

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Análise Numérica da Convecção Natural em  
Cavidade Quadrada com Corpos Internos,  
Utilizando o Método de Elementos Finitos**

Autor: **Renato José Pinto**

Orientador: **Prof. Dr. Genésio José Menon**

Itajubá, Abril de 2007

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Análise Numérica da Convecção Natural em  
Cavidade Quadrada com Corpos Internos,  
Utilizando o Método de Elementos Finitos**

Autor: **Renato José Pinto**

Orientador: **Prof. Dr. Genésio José Menon**

Curso: **Mestrado em Engenharia Mecânica**

Área de Concentração: **Conversão de Energia**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Itajubá, Abril de 2007

M.G. – Brasil

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –  
Bibliotecária Margareth Ribeiro – CRB\_6/1700

P658a

Pinto, Renato José

Análise numérica da convecção natural em cavidade quadrada com corpos internos, utilizando o método de elementos finitos / Renato José Pinto. – Itajubá, (MG) : UNIFEI, 2007.

124 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Genésio José Menon.

Dissertação ( Mestrado ) - Universidade Federal de Itajubá.

1. Transferência de calor. 2. Convecção natural. 3. Cavidades quadradas. 4. Método de Elementos Finitos. 5. Convecção e condução combinadas. 6. Corpos internos. I. Menon, Genésio José, orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

CDU 536.24(043)

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Análise Numérica da Convecção Natural em  
Cavidade Quadrada com Corpos Internos,  
Utilizando o Método de Elementos Finitos**

Autor: **Renato José Pinto**

Orientador: **Prof. Dr. Genésio José Menon**

Composição da Banca Examinadora:

**Prof. Dr. Rodolfo Molinari – POLI/USP**

**Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho - IEM/UNIFEI**

**Prof. Dr. Waldir de Oliveira - IEM/UNIFEI**

**Prof. Dr. Genésio José Menon, Presidente - IEM/UNIFEI**

## **Dedicatória**

*À minha esposa Alessandra  
e ao meu filho Alisson.*

## **Agradecimentos**

Primeiramente a Deus, pela vida e por tudo mais que de suas mãos tenho recebido.

À minha querida esposa e companheira Alessandra e ao meu querido filho Alisson, que foram sempre compreensíveis nos momentos de minha ausência e falta de tempo e são, sem sombra de dúvidas, as razões da minha persistência e de todo o meu esforço, em busca de mais uma conquista.

À minha mãe Lhubumera que, assumiu papel de pai e mãe, foi à luta, criou e educou todos os filhos, ensinando-nos os verdadeiros valores da vida.

Aos meus irmãos Robson, Roberto e Marcelo, que em toda a vida torceram por mim.

Ao meu sogro José e à minha sogra Dalva, que estão sempre presente nos ajudando, aos quais considero meus pais.

Aos meus avós (in memoriam) Daniel e Ana e aos meus tios Inácio, Antonio Borini (in memoriam) e Teodora, pois, de certa forma, sempre acreditaram em mim e me ajudaram na formação profissional.

Ao meu orientador e amigo, Prof. Dr. Genésio José Menon, ao qual sou eternamente agradecido pela paciência, compreensão, competência e dedicação demonstrada durante todo o período de elaboração deste trabalho.

Aos demais professores da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI) pela dedicação nas aulas e apoio durante todo o período de estudos e desenvolvimento do trabalho, em especial aos professores Nelson Manzaneres Filho e Waldir de Oliveira pela contribuição prestada.

Aos amigos e também professores Aldo Ramos Santos, Antonio Santoro, Carlos Alberto do Amaral Moino, Fernando Marques Fernandes, Francisco José do Rosário, Hernandes Brandão, João Baptista Amaral Jr., Julio César Mendes Murat, Manuel da Silva Valente de Almeida, Marcos Galli, Nelson Gomes, Paulo Roberto Canton e Ricardo Tibério, pela convivência e amizade durante as etapas do mestrado, em especial meu agradecimento ao amigo João José de Souza, pela companhia e incentivo durante o período de orientação.

Aos professores Fernando Luiz Windlin, Luiz Diamantino de Figueiredo e Almeida e Julio César Mendes Murat, pela confiança de me contratarem na UNISANTA.

Aos demais professores e funcionários da UNISANTA, com os quais convivo profissionalmente há anos.

Ao amigo Claudiomir Selner, professor universitário e empresário em Santa Catarina, pelas constantes e sábias palavras de incentivo.

Ao Instituto de Engenharia Mecânica da UNIFEI, representado pelos seus dedicados professores e funcionários, pela oportunidade que me concedeu na realização deste trabalho.

À Universidade Santa Cecília (UNISANTA) por tornar possível a realização do Curso de Mestrado aos seus professores.

À empresa HELSTEN que, através da sua Diretoria, apoiou a realização deste trabalho.

*“Nenhuma mente que se abre para uma nova idéia  
voltará a ter o tamanho original”*

*Albert Einstein*



## Resumo

**PINTO, R. J. (2007)**, *Análise Numérica da Convecção Natural em Cavidade Quadrada com Corpos Internos, Utilizando o Método de Elementos Finitos*, Itajubá, 124 p. Dissertação (Mestrado em Conversão de Energia) - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Apresenta-se um estudo numérico da transferência de calor por convecção natural de um fluido (ar) em cavidade quadrada, com dois corpos em seu interior. Este assunto é de grande interesse na área de engenharia, principalmente em aplicações de desenvolvimento de trocadores de calor e sistemas de resfriamento ou aquecimento de corpos envolvendo convecção natural. Foram estudados quatro casos. No caso 1, os corpos internos são quadrados, sendo um mantido na temperatura alta constante  $T_h$  e outro mantido na temperatura baixa constante  $T_c$ , com as paredes da cavidade isoladas. O caso 2 é semelhante ao caso 1, porém, os corpos são circulares. Para o estudo dos casos 3 e 4, os corpos internos são sólidos com condutividade térmica  $K_s$  e transferem calor por condução sendo, corpos quadrados para o caso 3 e corpos circulares para o caso 4. Ambos os casos possuem a superfície inferior da cavidade mantida na temperatura alta constante  $T_h$  e a superfície superior mantida na temperatura baixa constante  $T_c$ , enquanto que, as superfícies laterais são isoladas.

Utiliza-se o método de elementos finitos para a solução das equações de conservação. São determinadas as distribuições da função corrente, temperatura adimensional e vorticidade bem como o número de Nusselt médio em função dos parâmetros número de Grashof, na faixa de  $2 \times 10^4$  a  $10^5$ , número de Prandtl fixado em 0,733 e razão de difusividades, na faixa de 0,1 a 100.

### ***Palavras-chave***

Transferência de calor, Convecção natural, Cavidades quadradas, Método de elementos finitos, Convecção e condução combinadas, Corpo interno.

## **Abstract**

**PINTO, R. J. (2007)**, *Numerical Analysis of Natural Convection in Square Cavity with Inner Bodies, Using Finite Element Method*, Itajubá, 124 p. Dissertation (MSc. Thesis in Energy Conversion) - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

It is presented a numerical study of heat transfer by natural convection of air in a square cavity, with two inner bodies. This subject is of great interest in the engineering area, mainly in the design of heat exchangers and cooling or heating systems of bodies involving natural convection. Four cases have been studied. In case 1, the inner bodies are square, being that one is uniformly heated at temperature  $T_h$  and the other is uniformly cooled at temperature  $T_c$ . The cavity walls are adiabatic. Case 2 is similar to case 1; however, the internal bodies are circular. The inner square body for case 3 and the circular one for case 4 are solid and thermally conductive. In both cases, the lower and upper horizontal surfaces are isothermal with high temperature  $T_h$  and low temperature  $T_c$ , respectively. Both vertical surfaces are adiabatic.

The finite element method is used to solve the conservation equations. The distributions of stream function, dimensionless temperature and vorticity are determined. Heat transfer is evaluated by analyzing the behavior of the average Nusselt number. The Grashof number and the diffusivity are ranged from  $2 \times 10^4$  to  $10^5$  and from 0,1 to 100, respectively. Air is considered with Prandtl number equal to 0,733.

### ***Keywords***

Heat transfer, Natural convection, Square cavities, Finite element method, Combined convection and conduction, Inner body.

## Sumário

SUMÁRIO	i
LISTA DE FIGURAS	iv
LISTA DE TABELAS	vii
SIMBOLOGIA	viii
LETRAS LATINAS	viii
LETRAS GREGAS	xi
SUPERESCRITOS	xii
SUBSCRITOS	xii
SIGLAS	xiii
CAPÍTULO 1	1
INTRODUÇÃO	1
1.1 Motivação do Trabalho	1
1.2 Casos Estudados	2
1.3 Revisão da Literatura	6
1.4 Objetivos do Presente Trabalho	9
1.5 Contribuições do Presente Trabalho	9
1.6 Delineamento do Presente Trabalho	10
1.7 Equipamento e Compilador Utilizado	11
CAPÍTULO 2	12
MODELO MATEMÁTICO	12
2.1 Análise Teórica da Convecção Natural	12
2.1.1 Equações de Conservação para o Fluido	12
2.1.2 Equação de Conservação para o Sólido	14
2.1.3 Condições Iniciais e de Contorno na Forma Dimensional	14
2.1.4 Adimensionalização das Equações	16

	ii
2.1.4a Adimensionalização das Equações para o Domínio Fluido _____	16
2.1.4b Adimensionalização das Equações para o Domínio Sólido _____	17
2.1.5 Adimensionalização das Equações em Função de $\psi$ , $\theta$ e $\omega$ _____	17
2.1.6 Condições Iniciais e de Contorno na Forma Adimensional _____	20
2.1.7 Números de Nusselt Local e Médio _____	22
CAPÍTULO 3 _____	24
MODELO NUMÉRICO _____	24
3.1 Forma Geral para as Equações de Conservação _____	24
3.2 Obtenção Geral das Matrizes e Vetores para os Elementos _____	25
3.2.1 Desenvolvimento da Matriz $[C]^e$ para o Elemento _____	26
3.2.2 Desenvolvimento da Matriz $[K_\phi]^e$ do Elemento _____	27
3.2.3 Desenvolvimento do Vetor $\{R_\phi\}^e$ do Elemento _____	29
3.3 Obtenção das Matrizes e Vetores para os Elementos _____	35
3.3.1 Forma Matricial para os Elementos em Termos da Função Corrente _____	35
3.3.2 Forma Matricial para os Elementos em Termos de Temperatura Adimensional _____	36
3.3.3 Forma Matricial para os Elementos em Termos da Vorticidade _____	37
3.4 Algoritmo do Programa Computacional _____	38
CAPÍTULO 4 _____	45
RESULTADOS _____	45
4.1 Introdução _____	45
4.2 Validação dos Modelos Numéricos _____	46
4.3 Resultados do Presente Trabalho _____	57
4.3.1 Resultados para os Casos 1 e 2 _____	60
4.3.2 Resultados para os Casos 3 e 4 _____	75
CAPÍTULO 5 _____	96
CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES _____	96
5.1 Introdução _____	96
5.2 Conclusões para os Casos 1 e 2 _____	97
5.3 Conclusões para os Casos 3 e 4 _____	98
5.4 Recomendações para Trabalhos Futuros _____	100
APÊNDICE A1 _____	101
FUNDAMENTOS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS _____	101
A1.1 Introdução _____	101
A1.2 Vantagens e Desvantagens do Método de Elementos Finitos _____	102

	iii
A1.3 Desenvolvimento do Método _____	103
APÊNDICE A2 _____	107
MÉTODO DE GALERKIN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL EM REGIME NÃO PERMANENTE _____	107
A2.1 Introdução _____	107
A2.2 Método de Galerkin _____	108
A2.3 Aproximação dos Termos $\left\{ \dot{\phi} \right\}$ e $\left\{ \phi \right\}$ _____	113
APÊNDICE A3 _____	115
NÚMERO DE NUSSELT MÉDIO E LOCAL _____	115
A3.1 Introdução _____	115
A3.2 Números de Nusselt _____	115
APÊNDICE A4 _____	118
MÉTODO MATRICIAL PARA O CÁLCULO DA VORTICIDADE NO CONTORNO _	118
A4.1 Introdução _____	118
A4.2 Cálculo da Vorticidade no Contorno _____	118
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS _____	122

## Lista de Figuras

Figura 1.1	Geometria para o caso 1	3
Figura 1.2	Geometria para o caso 2	3
Figura 1.3	Geometria para o caso 3	5
Figura 1.4	Domínio computacional para o caso 4	5
Figura 2.1	Geometria de uma cavidade quadrada fechada com dois corpos colocados no seu interior (caso 3)	15
Figura 2.2	Domínio computacional e condições de contorno adimensionais (caso 3)	22
Figura 3.1	Fluxograma do programa computacional	44
Figura 4.1	Geometria e condições de contorno dimensional	46
Figura 4.2	Geometria e condições de contorno adimensional	47
Figura 4.3	Malhas testadas para cavidade quadrada	48
Figura 4.4	Número de Nusselt médio na superfície fria, $Nu_c$ , versus número de elementos, NE	49
Figura 4.5	Tempo de processamento, em segundos, por iteração versus número de elementos, NE	50
Figura 4.6	Distribuição de temperatura, $\theta$ (THETA), função corrente, $\psi$ (PSI) e vorticidade, $\omega$ (W) para $Gr = 20000$ , à esquerda, e $Gr = 341064$ , à direita	51
Figura 4.7	Comparação dos resultados do presente trabalho, à esquerda, com os resultados de Souza (2006), à direita; $Pr = 0,733$ ; $Gr = 341064$	56
Figura 4.8	Cavidades para casos 1 (a); 2 (b); 3 (c) e 4 (d)	57
Figura 4.9	Geometria adimensional da cavidade quadrada com corpos internos quadrados, utilizada para o estudo dos casos 1 e 3	59

	v
Figura 4.10 Geometria adimensional da cavidade quadrada com corpos internos circulares, utilizada para o estudo dos casos 2 e 4	59
Figura 4.11 Malhas utilizadas para o estudo do caso 1	61
Figura 4.12 Malhas utilizadas para o estudo do caso 2	62
Figura 4.13 Número de Nusselt médio na superfície fria, $Nu_c$ , versus número de elementos, NE, para o caso 1	67
Figura 4.14 Número de Nusselt médio na superfície fria, $Nu_c$ , versus número de elementos, NE, para o caso 2	67
Figura 4.15 Tempo de processamento por iteração, em segundos, versus o número de elementos, NE	68
Figura 4.16 Número de Nusselt médio na superfície fria, $Nu_c$ , versus o número de Grashof, Gr, caso 1	69
Figura 4.17 Número de Nusselt médio na superfície fria, $Nu_c$ , versus o número de Grashof, Gr, caso 2	69
Figura 4.18 Número de Nusselt médio na superfície fria, $Nu_c$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , caso 1	70
Figura 4.19 Número de Nusselt médio na superfície fria, $Nu_c$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , caso 2	70
Figura 4.20 Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e da função corrente, $\psi$ , para o caso 1; $Pr = 0,733$	71
Figura 4.21 Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e da função corrente, $\psi$ , para o caso 2; $Pr = 0,733$	72
Figura 4.22 Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e linhas de corrente, $\psi$ , para o caso 1; no tempo adimensional, $\tau$ , $Pr = 0,733$ e $Gr = 10^5$	73
Figura 4.23 Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e linhas de corrente, $\psi$ , para o caso 2; no tempo adimensional, $\tau$ ; $Pr = 0,733$ e $Gr = 10^5$	74
Figura 4.24 Malhas utilizadas para o estudo do caso 3	81
Figura 4.25 Malhas utilizadas para o estudo do caso 4	82
Figura 4.26 Número de Nusselt médio na superfície fria, $Nu_c$ , versus número de elementos, NE, para o caso 3	83
Figura 4.27 Número de Nusselt médio na superfície fria, $Nu_c$ , versus número de elementos, NE, para o caso 4	83
Figura 4.28 Tempo de processamento por iteração, em segundos, versus o número de elementos, NE	84

	vi	
Figura 4.29	Número de Nusselt médio na superfície fria, $Nu_c$ , versus o número de Grashof, $Gr$ , caso 3	85
Figura 4.30	Número de Nusselt média na superfície fria, $Nu_c$ , versus o número de Grashof, $Gr$ , caso 4	85
Figura 4.31	Número de Nusselt médio na superfície fria, $Nu_c$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , caso 3	86
Figura 4.32	Número de Nusselt médio na superfície fria, $Nu_c$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , caso 4	86
Figura 4.33	Número de Nusselt médio na superfície fria, $Nu_c$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , caso 3	87
Figura 4.34	Número de Nusselt médio na superfície fria, $Nu_c$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , caso 4	87
Figura 4.35	Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e da função corrente, $\psi$ , para o caso 3; $Pr = 0,733$ e $D = 10$	88
Figura 4.36	Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e da função corrente, $\psi$ , para o caso 4; $Pr = 0,733$ e $D = 10$	89
Figura 4.37	Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e da função corrente, $\psi$ , para o caso 3; $Pr = 0,733$ e $Gr = 7,5 \times 10^4$	90
Figura 4.38	Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e da função corrente, $\psi$ , para o caso 4; $Pr = 0,733$ e $Gr = 7,5 \times 10^4$	91
Figura 4.39	Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e linhas de corrente, $\psi$ , para o caso 3; no tempo adimensional, $\tau$ ; $Pr = 0,733$ ; $Gr = 7,5 \times 10^4$ e $D = 0,1$	92
Figura 4.40	Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e linhas de corrente, $\psi$ , para o caso 4; no tempo adimensional, $\tau$ ; $Pr = 0,733$ ; $Gr = 7,5 \times 10^4$ e $D = 0,1$	93
Figura 4.41	Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e linhas de corrente, $\psi$ , para o caso 3; no tempo adimensional, $\tau$ ; $Pr = 0,733$ ; $Gr = 10^5$ e $D = 10$	94
Figura 4.42	Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e linhas de corrente, $\psi$ , para o caso 4; no tempo adimensional, $\tau$ ; $Pr = 0,733$ ; $Gr = 10^5$ e $D = 10$	95
Figura A1.1	Domínio discretizado e condições de contorno generalizadas	103
Figura A1.2	Elemento triangular e função de interpolação	104
Figura A3.1	Geometria mostrando o fluxo de calor na superfície S	117
Figura A4.1	Pontos nodais internos e do contorno	119



## Lista de Tabelas

Tabela 3.1	Parâmetros das equações (3.1a) e (3.1b)	25
Tabela 4.1	Comparação de resultados para a geometria quadrada da figura 4.1, para $Gr = 20000$ ; $Pr = 0,733$	53
Tabela 4.2	Comparação do número de Nusselt com valores obtidos em diversos trabalhos	54
Tabela 4.3	Coordenadas dos pontos apresentados na figura 4.9	60
Tabela 4.4	Coordenadas dos pontos apresentados na figura 4.10	60

## Simbologia

### Letras Latinas

a	coeficiente
A	área do elemento triangular, matriz global ou malha de refinamento menor
$A_1$	parâmetro da equação (3.1b)
b	coeficiente
B	matriz global ou malha de refinamento médio
$[B^e]$	matriz das derivadas parciais das funções de forma para o elemento
$B_1$	parâmetro da equação (3.1b)
c	coeficiente
$[C]^e$	matriz capacitância do elemento
$c_{pf}$	calor específico a pressão constante do fluido
$c_{ps}$	calor específico a pressão constante do sólido
C	malha de refinamento maior
$C_1$	parâmetro da equação (3.1b)
D	razão de difusividades = $\alpha_s / \alpha_f$
dA	área elementar
dV	volume elementar
$D_1$	parâmetro da equação (3.1a)
e	elemento
E	número total de elementos do domínio
$E_1$	constante do elemento
$F_1$	constante do elemento

$g$	aceleração gravitacional
$Gr$	número de Grashof = $g\beta(T_h - T_c)H^3/\nu^2$
$G_1$	constante do elemento
$h$	coeficiente médio de transferência de calor por convecção
$h_L$	coeficiente local de transferência de calor por convecção
$H$	altura da geometria
$H_1$	constante do elemento
$I_1$	constante do elemento
$J_1$	constante do elemento
$K_f$	condutibilidade térmica do fluido
$K_s$	condutibilidade térmica do sólido
$[K_\phi]^e$	matriz do elemento
$[K_\psi]^e$	matriz do elemento
$[K_\theta]^e$	matriz do elemento
$[K_\omega]^e$	matriz do elemento
$[\bar{K}_\psi]$	matriz global
$[\bar{K}_\theta]$	matriz global
$[\bar{K}_\omega]$	matriz global
$L$	comprimento da geometria
$M$	número de pontos da malha na direção X
$n$	direção normal à superfície
$N$	número de pontos da malha na direção Y ou função de forma
$NE$	número de elementos
$[N^e]$	matriz função de forma para o elemento
$Nu$	número de Nusselt médio
$Nu_c$	número de Nusselt médio na superfície fria
$Nu_h$	número de Nusselt médio na superfície quente
$Nu_L$	número de Nusselt local
$p$	pressão
$P$	pressão adimensional
$Pr$	número de Prandtl = $\nu/\alpha_f$
$q$	fluxo de calor
$q^e$	fluxo de calor no elemento

$Q_\phi$	função especificada
$Q_\psi$	função especificada da função corrente
$Q_\theta$	função especificada da temperatura adimensional
$Q_\omega$	função especificada da vorticidade
Ra	número de Rayleigh = Gr Pr
$\{R\}$	vetor residual global
$\{R^e\}$	vetor residual do elemento
$\{R_\phi\}^e$	vetor do elemento
$\{R_\psi\}^e$	vetor do elemento
$\{R_\theta\}^e$	vetor do elemento
$\{R_\omega\}^e$	vetor do elemento
$\{\bar{R}_\psi\}$	vetor global
$\{\bar{R}_\theta\}$	vetor global
$\{\bar{R}_\omega\}$	vetor global
s	tempo em segundos
S	superfície de contorno qualquer ou área da superfície
$S_1$	superfície isotérmica quente
$S_2$	superfície isotérmica fria
$S_3$	superfícies isoladas termicamente
$S_4$	superfície do corpo sólido
t	tempo ou espessura
T	temperatura
$T_c$	temperatura fria constante
$T_h$	temperatura quente constante
$T_o$	temperatura média = $(T_h + T_c) / 2$
u	velocidade do fluido na direção x
U	velocidade adimensional do fluido na direção X
v	velocidade do fluido na direção Y
V	velocidade adimensional do fluido na direção Y
x	coordenada horizontal
X	coordenada adimensional na direção horizontal ou matriz global incógnita
y	coordenada vertical
Y	coordenada adimensional na direção vertical

## Letras Gregas

$\alpha_f$	difusividade térmica do fluido
$\alpha_s$	difusividade térmica do sólido
$\alpha_1$	coeficiente da equação (A1.1)
$\alpha_2$	coeficiente da equação (A1.1)
$\alpha_3$	coeficiente da equação (A1.1)
$\beta$	coeficiente de expansão volumétrica do fluido
$\delta$	parâmetro da equação (3.1a)
$\tau$	tempo adimensional
$\Delta\tau$	incremento de tempo adimensional
$\lambda$	parâmetro da equação (3.1a)
$\rho_f$	massa específica do fluido
$\rho_s$	massa específica do sólido
$\theta$	temperatura adimensional
$\{ \theta \}$	vetor global da temperatura adimensional
$\{ \theta^e \}$	vetor temperatura adimensional do elemento
$\phi$	grandeza genérica, a qual pode ser $\psi$ , $\theta$ ou $\omega$
$\phi^e$	equação linear para distribuição da grandeza $\phi$ no elemento
$\phi_o(X,Y)$	função especificada no contorno
$\{ \phi \}^e$	vetor função escalar $\phi$ do elemento
$\nu$	viscosidade cinemática do fluido
$\mu$	viscosidade dinâmica do fluido
$\omega$	vorticidade
$\omega_M$	vorticidade calculada pelo método matricial
$\{ \omega \}$	vetor global da vorticidade
$\{ \omega^e \}$	vetor vorticidade do elemento
$\Omega$	domínio de estudo
$\Omega_f$	domínio fluido
$\Omega_s$	domínio sólido
$\psi$	função corrente

$\{\psi\}$	vetor global da função corrente
$\{\psi^e\}$	vetor função corrente do elemento

## Superescritos

a	número inteiro
b	número inteiro
c	número inteiro
e	referente ao elemento
T	transposta
$\tau$	referente ao tempo adimensional atual
$\tau - \Delta\tau$	referente tempo adimensional anterior

## Subscritos

B	ponto nodal pertencente ao contorno
$\beta$	representa os pontos nodais i, j, k
e	referente ao elemento
i	ponto nodal i
j	ponto nodal j
k	ponto nodal k
M	indica que usa-se o método matricial para ser calculada
N	indica o valor já calculado ou ponto nodal a uma pequena distância $\ell$ do contorno
N+1	indica o valor que está sendo calculado
S	referente à superfície
x	calculado ao longo do eixo X
$\phi$	assume ser $\psi$ , $\theta$ ou $\omega$

## Siglas

CPU	central processing unit
Fortran	formula translator
IEM	Instituto de Engenharia Mecânica
POLI	Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
RAM	random access memory
UNIFEI	Universidade Federal de Itajubá
UNISANTA	Universidade Santa Cecília
USP	Universidade de São Paulo

## **Capítulo 1**

# **INTRODUÇÃO**

## **1.1 – MOTIVAÇÃO DO TRABALHO**

O estudo da convecção natural no interior de cavidades tem despertado atualmente muito interesse, devido às diversas aplicações da engenharia nessa área. Em especial, o estudo da convecção natural em cavidades com corpos internos, tem sido objeto de estudos atuais, visando conhecer a dinâmica do escoamento do fluido e da transferência de calor. O avanço no conhecimento das técnicas computacionais da dinâmica dos fluidos tem contribuído para o desenvolvimento de equipamentos mais sofisticados e com níveis de eficiência cada vez maiores.

Com um melhor entendimento do processo de convecção natural envolvido, é possível otimizar e melhorar o desempenho de muitas aplicações industriais, como por exemplo: trocadores de calor, resfriamento de componentes eletrônicos, aquecimento ou resfriamento de produtos alimentícios, resfriamento em reatores nucleares, equipamentos de processos químicos, sistemas de aquecimento, dispersão de poluentes, sistemas de controle ambiental e outros.



No presente trabalho estuda-se a convecção natural do fluido no interior de uma cavidade quadrada com a presença de corpos no seu interior. Os corpos podem ser mantidos na temperatura uniforme baixa ou alta, ou os corpos podem ser condutores de calor. A análise numérica utiliza o método de elementos finitos, com elementos triangulares e considera o escoamento laminar, bidimensional, permanente ou não permanente. A seguir são apresentados os quatro casos estudados nesse trabalho.

## 1.2 – CASOS ESTUDADOS NO PRESENTE TRABALHO

As figuras 1.1 até 1.4 mostram as quatro geometrias que serão analisadas no presente trabalho, as quais serão chamadas de caso 1, caso 2, caso 3 e caso 4, respectivamente.

A figura 1.1 mostra a cavidade quadrada do caso 1, que contém dois corpos quadrados no seu interior. O fluido contido na cavidade é o ar. As paredes externas da cavidade são todas isoladas termicamente, portanto, não há fluxo de calor através das mesmas. O corpo quadrado inferior mantém a sua superfície isotérmica quente,  $T_h$ , enquanto que o corpo quadrado superior mantém sua superfície isotérmica fria,  $T_c$ .

A geometria apresentada na figura 1.1 pode representar duas aplicações importantes:

- i) A primeira, representa uma cavidade quadrada contendo ar, com dois corpos bons condutores de calor no seu interior, os quais mantêm superfícies isotérmicas internas, uma quente na temperatura,  $T_h$ , no corpo quente, e outra fria na temperatura,  $T_c$ , no corpo frio.
- ii) A segunda, representa um trocador de calor que mantém ar no interior da cavidade com superfícies externas isoladas, e dois dutos de seção quadrada, contendo fluidos que mantêm as superfícies internas nas temperaturas quente,  $T_h$ , e fria,  $T_c$ , respectivamente.

A figura 1.2 mostra a cavidade quadrada do caso 2, que contém dois corpos de seção circular no seu interior. O caso 2 apresenta as mesmas aplicações e condições de contorno do caso 1. A diferença entre os casos 1 e 2 é que, no primeiro, os corpos são quadrados e, no segundo, os corpos são circulares.

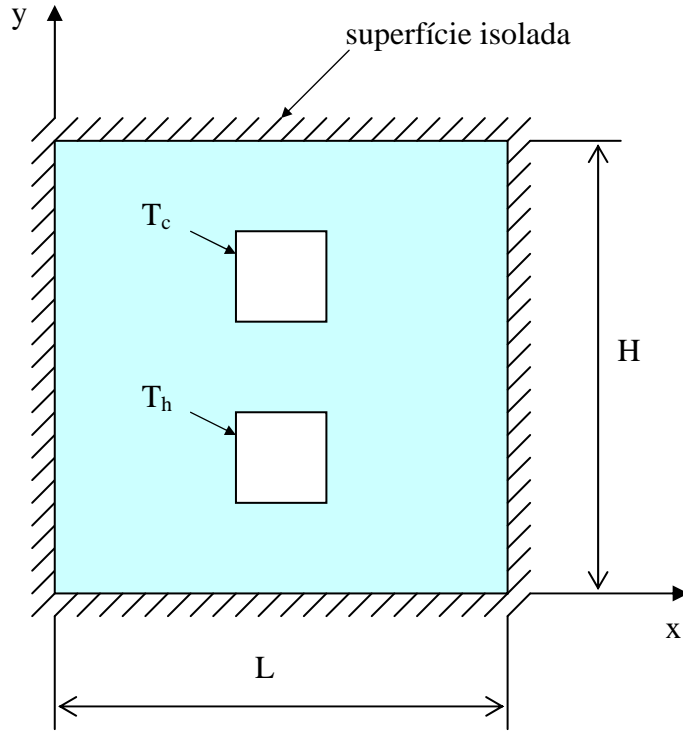


Figura 1.1 – Geometria para o caso 1.

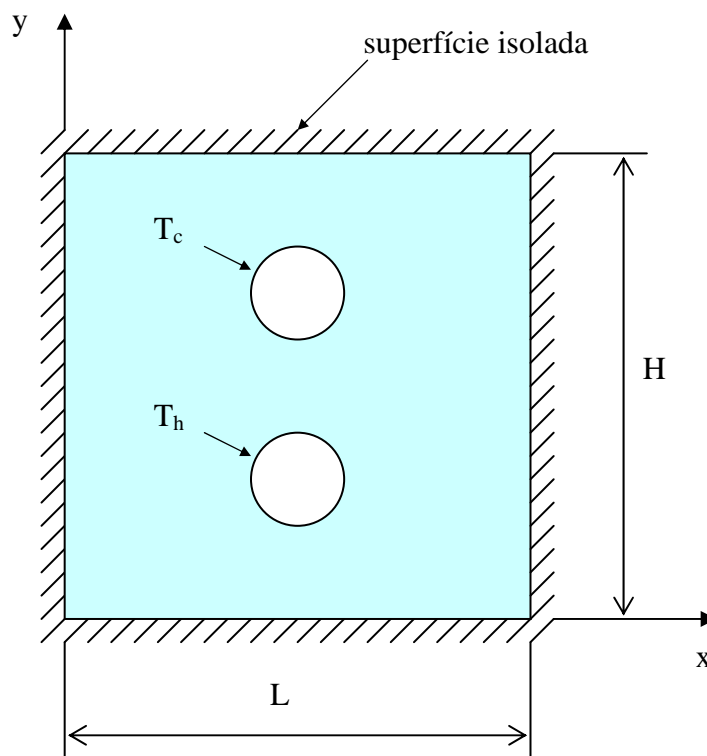


Figura 1.2 – Geometria para o caso 2.

A figura 1.3 mostra a cavidade quadrada do caso 3, que contém dois corpos quadrados no seu interior. O fluido contido na cavidade é o ar. As paredes direita e esquerda das superfícies externas da cavidade são isoladas termicamente. No interior da cavidade existem dois corpos de seção quadrada que apresentam condutividade térmica  $K_s$  e transferem calor por condução. A superfície horizontal inferior da cavidade será mantida numa temperatura alta,  $T_h$ , enquanto que, a superfície horizontal superior da cavidade será mantida numa temperatura baixa,  $T_c$ . A condição inicial é que o fluido e os corpos são mantidos numa temperatura média ( $T_0 = (T_h + T_c)/2$ ). Neste caso se pretende determinar as distribuições de temperaturas no fluido e no sólido, bem como as velocidades do fluido e as taxas de calor transferidas.

A figura 1.4 mostra a cavidade quadrada do caso 4, que contém dois corpos de seção circular no seu interior. O caso 4 apresenta condições de contorno idênticas ao caso 3. A diferença entre os casos 3 e 4, é que no caso 3 os corpos são quadrados, e no caso 4 os corpos são circulares.

Em todos os casos se pretende estudar a convecção natural do fluido (ar) no interior da cavidade. Existe interesse em se determinar as distribuições de temperaturas, velocidades e da função corrente, bem como calcular a taxa de calor transferida.

No item a seguir é apresentada uma revisão da bibliografia relacionada ao trabalho.

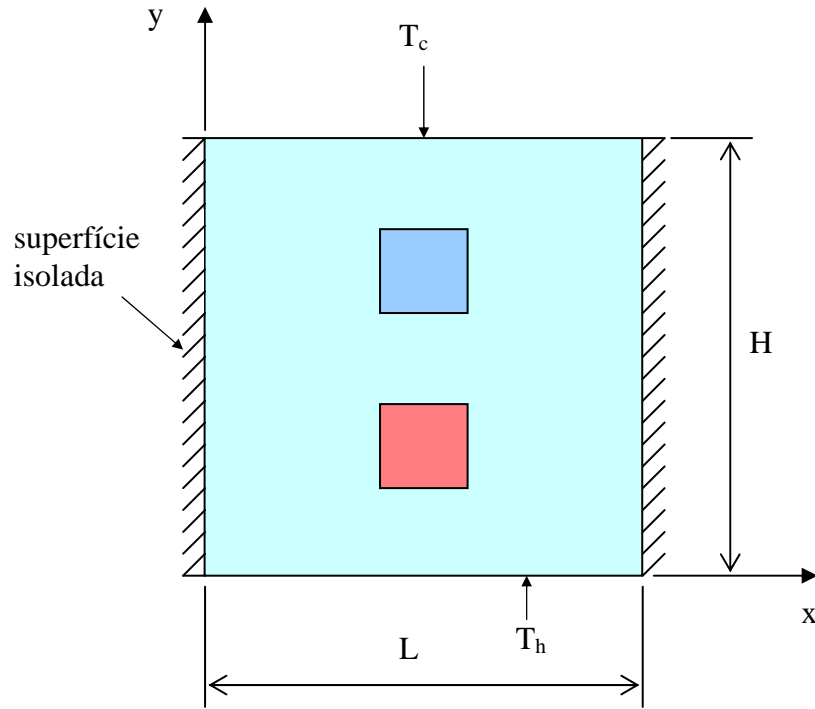


Figura 1.3 – Geometria para o caso 3.

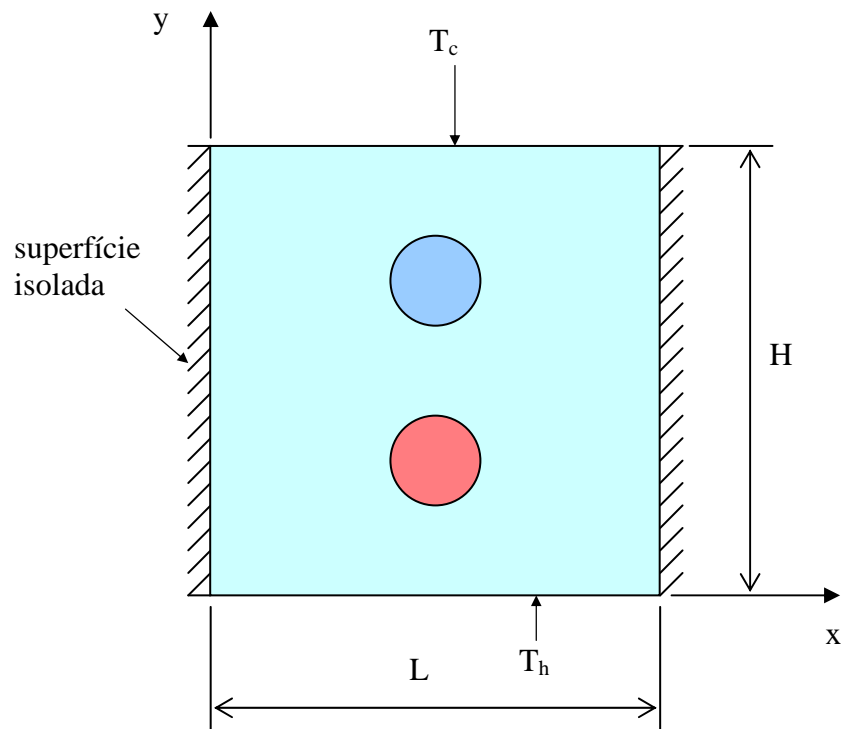


Figura 1.4 – Geometria para o caso 4.

## 1.3 – REVISÃO DA LITERATURA

Uma revisão da literatura mostrou uma grande quantidade de referências na área de transferência de calor envolvendo trabalhos de convecção natural em cavidades.

Os trabalhos encontrados para os casos de convecção natural, estudam o escoamento de fluido numa cavidade retangular fechada, ou estudam uma cavidade retangular fechada com corpos quentes, colocados no interior dessa cavidade. Alguns trabalhos numéricos que foram revisados estudaram os efeitos da posição do corpo interno à cavidade, sobre o escoamento do fluido e do campo de temperaturas. Foram revisados trabalhos numéricos e experimentais. A seguir é apresentada uma investigação dos principais trabalhos encontrados na literatura que tratam de estudos da convecção natural.

Valencia e Frederik (1989) realizaram um estudo numérico de convecção natural laminar em uma cavidade quadrada fechada. Uma parte de cada superfície vertical foi mantida na temperatura constante e a outra parte restante foi isolada termicamente. As superfícies horizontais foram isoladas termicamente. As partes das superfícies verticais com temperatura especificada foram variadas e cinco casos foram obtidos e estudados. As equações de conservação, na forma bidimensional e no regime permanente foram resolvidas pelo método SIMPLEC. Os resultados foram obtidos para Rayleigh na faixa de  $10^3$  a  $10^7$  e  $Pr = 0,71$ .

Ghaddar (1992) estudou numericamente a convecção natural de um cilindro horizontal aquecido uniformemente colocado dentro de uma cavidade retangular fechada. As paredes da cavidade são isoladas termicamente e o escoamento é considerado laminar e bidimensional. A dinâmica do escoamento e o comportamento térmico foram analisados para diferentes fluxos de calor aplicados ao cilindro. Os resultados foram obtidos para duas faixas distintas de número de Rayleigh:  $10 < Ra < 2 \times 10^2$  e  $7 \times 10^7 < Ra < 10^9$ . Foi utilizado o método de elementos espectrais, com malhas não uniformes. Os valores numéricos do número de Nusselt apresentaram-se ligeiramente superiores em relação aos valores obtidos experimentalmente, para número de Rayleigh  $Ra < 10^9$ .

Ganzaroli e Milanez (1995) estudaram numericamente a convecção natural em regime permanente numa cavidade retangular aquecida por baixo, isolada em cima e resfriada simetricamente nas laterais. O aquecimento na superfície inferior foi realizado de dois modos, a saber, com uma temperatura uniforme alta e com um fluxo de calor constante. As equações

de conservação foram resolvidas utilizando a formulação função corrente - vorticidade. O número de Rayleigh variou de  $10^3$  a  $10^7$ , a razão de aspecto de 1 a 9 e o número de Prandtl foi mantido em 0,7 e 7. Foi verificado que o número de Prandtl 0,7 e 7 têm pouco efeito na transferência de calor, entretanto, o tipo de condição de contorno de aquecimento da superfície inferior, afeta bastante o padrão do escoamento e a distribuição de temperaturas na cavidade, assim como a transferência de calor.

Cesini *et al.* (1999) analisaram experimentalmente e numericamente a convecção natural numa cavidade retangular com um cilindro horizontal no seu interior utilizando o método de elementos finitos. Foram estudadas as influências do número de Rayleigh e da geometria da cavidade na transferência de calor. O número de Nusselt local na superfície do cilindro foi calculado e medido. Os resultados experimentais são considerados resultados padrões e podem ser utilizados para comparações com resultados de novos trabalhos.

Sasaguchi *et al.* (1998) estudaram numericamente a convecção natural da água em uma cavidade retangular fechada com um cilindro no seu interior. As paredes da cavidade foram consideradas isoladas e o cilindro foi mantido na temperatura baixa de  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . O trabalho teve como objetivo estudar o efeito da posição do cilindro frio na cavidade retangular. Foram consideradas três posições do cilindro no interior da cavidade. As equações de conservação, bidimensionais e no regime não permanente foram resolvidas pelo método de diferenças finitas. Os resultados mostraram que as mudanças na posição do cilindro e nas temperaturas iniciais da água afetaram bastante o escoamento do fluido. Devido à inversão da massa específica da água para a temperatura de  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ , o escoamento do fluido e a distribuição de temperaturas foram muito complexos.

Sezai e Mohamad (2000) estudaram a convecção natural no interior de uma cavidade com uma fonte de calor no centro, resolvendo a equação de Navier Stokes tridimensional. A cavidade foi isolada na superfície superior. Foram estudados os efeitos das condições de contorno nas superfícies verticais e a taxa de transferência de calor da fonte. Foi apresentada também a variação do número de Nusselt em função do número de Rayleigh e da razão de aspecto, com número de Prandtl igual a 0,71. O número de Rayleigh foi variado de  $10^3$  até o escoamento se tornar instável.

Bae e Hyun (2003) realizaram um estudo sobre o resfriamento do ar num problema de convecção natural laminar não permanente numa cavidade retangular com três fontes discretas embutidas na parede. Os resultados mostraram a influência da condição térmica da fonte inferior, nas temperaturas das fontes posteriores. A análise transiente dos campos de velocidades e temperaturas mostrou a estrutura física dos escoamentos. O estudo enfatizou que as temperaturas transientes nas fontes excederam os valores correspondentes a situações de regime permanente.

Kurokawa *et. al.* (2005) apresentaram uma solução numérica para um problema de convecção natural conjugada numa cavidade quadrada com três fontes de calor protuberantes, igualmente espaçadas, montadas numa parede vertical. Todas as paredes da cavidade foram mantidas isoladas termicamente, exceto a parede vertical direita que foi mantida resfriada com temperatura constante. A análise numérica utilizou o método de elementos finitos com esquema de Galerkin e malha não estruturada. O resfriamento da fonte de calor foi somente garantido pela convecção natural, caracterizando um mecanismo de transferência de calor isento das falhas, como aqueles que ocorrem nos sistemas resfriados por convecção forçada. A melhor disposição do conjunto de fontes foi obtida quando a fonte de calor de maior potência estava localizada na posição superior. Foi verificado que a razão entre as condutividades térmicas da fonte e do fluido não afetaram a performance do sistema.

Basak *et al.* (2006) estudaram numericamente o problema da convecção natural em regime permanente numa cavidade quadrada, aquecida por baixo, isolada em cima e resfriada simetricamente nas laterais. O aquecimento na superfície inferior foi realizado de dois modos, a saber, com uma temperatura uniforme e com temperatura não uniforme. Na solução numérica das equações de conservação foi utilizado o método de elementos finitos com esquema de Galerkin e o método da penalidade. O número de Rayleigh variou de  $10^3$  a  $10^5$  e o número de Prandtl variou de 0,7 a 10. Os resultados mostraram que o número de Nusselt médio para o caso de aquecimento da superfície inferior com temperatura uniforme foi maior que para o caso com aquecimento não uniforme. Entretanto o número de Prandtl não teve efeito significativo na transferência de calor.

Kumar De e Dalal (2006) estudaram numericamente a convecção natural numa cavidade quadrada com um corpo quadrado aquecido no seu interior. As superfícies horizontais inferior e superior da cavidade foram mantidas isoladas termicamente, enquanto que as paredes verticais foram mantidas resfriadas com temperatura uniforme. O corpo quadrado interno à cavidade foi mantido aquecido com dois tipos de condições de contorno, a

saber, temperatura uniforme alta e fluxo de calor constante. O número de Rayleigh variou de  $10^3$  a  $10^6$  e o número de Prandtl foi fixado em 0,71. Foram consideradas três razões de aspecto para a cavidade: 0,5; 1 e 2. O corpo foi mantido em três posições verticais no centro da cavidade. Na solução numérica foi utilizado o método de diferenças finitas com formulação função corrente - vorticidade. Foi verificado que a transferência de calor é bastante afetada pela razão de aspecto, e pelo tipo de condição de contorno de aquecimento do corpo interno, para temperatura uniforme ou fluxo de calor uniforme. A posição vertical do corpo no interior da cavidade também influencia na taxa de transferência de calor.

## 1.4 – OBJETIVOS DO PRESENTE TRABALHO

O presente trabalho tem como objetivo o estudo numérico da convecção natural no interior de uma cavidade quadrada com corpos internos. A solução numérica utiliza o método de elementos finitos com malha não estruturada. O escoamento foi considerado laminar e bidimensional em regime permanente e não permanente. O estudo fornece como resultados as distribuições da função corrente adimensional,  $\psi$ , temperatura adimensional,  $\theta$ , e vorticidade adimensional,  $\omega$ . São apresentadas as distribuições da função corrente no fluido e as distribuições de temperaturas no corpo sólido e no fluido. São calculados os números de Nusselt local e médio, para as quatro geometrias, em função dos diversos parâmetros térmicos (número de Grashof, número de Prandtl e razão de difusividades), permitindo assim calcular o fluxo de transferência de calor em diversas superfícies.

## 1.5 – CONTRIBUIÇÕES DO PRESENTE TRABALHO

Comenta-se a seguir as principais contribuições do presente trabalho.

É apresentado o desenvolvimento sistemático das equações de conservação para o fluido e para os corpos sólidos no interior da cavidade. No final, são obtidas equações válidas para todo o domínio,  $\Omega$ , de interesse.

É apresentado de modo completo o desenvolvimento das equações, para aplicação do método de elementos finitos, em regiões de forma complexa, utilizando malha não



estruturada. A metodologia desenvolvida permite estudar problemas com formas geométricas complexas, sujeitas a vários tipos de condições de contorno.

A transferência de calor ocorre tanto no fluido quanto no sólido (a esse processo se denomina transferência de calor conjugada), na forma de convecção natural no domínio fluido e condução de calor no domínio sólido. Através deste trabalho, é possível visualizar as distribuições da temperatura adimensional e o escoamento do fluido no interior da cavidade. Também, torna-se possível o cálculo da taxa de transferência de calor numa superfície escolhida.

## 1.6 – DELINEAMENTO DO PRESENTE TRABALHO

A seguir, são apresentados os conteúdos dos capítulos, de uma forma geral.

No Capítulo 2 é apresentado o modelo matemático. Inicialmente são apresentadas as equações de conservação na forma dimensional. Essas equações se apresentam juntamente com as hipóteses consideradas, mais as condições iniciais e condições de contorno.

Com o objetivo de reduzir o número de parâmetros e generalizar a solução numérica do problema, as equações de conservação na forma dimensional, são adimensionalizadas e escritas em termos da temperatura adimensional,  $\theta$ , função corrente,  $\psi$ , vorticidade,  $\omega$ , e dos números de Grashof,  $Gr$ , de Prandtl,  $Pr$ , e da razão de difusividades,  $D$ . No final do capítulo são apresentadas as expressões para o cálculo do número de Nusselt local e médio.

O modelo numérico é apresentado no Capítulo 3. O método de elementos finitos é usado para a solução numérica das equações de conservação. Utilizou-se o elemento triangular de três nós, com variação linear das grandezas dentro de cada elemento. As equações matriciais lineares obtidas pelo método numérico para a função corrente,  $\psi$ , temperatura adimensional,  $\theta$ , e vorticidade,  $\omega$ , são desenvolvidas numa forma matricial geral para o elemento. Finalmente, é descrito o programa computacional desenvolvido e utilizado para resolver o sistema de equações globais acopladas em termos da função corrente,  $\psi$ , temperatura adimensional,  $\theta$ , e vorticidade,  $\omega$ , seguindo-se os cálculos do número de Nusselt local e médio.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados. O programa computacional desenvolvido é testado, comparando-se os resultados obtidos para convecção natural numa cavidade quadrada com aqueles encontrados na literatura. Esta comparação é feita no sentido de validar o programa computacional. Em seguida são apresentados os resultados do presente trabalho para os quatro casos estudados.

As conclusões e recomendações são apresentadas no Capítulo 5. Inicialmente são apresentadas as principais conclusões obtidas neste trabalho. Finalmente, são feitas algumas recomendações para possíveis trabalhos futuros, visando estender os estudos realizados neste trabalho.

O trabalho apresenta quatro apêndices. No Apêndice A1 são apresentados os fundamentos do método de elementos finitos. São apresentadas as equações das funções de forma para o elemento, bem como as equações para cálculo dos gradientes nas direções  $x$  e  $y$ .

No Apêndice A2, faz-se o desenvolvimento da equação diferencial bidimensional em regime não permanente, aplicando o método de Galerkin, a fim de obter a equação matricial linear e global, do tipo  $AX = B$ .

As equações para o cálculo dos números de Nusselt local e médio são apresentadas no Apêndice A3.

No Apêndice A4 é apresentado o método matricial para cálculo da vorticidade no contorno.

Por último, são apresentadas as referências bibliográficas consultadas, para elaboração do presente trabalho.

## **1.7 - EQUIPAMENTO E COMPILADOR UTILIZADO**

Os cálculos apresentados neste trabalho foram realizados num microcomputador PC AMD ATHLON (TM) XP2000+, com 256Mb de memória RAM, usando o compilador Compaq Visual Fortran 6.5a.

## Capítulo 2

# MODELO MATEMÁTICO

## 2.1 – ANÁLISE TEÓRICA DA CONVECÇÃO NATURAL

Este trabalho estuda o problema conjugado da transferência de calor que ocorre no domínio fluido,  $\Omega_f$ , e a condução de calor que ocorre no domínio sólido,  $\Omega_s$ , mostrado na figura 2.1, página 15. As equações de conservação governantes do problema serão analisadas tanto para o domínio fluido como para o domínio sólido. A seguir são apresentadas as equações para os domínios fluido e sólido.

### 2.1.1 – Equações de Conservação para o Fluido

As equações de conservação para o estudo de convecção natural no domínio fluido, em cavidades fechadas, terão as seguintes hipóteses:

- a) regime não permanente;
- b) escoamento bidimensional e laminar;

- c) escoamento incompressível;
- d) função dissipação viscosa desprezada;
- e) propriedades físicas do fluido ( $\rho_f, \mu, c_{p_f}, K_f$ ) constantes, exceto a massa específica nos termos de empuxo;
- f) sem geração interna de calor.

Mediante as hipóteses acima as equações de conservação na forma dimensional para o domínio fluido,  $\Omega_f$ , são:

continuidade,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

quantidade de movimento,

$$\rho_f \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.2)$$

$$\rho_f \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho_f g \beta (T - T_0), \quad (2.3)$$

e energia,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{K_f}{\rho_f c_{p_f}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (2.4)$$

Sendo a temperatura de referência  $T_0$  dada por:

$$T_0 = \frac{T_h + T_c}{2}. \quad (2.5)$$

### 2.1.2 – Equação de Conservação para o Sólido

As componentes de velocidades  $u$  e  $v$  são nulas no domínio sólido. A equação da energia na forma dimensional para o domínio sólido,  $\Omega_s$ , apresenta as seguintes hipóteses:

- a) regime não permanente;
- b) as propriedades físicas do sólido ( $\rho_s$ ,  $c_{ps}$ ,  $K_s$ ) são constantes;
- c) sem geração interna de calor.

Mediante as considerações acima, a equação de conservação da energia na forma dimensional para o domínio sólido,  $\Omega_s$ , é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K_s}{\rho_s c_{ps}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (2.6)$$

### 2.1.3 – Condições Iniciais e de Contorno na Forma Dimensional

Uma geometria de cavidade retangular fechada, com dois corpos colocados no seu interior, encontra-se ilustrada na figura 2.1, juntamente com as condições de contorno consideradas na análise teórica. A superfície  $S_1$  representa uma superfície isotérmica quente com temperatura  $T_h$ , enquanto que a superfície  $S_2$  representa uma superfície isotérmica fria com temperatura  $T_c$ . A superfície  $S_3$  está isolada termicamente, não havendo fluxo de calor passando através dela. A superfície  $S_4$  é uma superfície de interface onde existe continuidade do fluxo de calor. As componentes de velocidades do fluido nas superfícies  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  são nulas.

As condições iniciais e de contorno da presente análise são:

i) condições iniciais:

para  $t = 0$ :

$$u = v = 0 \quad (\text{em } \Omega), \quad (2.7a)$$

$$T = T_0 = \frac{T_c + T_h}{2} \quad (\text{em } \Omega), \quad (2.7b)$$

sendo  $\Omega$  o domínio de estudo, o qual engloba os domínios fluido,  $\Omega_f$ , e sólido,  $\Omega_s$ .

ii) condições de contorno:

para  $t > 0$ :

$$T = T_h \quad (\text{em } S_1), \quad (2.8a)$$

$$T = T_c \quad (\text{em } S_2), \quad (2.8b)$$

$$q = \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (\text{em } S_3), \quad (2.8c)$$

$$u = v = 0 \quad (\text{em } S_1, S_2, S_3 \text{ e } S_4), \quad (2.8d)$$

sendo que  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$  representam as superfícies na fronteira do domínio  $\Omega$ , mostradas na figura 2.1.

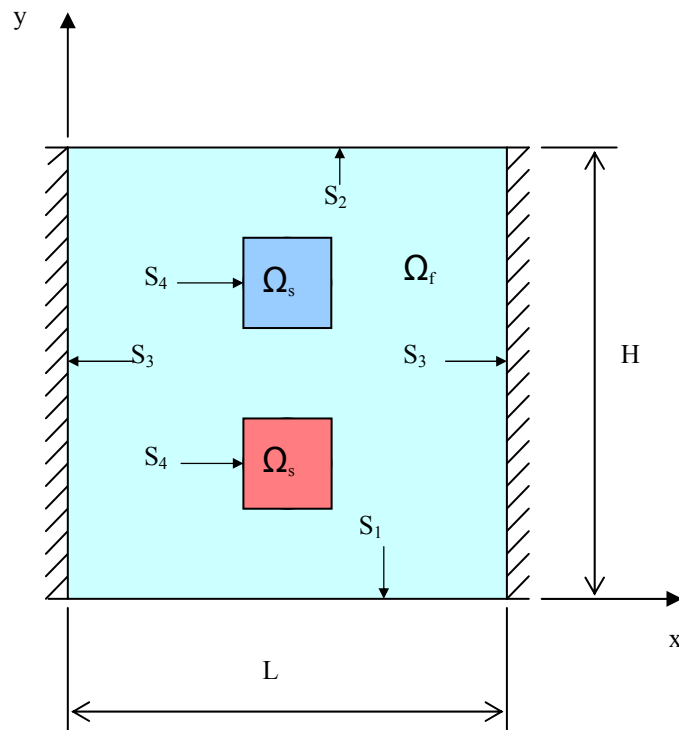


Figura 2.1 – Geometria de uma cavidade quadrada fechada com dois corpos colocados no seu interior (caso 3).

### 2.1.4 – Adimensionalização das Equações

No sentido de generalizar a solução numérica do problema são introduzidas as seguintes grandezas adimensionais para os domínios fluido e sólido:

$$\tau = \frac{v t}{H^2}, \quad X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{u H}{v},$$

$$V = \frac{v H}{v}, \quad P = \frac{p H^2}{\rho v^2}, \quad \theta = \frac{T - T_o}{T_h - T_o}. \quad (2.9)$$

#### 2.1.4a – Adimensionalização das Equações para o Domínio Fluido

Substituindo (2.9) em (2.1), resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \quad (2.10)$$

Substituindo (2.9) em (2.2), resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad (2.11)$$

sendo Gr o número de Grashof definido pela relação:

$$Gr = \frac{g \beta (T_h - T_c) H^3}{v^2}. \quad (2.12)$$

Substituindo (2.9) em (2.3), resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{Gr}{2} \theta + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}. \quad (2.13)$$

Substituindo (2.9) em (2.4), resulta:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right), \quad (2.14)$$

sendo Pr o número de Prandtl do fluido definido pela relação:

$$\text{Pr} = \frac{v}{\alpha_f} = \frac{\mu c_{pf}}{K_f} = \frac{\rho_f v c_{pf}}{K_f}. \quad (2.15)$$

### 2.1.4b – Adimensionalização das Equações para o Domínio Sólido

Substituindo (2.9) em (2.6), resulta a seguinte equação da energia para o domínio sólido:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{D}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right). \quad (2.16)$$

Sendo D a razão das difusividades do sólido e fluido, definida por:

$$D = \frac{\alpha_s}{\alpha_f}. \quad (2.17)$$

As difusividades térmicas do fluido e do sólido são dadas por:

$$\alpha_f = \frac{K_f}{\rho_f c_{pf}}; \quad \alpha_s = \frac{K_s}{\rho_s c_{ps}}. \quad (2.18)$$

### 2.1.5 – Adimensionalização das Equações em Função de $\psi$ , $\theta$ e $\omega$

#### Equações para o Domínio Fluido

Os termos de pressão que aparecem nas equações (2.11) e (2.13) podem ser eliminados. Isto é conseguido derivando-se a equação (2.11) em relação a Y, e a equação (2.13) em relação a X. Em seguida, as equações são subtraídas, resultando:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + V \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \\ & = \frac{\text{Gr}}{2} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$



A vorticidade,  $\omega$ , do fluido é introduzida pela seguinte relação:

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}. \quad (2.20)$$

Substituindo (2.20) em (2.19), vem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{Gr}{2} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2}. \quad (2.21)$$

A função corrente  $\psi$  é introduzida pela seguinte relação:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \text{ e } V = -\frac{\partial \psi}{\partial X}. \quad (2.22)$$

Com a definição dada por (2.22), a equação da continuidade (2.10) fica satisfeita.

Das equações (2.20) e (2.22), resulta:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega. \quad (2.23)$$

Das equações (2.14) e (2.22), vem:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right). \quad (2.24)$$

Das equações (2.21) e (2.22), vem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{Gr}{2} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2}. \quad (2.25)$$

Reescrevendo as equações (2.23), (2.24) e (2.25), resultam, respectivamente, para o domínio fluido:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \frac{Gr}{2} \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}. \quad (2.28)$$

As equações (2.26), (2.27) e (2.28) representam as equações em termos da função corrente,  $\psi$ , temperatura adimensional,  $\theta$ , e vorticidade,  $\omega$ , tendo sido eliminada a pressão.

### Equação para o Domínio Sólido

A equação da energia para o domínio sólido,  $\Omega_s$ , na forma adimensional, é dada pela equação (2.16) que é aqui repetida por conveniência:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{D}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right). \quad (2.29)$$

### Equações para os Domínios Fluido e Sólido

Comparando as equações (2.27) e (2.29), verifica-se que estas podem ser escritas na seguinte forma geral, válida para as regiões dos domínios sólido e fluido:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{D}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right). \quad (2.30)$$

Na equação (2.30), tem-se que:

$$D = 1 \quad (\text{para } \Omega_f), \quad (2.31a)$$

$$D = \frac{\alpha_s}{\alpha_f} \text{ e } \psi = 0 \quad (\text{para } \Omega_s). \quad (2.31b)$$

Assim as equações (2.26), (2.30) e (2.28) formam, respectivamente, um conjunto de equações diferenciais parciais que são válidas para os domínios fluido e sólido, dado por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{D}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \frac{Gr}{2} \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}. \quad (2.34)$$

Nas equações (2.32), (2.33) e (2.34), tem-se que:

$$D = 1 \quad (\text{para } \Omega_f), \quad (2.35a)$$

$$D = \frac{\alpha_s}{\alpha_f} \quad \text{e } \psi = \omega = 0 \quad (\text{para } \Omega_s). \quad (2.35b)$$

### 2.1.6 – Condições Iniciais e de Contorno na Forma Adimensional

As condições iniciais e de contorno, na forma adimensional, correspondentes às equações (2.32), (2.33) e (2.34), conforme a figura 2.2 são:

condições iniciais:

para  $\tau = 0$ :

$$\psi = \theta = \omega = 0 \quad (\text{em } \Omega), \quad (2.36)$$

condições de contorno:

para  $\tau > 0$ :

$$\theta = 1 \quad (\text{em } S_1), \quad (2.37a)$$

$$\theta = -1 \quad (\text{em } S_2), \quad (2.37b)$$

$$q = \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad (\text{em } S_3), \quad (2.37c)$$

$$\psi = 0 \quad (\text{ em } S_1, S_2, S_3 \text{ e } S_4 ), \quad (2.37d)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (\text{ em } S_1, S_2, S_3 \text{ e } S_4 ), \quad (2.37e)$$

$$\omega = \omega_M \quad (\text{ em } S_1, S_2, S_3 \text{ e } S_4 ), \quad (2.37f)$$

sendo que  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$  são as superfícies no contorno do domínio  $\Omega$ , mostradas na figura 2.2. A equação (2.36) estabelece as condições iniciais para  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$  em todo o domínio  $\Omega$ . As equações (2.37a) e (2.37b) estabelecem que as temperaturas adimensionais baixa e alta são respectivamente -1 e 1. A equação (2.37c) indica que o fluxo de calor através das superfícies  $S_3$  é nulo. As equações (2.37d) e (2.37e) estabelecem, respectivamente, as condições de impermeabilidade e aderência no contorno. Na equação (2.37f),  $\omega_M$  representa a vorticidade do fluido junto ao contorno, calculado pelo método matricial mostrado no Apêndice A4.

As equações de conservação (2.32), (2.33) e (2.34) podem ser escritas na seguinte forma condensada:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + Q_\psi = 0, \quad (2.38)$$

$$\frac{D}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + Q_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} + Q_\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (2.40)$$

sendo:

$$Q_\psi = \omega, \quad (2.41)$$

$$Q_\theta = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right), \quad (2.42)$$

$$Q_{\omega} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \frac{Gr}{2} \frac{\partial \theta}{\partial X}. \quad (2.43)$$

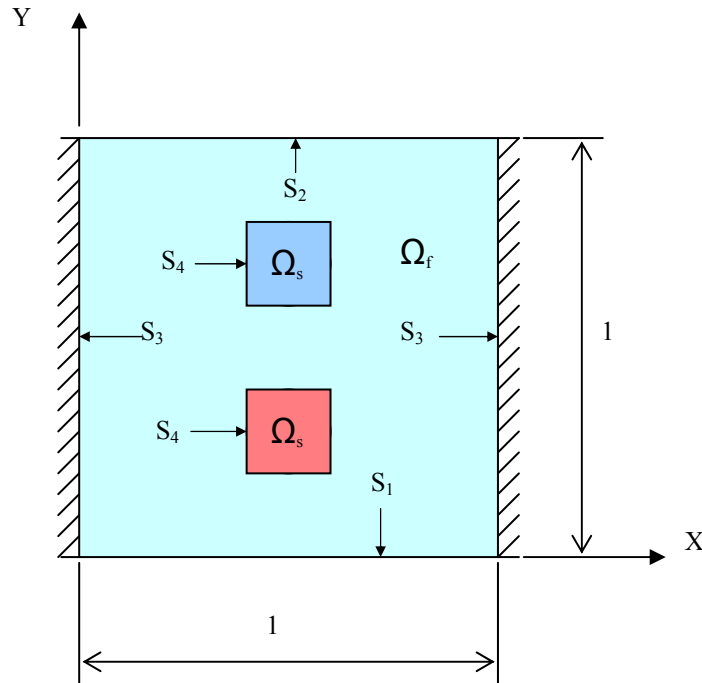


Figura 2.2 – Domínio computacional e condições de contorno adimensionais (caso 3).

No Capítulo 3, será apresentada a metodologia numérica, através do método de elementos finitos, para resolver as equações (2.38), (2.39) e (2.40), juntamente com as condições iniciais e de contorno do problema.

### 2.1.7 – Números de Nusselt Local e Médio

Neste item são apresentadas as equações para o cálculo dos números de Nusselt local e médio para os quatro casos estudados neste trabalho.

As equações (2.38), (2.39) e (2.40) representam um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e acopladas. Para se resolver este sistema de equações, será usado o método de elementos finitos com o objetivo de determinar as distribuições das funções  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ . Assim, será possível calcular os números de Nusselt local e médio em função de parâmetros geométricos e térmicos do problema.

As definições dos números de Nusselt local e médio são apresentadas no Apêndice A3, pelas seguintes relações:

Número de Nusselt local para as superfícies  $S_1$  e  $S_2$  :

$$\text{Nu}_L = \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_S, \quad (2.44)$$

onde S pode ser a superfície  $S_1$  ou  $S_2$ .

Número de Nusselt médio para as superfícies  $S_1$  e  $S_2$  :

$$\text{Nu} = \frac{1}{S_s} \int_S \text{Nu}_L \Big|_s dS, \quad (2.45)$$

onde S pode ser a superfície  $S_1$  ou  $S_2$ .

Os números de Nusselt local e médio, descritos acima, podem ser escritos em função de parâmetros geométricos e térmicos do problema, respectivamente, como :

Para os casos 1 e 2:

$$\text{Nu}_L = \text{Nu}_L ( \text{Gr}, \text{Pr} ), \quad (2.46a)$$

$$\text{Nu} = \text{Nu} ( \text{Gr}, \text{Pr} ) . \quad (2.46b)$$

Para os casos 3 e 4:

$$\text{Nu}_L = \text{Nu}_L ( \text{Gr}, \text{Pr}, D ), \quad (2.47a)$$

$$\text{Nu} = \text{Nu} ( \text{Gr}, \text{Pr}, D ) . \quad (2.47b)$$

Sendo que os parâmetros Gr, Pr e D são definidos pelas equações (2.12), (2.15) e (2.17), respectivamente.

## Capítulo 3

### MODELO NUMÉRICO

#### 3.1 – FORMA GERAL PARA AS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

As equações (2.38), (2.39) e (2.40), apresentadas no Capítulo 2, podem ser escritas na seguinte forma compacta geral:

$$\delta \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \quad (3.1a)$$

sendo que  $Q_\phi$  é uma função especificada dada por:

$$Q_\phi = A_1 \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + B_1 \frac{\partial \theta}{\partial X} + C_1 \frac{\partial \theta}{\partial Y} + D_1 \omega, \quad (3.1b)$$

sendo  $\phi$  uma grandeza que pode representar  $\psi$ ,  $\theta$  ou  $\omega$ ; os parâmetros  $\delta$ ,  $\lambda$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$  são dados conforme a tabela 3.1 seguinte.

Tabela 3.1 – Parâmetros das equações (3.1a) e (3.1b).

$\phi$	$\lambda$	$\delta$	$A_1$	$B_1$	$C_1$	$D_1$
$\psi$	0	1	0	0	0	1
$\theta$	1	$\frac{1}{Pr}$	1	0	0	0
$\omega$	1	1	1	$\frac{Gr}{2}$	0	0

As condições de contorno relativas às equações (2.38), (2.39) e (2.40) dadas no Capítulo 2, agora representadas pelas equações (3.1a) e (3.1b), podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\phi = \phi(X, Y), \quad (3.1c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \quad (3.1d)$$

A condição de contorno dada pela equação (3.1c) é uma condição de contorno de primeira espécie e representa a condição de  $\phi$  imposta no contorno, enquanto que a equação (3.1d) é uma condição de contorno de segunda espécie e representa que o fluxo da grandeza  $\phi$  imposto no contorno é zero.

## 3.2 – OBTENÇÃO GERAL DAS MATRIZES E VETORES PARA OS ELEMENTOS

No Apêndice A2 é mostrado que as equações (3.1a) e (3.1b), podem ser escritas na forma matricial, dada pela equação (A2.44), como:

$$\left[ [K_\phi]^e + \frac{1}{\Delta\tau} [C]^e \right] \{ \phi^e \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [C]^e \{ \phi^e \}_N - \{ R_\phi \}^e. \quad (3.2)$$



sendo que de acordo com as equações (A2.36), (A2.37), (A2.38) e (A2.39) tem-se:

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV, \quad (3.3)$$

$$[K_\phi]^e = \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV, \quad (3.4)$$

$$\{R_\phi\}^e = - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA. \quad (3.5)$$

### 3.2.1 – Desenvolvimento da matriz $[C]^e$ para o elemento

Da equação (3.3) a matriz do elemento  $[C]^e$  é dada como sendo:

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV. \quad (3.6)$$

A matriz de forma para um elemento triangular é dada pela equação (A1.7), como:

$$[N^e] = [N_i \quad N_j \quad N_k], \quad (3.7)$$

sendo  $N_i$ ,  $N_j$  e  $N_k$  são as funções de forma dadas pelas equações (A1.6a), (A1.6c) e (A1.6e).

Considera-se o elemento com uma espessura  $t$ . Portanto,  $dV = t dA$ . Logo, das equações (3.6) e (3.7) tem-se:

$$[C]^e = \int_{A^e} \lambda t \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} dA = \lambda t \int_{A^e} \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dA. \quad (3.8)$$

A integral da matriz da equação (3.8) pode ser realizada utilizando a equação (7.34) da referência Zienkiewicz (1971), dada por:

$$\int_{A^e} N_i^a N_j^b N_k^c dA = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} 2A. \quad (3.9)$$

Das equações (3.9) e (3.8), resulta que:

$$[C]^e = \frac{\lambda t A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

sendo que A é a área do elemento dada pela equação (A1.4), como:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}. \quad (3.11)$$

### 3.2.2 – Desenvolvimento da matriz $[K_\phi]^e$ do elemento

Da equação (3.4), a matriz  $[K_\phi]^e$  do elemento é dada como sendo:

$$[K_\phi]^e = \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV. \quad (3.12)$$

A matriz das derivadas das funções de forma para o elemento é dada pela equação (A2.23) como:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_j}{\partial X} & \frac{\partial N_k}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} & \frac{\partial N_j}{\partial Y} & \frac{\partial N_k}{\partial Y} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Substituindo (A1.6a), (A1.6c) e (A1.6d) em (3.13), resulta:

$$[\mathbf{B}^e] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i & \mathbf{b}_j & \mathbf{b}_k \\ \mathbf{c}_i & \mathbf{c}_j & \mathbf{c}_k \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

A matriz transposta  $[\mathbf{B}^e]^T$  de (3.14) é:

$$[\mathbf{B}^e]^T = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i & \mathbf{c}_i \\ \mathbf{b}_j & \mathbf{c}_j \\ \mathbf{b}_k & \mathbf{c}_k \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Substituindo (3.14) e (3.15) em (3.12), vem:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_\phi]^e &= \int_{V^e} \frac{\delta}{4A^2} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i & \mathbf{c}_i \\ \mathbf{b}_j & \mathbf{c}_j \\ \mathbf{b}_k & \mathbf{c}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i & \mathbf{b}_j & \mathbf{b}_k \\ \mathbf{c}_i & \mathbf{c}_j & \mathbf{c}_k \end{bmatrix} dV = \\ &= \frac{\delta}{4A^2} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i & \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j + \mathbf{c}_i \mathbf{c}_j & \mathbf{b}_i \mathbf{b}_k + \mathbf{c}_i \mathbf{c}_k \\ \mathbf{b}_j \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_j \mathbf{c}_i & \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j + \mathbf{c}_j \mathbf{c}_j & \mathbf{b}_j \mathbf{b}_k + \mathbf{c}_j \mathbf{c}_k \\ \mathbf{b}_k \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_k \mathbf{c}_i & \mathbf{b}_k \mathbf{b}_j + \mathbf{c}_k \mathbf{c}_j & \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k + \mathbf{c}_k \mathbf{c}_k \end{bmatrix} \int_{V^e} dV. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Considera-se o elemento com uma espessura  $t$ . Portanto,  $dV = t dA$ . Assim, tem-se que:

$$\int_{V^e} dV = \int_{S^e} t dA = t A. \quad (3.17)$$

Substituindo (3.17) em (3.16) vem:

$$[\mathbf{K}_\phi]^e = \frac{\delta t}{4A} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i & \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j + \mathbf{c}_i \mathbf{c}_j & \mathbf{b}_i \mathbf{b}_k + \mathbf{c}_i \mathbf{c}_k \\ \mathbf{b}_j \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_j \mathbf{c}_i & \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j + \mathbf{c}_j \mathbf{c}_j & \mathbf{b}_j \mathbf{b}_k + \mathbf{c}_j \mathbf{c}_k \\ \mathbf{b}_k \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_k \mathbf{c}_i & \mathbf{b}_k \mathbf{b}_j + \mathbf{c}_k \mathbf{c}_j & \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k + \mathbf{c}_k \mathbf{c}_k \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

### 3.2.3 – Desenvolvimento do vetor $\{R_\phi\}^e$ do elemento

Para o presente trabalho, em todos os casos estudados, nas superfícies onde o gradiente de  $\phi$  é conhecido, o gradiente é nulo, assim  $q = \partial\phi/\partial n = 0$ . Logo, a equação (3.5) reduz-se à seguinte equação:

$$\{R_\phi\}^e = - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV, \quad (3.19)$$

sendo  $Q_\phi^e$  dado pela equação (3.1b) e  $dV = t dA$ , a equação (3.19), torna-se:

$$\begin{aligned} \{R_\phi\}^e &= - \int_{A^e} \left[ A_1 \left( \frac{\partial\psi}{\partial X} \frac{\partial\phi}{\partial Y} - \frac{\partial\psi}{\partial Y} \frac{\partial\phi}{\partial X} \right) + B_1 \frac{\partial\theta}{\partial X} + C_1 \frac{\partial\theta}{\partial Y} + D_1 \omega \right] [N^e]^T t dA = \\ &= - \int_{A^e} \left[ t A_1 \left( \frac{\partial\psi}{\partial X} \frac{\partial\phi}{\partial Y} - \frac{\partial\psi}{\partial Y} \frac{\partial\phi}{\partial X} \right) [N^e]^T \right] dA - \int_{A^e} t B_1 \frac{\partial\theta}{\partial X} [N^e]^T dA \\ &\quad - \int_{A^e} t C_1 \frac{\partial\theta}{\partial Y} [N^e]^T dA - \int_{A^e} t D_1 [N^e]^T \omega dA. \end{aligned} \quad (3.20)$$

A equação (3.20) pode ser escrita da seguinte forma compacta:

$$\{R_\phi\}^e = - \left( \{R_\phi\}_1^e + \{R_\phi\}_2^e + \{R_\phi\}_3^e + \{R_\phi\}_4^e \right). \quad (3.21)$$

#### i-) Cálculo do vetor $\{R_\phi\}_1^e$ do elemento

Da equação (3.20), vem que:

$$\{R_\phi\}_1^e = \int_{A^e} t A_1 \left( \frac{\partial\psi}{\partial X} \frac{\partial\phi}{\partial Y} - \frac{\partial\psi}{\partial Y} \frac{\partial\phi}{\partial X} \right) [N^e]^T dA. \quad (3.22)$$

Define-se  $E_1$ , como sendo:

$$E_1 = \frac{\partial\psi^e}{\partial X} \frac{\partial\phi^e}{\partial Y} - \frac{\partial\psi^e}{\partial Y} \frac{\partial\phi^e}{\partial X}. \quad (3.23)$$

As funções  $\psi^e$  e  $\phi^e$  do elemento podem ser assim escritas como:

$$\psi^e = [N^e] \{ \psi^e \}, \quad (3.24)$$

$$\phi^e = [N^e] \{ \phi^e \}. \quad (3.25)$$

Das equações (A1.10a) e (A1.10b), resulta que:

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial X} = \frac{1}{2A} (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k), \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial Y} = \frac{1}{2A} (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k), \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial X} = \frac{1}{2A} (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k), \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial Y} = \frac{1}{2A} (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k). \quad (3.29)$$

Substituindo as equações (3.26) à (3.29) em (3.23) vem:

$$E_1 = \frac{1}{4A^2} \left[ (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) \right. \\ \left. - (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k) (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) \right]. \quad (3.30)$$

Da equação (3.22), observando-se que  $E_1$  é constante dentro de cada elemento, vem que:

$$\{ R_\phi \}_i^e = t A_1 E_1 \int_{A^e} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dA. \quad (3.31)$$

Das equações (3.9) e (3.31), vem que:

$$\{ R_\phi \}_i^e = \frac{t A_1 E_1 A}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.32)$$

Substituindo (3.30) em (3.32) vem:

$$\begin{aligned} \{R_\phi\}_i^e = & \left[ \frac{tA_1}{12A} (b_i\psi_i + b_j\psi_j + b_k\psi_k) (c_i\phi_i + c_j\phi_j + c_k\phi_k) \right. \\ & \left. - \frac{tA_1}{12A} (c_i\psi_i + c_j\psi_j + c_k\psi_k) (b_i\phi_i + b_j\phi_j + b_k\phi_k) \right] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = A_1 F_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

sendo:

$$\begin{aligned} F_1 = & \frac{t}{12A} \left[ (b_i\psi_i + b_j\psi_j + b_k\psi_k) (c_i\phi_i + c_j\phi_j + c_k\phi_k) \right. \\ & \left. - (c_i\psi_i + c_j\psi_j + c_k\psi_k) (b_i\phi_i + b_j\phi_j + b_k\phi_k) \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

## ii-) Cálculo do vetor $\{R_\phi\}_2^e$ do elemento

Da equação (3.20), vem que:

$$\{R_\phi\}_2^e = \int_{A^e} tB_1 \frac{\partial\theta}{\partial X} [N^e]^T dA, \quad (3.35)$$

sendo que o termo  $G_1$  da equação (3.35), pode ser escrito para o elemento da seguinte forma:

$$G_1 = \frac{\partial\theta^e}{\partial X}. \quad (3.36)$$

A função  $\theta^e$  do elemento pode ser assim escrita:

$$\theta^e = [N^e] \left\{ \theta^e \right\}. \quad (3.37)$$

Da equação (A1.10a) resulta que:

$$\frac{\partial\theta^e}{\partial X} = \frac{1}{2A} (b_i\theta_i + b_j\theta_j + b_k\theta_k). \quad (3.38)$$

Substituindo a equação (3.38) em (3.36) vem:

$$G_1 = \frac{1}{2A} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k). \quad (3.39)$$

Da equação (3.35), observando que  $G_1$  é constante dentro de cada elemento, vem que:

$$\{R_\phi\}_2^e = t B_1 G_1 \int_{A^e} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dA. \quad (3.40)$$

Das equações (3.9) e (3.40), vem que:

$$\{R_\phi\}_2^e = \frac{t B_1 G_1 A}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.41)$$

Substituindo (3.39) em (3.41), vem:

$$\{R_\phi\}_2^e = \frac{t B_1}{6} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = B_1 H_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.42)$$

sendo:

$$H_1 = \frac{t}{6} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k). \quad (3.43)$$

### iii-) Cálculo do vetor $\{R_\phi\}_3^e$ do elemento

De uma maneira análoga ao cálculo de  $\{R_\phi\}_2$ , pode-se mostrar que o valor do vetor  $\{R_\phi\}_3^e$  é:

$$\{R_\phi\}_3^e = \frac{tC_1}{6} (c_i\theta_i + c_j\theta_j + c_k\theta_k) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = C_1 I_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.44)$$

sendo:

$$I_1 = \frac{t}{6} (c_i\theta_i + c_j\theta_j + c_k\theta_k). \quad (3.45)$$

#### iv-) Cálculo do vetor $\{R_\phi\}_4^e$ do elemento

Da equação (3.20), vem que:

$$\{R_\phi\}_4^e = \int_{A^e} tD_1 [N^e]^T \omega dA = \int_{A^e} tD_1 [N^e]^T [N^e] \{\omega^e\} dA, \quad (3.46)$$

A vorticidade  $\omega$  no elemento é dada por:

$$\omega = [N^e] \{\omega^e\}. \quad (3.47)$$

Das equações (3.46) e (3.47), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \{R_\phi\}_4^e &= \int_{A^e} tD_1 \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} dA = \\ &= tD_1 \int_{A^e} \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} dA. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Das equações (3.48) e (3.9), resulta:

$$\{R_\phi\}_4^e = \frac{tD_1 A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} = D_1 J_1 \begin{Bmatrix} (2\omega_i + \omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + 2\omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + \omega_j + 2\omega_k) \end{Bmatrix}, \quad (3.49)$$



sendo:

$$J_1 = \frac{tA}{12}. \quad (3.50)$$

Substituindo os resultados obtidos pelas equações (3.33), (3.42), (3.44) e (3.49) em (3.21), resulta:

$$\{R_\phi\}^e = -(A_1 F_1 + B_1 H_1 + C_1 I_1) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - D_1 J_1 \begin{Bmatrix} (2\omega_i + \omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + 2\omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + \omega_j + 2\omega_k) \end{Bmatrix}, \quad (3.51)$$

sendo  $F_1$ ,  $H_1$ ,  $I_1$  e  $J_1$  dados, respectivamente, pelas equações (3.34), (3.43), (3.45) e (3.50).

Os valores de  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$  são apresentados na tabela 3.1.

Os resultados obtidos para as equações (3.1a) e (3.1b), são resumidos e apresentados a seguir. Da equação (3.2), tem-se:

$$\left[ [K_\phi]^e + \frac{1}{\Delta\tau} [C]^e \right] \{ \phi^e \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [C]^e \{ \phi^e \}_N - \{ R_\phi \}^e, \quad (3.52)$$

das equações (3.18), (3.10) e (3.51) vem, respectivamente, que:

$$[K_\phi]^e = \frac{\delta t}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

$$[C]^e = \frac{\lambda t A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

$$\{ R_\phi \}^e = -(A_1 F_1 + B_1 H_1 + C_1 I_1) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - D_1 J_1 \begin{Bmatrix} (2\omega_i + \omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + 2\omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + \omega_j + 2\omega_k) \end{Bmatrix}. \quad (3.55)$$

A seguir, as equações (3.52), (3.53), (3.54) e (3.55), obtidas para uma grandeza  $\phi$  qualquer, serão aplicadas para o caso de convecção natural. Assim, serão obtidas as formas

matriciais para os elementos em termos da função corrente ( $\psi$ ), temperatura adimensional ( $\theta$ ) e vorticidade ( $\omega$ ).

### 3.3 – OBTENÇÃO DAS MATRIZES E VETORES PARA OS ELEMENTOS

#### 3.3.1 – Forma Matricial para os Elementos em Termos da Função Corrente

Da tabela 3.1 para  $\phi = \psi$ , tem-se:  $Q_\phi = Q_\psi$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\delta = 1$ ,  $A_1 = 0$ ,  $B_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$  e  $D_1 = 1$ . Como o problema estudado é bidimensional, adota-se uma espessura unitária, isto é,  $t = 1$ . Substituindo esses valores nas equações (3.1a) e (3.1b), vem que:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + Q_\psi = 0, \quad (3.56)$$

sendo:

$$Q_\psi = \omega. \quad (3.57)$$

Substituindo  $\phi = \psi$  e  $\lambda = 0$  nas equações (3.52) e (3.54), vem:

$$[K_\psi]^e \{ \psi^e \} = - \{ R_\psi \}^e. \quad (3.58)$$

Fazendo  $\phi = \psi$  e  $\delta = 1$  na equação (3.53), resulta em:

$$[K_\phi]^e = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

$$\{ \psi^e \} = \begin{Bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{Bmatrix}. \quad (3.60)$$

Fazendo  $\phi = \psi$ ,  $A_1 = 0$ ,  $B_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$  e  $D_1 = 1$  na equação (3.55), resulta em:

$$\{R_\psi\}^e = -J_1 \begin{Bmatrix} (2\omega_i + \omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + 2\omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + \omega_j + 2\omega_k) \end{Bmatrix}, \quad (3.61)$$

sendo que  $J_1$  é dado pela equação (3.50), como sendo:

$$J_1 = \frac{A}{12}. \quad (3.62)$$

### 3.3.2 – Forma Matricial para os Elementos em Termos de Temperatura Adimensional

Da tabela 3.1 para  $\phi = \theta$  tem-se:  $Q_\phi = Q_\theta$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\delta = 1/\text{Pr}$ ,  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$  e  $D_1 = 0$ . Substituindo esses valores nas equações (3.1a), (3.1b), (3.52), (3.53), (3.54) e (3.55) vem que:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + Q_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (3.63)$$

sendo:

$$Q_\theta = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right). \quad (3.64)$$

Substituindo  $\phi = \psi$  e  $\lambda = 1$  nas equações (3.52) e (3.54), vem:

$$\left[ [K_\theta]^e + \frac{1}{\Delta \tau} [C]^e \right] \{ \theta^e \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta \tau} [C]^e \{ \theta^e \}_N - \{ R_\theta \}^e. \quad (3.65)$$

$$[C]^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Fazendo  $\phi = \theta$  e  $\delta = 1$  na equação (3.53), resulta em:

$$[K_\theta]^e = \frac{1}{4A\text{Pr}} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Fazendo  $\phi = \theta$ ,  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$  e  $D_1 = 0$  na equação (3.55) resulta em:

$$\{R_\theta\}^e = -F_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.68)$$

sendo que  $F_1$  é dado pela equação (3.34), como sendo:

$$F_1 = \frac{1}{12A} \left[ (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) (c_i \theta_i + c_j \theta_j + c_k \theta_k) - (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k) (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k) \right]. \quad (3.69)$$

### 3.3.3 – Forma Matricial para os Elementos em Termos da Vorticidade

Da tabela 3.1 para  $\phi = \omega$  tem-se:  $Q_\phi = Q_\omega$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = \text{Gr}/2$ ,  $C_1 = 0$  e  $D_1 = 0$ . Substituindo esses valores nas equações (3.1a), (3.1b), (3.52), (3.53), (3.54) e (3.55) vem que:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} + Q_\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (3.70)$$

sendo:

$$Q_\omega = \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} + \frac{\text{Gr}}{2} \frac{\partial \theta}{\partial X}. \quad (3.71)$$

Substituindo  $\phi = \omega$  e  $\lambda = 1$  nas equações (3.52) e (3.54), vem:

$$\left[ [K_\omega]^e + \frac{1}{\Delta\tau} [C]^e \right] \{ \omega^e \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [C]^e \{ \omega^e \}_N - \{ R_\omega \}^e. \quad (3.72)$$

$$[C]^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Fazendo  $\phi = \omega$  e  $\delta = 1$  na equação (3.53), resulta em:

$$[K_\omega]^e = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Fazendo  $\phi = \omega$ ,  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = Gr/2$ ,  $C_1 = 0$  e  $D_1 = 0$  na equação (3.55) resulta em:

$$\{ R_\omega \}^e = - \left( F_1 + \frac{Gr}{2} H_1 \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.75)$$

Sendo  $F_1$  e  $H_1$  dados, respectivamente, pelas equações (3.34) e (3.43), de (3.75) vem:

$$\begin{aligned} F_1 + \frac{Gr}{2} H_1 &= \frac{1}{12A} \left[ (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) (c_i \omega_i + c_j \omega_j + c_k \omega_k) \right. \\ &\quad \left. - (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k) (b_i \omega_i + b_j \omega_j + b_k \omega_k) \right] + \\ &\quad + \frac{Gr}{2A} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k). \end{aligned} \quad (3.76)$$

### 3.4 – ALGORITMO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

No item 3.2 foi obtida a equação geral (3.2), para os elementos, em função da grandeza  $\phi$ . Nos itens 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3 foram desenvolvidas as matrizes e vetores da equação geral

(3.2), em função dos diversos parâmetros apresentados na tabela 3.1. A grandeza  $\phi$  da equação (3.2) pode representar, como já visto no item 3.1, a função corrente  $\psi$ , a temperatura adimensional  $\theta$  ou a vorticidade  $\omega$ . No Apêndice A2 mostram-se como as matrizes globais e vetores globais podem ser formados a partir da equação geral do elemento (3.2), em função da grandeza  $\phi$ . A partir das matrizes e vetores para os elementos, em função de  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ , respectivamente, resulta nas seguintes matrizes globais:

$$[\mathbf{K}_\psi] \{ \psi \} = - \{ \mathbf{R}_\psi \}, \quad (3.77)$$

$$\left[ [\mathbf{K}_\theta] + \frac{1}{\Delta\tau} [\mathbf{C}] \right] \{ \theta \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [\mathbf{C}] \{ \theta \}_N - \{ \mathbf{R}_\theta \}, \quad (3.78)$$

$$\left[ [\mathbf{K}_\omega] + \frac{1}{\Delta\tau} [\mathbf{C}] \right] \{ \omega \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [\mathbf{C}] \{ \omega \}_N - \{ \mathbf{R}_\omega \}. \quad (3.79)$$

As equações (3.77), (3.78) e (3.79) podem ser escritas numa forma compacta, respectivamente, resultando em:

$$[\overline{\mathbf{K}}_\psi] \{ \psi \} = \{ \overline{\mathbf{R}}_\psi \}, \quad (3.80)$$

$$[\overline{\mathbf{K}}_\theta] \{ \theta \} = \{ \overline{\mathbf{R}}_\theta \}, \quad (3.81)$$

$$[\overline{\mathbf{K}}_\omega] \{ \omega \} = \{ \overline{\mathbf{R}}_\omega \}. \quad (3.82)$$

As equações (3.80), (3.81) e (3.82) formam um sistema de equações lineares acopladas. Para resolver estas equações foi desenvolvido um programa computacional, com o objetivo de obter as distribuições das funções  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\omega$ , e calcular o número de Nusselt médio em função dos parâmetros geométricos e térmicos.

As matrizes globais  $[\overline{\mathbf{K}}_\psi]$ ,  $[\overline{\mathbf{K}}_\theta]$  e  $[\overline{\mathbf{K}}_\omega]$  têm seus coeficientes mantidos constantes, pois o incremento de tempo  $\Delta\tau$  será um parâmetro que assume um valor fixo para cada iteração. Essas matrizes são simétricas e de banda.

Os coeficientes de cada matriz que compõem a diagonal principal e as diagonais superiores não nulas, são armazenados na forma de uma matriz coluna. Assim, é possível reduzir a área de armazenamento e o tempo de cálculo computacional.

Os vetores globais  $\{\overline{R}_\psi\}$ ,  $\{\overline{R}_\theta\}$  e  $\{\overline{R}_\omega\}$  possuem coeficientes que são dependentes da vorticidade,  $\omega$ , função corrente,  $\psi$ , e da temperatura adimensional,  $\theta$ , e devem ser avaliados a cada tempo,  $\tau$ .

O sistema global, dado pelas equações (3.80), (3.81) e (3.82), deve ser resolvido e assim os vetores incógnitas globais  $\{\psi\}$ ,  $\{\theta\}$  e  $\{\omega\}$  são obtidos a cada tempo,  $\tau$ .

Na figura 3.1, página 44, apresenta-se o fluxograma do programa computacional. A seguir serão descritos os passos para realização dos cálculos e alguns detalhes de cada bloco do fluxograma.

#### 1-) Leitura de dados ( bloco 1 )

Os dados lidos inicialmente no programa computacional são:

- a-) número de pontos nodais;
- b-) número de elementos da malha;
- c-) coordenadas dos pontos nodais;
- d-) número de Prandtl;
- e-) número de Grashof;
- f-) razão de difusividades (nos casos 3 e 4);
- g-) incremento de tempo;
- h-) número máximo de iterações;
- i-) dados relativos às condições de contorno.

#### 2-) Geração de malha ( bloco 2 )

O programa computacional possui uma subrotina para geração de malha com elementos triangulares. Esta subrotina calcula as coordenadas dos pontos nodais, a topologia dos

elementos, o número dos elementos e a numeração dos elementos. A geração de malha não uniforme foi realizada com o auxílio do software Easymesh.

### 3-) Leitura das condições iniciais ( bloco 3 )

Inicialmente, a função corrente,  $\psi$ , a temperatura adimensional,  $\theta$ , e a vorticidade,  $\omega$ , assumem o valor zero em todo o domínio, conforme descrito na equação (2.36).

### 4-) Leitura das condições de contorno ( bloco 4 )

Os dados lidos para as condições de contorno são:

- a-) leituras de dados relativos às condições de temperaturas especificadas no contorno;
- b-) leituras de dados relativos às condições de contorno de fluxo de calor.
- c-) leitura de dados relativos às condições da função corrente especificada;
- d-) leitura de dados relativos às condições da vorticidade especificada;

### 5-) Formação das matrizes dos elementos $[K_\phi]^e$ ( bloco 5 )

As matrizes dos elementos são formadas pela equação (3.53), sendo que o parâmetro  $\delta$  é apresentado na tabela 3.1.

### 6-) Formação das matrizes globais $[\bar{K}_\phi]$ ( bloco 6 )

A matriz global  $[\bar{K}_\phi]$  pode assumir ser  $[\bar{K}_\psi]$ ,  $[\bar{K}_\theta]$  e  $[\bar{K}_\omega]$ , e são formadas pelo lado esquerdo das equações (3.77), (3.78) e (3.79). As equações (3.80), (3.81) e (3.82), são as formas compactas das equações (3.77), (3.78) e (3.79).



7-) Cálculo da distribuição da função corrente ( bloco 7 )

Resolvendo-se o sistema de equações lineares dado pela equação (3.80), obtém-se a distribuição da função corrente  $\psi$ .

8-) Cálculo da distribuição da vorticidade no interior ( bloco 8 )

Resolvendo-se o sistema de equações lineares dada pela equação (3.82), obtém-se a distribuição da vorticidade no interior. Na solução da equação (3.82), consideram-se conhecidas as vorticidades nos pontos nodais do contorno.

9-) Cálculo da vorticidade no contorno ( bloco 9 )

Da equação matricial (A3.9), do Apêndice 3, obtém-se a vorticidade do fluido nos pontos nodais do contorno.

10-) Cálculo da distribuição da temperatura adimensional ( bloco 10 ).

Resolvendo-se o sistema de equações lineares dada pela equação (3.81), obtém-se a distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , no domínio  $\Omega$ .

11-) Cálculo dos números de Nusselt local e médio ( bloco 11 ).

Aplicando as equações (2.44) e (2.45), respectivamente, é possível determinar os números de Nusselt local e médio para as superfícies  $S_i$  (  $i = 1$  ou  $2$  ).

12-) Verificação do limite máximo de iteração ( bloco 12 )

O programa computacional verifica se o número de iterações atingiu o número máximo de iterações, valor este fornecido na leitura de dados ( bloco 1 ). Quando a igualdade é atingida o processo de cálculo é interrompido.

## 13-) Verificação de convergência ( bloco 13 )

Conclui-se que houve convergência ou que se atingiu o regime permanente, quando o seguinte critério é estabelecido:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \left| \text{Nu}^{\tau} - \text{Nu}^{\tau - \Delta\tau} \right| \right] \leq 10^{-4} , \quad (3.83)$$

onde a somatória representa a soma dos n últimos valores de iteração. A somatória calcula, portanto, a diferença dos números de Nusselt médio para o tempo  $(\tau - \Delta\tau)$  e  $(\tau)$ , nas últimas n iterações. Na maioria dos casos estudados, adotou-se  $100 \leq n \leq 200$ .

## 14-) Incremento de tempo ( bloco 14 )

Se o critério dado na equação (3.83) for obedecido, o processo de cálculo é interrompido. Caso contrário, o tempo é incrementado e o processo de cálculo é iniciado a partir de A ( ver figura 3.1 – fluxograma geral do programa computacional ).

## 15-) Imprimir resultados ( bloco 15 )

Os resultados para as distribuições de  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ , bem como os números de Nusselt médio, são impressos para cada passo, ou seja, para cada vez que o tempo  $\tau$  for incrementado.

No capítulo seguinte serão apresentados os testes de comparações do programa computacional para a convecção natural numa cavidade retangular fechada. Os resultados calculados serão comparados com os encontrados na literatura. Após a avaliação do programa computacional, serão apresentados os resultados para os quatro casos estudados neste trabalho.

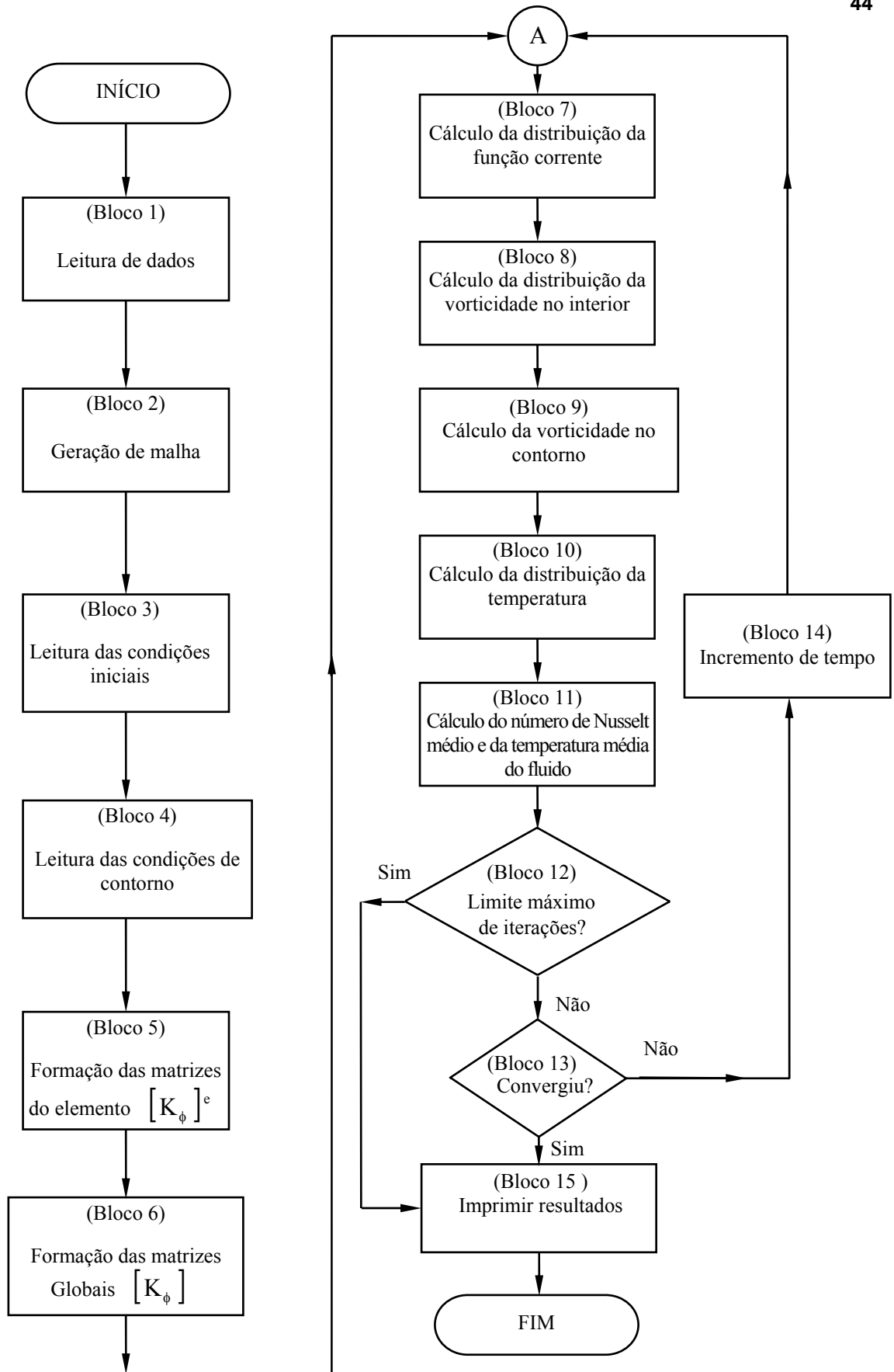


Figura 3.1 – Fluxograma do programa computacional.

## Capítulo 4

# RESULTADOS

### 4.1 – INTRODUÇÃO

Nesse capítulo, apresentam-se os resultados referentes aos quatro casos descritos anteriormente, obtidos pelo programa computacional desenvolvido neste trabalho, onde se utilizou o método de elementos finitos para a solução das equações de conservação.

Serão apresentadas as distribuições da temperatura adimensional,  $\theta$ , da função corrente,  $\psi$ , e os valores do número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , em função dos parâmetros térmicos ( $Gr$ ,  $Pr$  e  $D$ ) para os quatro casos estudados.

Primeiramente, no item 4.2, foram realizados testes numéricos para o caso clássico da convecção natural numa cavidade quadrada. Estes testes têm a finalidade de validar os métodos utilizados bem como o programa computacional desenvolvido. Foram realizadas diversas comparações dos presentes resultados, com aqueles publicados na literatura. Após verificar que os modelos numéricos desenvolvidos apresentam bons resultados para a convecção natural numa cavidade, passa-se a estudar os quatro casos deste trabalho.

Antes do início do estudo dos quatro casos deste trabalho, cujos resultados estão apresentados no item 4.3, é necessário fazer um estudo de malhas, a fim de encontrar uma malha de elementos finitos que seja apropriada. Isto significa que a malha adotada deve produzir resultados que apresentem precisão, convergência e tempo de processamento adequado. Após este estudo da malha, segue-se o estudo dos quatro casos do trabalho.

## 4.2 – VALIDAÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS

As figuras 4.1 e 4.2 mostram uma cavidade quadrada e as condições de contorno utilizadas, respectivamente, na forma dimensional e adimensional. Esta geometria e condições de contorno serão utilizadas nos testes do programa computacional. A superfície fria vertical do lado esquerdo é mantida a uma temperatura constante  $T_c$ . A superfície quente vertical do lado direito é mantida a uma temperatura constante  $T_h$ . As superfícies horizontais são isoladas termicamente.

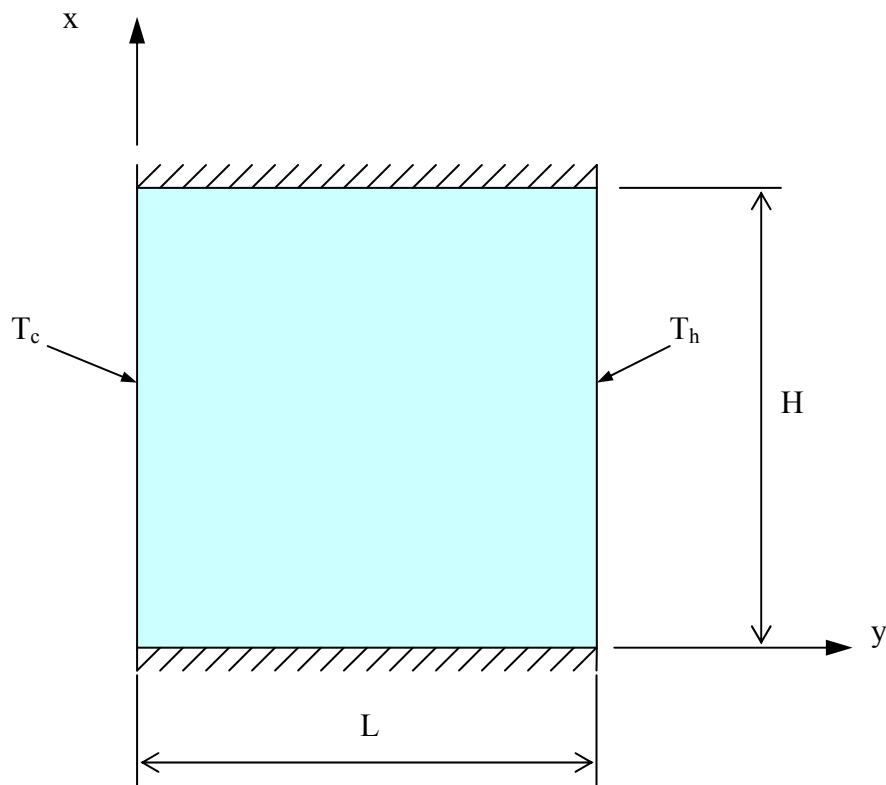


Figura 4.1 – Geometria e condições de contorno dimensional.

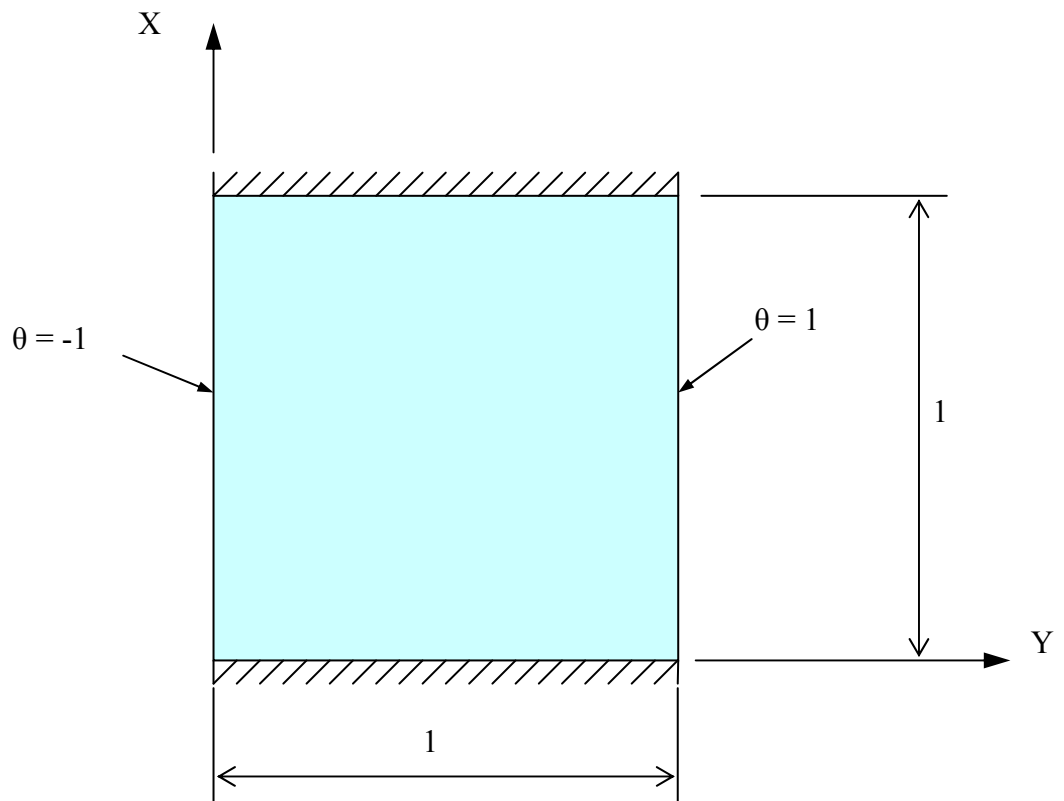
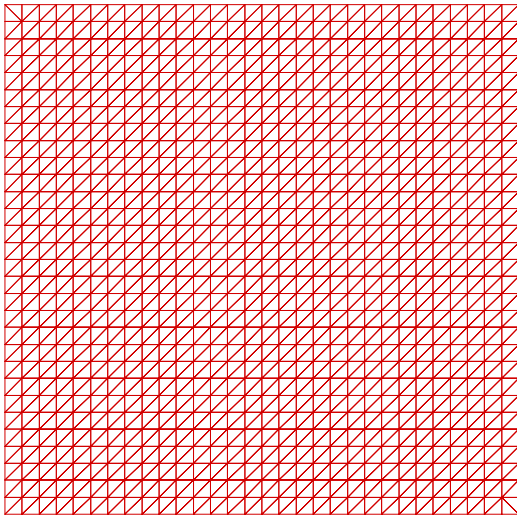


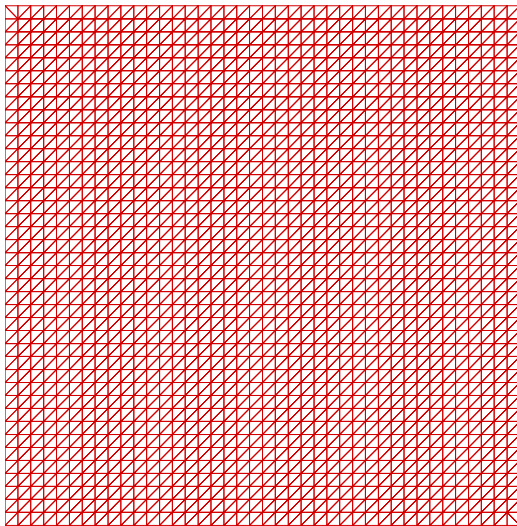
Figura 4.2 – Geometria e condições de contorno adimensional.

A malha utilizada para cavidade quadrada será estruturada e uniforme, a qual é adequada para esta geometria. Entretanto, nos outros quatro casos do trabalho, serão utilizadas malhas não estruturadas e não uniformes, pelo fato das geometrias serem irregulares.

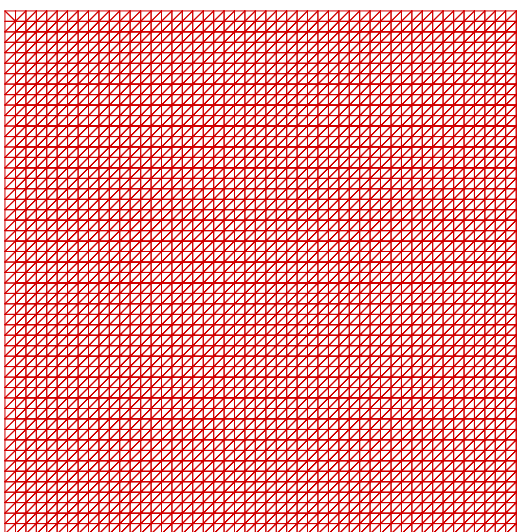
A figura 4.3 mostra três malhas testadas para a cavidade quadrada. As malhas apresentam  $M$  pontos na direção  $X$ , e  $N$  pontos na direção  $Y$ . Na figura 4.3 tem-se: (a) malha  $31 \times 31$  pontos nodais e 1800 elementos; (b) malha  $41 \times 41$  pontos nodais e 3362 elementos; (c) malha  $51 \times 51$  pontos nodais e 5000 elementos.



(a) Malha 31x31  
1800 Elementos  
961 Nós



(b) Malha 41x41  
3362 Elementos  
1681 Nós



(c) Malha 51x51  
5000 Elementos  
2601 Nós

Figura 4.3 - Malhas testadas para cavidade quadrada.

A figura 4.4 mostra o número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus o número de elementos, NE. A finalidade dessa figura é verificar qual é o número de elementos que é necessário para se atingir a convergência nos resultados do número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ . Para se ter confiabilidade nos resultados, é necessário verificar também a influência dos diversos parâmetros envolvidos no problema. Nessa figura são tomados os casos mais críticos da análise. Considera-se uma cavidade quadrada, portanto a razão de aspecto é  $A=1$ , o fluido no interior da cavidade é o ar com número de Prandtl  $Pr=0,733$ , e escolheu-se um número de Grashof baixo ( $Gr=20000$ ) e um número de Grashof alto ( $Gr=341064$ ).

Na figura 4.4 verifica-se que o número de Nusselt tende a convergir, quando se aumenta o número de elementos NE. Para número de Grashof baixo ( $Gr=20000$ ) verifica-se que a variação do número de Nusselt médio da superfície fria  $Nu_c$  é muito pequena. Para este número de Grashof baixo, com relativamente poucos elementos, já se obtém convergência nos resultados do número de Nusselt médio, não necessitando de uma malha muito refinada. Já para número de Grashof alto ( $Gr=341064$ ), é necessário usar uma malha mais refinada para se obter a convergência do número de Nusselt.

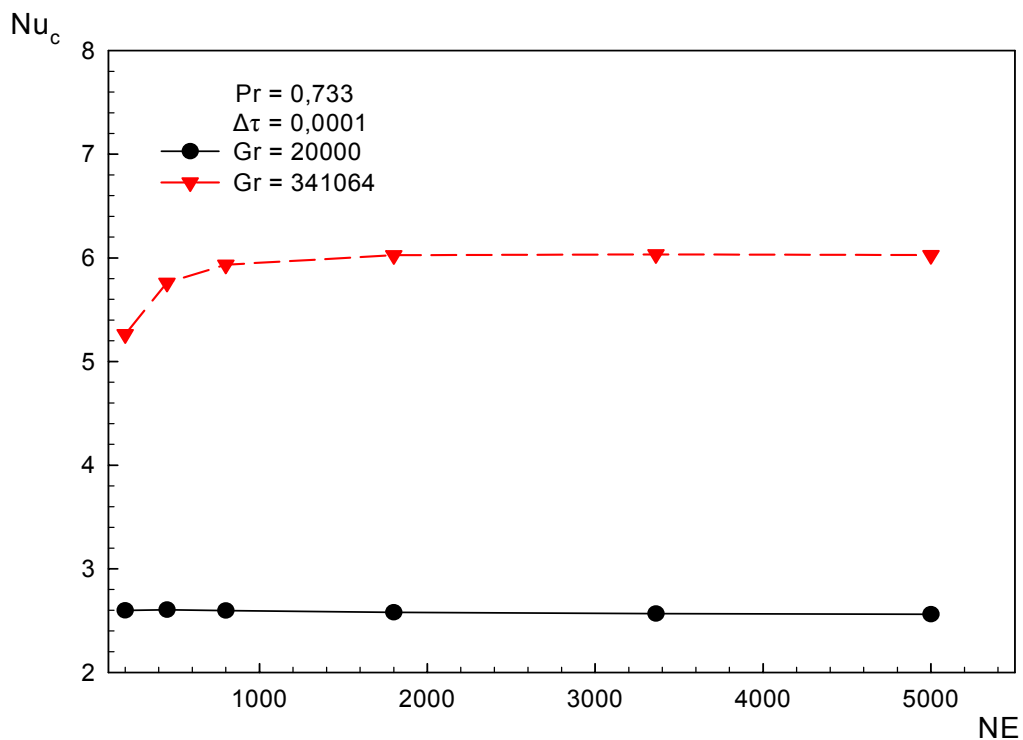


Figura 4.4 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus número de elementos, NE.



O aumento do número de elementos produz resultados mais precisos, entretanto, como se pode ver na figura 4.5, o aumento do número de elementos implica num aumento do tempo de processamento. Assim, nesse ponto há necessidade de escolher entre a precisão requerida e o custo computacional adequado. Neste estudo de malha para cavidade quadrada escolheu-se a malha com 51x51 pontos nodais e 5000 elementos para todos os cálculos mostrados.

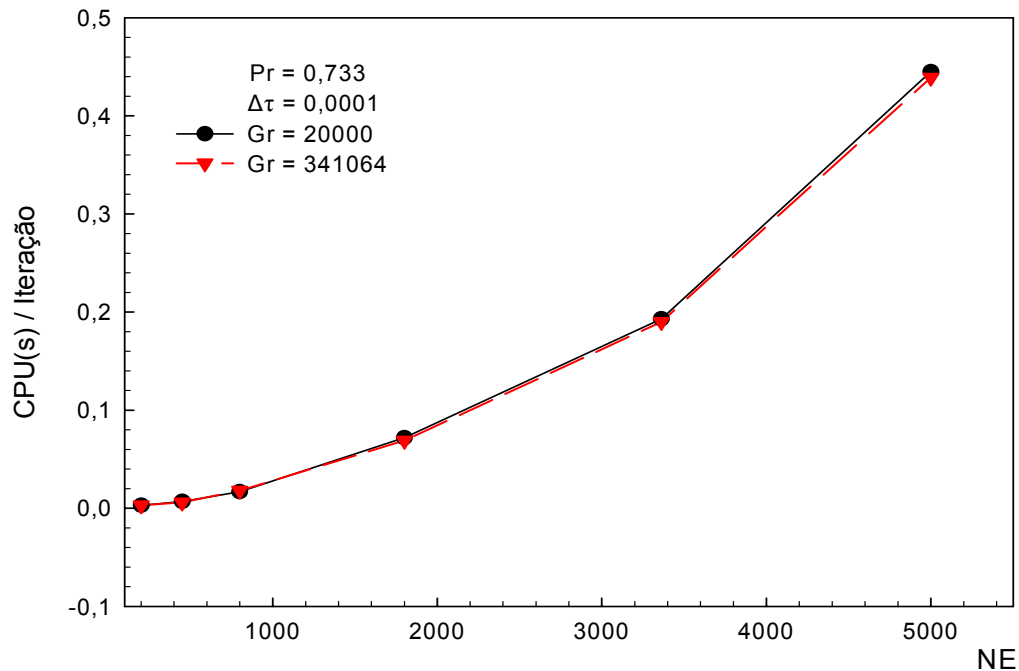


Figura 4.5 – Tempo de processamento, em segundos, por iteração versus número de elementos, NE.

A figura 4.6 mostra uma comparação das distribuições da temperatura adimensional,  $\theta$  (THETA), da função corrente,  $\psi$  (PSI) e da vorticidade,  $\omega$  (W), para baixo número de Grashof (20000), à esquerda, e alto número de Grashof (341064), à direita.

As figuras 4.6 para a função corrente,  $\psi$ , mostram que para ambos os números de Grashof existe uma única célula convectiva rotativa no sentido anti-horário no interior da cavidade.

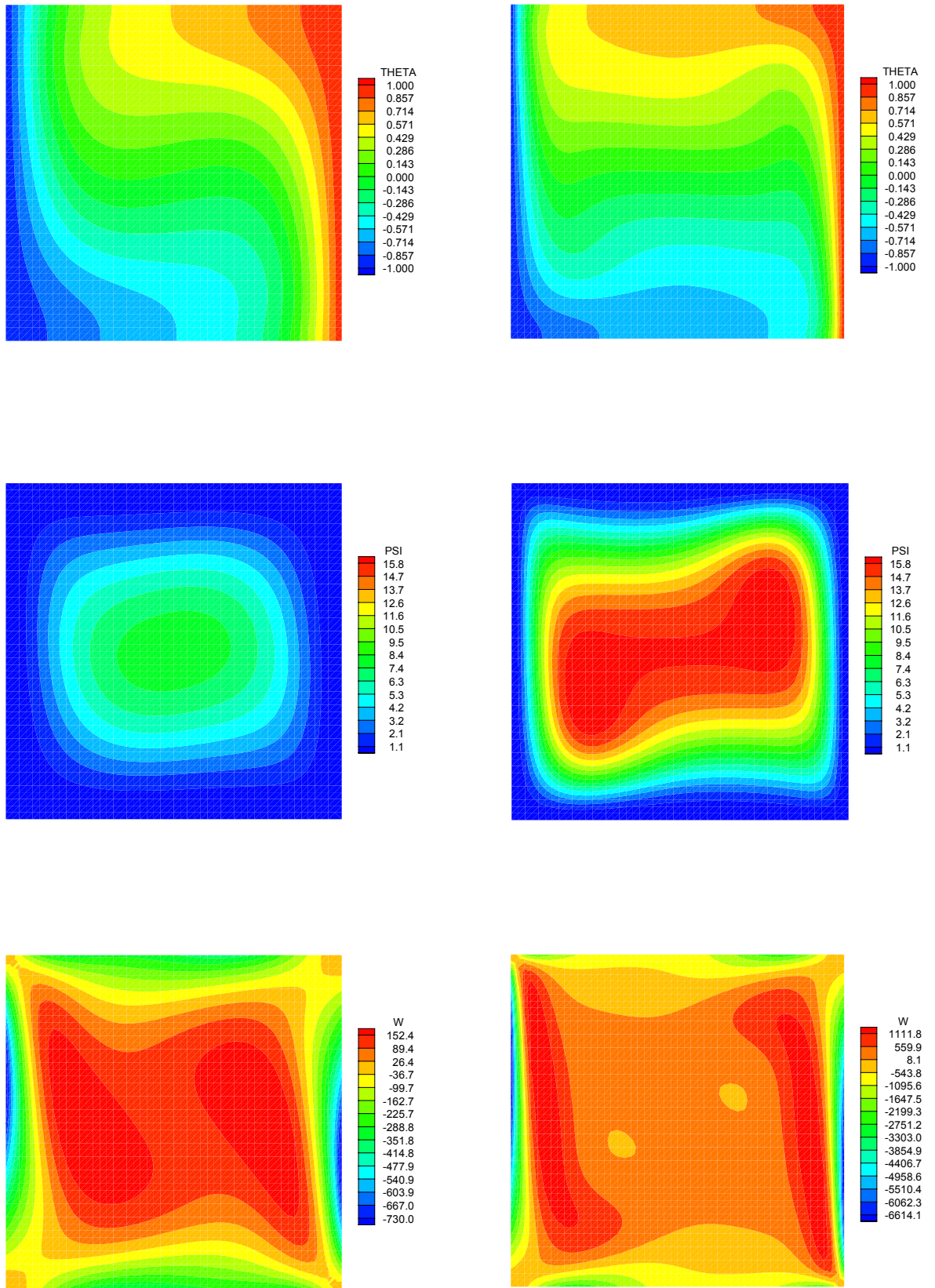


Figura 4.6 – Distribuição de temperatura,  $\theta$  (THETA), função corrente,  $\psi$  (PSI) e vorticidade,  $\omega$  (W) para  $Gr = 20000$ , à esquerda, e  $Gr = 341064$ , à direita.

Como se sabe, a diferença entre os valores da função corrente entre duas linhas, representa a vazão volumétrica de fluido que circula entre estas linhas. Desse modo, verifica-se que para a função corrente, figura à direita, com números de Grashof mais altos, os valores de  $\psi$  são maiores, indicando maiores vazões de circulação e maiores velocidades do fluido.

As figuras 4.6 correspondentes a  $\theta$ , mostram as distribuições de temperaturas adimensionais no interior da cavidade. Para o caso de número de Grashof alto, à direita, as linhas isotérmicas na região central são quase horizontais, enquanto que para baixo número de Grashof, à esquerda, são bastante inclinadas. Isto ocorre porque, para altos números de Grashof, existem maiores velocidades do fluido, o que ocasiona maiores deformações do campo de temperaturas. Para alto número de Grashof existe estratificação das linhas isotérmicas na região central da cavidade.

As figuras 4.6 correspondentes a  $\omega$ , mostram os campos de vorticidade no interior da cavidade. Como se sabe, a vorticidade está associada com a velocidade de rotação do fluido em torno de um ponto. Na convenção aqui utilizada, a vorticidade é negativa quando o fluido gira em torno de um ponto no sentido horário, inversamente, se a vorticidade é positiva, o fluido gira em torno de um ponto no sentido anti-horário.

Como se pode observar na figura 4.6, para alto número de Grashof, à direita, a faixa de variação da vorticidade é bem maior que no caso de baixo número de Grashof. Isto indica que para alto número de Grashof o fluido apresenta altas velocidades de rotação em torno de um ponto.

A comparação de resultados do presente trabalho com outros publicados na literatura são apresentadas nas tabelas 4.1 e 4.2, as quais mostram os resultados do número de Nusselt médio da superfície fria,  $Nu_c$ , aqui obtidos, com outros publicados na literatura.

A tabela 4.1 mostra a comparação dos resultados do número de Nusselt médio da superfície fria,  $Nu_c$  (para cavidade com razão de aspecto  $A=1$ , número de Grashof  $Gr = 20.000$  e número de Prandtl  $Pr = 0,733$ ), com aqueles publicados por alguns autores. O presente trabalho foi comparado com três resultados da literatura. Para o resultado obtido por Menon (1984), que utilizou o método de elementos finitos com uma malha de 100 elementos, o desvio foi de 5,39%.

Tabela 4.1 – Comparação de resultados para a geometria quadrada da figura 4.1, para  $Gr=2 \times 10^4$ ;  $Pr = 0,733$ .

Referência	$Nu_c$	Desvio [%]	Método Utilizado
Presente Trabalho	2,562	—	Elementos Finitos (5000 elementos)
Menon (1984)	2,700	- 5,39	Elementos Finitos (100 elementos)
Ozoe <i>et al.</i> (1974)	2,740	- 6,95	Valor Experimental
Tabarrok e Lin (1977)	2,695	- 5,19	Elementos Finitos (200 elementos)

Para o valor obtido, experimentalmente, por Ozoe *et al.* (1974), o desvio foi de 6,95%. Já para Tabarrok e Lin (1977), os quais usaram o método de elementos finitos com uma malha de 200 elementos, o desvio chegou a 5,19%. O desvio médio nos três trabalhos foi de 5,84%.

A tabela 4.2 faz uma comparação com os resultados do presente trabalho com os de Figueredo *et al.* (1986), Wong e Raithby (1979), Souza (2006) e Brito (1999). Os valores do número de Grashof,  $Gr$ , usados foram: 34110; 60000; 100000; 136430 e 341064. O número de Prandtl  $Pr$  foi fixado como  $Pr = 0,733$ . Figueredo *et al.* (1986), Wong e Raithby (1979) e Souza (2006), utilizaram o método de diferenças finitas para solução das equações de conservação, enquanto que, Brito (1999) utilizou o método de elementos finitos.

Figueredo *et al.* (1986) usaram uma malha 21 x 21 pontos nodais e Wong e Raithby (1979) usaram duas malhas: uma de 22 x 22 e outra de 42 x 42 pontos nodais. Wong e Raithby (1979), para a malha de 22 x 22, usaram os seguintes valores de número de Grashof: 136430 e 341070. Para o valor de número de Grashof  $Gr = 34110$ , Wong e Raithby (1979) usaram uma malha de 42 x 42 pontos nodais.

Souza (2006) utilizou uma malha de 51 x 51 pontos nodais enquanto que Brito (1999) utilizou uma malha de 41 x 41. Tanto Souza (2006) quanto Brito (1999) utilizaram os seguintes valores de Grashof: 34110; 60000; 100000; 136430 e 341070.

O menor desvio do número de Nusselt médio,  $Nu_c$ , foi de 0,10% para  $Gr = 341064$ , em relação ao valor obtido por Brito (1999). Para o maior desvio, o valor foi de 4,38%, para  $Gr = 34110$ , em relação ao valor obtido por Figueredo *et al.* (1986).

Tabela 4.2 - Comparação do número de Nusselt com valores obtidos em diversos trabalhos.

Gr	Presente Trabalho	Figueredo <i>et al.</i> (1986)		Wong e Raithby (1979)		Souza (2006)		Brito (1999)	
		Nu <sub>c</sub>	Desvio [%]	Nu <sub>c</sub>	Desvio [%]	Nu <sub>c</sub>	Desvio [%]	Nu <sub>c</sub>	Desvio [%]
34.110	3,016	2,884	4,38	2,972	1,46	2,912	3,45	3,023	-0,23
60.000	3,579	3,468	3,10	-	-	3,456	3,44	3,588	-0,25
100.000	4,180	4,160	0,48	-	-	4,038	3,40	4,190	-0,24
136.430	4,592	4,686	-2,05	4,510	1,79	4,440	3,31	4,602	-0,22
341.064	6,027	-	-	5,920	1,78	5,945	1,36	6,033	-0,10
		Média	2,50	Média	1,67	Média	2,99	Média	0,21

Legenda:

Presente trabalho: Método de elementos finitos com malha 51x 51 pontos;  
 Figueredo *et al.* (1986): Método de diferenças finitas com malha 21x 21 pontos;  
 Wong e Raithby (1979): Método de diferenças finitas com malha 42 x 42 pontos  
 para Grashof 34110 e 22 x 22 para Grashof 136430 e 341064;  
 Souza (2006): Método de diferenças finitas com malha 51x 51 pontos;  
 Brito (1999): Método de elementos finitos com malha 41x 41 pontos.

$$\text{Desvio}\% = \frac{\text{Nu}_c - \text{Nu}_x}{\text{Nu}_c}$$

Nu<sub>c</sub> = Número de Nusselt médio na superfície fria do presente trabalho;

Nu<sub>x</sub> = Número de Nusselt médio na superfície fria dos outros trabalhos.

Verificando os desvios das tabelas 4.1 e 4.2, observa-se que na tabela 4.1 os desvios são maiores do que na tabela 4.2. Mesmo assim, no geral, os resultados são considerados bons. Portanto, os testes realizados para convecção natural em uma cavidade quadrada são satisfatórios e validam o programa computacional para este tipo de geometria.

A figura 4.7 mostra uma comparação das distribuições da temperatura adimensional,  $\theta$  (THETA), da função corrente,  $\psi$  (PSI), e da vorticidade,  $\omega$  (W), entre o presente trabalho e o trabalho de Souza (2006).

Como pode ser observado na figura 4.7, os resultados para as distribuições de  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ , obtidas nesse trabalho e no trabalho de Souza (2006), apresentam os mesmos padrões de comportamento das grandezas. Assim, os resultados apresentam boas concordâncias, apesar de terem sido usados diferentes métodos computacionais.

No item seguinte serão apresentados os resultados obtidos, pelo programa computacional desenvolvido neste trabalho, para os quatro casos desse trabalho.

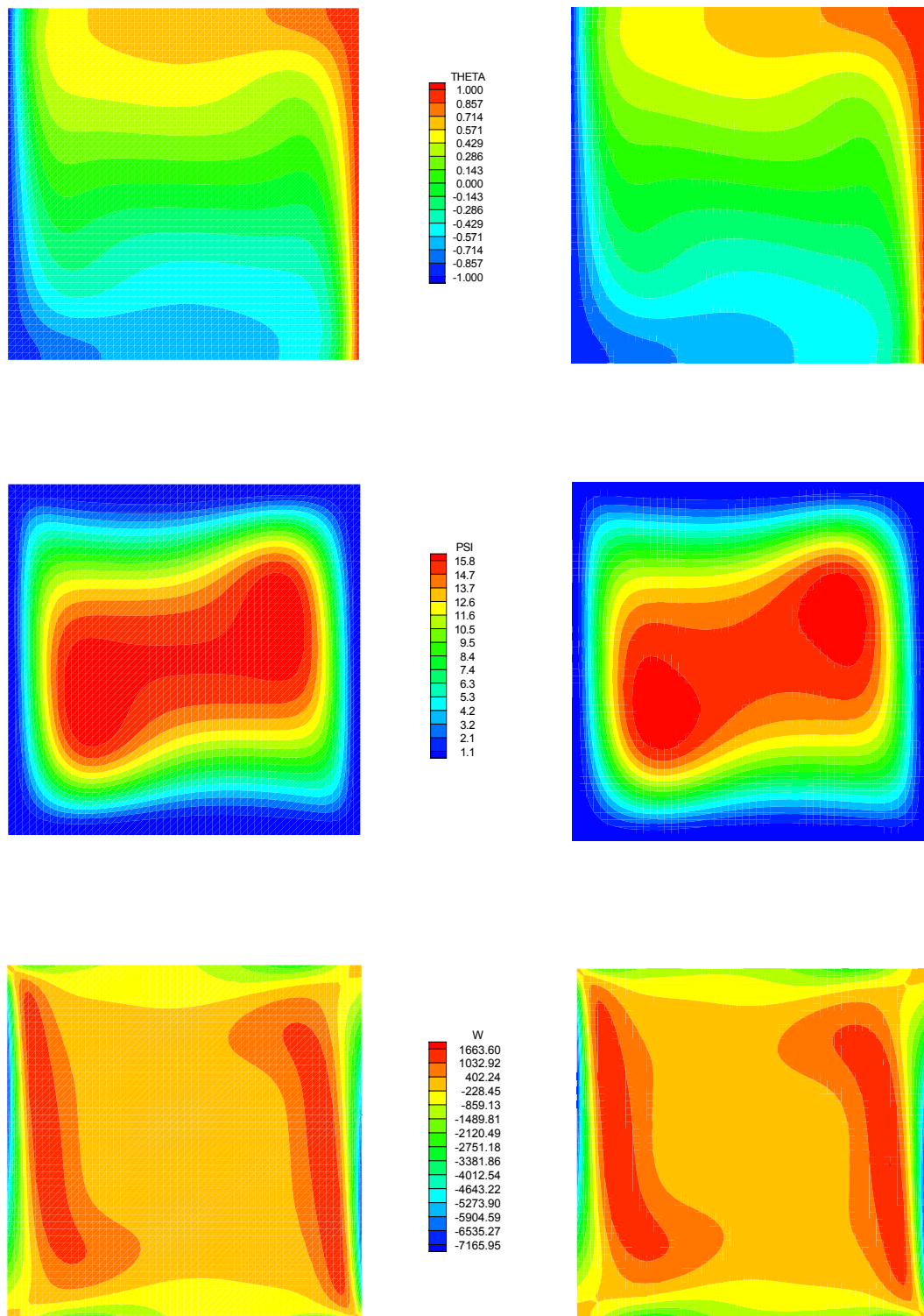


Figura 4.7 - Comparação dos resultados do presente trabalho, à esquerda, com os resultados de Souza (2006), à direita;  $Pr = 0,733$ ;  $Gr = 341064$ .

### 4.3 – RESULTADOS DO PRESENTE TRABALHO

Os resultados numéricos de transferência de calor por convecção natural para os quatro casos são mostrados nos itens seguintes. O programa computacional desenvolvido neste trabalho, mostrou-se satisfatório para convecção em cavidade quadrada, assim este será utilizado para se obter os resultados para os quatro casos de interesse neste trabalho. A figura 4.8 mostra as cavidades para os quatro casos estudados.

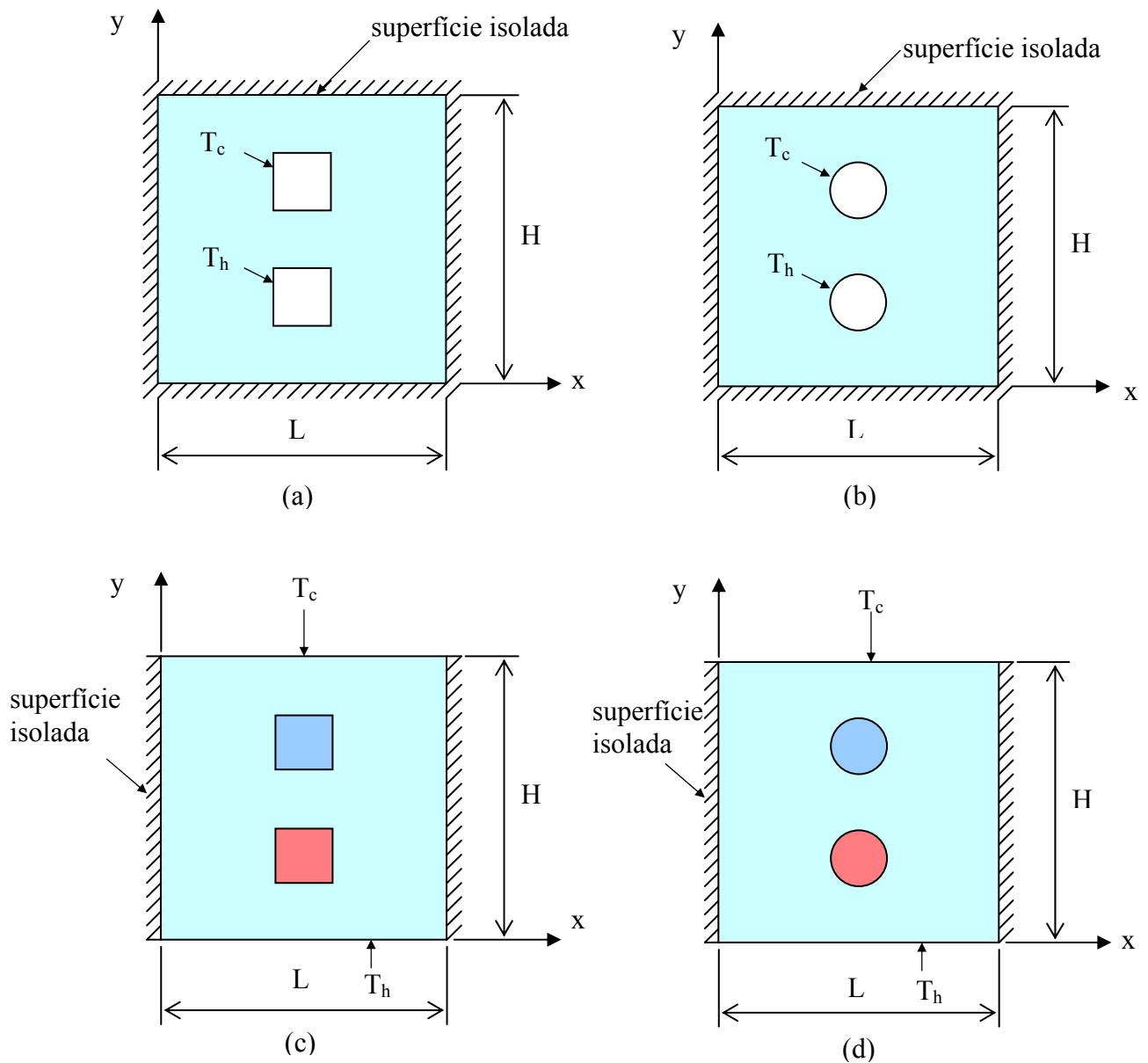


Figura 4.8 – Cavidades para casos 1 (a); 2 (b); 3 (c) e 4 (d).



Conforme descrito no Capítulo 1, os casos 1 e 2 caracterizam-se por apresentarem cavidade quadrada, com dois corpos em seu interior, sendo um corpo superior e outro inferior. Ambos os casos possuem as paredes externas isoladas termicamente, portanto, não havendo fluxo de calor através das mesmas e, o corpo inferior mantém a sua superfície isotérmica quente,  $T_h$ , enquanto que o corpo superior mantém a sua superfície isotérmica fria,  $T_c$ . A condição inicial é que o fluido está na temperatura  $T_0$ .

A diferença entre os casos 1 e 2 consiste basicamente na geometria de seus corpos internos, ou seja, no caso 1 temos corpos internos quadrados enquanto que, no caso 2, os corpos são circulares.

Para os casos 3 e 4, as cavidades também são quadradas, as paredes esquerdas e direitas são isoladas termicamente enquanto que, a superfície horizontal inferior da cavidade será mantida numa temperatura alta,  $T_h$ , e a superfície horizontal superior será mantida em uma temperatura baixa,  $T_c$ . Ambos os casos possuem corpos em seu interior, um superior e outro inferior, que apresentam condutividade térmica  $K_s$  e transferem calor por condução. A condição inicial é que o fluido e os corpos estão na temperatura  $T_0$ .

Assim como acontece para os casos 1 e 2, a diferença entre os casos 3 e 4 também está relacionada à geometria dos corpos internos. No caso 3 tem-se corpos internos quadrados enquanto que, no caso 4, os corpos são circulares.

Para todos os casos se pretende estudar a convecção natural do fluido (ar) no interior da cavidade. Existe interesse em se determinar as distribuições de temperatura, velocidades e da função corrente, bem como calcular a taxa de calor transferida. O valor utilizado para o número de Prandtl para todos os casos foi 0,733.

A figura 4.9 representa a geometria adimensional da cavidade quadrada com corpos internos quadrados, utilizada para o estudo dos casos 1 e 3 e, a figura 4.10 representa a geometria adimensional da cavidade quadrada com corpos internos circulares, utilizada para o estudo dos casos 2 e 4.

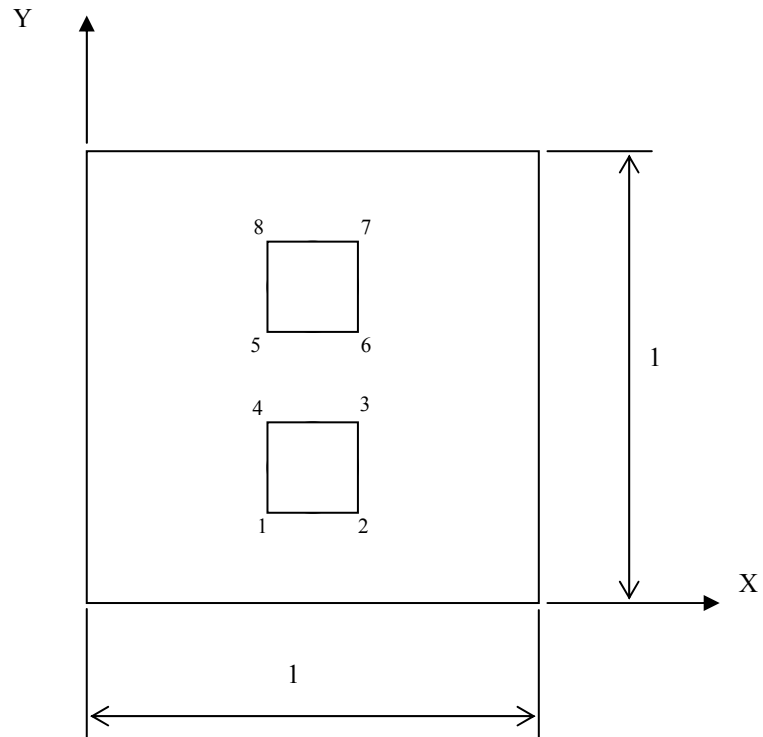


Figura 4.9 – Geometria adimensional da cavidade quadrada com corpos internos quadrados, utilizada para o estudo dos casos 1 e 3.

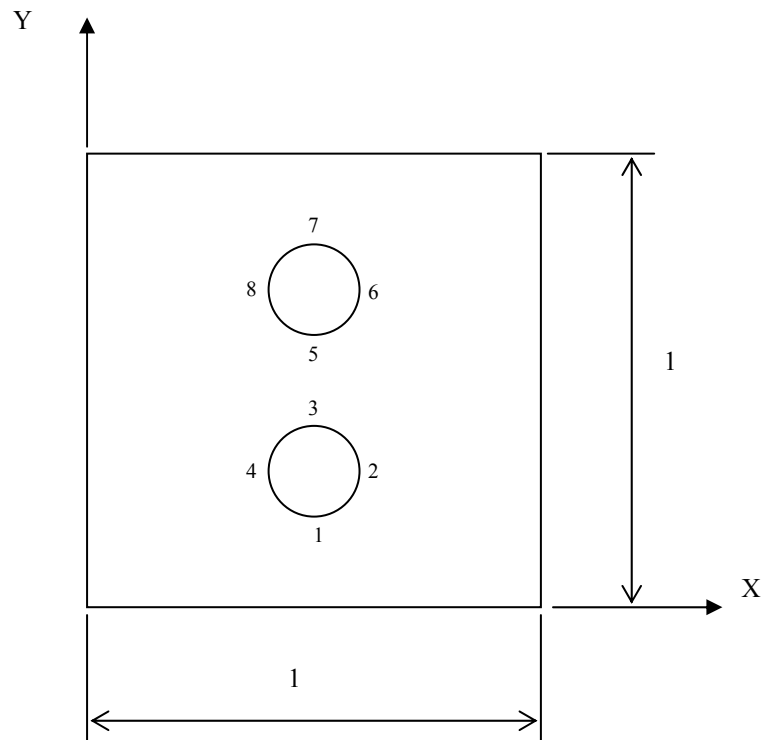


Figura 4.10 – Geometria adimensional da cavidade quadrada com corpos internos circulares, utilizada para o estudo dos casos 2 e 4.

As tabelas 4.3 e 4.4 apresentam os valores das coordenadas dos pontos que definem os elementos geométricos para as figuras 4.9 e 4.10, respectivamente.

Tabela 4.3 – Coordenadas dos pontos apresentados na figura 4.9.

Ponto	Posição no eixo X	Posição no eixo Y
1	0,4	0,2
2	0,6	0,2
3	0,6	0,4
4	0,4	0,4
5	0,4	0,6
6	0,6	0,6
7	0,6	0,8
8	0,4	0,8

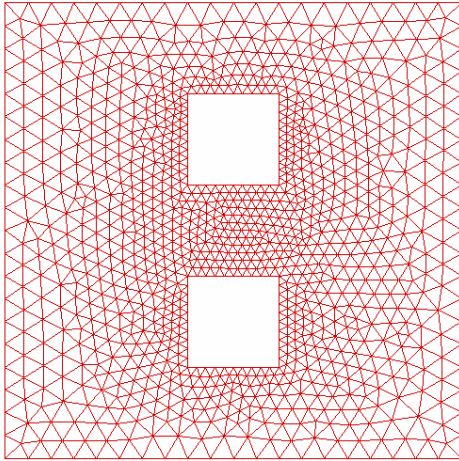
Tabela 4.4 – Coordenadas dos pontos apresentados na figura 4.10.

Ponto	Posição no eixo X	Posição no eixo Y
1	0,5	0,2
2	0,6	0,3
3	0,5	0,4
4	0,4	0,3
5	0,5	0,6
6	0,6	0,7
7	0,5	0,8
8	0,4	0,7

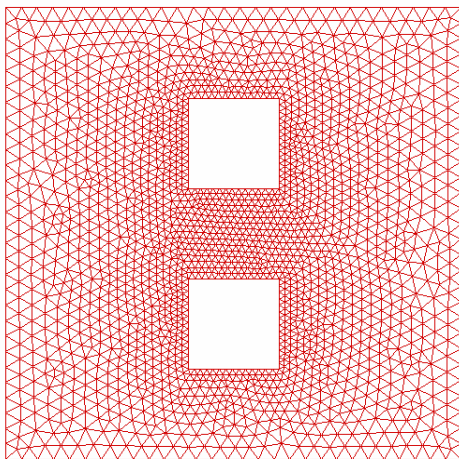
A seguir são apresentados os resultados do presente trabalho. Primeiramente, no item 4.3.1, são apresentados os resultados dos estudos realizados para os casos 1 e 2 e, na seqüência, no item 4.3.2, os resultados para os casos 3 e 4.

#### **4.3.1 – RESULTADOS PARA OS CASOS 1 E 2.**

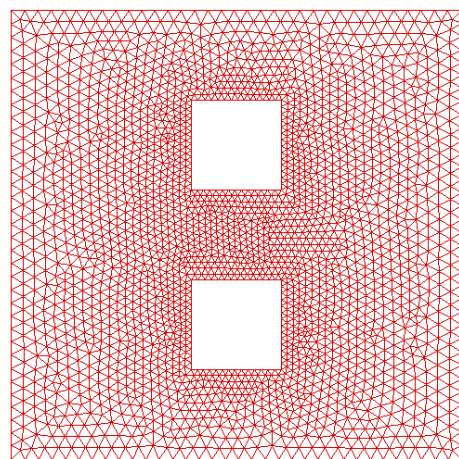
Foram desenvolvidas três malhas distintas para cada caso estudado, variando o grau de refinamento das mesmas. A malha menos refinada foi denominada malha A, a malha intermediária foi denominada malha B e, a mais refinada, malha C. As figuras 4.11 e 4.12 mostram as malhas utilizadas para o estudo dos casos 1 e 2, respectivamente.



Malha A  
2040 Elementos  
1100 Nós

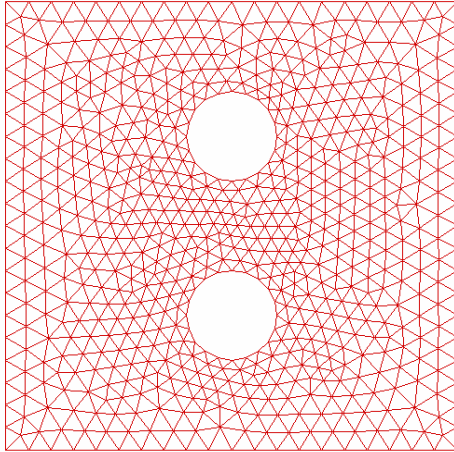


Malha B  
3936 Elementos  
2081 Nós

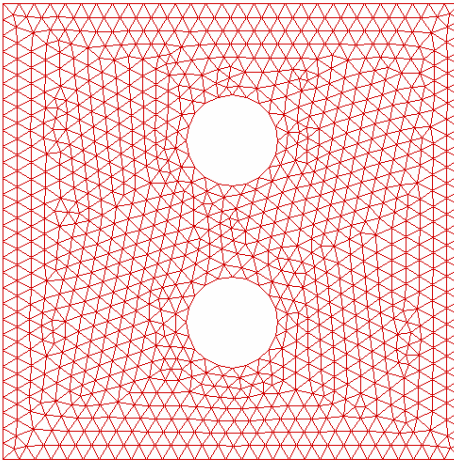


Malha C  
4662 Elementos  
2454 Nós

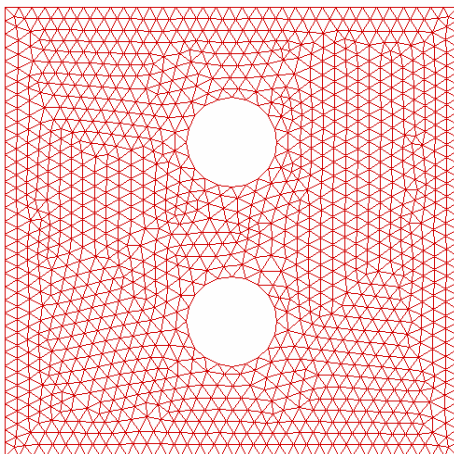
Figura 4.11 - Malhas utilizadas para o estudo do caso 1.



Malha A  
1304 Elementos  
711 Nós



Malha B  
2022 Elementos  
1088 Nós



Malha C  
2470 Elementos  
1322 Nós

Figura 4.12 - Malhas utilizadas para o estudo do caso 2.

As figuras 4.13 (caso 1) e 4.14 (caso 2), página 67, apresentam o número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus o número de elementos das malhas A, B e C estudadas, para os casos 1 e 2, respectivamente. O número de Grashof utilizado para as três malhas analisadas teve valores  $2 \times 10^4$ ;  $5 \times 10^4$ ;  $7,5 \times 10^4$  e  $10^5$ . Nas figuras 4.13 e 4.14 os resultados são apresentados para o regime permanente, sendo que nessa situação o número de Nusselt médio nas superfícies fria e quente são iguais. Observa-se que o número de Nusselt tende a convergir com o aumento do número de elementos. Os resultados obtidos para as malhas B ou C produzem resultados muito próximos.

Para o caso 1, considerando números de Grashof  $2 \times 10^4$ ;  $5 \times 10^4$ ;  $7,5 \times 10^4$  e  $10^5$ , os desvios percentuais considerando as malhas B e C são, respectivamente, 0,036%; 0,033%; 0,062% e 0,088%. Assim, o máximo desvio é 0,088%, o qual é considerado satisfatório.

Para o caso 2, considerando os mesmos números de Grashof, isto é,  $2 \times 10^4$ ;  $5 \times 10^4$ ;  $7,5 \times 10^4$  e  $10^5$ , os desvios percentuais considerando as malhas B e C são, respectivamente, 0,459%; 0,391%; 0,393% e 0,370%. Assim, o máximo desvio é 0,459%, o qual também é considerado satisfatório.

Assim a malha C foi escolhida e será utilizada nos casos 1 e 2, porque os resultados do número de Nusselt médio na superfície fria ficam praticamente independentes da malha.

A figura 4.15, página 68, apresenta o tempo de processamento em segundos por iteração, versus o número de elementos. Como pode ser visto, o aumento do número de elementos requer um maior tempo de processamento. Como a malha C, respectivamente, dos casos 1 e 2 mostrou-se adequada, pois requer um tempo de processamento razoável e apresenta boa precisão nos cálculos, as mesmas serão utilizadas nas demais avaliações posteriores.

As figuras 4.16 (caso 1) e 4.17 (caso 2), página 69, apresentam o número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus o número de Grashof, considerando o ar no interior da cavidade com número de Prandtl fixado em 0,733. Foram utilizados números de Grashof  $2 \times 10^4$ ;  $3,5 \times 10^4$ ;  $5 \times 10^4$ ;  $7,5 \times 10^4$  e  $10^5$ , e as respectivas malhas C, para os casos 1 e 2. Nas figuras 4.16 e 4.17 os resultados são apresentados para o regime permanente, sendo que nessa situação o número de Nusselt médio nas superfícies fria e quente são iguais.

Pode-se verificar nas figuras 4.16 e 4.17, página 69, para os casos 1 e 2, respectivamente, que o número de Nusselt médio aumenta com o aumento do número de Grashof. A explicação disso é que, com o aumento do número de Grashof, aumenta a velocidade de circulação do fluido e, com isso aumenta a troca de calor entre o fluido e a parede, aumentando consequentemente o coeficiente de troca de calor por convecção e o número de Nusselt médio nas superfícies.

O caso 2 apresentou valores de número de número de Nusselt médio na superfície fria maiores que o caso 1, quando o número de Grashof foi mantido. Isso se deve ao fato que, para a geometria do corpo cilíndrico, o escoamento do fluido penetra mais na região entre os dois cilindros, bem como entre os cilindros e as paredes horizontais. Esse escoamento que ocorre mais facilmente no caso do cilíndrico favorece uma maior taxa de troca de calor local, o que tem como consequência uma maior troca de calor global e maior número de Nusselt médio nas superfícies.

As figuras 4.18 (caso 1) e 4.19 (caso 2), página 70, apresentam o número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus o tempo adimensional,  $\tau$ . Foram utilizados números de Grashof  $2 \times 10^4$ ;  $3,5 \times 10^4$ ;  $5 \times 10^4$ ;  $7,5 \times 10^4$  e  $10^5$ . Para ambos os casos utilizou-se a malha C. Observa-se para ambos os casos que, quando forem fixados os número de Prandtl e Grashof, o número de Nusselt médio na superfície fria inicialmente diminui com o aumento do tempo adimensional, para finalmente estabilizar num valor constante, o que corresponde a se ter atingido o regime permanente. Isto se explica pelo fato de o fluido no tempo  $\tau=0$  estar na temperatura  $\theta=0$ , e trocar calor com a superfície fria mantida na temperatura  $\theta=-1$ . O alto gradiente inicial de temperaturas entre o fluido e a superfície fria, ocasiona uma alta taxa de troca de calor e, em consequência, um alto número de Nusselt médio. À medida que aumenta o tempo adimensional, o gradiente de temperaturas junto à superfície diminui e, em consequência, o número de Nusselt diminui, até finalmente se estabilizar num valor constante.

As distribuições de temperatura,  $\theta$ , e função corrente,  $\psi$ , são mostradas, variando em função do número de Grashof, nas figuras 4.20 (caso 1) e 4.21 (caso 2), páginas 71 e 72, respectivamente. Foi utilizada a malha C para cada caso e número de Prandtl 0,733. As figuras representam os resultados para o regime permanente.

No lado esquerdo da figura 4.20 são mostradas as distribuições de temperaturas adimensionais e no lado direito as distribuições da função corrente, para três números de Grashof do caso 1. Como se pode verificar nas figuras do lado esquerdo, os gradientes de

temperaturas junto aos corpos aumentam com o aumento do número de Grashof. Nas figuras do lado direito se pode verificar que existem maiores variações nas escalas para a função corrente à medida que o número de Grashof aumenta. A explicação para isso é que a função corrente representa a vazão volumétrica de fluido escoando entre duas linhas de corrente. A diferença da função corrente entre dois pontos representa a vazão volumétrica entre estes dois pontos. Se o fluido escoar no sentido anti-horário a função corrente é positiva e representada pela cor vermelha, ao contrário, se o fluido escoar no sentido horário a função corrente é negativa e representada pela cor azul. Assim, pode-se verificar que o aumento do número de Grashof ocasiona maior circulação do fluido e, em consequência, maiores velocidades do fluido, maior transferência de calor e maior número de Nusselt médio.

Verifica-se na figura 4.20 para a função corrente que aparecem quatro grandes células convectivas, sendo duas rotativas no sentido horário e duas contra-rotativas no sentido anti-horário.

No lado esquerdo da figura 4.21 são mostradas as distribuições de temperaturas adimensionais e no lado direito as distribuições da função corrente, para três números de Grashof do caso 2. Para esta figura valem os mesmos comentários gerais e explicações apresentadas para a figura 4.20. Entretanto, comparando as figuras 4.20 e 4.21, verifica-se que no caso 1, os gradientes de temperaturas são grandes próximos aos cantos do corpo quadrado, e no caso 2, os gradientes são mais uniformes e maiores que do caso 1. Destaca-se também que a faixa de variação da função corrente é maior para o caso 2, indicando que nesse caso existe maior vazão de fluido recirculando, maior fluxo de calor na superfície do corpo e, em consequência, maior número de Nusselt médio. No caso da figura 4.21, também aparecem quatro grandes células convectivas, duas rotativas no sentido horário e duas contra-rotativas no sentido anti-horário.

As figuras 4.22 (caso 1) e 4.23 (caso 2), páginas 73 e 74, apresentam a distribuição da temperatura adimensional juntamente com as linhas de corrente, em função da evolução do tempo adimensional. Foi utilizada a malha C para cada caso, considerando número de Grashof  $10^5$  e número de Prandtl 0,733. O principal objetivo dessas figuras é mostrar a evolução temporal do campo de temperaturas e as estruturas do campo de escoamento do fluido.

Para a figura 4.22 no tempo adimensional  $\tau=0,05$  verificam-se altos gradientes de temperaturas próximos do corpo quadrado inferior quente e do corpo quadrado superior frio. Próximo do corpo quente, o fluido tende a ter um escoamento ascendente, nos lados direito e



esquerdo do corpo, devido às forças de empuxo agindo no fluido. Nas proximidades do corpo superior frio, o escoamento nos lados direito e esquerdo, ocorre no sentido descendente. Formam-se portanto, quatro grandes células convectivas. Nos tempos seguintes, isto é,  $\tau=0,25$  até  $\tau=5,00$ , o escoamento vai se modificando com as recirculações aumentando até atingir o regime permanente nos tempos finais, onde os padrões de escoamentos não se modificam.

Para a figura 4.23 do caso 2, tem-se um comportamento e um padrão de estruturas de escoamentos e de distribuições de temperaturas semelhantes ao caso 1, mostrado na figura 4.22. Entretanto, vale destacar que na figura 4.22, do caso 1, no espaço entre os dois corpos quadrados formam-se quatro pequenas células convectivas após o tempo adimensional  $\tau=0,05$ . Estas células não se desenvolvem no caso 2, para os corpos cilíndricos, devido ao fato dessa última geometria permitir uma penetração do fluido e provocar uma recirculação, formando apenas quatro grandes células convectivas. Observa-se para os casos 1 e 2, uma estabilização dos campos de temperaturas e velocidades a partir do tempo adimensional  $\tau = 2,5$ .

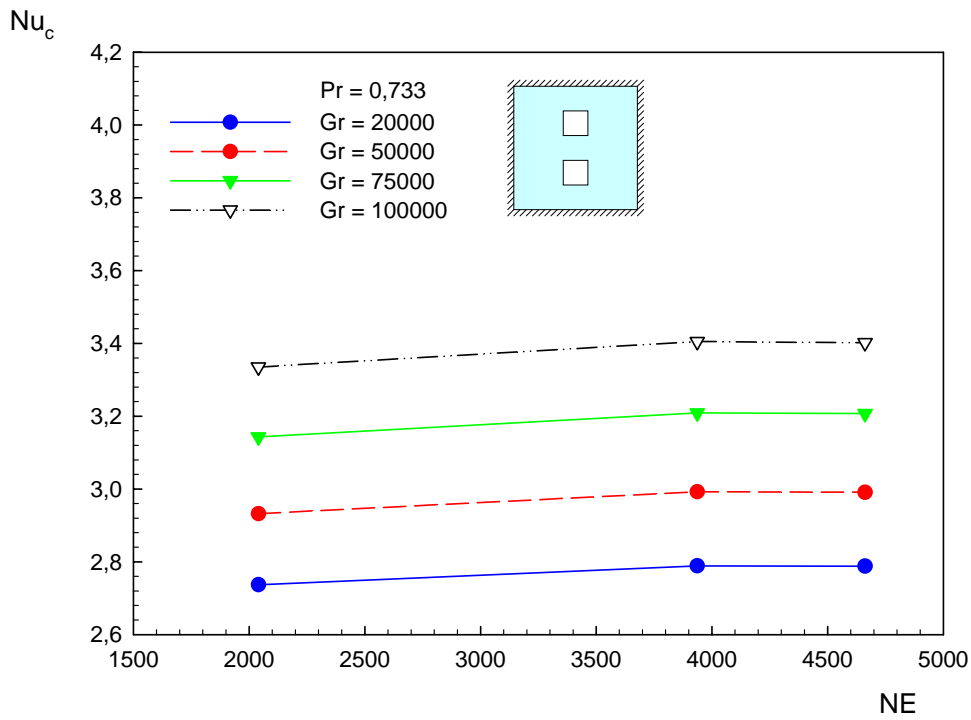


Figura 4.13 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus número de elementos,  $NE$ , para o caso 1.

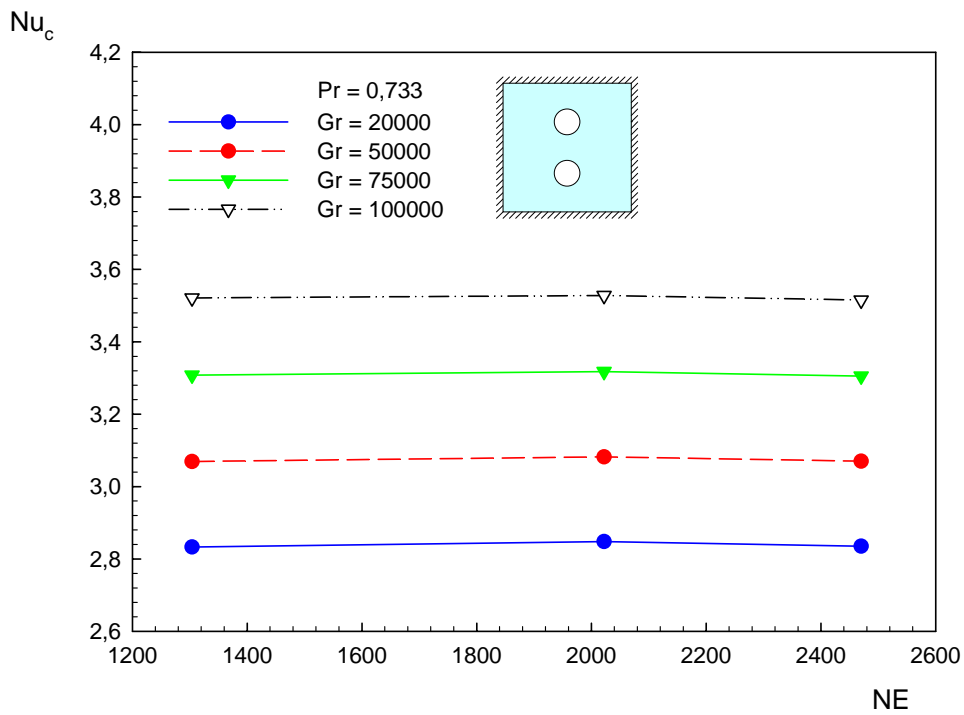


Figura 4.14 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus número de elementos,  $NE$ , para o caso 2.

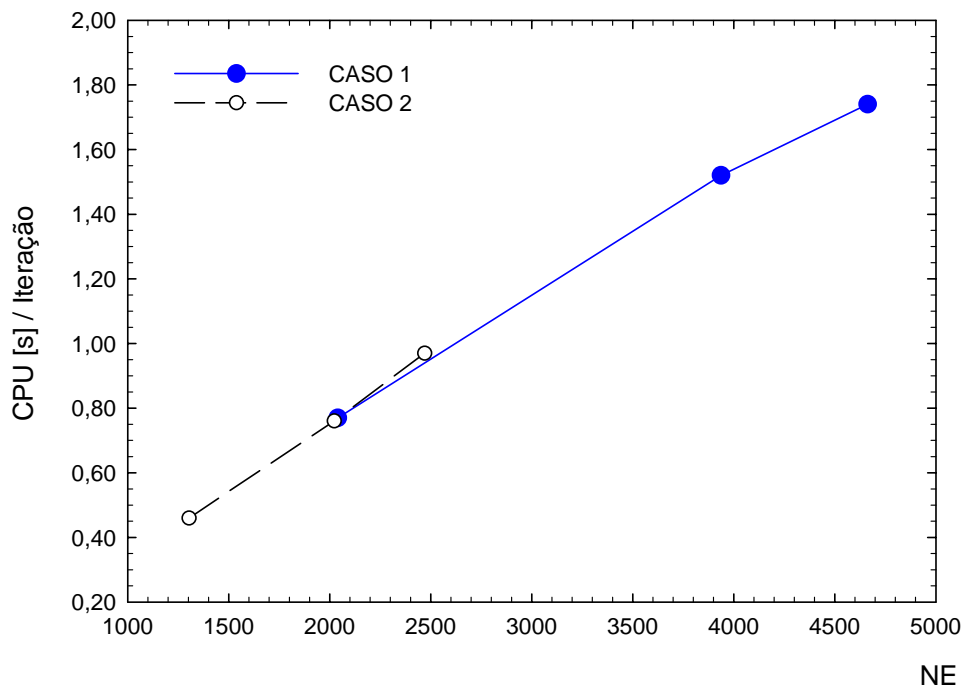


Figura 4.15 – Tempo de processamento por iteração, em segundos, versus o número de elementos, NE.

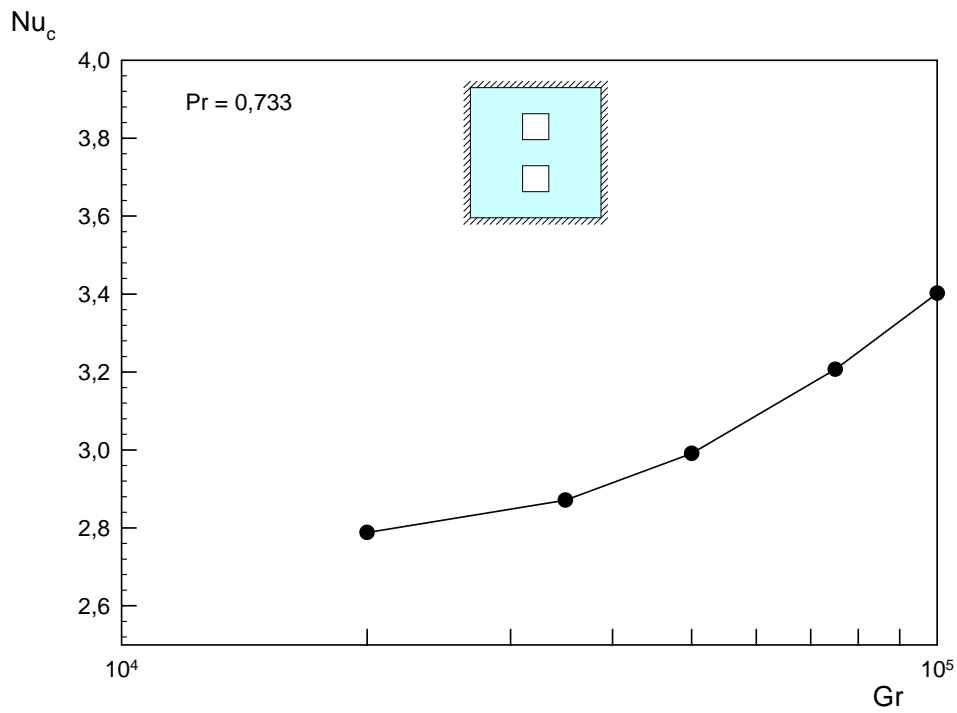


Figura 4.16 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus o número de Grashof,  $Gr$ , caso 1.

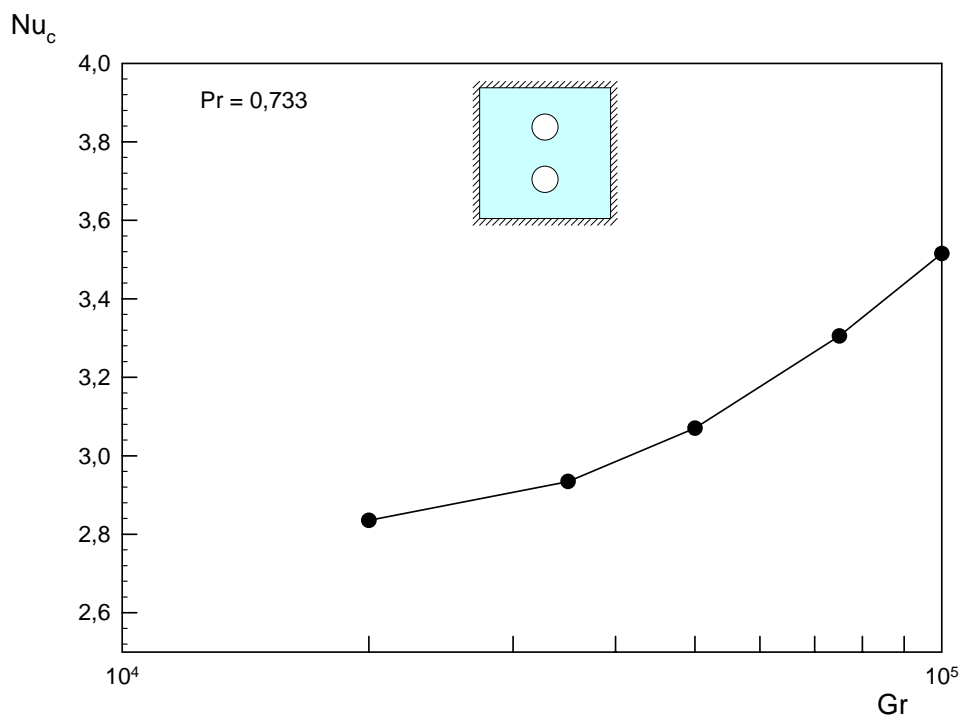


Figura 4.17 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus o número de Grashof,  $Gr$ , caso 2.

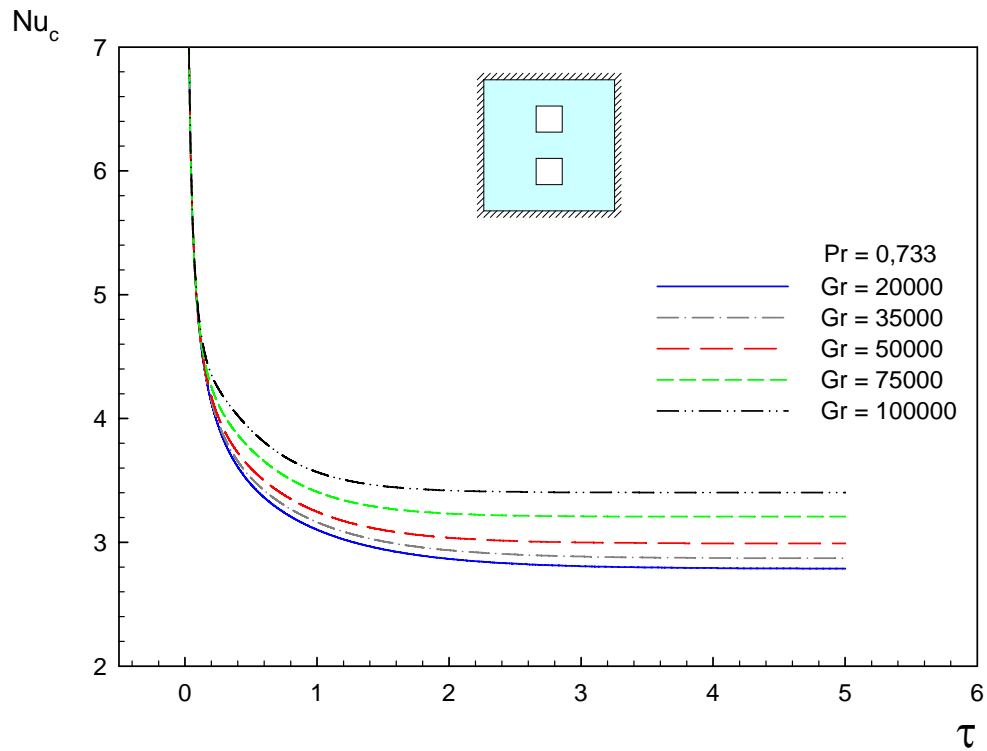


Figura 4.18 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , caso 1.

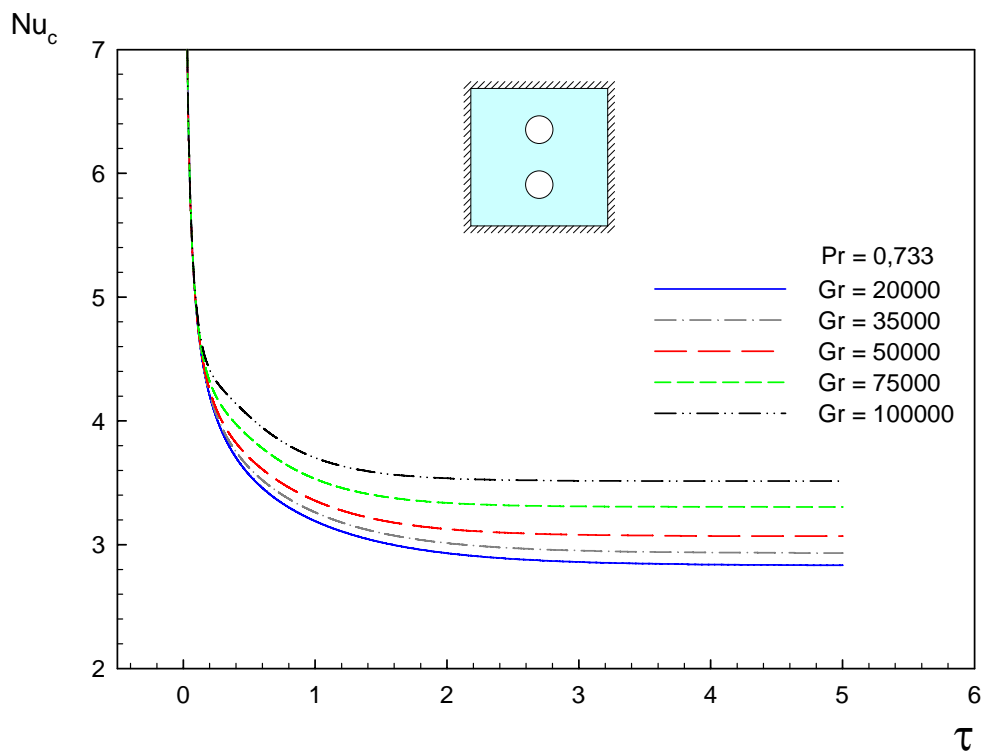


Figura 4.19 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , caso 2.

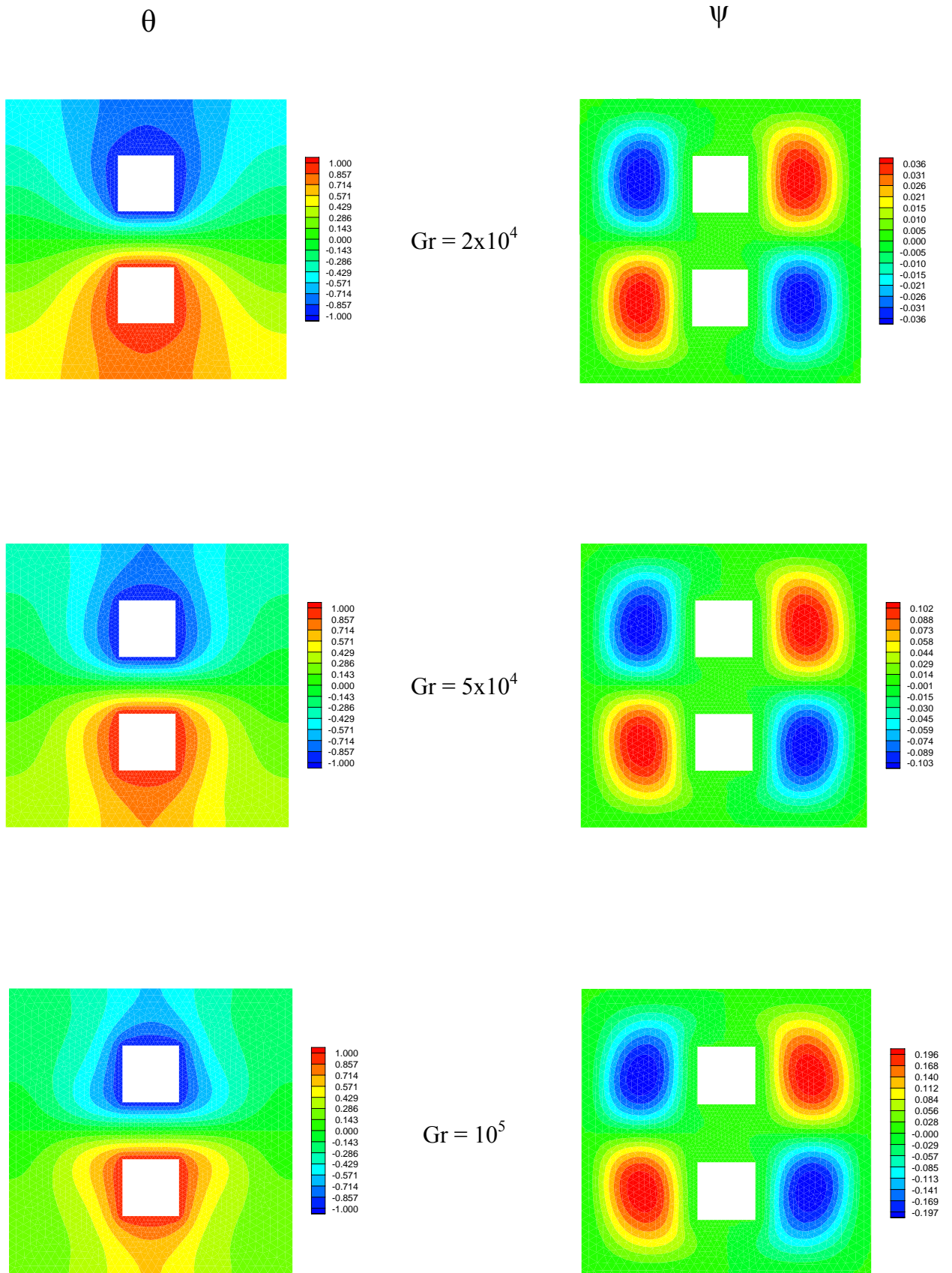


Figura 4.20 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e da função corrente,  $\psi$ , para o caso 1;  $Pr = 0,733$

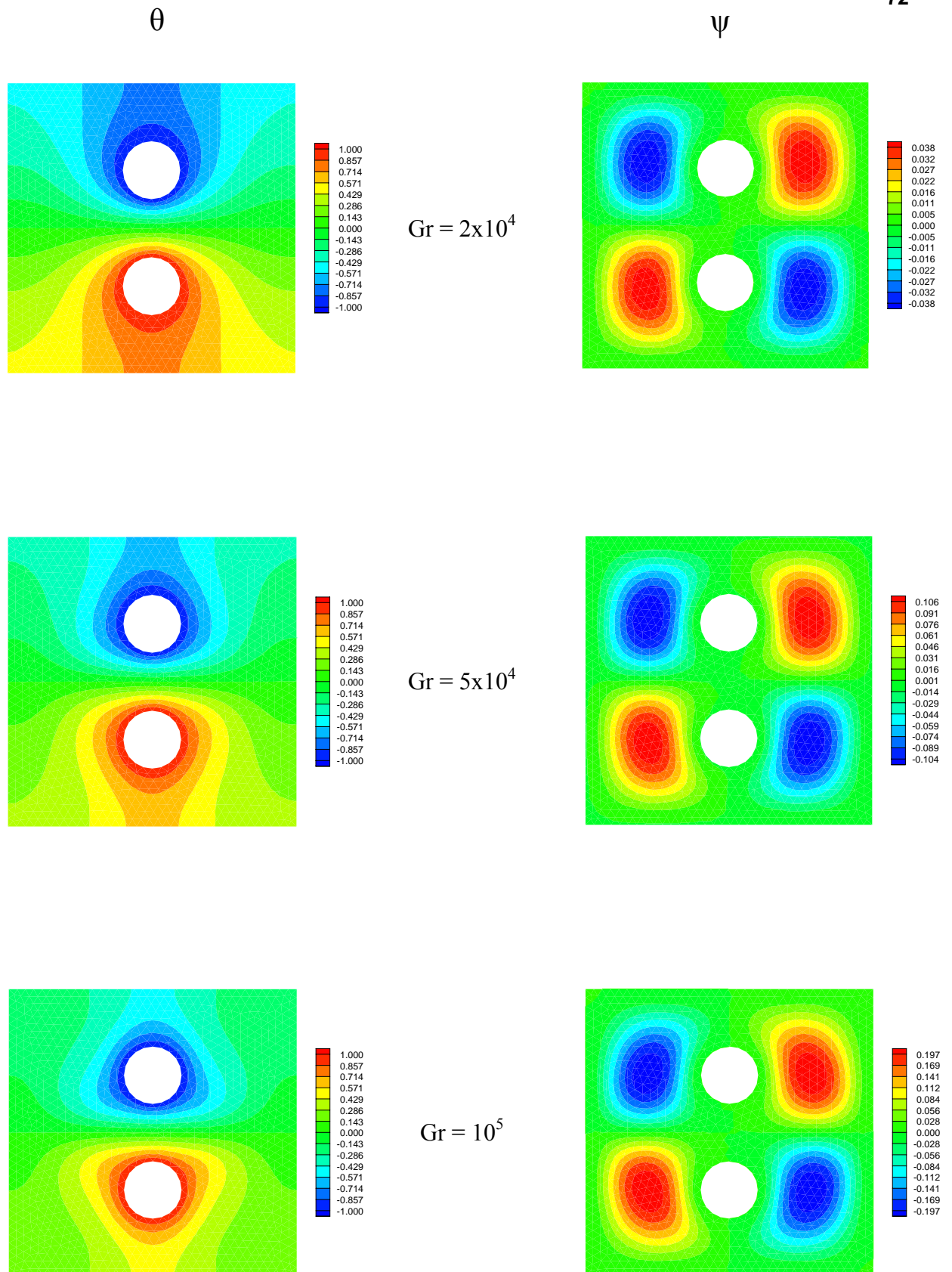


Figura 4.21 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e da função corrente,  $\psi$ , para o caso 2;  $Pr = 0,733$

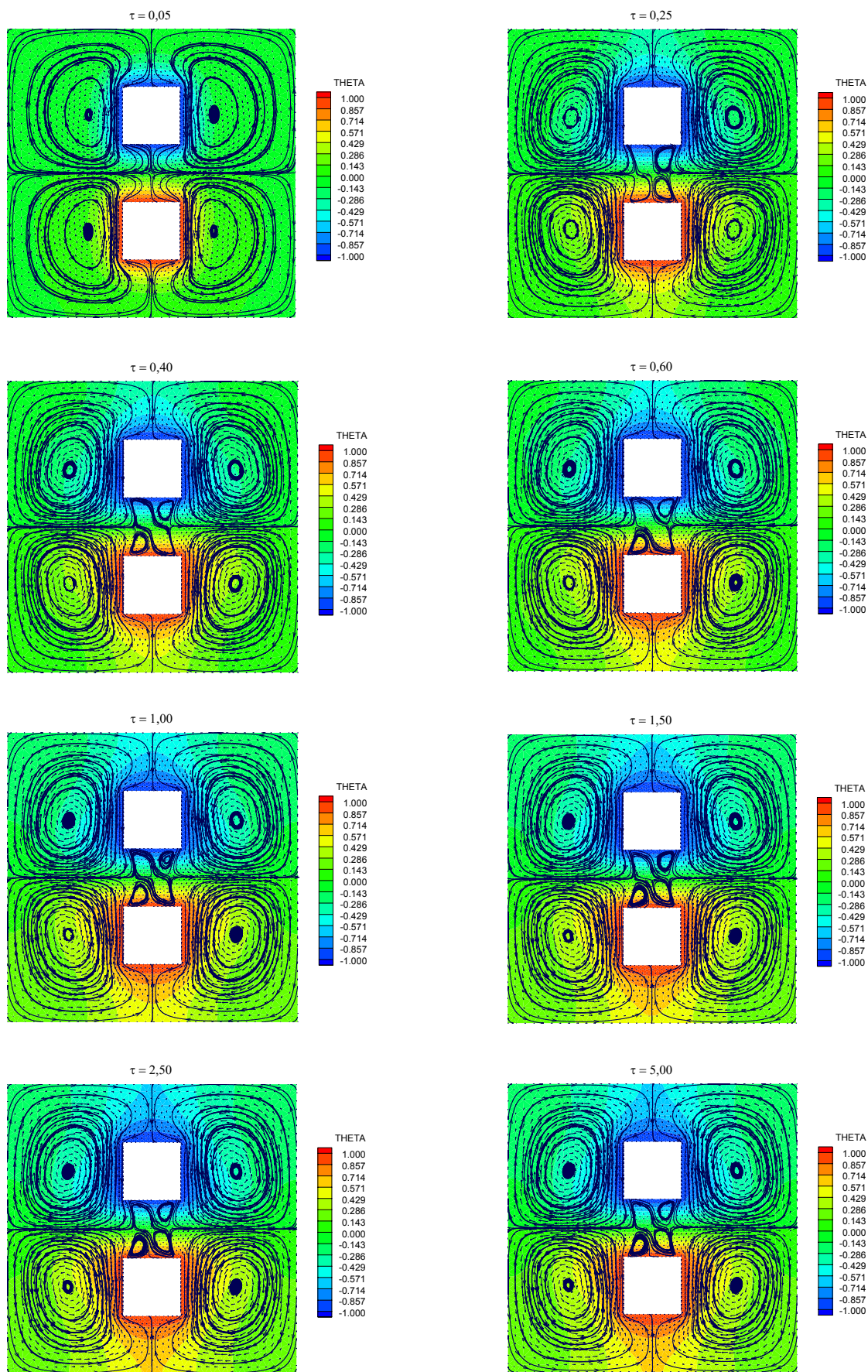


Figura 4.22 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e linhas de corrente,  $\psi$ , para o caso 1; no tempo adimensional,  $\tau$ ;  $Pr = 0,733$  e  $Gr = 10^5$ .



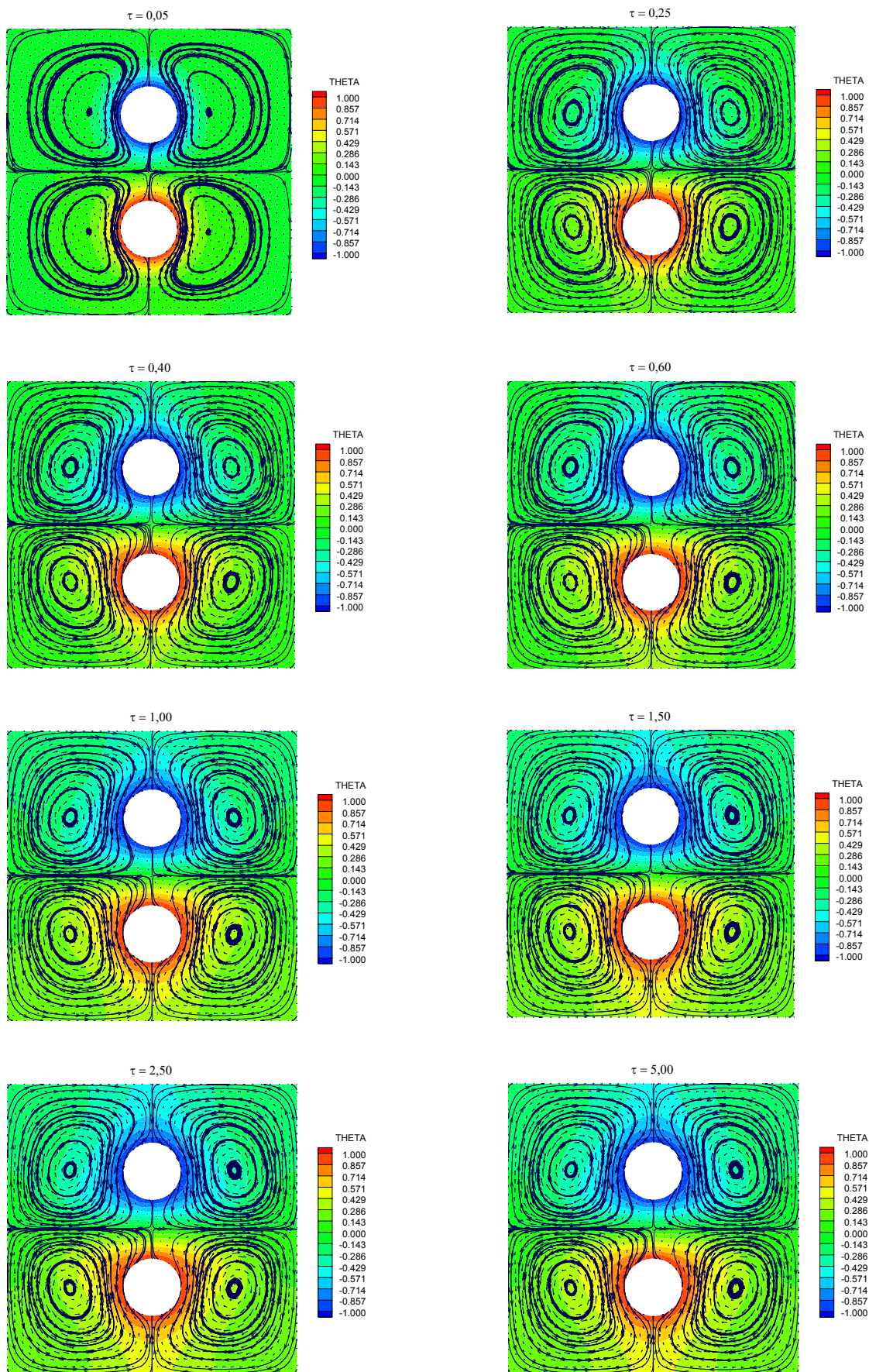


Figura 4.23 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e linhas de corrente,  $\psi$ , para o caso 2; no tempo adimensional,  $\tau$ ;  $Pr = 0,733$  e  $Gr = 10^5$ .

### 4.3.2 – RESULTADOS PARA OS CASOS 3 E 4.

Para o estudo dos casos 3 e 4 foram desenvolvidas três malhas distintas para o caso 3 e outras três malhas para o caso 4. Da mesma forma que o refinamento foi feito para os casos 1 e 2, acontece também para os casos 3 e 4, ou seja, a malha menos refinada foi denominada malha A, a malha intermediária foi denominada malha B e, a mais refinada, malha C. As figuras 4.24 e 4.25, páginas 81 e 82, mostram as malhas utilizadas para o estudo dos casos 3 e 4, respectivamente.

As figuras 4.26 (caso 3) e 4.27 (caso 4), página 83, apresentam o número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus o número de elementos das malhas A, B e C estudadas. Os resultados são apresentados para o regime permanente, sendo que nessa situação o número de Nusselt médio na superfície fria é igual ao número de Nusselt médio na superfície quente. Observa-se que o número de Nusselt médio tende a convergir com o aumento do número de elementos, validando a utilização da malha C para ambos os casos. O número de Grashof utilizado para as três malhas analisadas teve valores  $2 \times 10^4$ ;  $5 \times 10^4$ ;  $7,5 \times 10^4$  e  $10^5$ . A razão de difusividades utilizada foi  $D = 10$  e o número de Prandtl 0,733.

Para a figura 4.26 (caso 3), considerando o resultado do número de Nusselt médio das malhas B e C, e considerando também os números de Grashof  $2 \times 10^4$ ;  $5 \times 10^4$ ;  $7,5 \times 10^4$  e  $10^5$ , os desvios percentuais encontrados foram, respectivamente, 0%; 0,367%; 0,190% e 0,171%. Para o número de Grashof  $2 \times 10^4$ , o número de Nusselt médio resultante foi o mesmo para as duas malhas, ou seja, não houve desvio. Assim, o máximo desvio encontrado é de 0,367%, o qual é considerado satisfatório.

A figura 4.27 (caso 4) mostra que, para todos os números de Grashof considerados, é praticamente mínima a variação do número de Nusselt médio com o aumento do número de elementos da malha. Tanto as malhas menos refinadas A e B, como a malha mais refinada C, tiveram resultados bem próximos. De maneira análoga ao caso 3, para a figura 4.27 (caso 4), considerando o resultado do número de Nusselt das malhas B e C, considerando também números de Grashof  $2 \times 10^4$ ;  $5 \times 10^4$ ;  $7,5 \times 10^4$  e  $10^5$ , os desvios percentuais encontrados foram, respectivamente, 0%; 0,778%; 0,596% e 0,595%. O número de Nusselt médio resultante foi o

mesmo para as duas malhas, considerando o número de Grashof  $2 \times 10^4$ . Assim, o maior desvio encontrado foi de 0,778%, também considerado satisfatório.

Analisando os resultados dos desvios obtidos para as malhas B (menos refinada) e C (mais refinada) nos casos 3 e 4, podemos concluir que a malha C apresenta refinamento adequado para a continuidade dos estudos. O resultado do número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , ficou praticamente independente de um maior refinamento da malha.

O aumento do número de elementos requer um maior tempo de processamento, como pode ser visto na figura 4.28, página 84, que apresenta o tempo de processamento médio por iteração, em segundos, versus o número de elementos. Um maior refinamento da malha C resultaria em tempos de processamento ainda maiores. Como a malha C mostrou-se adequada para a continuidade dos estudos, a mesma será utilizada nas demais avaliações posteriores, para os casos 3 e 4.

As figuras 4.29 (caso 3) e 4.30 (caso 4), página 85, apresentam o número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus o número de Grashof, considerando o ar no interior da cavidade com número de Prandtl fixado em 0,733. Foram utilizados números de Grashof  $2 \times 10^4$ ;  $5 \times 10^4$ ;  $7,5 \times 10^4$  e  $10^5$  e malha C para ambos os casos. Os gráficos apresentam quatro curvas distintas, sendo cada uma correspondente a um valor de razão de difusividades ( $D=0,1$ ;  $D=1$ ;  $D=10$  e  $D=100$ ). Os resultados são apresentados para o regime permanente, sendo que nessa situação o número de Nusselt médio na superfície fria é igual ao número de Nusselt médio na superfície quente.

Para ambos os casos, o número de Nusselt médio na superfície fria aumenta com o aumento do número de Grashof. Esse aumento evidencia que, com o aumento do número de Grashof, aumenta a velocidade de circulação do fluido, resultando no aumento da troca de calor entre o fluido e a parede, aumentando conseqüentemente o coeficiente de troca de calor por convecção e o número de Nusselt médio na superfície fria.

Fixando-se o número de Grashof, observa-se nas figuras 4.29 (caso 3) e 4.30 (caso 4), o aumento do número de Nusselt médio na superfície fria com o aumento da razão de difusividades.

Pode-se observar ainda nas figuras 4.29 e 4.30 que, existe uma boa aproximação entre os resultados obtidos para razão de difusividades  $D=10$  e  $D=100$  para cada caso. Isso mostra

que os resultados não sofrem grandes variações com a utilização de valores altos para a razão de difusividades.

Comparando-se as figuras 4.29 (caso 3) e 4.30 (caso 4), verifica-se que existe uma boa semelhança nos valores do número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , para os casos 3 e 4, fixando-se o número de Grashof e a razão de difusividades. Essa boa aproximação existente entre os valores do número de Nusselt médio na superfície fria mostra que, para os dois casos, as diferenças nas geometrias dos sólidos internos não apresentam grandes influências no resultado final. Entretanto, o caso 4 apresentou valores pouco maiores para  $Gr \geq 5 \times 10^4$  e  $D \geq 1$ .

As figuras 4.31 (caso 3) e 4.32 (caso 4), página 86, apresentam o número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus o tempo adimensional,  $\tau$ . Foram utilizados números de Grashof  $2 \times 10^4$ ;  $5 \times 10^4$ ;  $7,5 \times 10^4$  e  $10^5$ . Para ambos os casos utilizou-se a malha C e razão de difusividades  $D = 10$ .

Observa-se para figura 4.31 (caso 3) que quando forem fixados os números de Prandtl e Grashof, o número de Nusselt médio na superfície fria inicialmente diminui com o tempo adimensional ( $\tau$ ). Para Grashof  $2 \times 10^4$  e  $\tau$  maior que 1, o número de Nusselt médio já tende a se estabilizar e atingir o regime permanente.

Para Grashof  $5 \times 10^4$ , o número de Nusselt médio é grande para valores iniciais de  $\tau$ , apresentando uma estabilização para  $\tau$  entre 1 e 6, em seguida, aumentando para  $\tau$  entre 6 e 8 e finalmente atingindo o regime permanente. A justificativa para o início do aumento do número de Nusselt médio observado para  $\tau$  entre 6 e 8, deve-se à ocorrência de uma mudança no padrão de escoamento que apresenta quatro células convectivas e passa para apenas duas células. Essa mesma situação ocorre em um tempo adimensional menor para números de Grashof maiores ( $7,5 \times 10^4$  e  $10^5$ ).

A figura 4.32 (caso 4) apresenta resultados e discussões semelhantes às aquelas apresentadas anteriormente para a figura 4.31. As principais diferenças entre as figuras 4.31 e 4.32 são: i) A maioria dos resultados do número de Nusselt médio do caso 4 (figura 4.32) são maiores que os valores correspondentes do caso 3 (figura 4.31); ii) Embora o comportamento geral do número de Nusselt médio para o caso 3 seja semelhante ao comportamento do número de Nusselt médio para o caso 4, a transição de um padrão de escoamento de quatro células convectivas para duas células, ocorre para tempo adimensional diferente. Esse comportamento será exposto com mais detalhes com o uso das figuras 4.41 (caso 3) e 4.42 (caso 4).

As figuras 4.33 (caso 3) e 4.34 (caso 4), página 87, apresentam o número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus o tempo adimensional,  $\tau$ . Foi fixado o número de Grashof em  $7,5 \times 10^4$  e o número de Prandtl em 0,733, e verificado o efeito da variação da razão de difusividades  $D$  que teve valores 0,1; 1; 10 e 100.

Para tempos adimensionais iniciais, o número de Nusselt médio na superfície fria é grande devido aos altos gradientes de temperatura entre o fluido e a parede fria. Com o decorrer do tempo, observa-se uma repentina diminuição do número de Nusselt médio e uma posterior estabilização até o tempo adimensional  $\tau$  próximo de 4, seguido de uma elevação de seu valor e novamente uma estabilização, até atingir o regime permanente. Verificam-se nas figuras 4.33 e 4.34 que a variação da razão de difusividades não acarreta grandes mudanças no comportamento geral do número de Nusselt médio em função do tempo adimensional.

Comparando-se as figuras 4.31 até 4.34, verificam-se no regime permanente que o número de Nusselt médio é mais influenciado pela variação do número de Grashof que pela variação da razão de difusividades.

A distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e da função corrente,  $\psi$ , são mostradas nas figuras 4.35 (caso 3) e 4.36 (caso 4), páginas 88 e 89, para número de Grashof  $2 \times 10^4$ ;  $5 \times 10^4$  e  $10^5$ . Foi utilizado o número de Prandtl fixado em 0,733 e razão de difusividades  $D = 10$ . As figuras representam resultados para o regime permanente.

A figura 4.35 (caso 3) mostra que, para número de Grashof  $2 \times 10^4$ , existem quatro células convectivas com baixos valores de  $\psi$ , indicando que o fluido tem baixas velocidades, pequenas recirculações, as quais provocam pequenas deformações no campo de temperaturas. Como pode ser observado, as linhas isotérmicas são praticamente horizontais, indicando que trata-se de uma situação característica de condução pura. Por outro lado, para números de Grashof  $5 \times 10^4$  e  $10^5$ , verifica-se a existência de duas grandes células convectivas, sendo a célula da direita rotativa no sentido horário e a da esquerda contra-rotativa no sentido anti-horário. Quanto maior o número de Grashof, verificam-se maiores velocidades, maiores vazões de recirculação do fluido, maiores deformações nos campos de temperatura e, conseqüentemente, maior taxa de transferência de calor.

Para a figura 4.36, as considerações são as mesmas feitas para a figura 4.35. Entretanto, verifica-se para o caso 4 (figura 4.36) uma maior recirculação do fluido, resultando em uma maior troca de calor, evidenciada pelos resultados dos números de Nusselt médio para este caso. Essa maior recirculação é devido ao favorecimento da geometria dos corpos internos

circulares, que permitem uma maior recirculação do fluido, entre os cilindros e entre as paredes.

As figuras 4.37 (caso 3) e 4.38 (caso 4), páginas 90 e 91, apresentam a distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e função corrente,  $\psi$ , variando em função da razão de difusividades,  $D$ . Foi utilizada a malha C para cada caso, número de Prandtl 0,733 e Grashof  $7,5 \times 10^4$ . As figuras representam os resultados para o regime permanente.

Pode ser observado na figura 4.37 (caso 3) que o fluido apresenta comportamentos distintos para números baixos e altos de razão de difusividades. A diferença está na recirculação, ou seja, para difusividade baixa ( $D = 0,1$ ), a célula convectiva da esquerda é rotativa no sentido horário e a célula da direita é contra-rotativa no sentido anti-horário. Para razão de difusividades maiores ( $D = 10$  e  $D = 100$ ), a célula convectiva da esquerda é rotativa no sentido anti-horário e a célula da direita é contra-rotativa no sentido horário.

Ainda para a figura 4.37, observa-se boa semelhança no comportamento do fluido para  $D = 10$  e  $D = 100$ , resultando em pequenas mudanças no comportamento geral do número de Nusselt médio em função do tempo adimensional. Esta constatação foi verificada também na figura 4.33.

Para a figura 4.38 (caso 4), as considerações são as mesmas apresentadas para a figura 4.37, exceto que, devido à maior recirculação do fluido favorecida pela geometria circular dos corpos internos para o caso 4, pode-se observar na figura 4.38 maiores valores da função corrente ( $\psi$ ), em comparação com a figura 4.37 (caso 3).

As figuras 4.39 a 4.42, páginas 92 a 95, apresentam as distribuições da temperatura adimensional,  $\theta$ , juntamente com as linhas de corrente,  $\psi$ , para os casos 3 e 4, em função da evolução do tempo adimensional. Foi utilizada a malha C para cada caso, considerando o número de Prandtl 0,733. Para as figuras 4.39 (caso 3) e 4.40 (caso 4), consideram-se o número de Grashof  $7,5 \times 10^4$  e a razão de difusividades 0,1. Para as figuras 4.41 (caso 3) e 4.42 (caso 4), consideram-se o número de Grashof  $10^5$  e a razão de difusividades 10. O principal objetivo dessas figuras é mostrar a evolução temporal do campo de temperaturas e as estruturas do campo de escoamento do fluido.

Observam-se nas figuras 4.39 a 4.42, uma estabilização dos campos de velocidades e temperaturas do fluido, a partir do tempo adimensional  $\tau = 5$ .

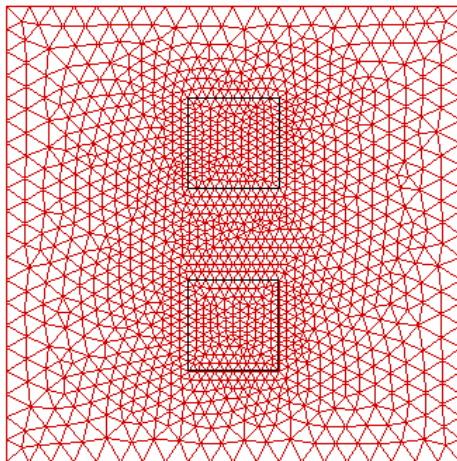
Na figura 4.39 (caso 3) para  $\tau = 0,5$  verifica-se a formação de oito células convectivas, sendo quatro rotativas no sentido horário e quatro no sentido anti-horário. No intervalo de tempo entre  $\tau = 0,5$  e  $\tau = 1,2$ , as quatro células formadas entre os corpos, vão reduzindo de tamanho e intensidade.

No intervalo de tempo entre  $\tau = 2,6$  e  $\tau = 3,3$ , as duas células superiores (a da esquerda no sentido horário e a da direita no sentido anti-horário) tornam-se mais intensas e reduzem os efeitos das duas células inferiores. No tempo  $\tau = 4$ , as duas células inferiores ficam reduzidas à pequenas recirculações na parte inferior da cavidade.

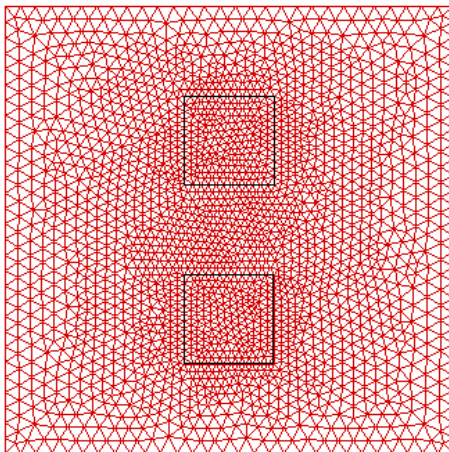
A partir do tempo  $\tau = 5$  até  $\tau = 10$ , não se verificam grandes mudanças no padrão de escoamento, sendo assim considerado atingido o regime permanente.

A figura 4.40 (caso 4) apresenta bastante semelhança com as distribuições de temperaturas e campos de velocidades da figura 4.39 (caso 3).

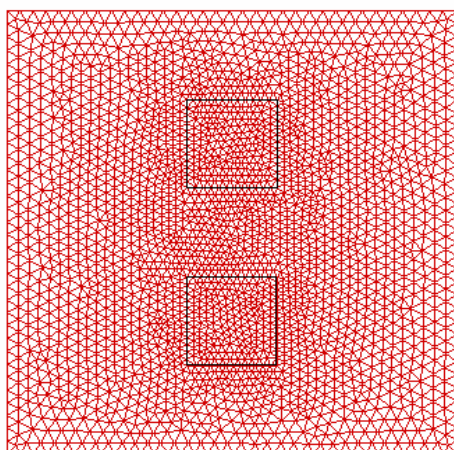
As figuras 4.41 (caso 3) e 4.42 (caso 4) apresentam entre si muitas semelhanças nos padrões de escoamentos. Entretanto, cabe destacar que o sentido de rotações das células convectivas, apresentadas nas figuras 4.41 e 4.42 é o mesmo e, este sentido é contrário ao sentido de rotações das células convectivas apresentadas nas figuras 4.39 (caso 3) e 4.40 (caso 4).



Malha A  
2546 Elementos  
1314 Nós



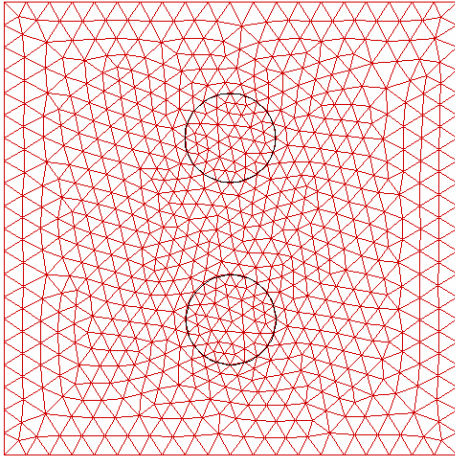
Malha B  
4056 Elementos  
2087 Nós



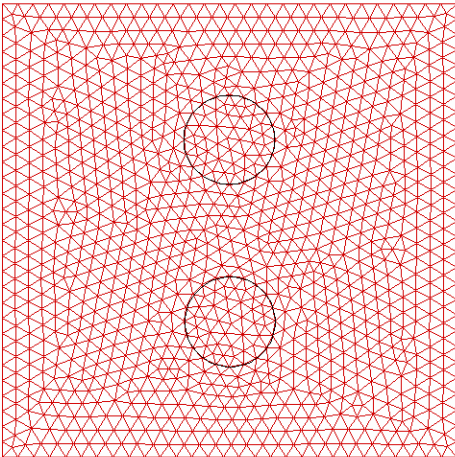
Malha C  
4674 Elementos  
2406 Nós

Figura 4.24 - Malhas utilizadas para o estudo do caso 3.

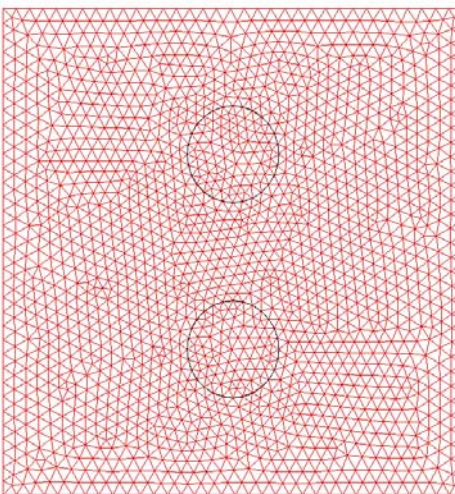




Malha A  
1464 Elementos  
773 Nós



Malha B  
2190 Elementos  
1154 Nós



Malha C  
3508 Elementos  
1823 Nós

Figura 4.25 - Malhas utilizadas para o estudo do caso 4.

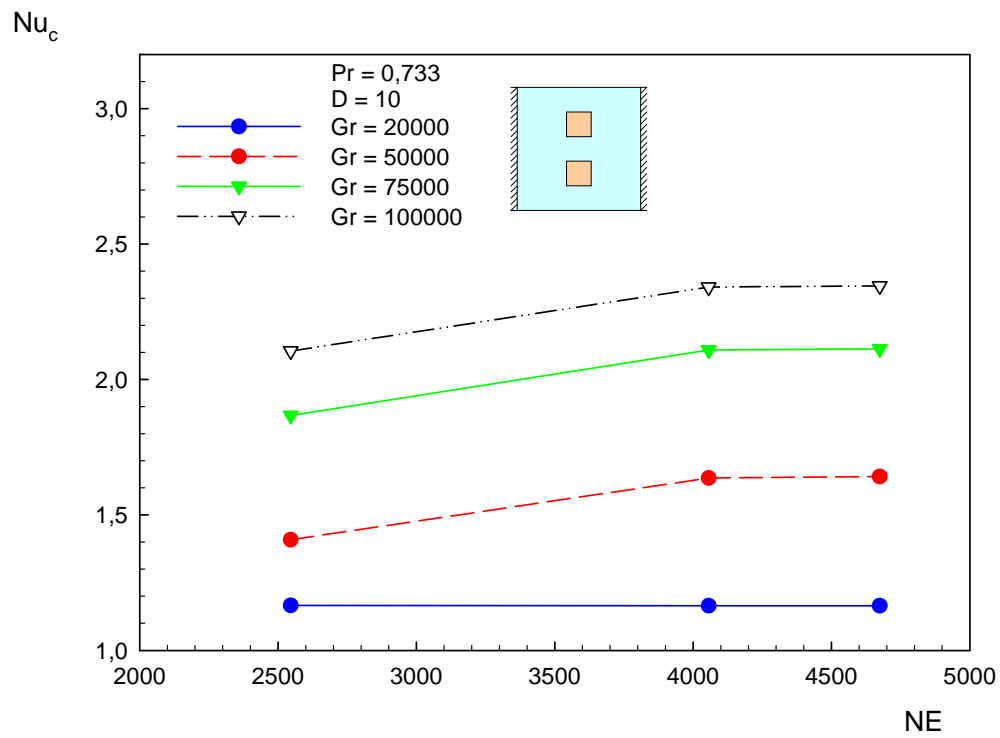


Figura 4.26 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus número de elementos, NE, para o caso 3.

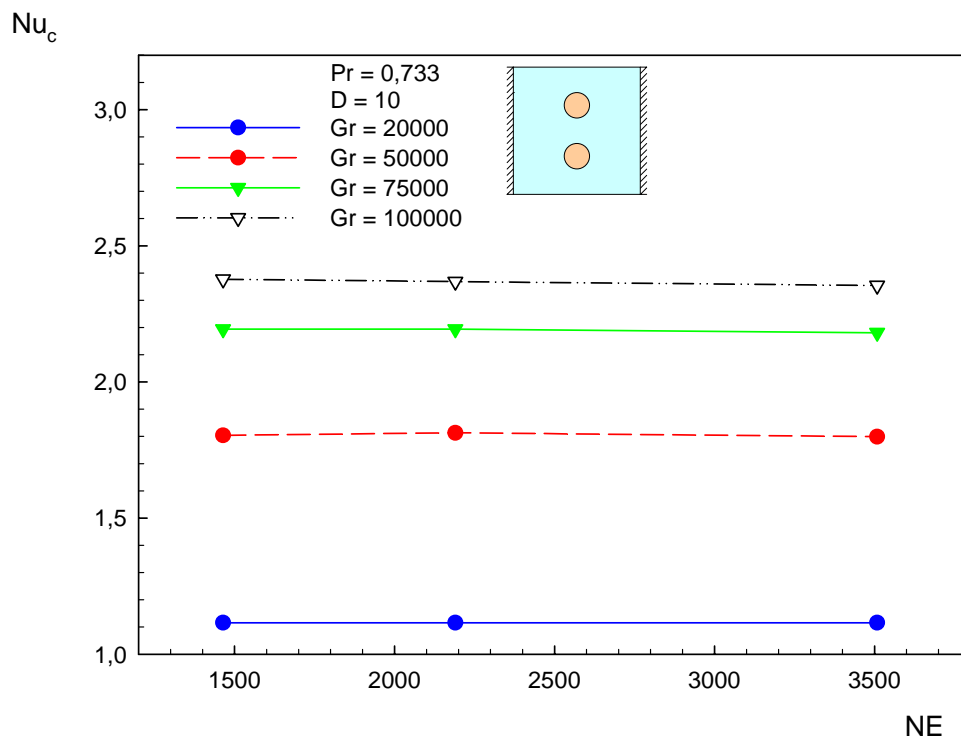


Figura 4.27 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus número de elementos, NE, para o caso 4.

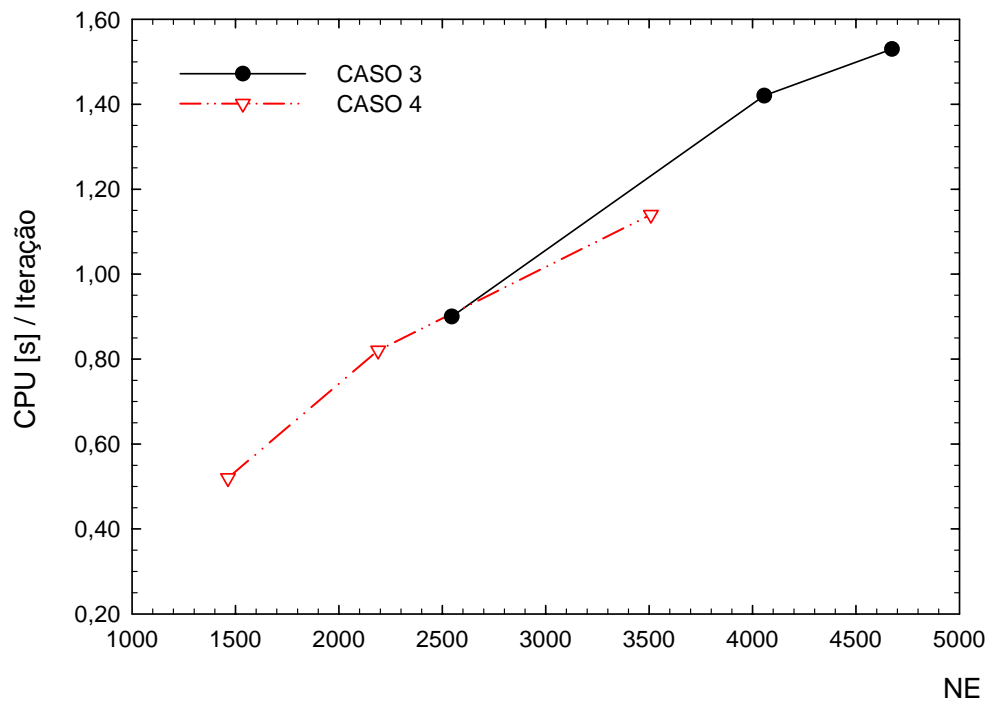


Figura 4.28 – Tempo de processamento por iteração, em segundos, versus o número de elementos, NE.

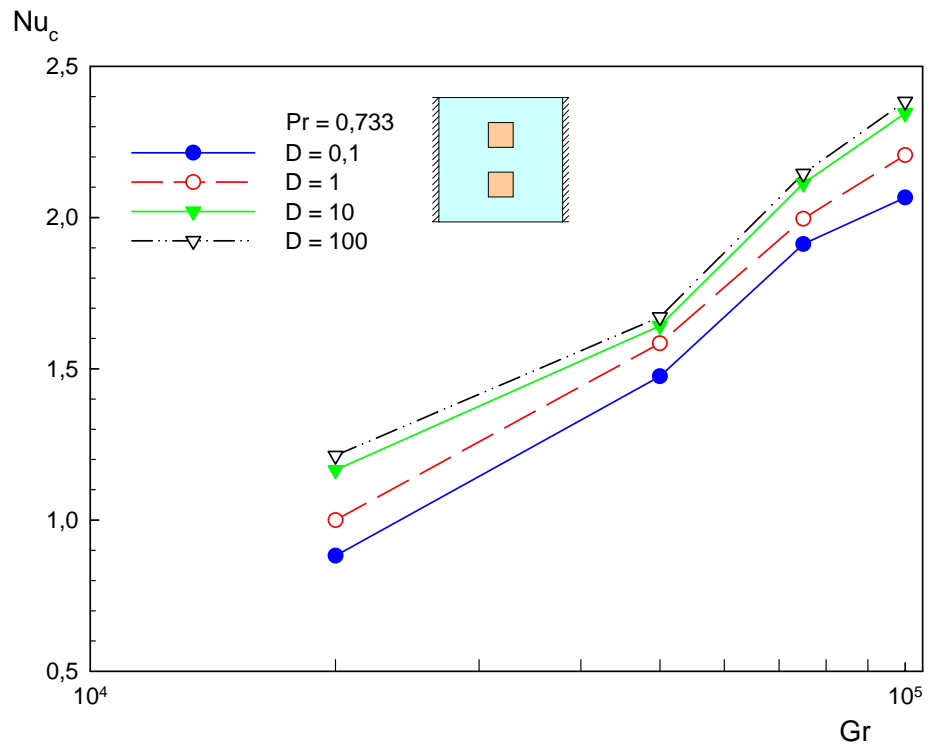


Figura 4.29 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus o número de Grashof,  $Gr$ , caso 3.

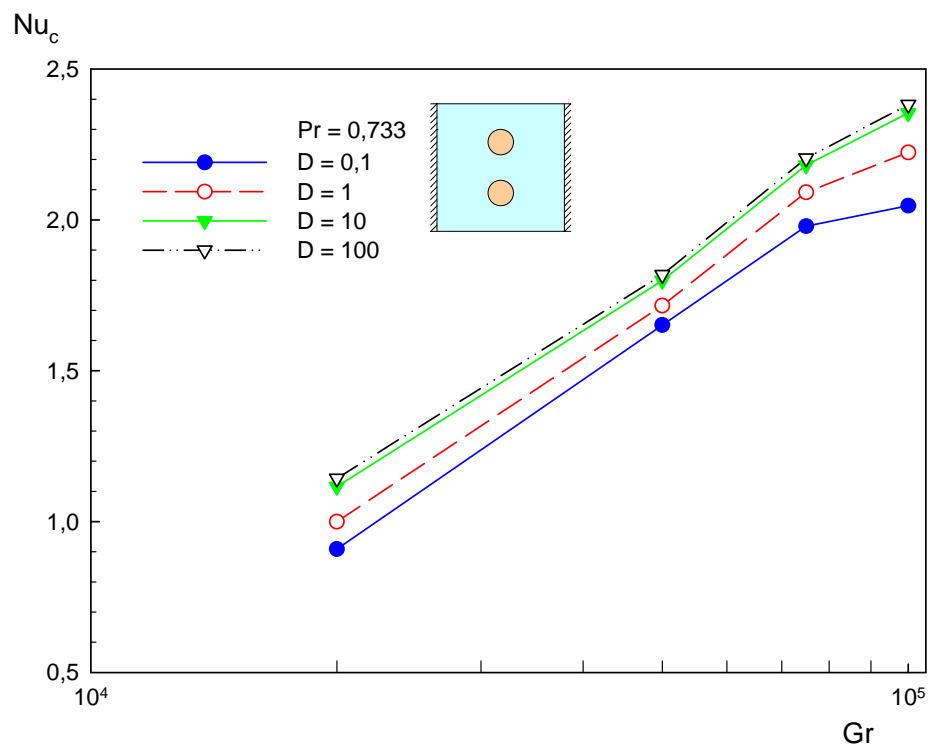


Figura 4.30 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus o número de Grashof,  $Gr$ , caso 4.

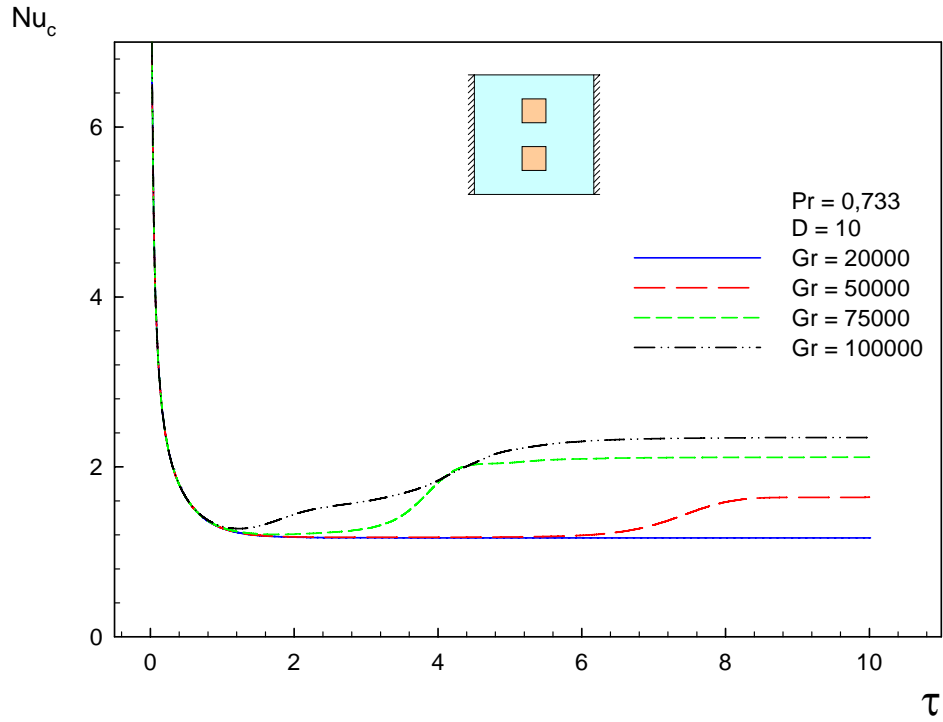


Figura 4.31 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , caso 3.

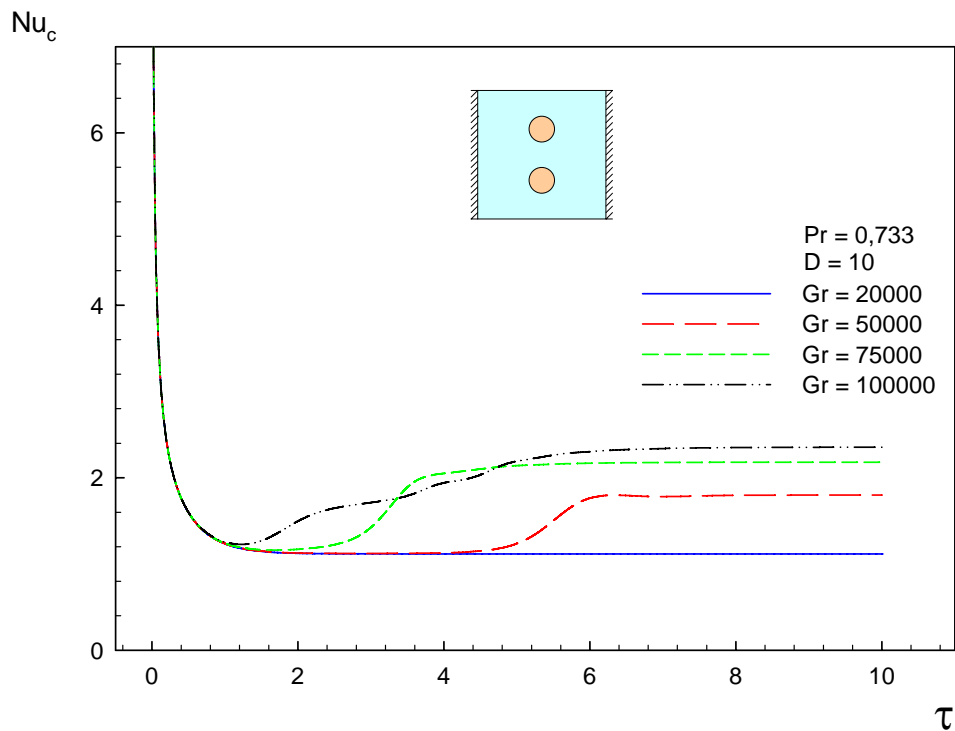


Figura 4.32 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , caso 4.

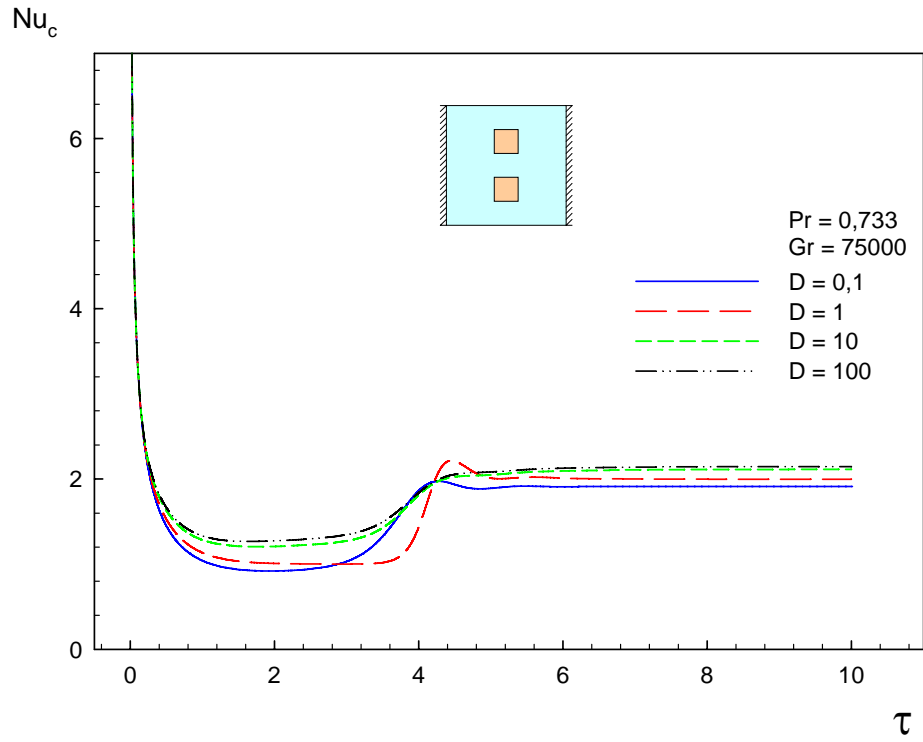


Figura 4.33 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , caso 3

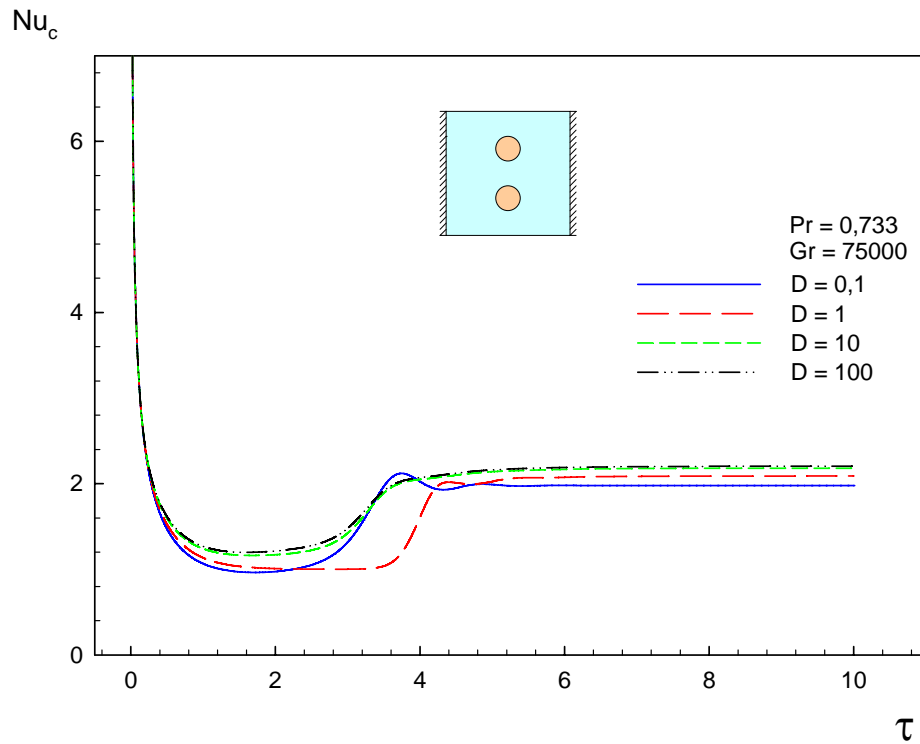


Figura 4.34 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , caso 4

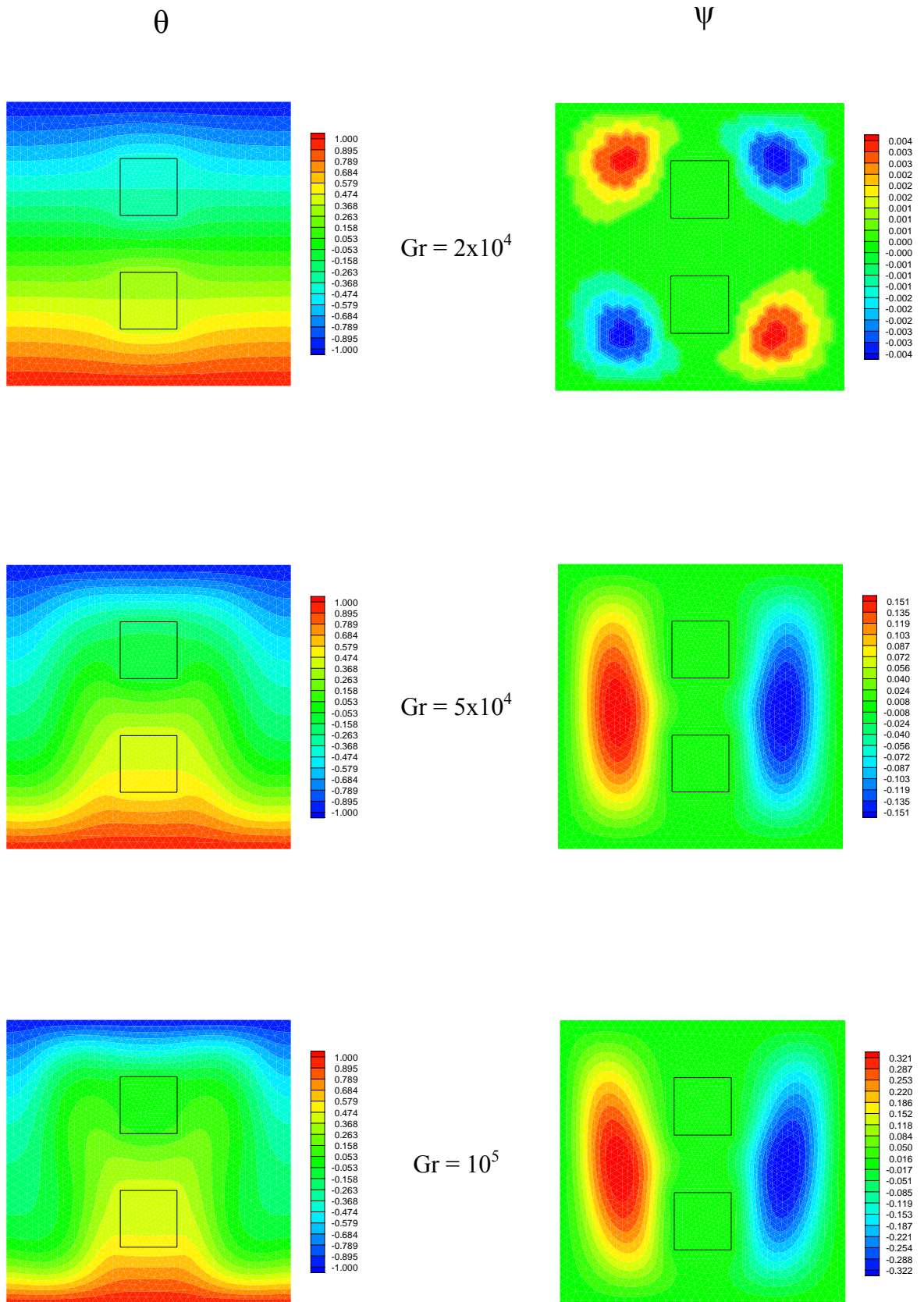


Figura 4.35 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e da função corrente,  $\psi$ , para o caso 3;  $Pr = 0,733$  e  $D = 10$ .

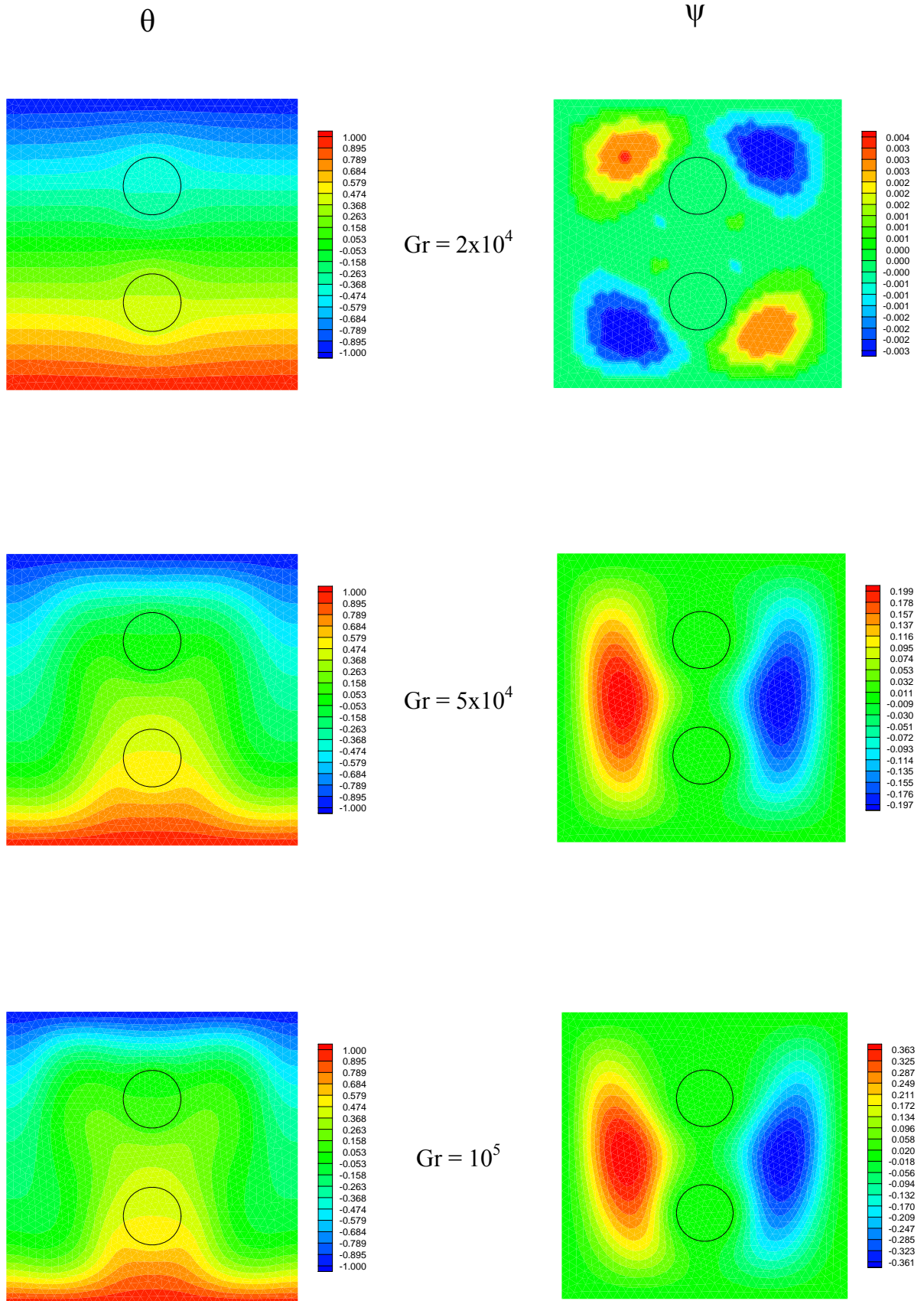


Figura 4.36 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e da função corrente,  $\psi$ , para o caso 4;  $Pr = 0,733$  e  $D = 10$ .



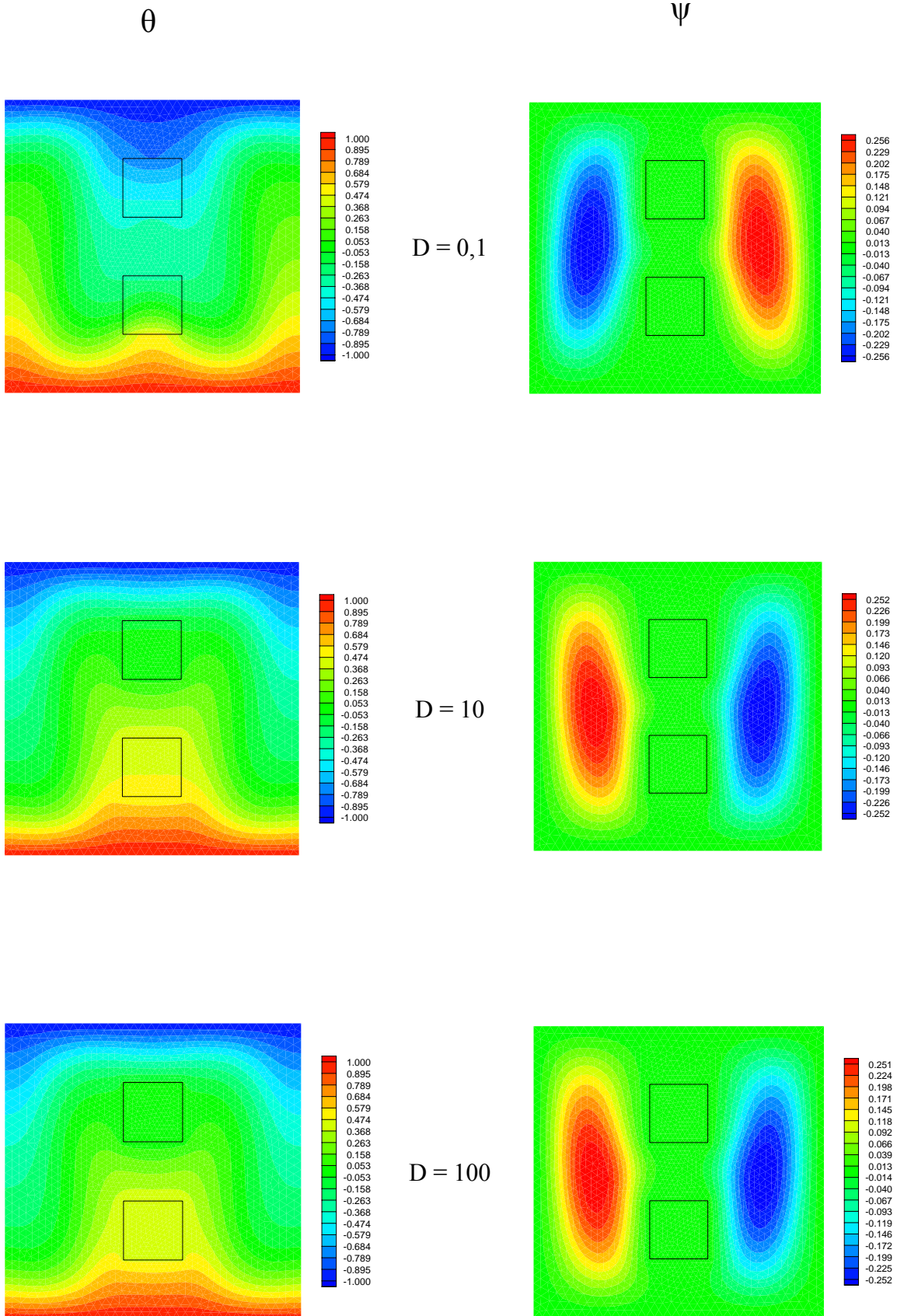


Figura 4.37 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e da função corrente,  $\psi$ , para o caso 3;  $Pr = 0,733$  e  $Gr = 7,5 \times 10^4$ .

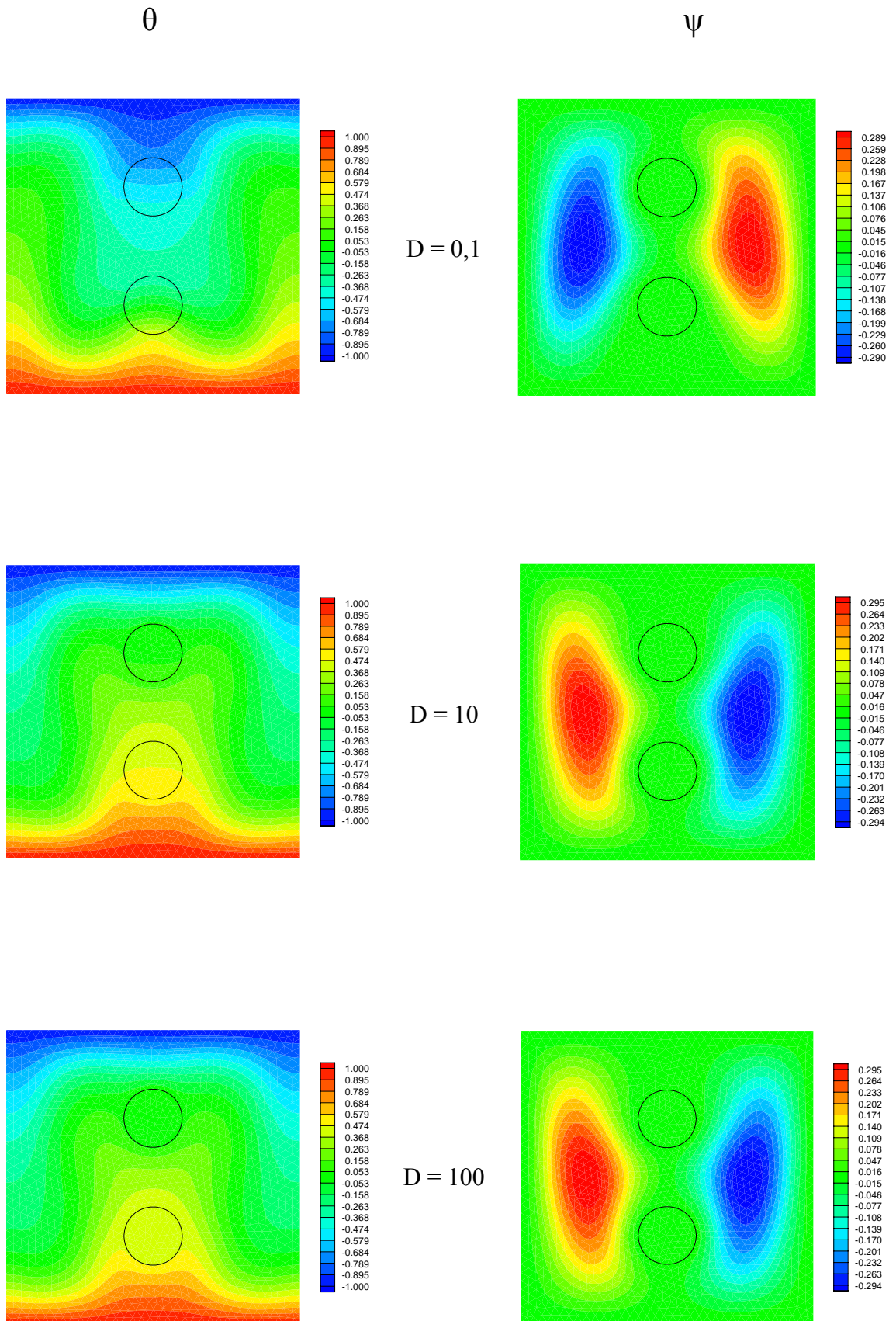


Figura 4.38 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e da função corrente,  $\psi$ , para o caso 4;  $Pr = 0,733$  e  $Gr = 7,5 \times 10^4$ .

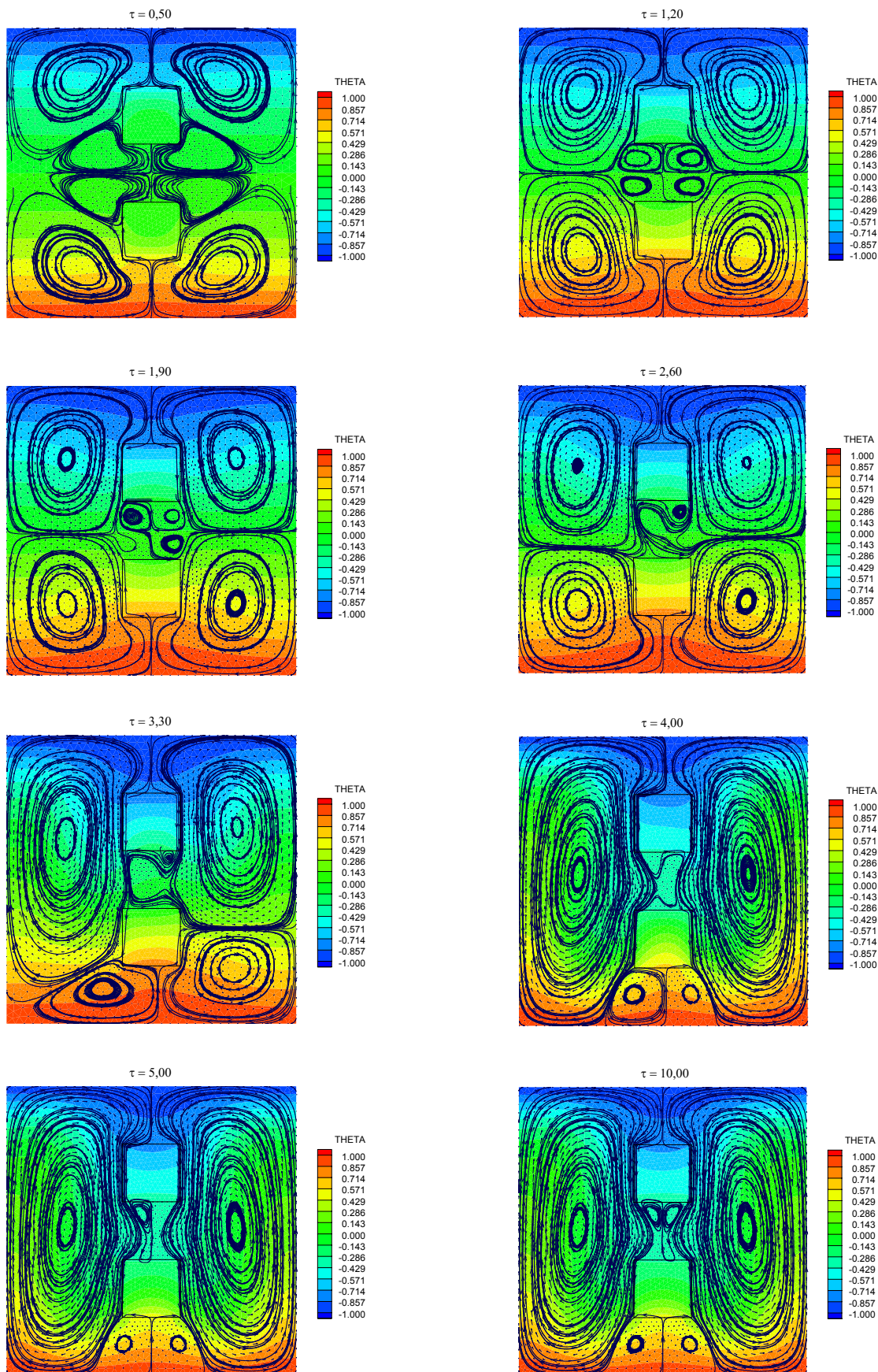


Figura 4.39 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e linhas de corrente,  $\psi$ , para o caso 3; no tempo adimensional,  $\tau$ ;  $Pr = 0,733$ ;  $Gr = 7,5 \times 10^4$  e  $D = 0,1$ .

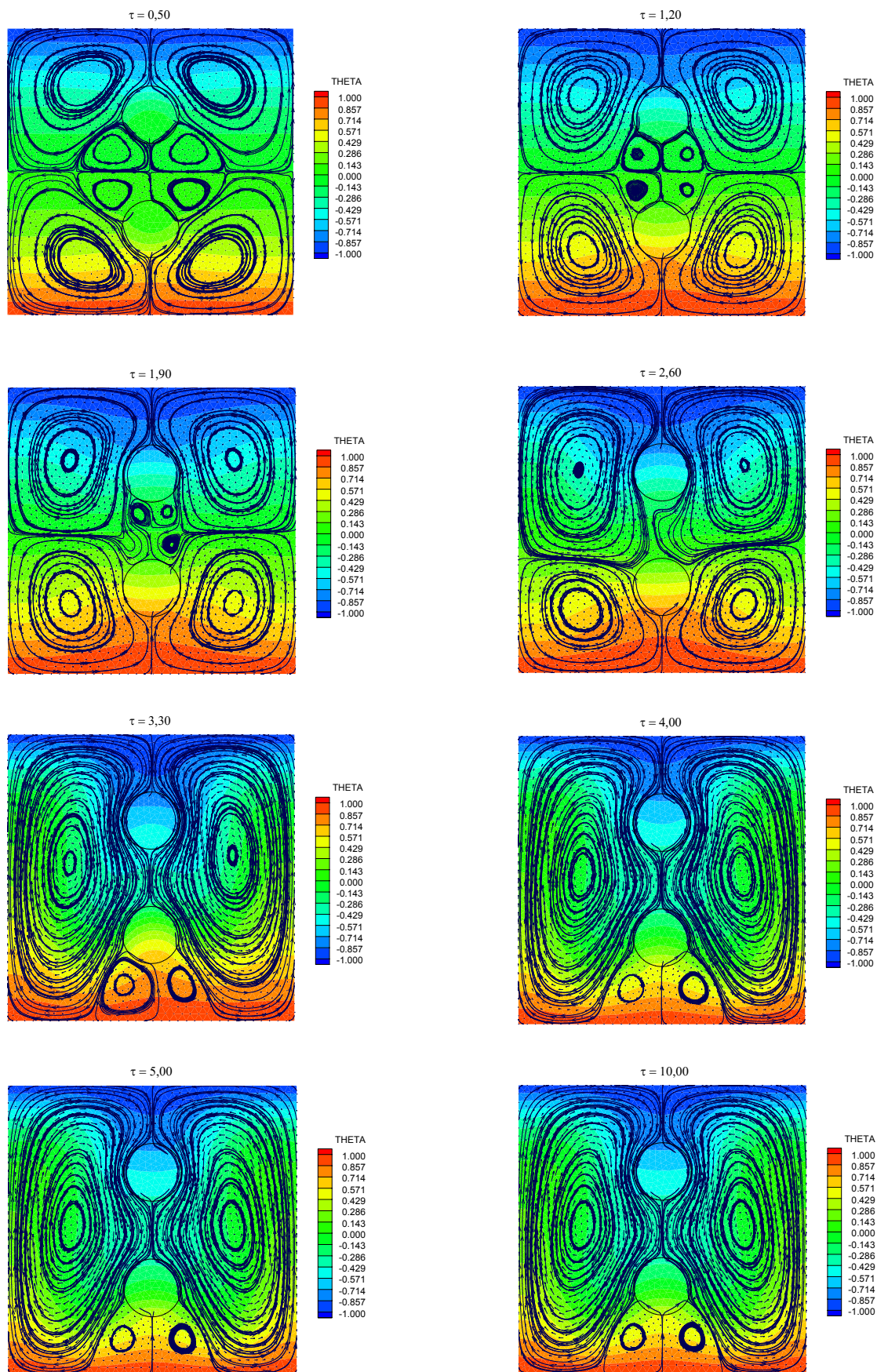


Figura 4.40 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e linhas de corrente,  $\psi$ , para o caso 4; no tempo adimensional,  $\tau$ ;  $Pr = 0,733$ ;  $Gr = 7,5 \times 10^4$  e  $D = 0,1$ .

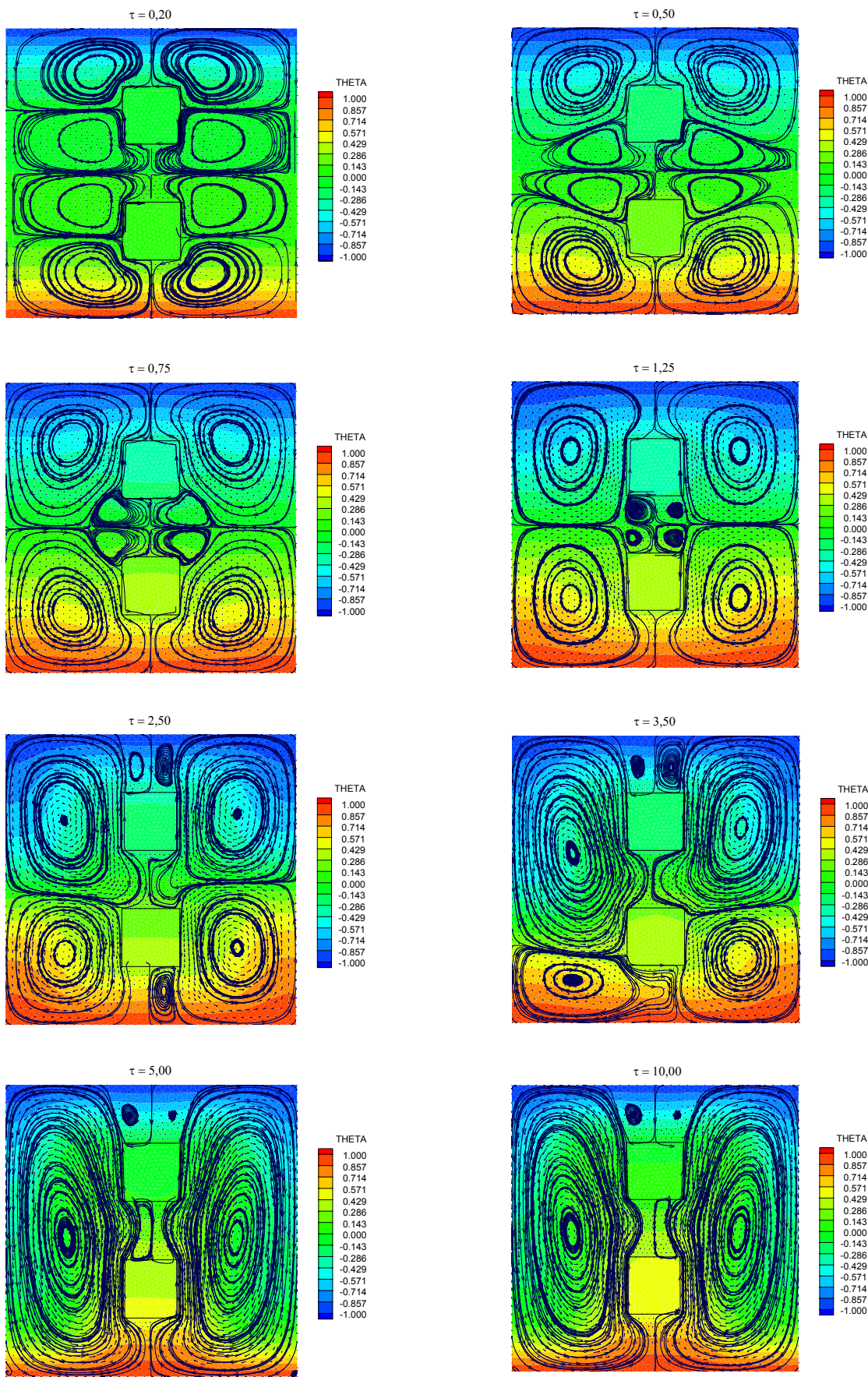


Figura 4.41 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e linhas de corrente,  $\psi$ , para o caso 3; no tempo adimensional,  $\tau$ ;  $Pr = 0,733$ ;  $Gr = 10^5$  e  $D = 10$ .

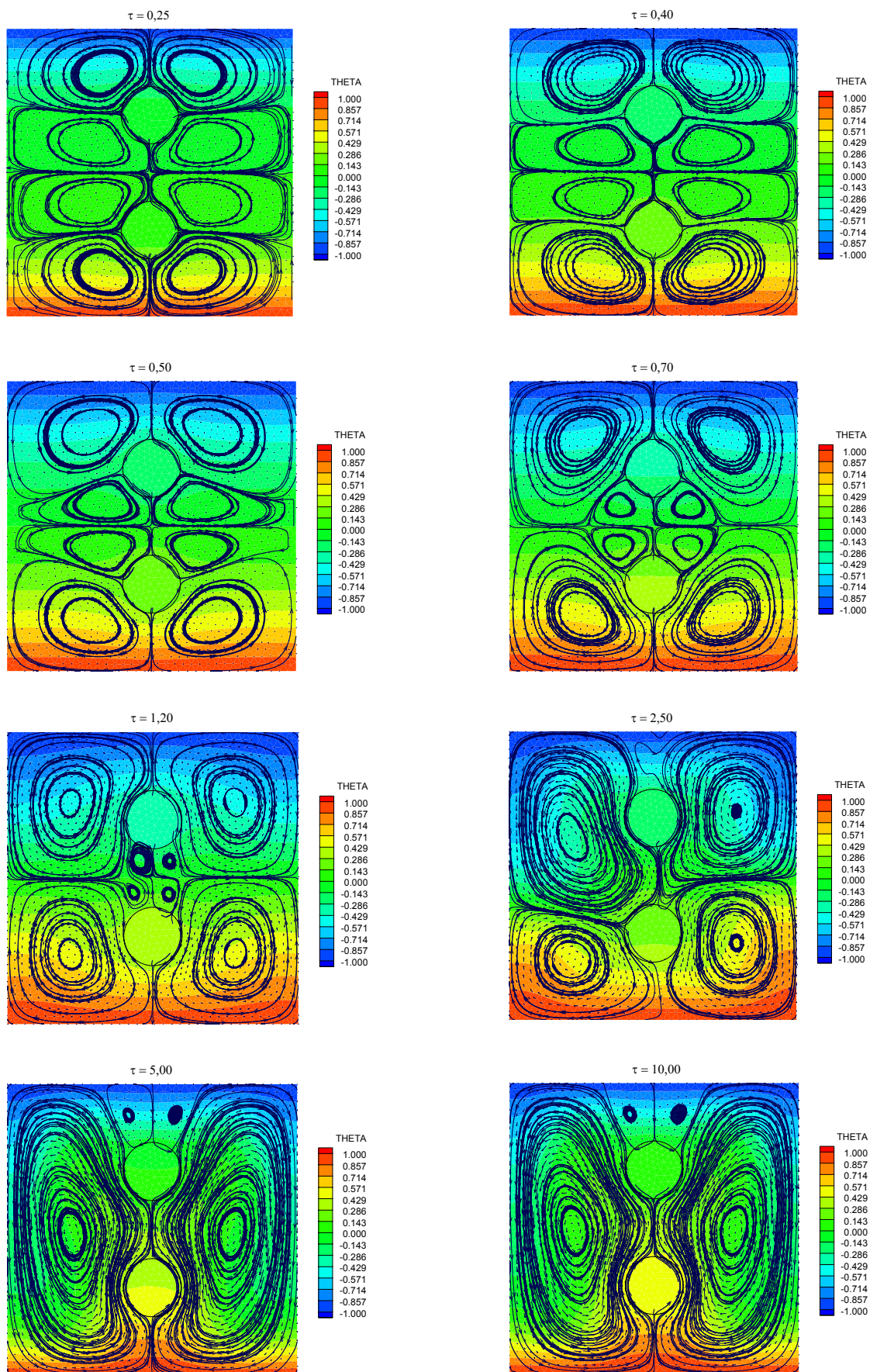


Figura 4.42 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e linhas de corrente,  $\psi$ , para o caso 4; no tempo adimensional,  $\tau$ ;  $Pr = 0,733$ ;  $Gr = 10^5$  e  $D = 10$ .

## Capítulo 5

# CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

## 5.1 – INTRODUÇÃO

No presente trabalho foram estudados quatro casos de convecção natural do fluido no interior de uma cavidade quadrada com a presença de corpos no seu interior.

A análise numérica utilizou o método de elementos finitos, com elementos triangulares e considerou o escoamento laminar, bidimensional, permanente ou não permanente. Foi utilizada a linguagem FORTRAN nos códigos computacionais desenvolvidos e, os mesmos foram validados através de comparações com trabalhos da literatura relacionados à convecção natural em cavidades quadradas.

Os casos 1 e 2 caracterizaram-se por apresentarem cavidade quadrada, com dois corpos em seu interior, sendo um corpo superior e outro inferior. Ambos os casos possuíam as paredes externas isoladas termicamente, portanto, não houve fluxo de calor através das mesmas e, o corpo inferior manteve a sua superfície isotérmica quente,  $T_h$ , enquanto que o corpo superior manteve a sua superfície isotérmica fria,  $T_c$ . A condição inicial era que o fluido estivesse na temperatura  $T_0$ .

A diferença entre os casos 1 e 2 consistiu basicamente na geometria de seus corpos internos, ou seja, no caso 1 os corpos internos eram quadrados enquanto que, no caso 2, os corpos eram circulares.

Para os casos 3 e 4, as cavidades também eram quadradas, as paredes esquerdas e direitas isoladas termicamente enquanto que, a superfície horizontal inferior da cavidade foi mantida numa temperatura alta,  $T_h$ , e a superfície horizontal superior foi mantida em uma temperatura baixa,  $T_c$ . Ambos os casos possuíam corpos em seu interior, um superior e outro inferior, que apresentavam condutividade térmica  $K_s$  e transferiam calor por condução. A condição inicial era que o fluido e os corpos estivessem na temperatura  $T_0$ .

Assim como aconteceu para os casos 1 e 2, a diferença entre os casos 3 e 4 também estava relacionada à geometria dos corpos internos. No caso 3 os corpos internos eram quadrados enquanto que, no caso 4, os corpos eram circulares.

Para todos os casos pretendia-se estudar a convecção natural do fluido (ar) no interior da cavidade. Foram determinadas as distribuições de temperatura, velocidades e função corrente, bem como foi calculado o número de Nusselt médio a partir do qual se pode determinar a taxa de calor transferida.

## 5.2 – CONCLUSÕES PARA OS CASOS 1 E 2

Para os casos 1 e 2, foram utilizados como parâmetros: o número de Grashof variando de  $Gr = 2 \times 10^4$  até  $Gr = 10^5$  e número de Prandtl fixado em  $Pr = 0,733$ .

Verificou-se que o número de Nusselt médio, no regime permanente, é o mesmo na superfície fria,  $Nu_c$ , e na superfície quente,  $Nu_h$ . Os números de Nusselt médio na superfície fria, apresentados nas figuras 4.16 (caso 1) e 4.17 (caso 2), tiveram o seu valor aumentado com o aumento do número de Grashof. Isso ocorreu devido ao aumento da velocidade de circulação do fluido e, conseqüentemente, aumento da troca de calor entre o fluido e a parede.

Comparando-se os casos 1 e 2, para um mesmo número de Grashof, observou-se que o número de Nusselt médio na superfície fria apresentou maiores valores para o caso 2. Isso ocorreu devido ao fato de que a geometria do caso 2 possui corpos internos circulares, sendo portando, mais favorável ao escoamento do fluido.



Conforme verificou-se nas figuras 4.18 (caso 1) e 4.19 (caso 2), para cada número de Grashof analisado, o número de Nusselt médio na superfície fria inicialmente diminuiu com o aumento do tempo adimensional para finalmente estabilizar num valor constante ao atingir o regime permanente. Essa diminuição inicial acentuada do número de Nusselt médio na superfície fria ocorreu devido aos altos gradientes de temperaturas existentes, impostos pelas condições iniciais.

Analisando as figuras 4.20 e 4.22 para o caso 1 e também as figuras 4.21 e 4.23 para o caso 2, verificou-se no regime permanente, a existência de quatro grandes células convectivas, sendo duas rotativas no sentido horário e duas contra-rotativas no sentido anti-horário.

### 5.3 – CONCLUSÕES PARA OS CASOS 3 E 4

Para os casos 3 e 4, foram utilizados como parâmetros: o número de Grashof variando de  $Gr = 2 \times 10^4$  até  $Gr = 10^5$ , razão de difusividades variando de  $D = 0,1$  até  $D = 100$  e número de Prandtl fixado em  $Pr = 0,733$ .

No regime permanente, verificou-se que o número de Nusselt médio é o mesmo na superfície fria,  $Nu_c$ , e na superfície quente,  $Nu_h$ . Fixada a razão de difusividades, o número de Nusselt médio na superfície fria, apresentados nas figuras 4.29 (caso 3) e 4.30 (caso 4), aumentou com o aumento do número de Grashof. Vale a mesma explicação citada anteriormente para os casos 1 e 2, ou seja, esse aumento do número de Nusselt médio na superfície fria ocorreu devido ao aumento da velocidade de circulação do fluido e, conseqüentemente, aumento da troca de calor entre o fluido e a parede.

Fixando-se o número de Grashof, observa-se nas figuras 4.29 (caso 3) e 4.30 (caso 4), o aumento do número de Nusselt médio na superfície fria com o aumento da razão de difusividades. Entretanto, observou-se também, para o mesmo caso (3 ou 4), que existe uma pequena diferença no número de Nusselt médio na superfície fria, para razão de difusividades  $D = 10$  e  $D = 100$ .

Comparando-se os casos 3 e 4, utilizando-se os mesmos número de Grashof e as mesmas razões de difusividades, observou-se que existe uma boa aproximação no resultado do número de Nusselt médio na superfície fria. Entretanto, o caso 4 apresentou maiores

valores para  $Gr \geq 5 \times 10^4$  e  $D \geq 1$ . Para estes casos, a geometria dos corpos internos não teve influência significativa nos resultados obtidos.

Conforme verificou-se nas figuras 4.31 (caso 3) e 4.32 (caso 4), para cada número de Grashof analisado, o número de Nusselt médio na superfície fria inicialmente diminuiu com o aumento do tempo adimensional, apresenta uma pequena elevação (com exceção para  $Gr = 2 \times 10^4$ ) para finalmente estabilizar-se num patamar com valor constante ao atingir o regime permanente. Como ocorreu também nos casos anteriores (1 e 2), essa diminuição inicial acentuada do número de Nusselt médio na superfície fria ocorreu devido aos altos gradientes de temperaturas existentes, impostos pelas condições iniciais.

Podemos concluir, analisando as figuras 4.33 (caso 3) e 4.34 (caso 4), que a razão de difusividades apresenta menor influência no resultado do número de Nusselt em comparação com a influência do número de Grashof.

Analisando as figuras 4.35 (caso 3) e 4.36 (caso 4), verifica-se que, para número de Grashof baixo ( $Gr = 2 \times 10^4$ ), existe uma situação próxima de condução pura de calor, apresentando quatro pequenas células convectivas. Já para altos valores de Grashof ( $Gr = 5 \times 10^4$  e  $Gr = 10^5$ ), formam-se duas grandes células convectivas com sentidos de rotação contrários.

As figuras 4.37 até 4.42 mostram, para ambos os casos (3 e 4) a influência da razão de difusividades ( $D = 0,1$ ;  $D = 10$  e  $D = 100$ ) para altos números de Grashof ( $7,5 \times 10^4$  e  $10^5$ ). Sendo que, as figuras 4.37 e 4.38, apresentam a situação para regime permanente e, as figuras 4.39 até 4.42, apresentam a evolução temporal. Observa-se que em todos os casos, a estabilização no regime permanente apresenta duas grandes células convectivas, uma à esquerda e outra à direita. Para razão de difusividade baixa ( $D = 0,1$ ) a célula da esquerda possui sentido de rotação horário e, a célula da direita, sentido de rotação anti-horário. Esta situação é inversa para razão de difusividades maiores ( $D = 10$  e  $D = 100$ ), onde a célula da esquerda tem sentido de rotação anti-horário e a da direita tem sentido horário.

## 5.4 – RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Com o presente trabalho, pode ser recomendado para estudos futuros:

1) Incluir geração interna nos corpos.

Esta situação é de interesse no resfriamento de componentes eletrônicos.

2) Considerar o efeito da radiação na superfície das paredes e dos corpos.

Para superfícies com temperaturas elevadas, faz-se necessária a consideração do efeito da radiação de calor.

3) Considerar o estudo de convecção natural em cavidades de geometrias complexas, sujeitas a diversos tipos de condições de contorno.

Este tipo de problema é de interesse em aplicações industriais.

4) Incluir casos com paredes condutoras ao invés de paredes isoladas.

Este tipo de condição de contorno pode ser encontrada em diversas aplicações práticas da engenharia.

5) Construir um modelo experimental para comparação com os resultados numéricos do presente trabalho.

## **Apêndice A1**

# **FUNDAMENTOS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

## **A1.1 – INTRODUÇÃO**

O método de elementos finitos é uma importante ferramenta para solução numérica de uma grande parte de problemas na Engenharia. Como aplicações podem ser citadas : cálculo de tensões e deformações em estruturas, análise de tensão de automóveis, aeronaves e pontes, análises de fluxo de calor, escoamento de fluido, fluxo magnético, entre outros problemas. Com os avanços na tecnologia de computação, complexos problemas podem ser modelados com relativa facilidade.

Para problemas que envolvem geometrias e carregamentos complexos e propriedades dos materiais não uniformes, em geral não é possível se obter uma solução matemática analítica. Nestes casos, somente é possível obter uma solução aproximada para os problemas, usando métodos numéricos.

Os problemas físicos são representados, em geral, por equações diferenciais ou sistemas de equações diferenciais. O método de elementos finitos transforma a equação diferencial ou

o sistema de equações diferenciais em um sistema de equações algébricas. O método aproxima os valores das incógnitas a um número de pontos discretos do domínio. O processo de modelagem consiste em discretizar o domínio em pequenos subdomínios chamados de elementos finitos. Ao invés de resolver o problema para todo o domínio de uma só vez, as equações são formuladas para cada elemento e, então, estas são combinadas para se obter a solução em todo o domínio.

Sendo assim, o método de elementos finitos será utilizado para resolver as equações (2.38), (2.39) e (2.40) juntamente com as condições iniciais e de contorno.

## **A1.2 – VANTAGENS E DESVANTAGENS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

Muitas propriedades vantajosas do método de elementos finitos têm contribuído para o seu uso freqüente. Algumas das principais vantagens são:

1. As propriedades dos materiais em elementos adjacentes não precisam ser as mesmas. Isso permite que o método seja aplicado a corpos compostos por diferentes materiais;
2. Fronteiras de formas irregulares podem ser aproximadas usando-se elementos com lados retos, ou usando elementos com contornos curvos;
3. Os elementos podem ter tamanhos variados. Esta propriedade permite que a malha seja expandida ou refinada, conforme haja necessidade;
4. Condições de contorno, como fluxos ou carregamentos superficiais descontínuos, não apresentam dificuldades para o método;
5. Todas as propriedades acima podem ser incorporadas a um software para a resolução de problemas de uma mesma área. Por exemplo, um software para a resolução de problemas de transferência de calor, pode analisar problemas unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais com geometrias complexas.

A principal desvantagem do método de elementos finitos é a necessidade de um computador e softwares específicos. Os cálculos envolvidos no método são numerosos demais para a solução manual até mesmo quando se trata de problemas muito pequenos. A tecnologia atual já tem superado esta dificuldade que era a principal desvantagem do método de elementos finitos, pois têm sido desenvolvidos computadores de pequeno porte que possuem

capacidade suficiente para suportar grande quantidade de cálculos, coisa que era impossível no início da história do computador.

### A1.3 – DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

O domínio é dividido em elementos triangulares e, sendo assim, cada triângulo representa um elemento do domínio. Nos vértices do triângulo existem os nós, ou seja, cada vértice do triângulo corresponde a um único nó ou ponto nodal. Este nó ou ponto nodal pode pertencer a mais de um elemento, dependendo da discretização do domínio. Cada nó está associado a um valor da grandeza  $\phi$ .

A figura A1.1 representa genericamente um domínio no plano (X, Y) discretizado, com as diferentes condições de contorno.

A figura A1.2 representa, no plano (X, Y), o elemento bidimensional com os pontos nodais e a função de forma ou de interpolação linear. Os pontos nodais  $i, j, k$  apresentam coordenadas  $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j)$  e  $(X_k, Y_k)$  e as quantidades escalares  $\phi_i, \phi_j$  e  $\phi_k$ , respectivamente.

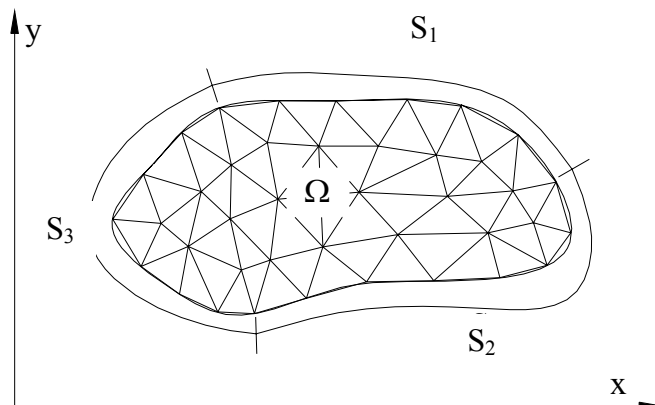


Figura A1.1 – Domínio discretizado e condições de contorno generalizadas

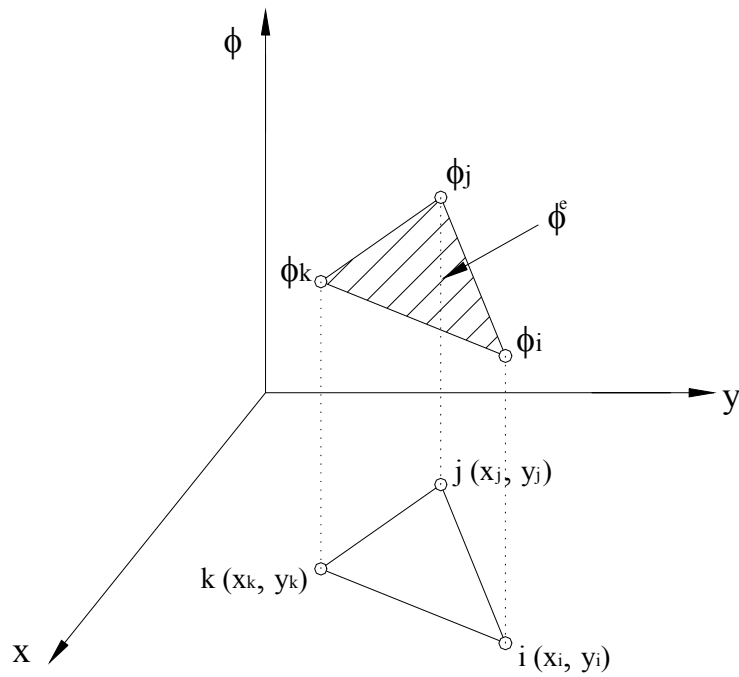


Figura A1.2 – Elemento triangular e função de interpolação

A distribuição da grandeza  $\phi^e$  no elemento varia linearmente, dentro de cada elemento e seu valor escalar é aproximado pela equação linear, como segue:

$$\phi = \phi^e = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y . \quad (\text{A1.1})$$

Para cada ponto nodal i, j, k resulta, respectivamente

$$\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i , \quad (\text{A1.2a})$$

$$\phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j , \quad (\text{A1.2b})$$

$$\phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k . \quad (\text{A1.2c})$$

Resolvendo o sistema de equações (A1.2a), (A1.2b) e (A1.2c), resulta:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} \left[ (X_j Y_k - X_k Y_j) \phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) \phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i) \phi_k \right] , \quad (\text{A1.3a})$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} \left[ (Y_j - Y_k) \phi_i + (Y_k - Y_i) \phi_j + (Y_i - Y_j) \phi_k \right] , \quad (\text{A1.3b})$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} [(X_k - X_j)\phi_i + (X_i - X_k)\phi_j + (X_j - X_i)\phi_k], \quad (\text{A1.3c})$$

sendo A a área do elemento triangular dada por:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}. \quad (\text{A1.4})$$

Substituindo as equações (A1.3a), (A1.3b) e (A1.3c) correspondentes, respectivamente, aos valores de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  na equação (A1.2), resulta na equação do elemento:

$$\phi = \phi^e = N_i\phi_i + N_j\phi_j + N_k\phi_k, \quad (\text{A1.5})$$

sendo  $N_i$ ,  $N_j$  e  $N_k$  são as funções de forma dadas a seguir:

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i X + c_i Y), \quad (\text{A1.6a})$$

$$\text{com } a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \quad b_i = Y_j - Y_k, \quad c_i = X_k - X_j, \quad (\text{A1.6b})$$

$$N_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j X + c_j Y), \quad (\text{A1.6c})$$

$$\text{com } a_j = X_k Y_i - X_i Y_k, \quad b_j = Y_k - Y_i, \quad c_j = X_i - X_k, \quad (\text{A1.6d})$$

$$N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k X + c_k Y), \quad (\text{A1.6e})$$

$$\text{com } a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \quad b_k = Y_i - Y_j, \quad c_k = X_j - X_i. \quad (\text{A1.6f})$$

A equação (A1.5) pode ser escrita na forma matricial:

$$\phi = \phi^e(X, Y) = [N^e] \{\phi^e\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix}, \quad (\text{A1.7})$$

onde se considera que:



$\phi^e = 0$ , fora do elemento,

$\phi^e = N_i\phi_i + N_j\phi_j + N_k\phi_k$ , dentro do elemento e no contorno do elemento.

Como as funções de forma  $N_i$ ,  $N_j$  e  $N_k$  são funções lineares em relação às variáveis  $X$  e  $Y$ , os gradientes nas direções,  $X$  ou  $Y$ , serão constantes em cada elemento.

Os gradientes nas direções  $X$  e  $Y$  são, respectivamente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial N_i}{\partial X} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial X} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial X} \phi_k, \quad (\text{A1.8a})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{\partial N_i}{\partial Y} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial Y} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial Y} \phi_k, \quad (\text{A1.8b})$$

Das equações (A1.6), resulta em:

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial X} = \frac{b_\beta}{2A} \quad (\text{com } \beta = i, j, k) \quad (\text{A1.9a})$$

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial Y} = \frac{c_\beta}{2A} \quad (\text{com } \beta = i, j, k) \quad (\text{A1.9b})$$

Portanto, das equações (A1.8) e (A1.9), tem-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{1}{2A} (b_i\phi_i + b_j\phi_j + b_k\phi_k), \quad (\text{A1.10a})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{1}{2A} (c_i\phi_i + c_j\phi_j + c_k\phi_k). \quad (\text{A1.10b})$$

A seguir, as equações de conservação serão desenvolvidas para obtenção geral das matrizes para os elementos, utilizando o método de elementos finitos. Após essa etapa, o programa computacional será implementado para os casos a serem estudados de convecção natural.

## Apêndice A2

# MÉTODO DE GALERKIN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL EM REGIME NÃO PERMANENTE

### A2.1 – INTRODUÇÃO

Seja a equação diferencial bidimensional em regime não permanente (Segerlind, 1984):

$$\delta \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \quad (\text{A2.1})$$

com as seguintes condições de contorno :

$$\phi = \phi_0(X, Y), \quad (\text{A2.2})$$

$$q = \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial X} + \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad (\text{A2.3})$$

onde  $\phi$  representa uma função escalar;  $\phi_0(X, Y)$  representa uma função especificada no contorno;  $q$  é fluxo de calor normal  $n$  à superfície  $S$  do contorno;  $\lambda$  é um parâmetro de valor constante, e  $\tau$  é o tempo adimensional.

## A2.2 – MÉTODO DE GALERKIN

A equação (A2.1) pode ser escrita da seguinte forma :

$$\delta \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + \left( Q_\phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (\text{A2.4})$$

A integral residual de volume é apresentada na seguinte forma:

$$\{R^e\} = - \int_{V^e} [N^e]^T \left\{ \delta \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + \left( Q_\phi - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) \right\} dV = 0. \quad (\text{A2.5})$$

A equação (A2.5) pode ser escrita como sendo :

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & - \int_{V^e} [N^e]^T \delta \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial X^2} dV - \int_{V^e} [N^e]^T \delta \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial Y^2} dV \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T \left( Q_\phi - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV. \end{aligned} \quad (\text{A2.6})$$

As derivadas devem ser transformadas para as formas de menor ordem, usando a derivada de produto.

Usa-se a seguinte derivada do produto:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) = [N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial X^2} + \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X}. \quad (\text{A2.7})$$

Rearranjando a equação (A2.7), resulta :

$$[N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) - \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X}. \quad (\text{A2.8})$$

Para o segundo termo da equação (A2.6), segue-se o mesmo procedimento:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \right) = [N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial Y^2} + \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y}. \quad (\text{A2.9})$$

Rearranjando a equação (A2.9), resulta :

$$[N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial Y} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \right) - \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y}. \quad (\text{A2.10})$$

Substituindo as equações (A2.8) e (A2.10) em (A2.6), resulta :

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & - \int_{V^e} \left[ \delta \frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) - \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right] dV \\ & - \int_{V^e} \left[ \delta \frac{\partial}{\partial Y} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) - \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dV \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T \left( Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV. \end{aligned} \quad (\text{A2.11})$$

Rearranjando a equação (A2.11), resulta :

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & \int_{V^e} \left[ \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dV \\ & - \int_{V^e} \left[ \delta \frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) + \delta \frac{\partial}{\partial Y} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) \right] dV \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T \left( Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV. \end{aligned} \quad (\text{A2.12})$$

A segunda integral de volume da equação (A2.12) pode ser transformada em uma integral de superfície usando o teorema de Gauss (Olmstead, 1961), resultando :

$$\int_{A^e} \left[ \delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dA. \quad (\text{A2.13})$$

A equação (A2.13) pode ser reduzida para a seguinte forma :

$$\int_{A^e} [N^e]^T \left( \delta \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) dA. \quad (A2.14)$$

Substituindo a equação (A2.3) em (A2.14), vem :

$$\int_{A^e} [N^e]^T \left( \delta \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) dA = \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA. \quad (A2.15)$$

Portanto, a integral residual completa fica na seguinte forma :

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & \int_{V^e} \left[ \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dV - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T \left( Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV. \end{aligned} \quad (A2.16)$$

A função escalar  $\phi^e$  é definida na seguinte forma matricial :

$$\phi^e = [N^e]^T \{ \phi^e \}. \quad (A2.17)$$

As derivadas  $\frac{\partial \phi^e}{\partial X}$  e  $\frac{\partial \phi^e}{\partial Y}$  na primeira integral da equação (A2.16) podem ser substituídas por :

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial X} = \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \{ \phi^e \} \text{ e } \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} = \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \{ \phi^e \}. \quad (A2.18)$$

Portanto, rearranjando as equações (A2.17) e (A2.18) em (A2.16), resulta :

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & \left[ \int_{V^e} \left( \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial [N^e]}{\partial X} + \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial [N^e]}{\partial Y} \right) dV \right] \{ \phi^e \} - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV + \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] \frac{\partial \{ \phi^e \}}{\partial \tau} dV. \end{aligned} \quad (A2.19)$$

$$\text{Definindo, } \left\{ \phi^e \right\} = \frac{\partial \left\{ \phi^e \right\}}{\partial \tau}. \quad (\text{A2.20})$$

Da equação (A2.17),  $\phi^e$  é definida por :

$$\phi^e = \left[ N^e \right]^T \left\{ \phi^e \right\}, \quad (\text{A2.21})$$

com isto, define-se a vetor  $\left\{ g^e \right\}$  como sendo :

$$\left\{ g^e \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \\ \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial X} & \frac{\partial N_j^e}{\partial X} & \frac{\partial N_k^e}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial Y} & \frac{\partial N_j^e}{\partial Y} & \frac{\partial N_k^e}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix} = \left[ B^e \right] \left\{ \phi^e \right\}. \quad (\text{A2.22})$$

Onde a matriz das derivadas das funções de forma  $\left[ B^e \right]$  é dada por:

$$\left[ B^e \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_j}{\partial X} & \frac{\partial N_k}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} & \frac{\partial N_j}{\partial Y} & \frac{\partial N_k}{\partial Y} \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.23})$$

A matriz  $\left[ B^e \right]^T$  é dada por:

$$\left[ B^e \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_i}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial X} & \frac{\partial N_j}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_k}{\partial X} & \frac{\partial N_k}{\partial Y} \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.24})$$

A primeira integral da equação (A2.19), com o uso das equações (A2.23) e (A2.24), pode ser escrita como:

$$\left[ \int_{V^e} \left( \delta \frac{\partial \left[ N^e \right]^T}{\partial X} \frac{\partial \left[ N^e \right]}{\partial X} + \delta \frac{\partial \left[ N^e \right]^T}{\partial Y} \frac{\partial \left[ N^e \right]}{\partial Y} \right) dV \right] \left\{ \phi^e \right\} = \int_{V^e} \delta \left[ B^e \right]^T \left[ B^e \right] dV \left\{ \phi^e \right\}. \quad (\text{A2.25})$$

A última integral da equação (A2.19), com o uso da equação (A2.20), pode ser escrita como :

$$\int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] \left\{ \dot{\phi}^e \right\} dV = [C]^e \left\{ \dot{\phi}^e \right\}, \quad (\text{A2.26})$$

onde :

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV. \quad (\text{A2.27})$$

Substituindo as equações (A2.25) e (A2.26) em (A2.19), resulta :

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & \left[ \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV \right] \{\phi^e\} - \int_{A^E} [N^e]^T q^e dA \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV + [C]^e \left\{ \dot{\phi}^e \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A2.28})$$

Onde:

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV, \quad (\text{A2.29})$$

$$[K]^e = \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV, \quad (\text{A2.30})$$

$$\{F\}^e = \int_{A^e} -[N^e]^T q^e dA, \quad (\text{A2.31})$$

$$\{E\}^e = \int_{V^e} -[N^e]^T Q_\phi^e dV. \quad (\text{A2.32})$$

Fazendo a minimização de  $\{R^e\}$ , tem-se :

$$\{R\} = \sum_{e=1}^E \{R^e\} = 0. \quad (\text{A2.33})$$

Logo, substituindo (A2.28) em (A2.33), resulta :

$$\begin{aligned} \{R\} = & \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV \right] \{\phi^e\} + \sum_{e=1}^E \left[ \int_{A^e} -[N^e]^T q^e dA \right] \\ & + \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^e} -[N^e]^T Q_\phi^e dV \right] + \sum_{e=1}^E [C^e \left\{ \dot{\phi}^e \right\}] = 0. \end{aligned} \quad (A2.34)$$

A equação (A2.34) pode ser escrita na seguinte forma condensada :

$$\{R\} = [C] \left\{ \dot{\phi} \right\} + [K] \{\phi\} + \{E\} + \{F\} = 0, \quad (A2.35)$$

onde :

$$[C] = \sum_{e=1}^E [C]^e = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV \right], \quad (A2.36)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^E [K]^e = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV \right], \quad (A2.37)$$

$$\{E\} = \sum_{e=1}^E \{E\}^e = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^e} -[N^e]^T Q_\phi^e dV \right], \quad (A2.38)$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^E \{F\}^e = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{A^e} -[N^e]^T q^e dA \right]. \quad (A2.39)$$

### A2.3 – APROXIMAÇÃO DOS TERMOS $\left\{ \dot{\phi} \right\}$ E $\{\phi\}$

O termo  $\left\{ \dot{\phi} \right\}$  na equação (A2.35) será aproximado usando diferenças finitas para frente, na seguinte forma:

$$\left\{ \dot{\phi} \right\} = \frac{1}{\Delta\tau} (\{\phi\}_{N+1} - \{\phi\}_N), \quad (A2.40)$$

onde:



$\{\phi\}_{N+1}$  é a distribuição de  $\phi$  obtida no tempo  $\tau_{N+1}$  ;

$\{\phi\}_N$  é a distribuição de  $\phi$  obtida no tempo  $\tau_N$  ;

$\Delta\tau$  é o incremento de tempo dado por  $\Delta\tau = \tau_{N+1} - \tau_N$  .

O termo  $\{\phi\}$  na equação (A2.35) será avaliado no tempo  $\tau_{N+1}$  , isto é:

$$\{\phi\} = \{\phi\}_{N+1}. \quad (\text{A2.41})$$

Substituindo (A2.40) e (A2.41) em (A2.35), vem:

$$\left[ [\mathbf{K}] + \frac{1}{\Delta\tau} [\mathbf{C}] \right] \{\phi\}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [\mathbf{C}] \{\phi\}_N - \{\mathbf{E}\} - \{\mathbf{F}\}, \quad (\text{A2.42})$$

definindo:

$$\{\mathbf{R}\} = \{\mathbf{E}\} + \{\mathbf{F}\}. \quad (\text{A2.43})$$

De (A2.42) e (A2.43), vem:

$$\left[ [\mathbf{K}] + \frac{1}{\Delta\tau} [\mathbf{C}] \right] \{\phi\}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [\mathbf{C}] \{\phi\}_N - \{\mathbf{R}\}. \quad (\text{A2.44})$$

## Apêndice A3

# NÚMERO DE NUSSELT MÉDIO E LOCAL

## A3.1 – INTRODUÇÃO

Neste apêndice são apresentadas as equações para cálculo do número de Nusselt local,  $Nu_L$ , e do número de Nusselt médio,  $Nu$ .

## A3.2 – NÚMEROS DE NUSSELT

Os números de Nusselt local e médio são definidos, respectivamente, por:

$$Nu_L = \frac{h_L H}{K_f} \quad (A3.1)$$

$$Nu = \frac{h H}{K_f} \quad (A3.2)$$

Sendo  $h_L$  o coeficiente de convecção local,  $h$  o coeficiente médio,  $H$  a altura da cavidade quadrada e  $K_f$  a condutividade térmica do fluido.

Da lei do resfriamento de Newton, o coeficiente de convecção local é relacionado ao fluxo de calor local ( $q$ ) pela equação:

$$h_L = \frac{q}{T_h - T_c} \quad (\text{A3.3})$$

Pelo teorema do valor médio, o coeficiente de convecção médio ( $h$ ) na superfície  $S$  (mostrada na figura A3.1), é dado por:

$$h = \frac{1}{S} \int_S h_L \, dS \quad (\text{A3.4})$$

sendo  $S$  a área da superfície mostrada na figura A3.1.

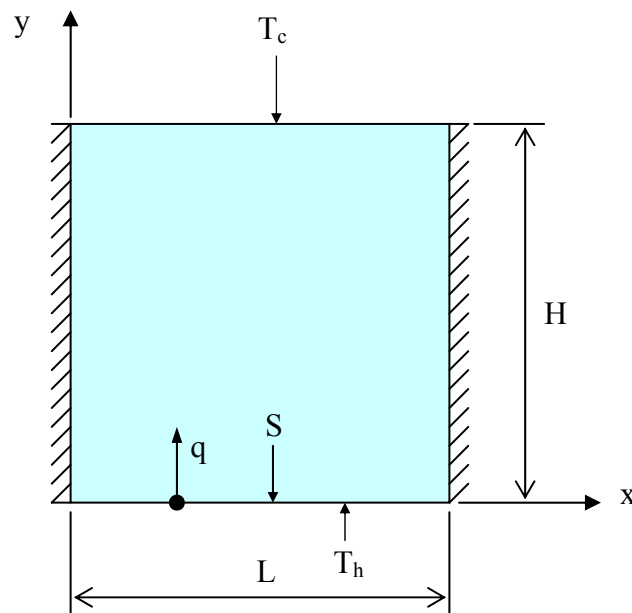


Figura A3.1 – Geometria mostrando o fluxo de calor na superfície  $S$ .

Da lei de Fourier, o fluxo de calor na direção  $y$  (ver figura A3.1) é dado por:

$$q = -K_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_s. \quad (\text{A3.5})$$

Substituindo (A3.5) em (A3.3), vem

$$h_L = \frac{q}{T_h - T_c} = - \frac{H}{T_h - T_c} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_s. \quad (\text{A3.6})$$

Substituindo (A3.6) em (A3.1), vem

$$\text{Nu}_L = \frac{h_L H}{K_f} = - \frac{H}{T_h - T_c} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_s. \quad (\text{A3.7})$$

Sendo por definição:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_h - T_0}, \quad Y = \frac{y}{H} \quad \text{e} \quad T_0 = \frac{T_h - T_c}{2} \quad (\text{A3.8})$$

Das equações (A3.7) e (A3.8), resulta

$$\text{Nu}_L = - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_s. \quad (\text{A3.9})$$

De modo geral a equação (A3.9) pode ser escrita como

$$\text{Nu}_L = - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_s, \quad (\text{A3.10})$$

sendo  $n$  a direção normal à superfície  $S$ .

O número de Nusselt médio na superfície  $S$  é calculado pelo teorema do valor médio como

$$\text{Nu} = \frac{1}{S} \int_S \text{Nu}_L \, dS. \quad (\text{A3.11})$$

## **Apêndice A4**

# **MÉTODO MATRICIAL PARA O CÁLCULO DA VORTICIDADE NO CONTORNO**

## **A4.1 – INTRODUÇÃO**

No caso de problemas onde a geometria é complexa ou a malha não é uniforme, existe grande dificuldade para calcular a vorticidade no contorno dada pela equação (2.34), para os casos de convecção natural.

Mostra-se no item A4.2 seguinte, uma maneira alternativa de se calcular a vorticidade no contorno para os casos de convecção natural.

## **A4.2 – CÁLCULO DA VORTICIDADE NO CONTORNO**

Apresenta-se a seguir, o desenvolvimento teórico para se calcular a vorticidade nos pontos nodais do contorno.

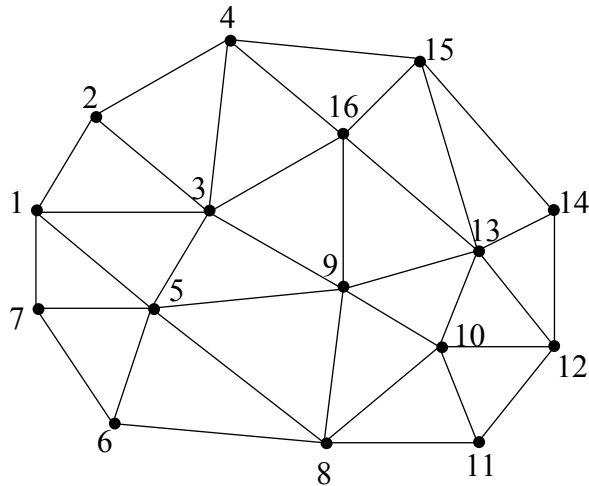


Figura A4.1 – Pontos nodais internos e do contorno.

A figura A4.1 mostra uma geometria bidimensional com a numeração de todos os pontos nodais.

Os pontos nodais com numeração: 1, 2, 4, 15, 14, 12, 11, 8, 6 e 7 fazem parte do contorno e os pontos nodais 5, 3, 9, 10, 13 e 16 são pontos internos.

O sistema matricial do elemento para a função corrente  $\psi$  é dado pela equação (3.58), como sendo:

$$[K_{\psi}]^e \{ \psi^e \} = -\{ R_{\psi} \}^e \quad . \quad (A4.1)$$

O vetor  $\{ R_{\psi} \}^e$  pode ser obtido das equações (3.61) e (3.62) como:

$$\{ R_{\psi} \}^e = -\frac{A}{12} \begin{Bmatrix} (2\omega_i + \omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + 2\omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + \omega_j + 2\omega_k) \end{Bmatrix} = -\frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} \quad . \quad (A4.2)$$

Mas, da equação (3.66), tem-se:

$$[C]^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A4.3})$$

Assim, das equações (A4.2) e (A4.3), vem que:

$$\{R_\psi^e\} = -[C^e] \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} = -[C^e] \{\omega^e\}. \quad (\text{A4.4})$$

Substituindo (A4.4) na equação (A4.1), vem:

$$[K_\psi^e] \{\psi^e\} = [C^e] \{\omega^e\}. \quad (\text{A4.5})$$

Definindo o vetor  $\{B^e\}$  como:

$$\{B^e\} = [K_\psi^e] \{\psi^e\}. \quad (\text{A4.6})$$

Assim, das equações (A4.5) e (A4.6), vem que:

$$[C^e] \{\omega^e\} = \{B^e\}. \quad (\text{A4.7})$$

A partir da equação (A4.7) para o elemento, obtém-se a seguinte equação na forma global.

$$[C] \{\omega\} = \{B\}. \quad (\text{A4.8})$$

Aplicando a condição de contorno de vorticidade conhecida nos pontos internos, a equação (A4.8) é modificada, podendo ser escrita como:

$$[C'] \{\omega\} = \{B'\}. \quad (\text{A4.9})$$

Resolvendo o sistema dado pela equação (A4.9), obtemos a distribuição das vorticidades no contorno  $\omega_M$ .

Pode ser observado que neste método de cálculo, a vorticidade nos pontos nodais do contorno, pode ser obtida quando se conhece a função corrente em todos os pontos nodais e a vorticidade nos pontos nodais interiores.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

**BAE J. H., HYUN J. M., (2003)**, “Time-Dependent Buoyant Convection in an Enclosure With Discrete Heat Sources”, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 43, pp. 3-11.

**BASAK, T., ROY, S., BALAKRISHNAN, A. R., (2006)**, “Effects of Thermal Boundary Conditions on Natural Convection Flows Within a Square Cavity”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, pp. 4525-4535.

**BRITO, F. B., (1999)**, “*Simulação Numérica da Transferência de Calor e do Escoamento de Fluidos*”, Dissertação de Mestrado, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, 162 p.

**CESINI, G., PARONCINI, M., CORTELLA, G., MANZAN, M., (1999)**, “Natural Convection From a Horizontal Cylinder in a Rectangular Cavity”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 1801-1811.

**FIGUEREDO, J. R., GANZAROLLI, M. M., ALMEIDA, P. I. F., (1986)**, “Convecção Natural em Cavidades Retangulares – Solução Numérica”, *II Congresso Latino-Americano de Transferência de Calor e Matéria*, São Paulo, pp. 62-73.

**GANZAROLI, M. M., MILANEZ, L. F., (1995)**, “Natural Convection in Rectangular Enclosures Heated From Below and Symmetrically Cooled From the Sides”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, pp. 1063-1073.

**GHADDAR, N. K., (1992)**, “Natural Convection Heat Transfer Between a Uniformly Heated Cylindrical Element and its Rectangular Enclosure”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 2327-2334.

- KUMAR DE, A., DALAL, A., (2006)**, “A Numerical Study of Natural Convection Around a Square, Horizontal, Heated Cylinder Placed in an Enclosure”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, pp. 4608-4623.
- KUROKAWA, F. Y., ZAPAROLI, E. L., ANDRADE C. R., (2005)**, “Conjugate Natural Convection Applied to the Electronic Component Cooling”, *Proceedings of the 18th International Congress of Mechanical Engineering*, Ouro Preto, MG, CD-ROM, pp. 1-8.
- MENON, G. J., (1984)**, “*Convecção Natural no Interior de Coletores Solares Concentradores de Parábolas Compostas*”, Tese de Doutorado, ITA, São José dos Campos, 230 p.
- OLMSTEAD, J. M. H., (1961)**, “*Advanced Calculus*”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 706 p.
- OZOE, H., YAMAMOTO, K., SAYAMA, H., CHURCHILL, S. W., (1974)**, “Natural Circulation in an Inclined Rectangular Channel Heated on One Side and Cooled on the Opposing Side”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 17, pp. 1209-1217.
- SASAGUCHI, K., KUWABARA, K., KUSANO, K., KITAGAWA, H., (1998)**, “Transient Cooling of Water Around a Cylinder in a Rectangular Cavity – A Numerical Analysis of the Effect of the Position of the Cylinder”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, pp. 3149-3156.
- SEGERLIND, L. J., (1984)**, “*Applied Finite Element Analysis*”, John Wiley & Sons Inc., 2<sup>a</sup> ed., New York, 448 p.
- SEZAI, I., MOHAMAD A. A., (2000)**, “Natural Convection From a Discrete Heat Source on The Bottom of a Horizontal Close ”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 2257-2266.
- SOUZA, J. J., (2006)**, “*Simulação Numérica da Transferência de Calor por Convecção Forçada, Natural e Mista numa Cavidade Retangular*”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Engenharia de Itajubá, 165 p.

**TABARROK, B., LIN, R. C., (1977)**, “Finite Element Analysis of Free Convection Flow”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 20, pp. 945-952.

**VALENCIA, A., FREDERICK, R. L., (1989)**, “Heat Transfer in Square Cavities with Partially Active Vertical Walls”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 32, pp. 1567-1574.

**WONG, H. H., G. D. RAITHBY, (1979)**, “Improved Finite – Difference Methods Based on a Critical Evaluation of the Aproximation Erros”, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 2, pp. 139-163.

**ZIENKIEWICZ, O. C., (1971)**, “*The Finite Element Method in Engineering Science*”, McGraw – Hill, London, 521 p.