

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DANIEL MATUMONA MULATO

Estudo Sobre a Validade da Transformada Óptica Quase-Conforme

Itajubá - MG

2018

DANIEL MATUMONA MULATO

Estudo Sobre a Validade da Transformada Óptica Quase-Conforme

Versão original

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Itajubá para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Microeletrônica

Versão corrigida contendo as alterações solicitadas pela comissão julgadora em 27 de Novembro de 2018. A versão original encontra-se em acervo reservado na Biblioteca MAUÁ-UNIFEI e na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UNIFEI.

Orientador: Prof. Dr. Mateus Augusto Faustino Chaib Junqueira

Coorientador: Prof. Dr. Danilo Henrique Spadoti

Itajubá - MG

2018

Dissertação de autoria de Daniel Matumona Mulato, sobre o título “**Estudo Sobre a Validade da Transformada Óptica Quase-Conforme**”, apresentada à Universidade Federal de Itajubá-MG, para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, na área de concentração Microeletrônica, aprovada em 27 de Novembro de 2018 pela comissão julgadora constituída pelos doutores:

Prof. Dr. Mateus Augusto Faustino Chaib Junqueira

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Presidente

Prof. Dr. Felipe Beltrán Mejía

Instituto Nacional de Telecomunicações - INATEL

Prof. Dr. Gustavo Della Colletta

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Prof. Dr. Danilo Henrique Spadoti

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Ao meu Pai Diassonama Mulato e minha Mãe Nzuzi Isabel que sempre me ensinaram como trilhar o caminho da verdade e investem cada dia na minha vida para que eu me torne uma pessoa melhor, responsável, sábia e acima de tudo capacitado com bons costumes morais para ser útil e fazer a diferença nesta sociedade.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela sua graça abundante, pela sua misericórdia e pelo seu imensurável amor na minha vida, sem o qual não chegaria até este nível.

Agradeço ao meu orientador Mateus Augusto Faustino Chaib Junqueira que sempre foi muito paciente comigo, usando metodologias para que eu pudesse aprender, uma vez que eu não tinha conhecimento sobre o assunto; Obrigado pelos conselhos, ensinamentos, confiança e valiosa orientação. Deus te abençoe e lhe dê mais sabedoria.

Agradeço a minha família pelo convívio, confiança, amizade e companheirismo, em especial aos meus pais Diassonama Mulato e Nzuzi Isabel pelo incentivo, amor, compreensão e apoio constante.

Ao professor Dr. Danilo Henrique Spadoti pela orientação na realização deste trabalho.

Agradecimento especial aos meus irmãos e irmãs do continente Africano pelo apoio prestado em todos os momentos pois vocês nunca me deixaram desamparado.

Ao meu grande amigo Pastor Flávio Barbosa e toda sua família assim como os irmãos em Cristo da Igreja Santificação e Paz meus sinceros agradecimentos.

Aos meus amigos e colegas da Graduação e do Mestrado que me acolheram para que eu pudesse me integrar no curso.

Agradecimentos profundos a minha namorada Ana Carolina Vivian dos Reis, bem como a sua família pelo carinho e apoio na finalização deste trabalho.

Ao professor Dr. José Antônio Justino Ribeiro, pelas valiosas contribuições neste trabalho.

Ao professor Dr. Tales Cleber Pimenta pela oportunidade, ajuda e compreensão em tempos adversos.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro para os meus estudos.

“Dá instrução ao sábio, e ele se fará mais sábio; ensina o justo e ele crescerá em entendimento. O temor do Senhor é o princípio da sabedoria, e o conhecimento do

Santo a prudência”

(Provérbios 9: 9 - 10)

Resumo

Mulato, Daniel Matumona. **Estudo Sobre a Validade da Transformada Óptica Quase-Conforme**: Transformada Óptica. 2018. 55 f. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica), Universidade Federal de Itajubá, Minas Gerais, Brasil, 2018.

A transformada óptica quase-conforme (QCTO) é uma técnica que emprega transformações de coordenadas para o projeto de dispositivos eletromagnéticos e para o controle da propagação de ondas eletromagnéticas, tais como: guias de onda e mantos de invisibilidade. Geralmente, a QCTO resulta em um meio óptico com um índice de refração não-homogêneo. A dedução deste índice de refração considera que a equação de Helmholtz pode ser aplicada em um meio não-homogêneo. No entanto, a partir do eletromagnetismo clássico, é conhecido que a equação de Helmholtz não pode ser empregada em meios não-homogêneos. Portanto, este trabalho estuda a validade da aplicação da QCTO para o projeto de dispositivos eletromagnéticos, assim como, sua capacidade no controle da propagação das ondas eletromagnéticas. Os resultados indicam que a QCTO funciona perfeitamente para o modo TE, porém o funcionamento para o modo TM não é garantido, exceto se o gradiente do índice de refração for desprezível.

Palavras-chaves: Transformada Óptica Quase-Conforme, Equação de Helmholtz, Meios Não-Homogêneos.

Abstract

Mulato, Daniel Matumona. **Study on the Quasi-Conformal Transformation Optics Validity**: Transformation Optics. 2018. 55 p. (Dissertation of Master in Electrical Engineering) – Federal University of Itajubá, Minas Gerais, Brazil, 2018

The quasi-conformal transformation optics (QCTO) is a technique that uses coordinate transformations for the design of electromagnetic devices and control the propagation of electromagnetic waves, such as wave guides and invisibility cloaks. Generally, the QCTO results in an optical medium with a nonhomogeneous refractive index. The deduction of this refractive index considers that the Helmholtz equation can be applied in a nonhomogeneous medium. However, from classical electromagnetism, it is known that the Helmholtz equation can not be used in a nonhomogeneous medium. Therefore, this work studies the validity of the application of the QCTO for the design of electromagnetic devices, as well as its capacity to control the propagation of electromagnetic waves. The results indicate that the QCTO works perfectly for the TE mode, but operation for the TM mode is not guaranteed unless the gradient of the refractive index is negligible.

Keywords: Quasi-Conformal Optical Transform, Helmholtz Equation, Non-Homogeneous Means.

Lista de figuras

- Figura 1 – Transformação de Coordenadas Conforme (JUNQUEIRA, Tese de Doutorado - UNIFEI. 2015). O ângulo reto no sistema de coordenada original é mantido após a transformação conforme. 23
- Figura 2 – Exemplo de metamaterial (BARROS, 2012). As células elementares conferem as propriedades físicas incomuns como anisotropia e índice de refração negativo. 24
- Figura 3 – Ilustração do princípio de Fermat(ZILIO, 2009). O caminho da luz percorre a menor distância óptica a qual é medida com a equação 2.5. 27
- Figura 4 – Efeito da QCTO. O vetor campo é transladado conforme a transformação de coordenadas mantendo sua magnitude. 36
- Figura 5 – Exemplos de guias de onda estudados. a) Perfil do índice de refração do guia de onda curvo de 90° . b) Perfil do índice de refração do guia de onda curvo S com expansão de 50%. 42
- Figura 6 – Simulação das componentes de campo do modo TE nos guias de onda sem transformação, guia de onda curvo de 90° e guia de onda curvo em S com expansão de 50% respectivamente. a) Campo E_z normalizado; b) Campo H_x normalizado; c) Campo H_y normalizado. 44
- Figura 7 – Simulação dos componentes de campo do modo TE nos guias de onda sem transformação, guia de onda curvo de 90° e guia de onda curvo em S com expansão de 50% respectivamente. a) Norma do campo elétrico $|\vec{E}|$; b) Norma do campo magnético $|\vec{H}|$. 45

Figura 8 – Simulação das componentes de campo do modo TM nos guias de onda sem transformação, guia de onda curvo de 90° e guia de onda curvo em S com expansão de 50% respectivamente. a) Campo E_z normalizado; b) Campo H_x normalizado; c) Campo H_y normalizado. 47

Figura 9 – Simulação dos componentes de campo do modo TM nos guias de onda sem transformação, guia de onda curvo de 90° e guia de onda curvo em S com expansão de 50% respectivamente. a) Norma do campo magnético $|\vec{H}|$; b) Norma do campo elétrico $|\vec{E}|$. 48

Lista de abreviaturas e siglas

TO	Transformada Óptica
QCTO	Quasi-Conformal Transformation Optic (Transformada Óptica Quase-Conforme)
2D	Duas Dimensões
3D	Três Dimensões
TE	Modo Transversal Elétrico (Significa que o Campo Elétrico é Transversal e o Campo Magnético tem uma componente na direção de Propagação)
TM	Modo Transversal Magnético (Significa que o Campo Magnético é Transversal e o Campo Elétrico tem uma componente na direção de Propagação)

Lista de símbolos

μ	Permeabilidade Magnética do Meio
μ_0	Permeabilidade Magnética do Vácuo
μ'	Permeabilidade Magnética do Meio Não-Homogêneo
μ_r	Permeabilidade Magnética Relativa
ϵ	Permissividade Elétrica do Meio
ϵ_0	Permissividade Elétrica do Vácuo
ϵ'	Permissividade Elétrica do Meio Não-Homogêneo
ϵ_r	Permissividade Elétrica Relativa
c	Velocidade da Luz no Vácuo
V_p	Velocidade de Propagação
ρ	Densidade Volumétrica de Carga
n	Índice de Refração do Meio Original
n'	Índice de Refração do Meio Transformado
ω	Frequência Ângular
∇^2	Operador Laplaciano
$\nabla \times$	Operador Rotacional
$\nabla \cdot$	Operador Divergente
\mathbf{J}	Matriz Jacobiana da Transformação de Coordenada

\mathbf{J}^T	Matriz Jacobiana Transposta da Transformação de Coordenada
g^{ij}	Tensor Métrico
ijk	Símbolos de Permutação
\vec{E}	Vetor Campo Elétrico
E_x	Componete x do Campo Elétrico
E_y	Componete y do Campo Elétrico
E_z	Componete z do Campo Elétrico
\vec{H}	Vetor Campo Magnético
H_x	Componete x do Campo Magnético
H_y	Componete y do Campo Magnético
H_z	Componete z do Campo Magnético
\vec{B}	Densidade de Fluxo Magnético
\vec{D}	Deslocamento Elétrico
$\psi(x, y)$	Função Escalar Continua
\vec{J}	Densidade Superficial de Corrente

Sumário

1	Introdução	16
1.1	<i>Meios de Propagação</i>	16
1.2	<i>Motivação</i>	18
1.3	<i>Objetivo</i>	18
2	Fundamentação Teórica	20
2.1	<i>Transformações de Coordenadas</i>	22
2.1.1	Transformação Conforme	22
2.1.2	Transformação Não-Conforme	23
2.1.3	Transformação Quase-Conforme	25
2.2	<i>Princípio de Fermat</i>	26
2.3	<i>Invariância do Princípio de Fermat Sobre Transformações Con-</i> <i>formes</i>	27
3	Equação de Helmholtz	30
3.1	<i>Algumas Aplicações da Equação de Helmholtz</i>	30
3.2	<i>Equação de Helmholtz para um meio Homogêneo</i>	31
3.2.1	Relações Constitutivas das equações de Maxwell	31
3.3	<i>Invariância da Equação de Helmholtz sob Transformações Con-</i> <i>formes</i>	33
3.4	<i>Dedução da Equação de Helmholtz para μ' e ϵ' Não-Homogêneos</i>	37
3.4.1	Meios com permissividade elétrica não homogênea e per- meabilidade magnética constante e igual à permeabilidade magnética no vácuo.	39

3.4.2	Meios com permeabilidade magnética não homogênea e permissividade elétrica constante e igual à permissividade elétrica no vácuo.	40
4	Resultados	42
4.1	<i>Cenário 1 - Permissividade elétrica não homogênea e Permeabilidade magnética constante</i>	<i>43</i>
4.2	<i>Cenário 2 - Permeabilidade magnética não homogênea e permissividade elétrica constante</i>	<i>45</i>
5	Conclusões Finais	49
5.1	<i>Trabalhos Futuros</i>	<i>50</i>
	Referências¹	51
	Anexo A – Publicação	55

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

1 Introdução

O conceito de ondas eletromagnéticas está relacionado com a presença de um campo elétrico e um campo magnético variantes no tempo, os quais podem ser equacionados por um conjunto de leis físicas conhecidas, formalmente, como equações de Maxwell (RIBEIRO, 2004; POPOVIC, 1971). Estas Leis relacionam as características físicas e propriedades como a permissividade elétrica, permeabilidade magnética e condutividade elétrica com os campos elétricos e magnéticos, e também dependem das propriedades eletromagnéticas dos meios de propagação, tais como: meio linear, não-linear, isotrópico, não-isotrópico, homogêneo, não-homogêneo (ROZZI; MONGIARDO, 1996).

1.1 Meios de Propagação

Os meios são de suma importância no estudo da propagação das ondas eletromagnéticas, pois eles estabelecem e determinam as características apropriadas dos campos eletromagnéticos, assim como as condições de contornos estabelecidas no meio em análise. Os meios materiais podem ser segundo suas características em condutores, dielétricos, magnéticos e semi-condutores de acordo com a importância dos fenômenos físicos da condução, polarização, magnetização ou se condução e a polarização são da mesma ordem de grandeza (VASCONCELOS, 2015; RIBEIRO, 2008).

Um meio é dito linear quando suas características físicas são independentes da intensidade do campo aplicado. Se essas características dependem da orientação dos campos, então o meio é dito ser anisotrópico, caso contrário ele é isotrópico. Se ainda essas características dependem da posição, o meio é dito ser não-homogêneo. Caso contrário ele é homogêneo (VASCONCELOS, 2015; JR; BUCK, 2013). Vale

ressaltar que essas características podem variar com o tempo, mas não é o caso deste trabalho .

Estas equações descrevem, entre outros fatores, a propagação das ondas eletromagnéticas, ou seja, a transferência de energia entre pontos distintos devido a presença de campo elétrico e magnético. Dependendo das características da fonte de excitação, das condições de contorno e das propriedades do meio de propagação, a onda poderá se propagar em direções preferenciais (ROZZI; MONGIARDO, 1996) como é o caso de guias de onda. A energia associada a onda eletromagnética é obtida por meio do vetor de Poynting, e depende do meio de transmissão.

A técnica Transformada Óptica (TO) (LEONHARDT; PHILBIN, 2009; PENDRY; SCHURIG; SMITH, 2006), vem despertando a atenção de pesquisadores pela grande flexibilidade de projetar dispositivos e componentes ópticos. A transformada óptica controla a propagação das ondas eletromagnéticas conforme uma determinada aplicação. Assim, a TO determina as propriedades que controlam a propagação das ondas eletromagnéticas conforme a geometria da transformação de coordenadas. Estas propriedades são deduzidas mediante a relevante propriedades das equações de Maxwell serem invariantes sobre transformações de coordenadas o que pode ser demonstrado com o cálculo tensorial. Assim, os parâmetros inerentes do tratamento matemático das equações de Maxwell com o cálculo tensorial podem ser interpretados com as propriedades, permissividade elétrica e permeabilidade magnética, para o meio cujo efeito é controlar a propagação das ondas eletromagnéticas conforme a geometria da transformação de coordenadas.

A técnica TO pode resultar em meios com anisotropia na permissividade elétrica e anisotrópicos na permeabilidade magnética. Tais meios podem ser de difícil fabricação, embora progressos tem sido realizados com metamateriais (CHEN; CHAN; SHENG, 2010). Por outro lado, a aplicação do mapeamento quase-conforme na TO, é capaz de evitar as propriedades anisotrópicas, resultando em um meio

descrito apenas por um índice de refração não-homogêneo (PENDRY; SCHURIG; SMITH, 2006; LIU et al., 2013; LIU; PENDRY, 2008). Neste contexto, fez-se um estudo sobre a validade da Transformada Óptica Quase-Conforme em meios isotrópicos e não-homogêneos, uma vez que a dedução do índice de refração na Transformada Óptica Quase-Conforme assume uma aproximação envolvendo a equação de Helmholtz.

1.2 Motivação

A transformada Óptica é um novo método desenvolvido para o projeto de dispositivos eletromagnéticos, baseando-se nas propriedades da invariância das equações de Maxwell, resultando em meios não-homogêneos, assim podendo ser considerado como uma ferramenta poderosa de *design* para dispositivos ópticos.

O índice de refração obtido da TO, usando o mapeamento quase-conforme é deduzido admitindo-se que a equação de Helmholtz seja válida para os campos elétrico e magnético em meios não-homogêneos, contrariando o eletromagnetismo clássico, onde é conhecido que a equação de Helmholtz não pode ser empregada em meios não-homogêneos.

Por isso, este trabalho apresenta um estudo sobre a validade da aplicação da transformada óptica quase-conforme em meios não-homogêneos de modo a avaliar sua eficácia no controle da propagação de ondas eletromagnéticas.

1.3 Objetivo

O objetivo deste trabalho é fazer uma análise sobre a validade e aplicação da Transformada óptica Quase-Conforme, visto que do eletromagnetismo clássico, é conhecido que a equação de Helmholtz é empregada somente em meios homogêneos.

O presente trabalho verifica o comportamento dos campos elétrico e magnético em meio não-homogêneo e isotrópico, afim de avaliar o efeito da aproximação adotada na transformada óptica quase-conforme, ou seja, o uso da equação de Helmholtz em meios não-homogêneos e a sua capacidade de controlar os campos elétrico e magnético. Sendo assim, a equação de Helmholtz é reescrita em função da permissividade elétrica, ou seja, considerando meios com índice de refração dado pela seguinte expressão, ($n^2 = \epsilon$ e $\mu = \mu_0$). Para que possamos descrever a eletrodinâmica da propagação da onda, utilizaremos apenas os vetores \vec{E} e \vec{H} , bem como suas componentes. Para o efeito do estudo será considerado uma região isenta de cargas e correntes.

2 Fundamentação Teórica

O conceito abordado pela TO baseia-se, no fato que as equações de Maxwell são invariantes em transformações de coordenadas (LEONHARDT, 2006). A geometria diferencial e o cálculo tensorial (SANCHEZ, 2011) são considerados como a linguagem matemática ideal para evidenciar o estudo da Transformada Óptica que também é útil para descrever os espaços curvos da teoria da relatividade de Einstein (LAWDEN, 2002). Esta abordagem demonstra que as equações de Maxwell possuem a mesma forma em qualquer sistema de coordenadas.

Demonstra-se que a deformação espacial imposta por uma transformação de coordenadas corresponde ao caminho percorrido pelas ondas eletromagnéticas em um meio que possuem as propriedades, permissividade elétrica (ϵ) e permeabilidade magnética (μ), definidas pela Transformada Óptica (LEONHARDT; PHILBIN, 2009). Sendo a transformação de coordenadas representada por seu Jacobiano (\mathbf{J}), a permissividade elétrica relativa (ϵ_r) e a permeabilidade magnética relativa (μ_r), do meio óptico que leva a propagação das ondas eletromagnéticas conforme a geometria da transformação de coordenadas, são dadas por (LEONHARDT; PHILBIN, 2009):

$$D^i = \epsilon_0 \epsilon^{ij} E_j, \quad B^i = \mu_0 \mu^{ij} H_j \quad (2.1)$$

$$\epsilon^{ij} = \mu^{ij} = \sqrt{g} g^{ij} = \frac{\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J}}{\det(\mathbf{J})} \quad (2.2)$$

De forma equivalente:

$$\epsilon^{ij} = \epsilon_0 \sqrt{g} g^{ij} \quad e \quad \mu^{ij} = \mu_0 \sqrt{g} g^{ij} \quad (2.3)$$

onde g^{ij} é o tensor métrico da transformação de coordenadas e g é o seu determinante. Vale ressaltar que, tensores são elementos usados para generalizar

os conceitos sobre escalares, vetores e matrizes envolvendo transformações de coordenadas. Um tensor métrico define as propriedades geométricas do sistema de coordenadas, ou seja, o tensor métrico define a geometria do espaço-tempo.

Sendo assim, um meio que atende as propriedades das equações (2.1), (2.2) e (2.3) determina o comportamento das ondas eletromagnéticas exatamente como previsto pela geometria definida pela transformação de coordenadas.

Existem várias aplicações da TO no controle da propagação das ondas eletromagnéticas em meios físicos, bem como o projeto de dispositivos ópticos, guias de ondas, capas ou mantos de invisibilidade e lentes (CHEN; FU; YUAN, 2009; LIU; PENDRY, 2008; SCHURIG et al., 2006; CAI et al., 2007; MA et al., 2009; GABRIELLI et al., 2009). Na TO, a geometria e as transformações de coordenadas desempenham o papel dominante, ou seja, ao efetuar uma transformação de coordenadas, deve-se garantir a continuidade entre o sistema de coordenadas original e o sistema transformado evitando assim as reflexões nas fronteiras.

A escolha da transformação de coordenadas tem fundamental influência na Transformada Óptica pois define as propriedades do meio óptico bem como os efeitos destas propriedades sobre a propagação das ondas eletromagnéticas. Neste contexto, as condições de contorno determinam a funcionalidade do dispositivo eletromagnético projetado com a transformada óptica. Além disso, geralmente, as propriedades definidas em (2.1), (2.2) e (2.3) implicam em meios anisotrópicos.

Para o estudo da propagação das ondas eletromagnéticas, a anisotropia é uma característica dos materiais onde a permissividade elétrica e permeabilidade magnética tem uma dependência da direção de propagação dos campos elétricos e magnéticos (RIBEIRO, 2004; MACKAY; LAKHTAKIA, 2010; WANG; FANG, 2001). Uma forma de minimizar a anisotropia dos materiais consiste na escolha adequada de transformações de coordenadas que possam obedecer aos critérios de um projeto de dispositivo óptico.

Outra alternativa para a realização prática da Transformada Óptica é através da escolha conveniente de transformações de coordenadas. A próxima seção apresenta uma classificação geral das transformações de coordenadas.

2.1 Transformações de Coordenadas

A transformação de coordenadas é uma técnica útil na solução de muitos problemas físicos como aqueles com geometria polar, cilíndrica e esférica. De um modo geral, as transformações de coordenadas são mudanças de variáveis que podem ser empregadas em problemas físicos levando a interpretações interessantes como as propriedades que um meio físico deve possuir para controlar grandezas físicas. Um exemplo deste cenário é a técnica denominada de transformada óptica a qual consiste na aplicação de transformações de coordenadas sobre as equações de Maxwell.

A escolha do tipo de transformação de coordenada tem implicações na transformada óptica. Neste sentido, existem três tipos de transformações de coordenadas: transformação conforme, quase-conforme e não conforme ((JUNQUEIRA, Tese de Doutorado - UNIFEI. 2015)). Estes tipos de transformações e seu efeito na aplicação na transformada óptica são descritos nas próximas seções.

2.1.1 Transformação Conforme

São transformações de coordenadas em que após uma transformação os ângulos entre retas ou curvas no sistema original são preservados no sistema transformado. Além disso os objetos infinitesimais mantêm sua forma preservada após a transformação (LEONHARDT, 2006). A Figura 1 ilustra um exemplo de transformação conforme.

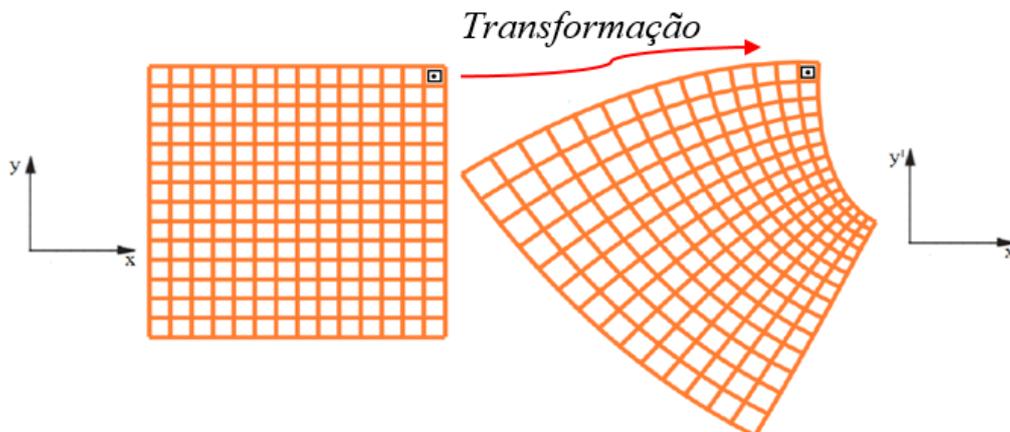


Figura 1 – Transformação de Coordenadas Conforme (JUNQUEIRA, Tese de Doutorado - UNIFEI. 2015). O ângulo reto no sistema de coordenada original é mantido após a transformação conforme.

A TO resulta em meios isotrópicos quando uma transformação de coordenadas conforme é utilizada no projeto com TO. Os mapeamentos conformes aplicados na TO, podem ajudar a reduzir a complexidade dos parâmetros dos materiais resultantes nos dispositivos ópticos e eletromagnéticos, pois sua aplicação resulta em um meio isotrópico e não-homogêneo (LEONHARDT, 2006). Esta metodologia permite implementações mais práticas de projetos usando a TO. Todavia, transformações de coordenadas conformes não atendem condições de contorno os quais são necessários para garantir a funcionalidade do dispositivo eletromagnético projetado com a TO bem como para evitar reflexões em suas interfaces ((LEONHARDT; PHILBIN, 2012; JUNQUEIRA, Tese de Doutorado - UNIFEI. 2015)).

2.1.2 Transformação Não-Conforme

São transformações de coordenadas em que após realizada uma transformação observa-se que não há uma preservação dos ângulos entre retas ou curvas no

sistema original e no sistema transformado, porém os objetos infinitesimais não mantêm sua forma após a transformação. (LEONHARDT, 2006).

Na TO os meios ópticos projetados tornam-se anisotrópicos, porém, já nessa transformação as condições de contorno podem ser atendidas (JUNQUEIRA, Tese de Doutorado - UNIFEI. 2015). Uma das características dos materiais anisotrópicos é que a polarização não é paralela ao campo elétrico aplicado e depende da direção do mesmo. Pois, sabe-se que a anisotropia é a característica que um material apresenta, de uma certa propriedade física variar com a direção.

Uma abordagem para a fabricação de meios anisotrópicos projetado com a TO é o emprego de metamateriais. Os metamateriais são concebidos de modo a possuírem propriedades físicas que não ocorrem naturalmente mas que são fisicamente possível como anisotropia e índice de refração negativo. Os metamateriais são formados por células elementares que em conjunto conferem as propriedades físicas desejadas e incomuns. A Figura 2 ilustra um exemplo de metamateriais.

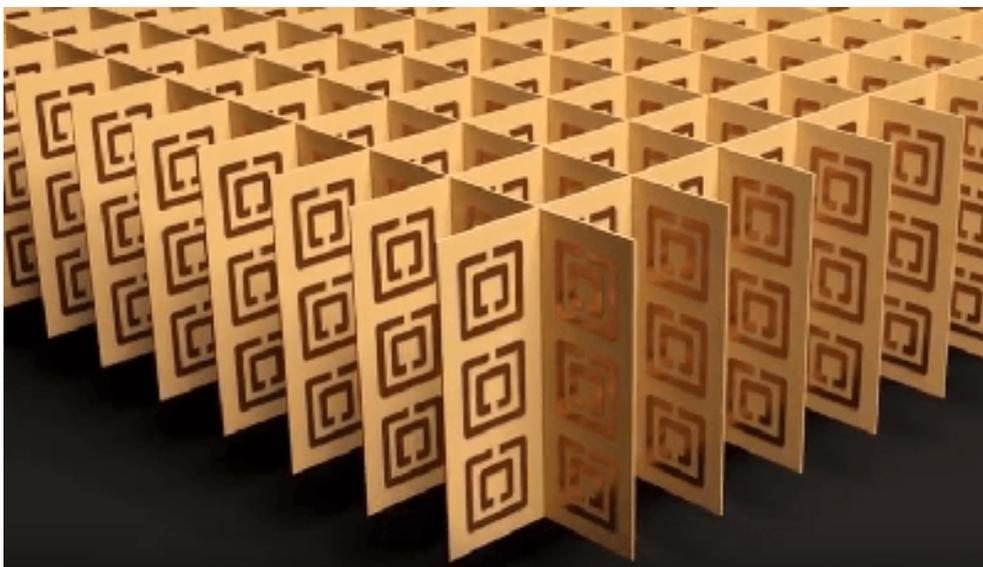


Figura 2 – Exemplo de metamaterial (BARROS, 2012). As células elementares conferem as propriedades físicas incomuns como anisotropia e índice de refração negativo.

Embora progressos na tecnologia de metamateriais tenham sido realizadas, a realização de meios anisotrópicos projetados com a TO continua sendo um desafio.

2.1.3 Transformação Quase-Conforme

São transformações de coordenadas em que após uma transformação os ângulos entre retas ou curvas no sistema original são praticamente preservados no sistema transformado e os objetos infinitesimais também são praticamente preservados (JUNQUEIRA, Tese de Doutorado - UNIFEI. 2015; ASTALA; IWANIEC; MARTIN, 2008). Ou seja, o mapeamento quase-conforme pode ser considerado como uma generalização de mapeamento conforme, onde o mapeamento quase-conforme consiste na aplicação de transformações de coordenadas na TO (SPIEGEL, 1973; JUNQUEIRA, Tese de Doutorado - UNIFEI. 2015).

Quando aplicados na TO, os meios resultantes são quase-isotrópicos e atendem as condições de contorno. Esta abordagem é conhecida como transformada óptica quase conforme (QCTO - *Quasi Conformal Transformation Optics*). O mapeamento quase-conforme é a técnica ideal para minimizar a anisotropia do meio obtido pela TO tornando-a negligenciável. Além disso, o meio dielétrico derivado por mapeamento quase-conforme pode controlar a propagação de onda tanto em duas dimensões quanto em três dimensões. Neste trabalho, é considerada a transformações de coordenadas bidimensionais, e assim, o índice de refração obtido também é bidimensional, sendo necessário sua extrusão ou rotação para criar um meio tridimensionais.

Exemplos de aplicação da QCTO, usando extrusão de um índice em 2D, são: mantos de invisibilidade, guias de onda, divisor de polarização e lentes de Luneburg (LU, 2014). Exemplos de meio tridimensional obtido com QCTO empregando

rotação de um índice de refração em um plano em 2D pode ser encontrado em (LU, 2014).

2.2 Princípio de Fermat

No estudo da ótica geométrica, o princípio de Fermat (BORN; WOLF, 2013) descreve que a trajetória percorrida por um raio de luz, entre dois pontos é aquela que requer o menor tempo possível para percorrê-lo. De forma genérica, a trajetória percorrida pela luz ao propagar-se de um ponto a outro é tal que o tempo gasto para percorrê-la é menor possível a respeito das possíveis variações de trajetória. Assim, o tempo necessário para percorrer o caminho entre dois pontos A e B pode ser descrito pela expressão apresentada em (LAKSHMINARAYANAN; GHATAK; THYAGARAJAN, 2013; BORN; WOLF, 2013):

$$\Delta T = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} \frac{c}{v} \frac{dl}{dt} dt = \frac{1}{c} \int_A^B n dl \quad (2.4)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, n é o índice de refração do meio (podendo ser não-homogêneo) e v é a velocidade de propagação da luz no meio.

O princípio de Fermat diz, também, que a distância (s) óptica deve ser mínima, o resultado apresentado em (2.4) nos permite calcular essa distância percorrida entre os pontos mencionados.

$$s = \int_A^B n dl = \int_A^B n \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (2.5)$$

onde A é o ponto inicial da trajetória e B é o ponto final da trajetória.

Observando o resultado apresentado em (2.5), nota-se que nem sempre o caminho descrito com a menor distância física é o menor caminho óptico, a luz pode se propagar em curvas se o meio apresentar uma variação no índice de refração. A Figura 3 ilustra esta situação.

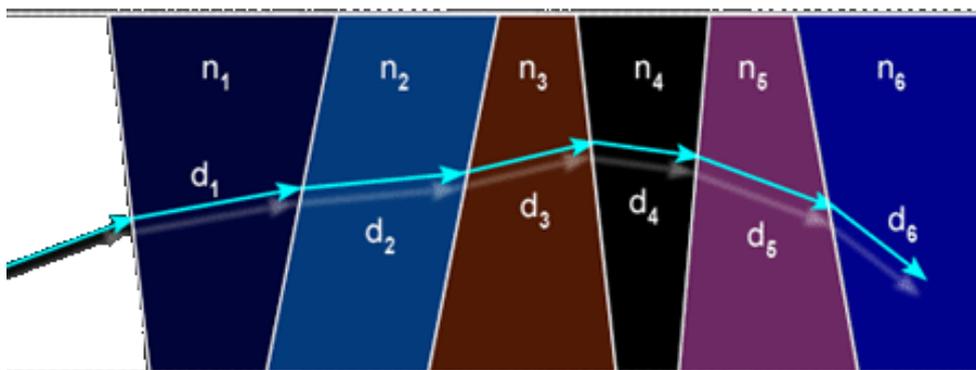


Figura 3 – Ilustração do princípio de Fermat(ZILIO, 2009). O caminho da luz percorre a menor distância óptica a qual é medida com a equação 2.5.

Com isso, o princípio de Fermat pode ser observado em diversas situações, tais como: quando luz sofre uma reflexão em espelhos, observa-se que, se o índice de refração apresentado pelo meio de propagação for constante, isto implica que o menor caminho físico corresponderá ao menor caminho óptico. Isto deve-se pelo fato que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Assim também como a equação da lei de Snell é uma consequência que foi deduzida a partir do princípio de Fermat (HOUCK; BROCK; CHUANG, 2003). E este princípio pode ser aplicado para meios que apresentam um índice de refração que não seja constante.

2.3 Invariância do Princípio de Fermat Sobre Transformações Conformes

Os procedimentos apresentados na dedução, restringem-se a transformações em 2D que são invariantes no tempo, ou seja, o meio depende apenas de coordenadas espaciais.

O Princípio de Fermat é invariante sob transformações de coordenadas conformes (LEONHARDT; PHILBIN, 2012). Dados (x, y) como espaço original, a transformação das coordenadas entre o espaço original (x, y) e o espaço transformado (x', y') pode ser representada por: $x' = f_1(x, y, z)$ e $y' = f_2(x, y, z)$. Assim, o

Princípio de Fermat será invariante sob transformações de coordenadas se e somente se:

$$s = \int n \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int n' \sqrt{dx'^2 + dy'^2} \quad (2.6)$$

onde n é o índice de refração do sistema original e n' o índice de refração do sistema transformado. Com isso, podemos escrever que:

$$dx' = \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy \quad (2.7)$$

$$dy' = \frac{\partial y'}{\partial x} dx + \frac{\partial y'}{\partial y} dy \quad (2.8)$$

Elevando ao quadrado as equações (2.7) e (2.8), somando-as membro a membro e aplicando a condição de Cauchy-Riemann que diz que: Se a derivada de $f'(z_0)$ de uma função $f = x' + iy'$ existe num ponto do conjunto dos números complexos, então as derivadas parciais em relação as variáveis x e y , também existem neste ponto e satisfazem as condições de Cauchy-Riemann (SHILOV; SILVERMAN et al., 1996) ($\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y}$) e ($\frac{\partial x'}{\partial y} = -\frac{\partial y'}{\partial x}$), tem-se:

$$dx'^2 + dy'^2 = \left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 \right] (dx^2 + dy^2) \quad (2.9)$$

Desta forma a equação (2.6) é válida, e verifica-se que o princípio de Fermat é invariante sob transformações conformes. Porém, para garantir esta invariância, temos a seguinte relação entre os índices dos meios (original e transformado):

$$n'^2 = \frac{n^2}{\left(\frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial y} \right)^2} \quad (2.10)$$

O princípio de Fermat, permite deduzir o índice de refração que controla a luz de acordo com geometria de uma transformação de coordenadas conforme, isto

é, se um meio possui este índice de refração (2.10), então as ondas eletromagnéticas propagam-se conforme a geometria da transformação de coordenadas.

Vale ressaltar que o índice de refração apresentado na equação (2.10), também pode ser obtido através da equação de Helmholtz, ou seja, abordagem feita pela QCTO uma vez que em meios não homogêneos, o princípio de Fermat indica que a luz percorre caminhos curvos e pode ser empregado para projetos de dispositivos ópticos.

O próximo Capítulo apresenta a dedução da equação (2.10) baseando-se na equação de Helmholtz para propagação eletromagnética com transformações de coordenadas quase-conforme (QCTO). Também, será evidenciada a aproximação adotada na QCTO para a dedução da equação (2.10) a qual é objeto de estudo deste trabalho.

3 Equação de Helmholtz

A equação de Helmholtz é obtida a partir de um tratamento algébrico das equações de Maxwell. Até então, esta equação é válida para meios lineares, homogêneos e isotrópicos em uma região isenta de cargas ($\rho = 0$) (ROZZI; MONGIARDO, 1996; RIBEIRO, 2004).

A partir das equações de Maxwell, se a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica (μ' e ϵ') não forem constantes, observa-se que não será possível deduzir a equação de Helmholtz. Ondo (μ' e ϵ') correspondem ao meio não-homogêneo. Embora não seja possível deduzir a equação de Helmholtz a partir das equações de Maxwell, o que se pretende mostrar com este trabalho é que a equação de Helmholtz continua sendo válida para o modo TE com um perfil de índice de refração em 2D obtido da QCTO por extrusão na direção z .

Com a aplicação do mapeamento quase-conforme na transformada óptica, observa-se que a equação de Helmholtz não é exclusiva para meios homogêneos. O tratamento algébrico a ser apresentado, demonstra que a equação de Helmholtz é aplicável para a componente E_z do campo elétrico do modo TE em meios não-homogêneos em 2D e extrudado na direção z .

3.1 Algumas Aplicações da Equação de Helmholtz

A equação de Helmholtz tem diversas aplicações para solucionar problemas lineares relacionados a propagação das ondas harmônicas, tais como: ondas elásticas, fenômenos eletromagnéticos, ondas acústicas e interação fluido-sólido entre outras (MOMANI; ABUASAD, 2006). Para cada aplicação a equação pode ser utilizada em problemas diretos ou inversos, por meio de soluções numéricas (MOMANI; ABUASAD, 2006). Além disso, a abordagem da transformada óptica quase-conforme

é generalizada para as situações físicas acima mencionadas. O comportamento dos fenômenos físicos é caracterizado pelas suas propriedades e pelas suas características internas (CHAGAS, 2013).

3.2 Equação de Helmholtz para um meio Homogêneo

3.2.1 Relações Constitutivas das equações de Maxwell

As relações constitutivas ou leis de comportamento, exprimem as propriedades dos materiais, as condições de transmissão de um meio para outro e as condições de contorno. A seguir são apresentadas essas relações constitutivas:

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad e \quad \vec{J} = \sigma\vec{E} \quad (3.1)$$

A partir das equações de Maxwell, pode-se demonstrar que, para um dado meio homogêneo, sem cargas, e sem correntes (CORSON; LORRAIN, ; JACKSON, 1999):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \quad e \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) \quad (3.3)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \cdot (\nabla \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) \quad (3.4)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) \quad (3.5)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \right) \quad (3.6)$$

Para meio sem carga e sem corrente, tem-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{D}}{\epsilon} \right) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \quad e \quad \vec{J} = 0 \quad (3.7)$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (3.8)$$

Assim chega-se à seguinte equação:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \left(\vec{\nabla}^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0 \quad (3.9)$$

A equação de onda para um escalar ψ qualquer (representando qualquer componente de \vec{E} ou \vec{H}) é:

$$\left(\nabla^2 - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0 \quad (3.10)$$

Como a onda é harmônica no tempo, então tem-se que $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (i\omega)^2$, assim:

$$\left[\nabla^2 - \mu \epsilon (i\omega)^2 \right] \psi = 0 \rightarrow \left[\nabla^2 + \mu \epsilon \omega^2 \right] \psi = 0 \quad (3.11)$$

Para $\mu = \mu_0$ e $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, obtêm-se a seguinte relação:

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \rightarrow \mu \epsilon = \frac{n^2}{c^2} \quad (3.12)$$

Logo:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \right) \psi(x, y) = 0 \quad (3.13)$$

onde $\psi(x, y)$ é uma componente de campo elétrico (E_x , E_y ou E_z) ou magnético (H_x , H_y ou H_z), $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ é o índice de refração homogêneo de um dispositivo eletromagnético, como um guia de onda, e ω é frequência da onda eletromagnética.

3.3 Invariância da Equação de Helmholtz sob Transformações Conformes

O comportamento das ondas eletromagnéticas é governado pelas soluções das equações de Maxwell, para este trabalho, foram consideradas algumas simplificações como meio homogêneo, isotrópico, não condutor e sem cargas (RIBEIRO, 2008). Da mesma forma que o princípio de Fermat é invariante, a equação de Helmholtz também é invariante sob transformações de coordenadas conforme. Será apresentado uma demonstração desta invariância usando análise complexa (LEONHARDT; PHILBIN, 2012). Considerando a seguinte transformação de coordenadas:

$$z = x + iy \quad e \quad w = x' + iy' \quad (3.14)$$

Logo,

$$w(z) = w(x + iy) = x' + iy' \quad (3.15)$$

Note que na equação (3.15) a parte real representa o eixo das abcissas e a parte imaginária representa o eixo das ordenadas. Adotando $z = x + iy$; $\bar{z} = x - iy$ e aplicando a regra de derivação por cadeia, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = i \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (3.17)$$

Das equações (3.16) e (3.17), demonstra-se que:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (3.18)$$

Usando a equação (3.18), pode se escrever o Laplaciano da seguinte forma:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (3.19)$$

Analogamente, da equação (3.19), o Laplaciano do sistema transformado pode ser calculado como:

$$\nabla'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x'} + i \frac{\partial}{\partial y'} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x'} - i \frac{\partial}{\partial y'} \right) = 4 \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} \quad (3.20)$$

Determinado o diferencial de w e \bar{w} para as transformações conformes, onde $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$, tem-se:

$$\partial w = \frac{\partial w}{\partial z} \partial z \quad e \quad \partial \bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \partial \bar{z} \quad (3.21)$$

Associando as equações (3.19), (3.20) e (3.21), tem-se:

$$\nabla^2 = 4 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial w \partial \bar{w}} = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \nabla'^2 \quad (3.22)$$

A expressão (3.22) demonstra que a equação de Helmholtz é invariante sobre transformações de coordenadas conformes, pois o Laplaciano (∇^2) mantém a sua forma no sistema transformado, exceto se for multiplicado por um escalar. Fazendo uma substituição da equação (3.22) na equação (3.13), chega-se, assim, na equação do índice de refração do sistema transformado,

$$n' = \frac{n}{\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|} = \frac{n}{\sqrt{\left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2}}. \quad (3.23)$$

Em (3.22), demonstra que a equação de Helmholtz é invariante sobre transformações de coordenadas conformes em duas dimensões (2D), as quais podem ser concisamente enunciadas com funções complexas na forma $w = f(z) = x' + y'i$ com $z = x + yi$. Neste caso, o operador Laplaciano antes (∇^2) e depois (∇'^2)

da transformação de coordenadas são relacionados por $\nabla^2 = \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 \nabla'^2$. Assim, a equação de Helmholtz, após uma transformação de coordenadas conforme, torna-se:

$$\left(\nabla'^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{n^2}{\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2} \right) \psi'(x', y') = 0 \quad (3.24)$$

Como os operadores ∇ e ∇' atuam sobre um mesmo operando, e com o cálculo diferencial, tem-se que $\psi(x, y) = \psi'(x', y')$.

Para o projeto de dispositivos ópticos em 3D com a TO quase-conforme, considera-se que um meio óptico possui o índice de refração em 2D, que pode ser extrudado na direção z (KUNDTZ; SMITH, 2010; LANDY; KUNDTZ; SMITH, 2010; MA; CUI, 2010), dado pela equação (3.23).

Além do índice dado por (3.23), é considerado que a equação de Helmholtz em (3.24) é válida para um meio não-homogêneo, ou seja, com índice n' de (3.23). Neste caso, a solução da equação (3.24) pode ser obtida tomando a solução da expressão (3.24) e usando o mapeamento $z \rightarrow w$ para reposicionar as componentes de campo uma vez que $\psi'(x', y') = \psi(x, y)$. Portanto, a QCTO utiliza o índice de refração n' para deslocar os campos do ponto x, y para os pontos x', y' mantendo a magnitude dos campos.

Em outras palavras, a equação de Helmholtz em uma transformação conforme, com meio não-homogêneo, pode ser interpretada como a equação de Helmholtz no sistema retangular com índice de refração homogêneo. Esta interpretação permite a definição do índice de refração n' , o qual leva ao controle da propagação eletromagnética com o mapeamento $z \rightarrow w$, preservando a intensidade de campo em cada ponto deste mapeamento. A Figura 4 ilustra o mapeamento da QCTO na propagação dos campos elétrico e magnético se a equação de Helmholtz for válida para meios não homogêneos.

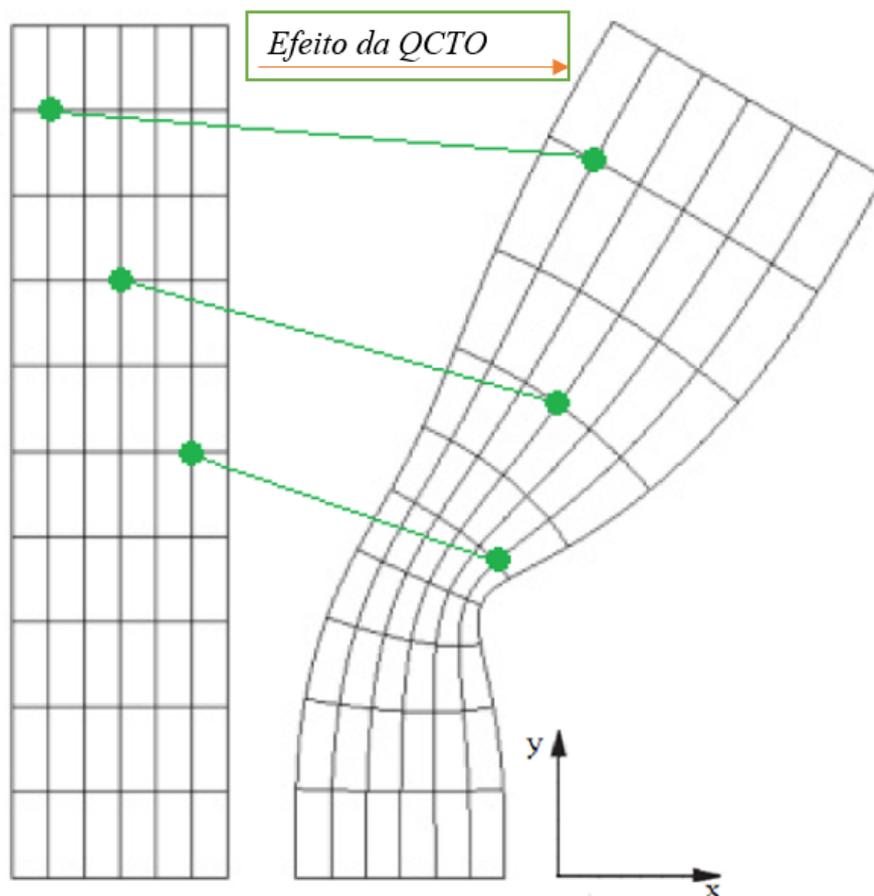


Figura 4 – Efeito da QCTO. O vetor campo é transladado conforme a transformação de coordenadas mantendo sua magnitude.

Neste contexto, é evidenciado a aproximação adotada na QCTO devido ao uso da equação de Helmholtz em um meio não-homogêneo como ponto de partida para a definição do índice de refração n' e a dedução do seu efeito na propagação da onda eletromagnética com a transformação $z \rightarrow w$ conjuntamente com a preservação da intensidade do campo. As próximas seções realizam um estudo sobre a validade da QCTO, particularmente, sobre as componentes transversal elétrica (TE) e transversal magnética (TM).

3.4 Dedução da Equação de Helmholtz para μ' e ϵ' Não-Homogêneos

As equações de ondas deduzidas regem o comportamento dos campos eletromagnéticos num meio linear e não-homogêneo, no qual a densidade de carga e de corrente são nulas. Assim, das equações de Maxwell, na ausência de cargas e correntes, demonstra-se que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad e \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.25)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \quad (3.26)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \cdot (\nabla \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \quad (3.27)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (\mu' \vec{H}) \quad (3.28)$$

Aplicando as propriedades do cálculo vetorial para o membro direito da equação (3.28), tem-se:

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \mu' (\nabla \times \vec{H}) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \times \nabla \mu') \quad (3.29)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla \nabla \cdot \vec{E} = \mu' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \times \nabla \mu') \quad (3.30)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla \nabla \cdot \vec{E} = \mu' \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon' \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \times \nabla \mu') \quad (3.31)$$

Logo, tem-se a equação de onda para o campo elétrico

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla \nabla \cdot \vec{E} = \mu' \epsilon' \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \times \nabla \mu') \quad (3.32)$$

Obtenção da equação de Helmholtz para o campo magnético.

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{D}) \quad (3.33)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla \cdot (\nabla \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{D}) \quad (3.34)$$

$$-\nabla^2 \vec{H} + \nabla \nabla \cdot \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (\epsilon' \vec{E}) \quad (3.35)$$

Aplicando as propriedades do cálculo vetorial para o membro direito da equação (3.35), tem-se:

$$-\nabla^2 \vec{H} + \nabla \nabla \cdot \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon' (\nabla \times \vec{E}) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \nabla \epsilon') \quad (3.36)$$

$$-\nabla^2 \vec{H} + \nabla \nabla \cdot \vec{H} = \epsilon' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \nabla \epsilon') \quad (3.37)$$

$$-\nabla^2 \vec{H} + \nabla \nabla \cdot \vec{H} = -\mu' \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon' \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \nabla \epsilon') \quad (3.38)$$

Logo, tem-se a equação de onda para o campo magnético

$$\nabla^2 \vec{H} - \nabla \nabla \cdot \vec{H} = \mu' \epsilon' \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \nabla \epsilon') \quad (3.39)$$

As equações (3.32) e (3.39) demonstram que a equação de Helmholtz não é válida para os campos \vec{E} e \vec{H} . Assim, o efeito que seria obtido pela QCTO na propagação de \vec{E} e \vec{H} não é válido quando $n' = \sqrt{\epsilon' \mu'}$ e n' é dado por (2.10).

Embora os efeitos da QCTO não sejam válidos, pode-se demonstrar que, sobre certas circunstâncias, a propagação dos modos TE e TM seguem a geometria da transformação de coordenadas. As próximas seções apresentam estas situações.

3.4.1 Meios com permissividade elétrica não homogênea e permeabilidade magnética constante e igual à permeabilidade magnética no vácuo.

O índice de refração n' dado em (2.10) pode ser escrito como $n' = \sqrt{\epsilon' \mu'}$. Para facilitar a fabricação de um meio projetado com a QCTO, pode-se considerar o meio sem resposta magnética. Neste caso para $\mu' = 1$ tem-se $\epsilon' = n'^2$, assim a equação (3.32) se transforma para:

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla \nabla \cdot \vec{E} = \mu' \epsilon' \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (3.40)$$

A simplificação apresentada em (3.40) não é suficiente para admitir que o campo \vec{E} satisfaz a equação de Helmholtz devido a presença do termo $\nabla \nabla \cdot \vec{E}$.

Para o caso particular onde o índice de refração em 3D é obtido pela extrusão na direção z do perfil de índice $n' = \sqrt{\epsilon'_r}$ em (2.10), então $\nabla \epsilon'_r = (ex, ey, 0)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \epsilon'_r \vec{E} &= 0 \\ \vec{E} \cdot \nabla \epsilon'_r + \epsilon'_r \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} &= -\frac{\vec{E} \cdot \nabla \epsilon'_r}{\epsilon'_r} \end{aligned} \quad (3.41)$$

A equação (3.41) aplicada para a componente TE, ou seja, $\vec{E} = (0, 0, E_z)$ em conjunto com o fato $\nabla \epsilon'_r = (ex, ey, 0)$ implica que $\nabla \cdot \vec{E} = 0$. Portanto, a equação (3.40), para um meio sem resposta magnética, transforma-se na equação de Helmholtz para o campo E_z do modo TE.

Portanto, os efeitos previstos na propagação do campo quando o índice n' em (2.10), extrudado na direção z , é utilizado, ou seja, mapeamento de acordo com

a transformação de coordenadas e preservação da magnitude são mantidos para a componente E_z do modo TE.

As componentes H_x e H_y envolvidas no modo TE também respeitam a transformação de coordenadas devido às equações de Maxwell. Por outro lado, a magnitude destes campos não é preservada, pois, neste caso, a equação de Helmholtz não é atendida como indicado por (3.39). Todavia, a preservação da magnitude do campo elétrico é de suma importância, porém a magnetude do magnético não é crítica para a maioria dos projetos de dispositivos ópticos.

Em conclusão, a QCTO é válida para o controle da propagação do modo TE. Para o campo TM, no entanto, não é garantido os efeitos da QCTO, uma vez que a equação de Helmholtz não se aplica a nenhuma das componentes H_z , E_x e E_y quando $n' = \sqrt{\epsilon_r}$. Caso o gradiente do índice de refração possa ser desprezado em um determinado projeto com a QCTO, os efeitos da QCTO na propagação serão válidos também no modo TM, pois as expressões em (3.32) e (3.39) se aproximarão da equação de Helmholtz.

A próxima seção ilustra um caso análogo, ou seja, quando a permeabilidade magnética não é constante e a permissividade elétrica é constante.

3.4.2 Meios com permeabilidade magnética não homogênea e permissividade elétrica constante e igual à permissividade elétrica no vácuo.

Quando a permissividade elétrica é constante, ($\epsilon' = \epsilon_0$) a permeabilidade magnética é ($\mu' = n^2$), assim a equação (3.39) se torna-se:

$$\nabla^2 \vec{H} - \nabla \nabla \cdot \vec{H} = \mu' \epsilon' \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (3.42)$$

A equação (3.42) não possui o formato da equação de Helmholtz devido a presença do termo $\nabla \nabla \cdot \vec{H}$. Considerando que o índice de refração está em 2D e extrudado na direção z então $\nabla \epsilon'_r = (ex, ey, 0)$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \nabla \cdot \mu'_r \vec{H} &= 0 \\
 \vec{H} \cdot \nabla \mu'_r + \mu'_r \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\
 \nabla \cdot \vec{H} &= -\frac{\vec{H} \cdot \nabla \mu'_r}{\mu'_r}
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

A equação (3.43) aplicada para a componente TM, ou seja, $\vec{H} = (0, 0, Hz)$ em conjunto com o fato $\nabla \mu'_r = (hx, hy, 0)$ leva à $\nabla \cdot \vec{H} = 0$. Deste modo, a equação (3.42), para um meio com $\epsilon' = \epsilon_0$, transforma-se na equação de Helmholtz para o campo H_z do modo TM.

Assim, os efeitos da QCTO são válidos na propagação da componente de campo H quando o índice n' em (2.10), extrudado na direção z , é utilizado e $\epsilon'_r = \epsilon_0$. As componentes Ex e Ey do modo TM também respeitam a transformação de coordenadas devido às equações de Maxwell. Todavia a magnitude destes campos não é preservada, pois, neste caso, a equação de Helmholtz não é atendida como indicado por (3.32).

O próximo Capítulo apresenta os resultados numéricos os quais confirmam os efeitos nos campos do modo TE e modo TM anteriormente mencionados.

4 Resultados

Simulações numéricas foram realizadas para comprovar os resultados teóricos previstos no Capítulo 3 para os modos TE e TM em um perfil de índice em 2D obtidos da extrusão na direção z .

Neste sentido, foram considerados dois exemplos de guias de onda. O primeiro é um guia de onda curvo de 90° com um elevado gradiente de índice de refração, o qual ocorre no centro da curva, com a finalidade de evidenciar o efeito dos termos que não pertencem à equação de Helmholtz nas equações 3.32 e 3.39. O segundo é um guia de onda curvo em S com fator de expansão na saída de 50%. A técnica apresentada em (JUNQUEIRA; GABRIELLI; SPADOTI, 2014) foi empregada no projeto com QCTO dos guias de onda em estudo. A figura 5 apresenta o índice de refração para os guias de onda estudados.

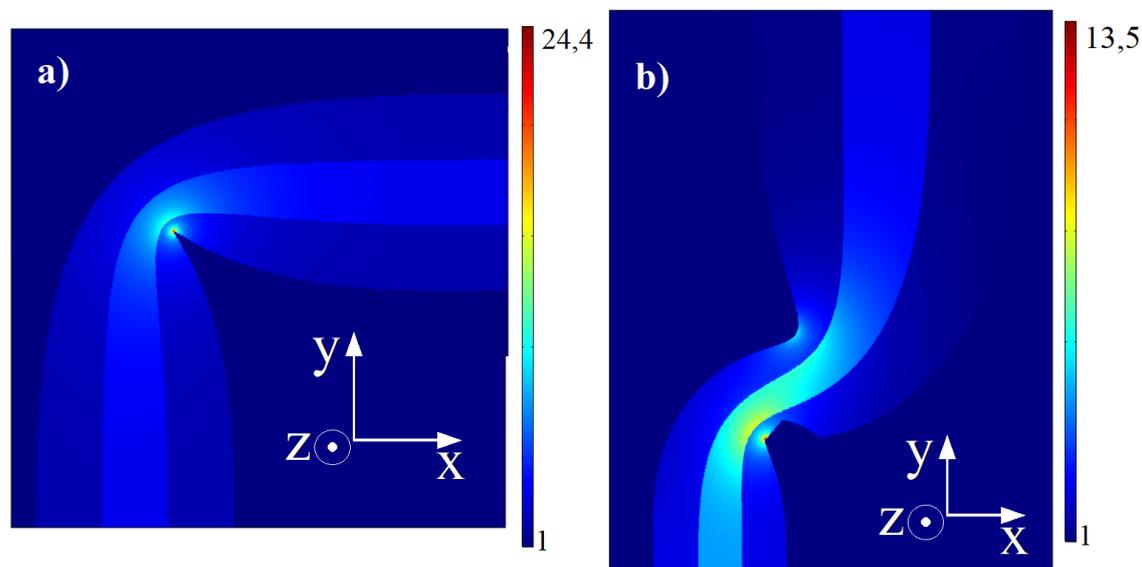


Figura 5 – Exemplos de guias de onda estudados. a) Perfil do índice de refração do guia de onda curvo de 90° . b) Perfil do índice de refração do guia de onda curvo S com expansão de 50%.

Assim, dois cenários foram simulados para demonstrar os efeitos na propagação nos modos TE e TM em ambos exemplos de guia de onda conforme descrito nas seções seguintes.

4.1 *Cenário 1 - Permissividade elétrica não homogênea e Permeabilidade magnética constante*

Conforme descrito teoricamente na seção 3.4.1, o índice de refração dado em (2.10) é capaz de controlar a propagação do modo TE quando $\epsilon'_r = n'^2$ e $\mu' = \mu_0$. Neste caso, o campo E_z segue a geometria da transformação de coordenadas mantendo sua magnitude enquanto os campos H_x e H_y seguem a geometria da transformação sem manter sua magnitude.

A Figura 6 ilustra o resultado da simulação para as componentes de campo E_z , H_x e H_y do modo TE. O comprimento de onda utilizado foi $\lambda = 3100\mu m$. Esta figura 6a) demonstra que o campo elétrico E_z segue a geometria da transformação de coordenadas e simultaneamente mantém sua magnitude, ou seja, o resultado previsto pela QCTO. Além disso, a figura 6b) e c) indicam que os campos magnéticos H_x e H_y acompanham o campo elétrico E_z e, portanto, acompanham a geometria da transformação de coordenadas, todavia, neste caso sem manter a magnitude do campo.

A figura 7 apresenta o resultado para o módulo do campo elétrico $|E_z|$ e do módulo do campo magnético $|H|$. Esta figura demonstra novamente que o campo Ez percorre a geometria da transformação de coordenadas mantendo sua magnitude. Os campos H_x e H_y também percorrem a geometria da transformação, contudo, não há a preservação da intensidade do campo.

A figura 7 também enfatiza o efeito do elevado gradiente de índice na propagação do campo magnético H ou seja, a modificação da magnitude do campo

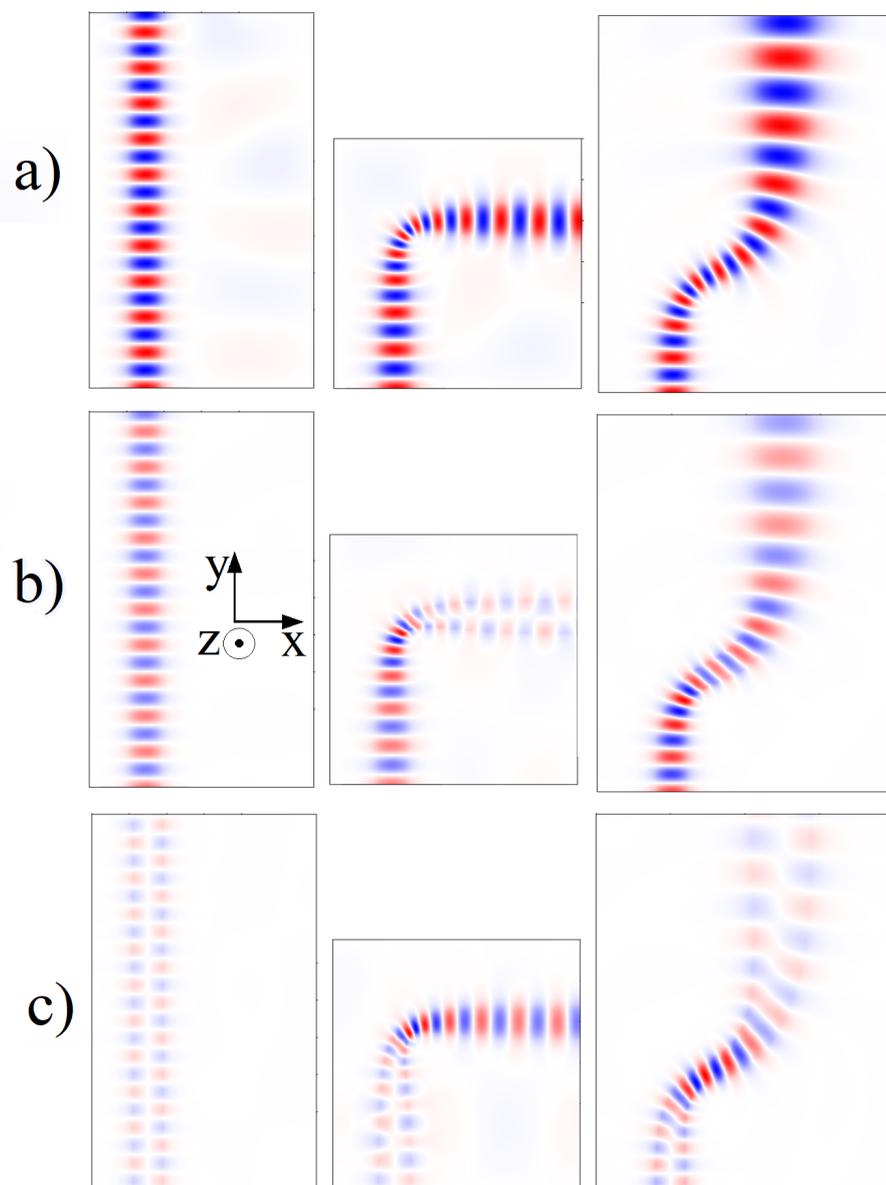


Figura 6 – Simulação das componentes de campo do modo TE nos guias de onda sem transformação, guia de onda curvo de 90° e guia de onda curvo em S com expansão de 50% respectivamente. a) Campo E_z normalizado; b) Campo H_x normalizado; c) Campo H_y normalizado.

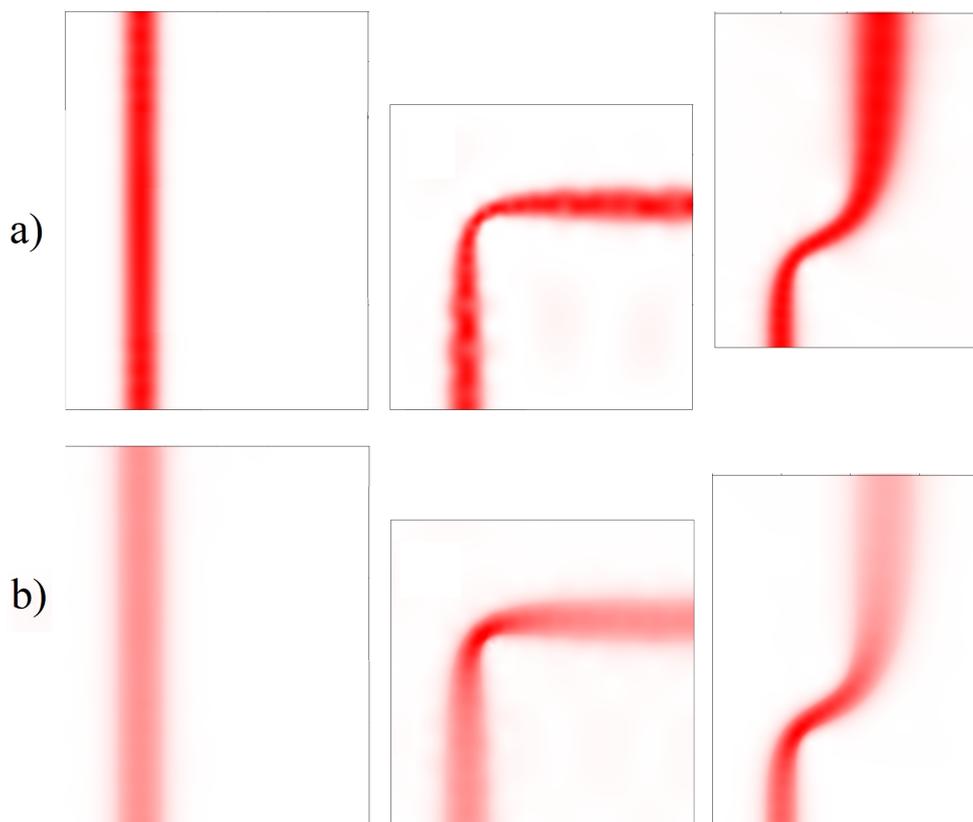


Figura 7 – Simulação dos componentes de campo do modo TE nos guias de onda sem transformação, guia de onda curvo de 90° e guia de onda curvo em S com expansão de 50% respectivamente. a) Norma do campo elétrico $|\vec{E}|$; b) Norma do campo magnético $|\vec{H}|$.

nesta região com relação ao guia original. Nota-se também que a magnitude do campo elétrico E não se modifica em relação ao guia original.

4.2 Cenário 2 - Permeabilidade magnética não homogênea e permissividade elétrica constante

Quando a permeabilidade magnética é dada por ($\mu'_r = n'^2$) e a permissividade elétrica é constante ($\epsilon' = \epsilon_0$), a QCTO é válida para a componente H_z do campo

magnético, e os campos elétricos associados, E_x e E_y , acompanham H_z . Estes resultados teóricos são apresentados na seção 3.4.2.

A figura 8 ilustra os campos H_z , E_x e E_y do modo TM. Nesta figura demonstra-se que o campo magnético H_z se propaga conforme a geometria da transformação de coordenadas mantendo sua magnitude, deste modo atendendo ao previsto pela QCTO. Já os campos elétricos E_x e E_y se propagam conforme a geometria da transformação de coordenadas porém sem manter sua magnitude.

A Figura 9 apresenta as normas dos campos elétricos e magnéticos. Nesta Figura é confirmado o efeito do perfil índice de refração quando ($\mu'_r = n'^2$ e $\epsilon' = \epsilon_0$) no modo TM, ou seja, a magnitude do campo magnético H é mantida e a magnitude do campo elétrico E não é mantida, principalmente nas regiões de elevado gradiente de índice de refração devido aos termos que não pertencem à equação de Helmholtz na equação (3.32).

Em todas as simulações realizadas, houve conservação de energia, ou seja, o fluxo de potência medido pelo vetor de Poynting é mantida na entrada e na saída. Nos casos onde as propriedades do meio se modificam na saída ou ocorre uma expansão de 50%, os campos E e H se modificam de modo que o vetor de Poynting é mantido.

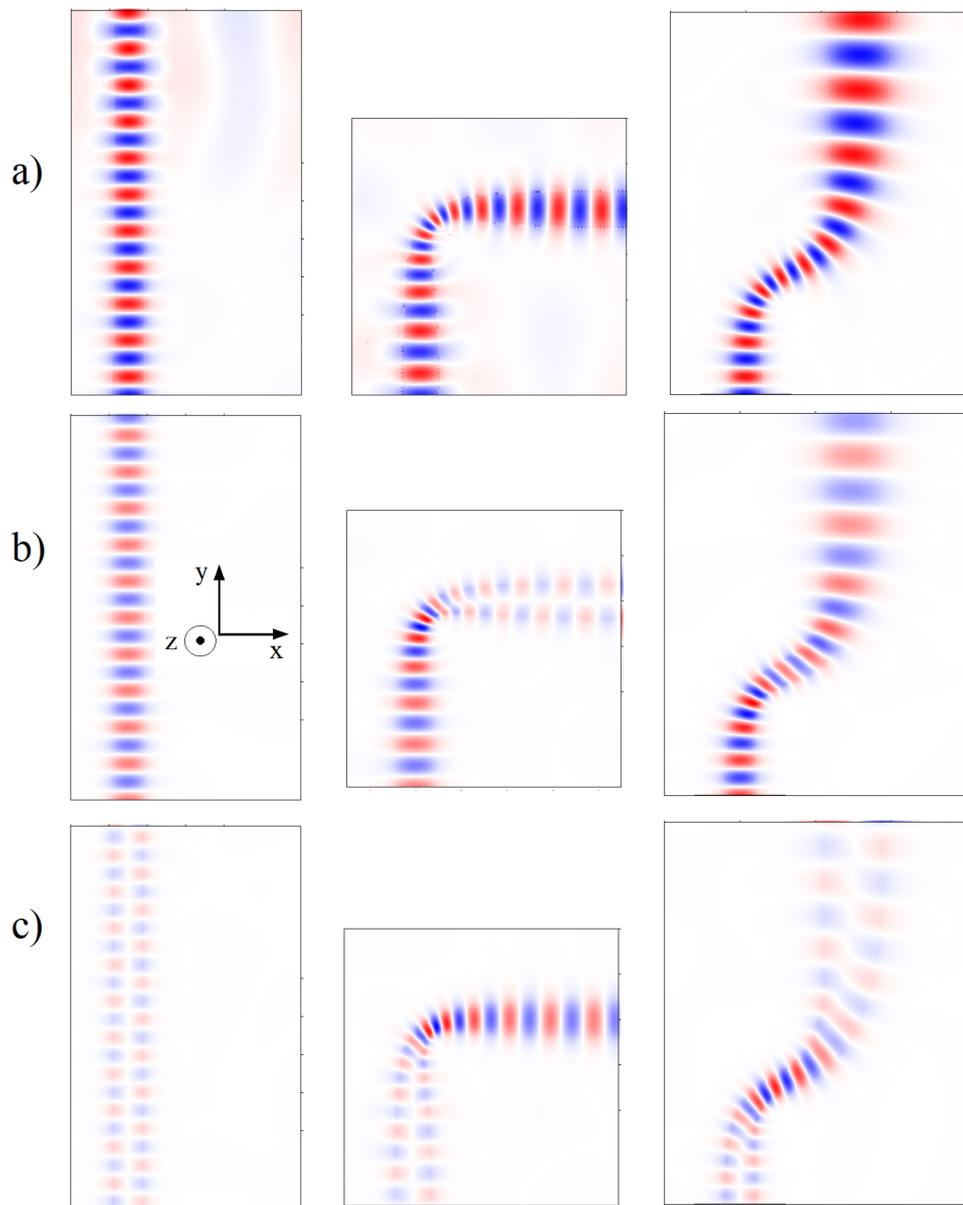


Figura 8 – Simulação das componentes de campo do modo TM nos guias de onda sem transformação, guia de onda curvo de 90° e guia de onda curvo em S com expansão de 50% respectivamente. a) Campo E_z normalizado; b) Campo H_x normalizado; c) Campo H_y normalizado.

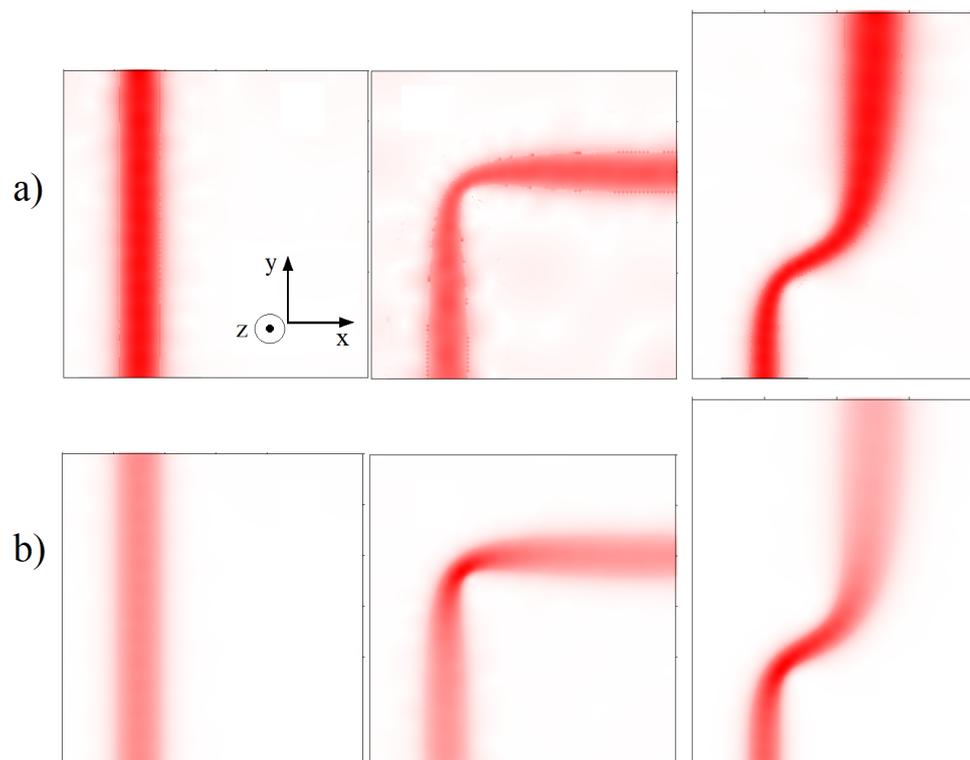


Figura 9 – Simulação dos componentes de campo do modo TM nos guias de onda sem transformação, guia de onda curvo de 90° e guia de onda curvo em S com expansão de 50% respectivamente. a) Norma do campo magnético $|\vec{H}|$; b) Norma do campo elétrico $|\vec{E}|$.

5 Conclusões Finais

Este trabalho abordou o efeito da aproximação adotada na QCTO, ou seja, o uso da equação de Helmholtz em meios não-homogêneos na dedução das propriedades de dispositivos eletromagnéticos projetados com a QCTO e seus efeitos na propagação de ondas eletromagnéticas. Foram investigados os efeitos dessa aproximação para as componentes de campos E e H .

Caso o meio óptico definido pela QCTO seja sem resposta magnética e obtido por uma extrusão de um índice em 2D, foi demonstrado que a equação de Helmholtz é válida para a componente E_z do campo elétrico no modo TE. Portanto, os efeitos previstos pela QCTO na propagação desta componente de campo são válidos, ou seja, o campo se propaga conforme a transformação de coordenadas e mantém sua magnitude. Embora para as componentes H_x e H_y do modo TE a equação de Helmholtz não seja válida, estas componentes de campo também acompanham a geometria da transformação devido às equações de Maxwell preservar em sua magnitude. No modo TM nenhuma das componentes de campo são descritas pela equação de Helmholtz e, conseqüentemente, os efeitos previstos pela QCTO não são aplicáveis para as componentes de campo E_x , E_y e H_z , exceto se o gradiente do índice de refração for desprezível.

Por fim, pode-se afirmar que a QCTO em 2D é plenamente válida para o projeto de dispositivos eletromagnéticos, sem resposta magnética, que atuam sobre o modo TE. No caso do modo TM, não é possível afirmar que a QCTO controla a propagação da onda eletromagnética conforme a geometria da transformação de coordenadas uma vez que a equação de Helmholtz não é atendida para os campos E_x , E_y e H_z . Todavia, caso o gradiente do índice de refração seja pequeno comparado com o comprimento de onda, o efeito da QCTO se aproxima ao definido pela transformação de coordenada para os campos do modo TM.

5.1 *Trabalhos Futuros*

Algumas sugestões para trabalhos futuros são:

- Estudo da validade da QCTO em 3D.
- Novos estudos e aplicações da QCTO. Como a energia associada a cada um dos campos.
- Estudos sobre a aplicação da TO em meios não Lineares.
- Estudos de novos métodos e melhorias nos métodos existentes para redução da anisotropia.
- Análise do Comportamento dos campos elétrico e magnético para um índice de refração definido pelo produto de μ e ϵ , com ambos ϵ e μ variável.

Referências¹

ASTALA, K.; IWANIEC, T.; MARTIN, G. *Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane (PMS-48)*. [S.l.]: Princeton University Press, 2008. Citado na página 25.

BARROS, V. F. d. *Estudo do efeito de substratos metamateriais em parâmetros de antenas de microfita*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 24.

BORN, M.; WOLF, E. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. [S.l.]: Elsevier, 2013. Citado na página 26.

CAI, W. et al. Nonmagnetic cloak with minimized scattering. *Appl. Phys. Lett.*, v. 91, n. 11, 2007. Citado na página 21.

CHAGAS, B. D. O. Métodos de elementos finitos e diferenças finitas para a equação de Helmholtz. 2013. Citado na página 31.

CHEN, H.; CHAN, C. T.; SHENG, P. Transformation optics and metamaterials. *Nature materials*, Nature Publishing Group, v. 9, n. 5, p. 387, 2010. Citado na página 17.

CHEN, X.; FU, Y.; YUAN, N. Invisible cloak design with controlled constitutive parameters and arbitrary shaped boundaries through Helmholtz's equation. *Opt. Express*, OSA, v. 17, n. 5, p. 3581–3586, Mar 2009. Citado na página 21.

CORSON, D.; LORRAIN, P. *Electromagnetic theory*. [S.l.]: Université de Montreal. (Electromagnetic Theory, v. 3). Citado na página 31.

GABRIELLI, L. H. et al. Silicon nanostructure cloak operating at optical frequencies. *Nat. Photonics*, v. 3, p. 461–463, Aug 2009. Citado na página 21.

HOUCK, A. A.; BROCK, J. B.; CHUANG, I. L. Experimental observations of a left-handed material that obeys Snells law. *Physical Review Letters*, APS, v. 90, n. 13, p. 137401, 2003. Citado na página 27.

JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. 3rd. ed. New York, NY: Wiley, 1999. ISBN 9780471309321. Citado na página 31.

JR, W. H. H.; BUCK, J. A. *Eletromagnetismo*. [S.l.]: Bookman Editora, 2013. Citado na página 16.

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

JUNQUEIRA, M. A.; GABRIELLI, L. H.; SPADOTI, D. H. Anisotropy minimization via least squares method for transformation optics. *Optics Express*, Optical Society of America, v. 22, n. 15, p. 18490–18498, 2014. Citado na página 42.

JUNQUEIRA, M. A. F. C. Novas estratégias para mapeamento quase-conforme em transformada óptica. Tese de Doutorado – UNIFEI. 2015. Citado 5 vezes nas páginas 9, 22, 23, 24 e 25.

KUNDTZ, N.; SMITH, D. R. Extreme-angle broadband metamaterial lens. *Nat. Mater.*, Nature Publishing Group, v. 9, n. 2, p. 129–132, Feb 2010. Citado na página 35.

LAKSHMINARAYANAN, V.; GHATAK, A.; THYAGARAJAN, K. *Lagrangian optics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 26.

LANDY, N. I.; KUNDTZ, N.; SMITH, D. R. Designing three-dimensional transformation optical media using quasiconformal coordinate transformations. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 105, p. 193902, Nov 2010. Citado na página 35.

LAWDEN, D. F. *Introduction to tensor calculus, relativity and cosmology*. [S.l.]: Courier Corporation, 2002. Citado na página 20.

LEONHARDT, U. Optical conformal mapping. *Science*, v. 312, n. 5781, p. 1777–1780, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 20, 22, 23 e 24.

LEONHARDT, U.; PHILBIN, T. [S.l.]: Dover Publications, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 23, 27 e 33.

LEONHARDT, U.; PHILBIN, T. G. Transformation optics and the geometry of light. *Progress in Optics*, v. 53, n. 08, p. 69–152, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 20.

LIU, D. et al. Transformation inverse design. *Opt. Express*, OSA, v. 21, n. 12, p. 14223–14243, 2013. Citado na página 18.

LIU, J.; PENDRY, J. B. Hiding under the carpet: A new strategy for cloaking. *Phys. Rev. Lett.*, v. 101, n. 20, p. 203901, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 21.

LU, B. *Transformation Optics Methodology Review and Its Application to Antenna Lens Designs*. Tese (Doutorado) — Pennsylvania State University, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

MA, H. F.; CUI, T. J. Three-dimensional broadband and broad-angle transformation-optics lens. *Nat. Commun.*, v. 1, n. 8, p. 124, 2010. ISSN 2041-1723. Citado na página 35.

MA, H. F. et al. Compact-sized and broadband carpet cloak and free-space cloak. *Opt. Express*, OSA, v. 17, n. 22, p. 19947–19959, Oct 2009. Citado na página 21.

MACKAY, T. G.; LAKHTAKIA, A. *Electromagnetic anisotropy and bianisotropy: a field guide*. [S.l.]: World Scientific, 2010. Citado na página 21.

MOMANI, S.; ABUASAD, S. Application of he's variational iteration method to helmholtz equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 27, n. 5, p. 1119–1123, 2006. Citado na página 30.

PENDRY, J. B.; SCHURIG, D.; SMITH, D. R. Controlling electromagnetic fields. *Science*, v. 312, n. 23, p. 1780–1782, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

POPOVIC, B. *Introductory Engineering Electrodynamics*. [S.l.]: Addison-Wesley, Reading, Mass, 1971. Citado na página 16.

RIBEIRO, J. A. J. *Propagação das ondas eletromagnéticas: princípios e aplicações*. [S.l.]: Érica, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 16, 21 e 30.

RIBEIRO, J. A. J. *Propagação das ondas eletromagnéticas: princípios e aplicações*. [S.l.]: Érica, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 33.

ROZZI, T.; MONGIARDO, M. *Open electromagnetic waveguides*. [S.l.]: Iet, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 30.

SANCHEZ, E. Cálculo tensorial. *Interciência, Rio de Janeiro*, 2011. Citado na página 20.

SCHURIG, D. et al. Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science*, v. 314, n. 5801, p. 977–980, 2006. Citado na página 21.

SHILOV, G. E.; SILVERMAN, R. A. et al. *Elementary real and complex analysis*. [S.l.]: Courier Corporation, 1996. Citado na página 28.

SPIEGEL, M. R. *Variáveis complexas com uma introdução as transformações conformes e suas aplicações: resumo da teoria, 379 problemas resolvidos, 973 problemas propostos*. [S.l.]: McGraw-Hill do Brasil, 1973. Citado na página 25.

VASCONCELOS, J. A. *Eletromagnetismo*. [S.l.]: UFMG, 2015. Citado na página 16.

WANG, T.; FANG, S. Electromagnetic anisotropy modeling using finite differences. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 66, n. 5, p. 1386–1398, 2001. Citado na página 21.

ZILIO, S. C. Óptica moderna. *São Carlos-SP: Instituto de Física de São Carlos*, v. 93, p. 217–233, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 27.

Anexo A – Publicação

Estudo Sobre a Validade da Transformada Óptica Quase-Conforme. Mulato, Danniell M.; Gabrielli, Lucas H.; Spadoti, Danilo H.; Junqueira; Mateus A. F. C. MOMAG 2018. Santa Rita do Sapucaí - MG.