UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS–GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Equações de Jacobi em Uma Família de Variedades Lorentzianas Intrinsecamente Planas

Wellington Lorena da Silva

Orientador: Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 4 DE JULHO DE 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS–GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Equações de Jacobi em Uma Família de Variedades Lorentzianas Intrinsecamente Planas

Wellington Lorena da Silva

Orientador: Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Topologia/Geometria

ITAJUBÁ – MG
4 DE JULHO DE 2019

Agradecimentos

Agradeço a minha família, meus amigos e professores pelo apoio.

”You must follow me carefully. I shall have to controvert one or two ideas that are almost universally accepted. The geometry, for instance, they taught you at school is founded on a misconception.”

H.G. Wells, The Time Machine

Resumo

Neste trabalho estudamos algumas propriedades da variedade Lorentziana $(n+1)$-dimensional $\mathcal{M}$ munida da métrica intrinsecamente e espacialmente plana

$$\mathsf{g} = -e^{2\phi}dt^2 + a(t)^2 \sum_{ij}^{n} \delta_{ij} dx^i dx^j,$$

onde $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ é uma função suave arbitrária. Como aplicações finais, determinamos o comportamento das geodésicas próximas a $\gamma(\tau) = (t(\tau), \vec{x}_0)$, sendo esta uma curva de pontos críticos de ϕ, nos casos em que ϕ constante e $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$.

Palavras–chave: Variedade Lorentziana, simetria intrínseca, desvio geodésico, Equações de Jacobi

Abstract

In this work we study some properties of the Lorentzian $(n+1)$-dimensional manifold $\mathcal{M}$ with the intrinsically and spatially flat metric

$$\mathsf{g} = -e^{2\phi}dt^2 + a(t)^2 \sum_{ij}^{n} \delta_{ij} dx^i dx^j,$$

where $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ is an arbitrary differentiable function. As final applications, we determine the behavior of geodesics near $\gamma(\tau) = (t(\tau), \vec{x}_0)$, which is a critical point curve of ϕ, in the cases ϕ constant and $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$.

Keywords: Lorentzian Manifold, Intrinsic symmetry, geodesic deviation, Jacobi Equations

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho temos por objetivo geral estudarmos algumas propriedades de variedades Lorentzianas folheadas por seções espaciais planas. De forma mais específica, consideramos a variedade $(n+1)$-dimensional $\mathcal{M}$ munida da métrica

$$\mathsf{g} = -e^{2\phi}dt^2 + a(t)^2 \sum_{ij}^{n} \delta_{ij} dx^i dx^j,$$

onde $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ é uma função suave arbitrária. Trata-se de um exemplo bastante relevante do que tem sido chamado de "Espaços-tempos com simetria intrínseca"[**?**]. Nosso objetivo final é determinar o comportamento das geodésicas próximas à também geodésica $\gamma(\tau) = (t(\tau), \vec{x}_0)$, sendo esta uma curva de pontos críticos de ϕ, i.e., $\partial_i \phi(\gamma(\tau)) = 0$ para todo τ e $i = 1, \ldots, n$.

Esta dissertação não pretende apresentar uma abordagem exaustiva da geometria Lorentziana, tão pouco ela apresenta aplicações à física. Trata-se de um texto escrito no formato usual aos matemáticos e não requer nenhum pré-requisito das teorias físicas associadas com a relatividade. Assumimos que o leitor tenha um conhecimento básico de álgebra tensorial e cálculo em variedades. Recomendamos como introdução aos tensores e variedades Tu [13]. Para mais detalhes sobre geometria Riemanniana e semi-Riemanniana, veja Lee [5] e O'Neill [10].

No capítulo 1 serão apresentadas conceitos básicos de geometria semi-Riemanniana. Começamos definindo um produto escalar arbitrário, onde ao contrário da geometria Riemanniana, o produto de vetores não-nulos pode ser zero. Isto tem consequência nas propriedades dos complementos ortogonais, que nem sempre são disjuntos. Um outra consequência é que uma geodésica nem sempre é uma curva minimizante, como na geometria Riemanniana. A maior parte das definições e teoremas desse capítulo seguem com algumas modificações o texto [10]. A convenção de sinais no tensor de curvatura, Ricci, etc, seguem as mesmas adotadas por Wheeler [9].

No capítulo 2 são calculados as componentes da geometria de $\mathcal{M}$, que como veremos, é folheada por hirperfícies planas que são totalmente umbílicas. Ele servirá como referência para consulta posterior no capítulo 3.

O capítulo 3 é uma continuação do segundo. Nele serão estudadas geodésicas formadas por pontos críticos de ϕ. e as equações de Jacobi (desvio geodésico) ao longo delas. Essas equações, que foram calculadas no capítulo 2, agora assumem uma forma mais simples, chamada de equação de Hill [7]. Como principal contribuição deste trabalho, elas são estudadas nos contextos em que ϕ é constante e quando ela é estática ($\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$). O primeiro caso, embora bastante usual na literatura da Relatividade Geral, não é frequentemente encontrado. Já o estudo do caso estático é aparentemente inédito, consistindo no principal resultado dessa dissertação.

Capítulo 1

Introdução às Variedades Semi-Riemannianas

Neste capítulo assumimos que o leitor tenha um conhecimento básico em álgebra tensorial e cálculo em variedades (veja O'Neill [10], capítulos 1 e 2, e para uma abordagem mais completa [13]). Ao longo deste trabalho usaremos letras gregas ($\mu, \nu, \ldots$) para índices variando de 0 a n e letras latinas ($i, j, \ldots$) para índices variando de 1 a n.

1.1 Produto Escalar

Nesta seção V representa um espaço vetorial n-dimensional e g uma forma bilinear em V. A matriz $n \times n$ cujas as entradas são $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ é chamada matriz de g relativa a uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V. Em coordenadas

$$g(u, v) = g(\sum_i u^i e_i, \sum_j v^j e_j) = \sum_{ij} g_{ij} u^i v^j.$$

Definição 1.1. *g é chamada produto escalar quando ela é simétrica e não-degenerada, isto é,*

- *$g(u, v) = g(v, u)$ para todo $u, v \in V$.*
- *Se $g(u, v) = 0$ para todo u, então $v = 0$.*

Esta definição é uma generalização do conceito de produto interno visto num curso elementar de álgebra linear, onde definimos g como uma forma bilinear simétrica e positiva-definida, isto é,

- Se $v \neq 0$ então $g(v, v) > 0$.

Todo produto interno é um produto escalar, pois esta última condição implica em sua não-degenerescência. Assim como na álgebra elementar temos o espaço com produto interno, um espaço vetorial de dimensão finita V com um produto escalar g será chamado de espaço com produto escalar.

O exemplo canônico de espaço com produto interno é dado pelo Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ com produto interno δ definido como

$$\delta(u,v) := u \cdot v = \sum_{ij} \delta_{ij}\, u^i v^j \tag{1.1}$$

sendo

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Nem todo produto escalar é um produto interno, pois ele pode ser indefinido, isto é,

- existe $v \neq 0$ tal que $g(v,v) = 0$.

Como exemplo, tome o caso do espaço de Minkowski ($\mathbb{R}^{n+1}$, η), onde

$$\eta(u,v) = \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu}\, u^\mu v^\nu = -u^0 v^0 + \sum_{ij} \delta_{ij}\, u^i v^j. \tag{1.2}$$

com

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & \text{se } \mu = \nu = 0 \\ 1 & \text{se } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases}$$

Note que o produto de Minkowski não é positivo definido, pois tomando $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal $v^0 = 1$ e $v^i = 0$ para $i > 0$, temos $\eta(v,v) = -1 < 0$, apesar de v ser não-nulo e η não-degenerada. Nem sempre é fácil provar que uma forma bilinear é não degenerada usando a definição. O lema a seguir é bem útil neste caso.

Lema 1.1. *Uma forma bilinear qualquer g é um produto escalar se e somente se a sua matriz relativa a uma base é simétrica e invertível.*

Demonstração. Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base para V e g um produto escalar. Se $u \in V$, então $g(u,v) = 0$ para todo $v \in V$ se e somente se $g(u, e_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Desde que g é simétrica, então sua matriz é também simétrica e,

$$g(u, e_i) = g(\sum u^j e_j, e_i) = \sum g_{ij} u^j = 0.$$

Portanto, g é degenerada se e somente se as as colunas (ou linhas) de (g_{ij}) forem linearmente dependentes, o equivale a dizer que $\det(g_{ij}) = 0$ e que g é não-invertível. $\square$

Dois vetores $u, v \in V$ são ortogonais se $g(u,v) = 0$. Um vetor v é ortogonal a subconjunto U de V quando $g(v,u) = 0$ para todo $u \in U$. O conjunto de todos vetores ortogonais a U em V é chamado conjunto ortogonal U, representado pela notação $U^\perp$. Pela possibilidade de $g(v,v)$ ser negativa, a norma $\|v\|$ de um vetor será definida como $|g(v,v)|^{1/2}$. Um vetor unitário u é um vetor de norma 1, isto é, $g(u,u) = \pm 1$. Um conjunto de vetores unitários ortogonais entre si é chamado ortonormal, e para $n = \dim V$, qualquer conjunto de n vetores ortonormais em V é uma base para V. A matriz de g relativa a uma base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ de V é diagonal; e de fato,

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}\varepsilon_j, \text{ onde } \varepsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1. \tag{1.3}$$

Por conveniência, os vetores e_i de uma base ortonormal serão ordenados de maneira que os de sinal negativo (se existirem) apareçam primeiro em uma sequência chamada assinatura: $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

Teorema 1.1 (Lei da Inércia de Sylvester)**.** *Todo espaço V com produto escalar g possui uma base ortonormal. Sua assinatura é invariante pela escolha de base.*

Demonstração. Como g é não-degenerada então existe um vetor $v \in V$ tal que $g(v, v) \neq 0$. Logo $\frac{v}{|v|}$ é um vetor unitário. Temos que g restrita ao complemento ortogonal de v, $[v]^{\perp} = \{u \in V \mid g(u, v) = 0\}$, que tem codimensão 1 em V, também é não-degenerada. Por indução, existe uma base unitária de V. Pelo algoritmo de Gram-Schmidt, qualquer conjunto L.I. $v_1, \ldots v_k$ com $k < \dim V$

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{v_1}{|v_1|} \\
e_2 &= \frac{v_2 - \varepsilon_1\, g(v_2, e_1)e_1}{|v_2 - \varepsilon_1\, g(v_2, e_1)e_1|} \\
e_3 &= \frac{v_3 - \varepsilon_1\, g(v_2, e_1)e_1 - \varepsilon_2\, g(v_2, e_2)e_2}{|v_3 - \varepsilon_1\, g(v_2, e_1)e_1 - \varepsilon_2\, g(v_2, e_2)e_2|} \\
&\ \cdots \\
e_k &= \frac{v_k - \sum_j \varepsilon_j\, g(v_k, e_j)e_j}{|v_k - \sum_j \varepsilon_j g(v_k, e_j)e_j|}
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1$, dá origem a um conjunto ortonormal $e_1, \ldots, e_k$, que também é L.I.. Se $k = n = \dim V$ temos uma base ortonormal de V [1]. Sua assinatura é $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Para a unicidade da assinatura, veja lemma 2.26 da referência [10]. □

Definição 1.2. *Seja V um espaço com produto escalar g. O índice de g, escrito* $\operatorname{ind} g$ *é o valor máximo da dimensão de um subespaço $W \subset V$ no qual g é negativa definida, isto é, $g(v, v) < 0$ para todo $v \in W$ não nulo.*

O índice depende somente de g e não do subespaço $W \subset V$ onde g é negativa definida, o que é uma consequência da Lei da inércia de Sylvester (Veja o teorema 1.1 acima). De fato, para qualquer base $e_1, \ldots, e_n$ de V o número de sinais negativos na assinatura $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ é igual a $\operatorname{ind} g$.

Obviamente $0 \leq \operatorname{ind} g \leq \dim V$. Ainda, $\operatorname{ind} g = 0$ se e somente se $g(v, v) \geq 0$ para todo $v \in V$, ou seja, g é definida positiva. Um espaço vetorial V com produto escalar g no qual $\operatorname{ind} g = 0$ é chamado espaço Euclidiano, e se $\operatorname{ind} g = 1$ ele é chamado espaço de Minkowski. Estas nomenclaturas se justificam uma vez que pelo teorema 1.1, em uma representação por uma base ortonormal, eles são identificados com seus respectivos exemplos canônicos.

1.2 Relações causais em um espaço de Minkowski

Definição 1.3. *Seja V um espaço de Minkowski com produto escalar g. Então um vetor $v \in V$ é chamado*

- *tipo-espaço se $g(v, v) > 0$ ou $v = 0$,*
- *tipo-luz se $g(v, v) = 0$ e $v \neq 0$.*
- *tipo-tempo se $g(v, v) < 0$,*

Exemplo 1.1. *Seja $\mathbb{R}^2$ um espaço de Minkowski com a base ortonormal canônica. Dado um vetor $v \in \mathbb{R}^2$, temos $g(v, v) = -|v^0|^2 + |v^1|^2$. v é um vetor tipo-luz se $g(v, v) = 0$, isto é, $|v^0| = |v^1|$ tipo-espaço se $|v^0| < |v^1|$ e tipo-tempo se $|v^0| > |v^1|$.*

O conjunto de todos vetores tipo-luz em V é chamado cone de luz. O tipo de cada vetor $v \in V$ é chamado caráter causal de v. Essas mesmas categorias também se aplicam a subespaços de V.

Definição 1.4. *Seja W um subespaço de um espaço de Minkowski V com produto escalar g. Então W é chamado:*

- *tipo-espaço, se $g|_W$ é não-degenerado e $\operatorname{ind} g|_W = 0$ (positivo-definido);*
- *tipo-luz, se $g|_W$ é degenerado $(\det g|_W = 0)$;*
- *tipo-tempo, se $g|_W$ é não-degenerado $\operatorname{ind} g|_W = 1$;*

Um subespaço onde o produto escalar é não-degenerado será chamado de subespaço não-degenerado. Ele será chamado de plano não-degenerado se for bidimensional. As vezes é conveniente usar a notação $\operatorname{ind} W$ ao invés de $\operatorname{ind} g|_W$ para o índice da métrica em W.

Lema 1.2. *Se W é um subespaço de um espaço de Minkowski V, então*

(a) $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$,

(b) $(W^\perp)^\perp = W$.

(c) Se W é não-degenerado vale também a identidade

$$\operatorname{ind} W + \operatorname{ind} W^\perp = \operatorname{ind} V. \tag{1.4}$$

Demonstração. Veja lema 2.22 da referência [10]. □

Lema 1.3. *São equivalentes as seguintes afirmações para um subespaço W de V:*

(a) W é não-degenerado;

(b) $W^\perp$ *é não-degenerado;*

(c) $W \cap W^\perp = \{0\}$*;*

(d) $V = W \oplus W^\perp$.

Demonstração. W é degenerado se, e somente se, existe um $v \in W$ tal que $g(v,u) = 0$ para todo $u \in W$, isto é, $v \in W^\perp$, o que equivale a $W \cap W^\perp \neq \{0\}$. O mesmo argumento vale para $W^\perp$, uma vez que $W = (W^\perp)^\perp$, como visto no lema 1.2. Assim provamos a equivalência entre (a), (b) e (c).
Combinando a identidade entre dois espaços vetoriais quaisquer, que para W e $W^\perp$ é representada por

$$\dim(W + W^\perp) + \dim(W \cap W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp, \tag{1.5}$$

com o lema 1.2 temos:

$$\dim(W + W^\perp) + \dim(W \cap W^\perp) = \dim V \tag{1.6}$$

Logo $W + W^\perp = V$ se e somente se $W \cap W^\perp = \{0\}$. Isto prova a equivalência entre (c) e (d). □

O caráter causal de um vetor v é o mesmo de $[v]$, o espaço gerado por v.

Lema 1.4. *Se* v *é um vetor tipo-tempo em um espaço de Minkowski, então o subespaço* $v^\perp$ *é tipo-espaço e* $V = [v] \oplus v^\perp$.

Demonstração. O subespaço $[v]$ gerado por um vetor tipo-tempo v é subespaço tipo-tempo, que por definição é também não-degenerado. Pelo lema 1.3 $v^\perp$ é também não-degenerado e $V = [v] \oplus v^\perp$. A conclusão segue de $1 = \operatorname{ind} V = \operatorname{ind}[v] + \operatorname{ind} v^\perp = 1 + \operatorname{ind} v^\perp$, isto é, $\operatorname{ind} v^\perp = 0$. □

Teorema 1.2. *Seja* W *um subespaço de um espaço de Minkowski* V*. Então:*

(a) W *é tipo-tempo se e somente se* $W^\perp$ *é tipo-espaço.*

(b) W *é tipo-luz se e somente se* $W^\perp$ *é tipo-luz.*

Demonstração. (a) Seja W um subespaço não-degenerado de V, então $V = W \oplus W^\perp$. Se W é tipo-tempo então existe um vetor $v \in W$ tal que $g(v,v) < 0$. Como $[v] \subset W$ é tipo-tempo então $W^\perp \subset [v]^\perp$, é tipo-espaço pelo lema 1.4. A recíproca também é verdadeira se usarmos $W^\perp$ no lugar de W.

(b) A segunda afirmação sai diretamente do lema 1.3.

□

1.3 Variedades Lorentzianas

Definição 1.5. *Seja M uma variedade suave e g um campo tensorial 2-covariante em M, tal que*

- *g induz um produto escalar em T_pM para todo $p \in M$.*
- *o índice do produto escalar induzido em T_pM por g é independente de p.*

Então M é chamada variedade Semi-Riemannina (ou Pseudo-Riemanniana)

Além disso, M é chamada Riemanniana quando $\operatorname{ind} g = 0$ e Lorentziana quando $\operatorname{ind} g = 1$.

Definição 1.6. *Sejam V e W dois espaços vetoriais com produto interno g e h. Uma aplicação linear bijetora $T : V \to W$ é uma isometria linear quando $h(Tu, Tv) = g(u, v)$ para todo $u, v \in V$.*

Todo espaço vetorial finito com produto escalar de índice $\operatorname{ind} g = 0$ (Riemanniano) é isométrico ao espaço Euclidiano. Já todo espaço vetorial finito com produto escalar de índice $\operatorname{ind} g = 1$ (Lorentziano) é isométrico ao espaço de Minkowski.

Definição 1.7. *Uma aplicação suave $\phi : M \to N$ de variedades semi-Riemannianas é uma isometria local se para cada aplicação suave $d\phi : T_pM \to T_{\phi(p)}N$ é uma isometria linear.*

Definição 1.8. *Sejam M e N variedades semi-Riemannianas com métricas g_M e g_N. Uma isometria de M a N é um difeomorfismo $\phi : M \to N$ que preserva a métrica, isto é, $\phi^* g_N = g_M$, onde para $u, v \in T_pM$*

$$\left(\phi^* g_N\right)_p (u, v) := (g_N)_{\phi(p)}(d\phi_p u, d\phi_p v). \tag{1.7}$$

Neste caso dizemos que M e N são isométricas.

1.4 Conexões

A partir de agora utilizaremos as seguintes nomenclaturas:

- $\mathfrak{F}(M)$ para o espaço de funções suaves de M em $\mathbb{R}$;
- $\mathfrak{X}(M)$ para o espaço de campos vetoriais em M;
- $[X, Y]$ representa o comutador , ou colchete de Lie, entre os campos vetoriais X e Y.
- Para $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathfrak{F}(M)$, $Xf := df \cdot X$.
- g a partir de agora será definida como um campo tensorial 2-covariante em M.

Definição 1.9. *Uma conexão ∇ em uma variedade suave M é uma função $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que*

(D1) *é linear sobre* $\mathfrak{F}(M)$ *em* X*: para* $f \in \mathfrak{F}(M)$

$$\nabla_{fY_1+Y_2}X = f\nabla_{Y_1}X + \nabla_{Y_2}X. \tag{1.8}$$

(D2) *é linear sobre* $\mathbb{R}$ *em* Y*: para* $a \in \mathbb{R}$

$$\nabla_Y(aX_1 + X_2) = a\nabla_Y X_1 + \nabla_Y X_2 \tag{1.9}$$

(D3) *Vale a regra de Leibnitz: para* $f \in \mathfrak{F}(M)$

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y \tag{1.10}$$

$\nabla_X Y$ é chamada derivada covariante de Y com respeito a X para a conexão ∇. Os axiomas (D1) e (D3) mostram que, para $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $X \mapsto \nabla_X Y$ é um campo tensorial 1-covariante em M, mas $Y \mapsto \nabla_X Y$ não é campo tensorial.

Teorema 1.3. *Em uma variedade semi-Riemanniana* M *existe uma única conexão* ∇ *tal que*

(D4) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, *e*

(D5) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$[1],

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. ∇ *é chamada conexão de Levi-Civita de* M*, e é caracterizada pela fórmula de Koszul*

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X]) + g(X, [Z, Y]). \tag{1.11}$$

Os axiomas (D4) e (D5) são chamados axiomas de simetria e compatibilidade.

Demonstração. a) Existência: Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, defina $\nabla_X Y$ como sendo o único campo vetorial que satisfaz a equação (1.11) para qualquer $Z \in \mathfrak{X}(M)$. É uma verificação direta mostrar que $\nabla_X Y$ assim definido satisfaz as condições (D1), (D2), (D3), (D4) e (D5), ou seja, ∇ é uma conexão de Levi-Civita

b) Fórmula de Koszul: Seja agora ∇ uma conexão de Levi-Civita qualquer e tome $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Escreva a equação de compatibilidade três vezes com X, Y, Z permutando ciclicamente

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ Yg(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ Zg(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

[1] Isto equivale a $\nabla_X g = 0$, pois $(\nabla_X g)(Y, Z) = \nabla_X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$.

Usando a condição de simetria no último termo em cada linha, isto pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_Z X) + g(Y,[X,Z]) \\ Yg(Z,X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) + g(Z,[Y,X]) \\ Zg(X,Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(X,[Z,Y]). \end{aligned}$$

Adicionando as primeiras duas destas equações e subtraindo a terceira, nós obtemos:

$$Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y) = 2g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,[X,Z])+g(Z,[Y,X])-g(X,[Z,Y]). \quad (1.12)$$

Finalmente, isolando $g(\nabla_X Y, Z)$, nós conseguimos

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}(Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - g(Y,[X,Z]) - g(Z,[Y,X]) + g(X,[Z,Y])). \quad (1.13)$$

O que mostra que qualquer conexão de Levi-Civita satisfaz a fórmula de Koszul (1.11).

c) Unicidade: sejam duas conexões ∇ e $\tilde{\nabla}$ satisfazendo as propriedades de compatibilidade e simetria. Pelo item anterior elas satisfazem a fórmula de Kozsul (1.11). Substituindo e subtraindo ambas nesta fórmula:

$$g(\nabla_X Y, Z) - g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = 0 \Rightarrow g(\nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y, Z) = 0 \quad (1.14)$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Como a métrica é não-degenerada temos:

$$\nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y = 0 \Rightarrow \nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y \quad (1.15)$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o que equivale a dizer que $\nabla = \tilde{\nabla}$.

□

As derivadas covariantes ao longo dos campos ∂_μ serão também escritas com a notação ∇_{∂_μ} ou ∇_μ. Onde para cada $p \in M$ os vetores ∂_μ formam uma base para T_pM.

Definição 1.10. *Seja $x^0, \dots, x^n$ um sistema de coordenadas em uma vizinhança U em uma variedade semi-Riemanniana M e ∇ uma conexão de Levi-Civita em M. Os símbolos de Christoffel para este sistema de coordenadas são as funções reais $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ em U tais que*

$$\nabla_\mu \partial_\nu = \sum_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda. \quad (1.16)$$

Pela simetria de ∇ temos:

$$\begin{aligned} [\partial_\mu, \partial_\nu] &= \nabla_\mu \partial_\nu - \nabla_\nu \partial_\mu \\ &= \sum_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda - \sum_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda \\ &= \sum_\lambda (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) \partial_\lambda \end{aligned}$$

Como $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$ [2], segue que

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \tag{1.17}$$

Proposição 1.1. *Para um sistema de coordenadas $x^0, \ldots, x^n$ em U, os símbolos de Christoffel são dados por*

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_\sigma g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{1.18}$$

Demonstração. Seja $\partial_0, \ldots \partial_n$ uma base ortogonal para T_pM. O colchete de Lie para quaisquer ∂_μ , ∂_μ e ∂_σ nesta base é nulo: $[\partial_\mu, \partial_\sigma] = [\partial_\nu, \partial_\mu] = [\partial_\sigma, \partial_\mu] = 0$. Assim fórmula de Koszul 1.11 para $g(\nabla_\mu\partial_\nu, \partial_\sigma)$ acaba ficando:

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_\mu\partial_\nu, \partial_\sigma) &= \partial_\mu g(\partial_\nu, \partial_\sigma) + \partial_\nu g(\partial_\sigma, \partial_\mu) - \partial_\sigma g(\partial_\mu, \partial_\nu) \\
2\sum_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} &= \partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \\
\Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\sum_\sigma g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\mu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

□

1.5 Derivada Covariante ao longo de uma Curva e Parâmetro Afim

A partir de agora (M, g) é uma variedade semi-Riemanniana e ∇ é sua conexão de Levi-Civita.

Definição 1.11. *Uma curva γ em uma variedade M é uma sub-variedade imersa de dimensão* 1. *Uma parametrização de γ, ou simplesmente curva parametrizada, é uma aplicação suave $\gamma : I \to M$, sendo I um intervalo da reta real.* [3]

Um campo vetorial X tangente a uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma aplicação suave que associa cada ponto $\tau \in I$ a um vetor $X_{\gamma(\tau)} \in T_{\gamma(\tau)}M$. O conjunto de todos os campos vetoriais em γ é escrito $\mathfrak{X}(\gamma)$, que é um módulo sobre $\mathfrak{F}(I)$. Chamamos vetor velocidade o campo vetorial tangente à curva parametrizada γ dado pela sua derivada $\dot\gamma$. Uma curva γ em M é tipo-espaço se todos os seus vetores velocidade $\dot\gamma$ são tipo-espaço, independentemente da parametrização escolhida. O mesmo acontece para curvas tipo-tempo e tipo-luz.

Proposição 1.2. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana e seja ∇ uma conexão em M. Para toda curva parametrizada $\gamma : I \to M$, a conexão determina um único operador $\nabla_{\dot\gamma} : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$ tal que*

[2] $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$ pois para qualquer $\phi \in \mathfrak{F}(M)$ temos $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\nu \partial^\mu} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^\nu \partial^\mu}$.

[3] O ntervalo I pode ser aberto, fechado ou semi-aberto. Em cada caso γ deve ser contínua nestes intervalos e diferenciável no interior destes mesmos intervalos.

(D'1) *é linear sobre* $\mathbb{R}$*, isto é, para* $a \in \mathbb{R}$*:*

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(aX + Y) = a\nabla_{\dot{\gamma}}X + \nabla_{\dot{\gamma}}Y \tag{1.19}$$

(D'3) *vale a regra de Leibniz, isto é, para* $f \in \mathfrak{F}(I)$

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(fX) = \tfrac{df}{d\tau}X + f\nabla_{\dot{\gamma}}X \tag{1.20}$$

(D'5) $\nabla_{\dot{\gamma}}$ *é compatível com a métrica:*

$$\nabla_{\dot{\gamma}}g(X, Y) = g(\nabla_{\dot{\gamma}}X, Y) + g(X, \nabla_{\dot{\gamma}}Y) \tag{1.21}$$

A derivada covariante em relação ao vetor velocidade de $\gamma(\tau)$ será representada $\nabla_{\dot{\gamma}}$ ou ∇_{τ}. Em um sistema de coordenadas $x^0, \ldots, x^n$ a derivada covariante de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ ao longo de γ com relação à parametrização $\gamma(\tau)$ é

$$\nabla_{\dot{\gamma}}X = \sum_{\sigma}\left(\frac{dX^{\sigma}}{d\tau} + \sum_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}X^{\nu}\right)\partial_{\sigma} \tag{1.22}$$

Sua aceleração é a derivada covariante $\ddot{\gamma} := \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$, que existe pela proposição 1.2.

Definição 1.12. *Uma parametrização de uma curva* γ *não-nula, isto é,* $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \neq 0$*, é dita ser afim quando a aceleração é perpendicular à velocidade, isto é,* $g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$.

Exemplo 1.2. *Sejam* $\gamma(t) = (cos(t), sen(t))$ *e* $\gamma_1(t) = (cos(t^2), sen(t^2))$ *duas parametrizações do circulo unitário em* $(\mathbb{R}^2, \delta)$*. As suas derivadas são* $\dot{\gamma}(t) = (-sen(t), cos(t))$ *e* $\dot{\gamma}_1(t) = (-2t \cdot sen(t^2), 2t \cdot cos(t^2))$*, respectivamente. É fácil ver que* $\delta(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$ *e* $\delta(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_1) = 4t^2$*. Apenas a primeira é uma parametrização afim, pois* $\delta(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ *e* $\delta(\nabla_{\dot{\gamma}_1}\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_1) = 1$.

Proposição 1.3. *Toda curva não-nula admite um parametrização afim.*

Demonstração. Sejam $\gamma(t)$ uma parametrização qualquer e $\gamma_1(s)$ uma parametrização afim tal que $t = h(s)$. Pela regra da cadeia temos:

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{d(\gamma \circ h)}{ds} = \frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{ds} = h'(s)\dot{\gamma} = u\dot{\gamma}$$

A aceleração de γ_1 é

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma}_1 &= \nabla_{\dot{\gamma}_1}\dot{\gamma}_1 \\ &= \nabla_{u\dot{\gamma}}(u\dot{\gamma}) \\ &= u[\nabla_{\dot{\gamma}}(u)\dot{\gamma} + u\nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma})] \\ &= u\frac{du}{dt}\dot{\gamma} + u^2\ddot{\gamma}\end{aligned}$$

O produto g da velocidade e aceleração de γ é

$$\begin{aligned} g(\dot{\gamma_1}, \ddot{\gamma_1}) &= g(u\dot{\gamma}, u\frac{du}{dt}\dot{\gamma} + u^2\ddot{\gamma}) \\ &= u^2\frac{du}{dt}g(\dot{\gamma},\dot{\gamma}) + u^3 g(\dot{\gamma},\ddot{\gamma}) \\ &= u^2[\frac{du}{dt}g(\dot{\gamma},\dot{\gamma}) + ug(\dot{\gamma},\ddot{\gamma})] \end{aligned}$$

Por $\gamma_1(s)$ ser uma parametrização afim, isto é $g(\dot{\gamma_1}, \ddot{\gamma_1}) = 0$, temos para o de caso em que γ seja não-nula:

$$\frac{du}{dt} + \frac{g(\dot{\gamma},\ddot{\gamma})}{g(\dot{\gamma},\dot{\gamma})}u = 0 \tag{1.23}$$

sendo $g(\dot{\gamma},\dot{\gamma}) \neq 0$. Aqui temos equação diferencial linear homogênea cuja solução é:

$$u = ce^{-\int \frac{g(\dot{\gamma},\ddot{\gamma})}{g(\dot{\gamma},\dot{\gamma})}dt} \tag{1.24}$$

Mas $u = \frac{dt}{ds}$ e assim

$$s = a + b\int e^{\int \frac{g(\dot{\gamma},\ddot{\gamma})}{g(\dot{\gamma},\dot{\gamma})}dt}dt \tag{1.25}$$

□

Proposição 1.4. *Se t e s são parâmetros afim de uma mesma curva não-nula então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que*

$$s = a + bt \tag{1.26}$$

Demonstração. Supondo na equação 1.25 que $\gamma(t)$ seja uma parametrização afim temos, já que $g(\dot{\gamma},\ddot{\gamma}) = 0$:

$$s = a + b\int e^{\int \frac{g(\dot{\gamma},\ddot{\gamma})}{g(\dot{\gamma},\dot{\gamma})}dt}dt = a + b\int e^0 dt = a + bt.$$

□

Obs 1.1. *Uma parametrização de uma curva tipo-luz é dita ser afim quando sua aceleração é nula.*

1.6 Equações Geodésicas

Um campo vetorial X em uma curva γ é chamado campo paralelo quando $\nabla_{\dot{\gamma}}X = 0$. (Algumas vezes usaremos a notação X' para $\nabla_{\dot{\gamma}}X$.) Em coordenadas, X é paralelo se, e somente se, satisfaz o sistema de EDO's.[4]

$$\frac{dX^\sigma}{d\tau} + \sum_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}X^\nu = 0. \tag{1.27}$$

Pelo teorema da existência e unicidade dessas EDO's (ver [2]), temos:

[4]Equações Diferenciais Ordinárias.

Proposição 1.5. *Dada uma curva $\gamma : I \to M$, seja $a \in I$ e $v \in T_{\gamma(a)}(M)$. Então existe um único campo vetorial paralelo X em γ tal que $X(a) = v$.*

Esta proposição dá origem a uma função chamada transporte paralelo ao longo de γ de $p = \gamma(a)$ a $q = \gamma(b)$:

$$P_b^a(\gamma) : T_pM \to T_qM. \tag{1.28}$$

que leva $v = X(a)$ para $X(b)$, onde X é único campo vetorial definido na proposição 1.5.

Definição 1.13. *Uma geodésica é uma curva γ tal que, para cada uma de suas parametrizações $\gamma : I \to M$, existe $\kappa : I \to \mathbb{R}$ suave tal que*

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \kappa\dot{\gamma}. \tag{1.29}$$

Teorema 1.4. *Seja $x^0, \ldots, x^n$ um sistema de coordenadas em um aberto $U \subset M$. Uma curva γ em U é uma geodésica de M se e somente se suas funções coordenadas x^k satisfazem as equação geodésicas:*

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \sum_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \kappa\frac{dx^\lambda}{d\tau} \tag{1.30}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} &= \nabla_{\dot{\gamma}}\left(\sum_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\nu\right) \\
&= \sum_\nu \left(\nabla_{\dot{\gamma}}\left(\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)\partial_\nu + \frac{dx^\nu}{d\tau}\nabla_{\dot{\gamma}}\partial_\nu\right) \\
&= \sum_\nu \frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\partial_\nu + \sum_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}\nabla_\mu\partial_\nu \\
&= \sum_\lambda \left(\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \sum_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)\partial_\lambda.
\end{aligned}$$

Mas $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \sum_\lambda \kappa \frac{dx^\lambda}{d\tau}\partial_\lambda$, portanto

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \sum_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \kappa\frac{dx^\lambda}{d\tau}$$

□

O lema a seguir é mais uma consequência direta do teorema da existência e unicidade das EDO's (ver [2]).

Proposição 1.6. *Se $v \in T_pM$ então existe um intervalo I centrado em 0 e uma única geodésica $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$.*

Lema 1.5. *Em uma geodésica, $L = g(\dot\gamma, \dot\gamma)$ tem a forma*

$$L = L_0 e^{2\int \kappa(t)dt}. \tag{1.31}$$

L é constante e $\kappa(t) \equiv 0$ quando t é um parâmetro afim.

Demonstração. A derivada de L é

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(g(\dot\gamma, \dot\gamma)) = 2g(\dot\gamma, \ddot\gamma) = 2g(\dot\gamma, \kappa\dot\gamma) = 2\kappa g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 2\kappa L.$$

Assim chega-se uma equação linear $\frac{dL}{dt} = 2\kappa L$ cuja solução é

$$L = L_0 e^{2\int \kappa(t)dt}. \tag{1.32}$$

Se t é um parâmetro afim $g(\dot\gamma, \kappa\dot\gamma) = 0$ e por isso

$$\frac{dL}{dt} = 2\kappa g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 0.$$

Daí é fácil ver que a que a solução de $\frac{dL}{dt}$ é uma constante. Seja γ uma geodésica com parâmetro afim

$$0 = g(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \dot\gamma) = g(\kappa\dot\gamma, \dot\gamma) = \kappa g(\dot\gamma, \dot\gamma)$$

Como $g(\dot\gamma, \dot\gamma)$ é constante então $\kappa(t) \equiv 0$. □

Se γ é uma geodésica com parâmetro afim, então $g(\dot\gamma, \dot\gamma)$ é igual a uma constante L. Por isso se um vetor velocidade em um ponto p de γ é tipo-espaço, então todos os demais vetores velocidade são tipo-espaço na mesma curva. Assim podemos classificar todas as geodésicas em M conforme o caráter causal de seus campos de velocidades:

- Se $L > 0$ então γ é uma curva tipo-espaço ;
- Se $L < 0$ então γ é uma curva tipo-tempo;
- Se $L = 0$ então γ é uma curva tipo-luz.

Repare que para geodésicas estas três classes são disjuntas.

1.7 Curvatura

1.7.1 Tensor de Curvatura

Lema 1.6. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇. A função*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \tag{1.33}$$

definida como

$$R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{1.34}$$

é um campo tensorial de ordem (3,1) em M chamado tensor de curvatura de M.

Demonstração. Basta provar que R é $\mathfrak{F}(M)$-linear em X, Y e Z. Para tal, tome $f \in \mathfrak{F}(M)$:

$$\begin{aligned} R(X, Y_1 + Y_2)Z &= [\nabla_X, \nabla_{Y_1+Y_2}]Z - \nabla_{[X,Y_1+Y_2]}Z \\ &= [\nabla_X, \nabla_{Y_1}]Z + [\nabla_X, \nabla_{Y_2}]Z - \nabla_{[X,Y_1]}Z - \nabla_{[X,Y_2]}Z \\ &= R(X, Y_1)Z + R(X, Y_2)Z, \end{aligned}$$

mas $[X, fY] = (Xf)Y + f[X, Y]$, logo

$$\begin{aligned} R(X, fY)Z &= [\nabla_X, f\nabla_Y]Z - \nabla_{[X,fY]}Z \\ &= ((\nabla_X f)\nabla_Y + f[\nabla_X, \nabla_Y])Z - \nabla_{((Xf)Y+f[X,Y])}Z \\ &= (Xf)\nabla_Y Z + f[\nabla_X, \nabla_Y]Z - (Xf)\nabla_Y Z - f\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= f[\nabla_X, \nabla_Y]Z - f\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= fR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Como $R(X, Y)$ é um campo tensorial anti-simétrico, então

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= -[\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[Y,X]}Z \\ &= -R(Y, X)Z, \end{aligned}$$

logo podemos provar que R é $\mathfrak{F}(M)$-linear em X

$$\begin{aligned} R(X_1 + fX_2, Y)Z &= -R(Y, X_1 + fX_2)Z \\ &= -R(Y, X_1)Z - fR(Y, X_2)Z \\ &= R(X_1, Y)Z + fR(X_2, Y)Z. \end{aligned}$$

Agora provaremos a $\mathfrak{F}(M)$-linearidade em Z

$$\begin{aligned} R(X, Y)(fZ) &= [\nabla_X, \nabla_Y](fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ) \\ &= ([\nabla_X, \nabla_Y]f)Z + f[\nabla_X, \nabla_Y]Z - (\nabla_{[X,Y]}f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= ([X, Y]f)Z + f[\nabla_X, \nabla_Y]Z - ([X, Y]f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= f[\nabla_X, \nabla_Y]Z - f\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= fR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.7. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana. As componentes do tensor de curvatura são*

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\rho} = \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \sum_\sigma \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \tag{1.35}$$

Demonstração. Seja $\{\partial_0, \dots, \partial_n\}$ uma base ortonormal para T_pM. Pela multi-linearidade de R (Lema 1.6) temos:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= R(\sum_\mu X^\mu \partial_\mu, \sum_\nu Y^\nu \partial_\nu) \sum_\rho Z^\rho \partial_\rho \\ &= \sum_{\mu\nu\rho} X^\mu Y^\nu Z^\rho R(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\rho. \end{aligned}$$

Sabemos que $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, logo pela definição o tensor de curvatura (Lema 1.6) temos:

$$\begin{aligned} R(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\rho &= [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\partial_\rho - \nabla_{[\partial_\mu, \partial_\nu]}\partial_\rho \\ &= \nabla_\mu(\nabla_\nu \partial_\rho) - \nabla_\nu(\nabla_\mu \partial_\rho) \\ &= \nabla_\mu \left(\sum_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\rho}\partial_\sigma\right) - \nabla_\nu \left(\sum_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\partial_\sigma\right) \\ &= \sum_\sigma \nabla_\mu(\Gamma^\sigma_{\nu\rho}\partial_\sigma) - \nabla_\nu(\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\partial_\sigma) \\ &= \sum_\sigma (\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho})\partial_\sigma + \Gamma^\sigma_{\nu\rho}(\nabla_\mu \partial_\sigma) - (\partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho})\partial_\sigma - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}(\nabla_\nu \partial_\sigma) \\ &= \sum_\sigma (\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho})\partial_\sigma + \sum_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\rho}(\nabla_\mu \partial_\sigma) - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}(\nabla_\nu \partial_\sigma) \\ &= \sum_\sigma (\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho})\partial_\sigma + \sum_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\rho}(\sum_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\partial_\lambda) - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}(\sum_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\partial_\lambda) \\ &= \sum_\sigma (\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho})\partial_\sigma + \sum_{\lambda\sigma} (\Gamma^\sigma_{\nu\rho}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma})\partial_\lambda \end{aligned}$$

Fazendo $\sigma = \lambda$ na primeira soma:

$$\begin{aligned} &= \sum_\lambda (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho})\partial_\lambda + \sum_{\lambda\sigma} (\Gamma^\sigma_{\nu\rho}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma})\partial_\lambda \\ &= \sum_\lambda \left(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \sum_\sigma (\Gamma^\sigma_{\nu\rho}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma})\right)\partial_\lambda. \end{aligned}$$

Como R em coordenadas é $R(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\rho = R^\lambda_{\mu\nu\rho}\partial_\lambda$ então

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \sum_\sigma (\Gamma^\sigma_{\nu\rho}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}).$$

□

Proposição 1.8 (Relações de Bianchi)**.** *Se* $X, Y, Z, U, V \in \mathfrak{X}(M)$*, então*

(a) $R(X,Y) = -R(Y,X)$,

(b) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,

(c) $g(R(X,Y)U,V) = -g(R(X,Y)V,U)$,

(d) $g(R(X,Y)U,V) = g(R(U,V)X,Y)$,

Demonstração. (a) Já provamos no lema 1.6.

(b) Segue direto da definição do tensor de curvatura e da identidade de Jacobi para o colchete de Lie.

(c) Sabemos pelo Axioma (D5) (proposição 1.3) que $g(\nabla_X Y, Y) = \frac{1}{2}Xg(Y,Y)$. Assim usando o lema 1.6 temos:

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,Z) &= g(\nabla_X(\nabla_Y Z), Z) - g(\nabla_Y(\nabla_X Z), Z) - g(\nabla_{[X,Y]}Z, Z) \\ &= Xg(\nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) - Yg(\nabla_X Z, Z) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) - \frac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z) \\ &= \frac{1}{2}XYg(Z,Z) - \frac{1}{2}YXg(Z,Z) - \frac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z) = 0 \\ &= \frac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z) - \frac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z) = 0 \end{aligned}$$

Utilizando o resultado acima temos:

$$g(R(X,Y)U+V, U+V) = 0 \Rightarrow g(R(X,Y)U,V) = -g(R(X,Y)V,U) \tag{1.36}$$

(d) Utiliza-se o mesmo argumento do item anterior.

$\square$

As vezes é conveniente trabalhar com o tensor de curvatura R através do tensor 4-covariante $\downarrow_1^1 R$[5] cujas coordenadas são

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = \sum_\sigma g_{\lambda\sigma} R^\sigma_{\mu\nu\rho}. \tag{1.37}$$

Corolário 1.1. *As relações de Bianchi para R em coordenadas são*

(a) $R^\lambda_{\mu\nu\rho} = -R^\lambda_{\mu\rho\nu}$

(b) $R^\lambda_{\mu\nu\rho} + R^\lambda_{\nu\rho\mu} + R^\lambda_{\rho\mu\nu} = 0$

(c) $R_{\lambda\mu\nu\rho} = -R_{\mu\lambda\nu\rho}$

(d) $R_{\lambda\mu\nu\rho} = -R_{\lambda\mu\rho\nu}$

(e) $R_{\lambda\mu\nu\rho} = R_{\nu\rho\lambda\mu}$

(f) $R_{\lambda\mu\nu\rho} + R_{\mu\nu\lambda\rho} + R_{\nu\lambda\mu\rho} = 0.$

[5] As setas indicam levantamento $\uparrow$ e abaixamento $\downarrow$ de índice. Para mais detalhes ver [10] página 81.

Além disso vale

$$R_{\lambda\lambda\nu\rho} = R_{\lambda\mu\nu\nu} = 0 \tag{1.38}$$

e

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\nu} = 0. \tag{1.39}$$

Qualquer soma de três componentes do tensor curvatura obtidos através da permutação cíclica de três índices é igual a zero.

1.7.2 Tensor de Ricci

Definição 1.14. *Seja R o tensor de curvatura de M. O tensor de Ricci* Ric *de M é a contração $\mathrm{C}^1_2(R) \in T^0_2(M)$,*[6] *cujos componentes relativos a um sistema de coordenadas são $R_{\mu\nu} = \sum_\sigma R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}$.*

Uma consequência imediata das propriedades do tensor de curvatura é:

Proposição 1.9. *O tensor de Ricci é simétrico, isto é, $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$.*

1.7.3 Curvatura Escalar

Definição 1.15. *A curvatura escalar S de M é a contração $C^1_1 \operatorname{Ric} \in \mathfrak{F}(M)$ de seu tensor de Ricci. Em coordenadas*

$$S = \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \sum_{\mu\nu\sigma} g^{\mu\nu} R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} \tag{1.40}$$

1.7.4 Tensor de Einstein

Definição 1.16. *O tensor de Einstein em uma variedade M com métrica g é*

$$G = \operatorname{Ric} - \frac{1}{2} g S. \tag{1.41}$$

Em coordenadas,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} S. \tag{1.42}$$

1.7.5 Curvatura Seccional

Seja Π um subespaço bidimensional de T_pM. Para vetores linearmente independentes $X, Y \in \Pi$ definimos

$$Q(X,Y) = g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2. \tag{1.43}$$

Pelo lema 1.1 Π é um plano não-degenerado se e somente se o determinante da matriz associada $g|_\Pi$ for não-nulo, isto é, se $Q(X,Y) \neq 0$ para qualquer base $\{X, Y\}$ de Π.

[6] A notação $C^1_2(R)$ significa contração do primeiro índice contravariante com o segundo índice covariante. (ver [10] página 40)

Lema 1.7. *Seja* Π *um plano tangente não-degenerado a* M *em* p. *O valor*

$$K(X,Y)=\frac{g(R(X,Y)X,Y)}{Q(X,Y)}, \tag{1.44}$$

chamado curvatura seccional de Π, *é independente da escolha da base* X,Y *para* Π.

Se M é bidimensional, T_pM é o único plano tangente em p. Neste caso a curvatura seccional K se torna uma função de M em $\mathbb{R}$, chamada curvatura Gaussiana de M. (ver[3])

Proposição 1.10. *Seja* M *uma superfície de métrica Lorentziana (ou Riemanniana) representada em um sistema de coordenadas ortogonais* $ds^2=\pm Edu^2+Gdv^2$. *A curvatura Gaussiana de* M *num ponto* $p\in M$ *é*

$$K(p)=\frac{-1}{2\sqrt{EG}}\left(\pm\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v}\right)\right). \tag{1.45}$$

Exemplo 1.3. *Seja uma superfície Lorentziana* M^2 *de métrica* $ds^2=-e^{2\phi(x,t)}dt^2+a(t)^2dx^2$. *A curvatura Gaussiana de* M *em* p *é dada para* $E=e^{2\phi}$, $G=a^2$ *e* $\sqrt{EG}=ae^{\phi}$ *por*

$$\begin{aligned}
K(p) &= \tfrac{-1}{2\sqrt{EG}}\left(-\tfrac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{\sqrt{EG}}\tfrac{\partial G}{\partial t}\right)+\tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{\sqrt{EG}}\tfrac{\partial E}{\partial x}\right)\right)\\
&= \frac{-1}{2ae^{\phi}}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2a}{ae^{\phi}}\frac{da}{dt}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2e^{2\phi}}{ae^{\phi}}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right)\\
&= \frac{1}{ae^{\phi}}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\phi}\frac{da}{dt}\right)-\frac{1}{ae^{\phi}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{\phi}}{a}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\\
&= \frac{1}{ae^{\phi}}\left(-e^{-\phi}\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{da}{dt}+e^{-\phi}\frac{d^2a}{dt^2}\right)-\frac{1}{ae^{\phi}}\left(\frac{e^{\phi}}{a}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\frac{e^{\phi}}{a}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)\\
&= \frac{e^{-2\phi}}{a}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{da}{dt}+\frac{d^2a}{dt^2}\right)-\frac{1}{a^2}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\boxed{K(p)=\frac{e^{-2\phi}}{a}\left(\frac{d^2a}{dt^2}-\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{da}{dt}\right)-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right).} \tag{1.46}$$

Uma variedade semi-Riemanniana M para a qual o tensor de curvatura R é zero em todos os pontos é chamada plana. Uma proposição bem conhecida da geometria semi-Riemanniana nos diz que isto é equivalente à curvatura seccional nula [10]:

Proposição 1.11. $K(\Pi)=0$ *para todo plano não-degenerado em* T_pM, *se, e somente se,* $R(X,Y)Z=0$ *para todo* $X,Y,Z\in T_pM$.

No capítulo seguinte utilizaremos uma noção de subvariedade plana importante para os nossos objetivos:

Definição 1.17. *Uma variedade Lorentziana* (M,g) *é espacialmente plana quando para cada* $p\in M$ *existir um aberto* $U\subset M$, *um intervalo aberto da reta real* I , *uma variedade* Σ *e um difeomorfismo* $\psi:U\to I\times\Sigma$ *tais que* $g_{|\Sigma_t}$ *é uma métrica Riemanniana de curvatura nula em* $\Sigma_t:=\psi(\{t\}\times\Sigma)\subset M$.

1.8 Segunda Forma Fundamental

Uma hiperfície não-degenerada Σ é uma subvariedade de codimensão 1 em M. Se ela é orientada, então é possível definir globalmente um campo normal a ela. Neste caso, escolhendo a direção normal representada pelo campo unitário Z, definimos:

Definição 1.18. *Em uma hiperfície não-degenerada Σ contida em uma variedade Lorentziana M, a segunda forma fundamental é o campo tensorial 2-covariante definido ao longo de Σ por*

$$\mathrm{II}(X, Y) = -g(\nabla_X Z, Y). \tag{1.47}$$

Definição 1.19. *Em uma hiperfície não-degenerada e orientada Σ de uma variedade Lorentziana M com campo normal Z, um ponto $p \in \Sigma \subset M$ é umbílico quando existir uma constante κ_p tal que*

$$\mathrm{II}_p(X, Y) = \kappa_p g_p(X, Y) \text{ para todo } X, Y \in T_p\Sigma. \tag{1.48}$$

A hiperfície Σ é totalmente umbílica quando todos os seus pontos forem umbílicos, isto é, quando $p \mapsto \kappa_p$ definir uma função suave $\kappa : \Sigma \to \mathbb{R}$.

1.9 Campos de Jacobi

Definição 1.20. *Uma variação de um segmento de curva $\gamma : [a, b] \to M$ é uma aplicação suave*

$$x : [a, b] \times (-\delta, \delta) \to M, \tag{1.49}$$

tal que $\gamma(u) = x(u, 0)$ para todo $u \in [a, b]$.

x é composta por duas famílias de curvas parametrizadas, chamadas:

- Longitudinais para $u \mapsto x(u, v_o)$ com v_o fixado;
- Transversais para $v \mapsto x(u_o, v)$ com u_o fixado.

A curva longitudinal $\gamma(u) = x(u, 0)$ é chamada curva base de x. O vetor velocidade ao longo de cada uma dessas curvas é respectivamente:

$$x_u = \sum_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\partial_\mu, \quad x_v = \sum_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial v}\partial_\mu \quad \text{e} \quad \dot{\gamma} = \sum_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}\partial_\mu \tag{1.50}$$

Proposição 1.12. *Se x é uma variação então:*

$$\nabla_{x_u} x_v = \nabla_{x_v} x_u \tag{1.51}$$

e se Z é um campo vetorial em x, então

$$[\nabla_{x_u}, \nabla_{x_v}]Z = R(x_u, x_v)Z. \tag{1.52}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
[x_u, x_v] &= \sum_{\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\partial_\mu \left(\sum_{\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial v}\partial_\nu\right) - \sum_{\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial v}\partial_\nu \left(\sum_{\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\partial_\mu\right) \\
&= \sum_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu \partial v}\partial_\nu + \frac{\partial x^\nu}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right) - \frac{\partial x^\nu}{\partial v}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu \partial u}\partial_\mu + \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\right) \\
&= \sum_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu \partial v}\partial_\nu - \frac{\partial x^\nu}{\partial v}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu \partial u}\partial_\mu \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pela simetria de ∇ temos:

$$\nabla_{x_u} x_v - \nabla_{x_v} x_u = [x_u, x_v] = 0, \tag{1.53}$$

o que implica

$$\nabla_{x_u} x_v = \nabla_{x_v} x_u. \tag{1.54}$$

A segunda equação sai diretamente da definição do tensor de curvatura:

$$R(x_u, x_v)Z = [\nabla_{x_u}, \nabla_{x_v}]Z - \nabla_{[x_u, x_v]}Z = [\nabla_{x_u}, \nabla_{x_v}]Z \tag{1.55}$$

$\square$

O campo vetorial J em γ formado pelo vetores velocidade x_v de cada curva transversal passando por γ é chamado campo variacional. Se toda curva longitudinal de x é geodésica, x é chamada família de geodésicas.

Definição 1.21. *Se γ é uma geodésica, um campo vetorial J em γ que satisfaz a equação diferencial de Jacobi $\nabla_{\dot\gamma}^2 J + R(\dot\gamma, J)\dot\gamma = 0$ é chamado campo de Jacobi.*

Seja $J = \sum_\lambda J^\lambda \partial_\lambda$ em um sistema de coordenadas $x^0, \dots x^n$ para um aberto U contendo um seguimento de γ. Assim

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot\gamma}^2 J &= -R(\dot\gamma, J)\dot\gamma \\
\nabla_{\dot\gamma}^2 \left(\sum_\lambda J^\lambda \partial_\lambda\right) &= -R\left(\sum_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}\partial_\mu, \sum_\nu J^\nu \partial_\nu\right) \sum_\rho \frac{dx^\rho}{d\tau}\partial_\rho.
\end{aligned}$$

Os campos $\partial_0, \dots \partial_n$ são paralelos ($\nabla_{\dot\gamma}\partial_\lambda = 0$) logo

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda \nabla_{\dot\gamma}\left(\frac{dJ^\lambda}{d\tau}\partial_\lambda\right) &= -\sum_{\mu\nu\rho} \frac{dx^\mu}{d\tau} J^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} R(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\rho \\
\sum_\lambda \frac{d^2 J^\lambda}{d\tau^2}\partial_\lambda &= -\sum_{\lambda\mu\nu\rho} R^\lambda_{\mu\nu\rho}\frac{dx^\mu}{d\tau} J^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau}\partial_\lambda
\end{aligned}$$

Como $\partial_0, \dots \partial_n$ são L.I. temos:

$$\frac{d^2 J^\lambda}{d\tau^2} = -\sum_{\mu\nu\rho} R^\lambda_{\mu\nu\rho} \frac{dx^\mu}{d\tau} J^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau}, \tag{1.56}$$

Portanto

$$\boxed{\frac{d^2 J^\lambda}{d\tau^2} + \sum_{\mu\nu\rho} R^\lambda_{\mu\nu\rho} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} J^\nu = 0}. \tag{1.57}$$

Lema 1.8. *O campo variacional de uma família de geodésicas é um campo de Jacobi.*

Demonstração. Seja x uma família de geodésicas, $J = x_v$ e $\dot{\gamma} = x_u$

$$\begin{aligned} R(x_u, x_v)x_u &= [\nabla_{x_u}, \nabla_{x_v}]x_u \\ &= \nabla_{x_u}(\nabla_{x_v} x_u) - \nabla_{x_v}(\nabla_{x_u} x_u) \\ &= \nabla_{x_u}(\nabla_{x_u} x_v) \\ &= \nabla^2_{x_u} x_v \end{aligned}$$

□

Lema 1.9. *Seja γ uma geodésica com $\gamma(0) = p$, e seja $u, w \in T_pM$. Então existe um único campo de Jacobi J em γ tal que $J(0) = u$ e $J'(0) = w$. Além disto, o conjunto de todos campos de Jacobi em γ forma um espaço vetorial de dimensão $2n + 2$.*

Demonstração. Consequência direta do teorema da existência e unicidade de um sistema de EDO's lineares [2]. □

Um campo vetorial J em uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é tangente a γ se $J = f\dot{\gamma}$ para algum $f \in \mathfrak{F}(I)$ e perpendicular a γ se $g(J, \dot{\gamma}) = 0$.

Lema 1.10. *Seja J um campo tangente a uma geodésica γ. As afirmações a seguir são equivalentes:*

(a) J *é um campo de Jacobi*

(b) $J'' = 0$

(c) $J(s) = (as + b)\gamma'(s)$ *para todo* s.

Demonstração. Seja $J = f\dot{\gamma}$. Se ele é um campo de Jacobi

$$J'' = R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = R(f\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = fR(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0. \tag{1.58}$$

Se $J'' = 0$ então

$$J'' + R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0 + fR(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0 + 0 = 0, \tag{1.59}$$

implicando (a). Agora, utilizando um parâmetro afim para a geodésica,

$$\nabla_{\dot{\gamma}}^2(f\dot{\gamma}) = \nabla_{\dot{\gamma}}\left(\frac{df}{ds}\dot{\gamma}\right) = \frac{d^2f}{ds^2}\dot{\gamma} \tag{1.60}$$

Como $J'' = 0$ e $\dot{\gamma} \neq 0$ então $\frac{d^2f}{ds^2} = 0$. Portanto vale (c):

$$f(s) = As + B. \tag{1.61}$$

De maneira inversa, se assumimos (c), derivando duas vezes $J(s) = (as+b)\gamma'(s)$ temos novamente (a). □

Se γ é uma geodésica, então $J \perp \gamma$ implica $J' \perp \gamma$, pois $\frac{d}{ds}g(J, \dot{\gamma}) = g(J', \dot{\gamma})$. O mesmo vale se J for tangente a γ.

Lema 1.11. *Seja J um campo de Jacobi em uma geodésica $\gamma(s)$ parametrizada por um parâmetro afim s. São equivalentes:*

(a) $J \perp \gamma$;

(b) Existem $\gamma(a) \neq \gamma(b)$ tal que $J(a) \perp \gamma$ e $J(b) \perp \gamma$;

(c) Existe a tal que $J(a) \perp \gamma$ e $J'(a) \perp \gamma$.

Demonstração. Tomando um parâmetro afim s da geodésica, temos:

$$\tfrac{d^2}{ds^2}g(J, \dot{\gamma}) = \tfrac{d}{ds}g(J', \dot{\gamma}) = g(J'', \dot{\gamma}) = g(R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0. \tag{1.62}$$

Logo

$$g(J, \dot{\gamma}) = As + B \quad \text{e} \quad g(J', \dot{\gamma}) = A. \tag{1.63}$$

Se $J \perp \gamma$ em todos pontos do domínio de γ então existem dois pontos $\gamma(a) \neq \gamma(b)$ tais que $J(a) \perp \gamma$ e $J(b) \perp \gamma$. Em contrapartida, se existe $\gamma(a) \neq \gamma(b)$ tal que $J(a) \perp \gamma$ e $J(b) \perp \gamma$ então:

$$Aa + B = 0 \text{ e } Ab + B = 0 \tag{1.64}$$

o sistema possui uma única solução $A = B = 0$ quando $a \neq b$. Logo $J \perp \gamma$ em todos os pontos, mostrando que (a) e (b) são equivalentes. Como $J \perp \gamma$ implica $J' \perp \gamma$, então existe um ponto do domínio de γ tal que $J(a) \perp \gamma$ e $J'(a) \perp \gamma$. De maneira inversa, se existe um a tal que $J(a) \perp \gamma$ e $J'(a) \perp \gamma$ então:

$$Aa + B = 0 \text{ e } A = 0. \tag{1.65}$$

este sistema possui uma única solução $A = B = 0$ para qualquer valor de a. Logo $J \perp \gamma$, provando assim a equivalência entre (a) e (c). □

Se $g(\dot\gamma,\dot\gamma)\neq 0$, então para cada espaço tangente temos $T_{\gamma(s)}M=[\dot\gamma]\oplus\dot\gamma^\perp$, isto é, J em γ tem uma única expressão $J=J^\perp+J^\top$, onde $J^\top$ é tangente a γ e $J^\perp$ é perpendicular a γ. Além disso, pelos lemas 1.10 e 1.11, $(J')^\top=(J^\top)'$ e $(J')^\perp=(J^\perp)'$.

Lema 1.12. *Seja J um campo vetorial em uma geodésica γ tal que $g(\dot\gamma,\dot\gamma)\neq 0$. J é um campo de Jacobi se e somente se ambos $J^\top$ e $J^\perp$ são campos de Jacobi.*

Demonstração. Seja J um campo de Jacobi:

$$0=J''+R(\dot\gamma,J)\dot\gamma=(J^\perp+J^\top)''+R(\dot\gamma,J^\perp+J^\top)\dot\gamma=(J^\perp)''+R(\dot\gamma,J^\perp)\dot\gamma \tag{1.66}$$

pois todo $J^\top$ é um campo de Jacobi (lema1.10). Se $J^\top$ e $J^\perp$ são soluções da equação Jacobi, que é linear homogênea, $J^\top+J^\perp$ também é. □

Definição 1.22. *Dois pontos $p=\gamma(a)$ e $q=\gamma(b)$, com $a\neq b$, em uma geodésica γ são conjugados ao longo de γ se existe um campo de Jacobi não-nulo J em γ tal que $J(p)=0$ e $J(q)=0$.*

É fácil ver que o campo vetorial J na definição acima é trivialmente ortogonal a geodésica γ em p e q. Pelo lema 1.11 J é ortogonal a γ em todos pontos de seu domínio.

1.10 Operadores Diferenciais na Geometria Lorentziana

No que se segue, M é uma variedade $(n+1)$-dimensional com métrica Lorentziana g.

1.10.1 Gradiente

Definição 1.23. *O gradiente ∇f de uma função $f\in\mathfrak{F}(M)$ é o campo vetorial metricamente equivalente ao diferencial $df\in\mathfrak{X}^*(M)$, isto é, $\nabla f=\uparrow_1^1(\mathrm{d}\,f)$. Em coordenadas, $df=\sum_\mu\frac{\partial f}{\partial x^\mu}dx^\mu$, logo*

$$\nabla f=\sum_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\partial_\nu. \tag{1.67}$$

1.10.2 Divergência

Se X é um campo vetorial, então a divergência de X é a função $\mathrm{div}:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{F}(X)$ definida como $\mathrm{div}\,X=\mathrm{C}_1^1(\nabla X)\in\mathfrak{F}(M)$. Em coordenadas:

$$\mathrm{div}(X)=\sum_\mu\nabla_\mu X^\mu=\sum_\mu\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu}+\sum_{\mu\nu}\Gamma^\mu_{\mu\nu}X^\nu. \tag{1.68}$$

1.10.3 Hessiano

Definição 1.24. *O Hessiano de uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$ é a segunda derivada covariante*[7]

$$\mathrm{H}^f(X,Y) = XYf - (\nabla_X Y)f. \tag{1.69}$$

Lema 1.13. *O Hessiano de uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$ é um campo tensorial $(0,2)$ simétrico tal que*

$$\mathrm{H}^f(X,Y) = g(\nabla_X(\nabla f), Y). \tag{1.70}$$

Demonstração. Ver lema 3.49 [10]. □

Pela multilinearidade de H^f temos:

$$\mathrm{H}^f(X,Y) = H^f(\sum_{\mu} X^\mu \partial_\mu, \sum_{\nu} Y^\nu \partial_\nu) = \sum_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu H^f(\partial_\mu, \partial_\nu), \tag{1.71}$$

sendo seus coeficientes dados por

$$\mathrm{H}^f(\partial_\mu, \partial_\nu) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \sum_{\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}. \tag{1.72}$$

1.10.4 d'Alembertiano

Definição 1.25. *O d'Alembertiano $\Box f$ de uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$ é a divergência do seu gradiente:*

$$\Box f = \mathrm{div}(\nabla f). \tag{1.73}$$

O d'Alembertiano também pode ser definido como o g-traço do operador Hessiano $\Box f = \mathrm{tr}_g \mathrm{H}^f$, isto é, é a contração $\Box f = (\mathrm{C} \uparrow^1_1) \mathrm{H}^f$. Em coordenadas:

$$\Box f = \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu f = \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \sum_{\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \right). \tag{1.74}$$

[7] $\mathrm{H}^f(X,Y) = (\nabla_Y df)(X) = \nabla_Y(df(X)) - df(\nabla_Y X)$.

Capítulo 2

Variedades Lorentzianas Espacialmente Planas

Neste capítulo nosso objetivo principal é estudar um pouco da geometria das geodésicas em um exemplo bastante genérico de uma $(n+1)$-variedade Lorentziana espacialmente plana e totalmente umbílica. Tal variedade será representada simplesmente por $\mathcal{M}$ será defininida como:

- Ela será dada em coordenadas $x^0, \ldots, x^n$ adaptadas às hiperfícies planas pela métrica

$$\mathrm{g} = -e^{2\phi}dt^2 + a(t)^2 \sum_{ij} \delta_{ij} dx^i dx^j, \tag{2.1}$$

  onde, por questão de conveniência, representamos x^0 por t, $a(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\phi = \phi(t, x^1, \ldots, x^n)$.

- $\mathcal{M} := I \times \Sigma$, sendo I um intervalo aberto da reta real e $\Sigma_t := \{t\} \times \Sigma$ uma hiperfície Riemanniana para cada $t \in I$, cuja a métrica é dada por $\bar{\mathrm{g}}_t = a(t)^2 \sum_{ij} \delta_{ij} dx^i dx^j$.

É fácil ver que as hiperfícies Riemannianas Σ_t possuem curvatura nula, e que por isso $\mathcal{M}$ é chamada espacialmente plana. Mais à frente mostraremos que elas são totalmente umbílicas.

2.1 Componentes da Geometria de $\mathcal{M}$

Os coeficientes de da métrica g formam uma matriz diagonal com $\mathrm{g}_{00} = -e^{2\phi}$ e $\mathrm{g}_{ij} = a^2\delta_{ij}$. É fácil ver que os coeficientes inversa de g são $\mathrm{g}^{00} = -e^{-2\phi}$ e $\mathrm{g}^{ij} = a^{-2}\delta^{ij}$.

2.1.1 Símbolos de Christoffell de $\mathcal{M}$

Os símbolos de Christoffell de $\mathcal{M}$ nas coordenadas (2.1) são:

(a) $\Gamma^k_{ij} = 0$	(c) $\Gamma^k_{00} = \dfrac{e^{2\phi}}{a^2}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta^{kj}$	(e) $\Gamma^0_{0\mu} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x^\mu}$.
(b) $\Gamma^k_{0j} = \dfrac{1}{a}\dfrac{da}{dt}\delta^k_j$	(d) $\Gamma^0_{ij} = ae^{-2\phi}\dfrac{da}{dt}\delta_{ij}$	

Como g e g^{-1} são diagonais a notação de soma desaparece:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\mathrm{g}^{\lambda\lambda}(\partial_\mu \mathrm{g}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \mathrm{g}_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \mathrm{g}_{\mu\nu}) \tag{2.2}$$

(a) $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2a^2}\delta^{kk}(\delta_{jk}\partial_i(a^2) + \delta_{ik}\partial_j(a^2) - \delta_{ij}\partial_k(a^2)) = 0.$

(b)

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{0j} &= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{kk}(\partial_0\mathrm{g}_{jk} + \partial_j\mathrm{g}_{0k} - \partial_k\mathrm{g}_{0j}) \\
&= \frac{1}{2a^2}\delta^{kk}\frac{\partial}{\partial t}(a^2\delta_{jk}) \\
&= \frac{1}{2a^2}\delta^{kk}\left(2a\frac{da}{dt}\delta_{jk}\right) \\
&= \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\delta^k_j
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{00} &= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{kk}(\partial_0\mathrm{g}_{0k} + \partial_0\mathrm{g}_{0k} - \partial_k\mathrm{g}_{00}) \\
&= \frac{1}{2a^2}\delta^{kk}\left(-\frac{\partial}{\partial x^k}(-e^{2\phi})\right) \\
&= \frac{1}{2a^2}\delta^{kj}\left(2e^{2\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right) \\
&= \frac{e^{2\phi}}{a^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta^{kj}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{ij} &= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{00}(\partial_i\mathrm{g}_{j0} + \partial_j\mathrm{g}_{i0} - \partial_0\mathrm{g}_{ij}) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial t}(a^2\delta_{ij})\right) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2\phi}\left(-2a\frac{da}{dt}\delta_{ij}\right) \\
&= ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\delta_{ij}
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{0\mu} &= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{00}(\partial_0 \mathrm{g}_{\mu 0} + \partial_\mu \mathrm{g}_{00} - \partial_0 \mathrm{g}_{0\mu}) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2\phi}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(-e^{2\phi}) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2\phi}\left(-2e^{2\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}\right) \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}
\end{aligned}$$

2.1.2 Tensor de Curvatura

Em uma variedade $\mathcal{M}$ nas coordenadas (2.1) os coeficientes do tensor de curvatura se apresentam em apenas três casos não-triviais:

(a) $R^i_{jkl} = e^{-2\phi}\left(\frac{da}{dt}\right)^2(\delta^i_k\delta_{jl} - \delta^i_l\delta_{jk})$

(b) $R^0_{ijk} = ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^k}\delta_{ij} - \frac{\partial \phi}{\partial x^j}\delta_{ik}\right)$

(c) $R^0_{i0j} = ae^{-2\phi}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\delta_{ij} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\frac{\partial \phi}{\partial x^j}$

Já que em $\mathcal{M}$ a métrica $\mathrm{g}_{ij} = 0$ para $i \neq j$ então:

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = \mathrm{g}_{\lambda\lambda}R^\lambda_{\mu\nu\rho} \tag{2.3}$$

Aplicando as relações de Bianchi 1.1 temos três casos não-triviais:

(a) Nenhum índice é nulo.

(b) R_{0ijk}, se pelo menos um dos índices é igual a zero,pois:

- $R_{i0jk} = -R_{0ijk}$
- $R_{ij0k} = R_{0kij}$
- $R_{ijk0} = -R_{0kij}$

(c) R_{0i0j}, se além do primeiro índice outro índice for igual a zero pois:

- $R_{00ij} = 0$
- $R_{0ij0} = -R_{0i0j}$

No item (b) é fácil ver que para mais de dois índices iguais a zero $R_{\lambda\mu\nu\rho} = 0$. Assim, para cada um dos três casos listados acima, temos:

(a)

$$\begin{aligned}
R^i_{jkl} &= \partial_k \Gamma^i_{lj} - \partial_l \Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{k0}\Gamma^0_{lj} - \Gamma^i_{l0}\Gamma^0_{kj} + \sum_s \Gamma^i_{ks}\Gamma^s_{lj} - \Gamma^i_{ls}\Gamma^s_{kj} \\
&= \Gamma^i_{k0}\Gamma^0_{lj} - \Gamma^i_{l0}\Gamma^0_{kj} \\
&= \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\delta^i_k . ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\delta_{lj} - \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\delta^i_l . ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\delta_{kj} \\
&= e^{-2\phi}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 (\delta^i_k\delta_{lj} - \delta^i_l\delta_{kj})
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
R^0_{ijk} &= \partial_j \Gamma^0_{ki} - \partial_k \Gamma^0_{ji} + \Gamma^0_{j0}\Gamma^0_{ki} - \Gamma^0_{k0}\Gamma^0_{ji} + \sum_s \Gamma^0_{js}\Gamma^s_{ki} - \Gamma^0_{ks}\Gamma^s_{ji} \\
&= \partial_j \Gamma^0_{ki} - \partial_k \Gamma^0_{ji} + \Gamma^0_{j0}\Gamma^0_{ki} - \Gamma^0_{k0}\Gamma^0_{ji} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\delta_{ki}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\delta_{ji}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial x^j}ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\delta_{ki} - \frac{\partial\phi}{\partial x^k}ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\delta_{ji} \\
&= -2ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta_{ki} + 2ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\delta_{ji} + ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta_{ki} - ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\delta_{ji} \\
&= -ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta_{ki} + ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\delta_{ji} \\
&= ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\delta_{ji} - \frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta_{ki}\right)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
R^0_{i0j} &= \partial_0 \Gamma^0_{ji} - \partial_j \Gamma^0_{0i} + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{ji} - \Gamma^0_{j0}\Gamma^0_{0i} + \sum_s \Gamma^0_{0s}\Gamma^s_{ji} - \Gamma^0_{js}\Gamma^s_{0i} \\
&= \partial_0 \Gamma^0_{ji} - \partial_j \Gamma^0_{0i} + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{ji} - \Gamma^0_{j0}\Gamma^0_{0i} - \sum_s \Gamma^0_{js}\Gamma^s_{0i} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\delta_{ji}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial t}ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\delta_{ji} - \frac{\partial\phi}{\partial x^j}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \\
&\quad - \sum_s\left(ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\delta_{js}.\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\delta^s_i\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\right)\delta_{ji} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^j\partial x^i} + ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\delta_{ji} - \frac{\partial\phi}{\partial x^j}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} - e^{-2\phi}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\sum_s \delta_{js}\delta^s_i \\
&= e^{-2\phi}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\delta_{ji} + ae^{-2\phi}\frac{d^2a}{dt^2}\delta_{ji} - 2ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\delta_{ji} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^j\partial x^i} \\
&\quad + ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\delta_{ji} - \frac{\partial\phi}{\partial x^j}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} - e^{-2\phi}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\delta_{ji} \\
&= ae^{-2\phi}\frac{d^2a}{dt^2}\delta_{ji} - ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\delta_{ji} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^j\partial x^i} - \frac{\partial\phi}{\partial x^j}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \\
&= ae^{-2\phi}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta_{ij} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}
\end{aligned}$$

Os coeficientes da contração de R com a métrica 2.1 são:

(a) $R_{ijkl} = \dfrac{a^2}{e^{2\phi}} \left(\dfrac{da}{dt}\right)^2 (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$

(b) $R_{0ijk} = a\dfrac{da}{dt} \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta_{ik} - \dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}\delta_{ij}\right)$

(c) $R_{0i0j} = a\left(\dfrac{da}{dt}\dfrac{\partial\phi}{\partial t} - \dfrac{d^2a}{dt^2}\right)\delta_{ij} + e^{2\phi}\left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j} + \dfrac{\partial\phi}{\partial x^i}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)$

2.1.3 Tensor de Ricci

O tensor de Ricci em uma variedade $\mathcal{M}$ nas coordenadas (2.1) é:

(a) $R_{ij} = \dfrac{a}{e^{2\phi}}\left(\dfrac{d^2a}{dt^2} - \dfrac{da}{dt}\dfrac{\partial\phi}{\partial t} + \dfrac{n-1}{a}\left(\dfrac{da}{dt}\right)^2\right)\delta_{ij} - \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j} - \dfrac{\partial\phi}{\partial x^i}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^j}$

(b) $R_{0j} = \dfrac{(n-1)}{a}\dfrac{da}{dt}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^j}$

(c) $R_{00} = \dfrac{n}{a}\left(\dfrac{da}{dt}\dfrac{\partial\phi}{\partial t} - \dfrac{d^2a}{dt^2}\right) + \dfrac{e^{2\phi}}{a^2}\sum_k \dfrac{\partial^2\phi}{\partial {x^k}^2} + \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}\right)^2$

pois:

(a)

$$
\begin{aligned}
R_{ij} &= R^0_{i0j} + \sum_k R^k_{ikj} \\
&= ae^{-2\phi}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta_{ij} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j} + e^{-2\phi}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 \sum_k(\delta^k_k\delta_{ij} - \delta^k_i\delta_{jk}) \\
&= ae^{-2\phi}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta_{ij} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j} + e^{-2\phi}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 (n-1)\delta_{ij} \\
&= \frac{a}{e^{2\phi}}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{n-1}{a}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\right)\delta_{ij} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
R_{0j} &= \sum_k R^k_{0kj} \\
&= -\sum_k \mathsf{g}^{kk}\mathsf{g}_{00} R^0_{kkj} \\
&= \sum_k \frac{e^{2\phi}}{a^2}\delta^{kk}.ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta_{kk} - \frac{\partial\phi}{\partial x^k}\delta_{kj}\right) \\
&= \sum_k \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta^k_k - \frac{\partial\phi}{\partial x^k}\delta^k_j\right) \\
&= \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\left(n\frac{\partial\phi}{\partial x^j} - \frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right) \\
&= \frac{n-1}{a}\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= \sum_k R^k_{0k0} \\
&= \sum_k \mathsf{g}^{kk}\mathsf{g}_{00} R^0_{k0k} \\
&= -\sum_k \frac{e^{2\phi}}{a^2}\delta^{kk}.\left(ae^{-2\phi}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta_{kk} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^k \partial x^k} - \frac{\partial\phi}{\partial x^k}\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right) \\
&= -\sum_k \frac{1}{a}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta^k_k + \frac{e^{2\phi}}{a^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial {x^k}^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right)^2\right)\delta^{kk} \\
&= \frac{n}{a}\left(\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{d^2a}{dt^2}\right) + \frac{e^{2\phi}}{a^2}\sum_k \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^k}^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right)^2
\end{aligned}
$$

2.1.4 Curvatura Escalar

A curvatura escalar em uma variedade $\mathcal{M}$ nas coordenadas (2.1) é:

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{\mu\nu} \mathsf{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
&= -e^{-2\phi} R_{00} + \frac{1}{a^2} \sum_{ij} \delta^{ij} R_{ij} \\
&= -e^{-2\phi} \left(\frac{n}{a} \left(\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{d^2a}{dt^2} \right) + \frac{e^{2\phi}}{a^2} \sum_i \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^i}^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \right)^2 \right) \\
&\quad + \frac{e^{-2\phi}}{a^2} \left(a\frac{d^2a}{dt^2} - a\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \left(\frac{da}{dt} \right)^2 (n-1) \right) \sum_{ij} \delta^{ij} - \frac{1}{a^2} \sum_{ij} \delta^{ij} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j} \right) \\
&= \frac{ne^{-2\phi}}{a} \left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{a^2} \sum_i \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^i}^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \right)^2 \\
&\quad + \frac{ne^{-2\phi}}{a} \left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{a} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 (n-1) \right) - \frac{1}{a^2} \sum_i \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^i}^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \right)^2 .
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\boxed{S = \frac{2n}{ae^{2\phi}} \left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t} \right) + \frac{n(n-1)}{a^2 e^{2\phi}} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{2}{a^2} \sum_i \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^i}^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \right)^2 .} \tag{2.4}
$$

2.1.5 Tensor de Einstein

O tensor de Einstein numa variedade $\mathcal{M}$ nas coordenadas (2.1) é:

(a) $G_{0j} = R_{0j}$

(b) $G_{00} = \dfrac{n(n-1)}{2a^2} \left(\dfrac{da}{dt} \right)^2$

(c) $G_{ij} = \left(\dfrac{a(1-n)}{e^{2\phi}} \left(\dfrac{d^2a}{dt^2} - \dfrac{da}{dt}\dfrac{\partial\phi}{\partial t} \right) - \dfrac{(n-1)(n-2)}{2e^{2\phi}} \left(\dfrac{da}{dt} \right)^2 + \vec{\Delta}\phi + |\vec{\nabla}\phi|^2 \right) \delta_{ij} - \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^i \partial x^j} - \dfrac{\partial\phi}{\partial x^i}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^j}$

pois:

(a) $G_{0j} = R_{0j} - \frac{1}{2}\mathsf{g}_{0j} S = R_{0j}$

(b)

$$
\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}\mathrm{g}_{00}S \\
&= \frac{n}{a}\left(\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{d^2a}{dt^2}\right) + \frac{e^{2\phi}}{a^2}\sum_i \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^i}^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)^2 \\
&\quad + \frac{e^{2\phi}}{2}\left(\frac{2n}{ae^{2\phi}}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \frac{n(n-1)}{a^2e^{2\phi}}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{2}{a^2}\sum_i \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^i}^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)^2\right) \\
&= \frac{n}{a}\left(\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{d^2a}{dt^2}\right) + \frac{e^{2\phi}}{a^2}\sum_i \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^i}^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right)^2 \\
&\quad + \frac{n}{a}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \frac{n(n-1)}{2a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{e^{2\phi}}{a^2}\sum_i \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^i}^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)^2 \\
&= \frac{n(n-1)}{2a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
G_{ij} &= R_{ij} - \frac{1}{2}a^2\delta_{ij}S \\
&= \frac{a}{e^{2\phi}}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{n-1}{a}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\right)\delta_{ij} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j} \\
&\quad - \frac{a^2}{2}\delta_{ij}\left(\frac{2n}{ae^{2\phi}}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \frac{n(n-1)}{a^2e^{2\phi}}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{2}{a^2}\sum_k \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^k}^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right)^2\right) \\
&= \frac{a}{e^{2\phi}}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta_{ij} + \frac{n-1}{e^{2\phi}}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\delta_{ij} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j} \\
&\quad - \frac{an}{e^{2\phi}}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta_{ij} - \frac{n(n-1)}{2e^{2\phi}}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\delta_{ij} + \delta_{ij}\sum_k \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^k}^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right)^2 \\
&= \frac{a(1-n)}{e^{2\phi}}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta_{ij} - \frac{(n-1)(n-2)}{2e^{2\phi}}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\delta_{ij} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j} \\
&\quad + \delta_{ij}\sum_k \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^k}^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right)^2 \\
&= \left(\frac{a(1-n)}{e^{2\phi}}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \frac{(n-1)(n-2)}{2e^{2\phi}}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \sum_k \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^k}^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right)^2\right)\delta_{ij} \\
&\quad - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}
\end{aligned}
$$

2.1.6 Gradiente

Em uma variedade $\mathcal{M}$ nas coordenadas (2.1) o gradiente (1.10.1) de f é

$$
\boxed{\nabla f = -e^{-2\phi}\frac{\partial f}{\partial t}\partial_0 + \frac{1}{a^2}\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\partial_i} \tag{2.5}
$$

2.1.7 Divergência

Em uma variedade $\mathcal{M}$ nas coordenadas (2.1), a divergência (1.10.2) de X:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(X) &= \sum_{\mu} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \sum_{\nu} \Gamma^{0}_{0\nu} X^{\nu} + \sum_{i} \Gamma^{i}_{i0} X^{0} + \sum_{ij} \Gamma^{i}_{ij} X^{j} \\ &= \sum_{\mu} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \sum_{\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} X^{\nu} + \sum_{i} \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \delta^{i}_{i} X^{0} \\ &= \sum_{\mu} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \sum_{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} X^{\mu} + \frac{1}{a}\frac{da}{dt} X^{0} \sum_{i} \delta^{i}_{i}.\end{aligned}$$

Portanto

$$\boxed{\operatorname{div}(X) = \frac{n}{a}\frac{da}{dt} X^{0} + \sum_{\mu} \left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} X^{\mu} \right)}. \tag{2.6}$$

2.1.8 Hessiano

Em uma variedade $\mathcal{M}$ nas coordenadas (2.1), os coeficientes de H^{f} (1.10.3) são

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^{f}(\partial_{\mu}, \partial_{\nu}) &= \frac{\partial f}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - (\nabla_{\mu} \partial_{\nu}) f \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \sum_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^{\lambda}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \Gamma^{0}_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial t} - \sum_{k} \Gamma^{k}_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^{k}}\end{aligned}$$

(a) Caso $\mu = 0$ e $\nu = 0$:

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^{f}(\partial_{0}, \partial_{0}) &= \frac{\partial f}{\partial x^{0} \partial x^{0}} - \Gamma^{0}_{00} \frac{\partial f}{\partial t} - \sum_{k} \Gamma^{k}_{00} \frac{\partial f}{\partial x^{k}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t^{2}} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} - \sum_{k} \frac{e^{2\phi}}{a^{2}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{k}} \frac{\partial f}{\partial x^{k}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t^{2}} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{e^{2\phi}}{a^{2}} \sum_{k} \frac{\partial \phi}{\partial x^{k}} \frac{\partial f}{\partial x^{k}}\end{aligned}$$

(b) Caso $\mu \neq 0$ ou $\nu \neq 0$:

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^{f}(\partial_{0}, \partial_{i}) &= \frac{\partial f}{\partial x^{0} \partial x^{i}} - \Gamma^{0}_{0i} \frac{\partial f}{\partial t} - \sum_{k} \Gamma^{k}_{0i} \frac{\partial f}{\partial x^{k}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t \partial x^{i}} - \frac{\partial \phi}{\partial x^{i}}\frac{\partial f}{\partial t} - \sum_{k} \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \delta^{ki} \frac{\partial f}{\partial x^{k}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t \partial x^{i}} - \frac{\partial \phi}{\partial x^{i}}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^{i}}\end{aligned}$$

(c) Caso $\mu \neq 0$ e $\nu \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^f(\partial_i, \partial_j) &= \frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^0_{ij}\frac{\partial f}{\partial t} - \sum_k \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j} - a e^{-2\phi}\frac{da}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\delta_{ij}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^f(X, Y) &= \sum_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu \, \mathrm{H}^f(\partial_\mu, \partial_\nu) \\
&= \sum_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} X^\mu Y^\nu - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e^{2\phi}}{a^2}\sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right) X^0 Y^0 \\
&\quad - \sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(X^0 Y^i + X^i Y^0) - a e^{-2\phi}\frac{da}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\sum_{ij}\delta_{ij} X^i Y^j
\end{aligned}$$

No caso de $X = Y$ e f ser a própria função ϕ definida na métrica 2.1 temos a seguinte forma quadrática:

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathrm{H}^\phi(X, X) = \sum_{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} X^\mu X^\nu &- \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{e^{2\phi}}{a^2}\sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right)^2\right)(X^0)^2 \\
&- 2\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right) X^0 \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} X^i - a e^{-2\phi}\frac{da}{dt}\frac{\partial \phi}{\partial t}\sum_i (X^i)^2 \qquad (2.7)
\end{aligned}}$$

2.1.9 d'Alembertiano

Em uma variedade $\mathcal{M}$ nas coordenadas (2.1) o d'Alembertiano (1.10.4) de f é:

$$\begin{aligned}
\Box f &= -e^{-2\phi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \sum_\lambda \Gamma^\lambda_{00}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}\right) + \frac{1}{a^2}\sum_{ij}\delta^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_\lambda \Gamma^\lambda_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}\right) \\
&= -e^{-2\phi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Gamma^0_{00}\frac{\partial f}{\partial t} - \sum_k \Gamma^k_{00}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right) + \frac{1}{a^2}\sum_{ij}\delta^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^0_{ij}\frac{\partial f}{\partial t}\right) \\
&= -e^{-2\phi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} - \sum_k \frac{e^{2\phi}}{a^2}\frac{\partial \phi}{\partial x^j}\delta^{kj}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right) + \frac{1}{a^2}\sum_{ij}\delta^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - a e^{-2\phi}\frac{da}{dt}\delta_{ij}\frac{\partial f}{\partial t}\right) \\
&= -e^{-2\phi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{1}{a^2}\sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^k} + \frac{1}{a^2}\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i2}} - \frac{e^{-2\phi}}{a}\frac{da}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\sum_{ij}\delta^{ij}\delta_{ij} \\
&= -e^{-2\phi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{n}{a}\frac{da}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{1}{a^2}\sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i2}}\right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\boxed{\Box f = -e^{-2\phi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{n}{a}\frac{da}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{1}{a^2}\sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i2}}\right).} \qquad (2.8)$$

No caso de f a função ϕ

$$\boxed{\Box\phi = -e^{-2\phi}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{n}{a}\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{a^2}\sum_i\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^{i2}}\right)} \tag{2.9}$$

2.2 Segunda Forma Fundamental

Teorema 2.1. *As hiperfícies Σ_t em uma variedade $\mathcal{M}$ são totalmente umbílicas.*

Demonstração. Em uma variedade $\mathcal{M}$ nas coordenadas aptadas a métrica (2.1), seja $e^{-\phi}\partial_0$ um campo vetorial unitário tipo-tempo ortogonal a uma hiperfície Riemanniana Σ_{t_0} de métrica $\bar{\mathrm{g}}_t = (a(t_o))^2\sum_i(dx^i)^2$. Logo, para um par de vetores tangentes a Σ_t temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}(X,Y) &= -\mathrm{g}(\nabla_X(e^{-\phi}\partial_0), Y)\\
&= -\sum_{ij} X^iY^j\mathrm{g}(\nabla_i(e^{-\phi}\partial_0), \partial_j)\\
&= -\sum_{ij} X^iY^j\mathrm{g}\left(-e^{-\phi}\partial_i\phi\partial_0 + e^{-\phi}\sum_k\Gamma^k_{0i}\partial_k, \partial_j\right)\\
&= -\sum_{ij} X^iY^je^{-\phi}\Gamma^j_{0i}\mathrm{g}_{jj}\\
&= -\sum_{ij} X^iY^je^{-\phi}\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\delta^j_i a^2\\
&= -ae^{-\phi}\frac{da}{dt}\sum_i X^iY^i
\end{aligned}$$

Portanto

$$\boxed{\mathrm{II}(X,Y) = -\frac{e^{-\phi}}{a}\frac{da}{dt}\bar{\mathrm{g}}_t(X,Y)} \tag{2.10}$$

Assim, provamos que Σ_t é uma hiperfície totalmente umbílica. $\Box$

2.3 Equações Geodésicas

2.3.1 Observações sobre a nomenclatura

(a) Ao longo do texto adotaremos a seguinte convenção para os operadores diferenciais 1.10 definidos em um espaço euclidiano de dimensão n:

(i) $\vec{\nabla}\phi = \sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\partial_i$

(ii) $|\vec{\nabla}\phi|^2 = \sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)^2$

(iii) $\Delta\,\phi = \sum_i \frac{\partial^2\phi}{\partial x^{i2}}$

(iv) $\vec{\mathrm{H}}^{\phi}(u,v) = \sum_{ij} \dfrac{\partial \phi}{\partial x^i \partial x^j} u^i v^i$

(b) Seja $(v^1, \ldots, v^n) = \left(\frac{dx^1}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt}\right)$, o vetor velocidade euclidiana e

$$v^2 = \sum_i \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 \tag{2.11}$$

o quadrado da sua norma.

(c) Fazendo $\beta = \frac{dt}{d\tau}$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \beta\frac{d\beta}{dt}$$

(d) Pela regra da cadeia temos:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^i}{dt} = \beta\frac{dx^i}{dt}$$

e

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right) = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\frac{dx^i}{dt}\right) = \beta\frac{d}{dt}\left(\beta\frac{dx^i}{dt}\right) = \beta\frac{d\beta}{dt}\frac{dx^i}{dt} + \beta^2\frac{d^2 x^i}{dt^2}$$

(e) A derivada de $\phi \circ \gamma$ é:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{dt}{d\tau} + \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\tau} \tag{2.12}$$

Assim

$$\frac{d\phi}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{dt}{d\tau} + \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} \tag{2.13}$$

implica:

$$\sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} = \frac{d\phi}{dt} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{2.14}$$

Usaremos a notação $\vec{\nabla}\phi(v)$ para 2.14.

2.3.2 O Sistema de Equações Geodésicas

Seja $\gamma(\tau) = (x^0(\tau), \ldots, x^n(\tau))$ uma geodésica com parâmetro afim τ em uma variedade $\mathcal{M}$ nas coordenadas (2.1). As equações geodésicas 1.30 de γ são da forma:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 + 2\sum_i \Gamma^\lambda_{i0}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} + \sum_{ij}\Gamma^\lambda_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} = 0 \tag{2.15}$$

Multiplicando a equação 2.15 por β^{-2} e reescrevendo temos:

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{00} + 2\sum_i \Gamma^\lambda_{i0} v^i + \sum_{ij}\Gamma^\lambda_{ij} v^i v^j = 0 \tag{2.16}$$

A equação 2.16 cai em dois casos:

(a) Equação Geodésica Temporal ($\lambda = 0$):

$$\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dt} + \Gamma^0_{00} + 2\sum_i \Gamma^0_{i0} v^i + \sum_{ij} \Gamma^0_{ij} v^i v^j = 0$$

$$\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + 2\sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} v^i + \sum_{ij} a e^{-2\phi}\frac{da}{dt}\delta_{ij} v^i v^j = 0,$$

mas $\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{d\phi}{dt} - \vec{\nabla}\phi(v)$, portanto:

$$\boxed{\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{d\phi}{dt} + \vec{\nabla}\phi(v) + a e^{-2\phi}\frac{da}{dt} v^2 = 0} \tag{2.17}$$

(b) Equações Geodésicas Espaciais ($\lambda \neq 0$):

$$\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dt} v^k + \frac{dv^k}{dt} + \Gamma^k_{00} + 2\sum_i \Gamma^k_{i0} v^i + \sum_{ij} \Gamma^k_{ij} v^i v^j = 0$$

$$\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dt} v^k + \frac{dv^k}{dt} + \frac{1}{a^2} e^{2\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\delta^{ik} + 2\sum_i \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\delta^k_i v^i = 0$$

$$\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dt} v^k + \frac{dv^k}{dt} + \frac{e^{2\phi}}{a^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^k} + \frac{2}{a}\frac{da}{dt} v^k = 0.$$

Portanto

$$\boxed{\frac{dv^k}{dt} + \left(\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{2}{a}\frac{da}{dt}\right) v^k + \frac{e^{2\phi}}{a^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^k} = 0.} \tag{2.18}$$

Multiplicando a cada equação espacial 2.18 por v^k e depois somando todas elas resulta

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_k (v^k)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{2}{a}\frac{da}{dt}\right)\sum_k (v^k)^2 + \frac{e^{2\phi}}{a^2}\sum_k \frac{\partial\phi}{\partial x^k} v^k = 0$$

$$v\frac{dv}{dt} + \left(\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{2}{a}\frac{da}{dt}\right) v^2 + \frac{e^{2\phi}}{a^2}\vec{\nabla}\phi(v) = 0.$$

Isolando $\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dt}$ na equação temporal 2.17 e depois substituindo na equação acima, obtemos:

$$v\frac{dv}{dt} + \left(-\frac{d\phi}{dt} - \vec{\nabla}\phi(v) - a e^{-2\phi}\frac{da}{dt} v^2 + \frac{2}{a}\frac{da}{dt}\right) v^2 + \frac{e^{2\phi}}{a^2}\vec{\nabla}\phi(v) = 0. \tag{2.19}$$

Multiplicando este resultado por v^{-2} obtemos:

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} - \frac{d\phi}{dt} - \vec{\nabla}\phi(v) - \frac{a^2 v^2}{e^{2\phi}}\frac{1}{a}\frac{da}{dt} + \frac{2}{a}\frac{da}{dt} + \frac{e^{2\phi}}{a^2 v^2}\vec{\nabla}\phi(v) = 0. \tag{2.20}$$

Seja $w = \frac{av}{e^\phi}$ assim:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} &= \frac{a}{e^\phi w}\frac{d}{dt}\left(\frac{e^\phi w}{a}\right) \\
&= \frac{1}{w}\frac{dw}{dt} + \frac{a}{e^\phi}\frac{d}{dt}\left(\frac{e^\phi}{a}\right) \\
&= \frac{1}{w}\frac{dw}{dt} + \frac{a}{e^\phi}\left(\frac{e^\phi}{a}\frac{d\phi}{dt} - \frac{e^\phi}{a^2}\frac{da}{dt}\right) \\
&= \frac{1}{w}\frac{dw}{dt} + \frac{d\phi}{dt} - \frac{1}{a}\frac{da}{dt}
\end{aligned}$$

Substituindo este resultado na equação 2.20 temos:

$$\frac{1}{w}\frac{dw}{dt}+\frac{d\phi}{dt}-\frac{1}{a}\frac{da}{dt}-\frac{d\phi}{dt}-\vec{\nabla}\phi(v)-\frac{w^2}{a}\frac{da}{dt}+\frac{2}{a}\frac{da}{dt}+\frac{1}{w^2}\vec{\nabla}\phi(v)=0. \tag{2.21}$$

Reescrevendo este resultado temos:

$$\frac{1}{w}\frac{dw}{dt}+\left(\frac{1}{w^2}-1\right)\vec{\nabla}\phi(v)+(1-w^2)\frac{1}{a}\frac{da}{dt}=0. \tag{2.22}$$

Dividindo por $(1-w^2)$ e usando 2.14:

$$\boxed{\frac{1}{w(1-w^2)}\frac{dw}{dt}+\frac{1}{w^2}\left(\frac{d\phi}{dt}-\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+\frac{1}{a}\frac{da}{dt}=0.} \tag{2.23}$$

2.4 Campos de Jacobi

Seja γ uma geodésica qualquer com parâmetro afim num aberto U de uma variedade $\mathcal{M}$ nas coordenadas (2.1). A equação de Jacobi 1.57 cai em dois casos:

2.4.1 Equação de Jacobi Temporal ($\lambda = 0$)

$$\frac{d^2J^0}{d\tau^2}+\sum_{ij}R^0_{i0j}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}J^0+\sum_{ij}R^0_{ij0}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau}J^j+\sum_{ijk}R^0_{ijk}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}J^j=0 \tag{2.24}$$

Multiplicando a equação 2.24 por β^{-2} (ver c):

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{d^2J^0}{d\tau^2}+\sum_{ij}R^0_{i0j}v^iv^jJ^0-\sum_{ij}R^0_{i0j}v^iJ^j+\sum_{ijk}R^0_{ijk}v^iv^kJ^j=0 \tag{2.25}$$

Substituindo a equação 2.25 pelos valores do tensor de curvatura 2.1.2:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta^2}\frac{d^2J^0}{d\tau^2}&+\sum_{ij}\left(C\delta_{ij}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)v^iv^jJ^0\\&-\sum_{ij}\left(C\delta_{ij}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)v^iJ^j+\sum_{ijk}B\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\delta_{ij}-\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta_{ik}\right)v^iv^kJ^j=0,\end{aligned} \tag{2.26}$$

onde

(a) $R^i_{jkl}=A(\delta^i_k\delta_{jl}-\delta^i_l\delta_{jk}),\quad A=e^{-2\phi}\left(\frac{da}{dt}\right)^2$

(b) $R^0_{ijk}=B\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\delta_{ij}-\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta_{ik}\right),\quad B=ae^{-2\phi}\frac{da}{dt}$

(c) $R^0_{i0j}=C\delta_{ij}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j},\quad C=ae^{-2\phi}\left(\frac{d^2a}{dt^2}-\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$

Reescrevendo a equação 2.26:

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{d^2J^0}{d\tau^2} + Cv^2J^0 - \left(\sum_{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}v^iv^j\right)J^0 - \left(\sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x^i}v^i\right)^2 J^0$$
$$- C\sum_i v^iJ^i + \sum_{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}v^iJ^j + \left(\sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x^i}v^i\right)\left(\sum_j \frac{\partial\phi}{\partial x^j}J^j\right)$$
$$+ B\left(\sum_k \frac{\partial\phi}{\partial x^k}v^k\right)\left(\sum_i v^iJ^i\right) - Bv^2\sum_j \frac{\partial\phi}{\partial x^j}J^j = 0 \quad (2.27)$$

Portanto

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{\beta^2}\frac{d^2J^0}{d\tau^2} + \left(Cv^2 - \sum_{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}v^iv^j - \left(\sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x^i}v^i\right)^2\right)J^0 \\ &\quad + \left(-C + B\sum_k \frac{\partial\phi}{\partial x^k}v^k\right)\sum_i v^iJ^i \\ &\quad + \sum_{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}v^iJ^j \\ &\quad + \left(\sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x^i}v^i - Bv^2\right)\sum_j \frac{\partial\phi}{\partial x^j}J^j = 0 \quad (2.28)\end{aligned}}$$

2.4.2 Equação de Jacobi Espacial ($\lambda \neq 0$)

$$\frac{d^2J^i}{d\tau^2} + \sum_{jk}R^i_{0jk}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}J^j + \sum_{jk}R^i_{j0k}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}J^0 + \sum_{jk}R^i_{jk0}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau}J^k$$
$$+ \sum_j R^i_{00j}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}J^0 + \sum_j R^i_{0j0}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau}J^j + \sum_{jkl}R^i_{jkl}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}J^k = 0 \quad (2.29)$$

Multiplicando a equação por $a^2\beta^{-2}$ e depois aplicando as propriedades de Bianchi 1.1:

$$\frac{a^2}{\beta^2}\frac{d^2J^i}{d\tau^2} - \sum_{jk}R_{0ijk}v^kJ^j + \sum_{jk}R_{0kij}v^jv^kJ^0 - \sum_{jk}R_{0kij}v^jJ^k$$
$$- \sum_j R_{0i0j}v^jJ^0 + \sum_j R_{0i0j}J^j + \sum_{jkl}R_{ijkl}v^jv^lJ^k = 0 \quad (2.30)$$

Multiplicando a equação 2.30 por $-e^{-2\phi}$:

$$-e^{-2\phi}\frac{a^2}{\beta^2}\frac{d^2J^i}{d\tau^2} - \sum_{jk}R^0_{ijk}v^kJ^j + \sum_{jk}R^0_{kij}v^jv^kJ^0 - \sum_{jk}R^0_{kij}v^jJ^k$$
$$- \sum_j R^0_{i0j}v^jJ^0 + \sum_j R^0_{i0j}J^j - a^2e^{-2\phi}\sum_{jkl}R^i_{jkl}v^jv^lJ^k = 0 \quad (2.31)$$

Substituindo a equação 2.31 pelos valores do tensor de curvatura 2.1.2:

$$\begin{aligned}
&-e^{-2\phi}\frac{a^2}{\beta^2}\frac{d^2J^i}{d\tau^2}-\sum_{jk}B\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\delta_{ij}-\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta_{ik}\right)v^kJ^j+\sum_{jk}B\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta_{ki}-\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\delta_{kj}\right)v^jv^kJ^0\\
&\quad-\sum_{jk}B\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta_{ki}-\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\delta_{kj}\right)v^jJ^k-\sum_{j}\left(C\delta_{ij}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)v^jJ^0\\
&\quad+\sum_{j}\left(C\delta_{ij}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)J^j-a^2e^{-2\phi}\sum_{jkl}A\left(\delta^i_k\delta_{jl}-\delta^i_l\delta_{jk}\right)v^jv^lJ^k=0 \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Reescrevendo a equação 2.32:

$$\begin{aligned}
&-e^{-2\phi}\frac{a^2}{\beta^2}\frac{d^2J^i}{d\tau^2}-BJ^i\sum_k\frac{\partial\phi}{\partial x^k}v^k+Bv^i\sum_j\frac{\partial\phi}{\partial x^j}J^j+Bv^iJ^0\sum_j\frac{\partial\phi}{\partial x^j}v^j-B\frac{\partial\phi}{\partial x^i}v^2J^0\\
&\quad-BJ^i\sum_j\frac{\partial\phi}{\partial x^j}v^j+B\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\sum_j v^jJ^j-Cv^iJ^0+J^0\sum_j\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}v^j+J^0\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\sum_j\frac{\partial\phi}{\partial x^j}v^j\\
&\quad+CJ^i-\sum_j\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}J^j-\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\sum_j\frac{\partial\phi}{\partial x^j}J^j-a^2e^{-2\phi}Av^2J^i+a^2e^{-2\phi}Av^i\sum_j v^jJ^j=0. \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\boxed{\begin{aligned}
&-e^{-2\phi}\frac{a^2}{\beta^2}\frac{d^2J^i}{d\tau^2}+\left(-a^2e^{-2\phi}Av^2+C-2B\sum_j\frac{\partial\phi}{\partial x^j}v^j\right)J^i\\
&\quad+\left(Bv^i\sum_j\frac{\partial\phi}{\partial x^j}v^j-B\frac{\partial\phi}{\partial x^i}v^2-Cv^i+\sum_j\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}v^j+\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\sum_j\frac{\partial\phi}{\partial x^j}v^j\right)J^0\\
&\quad+\left(B\frac{\partial\phi}{\partial x^i}+a^2e^{-2\phi}Av^i\right)\sum_j v^jJ^j\\
&\quad-\sum_j\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}J^j\\
&\quad+\left(Bv^i-\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)\sum_j\frac{\partial\phi}{\partial x^j}J^j=0. \qquad (2.34)
\end{aligned}}$$

Capítulo 3

Considerações sobre a Geometria de $\mathcal{M}$

Neste capítulo analisaremos equações de Jacobi em geodésicas na variedade $\mathcal{M}$, em especial daremos atenção àquelas que passam por pontos críticos de ϕ.

3.1 Pontos Críticos

3.1.1 Pontos Críticos em uma Variedade

O estudo dos pontos críticos de uma função real definida em variedade é um assunto extenso e com aplicações em diversas áreas, como por exemplo, à Topologia Diferencial, chamada Teoria de Morse (ver [4],página 226), que está longe do escopo dessa dissertação. Nesta seção recordaremos apenas alguns de seus conceitos elementares que serão utilizados ao longo do capítulo.

Definição 3.1. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dizemos que ela possui um ponto crítico $p \in M$ quando $df(p) = 0$. Esse ponto é chamado não-degenerado quando o Hessiano $\mathrm{H}^f(p)$ é uma forma bilinear não degenerada.*

Além disto, as definições de ponto de máximo local ou mínimo local ou sela de f são as mesmas de uma função definida em um aberto de $\mathbb{R}^n$(ver [6] secção 3.8).

Teorema 3.1. *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num aberto $U \subset M$. Todo ponto crítico não-degenerado $p \in U$ é um ponto crítico isolado, isto é, existe uma vizinhança em torno de p onde ele é o único ponto crítico.*

Teorema 3.2. *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $p \in U$ um ponto crítico não-degenerado de f no aberto $U \subset M$.*

(a) se $\mathrm{H}^f(p)$ é positiva-definida, então p é mínimo local;

(b) se $\mathrm{H}^f(p)$ é negativa-definida, então p é máximo local;

(c) se $\mathrm{H}^f(p)$ *é indefinida, então* p *é ponto de sela.*

Demonstração. Este é um teorema local que pode ser demonstrado em um sistema de coordenadas qualquer em torno de p. Assim as demonstrações são as mesmas da análise em $\mathbb{R}^n$. Veja a referência [6], teorema 3.5. $\square$

Passando agora para o contexto Riemanniano, seja (Σ, g) uma n-variedade Riemanniana e $f \in \mathfrak{F}(\Sigma)$. Neste caso, p é um ponto crítico de f se, e somente se, $\nabla f(p) = 0$. Além disto, podemos passar a Hessiana em p ao status de operador linear em $T_p\Sigma$ mediante o levantamento de um de seus índices pela métrica g_p:

$$\widetilde{\mathrm{H}}_i^k(p) := \sum_\ell g^{k\ell}\,(\mathrm{H}^f(p))_{\ell i}\,.$$

Como $\mathrm{H}^f(p)$ é simétrica, então o operador $\widetilde{\mathrm{H}}(p)$ é auto-adjunto no espaço vetorial $T_p\Sigma$ com produto interno g_p, o que implica que todos os seus autovalores são reais. O índice do ponto crítico isolado p é o número de autovalores negativos de $\widetilde{\mathrm{H}}(p)$. Sendo assim, as afirmações do teorema 3.2 podem ser expressas na forma:

(a) p é mínimo local se, e somente se, o índice de p é 0.

(b) p é máximo local se, e somente se, o índice de p é $n = \dim \Sigma$.

(c) p é ponto de sela se, e somente se, o índice de p está entre 1 e $n - 1$.

3.1.2 Pontos Críticos ao Longo de Folhas Espaciais

Consideremos agora a variedade Lorentziana $(n+1)$-dimensional $M = I \times \Sigma$ com métrica g, sendo I um intervalo aberto da reta real, $\Sigma_t := t \times \Sigma$ e $\bar{\mathrm{g}}_t$ a restrição de g à Σ_t, que assumiremos ser Riemanniana, i.e., Σ_t é hiperfície tipo espaço para cada $t \in I$.

Definição 3.2. *Dado* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave, diremos que uma curva* $\gamma \subset M$ *é uma curva de pontos críticos tipo-espaço de* f *quando ocorrer o seguinte:*

(a) γ *é curva tipo-tempo e para cada* $t \in I$*, existe um único* $p = \gamma(t) \in \gamma \cap \Sigma_t$*.*

(b) $p = \gamma(t)$ *é ponto crítico isolado de* f *restrita à* Σ_t*.*

3.2 Análise das curvas de Pontos Críticos de ϕ em $\mathcal{M}$

Nesta seção estaremos interessados nas curvas de pontos críticos de $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, a função definida na parte temporal da métrica 2.1. O operador Hessiano (2.7) de ϕ no ponto crítico p será essêncial ao estudarmos as eqauções de Jacobi ao longo dessas curvas.

3.2.1 Curvas de pontos críticos de ϕ em $\mathcal{M}$

Estaremos interessados no caso em que γ seja uma curva de pontos críticos de ϕ, conforme definida na subseção 3.1.2.

Teorema 3.3. *Seja γ uma curva de pontos críticos em $\mathcal{M}$ ortogonal às hiperfícies Σ's, i.e., para cada $p \in \gamma$ temos $T_p\gamma$ normal à hiperfície plana tipo-espaço que passa por este ponto. Então ela é uma geodésica tipo-tempo, se e somente se,*

$$t = k_1\tau + k_2 \tag{3.1}$$

onde k_1 e k_2 são constantes arbitrárias.

Demonstração. Seja γ uma curva de pontos críticos numa $(n+1)$-variedade $\mathcal{M}$ ortogonal a Σ_t. É fácil ver que $\dot{\gamma} = \beta\partial_0$ e que

$$\begin{aligned}\nabla_\tau(\beta\partial_0) &= \nabla_\tau(\beta\partial_0)\\ &= \frac{d\beta}{d\tau}\partial_0 + \beta^2\sum_k \Gamma^k_{00}\partial_k\\ &= \frac{d\beta}{d\tau}\partial_0 + \beta^2\sum_k \frac{e^{2\phi}}{a^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta^{kj}\partial_k\end{aligned}$$

Como γ é uma curva de pontos críticos espaciais temos

$$\nabla_\tau(\beta\partial_0) = \frac{d\beta}{d\tau}\partial_0 \tag{3.2}$$

Assim γ é uma geodésica somente quando $\frac{d\beta}{d\tau} = 0$. Resolvendo (3.2) temos

$$t = k_1\tau + k_2 \tag{3.3}$$

onde k_1 e e k_2 são constantes arbitrárias. $\square$

3.2.2 Campos de Jacobi ao longo das curvas de pontos críticos de ϕ

Nesta seção queremos entender como que as geodésicas próximas a uma geodésica de pontos críticos se comporta. Para tal, estudamos as equações de Jacobi (desvio geodésico).

Teorema 3.4. *Seja γ uma curva geodésica tipo-tempo que é uma curva de pontos críticos de ϕ em $\mathcal{M}$. Nas coordenadas adaptadas onde* g *toma a forma da equação (2.1), temos que mediante uma parametrização afim τ, o campo de Jacobi ao longo de γ é dado:*

- *explicitamente pela função $J^0 = c_1\tau + c_2$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias,*
- *e pela equação de Jacobi espacial*

$$\frac{d^2J^i}{dt^2} - \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{dJ^i}{dt} - \frac{1}{a}\left(\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)J^i + \frac{e^{2\phi}}{a^2}\sum_{jk}\delta^{ik}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^k\partial x^j}J^j = 0. \tag{3.4}$$

Demonstração. Assumindo $v = 0$ e $\vec{\nabla}\phi = 0$ na equação de Jacobi temporal 2.28 temos:

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{d^2 J^0}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow J^0 = c_2\tau + c_3 \tag{3.5}$$

As equações de Jacobi espaciais 2.34 ficam:

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{d^2 J^i}{d\tau^2} - \frac{e^{2\phi}}{a^2} C J^i + \frac{e^{2\phi}}{a^2}\sum_j \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i \partial x^j} J^j = 0, \tag{3.6}$$

Como

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{d^2 J^i}{d\tau^2} = \frac{d^2 J^i}{dt^2} + \frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dt}\frac{dJ^i}{dt}.$$

e

$$C = a e^{-2\phi}\left(\frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right),$$

então

$$\frac{d^2 J^i}{dt^2} - \frac{d\phi}{dt}\frac{dJ^i}{dt} - \frac{1}{a}\left(\frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{d\phi}{dt}\right) J^i + \frac{e^{2\phi}}{a^2}\sum_{jk}\delta^{ik}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^k \partial x^j} J^j = 0. \tag{3.7}$$

Note que ao longo dessa geodésica $\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t}$. □

TomE agora $H(t)$ a matriz $n \times n$ que representa a parte espacial da matriz hessiana de ϕ em $(t, \vec{x}_0)$, i.e.,

$$H^k_i(t) := \sum_{\ell=1}^{n} \delta^{k\ell}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\ell \partial x^i}(t, \vec{x}_0)\,. \tag{3.8}$$

Assuma agora que $J(t)$ seja um autovetor de $H(t)$ correspondendo ao autovalor $\lambda(t)$:

$$\sum_{jk}\delta^{ik}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^k \partial x^j} J^j = \lambda J^i. \tag{3.9}$$

Assim o sistema de EDO's linares (3.4) toma a forma

$$\frac{d^2 J^i}{dt^2} - \frac{d\phi}{dt}\frac{dJ^i}{dt} - \frac{1}{a}\left(\frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{d\phi}{dt} - \frac{e^{2\phi}}{a}\lambda\right) J^i = 0. \tag{3.10}$$

Podemos eliminar o segundo termo da equação 3.10 fazendo

$$J^i = e^{\frac{1}{2}\phi(t)} Y^i \tag{3.11}$$

(ver [7] página 51), obtendo

$$\frac{d^2 Y^i}{dt^2} + \Omega(t)\, Y^i = 0, \tag{3.12}$$

onde

$$\Omega(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{a}\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{e^{2\phi}}{a^2}\lambda(t). \tag{3.13}$$

3.2.3 O Caso constante

Teorema 3.5. *Seja γ uma geodésica tipo-tempo em $\mathcal{M}$ e assuma que ϕ seja uma função constante. Nas coordenadas adaptadas onde g toma a forma da equação (2.1), temos por meio de uma parametrização afim τ, as componentes espaciais de um campo de Jacobi ao longo de γ satisfazem*

$$J^i(t) = a(t)\left(k_1 \int_0^t \frac{1}{a(s)^2} ds + k_2\right), \tag{3.14}$$

onde k_1 e k_2 são constantes arbitrárias.
Em particular, não existem pontos conjugados ao longo de γ.

Demonstração. No caso de ϕ ser uma função constante temos que a equação (3.4) toma a forma

$$\frac{d^2 J^i}{dt^2} - \frac{1}{a}\frac{d^2 a}{dt^2} J^i = 0, \tag{3.15}$$

o que é uma equação de Hill [7]. Resolvendo-a:

$$\begin{aligned} a\frac{d^2 J^i}{dt^2} - \frac{d^2 a}{dt^2} J^i &= 0 \\ a\frac{dJ^i}{dt} - \frac{da}{dt} J^i &= k_1 \\ a^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{J^i}{a}\right) &= k_1 \\ J^i &= a\left(k_1 \int_0^t \frac{1}{a^2} ds + k_2\right) \end{aligned}$$

Se em um ponto $\gamma(0) = p$ temos as condições iniciais $J^i(0) = 0$ e $\frac{dJ^i}{dt} = u^i \neq 0$ então

$$J^i(t) = a_o u^i a(t) \int_0^t \frac{1}{a(s)^2} ds \tag{3.16}$$

como $a \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $\gamma(t) = q$ é um ponto conjugado a p então:

$$\int_0^t \frac{1}{a(s)^2} ds = 0 \tag{3.17}$$

A integral acima é sempre positiva, o que implica na inexistência de pontos conjugados. □

3.2.4 O Caso Estático

No caso de $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, as equações de Jacobi espaciais 3.4 assumem a seguinte forma:

$$\frac{d^2 J^i}{dt^2} - \frac{1}{a}\frac{d^2 a}{dt^2} J^i + \frac{e^{2\phi}}{a^2} \sum_{jk} \delta^{ik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial x^j} J^j = 0\,. \tag{3.18}$$

Na direção de um autovetor $\vec{Y}$ da parte espacial da Hessiana correspondente ao autovalor constante λ, $\sum_{jk} \delta^{ik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial x^j} Y^j = \lambda Y^i$, notando que $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ implica $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ e $\frac{d\vec{Y}}{dt} = 0$, temos uma dinâmica especial $\vec{J}(t)$ que se mantém na mesma direção $\vec{Y}$, pois

$$\frac{d^2 J^i}{dt^2} - \frac{1}{a}\frac{d^2 a}{dt^2} J^i + \frac{e^{2\phi}\lambda}{a^2} J^i = 0\,. \tag{3.19}$$

Assim podemos definir a constante θ e a função real $b(t)$ por

$$\theta = e^{2\phi(\vec{x}_0)}\,\lambda \quad \text{e} \quad \vec{J}(t) = b(t)\,\vec{Y}\,, \tag{3.20}$$

sendo que

$$\boxed{\frac{d^2b}{dt^2} + \Theta_\lambda(t)b = 0} \tag{3.21}$$

onde

$$\boxed{\Theta_\lambda(t) = -\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{\theta}{a^2}\,.} \tag{3.22}$$

De forma geral, é imediato ver que:

Lema 3.1. *Seja γ uma curva de pontos críticos de ϕ em $\mathcal{M}$, que é uma geodésica tipo-tempo e $\vec{E}_1, \ldots, \vec{E}_n$ uma base de autovetores da parte espacial da Hessiana ao longo desses pontos. Temos que $\vec{J}(t)$ é a parte espacial de um campo de Jacobi ao longo de γ se, e somente se, existem funções $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ satisfazendo a equação*

$$\frac{d^2b_i}{dt^2} + \Theta_{\lambda_i}(t)b_i = 0 \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.23}$$

onde λ_i é o autovalor associado ao autovetor $\vec{E}_i$, e

$$\vec{J}(t) = b_1(t)\,\vec{E}_1 + \ldots + b_n(t)\,\vec{E}_n\,. \tag{3.24}$$

Agora, para o estudo dos pontos conjugados de γ, basta estudarmos os diferentes comportamentos da função $\Theta_\lambda(t)$. Para tal, nos será útil o seguinte lema, demonstrado na referência [5], Cap. 11:

Lema 3.2. *(Teorema da Comparação de Sturm) Suponha que u and v sejam funções diferenciáveis em $(0, T)$ e contínuas em $[0, T]$ com $u > 0$ em $(0, T)$. Se elas satisfazem*

$$\ddot{u}(t) + \alpha(t)u(t) = 0 \tag{3.25}$$

$$\ddot{v}(t) + \alpha(t)v(t) \geq 0 \tag{3.26}$$

com $u(0) = v(0) = 0$ e $\dot{u}(0) = \dot{v}(0) > 0$, para alguma função contínua $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}$, então

$$v(t) \geq u(t) \quad em \quad [0, T]. \tag{3.27}$$

Para o caso de $\Theta(t)$ positivo, temos:

Teorema 3.6. *Seja γ uma curva de pontos críticos de ϕ em $\mathcal{M}$ que é também uma geodésica tipo-tempo. Suponha que exista um autovalor λ da parte espacial da Hessiana ao longo de γ e uma constante $\omega > 0$ tal que $\Theta_\lambda(t) \geq \omega^2$ para todo $t \in [0, \frac{\pi}{\omega}]$. Então, existe um ponto conjugado de γ entre os instantes 0 e $\frac{\pi}{\omega}$.*

Demonstração. Tome o campo de Jacobi, dado pela equação $\frac{d^2b}{dt^2} + \Theta_\lambda(t)b = 0$, com parte temporal nula, $J^0 = 0$, garantida pelo teorema (3.4), e com a parte espacial na direção do autovetor $\vec{Y}$, conforme na equação (3.20). Dada uma equação $\ddot{v} + \omega^2 v = 0$ com as condições $v(0) = 0$ e $\dot{v}(0) > 0$, cuja solução é $v(t) = \frac{\dot{v}(0)}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)$, temos

$$0 < t < \frac{\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad v(t) > 0 \quad \text{e} \quad \ddot{v} + \Theta_\lambda\, v \geq \ddot{v} + \omega^2\, v = 0\,. \tag{3.28}$$

Agora assuma que condições iniciais $b(0) = v(0)$ e $\dot{b}(0) = \dot{v}(0)$. Assim, aplicando o Lema (3.2), concluímos que

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq b(t) \leq \frac{\dot{v}(0)}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)\,. \tag{3.29}$$

No caso $t = \frac{\pi}{\omega}$ temos $b(t) = 0$ o que implica na existência de pelo menos um ponto conjugado no intervalo $[0, \frac{\pi}{\omega}]$. $\square$

Para $\Theta \leq 0$ temos:

Teorema 3.7. *Seja γ uma curva de pontos críticos de ϕ em $\mathcal{M}$ que também é uma geodésica tipo-tempo. Suponha que para qualquer autovalor λ da parte espacial da Hessiana ao longo de γ tenhamos $\Theta_\lambda(t) \leq 0$ pata todo $t > 0$. Então não existe nenhum ponto conjugado de γ na região $t > 0$.*

Demonstração. Tome o campo de Jacobi $\vec{J}(t)$, dado pela equação $\frac{d^2b_i}{dt^2} + \Theta_\lambda(t)b_i = 0$, conforme no lema (3.1) e satisfazendo $J^i(0) = 0$. Sem perda de generalidade, a base de autovetores é escolhida de forma que tenhamos $b_i(t) \geq 0$ para todo i no intervalo $(0, T)$. É fácil ver que neste intervalo $\ddot{b}_i \geq \ddot{b}_i + \Theta_\lambda b_i = 0$. Tomando a equação $\ddot{u}(t) = 0$ com condições iniciais $b_i(0) = u(0) = 0$ e $\dot{b}_i(0) = \dot{u}(0) > 0$ temos pelo Lema (3.2), que

$$b_i(t) \geq u(t) = \dot{u}(0)t \text{ para todo } t \in [0, T]$$

Consequentemente, $b_i(t) \neq 0$, e portanto não há ponto conjugado no intervalo $[0, T]$. $\square$

3.3 Conclusão

Seja γ uma curva de pontos críticos espaciais de ϕ em $\mathcal{M}$ que é também uma geodésica tipo-tempo e $\vec{J}$ a parte espacial de um campo de Jacobi ao longo de γ. No caso de $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, as equações de Jacobi espaciais (3.4) assumem a seguinte forma:

$$\frac{d^2 J^i}{dt^2} - \frac{1}{a}\frac{d^2 a}{dt^2} J^i + \frac{e^{2\phi}}{a^2} \sum_{jk} \delta^{ik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial x^j} J^j = 0\,. \tag{3.30}$$

A partir desta equação chegamos a seguinte função

$$\Theta_\lambda(t) = -\frac{1}{a}\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{\theta}{a^2} \tag{3.31}$$

onde θ é uma constante da por $\theta = e^{2\phi}\lambda$, sendo que λ um autovalor da hessiana da parte espacial da hessiana de H^{ϕ}.

Esta função possui a seguinte propriedade:

- Para $\Theta_\lambda > 0$, existe pelo menos um ponto conjugado de γ no intervalo $[0, \frac{\pi}{\omega}]$.
- Para $\Theta_\lambda \leq 0$, não existem pontos conjugados de γ na região $t > 0$.

onde ω é uma constante positiva arbitrária.

Bibliografia

[1] Axler, Sheldon. *Linear Algebra Done Right*, 3rd ed. Springer, 2015.

[2] Barreira, Luis, Valls, Claudia. *Ordinary Differential Equations: Qualitative Theory.* AMS, 2012.

[3] Do Carmo, Manfredo P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. SBM, 2014.

[4] Grinfeld, Michael. *Mathematical Tools for Physicists*, 2nd ed. Wiley, 2015.

[5] Lee, John M. *Introduction to Riemannian Manifolds*, 2nd ed. Springer, 2018.

[6] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise* vol. 2. Impa, 2012.

[7] Magnus W., Winkler S. *Hill's equation*. John Wiley & Sons, 1966.

[8] Marsden, Ratiu, Abraham.*Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, 3rd ed. Springer, 2007.

[9] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.*Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.

[10] O'Neill, Barrett. *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*. Academic Press, 1983.

[11] Petersen, Peter. *Riemannian Geometry*, 3rd ed. Springer, 2016.

[12] Renteln, Paul. *Manifolds, Tensors, and Forms*. Cambridge University Press, 2014.

[13] Tu, Loring W. *An Introduction to Manifolds*, 2nd ed. Springer, 2011.