

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Uma Classificação de Sistemas Hamiltonianos  
Quadráticos Planares**

**Ronisio Moises Ribeiro**

**Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias**

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 21 DE FEVEREIRO DE 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Uma Classificação de Sistemas Hamiltonianos Quadráticos Planares

**Ronisio Moises Ribeiro**

**Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática

**Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias**

ITAJUBÁ – MG

21 DE FEVEREIRO DE 2019

# Agradecimentos

Agradeço aos professores do PMAT pela dedicação e empenho que demonstraram durante o curso, agradeço à minha mãe Sônia pelo apoio que me deu ao longo desta jornada, também agradeço aos colegas do curso pela amizade e cumplicidade.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Fábio Scalco Dias por ter me dado forças e acreditado em mim durante a minha dissertação e curso, como um todo, até o fim.

Por fim, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos de mestrado.

*“ Feliz aquele que transfere o que  
sabe e aprende o que ensina. ”  
(Cora Coralina)*

# Resumo

Nesta dissertação classificaremos os campos Hamiltonianos quadráticos planares e determinaremos os seus possíveis retratos de fase globais no disco de Poincaré. Para tanto, apresentaremos uma classificação das formas cúbicas homogêneas em duas variáveis e, posteriormente, exibiremos uma classificação destes campos Hamiltonianos em 32 famílias de campos que dependem de no máximo 4 parâmetros. Além disso, para determinar o retrato de fase global destes campos utilizamos técnicas como Blow-Up, Compactificação de Poincaré e o Teorema dos Pontos Singulares Nilpotentes.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais, Sistemas Hamiltonianos, Retrato de Fase Global, Compactificação de Poincaré.

# Abstract

In this dissertation we will classified the quadratic Hamiltonian vector fields and determine their possible global phase portrait in the Poincaré disk. We will present a classification of the homogeneous cubic forms in two variables and then we reduce the study of the quadratic Hamiltonians vector fields to 32 normal forms depending at most on 4 parameters. Moreover, to determine these global phase portraits we use techniques such as Blow-Up, Poincaré compactification of polynomial vector fields and the study of local behavior at a nilpotent singular point.

**Keywords:** Differential Equations, Hamiltonian Systems, Global Phase Portrait, Poincaré Compactification.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Índice</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>ix</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Sistemas Diferenciais não Lineares . . . . .	4
1.1.1 Campos Vetoriais e Fluxos . . . . .	4
1.1.2 Estrutura Local dos Pontos Singulares . . . . .	6
1.1.3 Pontos Singularidades Nilpotentes . . . . .	8
1.2 A Técnica de Blow-Up . . . . .	10
1.3 A Compactificação de Poincaré . . . . .	13
1.4 O Índice de um Ponto Singular . . . . .	20
<b>2 Sistemas Hamiltonianos Quadráticos</b>	<b>22</b>
2.1 Definições Preliminares . . . . .	25

2.2	Classificação das Formas Cúbicas de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	28
2.3	Uma Classificação de Sistemas Hamiltonianos Quadráticos Planares . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Retratos de Fase Globais de Sistemas Hamiltonianos Quadráticos Planares</b>	<b>35</b>
3.1	Sistema $\mathcal{X}_1$ com $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ . . . . .	35
3.2	Sistema $\mathcal{X}_2$ com $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ . . . . .	46
3.3	Sistema $\mathcal{X}_3$ com $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ . . . . .	55
3.4	Sistema $\mathcal{X}_4$ com $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ . . . . .	72
3.5	Sistema $\mathcal{X}_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , com $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ . . . . .	77
	<b>Conclusões</b>	<b>93</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>94</b>



# Lista de Figuras

1.1	Retrato de fase local dos pontos singulares nilpotentes. . . . .	10
1.2	Projeção central. . . . .	15
1.3	Setores de um ponto singular. . . . .	20
1.4	Um loop. . . . .	21
2.1	Retratos de fase globais dos campos Hamiltonianos quadráticos planares. .	23
2.2	Continuação da Figura 2.1. . . . .	24
3.1	Campo próximo à origem do sistema (3.5). Na Figura (1) $a = b = 0$ . Na Figura (2) $a \neq 0$ e $b = 0$ . . . . .	37
3.2	Campo próximo à origem do sistema (3.9). Na Figura (1) $a = b = 0$ . Na Figura (2) $a \neq 0$ e $b = 0$ . . . . .	39
3.3	Blow-up na origem da carta $(U_2, \phi_2)$ . Na Figura I $a = b = c = 0$ . Na Figura II $a \neq 0$ e $b = c = 0$ . . . . .	40
3.4	Blow-up na origem da carta $(U_2, \phi_2)$ . Na Figura III $c = 0$ e $b \neq 0$ . . . . .	41
3.5	Campo de vetores do sistema (3.10) próximo à origem. . . . .	43
3.6	Campo de vetores do sistema (3.11) próximo à origem. . . . .	43
3.7	Retrato de fase local da origem na carta $(U_2, \phi_2)$ . Na Figura (1) $b = c = 0$ . Na Figura (2) $c = 0$ e $b \neq 0$ . . . . .	48
3.8	Campo do sistema (3.21) próximo a origem. . . . .	50
3.9	Campo do sistema (3.22) próximo a origem. . . . .	50
	57figure.3.10	
3.11	Diagrama de bifurcação do sistema (3.26). . . . .	59

3.12	Regiões $R_i$ , curvas $L_{i,j}$ e pontos $P_{i,j}$ do diagrama de bifurcação do sistema (3.26). . . . .	61
3.13	Retrato de fase local na origem do sistema (3.31). . . . .	64
	74figure.3.14	
3.15	Diagrama de bifurcação do sistema (3.42). . . . .	75
3.16	Retrato de fase local da origem na carta $(U_2, \phi_2)$ . . . . .	85
3.17	Retrato de fase local no ponto $P_1$ do sistema (3.66). . . . .	89
3.18	Retrato de fase local na origem do sistema (3.69). . . . .	91
3.19	Retrato de fase local da origem na carta $(U_2, \phi_2)$ . Na Figura (1) $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1/4$ . Na Figura (2) $0 < \alpha < 1/4$ ou $\alpha > 1/4$ . . . . .	91

# Lista de Tabelas

3.1	Retrato de fase local no infinito do sistema (3.1). . . . .	42
3.2	Retrato de fase local no infinito do sistema (3.14). . . . .	49
3.3	Pontos singulares no infinito do sistema (3.25). . . . .	56
3.4	Estabilidade dos pontos singulares finitos e os retratos de fase globais do sistema (3.35). . . . .	66
3.5	Pontos $P_{i,j}$ do diagrama de bifurcação do sistema (3.36) com seus respectivos retratos de fase globais. . . . .	67
3.6	Retrato de fase global do sistema (3.36) quando $ac - 1 > 0$ . . . . .	68
3.7	Retrato de fase global do sistema (3.36) quando $ac - 1 < 0$ . . . . .	71
3.8	Retrato de fase global do sistema (3.36) quando $ac - 1 = 0$ . . . . .	72
3.9	Pontos singulares no infinito do sistema (3.39). . . . .	73
3.10	Pontos singulares no infinito do sistema (3.60). . . . .	91

# Introdução

A teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias tem por objetivo a investigação de propriedades inerentes às soluções das equações que definem o problema, sem se preocupar com as possíveis expressões que tais soluções venham a ter. Um dos problemas pertencentes a essa teoria no plano é o de representar, para uma dada família de sistemas diferenciais, a classificação topológica global de seus retratos de fase. O pioneiro no estudo dos retratos de fase de um campo vetorial foi Jules Henri Poincaré [19], encontrando a primeira motivação em problemas de mecânica celeste, com particular atenção para a estabilidade do sistema solar.

Lawrence Markus [15] foi o primeiro a tentar uma classificação de sistemas diferenciais quadráticos homogêneos planares por meio de álgebras não associativas. No entanto, a abordagem de Markus não foi muito satisfatória no sentido em que sua classificação não correspondia exatamente à de sistemas diferenciais, resultando em algumas duplicações e omissões. Vulpe [21] forneceu todos os retratos de fase globais de sistemas diferenciais polinomiais quadráticos com um centro. Vulpe também forneceu alguns resultados parciais para os centros de sistemas polinomiais planares de graus maiores que dois. Em 1994, J.C Artés e J. Llibre [1] estudaram todos os retratos de fase globais de campos vetoriais Hamiltonianos quadráticos planares. Recentemente, Colak, Llibre e Valls em [6, 7, 8, 9] forneceram os retratos da fase globais no disco de Poincaré de todos os sistemas Hamiltonianos polinomiais planares tendo somente termos lineares e cúbicos homogêneos, com um centro do tipo linear ou um centro do tipo nilpotente na origem, juntamente com seus diagramas de bifurcação. Sob um outro ponto de vista, Dias, Llibre e Valls [11] classificaram os retratos de fase globais de sistemas Hamiltonianos polinomiais planares

de grau 3 com  $\mathbb{Z}_2$ -simetria e centros nilpotentes. Para sistemas diferenciais polinomiais da forma linear e não-linear homogêneos de grau superior a três, os centros na origem não são caracterizados, mas existem resultados parciais para os sistemas de grau quatro e cinco com centros do tipo lineares, veja por exemplo [4] e [5]. Alguns resultados para graus maiores são conhecidos, por exemplo em [14].

Esta dissertação tem como propósito fornecer todos os retratos de fase globais dos campos Hamiltonianos quadráticos planares, cuja principal motivação é proveniente do artigo de J.C Artés e J. Llibre [1]. Mais precisamente, iremos nos dedicar a provar o seguinte teorema.

**Teorema 0.1.** *Seja  $\mathcal{X}$  um campo vetorial Hamiltoniano quadrático planar. O retrato de fase global de  $\mathcal{X}$  é topologicamente equivalente a uma das 28 configurações dadas na Figura 2.1. Além disso, cada uma das configurações da Figura 2.1 é realizável por um campo vetorial Hamiltoniano quadrático planar.*

O problema de determinar os possíveis retratos de fase globais de um campo Hamiltoniano quadrático planar se torna difícil a partir do momento em que o número de coeficientes independentes encontrados para este tipo de campo é grande. Desta forma, através de mudanças de coordenadas lineares e reescalonamento no tempo, iremos classificar um campo Hamiltoniano quadrático planar em 32 famílias de campos que dependem de no máximo 4 parâmetros independentes.

O software  $P4$  [3] foi utilizado nesta dissertação para auxiliar na determinação dos retratos de fase globais no disco de Poincaré. Entretanto, evidenciamos uma grande quantidade de informação sobre os pontos singulares, explicitando, dentro do possível, a construção dos retratos de fase destes campos no disco de Poincaré, sem abrir mão da teoria que embasa a construção.

Nesta dissertação temos o texto organizado da seguinte forma. Começamos o Capítulo 1 dando definições e resultados importantes sobre sistemas diferenciais não lineares tais como o Teorema do Fluxo Tubular e o Teorema de Hartman-Grobman. Estudaremos posteriormente a estrutura local de singularidades hiperbólicas e nilpotentes. Faremos uma breve introdução sobre a técnica do blow-up, que é uma importante ferramenta que

permite o estudo de singularidades linearmente nulas, e encerramos este capítulo apresentando a compactificação de Poincaré, que é utilizada para o estudo do comportamento no infinito de campos polinomiais. No Capítulo 2 apresentaremos alguns conceitos importantes sobre campos Hamiltonianos quadráticos planares e reduzimos o estudo dos campos de vetores dos sistemas quadráticos Hamiltonianos para 32 famílias dependendo de no máximo 4 parâmetros. Finalmente, no Capítulo 3 iremos dedicar à prova do Teorema 0.1 descrevendo os possíveis retratos de fase globais destas 32 famílias de campos.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Sistemas Diferenciais não Lineares

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos básicos e resultados importantes de sistemas diferenciais não lineares que serão utilizados ao longo desta dissertação.

#### 1.1.1 Campos Vetoriais e Fluxos

Seja  $\mathcal{U}$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$ . Um **campo de vetores polinomial**  $\mathcal{X} = (P, Q)$  definido em  $\mathcal{U}$  é uma aplicação que associa para cada ponto  $(x, y) \in \mathcal{U}$  um vetor  $\mathcal{X}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  em  $\mathbb{R}^2$ , onde

$$P(x, y) = \sum_{i+j=0}^n a_{ij}x^i y^j, \quad Q(x, y) = \sum_{i+j=0}^n b_{ij}x^i y^j$$

são polinômios em duas variáveis.

**Definição 1.1.** *O sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.1)$$

é chamado de sistema diferencial associado ao campo de vetores  $\mathcal{X} = (P, Q)$ , onde  $(x, y) \in \mathcal{U}$ .

Salvo quando mencionarmos o contrário,  $\mathcal{X}$  será o campo de vetores definido acima.

**Definição 1.2.** Considere  $p \in \mathcal{U}$  um ponto dado, dizemos que  $p$  é um **ponto regular** de  $\mathcal{X}$  se  $\mathcal{X}(p) \neq (0, 0)$ ;  $p$  é uma **singularidade** ou **equilíbrio** de  $\mathcal{X}$  se  $\mathcal{X}(p) = (0, 0)$ .

**Definição 1.3.** Um **campo vetorial de classe  $C^r$** ,  $r \geq 1$ , em  $\mathcal{U}$ , é uma aplicação  $\mathcal{X} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^r$ .

**Definição 1.4.** O sistema

$$\dot{x} = \mathcal{X}(x) \tag{1.2}$$

é chamado de **sistema diferencial associado ao campo de vetores  $\mathcal{X}$** . As soluções desta equação, isto é, as aplicações diferenciáveis  $\varphi : I \rightarrow \mathcal{U}$  ( $I \subset \mathbb{R}$ ) tais que

$$\varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t) = \mathcal{X}(\varphi(t))$$

para todo  $t \in I$ , são chamadas **trajetórias** ou **curvas integrais** de  $\mathcal{X}$ .

**Definição 1.5.** A aplicação  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ , onde  $\Omega = \{(x, t) : x \in \mathcal{U}, t \in J_x\}$  e  $J_x$  é o intervalo maximal da solução que passa por  $x$ , chama-se **fluxo gerado** por  $\mathcal{X}$ .

**Definição 1.6.** O conjunto  $\gamma_p = \{\varphi(p, t) : t \in J_p\}$ , isto é, a imagem da curva integral de  $\mathcal{X}$  pelo ponto  $p$ , chama-se **órbita** de  $\mathcal{X}$  pelo ponto  $p$ .

Uma vez que dispomos de um recurso para a representação de um campo vetorial, seu retrato de fase, devemos procurar meios para comparar duas representações e dizer quando são equivalentes (possuem as mesmas propriedades essenciais). Introduzimos a seguir a noção de equivalência topológica entre dois campos vetoriais, as quais permitem comparar seus retratos de fase.

**Definição 1.7.** Sejam  $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  os fluxos gerados pelos campos  $\mathcal{X}_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\mathcal{X}_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , respectivamente. Dizemos que  $\mathcal{X}_1$  é **topologicamente equivalente** (resp.  **$C^r$ -equivalente**) a  $\mathcal{X}_2$  quando existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe  $C^r$ )  $h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$  que leva órbita de  $\mathcal{X}_1$  em órbita de  $\mathcal{X}_2$  preservando ou revertendo a orientação.

Observe que está definição estabelece uma relação de equivalência entre campos definidos em abertos de  $\mathbb{R}^2$ . O homeomorfismo  $h$  chama-se **equivalência topológica** (resp. **diferenciável**) entre  $\mathcal{X}_1$  e  $\mathcal{X}_2$ .



**Definição 1.8.** *Sejam  $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  os fluxos gerados pelos campos  $\mathcal{X}_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\mathcal{X}_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , respectivamente. Dizemos que  $\mathcal{X}_1$  é **topologicamente conjugado** (resp.  **$C^r$ -conjugado**) a  $\mathcal{X}_2$  quando existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe  $C^r$ )  $h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$  tal que  $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $p \in \mathbb{R}^2$ . O homeomorfismo  $h$  chama-se **conjugação topológica** (resp.  **$C^r$ -conjugação**) entre  $\mathcal{X}_1$  e  $\mathcal{X}_2$ .*

A relação de conjugação é também uma relação de equivalência entre campos definidos em abertos de  $\mathbb{R}^2$ . É claro que toda conjugação é uma equivalência. O teorema a seguir diz que, localmente, em torno de um ponto regular, todo campo se comporta como um campo constante.

**Teorema 1.1. (Fluxo Tubular)** *Sejam  $\mathcal{X}$  e  $p \in \mathbb{R}^2$  um ponto regular de  $\mathcal{X}$ . Então existe um difeomorfismo que conjuga  $\mathcal{X}$  em uma vizinhança de  $p$  com o campo constante  $\mathcal{Y} = (1, 0)$  restrito a uma vizinhança da origem  $(0, 0)$ .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [20].

### 1.1.2 Estrutura Local dos Pontos Singulares

Tendo em vista o Teorema do Fluxo Tubular, podemos considerar satisfatório o conhecimento qualitativo local das órbitas de um campo vetorial em torno de pontos regulares, sendo que existe apenas uma classe de conjugação diferenciável local. Por outro lado, se  $p$  é uma singularidade, a situação é bem mais complexa. Mesmo nos sistemas lineares já se apresentam várias classes diferentes de conjugação diferenciável.

**Definição 1.9.** *Seja  $p$  um ponto singular do campo vetorial polinomial  $\mathcal{X} = (P, Q)$ . Dizemos que*

$$J(p) = \begin{pmatrix} P_x(p) & P_y(p) \\ Q_x(p) & Q_y(p) \end{pmatrix}$$

é a **matriz Jacobiana** do campo  $\mathcal{X}$  no ponto singular  $p$ ,  $D(p) = P_x(p)Q_y(p) - P_y(p)Q_x(p)$  é o **determinante** da matriz Jacobiana e  $T(p) = P_x(p) + Q_y(p)$  é o **traço** da matriz

Jacobiana. Assim, os autovalores da matriz Jacobiana no ponto  $p$  satisfazem

$$\lambda^2 - T(p)\lambda + D(p) = 0$$

e são dados por

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(T(p) - \sqrt{\Delta}) \quad e \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(T(p) + \sqrt{\Delta}),$$

onde  $\Delta = T(p)^2 - 4D(p)$ .

Desta forma, podemos obter um pouco de informação sobre o ponto  $p$  a partir de  $T(p)$  e  $D(p)$ , sem calcular os autovalores da matriz Jacobiana:

Dizemos que  $p$  é **elementar** se  $D(p) \neq 0$ .

Dizemos que  $p$  é **semi-elementar** se  $D(p) = 0$  e  $T(p) \neq 0$ .

Dizemos que  $p$  é **nilpotente** se  $D(p) = T(p) = 0$  mas  $J(p)$  não é a matriz nula.

Dizemos que  $p$  é **linearmente nulo** se  $J(p)$  é a matriz nula.

Dizemos que  $p$  é **degenerado** se for uma singularidade nilpotente ou linearmente nulo.

Dizemos que  $p$  é **hiperbólico** se a parte real de cada autovalor de  $J(p)$  for não nula.

Agora vamos definir os tipos de pontos singulares hiperbólicos a partir do  $D(p)$  e  $T(p)$ .

**Definição 1.10.** Um ponto singular hiperbólico  $p$  de  $\mathcal{X}$  é chamado de um **nó** se  $D(p) > 0$  e  $\Delta > 0$ . Se  $T(p) < 0$ ,  $p$  é dito ser um **nó atrator** e se  $T(p) > 0$ , um **nó repulsor**.

**Definição 1.11.** Um ponto singular hiperbólico  $p$  de  $\mathcal{X}$  é chamado de um **sela** se  $D(p) < 0$ .

**Definição 1.12.** Um ponto singular hiperbólico  $p$  de  $\mathcal{X}$  é chamado de um **foco** se  $D(p) > 0$  e  $\Delta < 0$ . Se  $T(p) < 0$  temos que  $p$  é um **foco atrator**, se  $T(p) > 0$  temos que  $p$  é um **foco repulsor**.

**Definição 1.13.** Um ponto singular hiperbólico  $p$  de  $\mathcal{X}$  é chamado de um **centro** se  $T(p) = 0 < D(p)$ .

O teorema a seguir garante que o comportamento numa vizinhança de um ponto singular hiperbólico é sempre modelado pelo comportamento da parte linear.

**Teorema 1.2. (Hartman-Grobman)** *Sejam  $\mathcal{X} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial no aberto  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $p$  um ponto singular hiperbólico. Então, existem vizinhanças  $V$  de  $p$  em  $\mathcal{U}$  e  $W$  de  $0$  em  $\mathbb{R}^2$  tais que  $\mathcal{X}|_V$  é topologicamente conjugado a  $D\mathcal{X}(p)|_W$ .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [20].

### 1.1.3 Pontos Singularidades Nilpotentes

O teorema a seguir é um resultado específico e muito útil para determinar o comportamento local numa vizinhança de um ponto singular nilpotente.

**Teorema 1.3. (Pontos Singulares Nilpotentes)** *Seja  $(0, 0)$  um ponto singular isolado do campo vetorial  $\mathcal{X}$  dado por*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + A(x, y), \\ \dot{y} = B(x, y), \end{cases} \quad (1.3)$$

onde  $A$  e  $B$  são funções analíticas em uma vizinhança de  $(0, 0)$  com seus desenvolvimentos de Taylor, começando, pelo menos, com termos quadráticos em  $x$  e  $y$ . Seja  $y = f(x)$  uma solução da equação  $y + A(x, y) = 0$  numa vizinhança de  $(0, 0)$ , e considere  $F(x) = B(x, f(x))$  e  $G(x) = (\partial A/\partial x + \partial B/\partial y)(x, f(x))$ . As seguintes condições são satisfeitas:

- 1) Se  $F(x) \equiv G(x) \equiv 0$ , então o retrato de fase de  $\mathcal{X}$  é como na Figura 1.1a.
- 2) Se  $F(x) \equiv 0$  e  $G(x) = bx^n + o(x^n)$ , onde  $o(x^n)$  são termos de ordem superior, com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  e  $b \neq 0$ , então o retrato de fase de  $\mathcal{X}$  é como na Figura 1.1b ou c.
- 3) Se  $G(x) \equiv 0$  e  $F(x) = ax^m + o(x^m)$  com  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$  e  $a \neq 0$ , então
  - i) Se  $m$  for ímpar, então a origem será uma sela de  $\mathcal{X}$  se  $a > 0$  como na Figura 1.1d, ou um centro ou foco se  $a < 0$  como na Figura 1.1e-g;
  - ii) Se  $m$  for par, então a origem será uma cúspide de  $\mathcal{X}$  como na Figura 1.1h.
- 4) Se  $F(x) = ax^m + o(x^m)$  e  $G(x) = bx^n + o(x^n)$  com  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m, n \geq 1$ ,  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ , então
  - i) Se  $m$  é par e

- i1)  $m < 2n + 1$ , então a origem será uma cúspide de  $\mathcal{X}$  como na Figura 1.1h;
- i2)  $m > 2n + 1$ , então a origem será uma sela-nó de  $\mathcal{X}$  como na Figura 1.1i ou j;
- ii) Se  $m$  é ímpar e  $a > 0$ , então a origem será uma sela de  $\mathcal{X}$  como na Figura 1.1d;
- iii) Se  $m$  é ímpar,  $a < 0$  e
  - iii1) ou  $m < 2n + 1$ , ou  $m = 2n + 1$  e  $b^2 + 4a(n + 1) < 0$ , então a origem será um centro ou foco de  $\mathcal{X}$  como na Figura 1.1e-g;
  - iii2)  $n$  é ímpar e ou  $m > 2n + 1$ , ou  $m = 2n + 1$  e  $b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$ , então o retrato de fase da origem de  $\mathcal{X}$  consiste de um setor hiperbólico e um setor elíptico como na Figura 1.1k;
  - iii3)  $n$  é par e ou  $m > 2n + 1$ , ou  $m = 2n + 1$  e  $b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$ , então a origem será um nó de  $\mathcal{X}$  como na Figura 1.1 l-m. O nó será atrator se  $b > 0$  e repulsor se  $b < 0$ .

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [12].

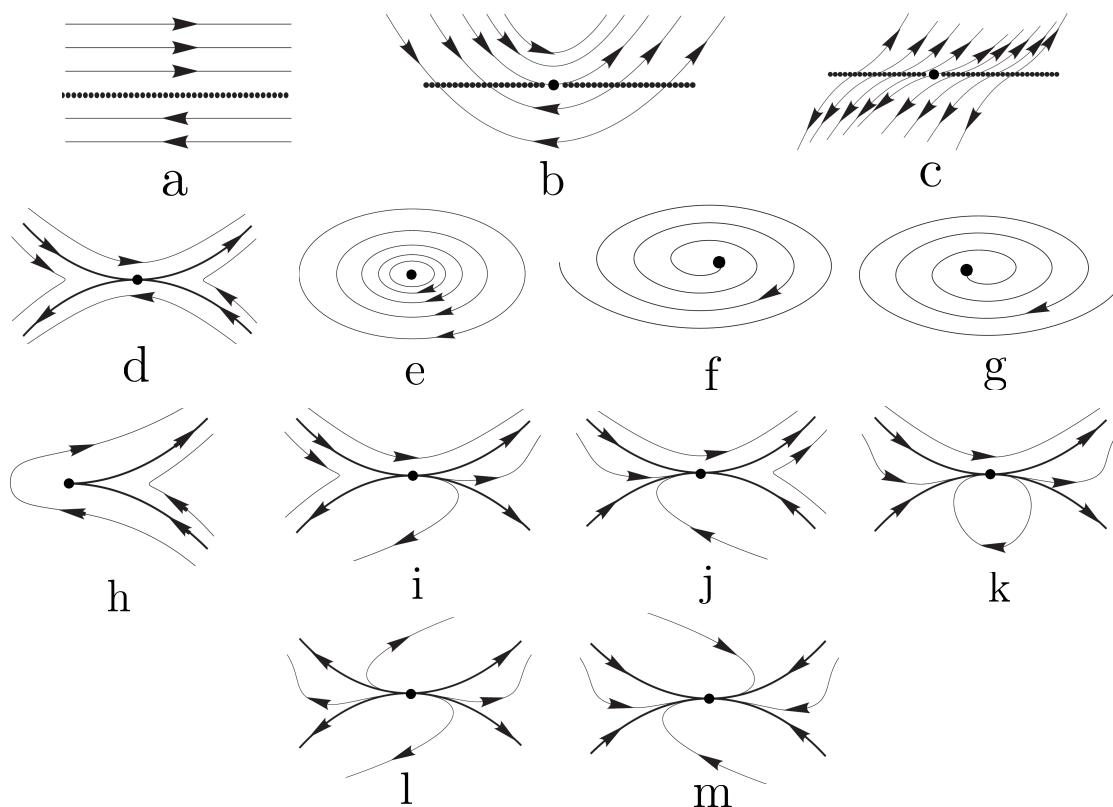


Figura 1.1: Retrato de fase local dos pontos singulares nilpotentes.

## 1.2 A Técnica de Blow-Up

Nas seções 1.1.2 e 1.1.3 estudamos a estrutura local das singularidades hiperbólicas e nilpotentes. Já as singularidades linearmente nulas são bem mais complicadas. Temos que estudá-las caso a caso e a técnica de blow-up, que será apresentada nesta seção, é uma ferramenta que permite esse estudo. Para mais detalhes ver por exemplo [12, 13].

A técnica consiste em “explodir” a singularidade por meio de uma mudança de variáveis, que não é um difeomorfismo, levando a singularidade para todo o eixo  $y$ . Após a mudança de coordenadas, cancelamos fatores em comum no campo, e então o novo campo apresenta novas singularidades, no eixo  $y$ , que serão mais simples que a singularidade original. Se essas novas singularidades forem linearmente nulas, repete-se o processo até

obtermos singularidades elementares. As mudanças de variáveis que usaremos serão

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (u, w) \end{aligned} \tag{1.4}$$

tal que :

- na direção  $x$ ,  $x = u$  e  $y = uw$ ;
- na direção  $y$ ,  $x = uw$  e  $y = w$ .

Ao longo desta seção, tomaremos  $\mathcal{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como um campo de vetores polinomial com uma singularidade na origem, ou seja,

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \tag{1.5}$$

com  $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$ .

**Proposição 1.1.** *Seja  $\mathcal{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como em (1.5), então o campo após a mudança de coordenadas  $T$  como em (1.4), tem a seguinte expressão*

- na direção  $x$ ,

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, uw), \\ \dot{w} = \frac{Q(u, uw) - wP(u, uw)}{u}; \end{cases} \tag{1.6}$$

- na direção  $y$ ,

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{P(uw, w) - uQ(uw, w)}{w}, \\ \dot{w} = Q(uw, w). \end{cases} \tag{1.7}$$

*Demonstração.* Mostraremos apenas a expressão (1.6) para a direção  $x$ , já que na direção  $y$  a demonstração é análoga. Temos que  $x = u$  e  $y = uw$ . Logo,  $\dot{x} = \dot{u}$  e  $\dot{y} = \dot{u}w + u\dot{w}$ . Como  $\dot{x} = P(x, y)$ , segue que  $\dot{u} = P(u, uw)$ . Como  $\dot{w} = (\dot{y} - \dot{u}w)/u$  e  $\dot{y} = Q(x, y)$ , segue que

$$\dot{w} = \frac{Q(u, uw) - wP(u, uw)}{u},$$

como queríamos. ■

As seguintes proposições mostrarão algumas propriedades dessas mudanças de variáveis.

**Proposição 1.2.** *Seja  $T$  como em (1.4), então na direção  $x$  valem as seguintes afirmações:*

- (i)  $T$  transforma a origem na reta  $u = 0$ ,
- (ii) a reta  $y = ax$  com exceção da origem é levada na reta  $w = a$ , com exceção da reta  $u = 0$ ,
- (iii) primeiro quadrante é levado no primeiro quadrante,
- (iv) o quarto quadrante é levado no quarto quadrante,
- (v) o segundo quadrante é levado no terceiro quadrante,
- (vi) o terceiro quadrante é levado no segundo quadrante.

*Demonstração.* (i) Os pontos os quais a origem é levada satisfaz o sistema

$$\begin{cases} u = 0, \\ uw = 0. \end{cases}$$

cuja solução é a reta  $u = 0$ .

(ii) O conjunto de pontos  $y = ax$  é levado em

$$uw = au.$$

Se  $x \neq 0$ , então  $u \neq 0$ , daí

$$w = a$$

como queríamos.

(iii) Se  $x > 0$  e  $y > 0$ , então  $u > 0$  e  $w > 0$  e portanto o primeiro quadrante é levado no primeiro quadrante.

(iv) Se  $x > 0$  e  $y < 0$ , então  $u > 0$  e  $w < 0$  e portanto o quarto quadrante é levado no quarto quadrante.

(v) Se  $x < 0$  e  $y > 0$ , então  $u < 0$  e  $w < 0$  e portanto o segundo quadrante é levado no terceiro quadrante.

(vi) Se  $x < 0$  e  $y < 0$ , então  $u < 0$  e  $w > 0$  e portanto o terceiro quadrante é levado no segundo quadrante. ■

**Proposição 1.3.** *Seja  $T$  como em (1.4), então na direção  $y$  valem as seguintes afirmações:*

- (i)  $T$  transforma a origem na reta  $w = 0$ ,
- (ii) a reta  $x = by$  com exceção da origem é levada na reta  $u = b$ , com exceção da reta  $w = 0$ ,
- (iii) o primeiro quadrante é levado no primeiro quadrante,
- (iv) o quarto quadrante é levado no terceiro quadrante,
- (v) o segundo quadrante é levado no segundo quadrante,
- (vi) o terceiro quadrante é levado no quarto quadrante.

*Demonstração.* A demonstração da Proposição 1.3 é análoga à da Proposição 1.2. ■

### 1.3 A Compactificação de Poincaré

Nesta seção apresentaremos a compactificação de Poincaré, que é utilizada para o estudo do comportamento no infinito de campos polinomiais e não somente em vizinhanças de pontos singulares. Para isso, faremos uso da projeção central, que tem a vantagem de que as singularidades no infinito estão ao longo do equador da esfera de Poincaré. Assim, o comportamento de trajetórias “longe” da origem poderá ser entendido através do estudo de trajetórias próximas de “pontos no infinito”, isto é, no equador da esfera de Poincaré.

**Definição 1.14.** *Definimos o grau de  $\mathcal{X} = (P, Q)$  como sendo o número*

$$d(\mathcal{X}) = \max\{\text{grau } P, \text{grau } Q\}.$$



Considere a esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\},$$

a qual chamaremos de **Esfera de Poincaré**, e o plano

$$T_{P_N}\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\}$$

que é tangente a esfera  $\mathbb{S}^2$  em  $P_N = (0, 0, 1)$ . Nesta seção convencionaremos que as coordenadas  $y_i$  se referirão à esfera  $\mathbb{S}^2$  e as coordenadas  $x_i$  ao plano  $T_{P_N}\mathbb{S}^2$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Definição 1.15.** *Definiremos*

$$H_+ = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\}$$

como sendo o hemisfério norte,

$$H_- = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\}$$

como sendo hemisfério sul e

$$\mathbb{S}^1 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$$

como sendo o equador.

A compactificação de Poincaré de  $\mathcal{X}$  consiste em fazer duas cópias do fluxo de  $\mathcal{X}$ , uma sobre  $H_+$  e outra sobre  $H_-$ , usando a projeção central. Para isso, consideremos uma reta  $L(t)$  que une a origem a um ponto do  $T_{P_N}\mathbb{S}^2$ ,

$$L(t) = (0, 0, 0) + t(x_1, x_2, 1) = t(x_1, x_2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esta reta intercepta a esfera  $\mathbb{S}^2$  em dois pontos, um no hemisfério norte e o outro no hemisfério sul. Ver Figura 1.2.

Agora, considerando a projeção do campo vetorial  $\mathcal{X}$  de  $\mathbb{R}^2 \approx T_{P_N}\mathbb{S}^2$  para  $\mathbb{S}^2$  dada pelas projeções centrais, temos dois difeomorfismos

$$f^+ : T_{P_n}\mathbb{S}^2 \rightarrow H_+ \quad \text{e} \quad f^- : T_{P_n}\mathbb{S}^2 \rightarrow H_-,$$

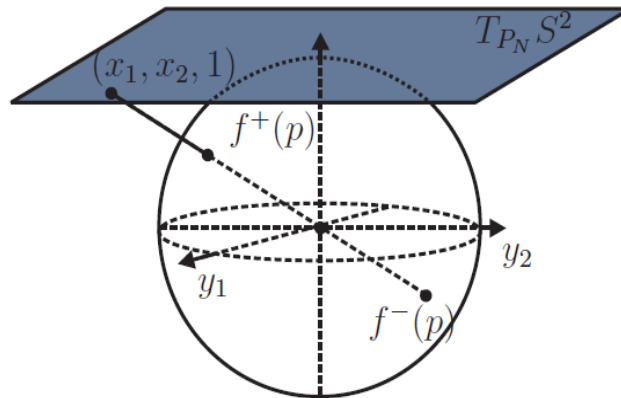


Figura 1.2: Projeção central.

isto é,  $f^+(p)$  (resp.  $f^-(p)$ ) é a intersecção da reta que passa pelo ponto  $p = (x_1, x_2, 1)$  ligando a origem com o hemisfério norte (resp. sul) de  $\mathbb{S}^2$ , cujas expressões são dadas por

$$f^+(x_1, x_2, 1) = \frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)} \quad \text{e} \quad f^-(x_1, x_2, 1) = -\frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)},$$

onde  $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$ .

Sem perda de generalidade, podemos considerar o campo  $\mathcal{X}$  definido no plano tangente à esfera, isto é,  $\mathcal{X} : T_{P_n} \mathbb{S}^2 \rightarrow T_{P_n} \mathbb{S}^2$  e, assim, é possível definir um novo campo em  $\mathbb{S}^2$ . O campo  $\tilde{\mathcal{X}}$  induzido em  $\mathbb{S}^2$ , a partir de  $\mathcal{X}$ , através dos difeomorfismos  $f^+$  e  $f^-$  será dado por

$$\tilde{\mathcal{X}}(y) = Df^+(x)\mathcal{X}(x) \quad \text{se} \quad y = f^+(x) \in H^+$$

e

$$\tilde{\mathcal{X}}(y) = Df^-(x)\mathcal{X}(x) \quad \text{se} \quad y = f^-(x) \in H^-,$$

respectivamente.

Destacamos que  $\tilde{\mathcal{X}}$  é um campo vetorial em  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ , que é tangente à esfera. Para estudar o comportamento assintótico das órbitas não limitadas de  $\mathcal{X}$  analisando  $\tilde{\mathcal{X}}$ , é necessário estender  $\tilde{\mathcal{X}}$  para o equador  $\mathbb{S}^1$  obtendo, assim, um campo na esfera.

O estudo de  $\tilde{\mathcal{X}}$  em uma vizinhança do equador nos dará informações sobre o comportamento do campo  $\mathcal{X}$  no infinito. Entretanto, nem sempre é possível estender  $\tilde{\mathcal{X}}$  ao

equador. Veremos adiante que, quando  $\mathcal{X}$  for um campo polinomial, podemos estender  $\tilde{\mathcal{X}}$  analiticamente ao equador. Antes de estudar a extensão de  $\tilde{\mathcal{X}}$  ao equador, vamos escolher um sistema de coordenadas conveniente para  $\mathbb{S}^2$  e calcular a expressão de  $\tilde{\mathcal{X}}$  nessas coordenadas.

Para  $\mathbb{S}^2$  usaremos seis cartas locais dadas por

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\}, \quad V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\},$$

para  $k = 1, 2, 3$ . As aplicações locais correspondentes são dadas por  $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$  e definidas como

$$\phi_k(y) = -\psi_k(y) = \left( \frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right),$$

para  $m < n$  e  $m, n \neq k$ .

Queremos agora encontrar a expressão do campo na carta local  $(U_1, \phi_1)$ . Seja  $y \in U_1 \cap H_+$ , então  $y = f^+(x)$ ,  $x \in T_{P_N}\mathbb{S}^2$  e

$$\begin{aligned} (\phi_1 \circ f^+)(x) &= \phi_1(f^+(x)) = \phi_1 \left( \frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \\ &= \left( \frac{x_2}{\Delta(x)} \frac{\Delta(x)}{x_1}, \frac{1}{\Delta(x)} \frac{\Delta(x)}{x_1} \right) \\ &= \left( \frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right). \end{aligned}$$

Portanto  $\phi_1(x_1, x_2, 1) = (u, v)$ , onde  $u = x_2/x_1$  e  $v = 1/x_1$ . Observe que como  $y \in U_1 \cap H_+$ , então  $x_1 \neq 0$ . Como  $\tilde{\mathcal{X}}(y) = Df^+(x)\mathcal{X}(x)$  quando  $y = f^+(x)$  segue que

$$\begin{aligned} D\phi_1(y)\tilde{\mathcal{X}}(y) &= D\phi_1(y) \circ Df^+(x)\mathcal{X}(x) \\ &= D(\phi_1 \circ f^+)(x)\mathcal{X}(x). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Seja  $\tilde{\mathcal{X}}(y)|_{U_1 \cap H_+}$  denotando o sistema de coordenadas definido como  $D\phi_1(y)\tilde{\mathcal{X}}(y)$  e, portanto, segue da equação (1.8) que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}(y)|_{U_1 \cap H_+} &= D(\phi_1 \circ f^+)(x)\mathcal{X}(x) = \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^2} (-x_2P(x_1, x_2) + x_1Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Esta é a expressão de  $\tilde{\mathcal{X}}$  em  $U_1 \cap H_+$  nas coordenadas  $\phi_1$ . Vamos colocá-las em função de  $u$  e  $v$  para facilitar a análise. Usando que  $x_1 = 1/v$ ,  $x_2 = u/v$  e substituindo em (1.9), temos

$$\tilde{\mathcal{X}}(y)\Big|_{U_1 \cap H^+} = \left[ -uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right].$$

Em geral,  $\tilde{\mathcal{X}}$  não permanece limitado quando nos aproximamos de  $\mathbb{S}^1$ . Mas, se multiplicarmos o campo por um fator  $\rho(y) = y_3^{d-1}$ , onde  $d$  é o grau do campo  $\mathcal{X}$ , a extensão se torna possível. Então,

$$\rho(f^+(x)) = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}},$$

onde  $z = (u, v)$ . Assim  $\rho\tilde{\mathcal{X}}$  nas coordenadas  $(u, v)$  é dado por

$$\begin{aligned} \rho\tilde{\mathcal{X}}(u, v) &= \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} \left( -uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right) \\ &= \frac{v^d}{\Delta(z)^{d-1}} \left( -uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -vP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Logo, (1.10) é a expressão do campo em  $U_1 \setminus \mathbb{S}^1$ . Verifica-se, facilmente que se  $y \in U_1 \cap H_-$ , obtém-se a mesma expressão.

Faremos algumas considerações a respeito do que foi visto. Inicialmente observamos que os pontos do equador  $\mathbb{S}^1 \cap U_1$  são representados por  $v = 0$  nas coordenadas  $\phi_1$ . Por outro lado, estes pontos correspondem ao infinito do plano  $T_{P_N}\mathbb{S}^2$ . Observe também, que é possível fazer  $v = 0$  na expressão (1.10), resultando em

$$\rho.\tilde{\mathcal{X}}(u, 0) = (-ua_d + b_d, 0),$$

onde  $a_d$  e  $b_d$  são os termos de maior grau em  $P$  e  $Q$ , respectivamente. Na expressão de  $\rho.\tilde{\mathcal{X}}(u, 0)$  temos a segunda componente do vetor igual a zero. Isto significa que o vetor  $\rho.\tilde{\mathcal{X}}(u, 0)$  é tangente ao equador quando olhado na esfera  $\mathbb{S}^2$ . Podemos concluir então que o equador  $\mathbb{S}^1 \cap U_1$  é invariante pelo campo  $\rho.\tilde{\mathcal{X}}$ . Não é difícil remover o fator  $\frac{1}{\Delta(z)^{d-1}}$  de (1.10) por uma parametrização do tempo. Assim, a expressão para o campo  $\rho.\tilde{\mathcal{X}}$  na carta

local  $(U_1, \phi_1)$  é dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = v^d \left[ -uP \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right], \\ \dot{v} = -v^{d+1} P \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right). \end{cases} \quad (1.11)$$

Podemos calcular analogamente, a expressão do campo  $\rho.\tilde{X}$  na carta  $(U_2, \phi_2)$  que será dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = v^d \left[ P \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) - uQ \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right], \\ \dot{v} = -v^{d+1} Q \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right). \end{cases} \quad (1.12)$$

Finalmente a expressão do campo  $\rho.\tilde{X}$  na carta  $(U_3, \phi_3)$  é dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, v), \\ \dot{v} = Q(u, v). \end{cases} \quad (1.13)$$

**Observação 1.1.** *As expressões para  $\rho.\tilde{X}$  nas cartas  $(V_1, \psi_1)$ ,  $(V_2, \psi_2)$  e  $(V_3, \psi_3)$  terão, respectivamente, as mesmas expressões que (1.11), (1.12) e (1.13) multiplicadas por  $(-1)^{d-1}$ . Observe que o fator  $(-1)^{d-1}$  desempenha um papel fundamental no estudo das estabilidades das singularidades em  $\mathbb{S}^1$ . Assim, para conhecermos o comportamento dos pontos do infinito, basta olharmos as cartas  $(U_1, \phi_1)$  e  $(U_2, \phi_2)$ .*

**Proposição 1.4.** *Seja  $\mathcal{X}$  um campo polinomial em  $\mathbb{R}^2$  de grau  $d$ . Seja  $\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\rho(y) = y_3^{d-1}$ , e seja  $\tilde{X}$  o campo induzido em  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$  através de  $f^+$  e  $f^-$  como definido acima. Então  $\rho.\tilde{X}$  pode ser estendido a um campo analítico de  $\mathbb{S}^2$  com equador invariante.*

*Demonstração.* Vimos acima que as expressões de  $\rho.\tilde{X}$  nas cartas  $(U_1, \phi_1)$ ,  $(V_1, \psi_1)$ ,  $(U_2, \phi_2)$  e  $(V_2, \psi_2)$  são dadas por (1.11) e (1.12), respectivamente, onde podemos ainda multiplicar pelo fator  $(-1)^{d-1}$  quando for o caso. Vê-se que as expressões (1.11) e (1.12) são perfeitamente definidas para  $v = 0$ , isto é, no equador  $\mathbb{S}^1$  e, como tais expressões são analíticas, podemos estendê-las analiticamente ao equador. Fazendo  $v = 0$  em (1.11) e (1.12) obtemos respectivamente

$$\rho.\tilde{X}(u, 0) = (-ua_d + b_d, 0) \quad \text{e} \quad \rho.\tilde{X}(u, 0) = (a_d, 0)$$

e concluímos que o equador será invariante por  $\tilde{\mathcal{X}}$ . ■

**Definição 1.16.** *O campo vetorial estendido na esfera  $\mathbb{S}^2$  pelas cartas locais  $(U_k, \phi_k)$  e  $(V_k, \psi_k)$ , chama-se **compactificação de Poincaré** de  $\mathcal{X}$  e será indicado por  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ .*

O teorema a seguir será importante para determinar o possível número de pontos singulares finitos e seus respectivos retratos de fase na esfera de Poincaré.

**Teorema 1.4. ( Poincaré-Hopf na esfera)** *Todo campo na esfera  $\mathbb{S}^2$  com um número finito de pontos singulares, tem como 2 a soma de seus índices.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [12].

No que segue veremos como caracterizar os retratos de fase globais no disco de Poincaré de sistemas diferenciais polinomiais.

**Definição 1.17.** *Dizemos que dois campos vetoriais polinomiais  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  são topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo em  $\mathbb{S}^2$  preservando o infinito  $\mathbb{S}^1$  e levando órbitas do fluxo induzido em  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$  em órbitas do fluxo induzido em  $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ , preservando ou invertendo simultaneamente o sentido de todas as órbitas.*

Denotamos por  $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$  o conjunto formado por todas as separatrizes de  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ . Cada componente conexa de  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$  é chamada de **região canônica** de  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ . A união de  $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$  com uma solução escolhida (representante) de cada região canônica será chamada de **configuração de separatriz**.

**Definição 1.18.** *Dizemos que  $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$  e  $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{Y}))$  são equivalentes se existir um homeomorfismo em  $\mathbb{S}^2$  preservando o infinito  $\mathbb{S}^1$  e levando órbitas de  $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$  em órbitas de  $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{Y}))$ , preservando ou invertendo simultaneamente o sentido de todas as órbitas.*

O seguinte teorema é devido a Markus [16], Neumann [17] e Peixoto [18].

**Teorema 1.5.** *Os retratos de fase no disco de Poincaré de dois sistemas diferenciais polinomiais compactificados  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$  e  $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ , com pontos singulares isolados, são topologicamente equivalente se, e somente se, suas configurações de separatrizes  $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$  e  $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{Y}))$  são topologicamente equivalentes.*

## 1.4 O Índice de um Ponto Singular

Mencionamos, sem entrar em muitos detalhes, os conceitos de índice e setores de um ponto singular. Chamamos de **setor elíptico**, **setor parabólico** e **setor hiperbólico** um setor que é topologicamente equivalente ao setor mostrado na Figura 1.3 (1), (2) e (3), respectivamente. Usaremos o conceito de setor no Teorema 1.6.

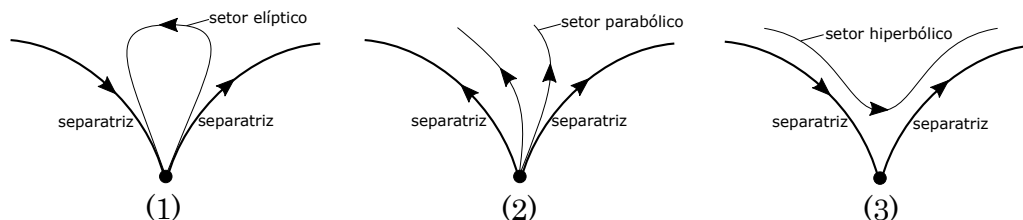


Figura 1.3: Setores de um ponto singular.

Uma **separatriz** de um campo vetorial  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$  no disco de Poincaré pode ser:

- todas as órbitas de  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$  que estão no bordo  $\mathbb{S}^1$  do disco de Poincaré,
- todos os pontos singulares finitos de  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ ,
- todos os ciclos limites de  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ ,
- todas as separatrizes de setores hiperbólicos dos pontos singulares finitos e infinitos de  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ .

Diz-se que um campo vetorial tem a propriedade da **decomposição setorial finita** em um ponto singular  $p$  se  $p$  é um centro, foco ou um nó, ou tem uma vizinhança que consiste em uma união finita de setores parabólicos, setores hiperbólicos ou setores elípticos. Observamos que todos os pontos singulares isolados de um sistema diferencial polinomial satisfazem a propriedade de decomposição setorial finita. Em alguns casos mais complicados podemos ter um número infinito de setores, com um único ponto singular. Para mais detalhes ver página 17 de [12]. De agora em diante assumiremos apenas pontos singulares isolados com um número finito de setores.

O índice de um ponto singular pode ser facilmente calculado usando a fórmula do índice de Bendixson, que leva em conta os setores parabólicos, os setores hiperbólicos e os setores elípticos de um ponto singular.

**Teorema 1.6. (Fórmula do Índice de Bendixson)** *Seja  $p$  um ponto singular isolado tendo a propriedade de decomposição setorial finita. Denote por  $e$ ,  $h$  e  $p$  o número de setores elípticos, setores hiperbólicos e setores parabólicos, respectivamente. Então o índice de  $p$  é*

$$\text{ind}(p) = \frac{(e - h)}{2} + 1.$$

**Proposição 1.5.** *O índice de uma sela, um centro e uma cúspide é  $-1, 1$  e  $0$ , respectivamente.*

A demonstração do Teorema 1.6 e da Proposição 1.5 podem ser encontradas em [12].

**Definição 1.19.** *Uma sela hiperbólica com um laço e um centro dentro deste laço, como na Figura 1.4, é chamada de **loop**.*

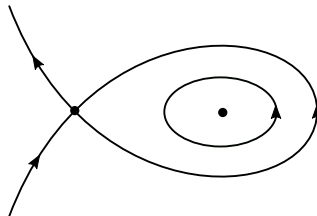


Figura 1.4: Um loop.



## Capítulo 2

# Sistemas Hamiltonianos Quadráticos

Como já dissemos na introdução, o objetivo desta dissertação é obter uma classificação dos sistemas Hamiltonianos quadráticos planares. Até o final desta dissertação iremos nos dedicar a provar o seguinte teorema.

**Teorema 2.1.** *Seja  $\mathcal{X}$  um campo vetorial Hamiltoniano quadrático planar. O retrato de fase global de  $\mathcal{X}$  é topologicamente equivalente a uma das 28 configurações dadas na Figura 2.1. Além disso, cada uma das configurações da Figura 2.1 é realizável por um campo vetorial Hamiltoniano quadrático planar.*

Para provar este teorema, através de mudanças de coordenadas lineares e reescalamento no tempo, iremos primeiramente classificar um campo Hamiltoniano quadrático planar em apenas quatro famílias de campos Hamiltonianos e, conseqüentemente, restringir nosso estudo do retrato de fase global apenas para essas quatro famílias de sistemas.

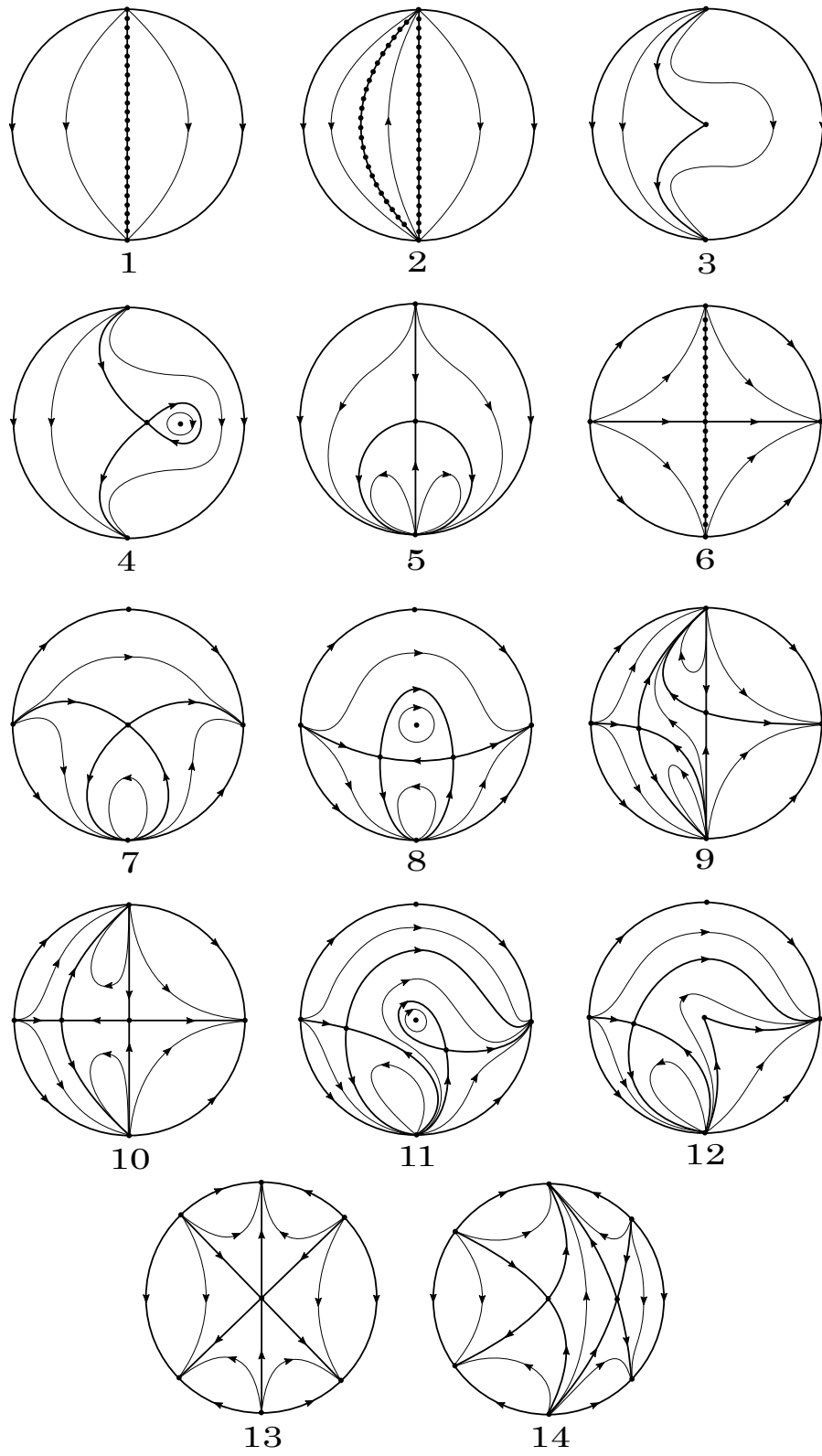


Figura 2.1: Retratos de fase globais dos campos Hamiltonianos quadráticos planares.

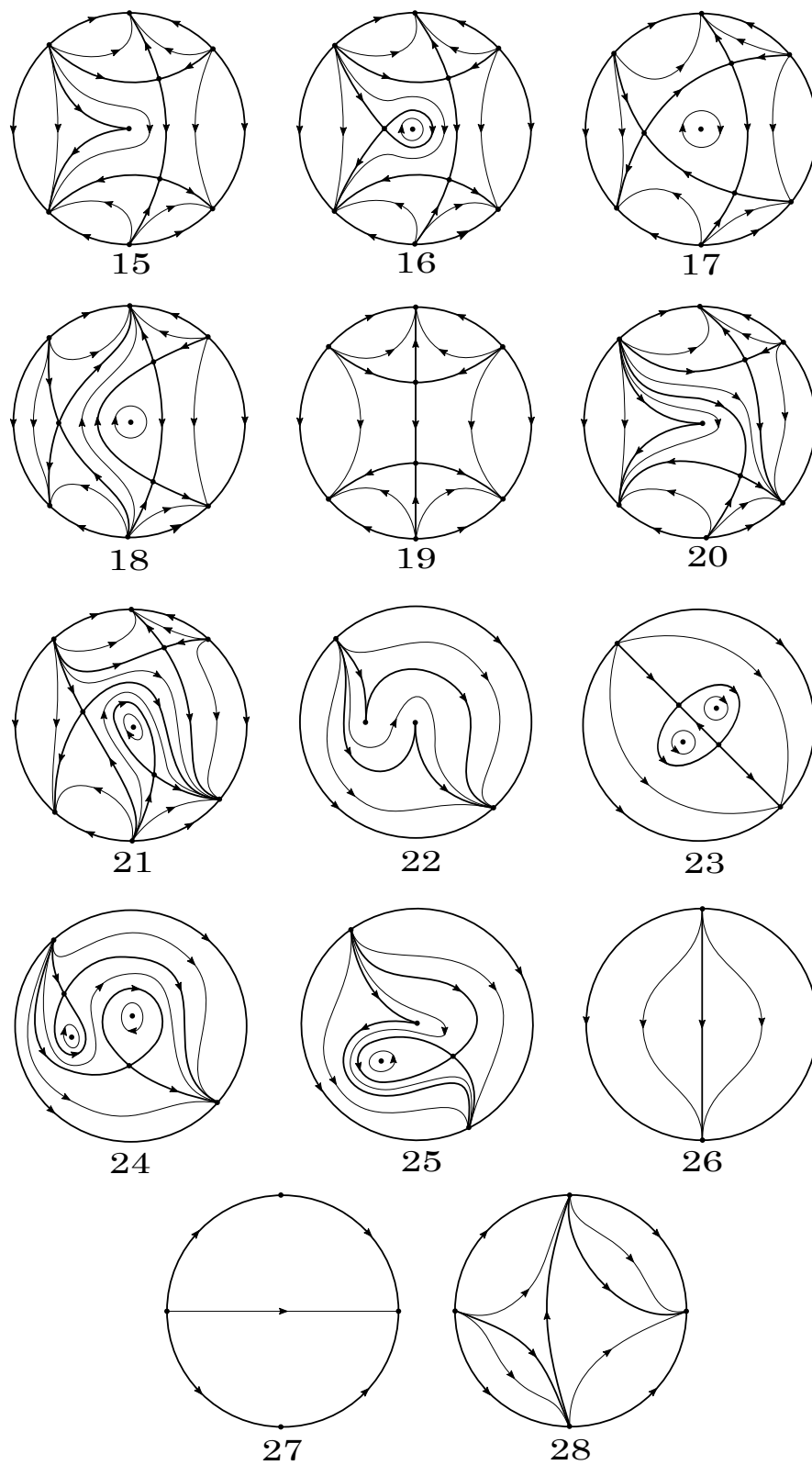


Figura 2.2: Continuação da Figura 2.1.

## 2.1 Definições Preliminares

Apresentaremos nesta seção alguns conceitos importantes sobre sistema Hamiltonianos que utilizaremos ao longo desta dissertação.

**Definição 2.1.** *Um sistema Hamiltoniano em  $\mathbb{R}^2$  (ou sistema Hamiltoniano planar) é um sistema da forma*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^\infty$  chamada função Hamiltoniana.

**Proposição 2.1.** *Para um sistema Hamiltoniano planar,  $H$  é constante ao longo de cada solução do sistema (2.1). Ou seja, as soluções do sistema Hamiltoniano estão sobre suas curvas de nível.*

**Observação 2.1.** *Iremos considerar em toda esta dissertação a função Hamiltoniana  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como sendo um polinômio de grau três dado por*

$$H(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$$

onde  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ . O sistema Hamiltoniano associado a função  $H$  é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{01} + a_{11}x + 2a_{02}y + a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2, \\ \dot{y} = -(a_{10} + 2a_{20}x + a_{11}y + 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2). \end{cases} \quad (2.2)$$

Diremos que o sistema Hamiltoniano (2.2) é um **sistema Hamiltoniano quadrático planar**. Além disso, o sistema (2.2) possui 9 coeficientes independentes, o que dificulta seu estudo. Na próxima seção vamos apresentar alguns resultados que irão ajudar a reduzir esse número de coeficientes.

A seguir apresentaremos alguns resultados básicos, porém importantes, sobre sistemas Hamiltonianos quadráticos planares que utilizaremos no decorrer desta dissertação.

**Proposição 2.2.** *Seja  $p$  um ponto singular isolado de um sistema Hamiltoniano quadrático planar. Então:*

- (1) O traço da matriz Jacobiana do sistema no ponto  $p$  é zero;
- (2) Se  $p$  é elementar, então  $p$  é ou uma sela ou um centro;
- (3) O ponto singular  $p$  não pode ser semi-elementar;
- (4) Se  $p$  é nilpotente, então  $p$  é uma sela ou uma cúspide.

*Demonstração.* Seja  $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$  um ponto singular isolado do sistema (2.2). Se  $p = (0, 0)$  então temos que  $a_{01} = a_{10} = 0$ , caso contrário, com uma translação podemos levar o ponto  $p$  para a origem e, renomeando os parâmetros de forma conveniente, o sistema (2.2) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = a_{11}x + 2a_{02}y + a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2, \\ \dot{y} = Q(x, y) = -(2a_{20}x + a_{11}y + 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2), \end{cases} \quad (2.3)$$

com  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ . A matriz Jacobiana do sistema (2.3) no ponto  $p = (0, 0)$  é dada por

$$J(p) = \begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{02} \\ -2a_{20} & -a_{11} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Note que o traço da matriz (2.4) é zero e, portanto, o item (1) está provado. Os itens (2) e (3) seguem diretamente das Definições 1.10 – 1.13. Para provar o item (4) vamos utilizar o Teorema 1.3 (**Teorema dos Pontos Singulares Nilpotentes**). Para isso, considere a matriz Jacobiana (2.4). Dividiremos este estudo em 2 casos, a saber;  $a_{11} \neq 0$  e  $a_{11} = 0$ .

**Caso  $a_{11} \neq 0$ .**

Como  $p$  é um ponto singular nilpotente, então  $a_{02} \neq 0$  e  $a_{20} \neq 0$ . Além disto, temos que  $D(p) = 4a_{02}a_{20} - a_{11}^2 = 0$ , ou seja,  $a_{20} = a_{11}^2/4a_{02}$ . Para utilizar o Teorema 1.3 considere a seguinte transformação linear

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left( -\frac{2a_{02}}{a_{11}}x - \frac{2a_{02}}{a_{11}^2}y, x \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

e considere o novo campo definido por

$$(P_1(x, y), Q_1(x, y)) = L^{-1}(P(L(x, y), Q(L(x, y)))).$$

Este sistema se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = P_1(x, y) = y + A(x, y), \\ \dot{y} = Q_1(x, y) = B(x, y), \end{cases} \quad (2.6)$$

onde

$$A(x, y) = \left( -a_{12} + \frac{4a_{02}a_{21}}{a_{11}} - \frac{12a_{02}^2a_{30}}{a_{11}^2} \right) x^2 - \frac{12a_{02}^2a_{30}}{a_{11}^4} y^2 + \left( \frac{4a_{02}a_{21}}{a_{11}^2} - \frac{24a_{02}^2a_{30}}{a_{11}^3} \right) xy$$

e

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \left( -\frac{3a_{03}a_{11}^2}{2a_{02}} + 3a_{11}a_{12} - 6a_{02}a_{21} + \frac{12a_{02}^2a_{30}}{a_{11}} \right) x^2 + \left( \frac{12a_{02}^2a_{30}}{a_{11}^3} - \frac{2a_{02}a_{21}}{a_{11}^2} \right) y^2 \\ &+ \left( 2a_{12} - \frac{8a_{02}a_{21}}{a_{11}} + \frac{24a_{02}^2a_{30}}{a_{11}^2} \right) xy. \end{aligned}$$

Utilizando a notação do Teorema 1.3 temos que

$$F(x) = Cx^2 + Dx^3 + o(x^4) \quad \text{e} \quad G(x) = 0,$$

com

$$C = \left( -\frac{3a_{03}a_{11}^2}{2a_{02}} + 3a_{11}a_{12} - 6a_{02}a_{21} + \frac{12a_{02}^2a_{30}}{a_{11}} \right) \quad \text{e} \quad D = \frac{2}{a_{11}^2} \left( a_{12} - \frac{4a_{02}a_{21}}{a_{11}} + \frac{12a_{02}^2a_{30}}{a_{11}^2} \right)^2.$$

Daí, se  $C \neq 0$  então  $p$  é um ponto singular do tipo cúspide. Suponha agora que  $C = 0$  e  $D \neq 0$  então,  $p$  é um ponto singular do tipo sela. Finalmente, se  $C = D = 0$  então os coeficientes de  $x^2$  em (2.6) se anulam e assim temos uma reta de pontos singulares, ou seja, o ponto  $p$  não é um ponto singular isolado. Como por hipótese  $p$  é um ponto singular isolado, este caso não pode ocorrer. Desta forma está provado o item (4) no caso em que  $a_{11} \neq 0$ .

**Caso**  $a_{11} = 0$ .

Novamente, como  $p$  é um ponto singular nilpotente então, sem perda de generalidade, podemos assumir que  $a_{02} \neq 0$  e  $a_{20} = 0$ . Sendo assim, o sistema (2.3), após fatorado por  $2a_{02}$ , se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = y + A(x, y), \\ \dot{y} = B(x, y), \end{cases} \quad (2.7)$$

com,

$$A(x, y) = \frac{a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2}{2a_{02}} \quad \text{e} \quad B(x, y) = -\left( \frac{3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2}{2a_{02}} \right).$$

Novamente utilizando a notação do Teorema 1.3 temos que

$$F(x) = -\frac{3a_{30}}{2a_{02}}x^2 + \frac{a_{21}^2}{2a_{02}^2}x^3 - \frac{a_{12}a_{21}^2}{8a_{02}^3}x^4 \quad \text{e} \quad G(x) = 0.$$

Portanto, se  $a_{30} \neq 0$  então  $p$  é um ponto singular do tipo cúspide. Por outro lado, se  $a_{30} = 0$  e  $a_{21} \neq 0$  então  $p$  é um ponto singular do tipo sela. Por fim, se  $a_{30} = a_{21} = 0$  novamente o sistema (2.7) tem uma reta de pontos singulares. Portanto está provado o item (4) para o caso em que  $a_{11} = 0$ . ■

## 2.2 Classificação das Formas Cúbicas de $\mathbb{R}^2$

Apresentaremos a seguir uma classificação das cúbicas homogêneas em duas variáveis, cuja importância será fundamental para a classificação dos sistemas Hamiltonianos quadráticos planares. A classificação, que será via isomorfismo linear, é realizada devido às possíveis raízes de um polinômio de grau 3 sobre  $\mathbb{R}$ . Para mais detalhes ver [10].

**Teorema 2.2. (Classificação das Formas Cúbicas de  $\mathbb{R}^2$ )** *Seja  $f$  um polinômio homogêneo não nulo de grau 3 em  $\mathbb{R}[x, y]$ . Então existe uma mudança de coordenadas  $\tau$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $f \circ \tau$  será uma das cinco formas cúbicas de  $\mathbb{R}^2$  a seguir*

$$x^3, \quad x^2y, \quad x^3 - xy^2, \quad x^3 + y^3$$

e essas formas são unicamente determinados por  $f$ .

*Demonstração.* Seja  $f \neq 0$  um polinômio homogêneo de grau 3 em  $\mathbb{R}[x, y]$ , ou seja

$$f(x, y) = ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3.$$

Primeiramente, podemos supor que  $a \neq 0$ , ou seja, o coeficiente de  $y^3$  em  $f(x, y)$  é sempre não nulo. De fato,

- Se  $a = 0$  e  $d \neq 0$  então basta tomar a mudança de coordenadas  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) = (y, x)$ , de forma que

$$(f \circ T)(x, y) = dy^3 + bx^2y + cxy, \quad \text{com } d \neq 0.$$

- Se  $a = d = 0$ , com  $f \neq 0$ , então  $b \neq 0$  ou  $c \neq 0$ . Suponha que  $b \neq 0$ , então tomemos  $T(x, y) = (x + \lambda y, y)$ . Logo,

$$(f \circ T)(x, y) = (c\lambda^2 + b\lambda)y^3 + (b + 2c\lambda)xy^2 + cx^2y.$$

Como  $b \neq 0$  temos que existe um  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha = c\lambda_0^2 + b\lambda_0$ . Portanto, podemos supor que  $f(x, y) = ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3$  com  $a \neq 0$ .

Dividindo  $f$  por  $x^3$  temos

$$\frac{f(x, y)}{x^3} = a\left(\frac{y}{x}\right)^3 + b\left(\frac{y}{x}\right)^2 + c\left(\frac{y}{x}\right) + d = at^3 + bt^2 + ct + d,$$

onde  $t = y/x$ . Agora vamos analisar a equação

$$at^3 + bt^2 + ct + d = 0.$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existem  $t_0, t_1$  e  $t_2 \in \mathbb{C}$  tais que

$$at^3 + bt^2 + ct + d = a(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2),$$

assim,

$$\frac{f(x, y)}{x^3} = a\left(\frac{y}{x} - t_0\right)\left(\frac{y}{x} - t_1\right)\left(\frac{y}{x} - t_2\right) = \frac{a(y - t_0x)(y - t_1x)(y - t_2x)}{x^3}.$$

Portanto, para  $x \neq 0$ , temos  $f(x, y) = a(y - t_0x)(y - t_1x)(y - t_2x)$ .

Caso exista um ponto da forma  $(0, y_0)$  tal que  $f(0, y_0) \neq ay_0^3$  temos por continuidade que  $f(x, y) \neq a(y - t_0x)(y - t_1x)(y - t_2x)$  para  $(x, y)$  numa vizinhança de  $(0, y_0)$ . Isto é falso pois nesta vizinhança temos  $x \neq 0$ . Portanto,

$$f(x, y) = a(y - t_0x)(y - t_1x)(y - t_2x)$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}$ .

Agora, vamos utilizar a decomposição anterior, discutindo as quatro possibilidades para as raízes  $t_0, t_1$  e  $t_2$ .

**Caso 1.** Seja  $t_0$  uma raiz de multiplicidade 3. Escrevemos,

$$f(x, y) = a(y - t_0x)^3,$$



onde  $a \neq 0$ . Consideremos a mudança de coordenadas  $T(X, Y) = (Y, X + t_0Y)$ . Logo,

$$(f \circ T)(X, Y) = a(X + t_0Y - t_0Y)^3 = aX^3.$$

Tomando  $L(X', Y') = (X'/\sqrt[3]{a}, Y')$ , temos

$$(f \circ T \circ L)(X', Y') = X'^3.$$

Portanto, para  $t_0 \in \mathbb{R}$  de multiplicidade 3, existe uma mudança de coordenadas  $\tau$ , tal que,  $f \circ \tau(x, y) = x^3$ .

**Caso 2.** Sejam  $t_0$  e  $t_1$  raízes reais com  $t_0 \neq t_1$  e  $t_1$  de multiplicidade 2. Neste caso,

$$f(x, y) = a(y - t_0x)(y - t_1x)^2.$$

Consideremos a mudança de coordenadas  $T(X, Y) = (X + Y, t_1X + t_0Y)$ . Logo,

$$(f \circ T)(X, Y) = a(t_1 - t_0)^3XY^2.$$

Tomando  $L(X', Y') = (X'/a(t_1 - t_0)^3, Y')$ , temos

$$(f \circ T \circ L)(X', Y') = X'Y'^2.$$

Portanto, para  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 \neq t_1$  e  $t_1$  de multiplicidade 2, existe uma mudança de coordenadas  $\tau$ , tal que,  $f \circ \tau(x, y) = xy^2$ .

**Caso 3.** Sejam  $t_0, t_1$  e  $t_2$  raízes reais distintas. Neste caso,

$$f(x, y) = a(y - t_0x)(y - t_1x)(y - t_2x).$$

Consideremos a mudança de coordenadas

$$T(X, Y) = \left( X + \frac{t_0 - t_1}{t_1 - t_2}Y, t_0X + t_2 \frac{t_0 - t_1}{t_1 - t_2}Y \right).$$

Logo,

$$(f \circ T)(X, Y) = \lambda XY(X - Y), \quad \text{com} \quad \lambda = a \frac{(t_0 - t_1)^2(t_2 - t_0)^2}{t_2 - t_1}.$$

Tomando  $L(X', Y') = ((X' - Y')/2, (X' + Y')/2)$ , temos

$$(f \circ T \circ L)(X', Y') = \frac{\lambda}{4}(Y'^3 - Y'X'^2).$$

Finalmente, tomando  $H(X'', Y'') = \left( \sqrt[3]{\frac{4}{\lambda}} Y'', \sqrt[3]{\frac{4}{\lambda}} X'' \right)$ , temos

$$(f \circ T \circ L \circ H)(X'', Y'') = X''^3 - X'' Y''^2.$$

Portanto, para  $t_0, t_1$  e  $t_2$  raízes reais distintas, existe uma mudança de coordenadas  $\tau$ , tal que,  $f \circ \tau(x, y) = x^3 - xy^2$ .

**Caso 4.** Sejam  $t_0$  uma raiz real,  $t_1 = z$  e  $t_2 = \bar{z}$  raízes complexas conjugadas. Neste caso,

$$f(x, y) = a(y - t_0 x)(y - zx)(y - \bar{z}x).$$

Fazendo  $Q(x, y) = (y - zx)(y - \bar{z}x)$  temos

$$f(x, y) = a(y - t_0 x)Q(x, y).$$

Suponha que  $t_0 \neq 0$  e considere a mudança de coordenadas  $T(X, Y) = ((Y - X)/t_0, Y)$ .

Logo,

$$(f \circ T)(X, Y) = aXQ'(X, Y),$$

onde  $Q'(X, Y) = Q((Y - X)/t_0, Y)$ . Note que as raízes de  $Q'(X, Y) = 0$ ,  $z_1 = a_2 + b_2 i$  e  $z_2 = \bar{z}_1$  também são complexas conjugadas. Assim podemos reescrever

$$Q'(X, Y) = Y^2 - 2a_2 XY + (a_2^2 + b_2^2)X^2, \quad b_2 \neq 0.$$

Tomando  $L(X', Y') = ((1/b_2)X', (a_2/b_2)X' + Y')$ , temos

$$(f \circ T \circ L)(X', Y') = \frac{a}{b_2} X'(X'^2 + Y'^2).$$

Finalmente, tomando  $H(X'', Y'') = (\rho X'', \rho Y'')$ , onde  $\rho = \sqrt[3]{b_2/a}$ , temos

$$(f \circ T \circ L \circ H)(X'', Y'') = X''(X''^2 + Y''^2).$$

Portanto, para  $t_0$  raiz real e  $z$  e  $\bar{z}$  raízes complexas conjugadas, existe uma mudança de coordenadas  $\tau$ , tal que,  $f \circ \tau(x, y) = x^3 + xy^2$ . ■

**Observação 2.2.** As cúbicas  $x^3 + y^3$  e  $x^3 + xy^2$  são equivalentes. De fato,

$$\frac{x^3 + y^3}{y^3} = \left( \frac{x}{y} \right)^3 + 1 = t^3 + 1.$$

A equação  $t^3 + 1 = 0$  tem uma raiz real e 2 complexas conjugadas. Logo, pelo caso 4 do Teorema 2.2, o resultado segue.

## 2.3 Uma Classificação de Sistemas Hamiltonianos Quadráticos Planares

Considere dois polinômios relacionados através de uma mudança de coordenadas  $F$ . O teorema a seguir mostra que os seus respectivos campos Hamiltonianos também estão relacionados. Mais do que isso, esta relação também depende da mudança de coordenadas  $F$ .

**Teorema 2.3.** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = (ax + by + e_1, cx + dy + e_2)$ , uma mudança de coordenadas afim. A menos de uma multiplicação por escalar,  $F$  leva campo Hamiltoniano em campo Hamiltoniano. Mais especificamente, se  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e  $\tilde{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por  $\tilde{H} = H \circ F^{-1}$ , então*

$$\left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y}, -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right) = \frac{1}{ad - bc} \tilde{\mathcal{X}}$$

onde  $\tilde{\mathcal{X}} = JF(\partial H/\partial y, -\partial H/\partial x)$ , com  $(x, y) = F^{-1}(x_1, y_1)$  e  $JF$  a matriz Jacobiana de  $F$ .

*Demonstração.* Note primeiramente que

$$F^{-1}(x_1, y_1) = \frac{1}{ad - bc} \left( -de_1 + be_2 + dx_1 - by_1, ce_1 - ae_2 - cx_1 + ay_1 \right).$$

Pela regra da cadeia, segue que

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y}, -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right) &= \left( \frac{\partial}{\partial y} H(F^{-1}), -\frac{\partial}{\partial x} H(F^{-1}) \right) \\ &= \frac{1}{ad - bc} \left( -b \frac{\partial H}{\partial x} + a \frac{\partial H}{\partial y}, -d \frac{\partial H}{\partial x} + c \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial y} \\ -\frac{\partial H}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} JF \left( \frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{ad - bc} \tilde{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue. ■

O teorema a seguir classifica os campos Hamiltonianos quadráticos planares em quatro famílias de campos.

**Teorema 2.4.** *Seja  $\mathcal{X}$  um campo vetorial Hamiltoniano quadrático planar. Então  $\mathcal{X}$  é topologicamente equivalente a um dos quatro campos vetoriais Hamiltonianos:*

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_1 &= (\alpha + bx + cy, \beta - ax - by - x^2); \\ \mathcal{X}_2 &= (\alpha + bx + cy + x^2, \beta - ax - by - 2xy); \\ \mathcal{X}_3 &= (\alpha + bx + cy - 2xy, \beta - ax - by - 3x^2 + y^2); \\ \mathcal{X}_4 &= (\alpha + bx + cy + y^2, \beta - ax - by - x^2).\end{aligned}$$

Além disso, se  $\mathcal{X}$  tem (respectivamente, não tem) pontos singulares finitos, então podemos assumir que  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$  (respectivamente,  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ).

*Demonstração.* Se  $\mathcal{X} = (\partial H/\partial y, -\partial H/\partial x)$ , então denote por  $H_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , o polinômio homogêneo de grau  $i$  tal que  $H = H_1 + H_2 + H_3$ . Pelo Teorema 2.2, qualquer polinômio homogêneo de grau 3 de duas variáveis é equivalente a um dos seguintes polinômios:  $0$ ,  $x^3/3$ ,  $x^2y$ ,  $x(x^2 - y^2)$  e  $(x^3 + y^3)/3$ . Como  $\mathcal{X}$  é um campo vetorial quadrático podemos omitir o polinômio nulo. Além disso, pelo Teorema 2.3, essa mudança de coordenadas leva campo vetorial Hamiltoniano em campo vetorial Hamiltoniano. Portanto, a primeira parte deste teorema está provado. Além disso, se  $\mathcal{X}$  tem algum ponto singular finito então, com uma translação, podemos movê-lo para a origem e portanto podemos assumir que  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ . ■

O lema a seguir divide cada uma das quatro famílias obtidas no Teorema 2.4 em quatro novas subfamílias, mas com a diferença de termos o número de parâmetros em cada subfamília reduzido.

**Lema 2.1.** *Seja  $\mathcal{X}$  um dos quatro campos dados no Teorema 2.4. Então  $\mathcal{X}$  é topologicamente equivalente ao mesmo campo vetorial com ou  $a = b = c = 0$ , ou  $b = c = 0$  e  $a = 1$ , ou  $b = 0$  e  $c = 1$ , ou  $b = 1$ .*

*Demonstração.* Mostraremos este lema para o campo  $\mathcal{X}_1$  do Teorema 2.4 com  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ . A prova para os demais casos segue de forma análoga.

Considere o sistema

$$\mathcal{X}_1 = \begin{cases} \dot{x} = bx + cy, \\ \dot{y} = -ax - by - x^2. \end{cases} \quad (2.8)$$

**Caso 1.** Se  $b \neq 0$  então por uma mudança de coordenadas e um reescalonamento no tempo da forma

$$x \rightarrow \alpha X, \quad y \rightarrow \beta Y, \quad t \rightarrow \gamma \tau, \quad (2.9)$$

com  $\alpha = b^2$ ,  $\beta = b^3$  e  $\gamma = 1/b$ , o sistema (2.8) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{X} = X + cY, \\ \dot{Y} = -\frac{aX}{b^2} - Y - X^2. \end{cases} \quad (2.10)$$

Obtemos assim a primeira subfamília do sistema (2.8).

**Caso 2.** Se  $b = 0$  e  $c \neq 0$  então por uma mudança de coordenadas e um reescalonamento no tempo como em (2.9) com  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1/\sqrt{|c|}$  e  $\gamma = 1/\sqrt{|c|}$ , o sistema (2.8) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{X} = Y, \\ \dot{Y} = -aX - X^2. \end{cases}$$

Obtemos assim a segunda subfamília para o sistema (2.8).

**Caso 3.** Se  $b = c = 0$  e  $a \neq 0$  então por uma mudança de coordenadas e um reescalonamento no tempo como em (2.9) com  $\alpha = a$  e  $\beta = a^2\gamma$ , o sistema (2.8) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{X} = 0, \\ \dot{Y} = -X - X^2. \end{cases}$$

Obtemos assim a terceira subfamília para o sistema (2.8).

**Caso 4.** Se  $a = b = c = 0$  então trivialmente o sistema (2.8) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{X} = 0, \\ \dot{Y} = -X^2, \end{cases}$$

concluindo assim todas as possibilidades de subfamílias para o sistema (2.8). ■

# Capítulo 3

## Retratos de Fase Globais de Sistemas Hamiltonianos Quadráticos Planares

Neste capítulo vamos nos dedicar à prova do Teorema 2.1. Para isso, utilizaremos a classificação dos campos Hamiltonianos que obtivemos no Teorema 2.4 e a redução de parâmetros que mostramos no Lema 2.1. Além disto, vamos utilizar constantemente as ferramentas apresentadas no Capítulo 1, como por exemplo a Compactificação de Poincaré, a técnica do blow-up e o Teorema dos Pontos Singulares Nilpotentes.

Apresentaremos este capítulo em cinco seções. Nas seções 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 vamos estudar os retratos de fase globais de cada um dos quatro campos do Teorema 2.4 no caso em que  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ . Já na seção 3.5, vamos estudar os retratos de fase globais de cada um dos quatro campos do Teorema 2.4 no caso em que  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ .

### 3.1 Sistema $\mathcal{X}_1$ com $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

Iniciaremos esta seção estudando os pontos singulares no infinito do sistema

$$\mathcal{X}_1 = \begin{cases} \dot{x} = bx + cy, \\ \dot{y} = -ax - by - x^2, \end{cases} \quad (3.1)$$

e posteriormente, estudaremos os pontos singulares finitos e os possíveis retratos de fase globais.

### Pontos singulares infinitos

Utilizando (1.11), o sistema (3.1) na carta local  $(U_1, \phi_1)$  se escreve como

$$\begin{cases} \dot{u} = -1 - v(a + 2bu + cu^2), \\ \dot{v} = -v^2(b + cu). \end{cases} \quad (3.2)$$

Quando  $v = 0$  não há pontos singulares na carta local  $(U_1, \phi_1)$ . Na carta local  $(U_2, \phi_2)$ , usando (1.12), o sistema (3.1) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{u} = u^3 + v(c + 2bu + au^2), \\ \dot{v} = v(u^2 + bv + auv). \end{cases} \quad (3.3)$$

Quando  $v = 0$  a origem é o único ponto singular do sistema (3.3). A matriz Jacobiana do sistema (3.3) na origem é dada por

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se  $c \neq 0$  então, por uma mudança de coordenadas e um reescalonamento no tempo, podemos considerar  $c = 1$ . Neste caso, a origem é um ponto singular nilpotente. Utilizando o Teorema 1.3 (**Teorema dos Pontos Singulares Nilpotentes**) obtemos que a origem da carta local  $(U_2, \phi_2)$  é um nó repulsor. Mais especificamente obtemos, de acordo com a notação do Teorema 1.3, que  $F(u) = -u^5 + o(u^6)$  e  $G(u) = 4u^2 + o(u^3)$ . Portanto, o retrato de fase local desta singularidade é dada pela Figura 1.1 (m).

Se  $c = 0$  a origem é um ponto singular linearmente nulo. Neste caso, precisamos utilizar a técnica do blow-up para descrever a dinâmica local neste ponto.

#### *Blow-up no sistema (3.3) na direção $u$*

Realizando um blow-up direcional  $(u, v) \mapsto (u, w)$ , com  $w = v/u$ , no sistema (3.3) obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = u^2(u + 2bw + auw), \\ \dot{w} = -bw^2. \end{cases}$$

Eliminando o fator comum  $u$  obtemos um novo sistema dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = u(u + 2bw + auw), \\ \dot{w} = -bw^2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Quando  $u = 0$ , a origem é o único ponto singular do sistema (3.4). Dividiremos nosso estudo em dois casos, a saber;  $b = 0$  e  $b \neq 0$ .

Se  $b = 0$  então o sistema (3.4) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{u} = u^2(1 + aw), \\ \dot{w} = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Note que temos duas possibilidades para o retrato de fase local:

- Se  $a = 0$  então temos a reta  $u = 0$  de pontos singulares. Além disso, o campo em todos os quadrantes aponta para o sentido leste como mostra a Figura 3.1 (1).
- Se  $a \neq 0$  então através de uma mudança de coordenadas podemos considerar  $a = 1$  e neste caso, temos as retas  $u = 0$  e  $w = -1$  de pontos singulares. Além disso, o campo aponta para o leste se  $w > -1$  ou para o oeste se  $w < -1$  como mostra a Figura 3.1 (2).

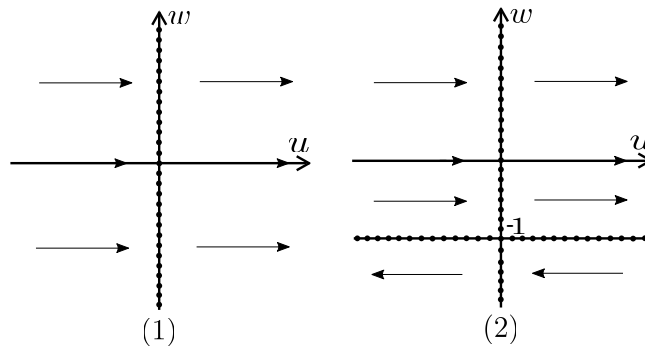


Figura 3.1: Campo próximo à origem do sistema (3.5). Na Figura (1)  $a = b = 0$ . Na Figura (2)  $a \neq 0$  e  $b = 0$ .

Se  $b \neq 0$  então será necessário fazer um blow-up no sistema (3.4).

***Blow-up no sistema (3.4) com  $b \neq 0$  na direção  $u$***

Realizando um blow-up direcional  $(u, w) \mapsto (u, z)$ , com  $z = w/u$ , no sistema (3.4) com  $b \neq 0$  obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = u^2(1 + 2bz + auz), \\ \dot{z} = -uz(1 + 3bz + auz). \end{cases}$$



Eliminando o fator comum  $u$  obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 + 2bz + auz), \\ \dot{z} = -z(1 + 3bz + auz). \end{cases} \quad (3.6)$$

Como  $b \neq 0$  então, através de uma mudança de coordenadas, podemos considerar  $b = 1$  e neste caso, quando  $u = 0$  temos a origem e  $(0, -1/3)$  como pontos singulares do sistema (3.6). A matriz Jacobiana do sistema (3.6) em cada ponto singular é dada por

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J\left(0, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{a}{9} & 1 \end{pmatrix}$$

e neste caso, a origem é um ponto singular do tipo sela e  $(0, -1/3)$  um ponto singular do tipo nó repulsor.

***Blow-up no sistema (3.4) com  $b \neq 0$  na direção  $w$***

Realizando um blow-up direcional  $(u, w) \mapsto (z, w)$ , com  $z = u/w$ , no sistema (3.4) com  $b \neq 0$  obtemos, depois de eliminar o fator comum  $w$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = z(3b + z + awz), \\ \dot{w} = -bw. \end{cases} \quad (3.7)$$

Como  $b \neq 0$  então podemos considerar  $b = 1$  e, neste caso, temos que estudar apenas a estabilidade da origem. Quando  $w = 0$  temos que a origem é ponto singular para o sistema (3.7). A matriz Jacobiana do sistema (3.7) na origem é dada por

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ou seja, a origem é um ponto singular do tipo sela.

***Blow-up no sistema (3.3) na direção  $v$***

Realizando um blow-up direcional  $(u, v) \mapsto (w, v)$ , com  $w = u/v$ , no sistema (3.3) obtemos, depois de eliminar o fator comum  $v$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{w} = bw, \\ \dot{v} = v(b + vw(a + w)). \end{cases} \quad (3.8)$$

Quando  $v = 0$ , basta apenas estudar a estabilidade na origem. A matriz Jacobiana do sistema (3.8) na origem é dada por

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Neste caso, se  $b \neq 0$  então podemos considerar  $b = 1$  e portanto, a origem é um ponto singular do tipo nó repulsor. Se  $b = 0$  então o sistema (3.8) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{w} = 0, \\ \dot{v} = v^2 w(a + w). \end{cases} \quad (3.9)$$

Daí temos duas possibilidades para o retrato de fase local da origem no sistema (3.9):

- Se  $a = 0$  então temos as retas  $w = 0$  e  $v = 0$  de pontos singulares. Além disso, o campo associado ao sistema (3.9) em todos os quadrantes aponta para o sentido norte, como mostra a Figura 3.4 (1).
- Se  $a \neq 0$  então podemos considerar  $a = 1$  e neste caso, temos as retas  $w = 0$ ,  $w = -1$  e  $v = 0$  de pontos singulares. Além disso, o campo associado ao sistema (3.9) no primeiro e quarto quadrante aponta para o sentido norte e, no segundo e terceiro quadrante aponta para o sentido sul se  $-1 < w < 0$  ou para o sentido norte se  $w < -1$ , como mostra a Figura 3.4 (2).

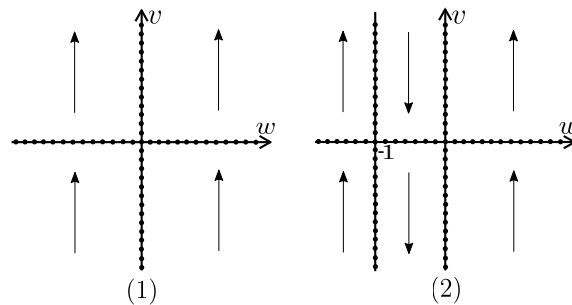


Figura 3.2: Campo próximo à origem do sistema (3.9). Na Figura (1)  $a = b = 0$ . Na Figura (2)  $a \neq 0$  e  $b = 0$ .

Finalmente, voltando com as mudanças de variáveis em cada caso, até o sistema (3.3), como mostram as Figuras 3.3 e 3.4, temos o retrato de fase local da origem na carta  $(U_2, \phi_2)$ .

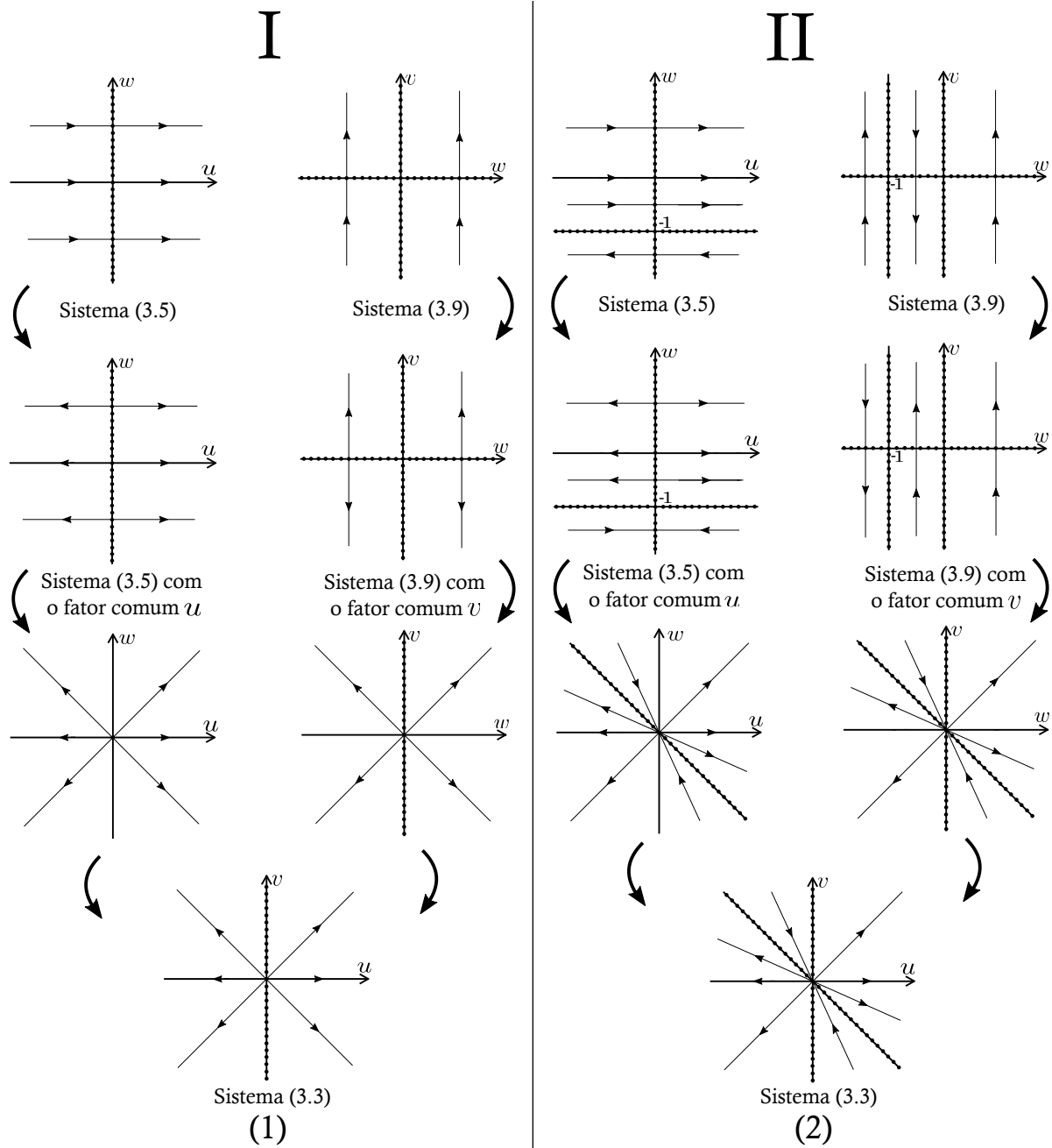


Figura 3.3: Blow-up na origem da carta  $(U_2, \phi_2)$ . Na Figura I  $a = b = c = 0$ . Na Figura II  $a \neq 0$  e  $b = c = 0$ .

## III

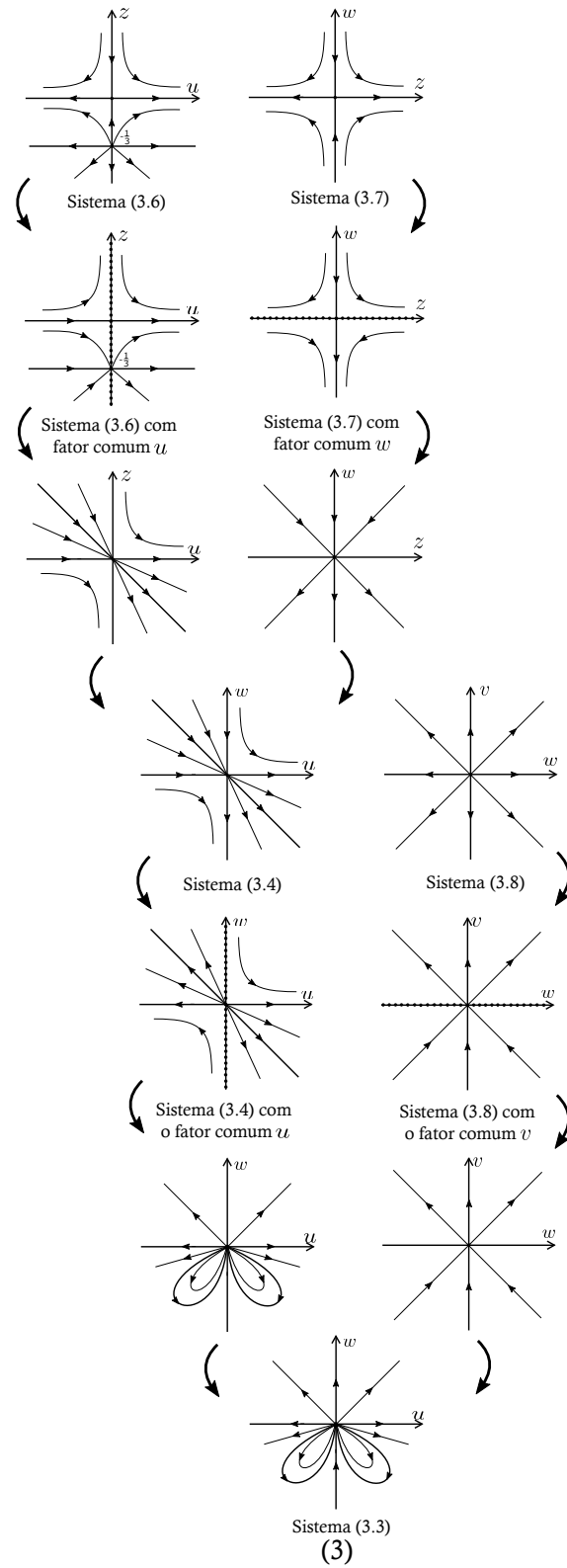


Figura 3.4: Blow-up na origem da carta  $(U_2, \phi_2)$ . Na Figura III  $c = 0$  e  $b \neq 0$ .

Em resumo, temos a Tabela 3.1.

Retrato de fase local no infinito				
Parâmetros			Carta $(U_1, \phi_1)$	Carta $(U_2, \phi_2)$
$c \neq 0$			não existem pontos singulares	Figura 1.1 (m)
$c = 0$	$b = 0$	$a = 0$	não existem pontos singulares	Figura 3.3 (1)
		$a \neq 0$	não existem pontos singulares	Figura 3.3 (2)
	$b \neq 0$		não existem pontos singulares	Figura 3.4 (3)

Tabela 3.1: Retrato de fase local no infinito do sistema (3.1).

### Pontos singulares finitos e retrato de fase global

Vamos estudar agora os pontos singulares finitos e os possíveis retratos de fase globais do sistema  $\mathcal{X}_1$  provando o seguinte teorema.

**Teorema 3.1.** *Considere o campo Hamiltoniano  $\mathcal{X}_1 = (bx + cy, -ax - by - x^2)$ . Então,*

- (1) *Se  $a = b = c = 0$ , o campo  $\mathcal{X}_1$  tem o retrato de fase 1 na Figura 2.1;*
- (2) *Se  $b = c = 0$  e  $a \neq 0$ , o campo  $\mathcal{X}_1$  tem o retrato de fase 2 na Figura 2.1;*
- (3) *Se  $b = 0$  e  $c \neq 0$ , o campo  $\mathcal{X}_1$  tem o retrato de fase 3 na Figura 2.1 se  $a = 0$ , e 4 se  $a \neq 0$ ;*
- (4) *Se  $b \neq 0$  o campo  $\mathcal{X}_1$  tem o retrato de fase 5 na Figura 2.1 se  $c = 0$ , 3 se  $c \neq 0$  e  $ac = 1$ , e 4 se  $c \neq 0$  e  $ac \neq 1$ .*

*Demonstração.* (1) Se  $a = b = c = 0$  então o sistema  $\mathcal{X}_1$  se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = -x^2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Neste caso, temos a reta  $x = 0$  de pontos singulares finitos. Além disso, o campo associado ao sistema (3.10), em todos os quadrantes vai para o sentido sul, como mostra a Figura 3.5.

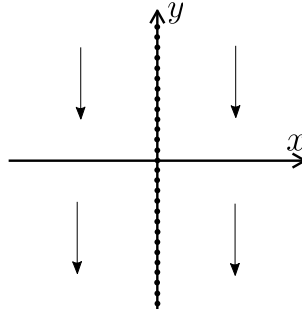


Figura 3.5: Campo de vetores do sistema (3.10) próximo à origem.

Portanto, observando os pontos singulares infinitos apresentados na Tabela 3.1 juntamente com o Teorema 1.1 (**Teorema do Fluxo Tubular**), segue que o sistema (3.10) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 1 da Figura 2.1.

(2) Se  $b = c = 0$  e  $a \neq 0$  então, pelo Lema 2.1, podemos assumir que  $a = 1$ . Segue que o sistema  $\mathcal{X}_1$  se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = -x - x^2. \end{cases} \quad (3.11)$$

Neste caso, temos as retas  $x = 0$  e  $x = -1$  de pontos singulares finitos. Além disso, o campo associado ao sistema (3.11), no primeiro e quarto quadrante aponta para a direção sul, e no segundo e terceiro quadrante o campo aponta para a direção norte quando  $-1 < x < 0$  e aponta para a direção sul quando  $x < -1$ , como mostra a Figura 3.6.

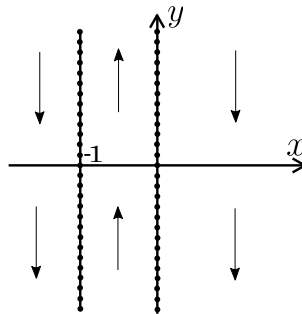


Figura 3.6: Campo de vetores do sistema (3.11) próximo à origem.

Portanto, segue do Teorema 1.1 e da Tabela 3.1, que o sistema (3.11) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 2 da Figura 2.1.

(3) Suponha que  $b = 0$  e  $c \neq 0$  então, pelo Lema 2.1, podemos assumir que  $c = 1$ . Daí o sistema  $\mathcal{X}_1$  se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ax - x^2. \end{cases} \quad (3.12)$$

Neste caso, os possíveis pontos singulares finitos do sistema (3.12) são

$$P_0 = (0, 0) \quad \text{e} \quad P_1 = (-a, 0).$$

Dividiremos este estudo em 2 casos, a saber;  $a = 0$  e  $a \neq 0$ .

Se  $a = 0$  então  $P_0 = P_1$  é o único ponto singular finito. A matriz Jacobiana do sistema (3.12) em  $P_0$  é dada por

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,  $P_0$  é um ponto singular nilpotente. Utilizando o Teorema 1.3 obtemos que  $P_0$  é uma cúspide. Mais especificamente obtemos, de acordo com a notação do Teorema 1.3, que  $F(x) = -x^2 + o(x^3)$  e  $G(x) = 0$ . Portanto, o retrato de fase local desta singularidade é dada pela Figura 1.1 (h). Observando a Tabela 3.1, obtemos que o sistema (3.12) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 3 da Figura 2.1.

Se  $a \neq 0$  então  $P_0$  e  $P_1$  são os únicos pontos singulares finitos. A matriz Jacobiana do sistema (3.12) em cada ponto singular é dada por

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

e com determinantes dados por  $D(P_0) = a$  e  $D(P_1) = -a$ , respectivamente. Sendo assim, se  $a > 0$ ,  $P_0$  é um ponto singular do tipo centro e  $P_1$  um ponto singular do tipo sela e, se  $a < 0$  temos o oposto. Em qualquer caso, observando a Tabela 3.1, obtemos que o sistema (3.12) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 4 da Figura 2.1.

(4) Suponha que  $b \neq 0$  então, pelo Lema 2.1, podemos assumir que  $b = 1$ . Segue que o sistema  $\mathcal{X}_1$  se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = x + cy, \\ \dot{y} = -ax - y - x^2. \end{cases} \quad (3.13)$$

Neste caso, os possíveis pontos singulares finitos do sistema (3.13) são

$$P_0 = (0, 0) \quad \text{e} \quad P_1 = \left( \frac{1-ac}{c}, \frac{-1+ac}{c^2} \right).$$

Dividiremos este estudo em dois casos, a saber;  $c = 0$  e  $c \neq 0$ .

Se  $c = 0$  então  $P_0$  é o único ponto singular finito. A matriz Jacobiana do sistema (3.13) em  $P_0$  é dada por

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & -1 \end{pmatrix},$$

ou seja,  $P_0$  é um ponto singular do tipo sela. Portanto, observando a Tabela 3.1, temos que o sistema (3.13) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 5 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser obtido quando  $a = 0$ .

Se  $c \neq 0$  então  $P_0$  e  $P_1$  são os pontos singulares finitos. Quando  $ac = 1$  temos que  $P_0 = P_1$  e, neste caso, a matriz Jacobiana do sistema (3.13) em  $P_0$  é dada por

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ -a & -1 \end{pmatrix}.$$

Como  $D(P_0) = 0$  e  $J(P_0)$  não é a matriz nula então,  $P_0$  é um ponto singular nilpotente. Utilizando o Teorema 1.3 obtemos que  $P_0$  é uma cúspide. Mais especificamente obtemos, de acordo com a notação do Teorema 1.3, que  $F(x) = c^2x^2 + o(x^3)$  e  $G(x) = 0$ . Assim, o retrato de fase local desta singularidade é dada pela Figura 1.1 (h). Portanto, observando a Tabela 3.1, o sistema (3.13) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 3 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser obtido quando  $a = 1/4$  e  $c = 4$ .

Suponha agora que  $ac \neq 1$ , então  $P_0$  e  $P_1$  são os únicos pontos singulares finitos. A matriz Jacobiana do sistema (3.13) em cada ponto é dada por

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ -a & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ \frac{ac-2}{c} & -1 \end{pmatrix},$$

e com determinantes dados por  $D(P_0) = -1 + ac$  e  $D(P_1) = 1 - ac$ , respectivamente. Sendo assim, se  $ac > 1$  então  $P_0$  é um ponto singular do tipo centro e  $P_1$  um ponto singular do tipo sela e, se  $ac < 1$  temos o oposto. Em qualquer caso, observando a Tabela



3.1, obtemos finalmente que o sistema (3.13) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 4 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser obtido quando  $a = 1$  e  $c = 4$ .

■

## 3.2 Sistema $\mathcal{X}_2$ com $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

Iniciaremos esta seção estudando os pontos singulares no infinito do sistema

$$\mathcal{X}_2 = \begin{cases} \dot{x} = bx + cy + x^2, \\ \dot{y} = -ax - by - 2xy, \end{cases} \quad (3.14)$$

e posteriormente, estudaremos os pontos singulares finitos e os respectivos retratos de fase globais.

### Pontos singulares infinitos

Na carta local  $(U_1, \phi_1)$  o sistema (3.14) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{u} = -3u - v(a + cu^2 + 2bu), \\ \dot{v} = -v(1 + bv + cuv). \end{cases} \quad (3.15)$$

Quando  $v = 0$  a origem é o único ponto singular do sistema (3.15). A matriz Jacobiana do sistema (3.15) na origem é dada por

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -3 & -a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a origem é um ponto singular do tipo nó atrator na carta local  $(U_1, \phi_1)$ . Na carta local  $(U_2, \phi_2)$  o sistema (3.14) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{u} = 3u^2 + v(c + 2bu + au^2), \\ \dot{v} = v(bv + u(2 + av)). \end{cases} \quad (3.16)$$

Quando  $v = 0$  a origem é o único ponto singular do sistema (3.16). A matriz Jacobiana do sistema (3.16) na origem é dada por

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se  $c \neq 0$  então podemos considerar  $c = 1$ . Neste caso, a origem é um ponto singular nilpotente. Utilizando o Teorema 1.3 obtemos que a origem da carta local  $(U_2, \phi_2)$  consiste de um setor hiperbólico e um setor elíptico. Mais especificamente obtemos, de acordo com a notação do Teorema 1.3, que  $F(u) = -6u^3 + o(u^4)$  e  $G(u) = 8u + o(u^2)$ . Portanto, o retrato de fase local desta singularidade é dada pela Figura 1.1 (k).

Se  $c = 0$  a origem é um ponto singular linearmente nulo. Neste caso, precisamos utilizar a técnica do blow-up para descrever a dinâmica local neste ponto.

***Blow-up no sistema (3.16) na direção  $u$***

Realizando um blow-up direcional  $(u, v) \mapsto (u, w)$ , com  $w = v/u$ , no sistema (3.16) obtemos, depois de eliminar o fator comum  $u$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = u(3 + 2bw + auw), \\ \dot{w} = -w(1 + bw). \end{cases} \quad (3.17)$$

Quando  $u = 0$  temos duas possibilidades, a saber;  $b = 0$  e  $b \neq 0$ .

Se  $b = 0$  então a origem é o único ponto singular do sistema (3.17) e este é do tipo sela. Se  $b \neq 0$  então podemos assumir que  $b = 1$ , daí temos dois pontos singulares. A origem que é um ponto singular do tipo sela e  $(0, -1)$ , que é um ponto singular do tipo nó repulsor.

***Blow-up no sistema (3.16) na direção  $v$***

Realizando um blow-up direcional  $(u, v) \mapsto (w, v)$ , com  $w = u/v$ , no sistema (3.16) obtemos, depois de eliminar o fator comum  $v$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{w} = w(b + w), \\ \dot{v} = v(b + w(2 + av)). \end{cases} \quad (3.18)$$

Quando  $v = 0$  temos que estudar apenas a estabilidade na origem do sistema (3.18). Assim temos duas possibilidades, a saber;  $b \neq 0$  e  $b = 0$ .

Se  $b \neq 0$  então podemos assumir que  $b = 1$ , e neste caso a origem é um ponto singular do tipo sela. Se  $b = 0$  então a origem é um ponto singular linearmente nulo. Neste caso, é necessário realizar um blow-up no sistema (3.18).

***Blow-up no sistema (3.18) com  $b = 0$  na direção  $w$***

Realizando um blow-up direcional  $(w, v) \mapsto (w, z)$ , com  $z = v/w$ , no sistema (3.18) com  $b = 0$  obtemos, depois de eliminar o fator comum  $w$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{w} = w, \\ \dot{z} = z(1 + awz). \end{cases} \quad (3.19)$$

Quando  $w = 0$  a origem é o único ponto singular do sistema (3.19) e este é do tipo nó repulsor.

**Blow-up no sistema (3.18) com  $b = 0$  na direção  $v$**

Realizando um blow-up direcional  $(w, v) \mapsto (z, v)$ , com  $z = w/v$ , no sistema (3.18) com  $b = 0$  obtemos, depois de eliminar os fatores comum  $v$  e  $z$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = -z(1 + av), \\ \dot{v} = v(2 + av). \end{cases} \quad (3.20)$$

Quando  $v = 0$  basta apenas estudar a estabilidade da origem do sistema (3.19). Neste caso, a origem é um ponto singular do sistema (3.19) do tipo sela.

Finalmente, voltando com as mudanças de variáveis até o sistema (3.16) em cada caso, temos o retrato de fase local da origem na carta  $(U_2, \phi_2)$ , como mostra a Figura 3.7.

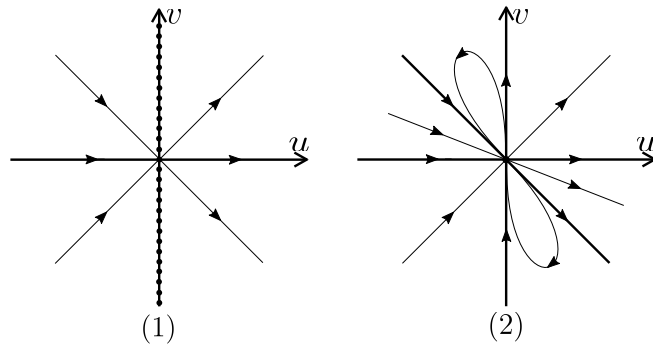


Figura 3.7: Retrato de fase local da origem na carta  $(U_2, \phi_2)$ . Na Figura (1)  $b = c = 0$ . Na Figura (2)  $c = 0$  e  $b \neq 0$ .

Em resumo, temos a Tabela 3.2.

Retrato de fase local no infinito		
Parâmetros	A origem da carta $(U_1, \phi_1)$	A origem da carta $(U_2, \phi_2)$
$c \neq 0$	nó atrator	Figura 1.1 (k)
$c = 0$	$b = 0$	nó atrator
	$b \neq 0$	nó atrator
		Figura 3.7 (1)
		Figura 3.7 (2)

Tabela 3.2: Retrato de fase local no infinito do sistema (3.14).

### Pontos singulares finitos e retrato de fase global

Vamos estudar agora os pontos singulares finitos e os possíveis retratos de fase globais do sistema  $\mathcal{X}_2$  provando o seguinte teorema.

**Teorema 3.2.** *Considere o campo Hamiltoniano  $\mathcal{X}_2 = (bx + cy + x^2, -ax - by - 2xy)$ . Então,*

- (1) *Se  $a = b = c = 0$ , o campo  $\mathcal{X}_2$  tem o retrato de fase 6 na Figura 2.1;*
- (2) *Se  $b = c = 0$  e  $a \neq 0$ , o campo  $\mathcal{X}_2$  tem o retrato de fase 6 na Figura 2.1;*
- (3) *Se  $b = 0$  e  $c \neq 0$ , o campo  $\mathcal{X}_2$  tem o retrato de fase 7 na Figura 2.1 se  $a \leq 0$ , e 8 se  $a > 0$ ;*
- (4) *Se  $b \neq 0$  o campo  $\mathcal{X}_2$  tem os seguintes retrato de fase na Figura 2.1*

*9 se  $c = 0$  e  $a \neq 0$ ;*

*10 se  $c = 0$  e  $a = 0$ ;*

*8 se  $c \neq 0$  e  $a = 0$ ;*

*11 se  $ac > 1$ , ou  $c \neq 0$ ,  $a \neq 0$ ;  $ac < 1$  e  $1 + 8ac > 0$ ;*

*12 se  $ac = 1$ , ou  $1 + 8ac = 0$ ; e*

*7 se  $1 + 8ac < 0$ .*

*Demonstração.* (1) Se  $a = b = c = 0$  então o sistema  $\mathcal{X}_2$  se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = -2xy. \end{cases} \quad (3.21)$$

Neste caso, temos a reta  $x = 0$  de pontos singulares finitos. Além disso, o campo associado ao sistema (3.21) próximo a origem é mostrado na Figura 3.8.

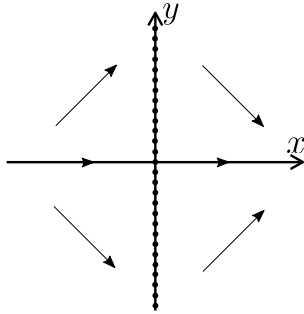


Figura 3.8: Campo do sistema (3.21) próximo a origem.

Portanto, segue do Teorema 1.1 e da Tabela 3.2, que o sistema (3.21) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 6 da Figura 2.1.

(2) Se  $b = c = 0$  e  $a \neq 0$  então o sistema  $\mathcal{X}_2$  se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = -x - 2xy. \end{cases} \quad (3.22)$$

Neste caso, temos a reta  $x = 0$  de pontos singulares finitos. Além disso, o campo associado ao sistema (3.21) próximo a origem é mostrado na Figura 3.9.

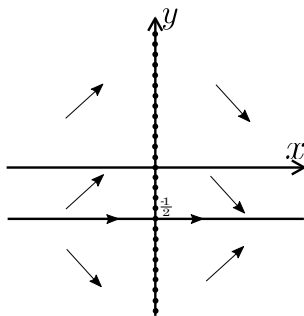


Figura 3.9: Campo do sistema (3.22) próximo a origem.

Portanto, segue do Teorema 1.1 e da Tabela 3.2, que o sistema (3.22) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 6 da Figura 2.1.

(3) Suponha que  $b = 0$  e  $c \neq 0$  então o sistema  $\mathcal{X}_2$  se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2, \\ \dot{y} = -ax - 2xy. \end{cases} \quad (3.23)$$

Neste caso, os possíveis pontos singulares finitos do sistema (3.23) são

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = \left( -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{2} \right) \quad \text{e} \quad P_2 = \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{2} \right).$$

Iremos considerar as seguintes possibilidades,  $a = 0$ ,  $a < 0$  e  $a > 0$ .

Se  $a = 0$  então  $P_0 = P_1 = P_2$  é o único ponto singular finito do sistema (3.23). A matriz Jacobiana do sistema (3.23) em  $P_0$  é dada por

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,  $P_0$  é um ponto singular nilpotente. Utilizando o Teorema 1.3 obtemos que  $P_0$  é uma sela. Portanto, observando a Tabela 3.2, o sistema (3.23) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 7 da Figura 2.1.

Se  $a < 0$  então  $P_0$  é o único ponto singular finito do sistema (3.23). A matriz Jacobiana do sistema (3.23) em  $P_0$  é dada por

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $D(P_0) = a < 0$ , segue que  $P_0$  é um ponto singular do tipo sela. Portanto, observando a Tabela 3.2, concluímos que, neste caso, o sistema (3.23) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 7 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser obtido quando  $a = -1$ .

Se  $a > 0$  então temos três pontos singulares finitos distintos,  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$ . Neste caso, a matriz Jacobiana do sistema (3.23) em cada um desses pontos singulares é dada por

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad J(P_1) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sqrt{a} & 1 \\ 0 & \sqrt{2}\sqrt{a} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J(P_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sqrt{a} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2}\sqrt{a} \end{pmatrix},$$

respectivamente. Como  $D(P_0) = a > 0$  então  $P_0$  é um ponto singular do tipo centro. Já os pontos  $P_1$  e  $P_2$  são pontos singulares do tipo sela. Portanto, observando a Tabela 3.2,

o sistema (3.23) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 8 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser obtido quando  $a = 1$ .

(4) Suponha que  $b \neq 0$  então o sistema  $\mathcal{X}_2$  se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = x + cy + x^2, \\ \dot{y} = -ax - y - 2xy. \end{cases} \quad (3.24)$$

Neste caso, os possíveis pontos singulares finitos do sistema (3.24) são dados por

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = \left( \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{1 + 8ac}), \frac{1 - 4ac - \sqrt{1 + 8ac}}{8c} \right)$$

e

$$P_2 = \left( \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{1 + 8ac}), \frac{1 - 4ac + \sqrt{1 + 8ac}}{8c} \right).$$

Consideremos as seguintes possibilidades,  $c = 0$  e  $c \neq 0$ .

Se  $c = 0$  então temos que  $P_0$  e  $P_1 = P_2 = (-1, -a)$  são os únicos pontos singulares finitos do sistema (3.24). A matriz Jacobiana do sistema (3.24) em cada um destes pontos é dada por

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso,  $P_0$  e  $P_1$  são pontos singulares do tipo sela. Portanto, observando a Tabela 3.2, o sistema (3.24) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 9, se  $a \neq 0$ , ou 10, se  $a = 0$ , da Figura 2.1. (Para mais detalhes de como encontrar o valor do parâmetro  $a = 0$  ver Observação 3.1 no final da demonstração deste teorema.)

Consideremos agora o caso  $c \neq 0$ . Neste caso a matriz Jacobiana do sistema (3.24) em  $P_0$  é dada por

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ -a & -1 \end{pmatrix}.$$

Como  $D(P_0) = ac - 1$ , então temos que:

- Se  $a = 0$  então  $P_0$  é um ponto singular do tipo sela. Neste caso, além de  $P_0$ , temos também os pontos singulares  $P_1 = (-1, 0)$  e  $P_2 = (-1/2, 1/4c)$ , com a matriz

Jacobiana em cada ponto dada por

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -\frac{1}{2c} & 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $D(P_1) = -1$  e  $D(P_2) = 1/2$  então  $P_1$  é um ponto singular do tipo sela e  $P_2$  é um ponto singular do tipo centro. Portanto, observando a Tabela 3.2, o sistema (3.24) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 8 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser atingido quando  $c = 1$ .

- Se  $ac = 1$  então  $P_0$  é um ponto singular nilpotente. Neste caso, utilizando o Teorema 1.3,  $P_0$  é uma cúspide. Além disso, temos o ponto singular  $P_1 = P_2 = (-3/2, 3/4c)$ , cuja matriz Jacobiana é dada por

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -2 & c \\ -\frac{5}{2c} & 2 \end{pmatrix}.$$

Como  $D(P_1) = -3/2$  então  $P_1$  é um ponto singular do tipo sela. Portanto, observando a Tabela 3.2, o sistema (3.24) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 12 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser atingido quando  $a = 1/2$  e  $c = 2$ .

- Se  $ac > 1$  então  $P_0$  é um ponto singular do tipo centro. Neste caso, como  $1+8ac > 0$ , temos além de  $P_0$  os pontos singulares  $P_1$  e  $P_2$ . A matriz Jacobiana no ponto  $P_1$  é dada por

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{1+8ac}) & c \\ -a - \frac{1-4ac-\sqrt{1+8ac}}{4c} & -1 + \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1+8ac}) \end{pmatrix}.$$

Como

$$D(P_1) = -\left(\frac{1}{4} + 2ac + \frac{3}{4}\sqrt{1+8ac}\right) < 0,$$

segue que  $P_1$  é um ponto singular do tipo sela.

Por outro lado, a matriz Jacobiana no ponto  $P_2$  é dada por

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{1+8ac}) & c \\ -a - \frac{1-4ac+\sqrt{1+8ac}}{4c} & -1 + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{1+8ac}) \end{pmatrix}.$$



Como

$$D(P_2) = -\frac{1}{4} - 2ac + \frac{3}{4}\sqrt{1 + 8ac}.$$

e  $ac > 1$ , segue que,  $D(P_2) < 0$  e assim,  $P_2$  é um ponto singular do tipo sela. Portanto, observando a Tabela 3.2, o sistema (3.24) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 11 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser atingido quando  $a = 1$  e  $c = 3$ .

- Se  $ac < 1$  então  $P_0$  é um ponto singular do tipo sela. Neste caso, se  $1 + 8ac > 0$ , temos além de  $P_0$  os pontos singulares  $P_1$  e  $P_2$ . Com uma análise bem semelhante ao caso anterior ( $ac > 1$ ) temos que,  $P_1$  é um ponto singular do tipo sela e  $P_2$  é um ponto singular do tipo centro. Portanto, observando a Tabela 3.2, o sistema (3.24) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 11 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser atingido quando  $a = c = 1/2$ .

Por outro lado, se  $1 + 8ac < 0$  então  $P_0$  é o único ponto singular finito do sistema (3.24) e, neste caso, observando a Tabela 3.2, o sistema (3.24) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 7 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser atingido quando  $a = -1/7$  e  $c = 1$ .

Finalmente, se  $1 + 8ac = 0$  então  $P_0$  e  $P_1 = P_2 = (-3/4, (1 - 4ac)/8c)$  são os únicos pontos singulares finitos do sistema (3.24). A matriz Jacobiana do sistema (3.24) no ponto  $P_1$  é dada por

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & c \\ -\frac{1}{4c} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Como  $D(P_1) = 0$  então  $P_1$  é um ponto singular nilpotente. Utilizando o Teorema 1.3 temos que  $P_1$  é um ponto singular do tipo cúspide. Portanto, observando a Tabela 3.2, o sistema (3.24) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 12 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser atingido quando  $a = -1/8$  e  $c = 1$ .

■

**Observação 3.1.** *Uma maneira de encontrar o valor  $a = 0$  em (4) no Teorema 3.2 é encontrarmos as conexões de selas da integral primeira  $H$ , onde  $H$  é a função Hamiltoniana associada ao sistema (3.24). Primeiramente calculamos as selas para o sistema, em seguida avaliamos  $H$  nesses pontos e igualamos os resultados, obtendo assim o valor de  $a$  esperado. Mais especificamente, a integral primeira do sistema (3.24) com  $c = 0$  é dada por*

$$H(x, y) = \frac{ax^2}{2} + x^2y + bxy.$$

*Não é difícil ver que os pontos de sela de  $H$  são  $(0, 0)$  e  $(-1, -a)$  e, além disso,*

$$H(0, 0) = 0 \quad e \quad H(-1, -a) = \frac{a}{2}.$$

*Igualando os resultados obtemos a equação*

$$\frac{a}{2} = 0,$$

*cujas raízes são  $a = 0$ .*

### 3.3 Sistema $\mathcal{X}_3$ com $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

Iniciaremos esta seção estudando os pontos singulares no infinito do sistema

$$\mathcal{X}_3 = \begin{cases} \dot{x} = bx + cy - 2xy, \\ \dot{y} = -ax - by - 3x^2 + y^2, \end{cases} \quad (3.25)$$

e posteriormente, estudaremos os pontos singulares finitos e os possíveis retratos de fase globais.

#### Pontos singulares infinitos

Na carta local  $(U_1, \phi_1)$  o sistema (3.25) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{u} = -3 + 3u^2 - v(a + 2bu + cu^2), \\ \dot{v} = -v(bv + u(-2 + cv)). \end{cases}$$

Quando  $v = 0$  temos dois pontos singulares,  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$ . O ponto  $(1, 0)$  é um ponto singular do tipo nó repulsor e o ponto  $(-1, 0)$  é um ponto singular do tipo nó atrator. Na

carta local  $(U_2, \phi_2)$  o sistema (3.25) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{u} = 3u(u^2 - 1) + v(c + au^2 + 2bu), \\ \dot{v} = v(-1 + 3u^2 + bv + auv). \end{cases}$$

Neste caso, estudaremos apenas a estabilidade da origem na carta local  $(U_2, \phi_2)$ , pois os outros pontos já foram estudados na carta local  $(U_1, \phi_1)$ . É fácil ver que, a origem é um ponto singular do tipo nó atrator. Em resumo, temos a Tabela 3.3.

Pontos Singulares no infinito	
Carta $(U_1, \phi_1)$	Carta $(U_2, \phi_2)$
$(1, 0)$ nó repulsor	$(0, 0)$ nó atrator
$(-1, 0)$ nó atrator	

Tabela 3.3: Pontos singulares no infinito do sistema (3.25).

### Pontos singulares finitos e retrato de fase global

A expressão explícita para os pontos singulares finitos do sistema  $\mathcal{X}_3$ , em particular para o caso em que  $b \neq 0$ , torna difícil uma análise tanto de suas existências quanto de seus retratos de fase globais. Por esta razão, tomaremos uma abordagem diferente para estudar os pontos singulares finitos do sistema  $\mathcal{X}_3$ . Primeiro encontraremos o número máximo de pontos singulares finitos permitidos para este sistema. Em seguida, usando o Teorema 1.6 (**Fórmula do Índice de Bendixson**), contaremos os índices dos pontos singulares no infinito do sistema sobre a esfera de Poincaré. O próximo passo é determinar o número possível e o retrato de fase local dos pontos singulares finitos deste sistema usando o Teorema 1.4 (**Teorema de Poincaré-Hopf na Esfera**).

O sistema  $\mathcal{X}_3$  quando  $b \neq 0$  se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = x + cy - 2xy, \\ \dot{y} = -ax - y - 3x^2 + y^2. \end{cases} \quad (3.26)$$

Primeiramente encontraremos o número máximo de pontos singulares finitos do sistema (3.26). Para isso calculamos o resultante de  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  com respeito a variável  $x$ , eliminando o fator comum  $y$ , obtemos a cúbica

$$\mathcal{C} = -4y^3 + 8y^2 + (3c^2 + 2ac - 5)y + 1 - ac.$$

O discriminante desta cúbica é  $\mathcal{D} = 16c^2\mathcal{S}$ , onde

$$\mathcal{S} = -(-8ca^3 - (36c^2 + 1)a^2 + 6c(4 - 9c^2)a + 3(1 + 33c^2 - 9c^4)).$$

Quando  $c \neq 0$ , o sinal de  $\mathcal{D}$  é determinado pelo sinal da curva  $\mathcal{S}$ . Sabemos que se  $\mathcal{D} > 0$  então a cúbica  $\mathcal{C}$  tem 3 raízes reais, se  $\mathcal{D} < 0$  a cúbica  $\mathcal{C}$  tem apenas uma raiz real. Concluimos desta forma que, para parâmetros  $(c, a)$  tais que  $\mathcal{D} > 0$  ( $c \neq 0$ ) o sistema (3.26) tem além da origem mais 3 pontos singulares. Por outro lado, quando  $\mathcal{D} < 0$  ( $c \neq 0$ ) o sistema (3.26) tem além da origem apenas mais um ponto singular. Ver Figura 3.10

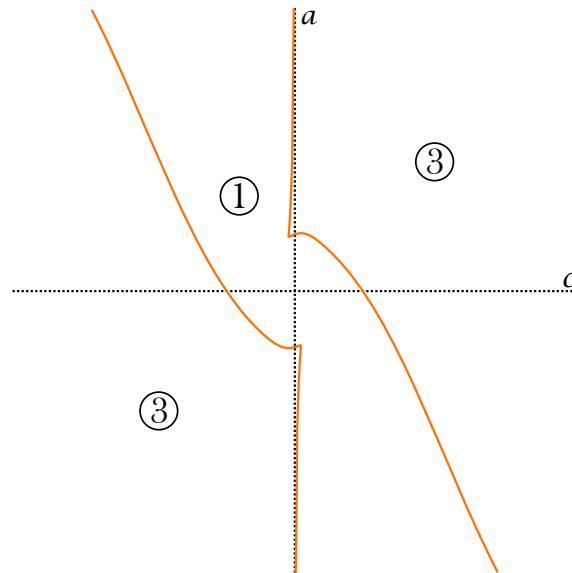


Figura 3.10: Curva  $\mathcal{S}$ . Na região ③ o sistema (3.26) tem além da origem mais 3 pontos singulares. Na região ① o sistema (3.26) tem além da origem mais 1 ponto singular.

Uma possível maneira de encontrar as curvas de bifurcações deste sistema é calculando o discriminante da função Hamiltoniana

$$H(x, y) = x^3 + \frac{ax^2}{2} + xy - xy^2 + \frac{cy^2}{2} + h, \quad (3.27)$$

com  $h \in \mathbb{R}$ , associada ao sistema (3.26). Mais especificamente, calculando o discriminante da função (3.27) com relação a variável  $y$ , o resultado será um polinômio na variável  $x$ ,

calculando o discriminante deste novo polinômio com relação a variável  $x$  e, finalmente, calculando o discriminante deste último com relação a  $h$  obtemos as 7 curvas abaixo e o diagrama de bifurcação do sistema (3.26), que é mostrado na Figura 3.11.

$$\begin{aligned}
 C_1 & : c = 0, \\
 C_2 & : a - 3c - 2 = 0, \\
 C_3 & : a - 3c + 2 = 0, \\
 C_4 & : a + c - 2 = 0, \\
 C_5 & : a + c + 2 = 0, \\
 C_6 & : ac - 1 = 0, \\
 C_7 & : -8ca^3 - (36c^2 + 1)a^2 + 6c(4 - 9c^2)a + 3(1 + 33c^2 - 9c^4) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

**Observação 3.2.** *Nas curvas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  e  $C_5$  obtemos as conexões de selas do sistema (3.26). Por outro lado, nas curvas  $C_6$  e  $C_7$  obtemos as bifurcações locais, ou seja, onde o número de pontos singulares do sistema (3.26) é alterado.*

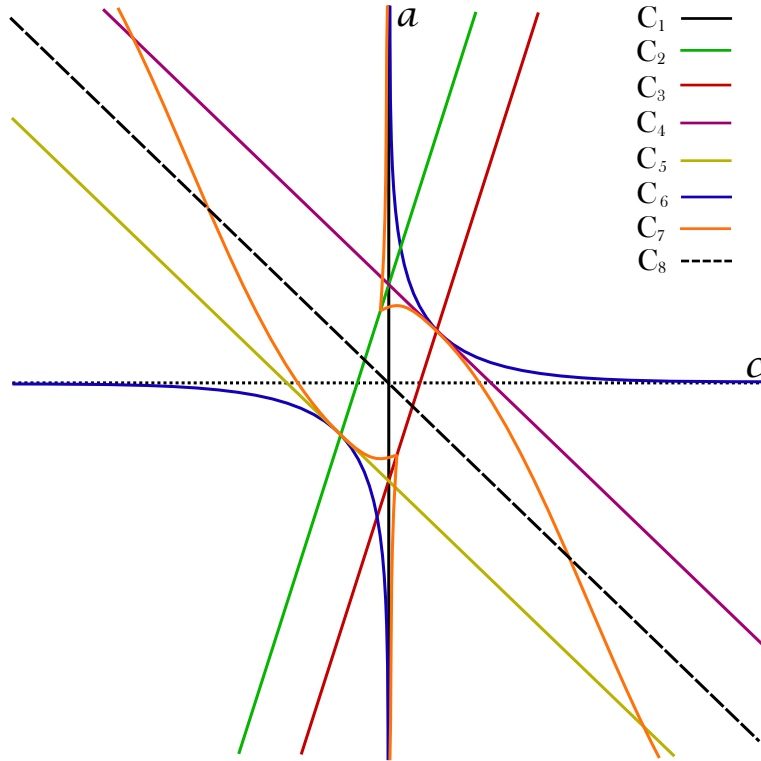


Figura 3.11: Diagrama de bifurcação do sistema (3.26).

Note que o diagrama de bifurcação do sistema (3.26) é simétrico com respeito a origem. Assim podemos considerar mais uma curva, a saber;  $C_8 : a + c = 0$ , desta forma basta estudar apenas o caso em que  $C_8 \geq 0$ . Obtemos assim o diagrama de bifurcação com cada uma das regiões limitadas pelas curvas  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , como mostra a Figura 3.12. Além disso, considere as curvas  $L_{i,j}$  que divide as regiões  $R_i$  e  $R_j$ , definidas por

$$\begin{aligned}
L_{1,2} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_3 = 0, \quad c > 1\}, \\
L_{1,9} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_2 = 0, \quad c > 1/3\}, \\
L_{1,10} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_6 = 0, \quad 1/3 < c < 1\}, \\
L_{2,3} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_6 = 0, \quad c > 1\}, \\
L_{3,4} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_4 = 0, \quad c > 1\}, \\
L_{4,5} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_7 = 0, \quad C_8 > 0, \quad c > 1\}, \\
L_{5,6} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_1 = 0, \quad 0 < a < \sqrt{3}\}, \\
L_{5,11} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_7 = 0, \quad C_8 > 0, \quad 0 < c < 1\}, \\
L_{6,7} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_4 = 0, \quad -7 - 4\sqrt{3} < c < -7 + 4\sqrt{3}\}, \\
L_{6,12} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_7 = 0, \quad C_8 > 0, \quad -1/9 < c < 0, \quad 5/3 < a < \sqrt{3}\}, \\
L_{6,13} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_7 = 0, \quad C_8 > 0, \quad -1/9 < c < -7 + 4\sqrt{3}, \quad 5/3 < a < 9 - 4\sqrt{3}\}, \\
L_{6,16} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_7 = 0, \quad C_8 > 0, \quad -7 - 4\sqrt{3} < c < -\sqrt{37 + 14\sqrt{7}}\}, \\
L_{7,14} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_7 = 0, \quad C_8 > 0, \quad -7 + 4\sqrt{3} < c < 0, \quad a > 9 - 4\sqrt{3}\}, \\
L_{7,15} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_7 = 0, \quad C_8 > 0, \quad c < -7 - 4\sqrt{3}\}, \\
L_{8,9} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_6 = 0, \quad 0 < c < 1/3\}, \\
L_{8,10} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_2 = 0, \quad 0 < c < 1/3\}, \\
L_{8,14} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_1 = 0, \quad a > 2\}, \\
L_{10,11} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_4 = 0, \quad 0 < c < 1\}, \\
L_{11,12} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_1 = 0, \quad \sqrt{3} < c < 2\}, \\
L_{12,13} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_2 = 0, \quad -1/9 < c < 0\}, \\
L_{13,14} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_4 = 0, \quad -7 + 4\sqrt{3} < c < 0\}, \\
L_{15,16} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_4 = 0, \quad c < -7 - 4\sqrt{3}\}.
\end{aligned}$$

Finalmente as coordenadas dos pontos de intersecção das curvas  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , tal que  $C_8 > 0$ , são fáceis de encontrar e são dadas por

$$\begin{aligned}
P_{3,4} &= (1, 1) & P_{2,7} &= \left(-\frac{1}{9}, \frac{5}{3}\right) & P_{2,6} &= \left(\frac{1}{3}, 3\right) \\
P_{4,7\pm} &= \left(-7 \pm \sqrt{48}, 9 \mp \sqrt{48}\right) & P_{2,4} &= (0, 2) & P_{1,7} &= (0, \sqrt{3})
\end{aligned}$$

onde  $P_{i,j}$  é o ponto na intersecção da curva  $C_i$  com a curva  $C_j$ .

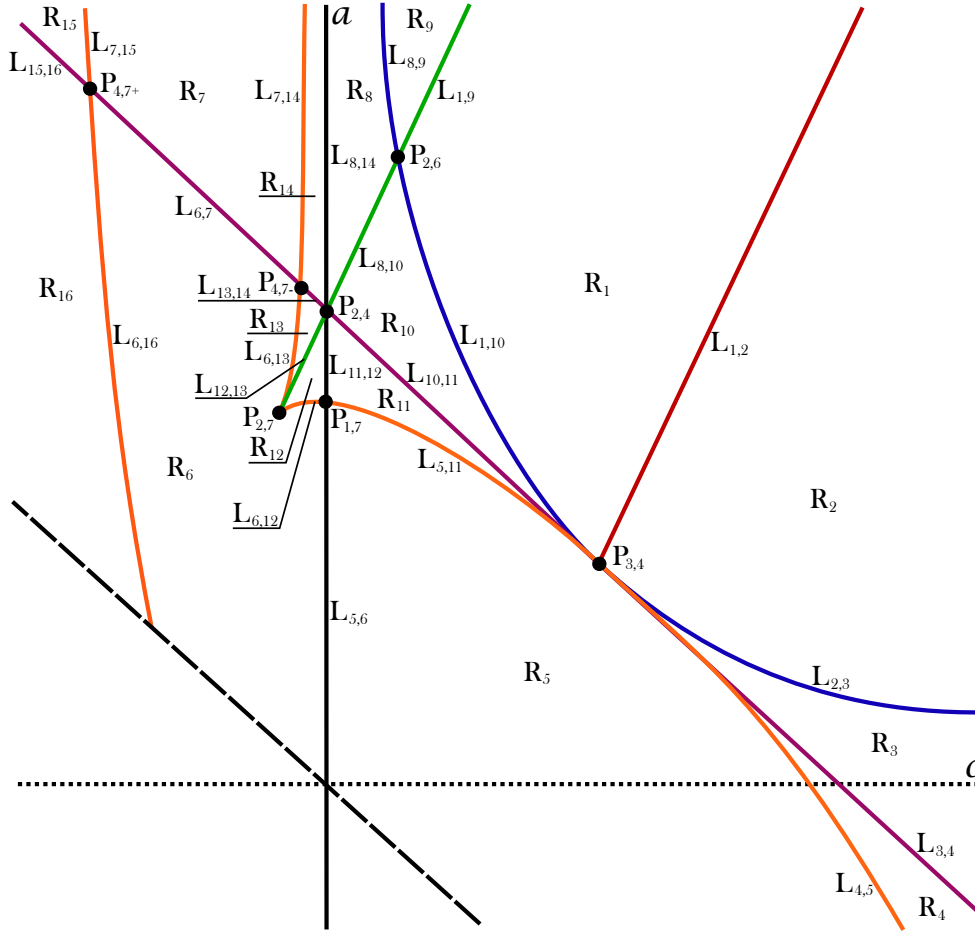


Figura 3.12: Regiões  $R_i$ , curvas  $L_{i,j}$  e pontos  $P_{i,j}$  do diagrama de bifurcação do sistema (3.26).

As duas proposições a seguir nos mostram que os pontos singulares degenerados do sistema (3.26), se existirem, são nilpotentes e pertencem as curvas  $C_6$  ou  $C_7$ .

**Proposição 3.1.** *Os pontos singulares degenerados do sistema (3.26), se existirem, ocorrem quando os parâmetros  $a$  e  $c$  pertencem as curvas  $C_6$  ou  $C_7$ . Além disso, existe no máximo um ponto singular degenerado.*

*Demonstração.* Considere os dois polinômios de (3.26) juntamente com o determinante da matriz Jacobiana do sistema (3.26) que é dado por

$$D = (1 - 2y)(-1 + 2y) - (c - 2x)(-a - 6x).$$



Calculando a base de Groebner desses 3 polinômios obtemos um conjunto de 5 polinômios. Igualando esses 5 polinômios a zero vemos que existe no máximo uma solução deste sistema, isto é, existe no máximo um ponto degenerado. O primeiro desses polinômios é dado por

$$\underbrace{(ac - 1)^2}_{C_6} \underbrace{(-8ca^3 - (36c^2 + 1)a^2 + 6c(4 - 9c^2)a + 3(1 + 33c^2 - 9c^4))}_{C_7} = 0.$$

Assim, os pontos degenerados ocorrem nas curvas  $C_6$  ou  $C_7$ . Ver Figura 3.11. ■

**Proposição 3.2.** *Seja  $p$  um ponto singular isolado do sistema (3.26). Se  $p$  é degenerado, então  $p$  é nilpotente.*

*Demonstração.* Seja  $p = (x_0, y_0)$  um ponto singular degenerado do sistema (3.26) e suponha que  $p$  seja linearmente nulo. Então  $p$  satisfaz as equações

$$\begin{cases} x_0 + cy_0 - 2x_0y_0 = 0, \\ -ax_0 - y_0 - 3x_0^2 + y_0^2 = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Além disso, a matriz Jacobiana do sistema (3.26) no ponto  $p$  é dada por

$$J(p) = \begin{pmatrix} 1 - 2y_0 & c - 2x_0 \\ -a - 6x_0 & -1 + 2y_0 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Como  $p$  é linearmente nulo, temos que  $J(p)$  é a matriz nula. Assim em particular temos que  $y_0 = 1/2$ . Substituindo este valor de  $y_0$  em (3.29) obtemos que  $c = 0$ . De (3.30) temos que  $x_0 = 0$  e, novamente de (3.29) obtemos que  $y_0 = 0$  ou  $y_0 = 1$ , que é um absurdo. Portanto, o ponto  $p$  é nilpotente. ■

Vamos estudar agora os pontos singulares finitos e os possíveis retratos de fase globais do sistema  $\mathcal{X}_3$  provando o seguinte teorema.

**Teorema 3.3.** *Considere o campo Hamiltoniano  $\mathcal{X}_3 = (bx + cy - 2xy, -ax - by - 3x^2 + y^2)$ . Então,*

- (1) Se  $a = b = c = 0$ , o campo  $\mathcal{X}_3$  tem o retrato de fase 13 na Figura 2.1;
- (2) Se  $b = c = 0$  e  $a \neq 0$ , o campo  $\mathcal{X}_3$  tem o retrato de fase 14 na Figura 2.1;
- (3) Se  $b = 0$  e  $c \neq 0$ , o campo  $\mathcal{X}_2$  tem os seguintes retrato de fase

15 se  $a = 0$ ;

16 se  $0 < a < 3$  ou  $0 > a > -1$ ;

17 se  $a = 3$  ou  $a = -1$ ;

18 se  $3 < a$  ou  $-1 > a > -3/2$ ;

14 se  $a \leq -3/2$ .

- (4) Se  $b \neq 0$  então temos o diagrama de bifurcação dado pela Figura 3.11. Além disso, o campo  $\mathcal{X}_3$  tem os seguintes retratos de fase

15 se  $(c, a) \in \{P_{1,7}, P_{2,6}, P_{4,7\pm}\}$ ;

14 se  $(c, a) \in \{P_{3,4}, P_{2,7}, R_5, R_6, R_7\}$ ;

19 se  $(c, a) \in \{L_{5,6}, L_{6,7}\}$ ;

20 se  $(c, a) \in \{L_{4,5}, L_{5,11}, L_{6,12}, L_{6,13}, L_{7,14}, L_{7,15}, L_{6,16}, L_{2,3}, L_{1,10}, L_{8,9}\}$ ;

18 se  $(c, a) \in \{L_{1,2}, L_{3,4}, L_{10,11}, L_{8,14}, L_{12,13}\}$ ;

16 se  $(c, a) \in \{L_{1,9}, L_{13,14}, L_{11,12}, L_{8,10}, L_{15,16}\}$ ;

17 se  $(c, a) = P_{2,4}$ ;

21 se  $(c, a) \in \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}\}$ .

*Demonstração.* (1) Se  $a = b = c = 0$  então o sistema  $\mathcal{X}_3$  se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = -2xy, \\ \dot{y} = -3x^2 + y^2. \end{cases} \quad (3.31)$$

Neste caso, o sistema (3.31) tem apenas um ponto singular finito, a origem, que é um ponto singular linearmente nulo. Portanto, precisamos utilizar a técnica do blow-up para descrever a dinâmica local neste ponto.

**Blow-up no sistema (3.31) na direção  $x$**

Realizando um blow-up direcional  $(x, y) \mapsto (x, w)$ , com  $w = y/x$ , no sistema (3.31) obtemos, depois de eliminar o fator comum  $x$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2xw, \\ \dot{w} = 3(w^2 - 1). \end{cases} \quad (3.32)$$

Quando  $x = 0$  o sistema (3.32) têm dois pontos singulares,  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$ , que são ambos pontos singulares do tipo sela.

**Blow-up no sistema (3.31) na direção  $y$**

Realizando um blow-up direcional  $(x, y) \mapsto (z, y)$ , com  $z = x/y$ , no sistema (3.31) obtemos, depois de eliminar o fator comum  $y$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = 3z(z^2 - 1), \\ \dot{y} = y(1 - 3z^2). \end{cases} \quad (3.33)$$

Neste caso, basta apenas estudar a estabilidade na origem do sistema (3.33), que é um ponto singular do tipo sela. Voltando com as mudanças de variáveis, até o sistema (3.31), temos o retrato de fase local da origem, como mostra a Figura 3.13.

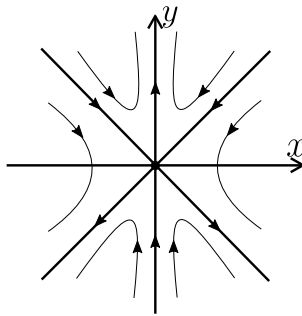


Figura 3.13: Retrato de fase local na origem do sistema (3.31).

Portanto, observando a Tabela 3.3, obtemos que o sistema (3.31) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 13 da Figura 2.1.

(2) Se  $b = c = 0$  e  $a \neq 0$  então o sistema  $\mathcal{X}_3$  se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = -2xy, \\ \dot{y} = -x - 3x^2 + y^2. \end{cases} \quad (3.34)$$

Neste caso temos dois pontos singulares finitos do sistema (3.34)

$$P_0 = (0, 0) \quad \text{e} \quad P_1 = \left( -\frac{1}{3}, 0 \right).$$

O ponto  $P_1$  é um ponto singular do tipo sela. Já o ponto  $P_0$  é um ponto singular nilpotente. Segue do Teorema 1.3, que  $P_0$  é um ponto singular do tipo sela. Portanto, observando a Tabela 3.3, obtemos que o sistema (3.34) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 14 da Figura 2.1.

(3) Se  $b = 0$  e  $c \neq 0$  então o sistema  $\mathcal{X}_3$  se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2xy, \\ \dot{y} = -ax - 3x^2 + y^2. \end{cases} \quad (3.35)$$

Neste caso, os possíveis pontos singulares finitos do sistema (3.35) são

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3+2a} \right), \quad P_2 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3+2a} \right) \quad \text{e} \quad P_3 = \left( -\frac{a}{3}, 0 \right).$$

Sendo assim :

- Se  $a < -3/2$  então  $P_0$  e  $P_3$  são os pontos singulares do sistema (3.35);
- Se  $a = -3/2$  então  $P_0$  e  $P_1 = P_2 = P_3$  são os pontos singulares do sistema (3.35);
- Se  $a = 0$  então  $P_0 = P_3$ ,  $P_1$  e  $P_2$  são os pontos singulares do sistema (3.35);
- Se  $-3/2 < a < 0$  ou  $a > 0$  então  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  são pontos singulares do sistema (3.35).

O determinante da matriz Jacobiana em cada um destes pontos é dado por

$$D(P_0) = a, \quad D(P_1) = D(P_2) = -3 - 2a \quad \text{e} \quad D(P_3) = -\left( \frac{3a + 2a^2}{3} \right).$$

**Observação 3.3.** *A fim de descrever os retratos de fase globais do sistema (3.35) necessitamos descobrir as possíveis conexões de sela. Afirmamos que para valores de parâmetros  $a = -1$  e  $a = 3$  obtemos conexões de sela da integral primeira  $H$ , onde  $H$  é a função Hamiltoniana associada ao sistema (3.35). Primeiramente calculamos as selas para o*

sistema, em seguida avaliamos  $H$  nesses pontos e igualamos os resultados, obtendo assim os valores de  $a$  esperados. Mais especificamente, a integral primeira do sistema (3.35) é dada por

$$H(x, y) = x^3 + \frac{ax^2}{2} + bxy - xy^2 + \frac{cy^2}{2}.$$

Não é difícil ver que os pontos de sela de  $H$  são

$$P_0 \quad e \quad P_3, \quad \text{se} \quad a < -\frac{3}{2},$$

$$P_0, \quad P_1, \quad e \quad P_2, \quad \text{se} \quad -\frac{3}{2} < a < 0,$$

$$P_1, \quad P_2, \quad e \quad P_3, \quad \text{se} \quad a > 0,$$

e, além disso,

$$H(P_0) = 0, \quad H(P_1) = H(P_2) = \frac{1+a}{8} \quad e \quad H(P_3) = \frac{a^3}{54}.$$

Igualando os resultados obtidos acima temos as seguintes equações

$$\frac{1+a}{8} = 0, \quad \frac{a^3}{54} = 0 \quad e \quad \frac{a^3}{54} - \frac{1+a}{8} = 0$$

cujas raízes são  $a = -1$ ,  $a = 0$  e  $a = -3/2$  (raiz dupla) ou  $a = 3$ , respectivamente.

Em resumo, temos a Tabela 3.4 com a estabilidade de cada ponto singular do sistema (3.35) e o retrato de fase global na Figura 2.1.

Parâmetro	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	Retrato de fase
$a < -\frac{3}{2}$	sela	não é ponto singular	não é ponto singular	sela	14
$a = -\frac{3}{2}$	sela	sela	= $P_1$ (sela)	= $P_1$ (sela)	14
$-\frac{3}{2} < a < -1$	sela	sela	sela	centro	18
$a = -1$	sela	sela	sela	centro	17
$-1 < a < 0$	sela	sela	sela	centro	16
$a = 0$	cúspide	sela	sela	= $P_0$ (cúspide)	15
$0 < a < 3$	centro	sela	sela	sela	16
$a = 3$	centro	sela	sela	sela	17
$a > 3$	centro	sela	sela	sela	18

Tabela 3.4: Estabilidade dos pontos singulares finitos e os retratos de fase globais do sistema (3.35).

(4) Se  $b \neq 0$  então o sistema  $\mathcal{X}_3$  se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = x + cy - 2xy, \\ \dot{y} = -ax - y - 3x^2 + y^2. \end{cases} \quad (3.36)$$

Neste caso, iremos descrever o retrato de fase global do sistema (3.36) com os parâmetros  $a$  e  $c$  pertencentes as regiões e curvas mencionadas no começo desta seção, ver Figura 3.12. Começaremos estudando o retrato de fase global do sistema (3.36) quando  $(c, a) = P_{i,j}$ . Vamos estudar apenas o caso em que  $(c, a) = P_{3,4}$ , pois os outros casos seguem de forma análoga. Quando  $(c, a) = P_{3,4} = (1, 1)$ , o sistema (3.36) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y - 2xy, \\ \dot{y} = -x - y - 3x^2 + y^2. \end{cases} \quad (3.37)$$

Neste caso, o sistema (3.37) têm dois pontos singulares finitos;  $P_1 = (0, 0)$  e  $P_2 = (2/3, 2)$ . O ponto  $P_1$  é um ponto singular nilpotente e segue diretamente do Teorema 1.3 que  $P_1$  é um ponto singular do tipo sela. O ponto  $P_2$  também é um ponto singular do tipo sela. Sendo assim, observando a Tabela 3.3, temos que o retrato de fase global do sistema (3.37) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 14 da Figura 2.1. Em resumo, temos a Tabela 3.5 com cada um dos pontos  $P_{i,j}$  e os respectivos retratos de fase, na Figura 2.1, do sistema (3.36) para esses parâmetros.

Pontos	Retrato de fase
$P_{3,4}, P_{2,7}$	14
$P_{2,6}, P_{1,7}, P_{4,7\pm}$	15
$P_{2,4}$	17

Tabela 3.5: Pontos  $P_{i,j}$  do diagrama de bifurcação do sistema (3.36) com seus respectivos retratos de fase globais.

Agora vamos descrever o retrato de fase global do sistema (3.36) quando os parâmetros  $a$  e  $c$  pertencem as curvas  $L_{i,j}$ , ou as regiões  $R_i$  e  $R_j$ , ver Figura 3.12. Como observamos no começo da seção, os pontos singulares finitos do sistema (3.36) são complicados, porém é fácil ver que a origem é um ponto singular deste sistema cujo determinante da matriz

Jacobiana é dado por  $D(0,0) = ac - 1$ . Desta forma, dividiremos nosso estudo em três casos.

**Caso  $ac - 1 > 0$**

Neste caso a origem é um centro ( $ind = 1$ ). Os pontos singulares no infinito na esfera de Poincaré são dois nós hiperbólicos ( $ind = 1$ ) na carta local  $(U_1, \phi_1)$  e um nó hiperbólico ( $ind = 1$ ) na carta local  $(U_2, \phi_2)$ , ver Tabela 3.3 (também temos os pontos singulares correspondentes nas cartas locais  $(V_1, \psi_1)$  e  $(V_2, \psi_2)$ ). Logo, a soma dos índices dos pontos singulares no infinito é  $2 \times (2 + 1) = 6$ . Portanto a soma dos índices dos pontos singulares conhecidos é  $2 \times 1 + 6 = 8$ . Pelo Teorema 1.4 a soma dos índices dos pontos singulares finitos desconhecidos tem que ser  $-6$  e, pela Proposição 3.2, não podemos ter pontos singulares linearmente nulos. Segue das Figuras 3.10 e 3.11 que o sistema (3.36), para parâmetros nesta região, tem exatamente 3 pontos singulares. Assim, a única possibilidade é termos 3 pontos singulares do tipo sela. Portanto, neste caso, o sistema (3.36) tem 4 pontos singulares, sendo que a origem é um ponto singular do tipo centro e os outros 3 são pontos singulares do tipo sela. Pela Observação 3.2, as conexões de sela ocorrem quando os parâmetros  $a$  e  $c$  pertencem as curvas  $L_{1,2}$  e  $L_{1,9}$ . Neste caso, o retrato de fase global é topologicamente equivalente ao 18 na Figura 2.1 para parâmetros na curva  $L_{1,2}$  e 16 para parâmetros na curva  $L_{1,9}$ . Um exemplo destes retratos de fase podem ser obtidos por  $a = 4, c = 2$  ( $L_{1,2}$ ) e  $a = 8, c = 2$  ( $L_{1,9}$ ). Com pequenas variações destes parâmetros obtemos que o retrato de fase global é topologicamente equivalente ao 21 na Figura 2.1 nas regiões  $R_1, R_2$  e  $R_9$ . Um resumo dos retratos de fase globais do sistema (3.36) em cada região e curva, quando  $ac - 1 > 0$ , é apresentado na Tabela 3.6.

Caso $ac - 1 > 0$	
Região ou curva	Retrato de fase
$R_1, R_2, R_9$	21
$L_{1,2}$	18
$L_{1,9}$	16

Tabela 3.6: Retrato de fase global do sistema (3.36) quando  $ac - 1 > 0$ .

**Caso  $ac - 1 < 0$**

Neste caso a origem é uma sela ( $ind = -1$ ). Os pontos singulares no infinito na esfera de Poincaré são dois nós hiperbólicos ( $ind = 1$ ) na carta local  $(U_1, \phi_1)$  e um nó hiperbólico ( $ind = 1$ ) na carta local  $(U_2, \phi_2)$ , ver Tabela 3.3 (também temos os pontos singulares correspondentes nas cartas locais  $(V_1, \psi_1)$  e  $(V_2, \psi_2)$ ). Logo, a soma dos índices dos pontos singulares no infinito é 6. Desta forma a soma dos índices dos pontos singulares conhecidos é 4. Pelo Teorema 1.4 a soma dos índices dos pontos singulares finitos desconhecidos tem que ser  $-2$  e, pela Proposição 3.2, não podemos ter pontos singulares linearmente nulos. Assim, temos as seguintes possibilidades para os pontos singulares finitos, além da origem:

- (i) uma sela;
- (ii) duas selas e um centro;
- (iii) uma sela e uma cúspide.

Pela Proposição 3.1 sabemos que as cúspides ocorrem quando os parâmetros pertencem as curvas  $C_6$  ou  $C_7$ . Como neste caso estamos considerando  $ac - 1 < 0$ , temos que o caso (iii) ocorre somente nas curvas

$$L_{4,5}, \quad L_{5,11}, \quad L_{6,12}, \quad L_{6,13}, \quad L_{7,14}, \quad L_{7,15} \quad \text{e} \quad L_{6,16}$$

que são partes da curva  $C_7$ . O retrato de fase global, para parâmetros pertencentes a qualquer uma destas curvas, é topologicamente equivalente ao 20 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser obtido quando  $a = 0$  e  $c = \sqrt{(11 + 5\sqrt{5})/6}$ . Por pequenas variações (adequadas) dos parâmetros sobre estas curvas obtemos o desaparecimento da cúspide, desta forma, obtemos os outros dois casos: (i) que é o aparecimento de um loop, ver Definição 1.19, ou (ii) que é simplesmente o desaparecimento da cúspide. Segue dos comentários no começo desta seção que para parâmetros  $(c, a)$  tais que  $\mathcal{D} > 0$  ( $c \neq 0$ ) o sistema (3.36) tem além da origem mais 3 pontos singulares e quando  $\mathcal{D} < 0$  ( $c \neq 0$ ) o sistema (3.36) apresenta além da origem apenas mais um ponto singular. Desta forma, observando as Figuras 3.10 e 3.11, o caso (i) ocorre nas regiões

$$R_3, \quad R_4, \quad R_8, \quad R_{10}, \quad R_{11}, \quad R_{12}, \quad R_{13}, \quad R_{14}, \quad R_{15} \quad \text{e} \quad R_{16}.$$



O retrato de fase global em qualquer uma destas regiões é topologicamente equivalente ao 21 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase é obtido quando  $a = 2$  e  $c = 1/4$ . Por outro lado, o caso (ii) ocorre nas regiões

$$R_5, \quad R_6 \quad \text{e} \quad R_7.$$

O retrato de fase global em qualquer uma destas regiões é topologicamente equivalente ao 14 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser obtido quando  $a = 5$  e  $c = -1/4$ .

Nas regiões descritas acima não obtemos mais variações dos pontos singulares do sistema (3.36) (tanto na quantidade quanto na estabilidade). Desta forma, as únicas alterações topológicas dos retratos de fase globais são as conexões de selas. Quando  $\mathcal{D} < 0$  obtemos somente as curvas

$$L_{5,6} \quad \text{e} \quad L_{6,7}.$$

O retrato de fase global nestes dois casos é topologicamente equivalente ao 19 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser obtido quando  $a = 1/5$  e  $c = 0$ . Quando  $\mathcal{D} > 0$  obtemos duas possíveis conexões de selas. Uma delas ocorre quando os parâmetros  $(c, a)$  pertencem a uma das seguintes curvas

$$L_{3,4}, \quad L_{10,11}, \quad L_{8,14} \quad \text{e} \quad L_{12,13}.$$

O retrato de fase global do sistema (3.36) para parâmetros nestas curvas é topologicamente equivalente ao 18 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser obtido quando  $a = 5$  e  $c = 0$ . Finalmente, a outra possível conexão de sela é encontrada quando os parâmetros  $(c, a)$  pertencem a uma das seguintes curvas

$$L_{13,14}, \quad L_{11,12}, \quad L_{8,10} \quad \text{e} \quad L_{15,16}.$$

O retrato de fase global do sistema (3.36) para parâmetros nestas curvas é topologicamente equivalente ao 16 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser obtido quando  $a = 13/7$  e  $c = 0$ . Um resumo dos retratos de fase globais do sistema (3.36) em cada região e curva, quando  $ac - 1 < 0$ , é apresentado na Tabela 3.7.

Caso $ac - 1 < 0$	
Região ou curva	Retrato de fase
$R_3, R_4, R_8, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}$	21
$L_{3,4}, L_{10,11}, L_{8,14}, L_{12,13}$	18
$L_{4,5}, L_{5,11}, L_{6,12}, L_{6,13}, L_{7,14}, L_{7,15}, L_{6,16}$	20
$R_5, R_6, R_7$	14
$L_{5,6}, L_{6,7}$	19
$L_{13,14}, L_{11,12}, L_{8,10}, L_{15,16}$	16

Tabela 3.7: Retrato de fase global do sistema (3.36) quando  $ac - 1 < 0$ .

**Caso  $ac - 1 = 0$**

Observamos primeiramente que para parâmetros  $(c, a)$  tais que  $ac - 1 = 0$  estamos exatamente sobre a curva  $C_6$ . Podemos decompor a curva  $C_6$  da seguinte forma:

$$C_6 = L_{2,3} \cup L_{1,10} \cup L_{8,9} \cup \{P_{3,4}, P_{2,6}\}.$$

Os pontos  $P_{3,4}$  e  $P_{2,6}$  já foram estudados (ver Tabela 3.5). Concentramos nossos estudos nas curvas  $L_{2,3}$ ,  $L_{1,10}$  e  $L_{8,9}$ .

Neste caso a origem é um ponto singular nilpotente e pelo Teorema 1.3 a origem é uma cúspide. Como  $c \neq 0$  então podemos assumir que  $a = 1/c$  e assim o sistema (3.36) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = x + cy - 2xy, \\ \dot{y} = -\frac{1}{c}x - y - 3x^2 + y^2. \end{cases} \quad (3.38)$$

Os pontos singulares, além da origem, do sistema (3.38) são dados explicitamente por

$$P_1 = \left( -\frac{1 - 3c^2 + \sqrt{1 + 3c^2}}{6c}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 3c^2} \right) \quad \text{e} \quad P_2 = \left( -\frac{1 - 3c^2 - \sqrt{1 + 3c^2}}{6c}, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 3c^2} \right).$$

O determinante da matriz Jacobiana do sistema (3.38) no ponto  $P_1$  é dado por

$$D(P_1) = -\frac{1}{3c^2} \left( (1 + 3c^2)^2 + \sqrt{1 + 3c^2}(1 - 9c^2) \right).$$

Com um pouco de cálculo mostra-se que  $D(P_1) \leq 0$  para todo  $c \in \mathbb{R}$  e  $D(P_1) = 0$  quando  $c = \pm 1$ . Portanto, o ponto  $P_1$  é um ponto singular do tipo sela, exceto quando  $c = \pm 1$ . O caso em que  $c = \pm 1$  já foi estudado anteriormente (ver Tabela 3.5).

O determinante da matriz Jacobiana do sistema (3.38) no ponto  $P_2$  é dado por

$$D(P_2) = -\frac{1}{3c^2} \left( (1 + 3c^2)^2 + \sqrt{1 + 3c^2} (9c^2 - 1) \right).$$

Novamente é fácil ver que  $D(P_2) < 0$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ . Então  $P_2$  é um ponto singular do tipo sela. Portanto, observando a Tabela 3.3, o sistema (3.36) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 20 da Figura 2.1. Um resumo dos retratos de fase globais do sistema (3.36) em cada curva, quando  $ac - 1 = 0$ , é apresentado na Tabela 3.8.

Caso $ac - 1 = 0$	
Curva	Retrato de fase
$L_{2,3}, L_{1,10}, L_{8,9}$	20

Tabela 3.8: Retrato de fase global do sistema (3.36) quando  $ac - 1 = 0$ .

■

### 3.4 Sistema $\mathcal{X}_4$ com $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

Nesta seção apresentaremos os possíveis retratos de fase globais do sistema

$$\mathcal{X}_4 = \begin{cases} \dot{x} = bx + cy + y^2, \\ \dot{y} = -ax - by - x^2. \end{cases} \quad (3.39)$$

Os cálculos para este caso seguem de forma completamente análoga aos da seção anterior, assim, usaremos as mesmas notações apresentadas ali. Iniciaremos esta seção estudando os pontos singulares no infinito do sistema (3.39).

#### Pontos singulares infinitos

Na carta local  $(U_1, \phi_1)$  o sistema (3.39) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{u} = -1 - u^3 - v(a + 2bu + cu^2), \\ \dot{v} = -v(u^2 + bv + cuv). \end{cases} \quad (3.40)$$

Quando  $v = 0$  apenas o ponto  $(-1, 0)$  é ponto singular do sistema (3.40). Além disso,  $(-1, 0)$  é um ponto do tipo nó atrator. Na carta local  $(U_2, \phi_2)$  o sistema (3.39) se escreve

como

$$\begin{cases} \dot{u} = 1 + u^3 + v(c + 2bu + au^2), \\ \dot{v} = v(u^2 + bv + auv). \end{cases} \quad (3.41)$$

Neste caso, a origem não é um ponto singular do sistema (3.41). Portanto, não temos pontos singulares na carta local  $(U_2, \phi_2)$ . Em resumo, temos a Tabela 3.9.

Pontos singulares no infinito	
Carta $(U_1, \phi_1)$	Carta $(U_2, \phi_2)$
$(-1, 0)$ nó atrator	não existem pontos singulares

Tabela 3.9: Pontos singulares no infinito do sistema (3.39).

### Pontos singulares finitos e retrato de fase global

Novamente a expressão explícita para os pontos singulares finitos do sistema  $\mathcal{X}_4$ , em particular para o caso em que  $b \neq 0$ , é complicada. Por esta razão, tomaremos a mesma abordagem adotada na seção anterior para estudar os pontos singulares finitos. O sistema  $\mathcal{X}_4$  quando  $b \neq 0$  se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = x + cy + y^2, \\ \dot{y} = -ax - y - x^2. \end{cases} \quad (3.42)$$

Primeiramente encontraremos o número máximo de pontos singulares finitos do sistema (3.42). Para isso calculamos o resultante de  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  com respeito a variável  $x$ , eliminando o fator comum  $y$ , obtemos a cúbica

$$\mathcal{C} = 1 + c^2y + 2cy^2 + y^3 - a(c + y).$$

O discriminante desta cúbica é

$$\mathcal{D} = 4a^3 + a^2c^2 + 18ac + 4c^3 - 27.$$

Sabemos que se  $\mathcal{D} > 0$  então a cúbica  $\mathcal{C}$  tem 3 raízes reais, se  $\mathcal{D} < 0$  a cúbica  $\mathcal{C}$  tem apenas uma raiz real. Concluimos desta forma que, para parâmetros  $(c, a)$  tais que  $\mathcal{D} > 0$  o sistema (3.42) tem além da origem mais 3 pontos singulares. Por outro lado, quando

$\mathcal{D} < 0$  o sistema (3.42) tem além da origem apenas mais um ponto singular. Ver Figura 3.14.

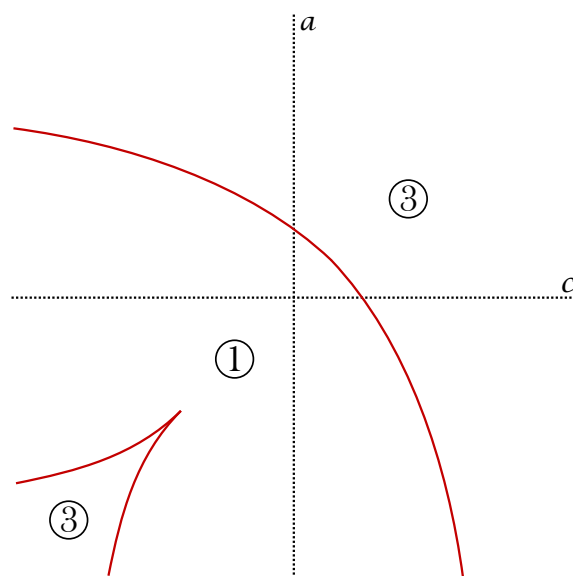


Figura 3.14: Discriminante da cúbica  $\mathcal{C}$ . Na região ③ o sistema (3.42) tem além da origem mais 3 pontos singulares. Na região ① o sistema (3.42) tem além da origem mais 1 ponto singular.

Uma possível maneira de encontrar as curvas de bifurcações deste sistema é calculando o discriminante da função Hamiltoniana

$$H(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + xy + \frac{y^3}{3} + \frac{cy^2}{2} + h, \quad (3.43)$$

com  $h \in \mathbb{R}$ , associada ao sistema (3.42). Mais especificamente, calculando o discriminante da função (3.43) com relação a variável  $y$ , o resultado será um polinômio na variável  $x$ , calculando o discriminante deste novo polinômio com relação a variável  $x$  e, finalmente, calculando o discriminante deste último com relação a  $h$  obtemos as 4 curvas abaixo e o

diagrama de bifurcação do sistema (3.42), que é mostrada na Figura 3.15.

$$\begin{aligned}
 C_1 & : a - c = 0, \\
 C_2 & : a + c - 2 = 0, \\
 C_3 & : ac - 1 = 0, \\
 C_4 & : 4a^3 + a^2c^2 + 18ac + 4c^3 - 27 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.44}$$

**Observação 3.4.** Nas curvas  $C_1$  e  $C_2$  obtemos as conexões de selas do sistema (3.42). Por outro lado, nas curvas  $C_3$  e  $C_4$  obtemos as bifurcações locais, ou seja, onde o número de pontos singulares do sistema (3.42) é alterado.

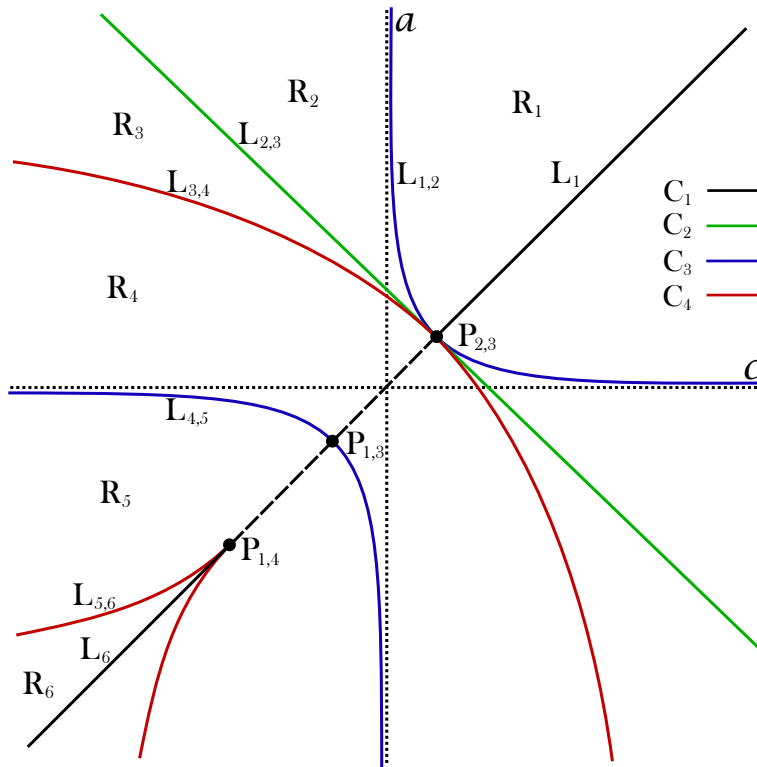


Figura 3.15: Diagrama de bifurcação do sistema (3.42).

Note que o diagrama de bifurcação do sistema (3.42) é simétrico com respeito a origem, assim basta estudar apenas o caso em que  $C_1 \geq 0$ . Obtemos assim o diagrama de bifurcação com cada uma das regiões limitadas pelas curvas  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , como mostra

a Figura 3.15. Além disso, considere as curvas  $L_{i,j}$  que divide as regiões  $R_i$  e  $R_j$ , definidas por

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_1 = 0, \quad c > 1\}, \\ L_{1,2} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_3 = 0, \quad 0 < c < 1\}, \\ L_{2,3} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_2 = 0, \quad c < 1\}, \\ L_{3,4} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_4 = 0, \quad c < 1, \quad a > 1\}, \\ L_{4,5} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_3 = 0, \quad c < -1\}, \\ L_{5,6} &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_4 = 0, \quad C_1 > 0, \quad c < -3, \quad a < -3\}, \\ L_6 &= \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : C_1 = 0, \quad c < -3\}. \end{aligned}$$

Finalmente as coordenadas dos pontos de intersecção das curvas  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , tal que  $C_8 > 0$ , são fáceis de encontrar e são dadas por

$$P_{2,3} = (1, 1), \quad P_{1,3} = (-1, -1) \quad \text{e} \quad P_{1,4} = (-3, -3),$$

onde  $P_{i,j}$  é o ponto na intersecção da curva  $C_i$  com a curva  $C_j$ .

As duas proposições a seguir nos mostram que os pontos singulares degenerados do sistema (3.42), se existirem, são nilpotentes e pertencem as curvas  $C_3$  ou  $C_4$ .

**Proposição 3.3.** *Os pontos singulares degenerados do sistema (3.42), se existirem, ocorrem quando os parâmetros  $a$  e  $c$  pertencem as curvas  $C_3$  ou  $C_4$ . Além disso, existe no máximo um ponto singular degenerado.*

*Demonstração.* A demonstração é semelhante à da Proposição 3.1. ■

**Proposição 3.4.** *Seja  $p$  um ponto singular isolado do sistema (3.42). Então se  $p$  é degenerado então  $p$  nilpotente.*

*Demonstração.* A demonstração é semelhante à da Proposição 3.2. ■

Vamos estudar agora os pontos singulares finitos e os possíveis retratos de fase globais do sistema  $\mathcal{X}_4$  provando o seguinte teorema.

**Teorema 3.4.** *Considere o campo Hamiltoniano quadrático  $\mathcal{X}_4 = (bx + cy + y^2, -ax - by - x^2)$ . Então,*

- (1) *Se  $a = b = c = 0$ , o campo  $\mathcal{X}_4$  tem o retrato de fase 3;*
- (2) *Se  $b = c = 0$  e  $a \neq 0$ , o campo  $\mathcal{X}_4$  tem o retrato de fase 22;*
- (3) *Se  $b = 0$  e  $c \neq 0$ , o campo  $\mathcal{X}_4$  tem o retrato de fase 22 se  $a = 0$ , 23 se  $a = \pm 1$ , e 24 se  $a \neq 0, 1, -1$ ;*
- (4) *Se  $b \neq 0$  então temos o diagrama de bifurcação dado pela Figura 3.15. Além disso, o campo  $\mathcal{X}_4$  tem os retratos de fase*

*4 se  $(c, a) \in \{P_{2,3}, P_{1,4}, R_4, R_5\}$ ;*

*23 se  $(c, a) \in \{L_1, L_6, L_{2,3}\}$ ;*

*24 se  $(c, a) \in \{R_1, R_2, R_3, R_6\}$ ;*

*25 se  $(c, a) \in \{L_{5,6}, L_{3,4}, L_{1,2}\}$ ;*

*3 se  $(c, a) \in \{P_{1,3}, L_{4,5}\}$ .*

*Demonstração.* A demonstração segue de forma completamente análoga ao do Teorema 3.3 e por sua extensão decidimos omiti-la aqui. ■

### 3.5 Sistema $\mathcal{X}_i$ , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , com $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

Vamos estudar agora os retratos de fase globais de cada um dos quatro campos do Teorema 2.4 no caso em que  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ . No Teorema 2.4 vimos que se um dos quatro campos Hamiltonianos  $\mathcal{X}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , tem pelo menos um ponto singular finito então podemos assumir que  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ . Sendo assim, basta apenas estudar os retratos de fase globais de cada um dos campos  $\mathcal{X}_i$  quando não temos pontos singulares finitos. Apresentaremos a seguir alguns resultados que facilitarão este estudo.

**Teorema 3.5.** *Para o campo  $\mathcal{X}_1$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , temos que:*



- (a) Os pontos singulares no infinito são os mesmos que os do campo  $\mathcal{X}_1$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ ;
- (b) Se  $c \neq 0$  então o retrato de fase local de qualquer ponto singular no infinito será o mesmo que o do campo  $\mathcal{X}_1$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ .

*Demonstração.* (a) Considere o sistema

$$\mathcal{X}_1 = \begin{cases} \dot{x} = \alpha + bx + cy, \\ \dot{y} = \beta - ax - by - x^2. \end{cases} \quad (3.45)$$

Na carta local  $(U_1, \phi_1)$  o sistema (3.45) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{u} = -1 - v(a + 2bu + cu^2 + \alpha uv + \beta v), \\ \dot{v} = -v^2(b + cu + \alpha v). \end{cases}$$

Quando  $v = 0$  não temos pontos singulares. Na carta local  $(U_2, \phi_2)$  o sistema (3.45) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{u} = u^3 + v(c + \alpha v + u(2b + au - \beta v)), \\ \dot{v} = v(u^2 + auv + v(b - \beta v)). \end{cases}$$

Quando  $v = 0$  a origem é um ponto singular. Portanto, os pontos singulares das cartas locais na compactificação de Poincaré do campo  $\mathcal{X}_1$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , são independentes de  $\alpha$  e  $\beta$ .

(b) Pelo item (a), o único ponto singular no infinito do campo  $\mathcal{X}_1$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , é a origem da carta local  $(U_2, \phi_2)$  que tem a matriz Jacobiana dada por

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se  $c \neq 0$  então a origem é um ponto singular nilpotente. Pelo Teorema 1.3, a origem é um nó atrator, e este independe de  $\alpha$  e  $\beta$ . ■

Veremos mais adiante que se  $c = 0$  então o retrato de fase local dos pontos singulares no infinito são distintos para o campo  $\mathcal{X}_1$  quando  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$  e  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ .

**Teorema 3.6.** *Para o campo  $\mathcal{X}_2$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , temos que:*

- (a) *Os pontos singulares no infinito são os mesmos que os do campo  $\mathcal{X}_2$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ ;*
- (b) *Se  $c \neq 0$  então o retrato de fase local de qualquer ponto singular no infinito será o mesmo que o do campo  $\mathcal{X}_2$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ ;*
- (c) *Se  $c \neq 0$  então o campo  $\mathcal{X}_2$  tem pelo menos um ponto singular finito.*

*Demonstração.* (a) De forma semelhante à demonstração do item (a) do Teorema 3.5, mostramos que a origem das cartas locais  $(U_1, \phi_1)$  e  $(U_2, \phi_2)$  do campo  $\mathcal{X}_2$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , são os únicos pontos singulares no infinito, e estes independem de  $\alpha$  e  $\beta$ .

(b) Pelo item (a), os únicos pontos singulares no infinito do campo  $\mathcal{X}_1$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , são as origens das cartas locais  $(U_1, \phi_1)$  e  $(U_2, \phi_2)$ . A matriz Jacobiana na origem da carta local  $(U_1, \phi_1)$  é dada por

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -3 & -a \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ou seja, a origem é um ponto singular do tipo nó atrator e este independe de  $\alpha$  e  $\beta$ . Por outro lado, a matriz Jacobiana na origem da carta local  $(U_2, \phi_2)$  é dada por

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

neste caso, se  $c \neq 0$ , a origem é um ponto singular nilpotente. Pelo Teorema 1.3, a origem consiste de um setor hiperbólico e um setor elíptico, como na Figura 1.1(k), e este independe de  $\alpha$  e  $\beta$ .

(c) Pelo item (b), os pontos singulares no infinito são, a origem na carta local  $(U_1, \phi_1)$  que é um nó ( $ind = 1$ ) e a origem da carta local  $(U_2, \phi_2)$  que tem o retrato de fase local formada por um setor hiperbólico e um setor elíptico. Logo, pelo Teorema 1.6 (**Fórmula do Índice de Bendixson**), a origem da carta local  $(U_2, \phi_2)$  tem índice 1. Contudo, a soma dos índices dos pontos singulares no infinito é 4. Pelo Teorema 1.4, a soma dos índices dos pontos singulares finitos tem que ser  $-2$ . Portanto, existe pelo menos um ponto singular finito no sistema  $\mathcal{X}_1$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ .

■

Veremos mais adiante que se  $c = 0$  então o retrato de fase local dos pontos singulares no infinito são distintos para o campo  $\mathcal{X}_2$  quando  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$  e  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ .

**Teorema 3.7.** *Para o campo  $\mathcal{X}_3$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , temos que:*

- (a) *Os pontos singulares no infinito são os mesmos que os do campo  $\mathcal{X}_3$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ ;*
- (b) *O retrato de fase local de qualquer ponto singular no infinito será o mesmo que o do campo  $\mathcal{X}_3$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ ;*
- (c) *O campo  $\mathcal{X}_3$  tem pelo menos um ponto singular finito.*

*Demonstração.* A demonstração é semelhante à do Teorema 3.6. ■

**Observação 3.5.** *O Teorema 3.7 nos diz que os possíveis retratos de fase globais do campo  $\mathcal{X}_3$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , são idênticos aos do campo  $\mathcal{X}_3$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ , os quais já foram classificados no Teorema 3.3.*

**Teorema 3.8.** *Para o campo  $\mathcal{X}_4$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , temos que:*

- (a) *Os pontos singulares no infinito são os mesmos que a do campo  $\mathcal{X}_4$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ ;*
- (b) *O retrato de fase local de qualquer ponto singular no infinito será o mesmo que a do campo  $\mathcal{X}_4$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ .*

*Demonstração.* A demonstração é semelhante à do Teorema 3.5. ■

Nos Teoremas 3.9, 3.10 e 3.11 iremos estudar os possíveis retratos de fase globais dos campos  $\mathcal{X}_1$ ,  $\mathcal{X}_2$  e  $\mathcal{X}_4$  que não possuem pontos singulares finitos. Segue da Observação 3.5 que o campo  $\mathcal{X}_3$  com  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$  não precisa ser estudado.

**Teorema 3.9.** *Considere o campo Hamiltoniano  $\mathcal{X}_1 = (\alpha + bx + cy, \beta - ax - by - x^2)$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ . Então o campo  $\mathcal{X}_1$  não tem pontos singulares finitos se uma das condições a seguir for satisfeita.*

- (1) *Se  $a = b = c = 0$  e ou  $\alpha \neq 0$  ou  $\alpha = 0$  e  $\beta < 0$ ;*
- (2) *Se  $b = c = 0$ ,  $a \neq 0$  e ou  $\alpha \neq 0$  ou  $\alpha = 0$  e  $\beta < -1/4$ ;*

(3) Se  $b = 0$ ,  $c \neq 0$  e  $a^2 + 4\beta < 0$ ;

(4) Se  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$  e  $(1 - ac)^2 + 4c(\alpha + 4c\beta) < 0$ .

Além disso, o retrato de fase global em cada caso é topologicamente equivalente ao retrato de fase 26 da Figura 2.1.

*Demonstração.* Primeiro vamos impor condições para que o sistema

$$\mathcal{X}_1 = \begin{cases} \dot{x} = \alpha + bx + cy, \\ \dot{y} = \beta - ax - by - x^2, \end{cases} \quad (3.46)$$

não tenha pontos singulares finitos e, posteriormente, estudaremos os pontos singulares no infinito e o retrato de fase global deste sistema.

(1) Se  $a = b = c = 0$  então o sistema (3.46) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha, \\ \dot{y} = \beta - x^2. \end{cases} \quad (3.47)$$

Neste caso, para que o sistema (3.47) não tenha pontos singulares finitos basta que  $\alpha \neq 0$  ou, se  $\alpha = 0$  então  $\beta < 0$ .

(2) Se  $b = c = 0$  e  $a \neq 0$  então o sistema (3.46) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha, \\ \dot{y} = \beta - x - x^2. \end{cases} \quad (3.48)$$

Se  $\alpha \neq 0$  então obviamente não temos pontos singulares finitos. Por outro lado, se  $\alpha = 0$  então  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  é um ponto singular finito se  $y_0 \in \mathbb{R}$  e  $x_0$  satisfaz a igualdade

$$\beta - x_0 - x_0^2 = 0,$$

ou seja, se

$$x_0 = \frac{1}{2} \left( -1 \pm \sqrt{1 + 4\beta} \right).$$

Portanto, para que o sistema (3.48) não tenha pontos singulares finitos basta que  $\alpha \neq 0$  ou, se  $\alpha = 0$  então  $\beta < -1/4$ .

(3) Se  $b = 0$  e  $c \neq 0$  então o sistema (3.46) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha + y, \\ \dot{y} = \beta - ax - x^2. \end{cases} \quad (3.49)$$

Sendo assim,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  é um ponto singular finito do sistema (3.49) se  $x_0$  e  $y_0$  satisfizerem as igualdades

$$y_0 + \alpha = 0 \quad \text{e} \quad \beta - ax_0 - x_0^2 = 0,$$

ou seja, se  $y_0 = -\alpha$  e

$$x_0 = \frac{1}{2} \left( a \pm \sqrt{a^2 + 4\beta} \right).$$

Neste caso, para que o sistema (3.49) não tenha pontos singulares finitos basta que  $a^2 + 4\beta < 0$ .

(4) Se  $b \neq 0$  então o sistema (3.46) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha + x + cy, \\ \dot{y} = \beta - ax - y - x^2. \end{cases} \quad (3.50)$$

Dessa forma,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  é um ponto singular finito do sistema (3.50) se  $x_0$  e  $y_0$  satisfizerem as igualdades

$$\alpha + x_0 + cy_0 = 0 \quad \text{e} \quad \beta - ax_0 - y_0 - x_0^2 = 0. \quad (3.51)$$

Neste caso temos duas possibilidades, a saber;  $c \neq 0$  e  $c = 0$ .

Se  $c \neq 0$  então segue das equações (3.51) que

$$x_0 = \frac{1 - ac \mp \sqrt{(1 - ac)^2 + 4c(\alpha + 4c\beta)}}{2c} \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{a - \frac{1}{c} - 2\alpha \pm \frac{\sqrt{(1 - ac)^2 + 4c(\alpha + 4c\beta)}}{c}}{2c}$$

Logo, para que o sistema (3.50) não tenha pontos singulares finitos basta que

$$(1 - ac)^2 + 4c(\alpha + 4c\beta) < 0.$$

Se  $c = 0$  então da primeira igualdade de (3.51) temos que  $x_0 = -\alpha$ . Substituindo na segunda igualdade de (3.51) segue que

$$y_0 = \beta - a\alpha - \alpha^2.$$

Como  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$  então, neste caso, vai existir pelo menos um ponto singular finito para o sistema (3.50).

Concluimos assim a prova da primeira parte do Teorema 3.9.

Veremos agora que os retratos de fase globais de todos estes casos são topologicamente equivalentes ao retrato de fase 26 da Figura 2.1.

### Retrato de fase global

Vamos estudar agora o retrato de fase global do sistema (3.46) com as hipóteses obtidas de não termos pontos singulares finitos. Neste caso, basta estudarmos os pontos singulares no infinito do sistema (3.46). Se  $c \neq 0$  segue do Teorema 3.5 que o retrato de fase local de qualquer ponto singular no infinito é o mesmo que a do campo  $\mathcal{X}_1$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ , que já foi estudado anteriormente. Por outro lado, se  $c = 0$  basta estudarmos a estabilidade dos pontos singulares no infinito, que pelo Teorema 3.5 (a) sabemos que são os mesmos pontos singulares do campo  $\mathcal{X}_1$  com  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ . Além disso, se  $c = 0$  devemos ter  $b = 0$  (caso (1) e (2) do Teorema 3.9). Sendo assim, o sistema (3.46) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha, \\ \dot{y} = \beta - ax - x^2. \end{cases} \quad (3.52)$$

Na carta local  $(U_1, \phi_1)$  não há pontos singulares. Na carta local  $(U_2, \phi_2)$  o sistema (3.52) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{u} = u^3 + v(au^2 + \alpha v - \beta uv), \\ \dot{v} = v(u^2 + auv - \beta v^2). \end{cases} \quad (3.53)$$

Quando  $v = 0$  a origem é o único ponto singular do sistema (3.53) e é linearmente nulo. Neste caso, precisamos utilizar a técnica do blow-up para descrever a dinâmica local neste ponto.

#### *Blow-up no sistema (3.53) na direção $u$*

Realizando o blow-up direcional  $(u, v) \mapsto (u, w)$ , com  $w = v/u$ , no sistema (3.53) obtemos, depois de eliminar o fator comum  $u$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = u(u + auw + \alpha w^2 - \beta uw^2), \\ \dot{w} = -\alpha w^3. \end{cases} \quad (3.54)$$

Quando  $u = 0$  a origem é o único ponto singular do sistema (3.54) e é linearmente nulo. Portanto, é necessário realizar um blow-up no sistema (3.54).

***Blow-up no sistema (3.53) na direção  $v$***

Realizando o blow-up direcional  $(u, v) \mapsto (z, v)$ , com  $z = u/v$ , no sistema (3.53) obtemos, depois de eliminar o fator comum  $v$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = \alpha, \\ \dot{v} = v(az + z^2 - \beta). \end{cases} \quad (3.55)$$

Como  $\alpha \neq 0$  então quando  $v = 0$  não temos pontos singulares no sistema (3.55).

***Blow-up no sistema (3.54) na direção  $u$***

Realizando um blow-up direcional  $(u, w) \mapsto (u, z)$ , com  $z = w/u$ , no sistema (3.54) obtemos, depois de eliminar o fator comum  $u$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 + auz + \alpha uz^2 - \beta u^2 z^2), \\ \dot{z} = -z(1 + auz + 2\alpha uz^2 - \beta u^2 z^2). \end{cases} \quad (3.56)$$

Quando  $u = 0$  a origem é o único ponto singular do sistema (3.56) e é do tipo sela.

***Blow-up no sistema (3.54) na direção  $w$***

Realizando um blow-up direcional  $(u, w) \mapsto (z, w)$ , com  $z = u/w$ , no sistema (3.54) obtemos, depois de eliminar o fator comum  $w$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = z(z + awz + 2\alpha w - \beta w^2 z), \\ \dot{w} = -\alpha w^2. \end{cases} \quad (3.57)$$

Quando  $w = 0$  a origem é o único ponto singular do sistema (3.57) e é linearmente nulo. Portanto, é necessário realizar mais um blow-up no sistema (3.57).

***Blow-up no sistema (3.57) na direção  $z$***

Realizando um blow-up direcional  $(z, w) \mapsto (z, t)$ , com  $t = w/z$ , no sistema (3.57) obtemos, depois de eliminar o fator comum  $z$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = z(1 + atz + 2\alpha t - \beta t^2 z^2), \\ \dot{t} = -t(1 + atz + 3\alpha t - \beta t^2 z^2). \end{cases} \quad (3.58)$$

Quando  $z = 0$  temos dois pontos singulares no sistema (3.58), a origem que é uma sela e  $(0, -1/3\alpha)$  que é um nó repulsor.

**Blow-up no sistema (3.57) na direção  $w$**

Realizando um blow-up direcional  $(z, w) \mapsto (t, w)$ , com  $t = z/w$ , no sistema (3.57) obtemos, depois de eliminar o fator comum  $w$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{t} = t(t + atw + 3\alpha - \beta tw^2), \\ \dot{w} = -\alpha w. \end{cases} \quad (3.59)$$

Quando  $w = 0$  basta analisar apenas a estabilidade na origem do sistema (3.59), que é um ponto singular do tipo sela.

Voltando com as mudanças de variáveis, até o sistema (3.53), temos o retrato de fase local da origem na carta local  $(U_2, \phi_2)$ , que é mostrada na Figura 3.16. Portanto, o sistema (3.52) será topologicamente equivalente ao retrato de fase 26 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser obtido quando  $a = b = c = \beta = 0$  e  $\alpha = 1$ .

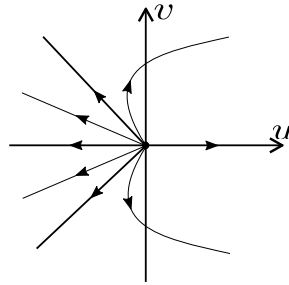


Figura 3.16: Retrato de fase local da origem na carta  $(U_2, \phi_2)$ .

■

**Teorema 3.10.** *Considere o campo Hamiltoniano  $\mathcal{X}_2 = (\alpha + bx + cy + x^2, \beta - ax - by - 2xy)$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ . Então o campo  $\mathcal{X}_2$  não tem pontos singulares finitos se uma das condições a seguir for satisfeita.*

- (1) Se  $a = b = c = 0$  e ou  $\alpha > 0$  ou  $\alpha = 0$  e  $\beta \neq 0$ ;
- (2) Se  $b = c = 0$ ,  $a \neq 0$  e ou  $\alpha > 0$  ou  $\alpha = 0$  e  $\beta \neq 0$ ;
- (3) Se  $b \neq 0$ ,  $c = 0$  e ou  $\alpha > 1/4$  ou  $\alpha = 1/4$  e  $\beta \neq -a/2$ .



Além disso, o retrato de fase global em cada caso é topologicamente equivalente ao retrato de fase 27 da Figura 2.1, exceto nos casos (1) e (2) quando  $\alpha = 0$  e no caso (3) quando  $\alpha = 1/4$  em que o retrato de fase é topologicamente equivalente ao retrato o 28 da Figura 2.1.

*Demonstração.* Primeiro vamos impor condições para que o sistema

$$\mathcal{X}_2 = \begin{cases} \dot{x} = \alpha + bx + cy + x^2, \\ \dot{y} = \beta - ax - by - 2xy, \end{cases} \quad (3.60)$$

não tenha pontos singulares finitos e, posteriormente, estudaremos os pontos singulares no infinito e o retrato de fase global deste sistema.

(1) Se  $a = b = c = 0$  então o sistema (3.60) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha + x^2, \\ \dot{y} = \beta - 2xy. \end{cases} \quad (3.61)$$

Sendo assim,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  é um ponto singular finito do sistema (3.61) se  $x_0$  e  $y_0$  satisfizerem as igualdades

$$\alpha + x_0^2 = 0 \quad \text{e} \quad \beta - 2x_0y_0 = 0.$$

Se  $\alpha > 0$  obviamente não temos pontos singulares finitos. Suponha que  $\alpha = 0$ , segue da primeira igualdade que  $x_0 = 0$ , sendo assim,  $\beta = 0$  na segunda igualdade. Absurdo pois  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ . Portanto, para que o sistema (3.61) não tenha pontos singulares finitos basta que  $\alpha > 0$  ou  $\alpha = 0$  e  $\beta \neq 0$ .

(2) Se  $b = c = 0$  e  $a \neq 0$  então o sistema (3.60) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha + x^2, \\ \dot{y} = \beta - x - 2xy. \end{cases} \quad (3.62)$$

Neste caso, de forma análoga ao item (1), para que o sistema (3.62) não tenha pontos singulares finitos basta que  $\alpha > 0$  ou  $\alpha = 0$  e  $\beta \neq 0$ .

(3) Se  $b \neq 0$  então, pelo Teorema 3.6 (c), basta estudar apenas o caso em que  $c = 0$ . Dessa forma, o sistema (3.60) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha + x + x^2, \\ \dot{y} = \beta - ax - y - 2xy. \end{cases} \quad (3.63)$$

Sendo assim,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  é um ponto singular finito do sistema (3.63) se  $x_0$  e  $y_0$  satisfizerem as igualdades

$$\alpha + x_0 + x_0^2 = \left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha - \frac{1}{4}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \beta - ax_0 - y_0 - 2x_0y_0 = 0.$$

Da primeira igualdade é fácil ver que se  $\alpha > 1/4$  então não temos pontos singulares finitos. Por outro lado, se  $\alpha = 1/4$  então  $x_0 = -1/2$ . Substituindo  $x_0$  na segunda igualdade temos que  $\beta + a/2 = 0$ . Portanto, para que o sistema (3.63) não tenha pontos singulares finitos basta que  $\alpha > 1/4$  ou  $\alpha = 1/4$  e  $\beta \neq -a/2$ .

Concluimos assim a prova da primeira parte do Teorema 3.10. Veremos agora que os retratos de fase globais de todos estes casos são topologicamente equivalentes ao retrato de fase 27 da Figura 2.1, exceto nos casos (1) e (2) quando  $\alpha = 0$  e no caso (3) quando  $\alpha = 1/4$  em que o retrato de fase será o 28 da Figura 2.1.

### Retrato de fase global

Vamos estudar agora o retrato de fase global do sistema (3.60), com a hipótese de não termos pontos singulares finitos. Neste caso, pelo Teorema 3.6 (c), basta apenas estudar a estabilidade dos pontos singulares no infinito do sistema (3.60) quando  $c = 0$ , que são os mesmos pontos singulares do sistema  $\mathcal{X}_2$  com  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ . Sendo assim, o sistema (3.60), com  $c = 0$ , se escreve como

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha + bx + x^2, \\ \dot{y} = \beta - ax - by - 2xy. \end{cases} \quad (3.64)$$

Escrevendo o sistema (3.64) na carta local  $(U_1, \phi_1)$  é fácil ver que a origem é um ponto singular do tipo nó atrator. Na carta local  $(U_2, \phi_2)$  o sistema (3.64) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{u} = 3u^2 + v(\alpha v + u(2b + au - \beta v)), \\ \dot{v} = v(u(2 + av) + v(b - \beta v)). \end{cases} \quad (3.65)$$

Quando  $v = 0$  a origem é o único ponto singular do sistema (3.65) e é linearmente nulo. Neste caso, novamente precisamos utilizar a técnica do blow-up para descrever a dinâmica local neste ponto.

### *Blow-up no sistema (3.65) na direção $u$*

Realizando um blow-up direcional  $(u, v) \mapsto (u, w)$ , com  $w = v/u$ , no sistema (3.65) obtemos, depois de eliminar o fator comum  $u$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = u(3 + 2bw + auw + \alpha w^2 - \beta uw^2), \\ \dot{w} = -w(1 + bw + \alpha w^2). \end{cases} \quad (3.66)$$

Quando  $u = 0$  os possíveis pontos singulares do sistema (3.66) são

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = \left(0, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\alpha}}{2\alpha}\right) \quad \text{e} \quad P_2 = \left(0, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\alpha}}{2\alpha}\right).$$

Temos as seguintes possibilidades:

- Se  $\alpha > b^2/4$  então é fácil ver que  $P_0$  é o único ponto singular do sistema (3.66) e este é do tipo sela;
- Se  $\alpha = b^2/4$  então  $P_0$  e  $P_1 = P_2 = (0, -2/b)$  são os únicos pontos singulares do sistema (3.66). Além disso, assumindo sem perda de generalidade que  $b = 1$  e conseqüentemente  $\alpha = 1/4$ , temos que  $P_0$  é um ponto singular do tipo sela e  $P_1$  é um ponto singular linearmente nulo. Neste caso, será necessário realizar um Blow-up no ponto  $P_1$ .

### ***Blow-up no sistema (3.66) na direção $u$ no ponto $P_1$***

Através de uma mudança de variáveis, levamos o ponto  $P_1$  para a origem e em seguida realizamos um blow-up direcional  $(u, w) \mapsto (u, z)$ , com  $z = w/u$ , no sistema (3.66) obtemos, depois de eliminar o fator comum  $u$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = -\frac{1}{4}u(a(8 - 4uz) + 16\beta + uz^2(-1 + 4\beta u) - 4z(1 + 4\beta u)), \\ \dot{z} = \frac{1}{2}z(a(4 - 2uz) + 8\beta + uz^2(-1 + 2\beta u) - z(1 + 8\beta u)). \end{cases} \quad (3.67)$$

Quando  $u = 0$  os possíveis pontos singulares do sistema (3.67) são

$$P_0 = (0, 0) \quad \text{e} \quad P_3 = (0, 4(a + 2\beta)).$$

Como  $\alpha = 1/4$  então  $\beta \neq -a/2$ , ou seja,  $4(a + 2\beta) \neq 0$ . Além disso, o determinante da matriz Jacobiana em cada ponto singular é dado por

$$D(P_0) = D(P_3) = -4(a + 2\beta)^2.$$

Portanto  $P_0$  e  $P_3$  são pontos singulares do tipo sela, sendo que a posição no eixo  $z$  de cada ponto depende do sinal do parâmetro  $\beta$ .

***Blow-up no sistema (3.66) na direção  $w$  no ponto  $P_1$***

Através de uma mudança de variáveis, levamos o ponto  $P_1$  para a origem e em seguida realizamos um blow-up direcional  $(u, w) \mapsto (z, w)$ , com  $z = u/w$ , no sistema (3.66) obtemos, depois de eliminar o fator comum  $w$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = -\frac{1}{2}z(-1 + 4az + 8\beta z + 2\beta w^2 z - w(1 + 2az + 8\beta z)), \\ \dot{w} = -\frac{1}{4}w(-2 + w). \end{cases} \quad (3.68)$$

Neste caso é simples ver que a origem é um ponto singular do tipo nó repulsor. Portanto, terminamos aqui de analisar a estabilidade do ponto  $P_1$ . Voltando com as mudança de variáveis até o sistema (3.66) temos o seguinte retrato de fase local do ponto  $P_1$ , como mostra a Figura 3.17.

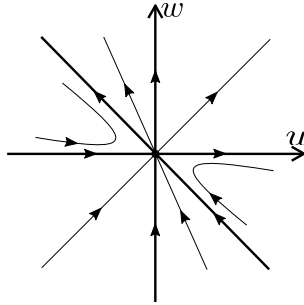


Figura 3.17: Retrato de fase local no ponto  $P_1$  do sistema (3.66).

***Blow-up no sistema (3.65) na direção  $v$***

Realizando um blow-up direcional  $(u, v) \mapsto (w, v)$ , com  $w = u/v$ , no sistema (3.65) obtemos, depois de eliminar o fator comum  $v$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{w} = bw + w^2 + \alpha, \\ \dot{v} = v(b + (2 + av)w - \beta v). \end{cases} \quad (3.69)$$

Quando  $v = 0$  basta apenas estudar a estabilidade da origem do sistema (3.69). Note que se  $\alpha \neq 0$  então não temos pontos singulares. Se  $\alpha = 0$  então a origem é ponto singular. Além disso, se  $b \neq 0$  então  $\alpha \geq 1/4$ , como  $\alpha = 0$  então a única possibilidade é  $b = 0$ .

Neste caso, a origem é um ponto linearmente nulo e, portanto, será necessário realizar mais um blow-up no sistema (3.69).

***Blow-up no sistema (3.69) na direção  $w$***

Realizando um blow-up direcional  $(w, v) \mapsto (w, z)$ , com  $z = v/w$ , no sistema (3.69) com  $\alpha = b = 0$ , obtemos, depois de eliminar o fator comum  $w$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{w} = w, \\ \dot{z} = z(1 + awz - \beta z). \end{cases} \quad (3.70)$$

Quando  $w = 0$  temos dois pontos singulares que são

$$P_0 = (0, 0) \quad \text{e} \quad P_1 = \left(0, \frac{1}{\beta}\right)$$

Como  $\alpha = 0$  então  $\beta \neq 0$ , pois  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ . Além disso,  $P_0$  e  $P_1$  são ambos pontos singulares do tipo sela.

***Blow-up no sistema (3.69) na direção  $v$***

Realizando um blow-up direcional  $(w, v) \mapsto (z, v)$ , com  $z = w/v$ , no sistema (3.69) com  $\alpha = b = 0$ , obtemos, depois de eliminar o fator comum  $v$ , o sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = -z(z + avz - \beta), \\ \dot{v} = v((2 + av)z - \beta). \end{cases} \quad (3.71)$$

Quando  $v = 0$  basta apenas estudar a estabilidade da origem do sistema (3.71). A matriz Jacobiana na origem é dada por

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

e neste caso, como  $\beta \neq 0$  então a origem é um ponto singular do tipo sela. Voltando com as mudança de variáveis até o sistema (3.69), temos o seguinte retrato de fase local da origem, como mostra a Figura 3.19.

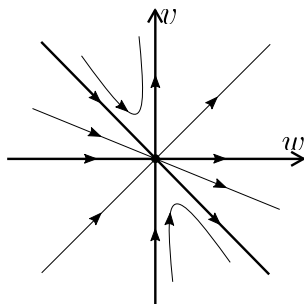


Figura 3.18: Retrato de fase local na origem do sistema (3.69).

Finalmente, voltando com as mudanças de variáveis em cada caso, até o sistema (3.65), temos o retrato de fase local da origem na carta local  $(U_2, \phi_2)$ , como mostra a Figura 3.19.

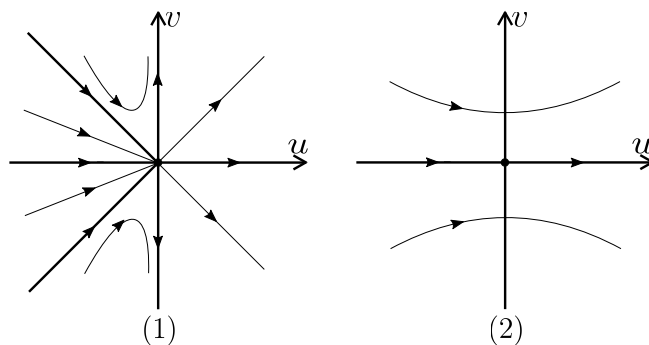


Figura 3.19: Retrato de fase local da origem na carta  $(U_2, \phi_2)$ . Na Figura (1)  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1/4$ . Na Figura (2)  $0 < \alpha < 1/4$  ou  $\alpha > 1/4$ .

Em resumo, temos a Tabela 3.10.

Pontos singulares no infinito				
Parâmetros			A origem da carta $(U_1, \phi_1)$	A origem da carta $(U_2, \phi_2)$
$c = 0$	$b = 0$	$\alpha = 0$	nó atrator	Figura 3.19 (1)
		$0 < \alpha < \frac{1}{4}$	nó atrator	Figura 3.19 (2)
	$b = 1$	$\alpha = \frac{1}{4}$	nó atrator	Figura 3.19 (1)
		$\alpha > \frac{1}{4}$	nó atrator	Figura 3.19 (2)

Tabela 3.10: Pontos singulares no infinito do sistema (3.60).

Portanto, observando a Tabela 3.10, o retrato de fase global do sistema (3.60) é topologicamente equivalente ao retrato de fase 27 da Figura 2.1, exceto nos casos em que  $b = c = 0$  e  $\alpha = 0$  ou  $b = 1, c = 0$  e  $\alpha = 1/4$ , pois o retrato de fase é topologicamente equivalente ao retrato de fase 28 da Figura 2.1. Um exemplo destes retratos de fase são obtidos quando  $a = b = c = \beta = 0$  e  $\alpha = 1$  (retrato de fase 27),  $a = b = c = \alpha = 0$  e  $\beta = 1$  (retrato de fase 28).

■

**Teorema 3.11.** *Considere o campo Hamiltoniano  $\mathcal{X}_4 = (\alpha + bx + cy + y^2, \beta - ax - by - x^2)$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ . Então o campo  $\mathcal{X}_4$  não têm pontos singulares finitos se uma das condições a seguir for satisfeita.*

- (1) *Se  $a = b = c = 0$  e ou  $\alpha > 0$  ou  $\beta < 0$ .*
- (2) *Se  $b = c = 0, a \neq 0$  e ou  $\alpha > 0$  ou  $\beta < -1/4$ .*
- (3) *Se  $b = 0, c \neq 0$  e ou  $\alpha > 1/4$  ou  $\beta < -a^2/4$ .*
- (4) *Se  $b \neq 0$  e a equação  $-2cy^3 - y^4 + y^2(a - c^2 - 2\alpha) + a\alpha - \alpha^2 + y(-1 + ac - 2c\alpha) + \beta = 0$  não tenha raiz real.*

*Além disso, o retrato de fase global em cada caso é topologicamente equivalentes ao retrato de fase 26 da Figura 2.1.*

*Demonstração.* A demonstração da primeira parte do Teorema 3.11 é similar a prova do Teorema 3.10 e omitiremos aqui. Pelo Teorema 3.8, os pontos singulares no infinito e seus respectivos retratos de fase locais são os mesmos que a do campo  $\mathcal{X}_4$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ . Portanto, o retrato de fase global em cada caso é topologicamente equivalente ao retrato de fase 26 da Figura 2.1. Um exemplo deste retrato de fase pode ser obtido quando  $a = b = c = \beta = 0$  e  $\alpha = 1$ .

■

# Conclusões

Nesta dissertação classificamos os campos Hamiltonianos quadráticos planares e encontramos todos os retratos de fase globais no disco de Poincaré, via conjugação topológica preservando ou revertendo o tempo. Para tanto, reduzimos o número de parâmetros desde tipo de campo e estudamos 32 famílias de campos que dependem de no máximo 4 parâmetros, facilitando assim a determinação dos retratos de fase globais.



# Referências Bibliográficas

- [1] J. C. Artés and J. Llibre, *Quadratic Hamiltonian vector fields*, J. Differential Equations 107 (1994), 80-95.
- [2] J. C. Artés and J. Llibre, *A Correction to the Paper “Quadratic Hamiltonian vector fields”*, J. Differential Equations 129 (1996), 559-560.
- [3] J. C. Artés, J. Llibre, F. Dumortier, C. Herssens and P. De Maesschalck, *Computer program P4 to study Phase Portraits of Planar Polynomial differential equations*, <http://mat.uab.cat/artes/p4/p4.htm>
- [4] J. Chavarriga and J. Giné, *Integrability of a linear center perturbed by a fourth degree homogeneous polynomial*, Publ. Mat. 40 (1996), 21-39.
- [5] J. Chavarriga and J. Giné, *Integrability of a linear center perturbed by a fifth degree homogeneous polynomial*, Publ. Mat. 41 (1997), 335-356.
- [6] I. E. Colak, J. Llibre, and C. Valls, *Hamiltonian linear type centers of linear plus cubic homogeneous polynomial vector fields*, J. Differential Equations 257 (2014), 1623-1661.
- [7] I. E. Colak, J. Llibre, and C. Valls, *Hamiltonian nilpotent centers of linear plus cubic homogeneous polynomial vector fields*, Adv. Math 259 (2014), 655-687.
- [8] I. E. Colak, J. Llibre, and C. Valls, *Bifurcation diagrams for Hamiltonian linear type centers of linear plus cubic homogeneous polynomial vector fields*, J. Differential Equations 258 (2015), 846-879.

- [9] I. E. Colak, J. Llibre, and C. Valls, *Bifurcation diagrams for Hamiltonian nilpotent centers of linear plus cubic homogeneous polynomial vector fields*, J. Differential Equations 262 (2016), 5518-5533.
- [10] M. S. Costa, *Introdução à Teoria de Singularidades de Aplicações Diferenciáveis*, Dissertação de Mestrado, IBILCE, São Paulo (2009).
- [11] F. S. Dias, J. Llibre, and C. Valls,  *$\mathbb{Z}_2$ -Symmetric planar polynomial Hamiltonian systems of degree 3 with nilpotent centers*, Preprint, (2019).
- [12] F. Dumortier, J. Llibre and J. C. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer Verlag, New York, (2006).
- [13] F. Fernandes, *Um Estudo Qualitativo do Contraexemplo de Pinchuk*, Dissertação de Mestrado, UFSCAR, São Paulo (2017).
- [14] J. Giné, *The center problem for a linear center perturbed by homogeneous polynomials*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 22 (2006), 1613-1620.
- [15] L. Markus, *Quadratic differential equations and nonassociative algebras*, in “Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations”, Ann. of Math. Stud 45, Princeton Univ. Press, Princeton, 1960.
- [16] L. Markus, *Global structure of ordinary differential equations in the plane*, Trans. Amer. Math Soc. 76 (1954), 127-148.
- [17] D. A. Neumann, *Classification of continuous flows on 2-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 48 (1975), 73-81.
- [18] M. M. Peixoto, *Dynamical Systems. Proceedings of a Symposium held at the University of Bahia*, Acad. Press, New York (1973), 389-420.
- [19] H. Poincaré, *Sur la stabilité du Système Solaire*, *Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'an 1898*, Paris, Gauthier-Villars, B1-B16.

- [20] J. M. Sotomayor, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Livraria da Física, São Paulo, (2011).
- [21] N. I. Vulpe, *Affine-invariant conditions for topological distinction of quadratic systems in the presence of a center*, J. Differential Equations 19 (1983), 371-379.