [23] H. J. M. Cuesta, J. M. Salim and J. A. D. Pacheco, **Einstein's gravitational lensing and nonlinear electrodynamics**, Int. J. Mod. Phys. A 21 (1), 43 (2006).
- [24] M. Marklund, P. K. Shukla, G. Brodin and L. Stenflo, **Wave-kinetic description of nonlinear photons**, J. Plas. Phys. 71, 527 (2005).
- [25] M. Born, **Modified field equations with a finite radius of the electron**, Nature, 132, 282 (1933); M. Born, **On the quantum theory of the electromagnetic field**, Proc. Roy. Soc. London A 143, 410 (1934);
- [26] G. W. Gibbons, C. A. R. Herdeiro, **Born-Infeld theory and string causality**, Phys. Rev. D 63, 064006 (2001).
- [27] V. A. De Lorenci, R. Klippert, D. H. Teodoro, **Birefringence in nonlinear anisotropic dielectric media**, Phys. Rev. D 70, 124035 (2004).
- [28] V. A. De Lorenci, M. A. Souza, **Electromagnetic wave propagation inside a material medium: an effective geometry interpretation**, Phys. Lett. B 512, 417-422 (2001).
- [29] V. A. De Lorenci, R. Klippert, **Electromagnetic light rays in local dielectrics**, Phys. Lett. A 357, 61-65 (2006).
- [30] V. A. De Lorenci and J. M. Salim, **Aspects of light propagation in anisotropic dielectric media**, Phys. Lett. A 358 (2006).
- [31] M. Novello e J. M. Salim, **Effective electromagnetic geometry**, Phys. Rev. D 63, 083511 (2001).
- [32] V. A. De Lorenci, **Effective geometry for light traveling in a material media**, Phys. Rev. E 65, 026612 (2002).
- [33] J. Plebanski, **Lectures on non-linear electrodynamics**, (Nordita, Copenhagen, 1968).

- [34] M. Schonberg, **Revista Brasileira de Física** 1, 91 (1971); Y. N. Obukhov and F. W. Hehl, Phys. Lett. B 458, 466 (1999); Y. N. Obukhov, T. Fukui and G. F. Rubilar, Phys. Rev. D 62, 44050 (2000).
- [35] W. Gordon, **Light propagation according to the relativity theory**, Annalen der Phys. Leipzig, 72 (22), 421 (1923).
- [36] V. A. De Lorenci, R. Klippert, **Analogue gravity from electrodynamics in nonlinear media**, Phys. Rev. D 65, 064027 (2002).
- [37] G. F. Rubillar, **Linear pre-metric electrodynamics and deduction of the light cone**, Ann. Phys. (Leipzig) 11, 717-782 (2002).
- [38] P. Ben-Abdallah, **Energetic and optical consequences in isotropic curved space and time**, Appl. Optics 40, 5452-5458 (2001).
- [39] P. Ben-Abdallah, **When the space curvature dopes the radiant intensity**, J. Optical Soc. Am. B 19, 1766-1772 (2002).
- [40] V. A. De Lorenci, R. Klippert, Yu. N. Obukhov, **Optical black holes in moving dielectrics**, Phys. Rev. D 68, 061502(R) (2003).
- [41] Workshop on **Analog models of general relativity**, [www.cbpf.br/~bscg/analog](http://www.cbpf.br/~bscg/analog), Rio de Janeiro, Brazil, October 2000.
- [42] M. Born e E. Wolf, **Principles of Optics**, (Academic Press, New York, 1970).
- [43] L. Landau e E. Lifshitz, **Électrodynamique des Milieux Continus**, (Editora Mir, Moscow, 1969).
- [44] G. D. Fleishman, Q. J. Fu and M. Wang, G. L. Huang and V. F. Melnikov, **Birefringence effect as a tool for astrophysical plasma study**, Phys. Rev. Lett. 88, 251101 (2002).
- [45] J. Kerr, **A new relation between electricity and light: dielectrified media birefringent**, Philos. Mag. 50, p. 337-348 e p. 446-458 (1875).
- [46] A. Cotton and Mouton, **Sur la biréfringence magnétique des liquides organiques**, Compt. Rendu. 141, 349 (1905); 145, 229 (1907); 145, 870 (1907).

- [47] F. Pockels, **Sur la théorie de la biréfringence des liquides soumis à l'action simultanée d'un champ électrique et d'un champ magnétique**, Radium 10, 152 (1913).
- [48] E. B. Graham and R. E. Raab, **On the Jones birefringence**, Proc. R. Soc. London A 390, 73-90 (1983).
- [49] N. B. Baranova, Yu. V. Bogdanov, and B. Ya. Zel'dovich, **New electro-optical and magneto-optical effects in liquids**, Sov. Phys. Usp. 20, 870 (1997).
- [50] S. Kielich, **Molecular electro-optics**, edited by C.T. O' Kanski (Marcel Dekker, New York) (1976).
- [51] H. J. Ross, B. S. Sherbone, and G. E. Stedman, **Selection rules for optical activity and linear birefringence bilinear in electric and magnetic fields**, J. Phys. B 22, 459 (1989).
- [52] T. Roth and G. L. J. A. Rikken, **Observation of magnetoelectric Jones birefringence**, Phys. Rev. Lett. 85, 4478 (2000).
- [53] T. Roth and G. L. J. A. Rikken, **Observation of magnetoelectric linear birefringence**, Phys. Rev. Lett. 88, 063001 (2002).
- [54] R. C. Jones, **A new Calculus for the treatment of optical systems**, J. Optical Soc. Am. 38, 671-685 (1948).
- [55] A. Rizzo and S. Coriani, **Jones birefringence in gases: Ab initio electron correlated results for atoms and linear molecules**, J. of Chem. Phys. 119, 11064-11079 (2003).
- [56] L. Landau e E. Lifshitz, **Teoria do Campo**, (Editora Mir, Moscow, 1980).
- [57] H. C. Ohanian, **Gravitation and Spacetime**, (W. W. Norton co., New York, 1976).
- [58] R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, **Introdution to General Relativity**, (McGRAW-HILL, Tokyo 1975).
- [59] W. L. Weeks, **Electromagnetic Theory for Engineering Applications**, (John Wiley of Sons Inc. NY, 1964).
- [60] G. R. Fowles, **Introduction to Modern Optics**, (Hold, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1968).

- [61] R. R. Silva, **The trace formulas yield the inverse metric formula**, J. Math. Phys. 39, 6206 (1998).
- [62] S. Lang, **Algebra** (Addison-Wesley, London, 1971), revisited printing, p. 400.
- [63] S. Mac Lane and G. Birkhoff, **Algebra**, 4th printing (MacMillan London, 1970), p. 316.