

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

## **Torção Total de Linhas de Curvatura Fechadas**

**Edilson Expedito da Silva Lima**

ITAJUBÁ, 4 DE SETEMBRO DE 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

## Torção Total de Linhas de Curvatura Fechadas

**Edilson Expedito da Silva Lima**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática

**Área de Concentração:** Topologia/Geometria

**Orientador:** Prof. Dr. Fábio Scalco Dias

ITAJUBÁ – MG

4 DE SETEMBRO DE 2019

*Dedico este trabalho aos meus pais e às minhas irmãs.*

# Agradecimentos

A Deus, por ser essa energia que me guia.

Aos meus pais, José e Eunice, por sempre me apoiarem.

Às minhas irmãs, Eliane, Elaine e Elizandra pelo suporte durante o mestrado.

Ao meu orientador, Fabio, por me guiar neste trabalho e pela paciência durante este processo.

Ao professor Luís Fernando pela ajuda durante nossos estudos.

Aos meus amigos que sempre me incentivaram a seguir meus objetivos.

E, finalmente, agradeço a CAPES pelo suporte financeiro, que foi imprescindível para que eu finalizasse esta etapa da minha vida acadêmica.

*Being conscious is a torment.  
The more we learn is the less we get. (Sensorium, EPICA)*

# Resumo

Neste trabalho apresentamos um método para construir superfícies desenvolvíveis contendo uma dada curva como linha de curvatura e, em seguida, fazemos um estudo da torção total de linhas de curvatura fechadas de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  e construímos uma superfície local suave contendo uma dada curva fechada com torção total igual a um múltiplo inteiro de  $2\pi$  como ciclo principal hiperbólico. Finalizamos o trabalho com um estudo sobre o comportamento das linhas de curvatura próximas de um ponto umbílico de uma superfície parametrizada.

**Palavras-chave:** Ciclos Principais Hiperbólicos, Equações Diferenciais Binárias, Linhas de Curvatura, Torção Total.

# Abstract

In this paper we present a method for constructing developable surfaces containing a given curve as a curvature line and then we study the total torsion of closed curvature lines of surfaces in  $\mathbb{R}^3$  and construct a smooth local surface containing a given closed curve with total torsion equal to an integer multiple of  $2\pi$  as the hyperbolic main cycle. We conclude the work with a study on the behavior of curvature lines near an umbilical point of a parameterized surface.

**Keywords:** Hyperbolic Principal Cycles, Binary Differential Equations, Curvature Lines, Total Torsion.

# Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	v
Lista de Figuras	viii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Geometria Diferencial de Superfícies em <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>4</b>
2.1 Conceitos Iniciais . . . . .	5
2.1.1 Curvas em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	5
2.1.2 Superfícies em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	8
2.1.3 Linhas de Curvatura . . . . .	10
2.2 Superfícies Regradas . . . . .	17
2.2.1 Superfícies Regradas Não Cilíndricas . . . . .	18
2.2.2 Superfícies Desenvolvíveis . . . . .	20
2.3 Construção de Superfícies Desenvolvíveis a Partir de uma Linha de Curvatura	21
<b>3 Torção Total de Linhas de Curvatura Fechadas</b>	<b>33</b>
3.1 O Conceito de Torção Total e o Ovaloide . . . . .	33
3.2 Torção Total de Linhas de Curvatura Fechadas . . . . .	37



3.3	Algumas Generalizações sobre Torção Total . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Ciclos Principais Hiperbólicos</b>	<b>45</b>
4.1	Ciclos Principais . . . . .	45
4.2	Ciclos Principais Hiperbólicos . . . . .	52
4.3	Ciclos Principais Hiperbólicos: Um Problema Inverso . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Equações Diferenciais Binárias</b>	<b>60</b>
5.1	Equações Diferenciais Binárias . . . . .	60
5.2	Levantamento do Campo de Direções . . . . .	62
5.3	Linhas de Curvatura em Superfícies em $\mathbb{R}^3$ e Pontos Umbílicos Darbouxianos	68
	<b>Conclusões</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>78</b>

# Lista de Figuras

2.1	O Triedro de Frenet e os vetores $\tilde{N}(s)$ e $\tilde{v}(s)$ . . . . .	23
2.2	Superfície Desenvolvível (Cilindro) $S(r, u)$ com a curva $C$ como linha de curvatura. . . . .	29
2.3	Superfície Desenvolvível (Cone) $S(r, u)$ com a curva $C$ como linha de curvatura. . . . .	30
2.4	Superfície Desenvolvível (Tangente) $S(r, u)$ com a curva $C$ como linha de curvatura. . . . .	32
3.1	O Ovaloide. . . . .	36
3.2	O Toro. . . . .	42
4.1	Linhas de curvatura de $S$ . . . . .	46
4.2	Aplicação de Transição $\pi$ . . . . .	47
4.3	Aplicação de retorno de Poincaré. . . . .	51
4.4	Superfície canaleta. . . . .	53
5.1	Configuração da EDB (5.1) de acordo com sua classificação: $D_1, D_2$ e $D_3$ . . . . .	69

# Capítulo 1

## Introdução

Um conceito muito importante em geometria diferencial é a noção de curvatura principal. De maneira sucinta, podemos elencar alguns pontos históricos de seu desenvolvimento. Inicialmente, Euler [4] considerou as seções planas de uma superfície e definiu as curvas planas com curvaturas extremas, que receberam o nome de curvaturas principais e as direções correspondentes foram chamadas de direções principais. Os pontos em que as curvaturas principais eram idênticas receberam o nome de pontos umbílicos. Já o conceito de linha de curvatura foi introduzido por G. Monge [14] em seus estudos sobre o elipsoide. Posteriormente, E. Dupin realizou trabalhos em sistemas triplamente ortogonais, seguido por G. Darboux e seus trabalhos sobre as linhas de curvatura próximas de pontos umbílicos.

Mais recentemente C. Gutierrez e J. Sotomayor [10], [11] se interessaram pela estabilidade estrutural de linhas de curvatura. Nestes trabalhos, os autores introduziram o conceito de configuração principal de uma imersão  $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^r, r \geq 4$ , de uma superfície compacta e orientada  $M$ . Entendemos por configuração principal a tripla  $\mathcal{P}_\alpha = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{U}_\alpha\}$ , na qual  $\mathcal{U}_\alpha$  é o conjunto dos pontos umbílicos e  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  são as folheações principais de  $\alpha$ . O objetivo inicial dos autores foi descrever o conceito de estabilidade estrutural da configuração principal  $\mathcal{P}_\alpha$ . Além disso, eles forneceram uma caracterização de uma classe ampla de imersões que tivessem sua configuração principal estável.

Neste breve histórico sobre o desenvolvimento do conceito de linhas de curvatura é

importante pontuar que este tema recebeu a ajuda de inúmeros matemáticos, que trouxeram suas contribuições sobre superfícies imersas em  $\mathbb{R}^3$  e em outros espaços geométricos tais como a esfera, os espaços Euclidianos de dimensão superior, os espaços hiperbólicos, as variedades Riemannianas, entre outros.

Destacamos agora uma classe de superfícies conhecidas como superfícies regradas, que podem ser geradas pelo deslocamento de uma reta no espaço. Dentre estas superfícies, trabalhamos com as superfícies desenvolvíveis. As superfícies desenvolvíveis têm aplicação direta em indústrias que utilizam couro, papel, chapas metálicas, entre outros. Mais especificamente, para a obtenção de superfícies desenvolvíveis, variados métodos já foram estudados e, neste trabalho, exibimos o método apresentado em [13].

Um dos objetivos deste trabalho é construir superfícies contendo uma curva dada como linha de curvatura ou ciclo principal hiperbólico. Esses estudos foram realizados como os trabalhos [6], [13] e [16] o fazem. É importante destacar que estes trabalhos utilizam fortemente o conceito de torção total para demonstrar seus resultados e, por conseguinte, este tema será abordado de forma a clarear nossa compreensão sobre alguns resultados clássicos.

Dessa forma, este trabalho foi dividido em quatro capítulos, além da Introdução, de modo a exibir resumidamente alguns resultados que discorrem sobre a relação entre linhas de curvatura, torção total e construção de superfícies a partir de uma dada curva. Mais especificamente, descrevemos alguns dos principais resultados desta dissertação.

- (1) A torção total de uma linha de curvatura em um ovaloide em  $\mathbb{R}^3$  é zero;
- (2) Se a torção total de uma curva fechada é  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , então existe um toro em  $\mathbb{R}^3$  contendo esta curva como linha de curvatura;
- (3) Dada uma curva fechada não circular com torção total  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , então existe uma superfície local suave que contém a curva dada como ciclo principal hiperbólico.

A seguir, faremos uma breve apresentação sobre o que cada capítulo deste trabalho discorrerá.

O Capítulo 2 contém uma síntese sobre a geometria diferencial de curvas e superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , além de introduzir um método para a construção de superfícies desenvolvíveis a partir de uma dada curva. Os principais trabalhos utilizados nesta parte foram [3], [12] e [13].

No Capítulo 3 discorreremos sobre o conceito de torção total. Apresentamos resultados clássicos de curvas fechadas na esfera, no ovaloide e no toro. O método de construção de superfícies realizado no Capítulo 2 será aproveitado em alguns resultados neste capítulo. Apresentamos uma resposta para os resultados (1) e (2) destacados anteriormente. Em seguida, finalizamos este capítulo com algumas generalizações acerca de torção total de curvas fechadas em  $\mathbb{R}^3$ . As referências principais foram [16] e [20].

Exibimos no Capítulo 4 alguns resultados sobre ciclos principais hiperbólicos, o expoente de hiperbolicidade e a aplicação de Poincaré. Finalizaremos este capítulo com uma resposta para o resultado (3) apresentado anteriormente. Nossas referências principais foram [10] e [11].

Finalmente, apresentamos no Capítulo 5 um resumo sobre equações diferenciais binárias, levantamento de Lie-Cartan e pontos umbílicos Darbouxianos. Esta síntese é importante para o estudo do comportamento das linhas de curvatura em vizinhanças próximas de um ponto umbílico. Os principais trabalhos utilizados aqui foram [2], [7] e [10].

## Capítulo 2

# Geometria Diferencial de Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo, apresentamos um breve resumo de geometria diferencial de curvas e superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Inicialmente exibimos alguns conceitos sobre curvas em  $\mathbb{R}^3$  e algumas de suas propriedades, em especial, o triedro de Frenet. Também discorremos sobre a primeira e segunda formas fundamentais de superfícies, bem como linhas de curvatura e alguns resultados decorrentes. Posteriormente, apresentamos as superfícies regradas. Encerramos este capítulo com uma seção sobre superfícies desenvolvíveis, mais especificamente, estudamos o seguinte problema: dada uma curva  $C$  em  $\mathbb{R}^3$ , como construir uma superfície desenvolvível tendo  $C$  como linha de curvatura?

Este estudo será importante para a compreensão dos resultados que serão discutidos nos capítulos seguintes. Ao longo deste trabalho os símbolos  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $|\cdot|$  e  $\times$  representarão o produto interno, a norma e o produto vetorial usuais do  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente. Além disso,  $I$  denotará um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . As principais referências utilizadas neste capítulo foram [3], [12] e [13].

## 2.1 Conceitos Iniciais

Nesta seção exibimos uma síntese sobre a geometria diferencial de curvas e superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , definições e alguns resultados sobre linhas de curvatura.

### 2.1.1 Curvas em $\mathbb{R}^3$

Iniciamos nossas definições com o conceito de curva parametrizada, conforme apresentado a seguir.

**Definição 2.1.1.** *Uma curva parametrizada diferenciável de  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , de classe  $C^\infty$ , de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$ . A variável  $t \in I$  é o **parâmetro** da curva e o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  formado pelo pontos  $C(t), t \in I$ , é o **traço** da curva.*

**Definição 2.1.2.** *Seja  $C(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$ , uma curva parametrizada diferenciável. O vetor **tangente** a  $C$  em  $t \in I$  é o vetor*

$$C'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Além disso, a curva  $C$  é **regular** se para todo  $t \in I$ , tem-se  $C'(t) \neq 0$ , caso contrário a curva  $C$  é dita **singular**.

**Definição 2.1.3.** *Uma curva regular  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita **parametrizada pelo comprimento de arco** se, para cada  $t_0, t_1 \in I$  com  $t_0 \leq t_1$ , o comprimento de arco da curva  $C$  de  $t_0$  a  $t_1$  for igual a  $t_1 - t_0$ , isto é,*

$$\int_{t_0}^{t_1} |C'(t)| dt = t_1 - t_0.$$

**Proposição 2.1.1.** *Uma curva regular  $C$  está parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  se, e somente se,  $|C'(s)| = 1$ , para todo  $s \in I$ .*

**Definição 2.1.4.** *Seja  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . Definimos **curvatura** de  $C$  em  $s \in I$  como sendo o número real*

$$k(s) = |C''(s)|.$$

**Definição 2.1.5.** *Seja  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , tal que  $k(s) \neq 0$ . O vetor*

$$n(s) = \frac{C''(s)}{k(s)}$$

*é denominado **vetor normal** a  $C$  em  $s$ . A **reta normal** a  $C$  em  $p \in I$  é a reta que passa pelo ponto  $C(p)$  e tem a direção do vetor normal  $n(p)$ .*

Denotando por  $t(s)$  o vetor unitário  $C'(s)$ , temos que  $t(s)$  e  $n(s)$  são ortonormais e

$$t'(s) = k(s)n(s). \quad (2.1)$$

Agora, podemos definir um terceiro vetor que, junto com  $t(s)$  e  $n(s)$ , constituirá uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 2.1.6.** *Seja  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , tal que  $k(s) \neq 0$ . O **vetor binormal** a  $C$  em  $s \in I$  é dado pelo produto vetorial entre  $t(s)$  e  $n(s)$ , isto é,*

$$b(s) = t(s) \times n(s).$$

O referencial ortonormal  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  da curva  $C$  em  $s \in I$  recebe o nome de **triedro de Frenet**. Como os vetores do triedro de Frenet formam um referencial ortonormal, cada par destes vetores determina um plano, a saber:

- (1) Plano gerado por  $n(s)$  e  $b(s)$ : Plano Normal;
- (2) Plano gerado por  $t(s)$  e  $n(s)$ : Plano Osculador;
- (3) Plano gerado por  $t(s)$  e  $b(s)$ : Plano Retificante.

Podemos agora estudar as derivadas de cada vetor do triedro de Frenet comparando-os com os elementos dessa base. Sendo assim, ao derivarmos  $b(s)$ , obtemos que:

$$\begin{aligned} b'(s) &= t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) \\ &= t(s) \times n'(s), \end{aligned}$$

ou seja,  $b'(s)$  é ortogonal a  $t(s)$ . Como  $|b(s)| = 1$ , segue que  $b'(s)$  é ortogonal a  $b(s)$ . Logo, concluímos que  $b'(s)$  é paralelo a  $n(s)$ , ou seja,  $b'(s)$  pode ser escrito como o produto de  $n(s)$  por um número real  $\tau(s)$  para cada  $s \in I$ , que será definido a seguir:



**Definição 2.1.7.** O número real  $\tau(s)$  definido por

$$b'(s) = -\tau(s)n(s) \quad (2.2)$$

é denominado **torção** da curva em  $s$ .

Obtemos de (2.1) e (2.2) que:

$$t'(s) = k(s)n(s) \quad \text{e} \quad b'(s) = -\tau(s)n(s).$$

Em seguida, derivando  $n(s) = b(s) \times t(s)$ , obtemos

$$n'(s) = b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s).$$

Substituindo os valores de  $t'$  e  $b'$ , chegamos em

$$n'(s) = \tau(s)b(s) - k(s)t(s).$$

Consequentemente, se  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , temos que o triedro de Frenet definido por  $t(s) = C'(s)$ ,  $n(s) = C''(s)/|C''(s)|$  e  $b(s) = t(s) \times n(s)$  satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{aligned} t'(s) &= k(s)n(s), \\ n'(s) &= -k(s)t(s) + \tau(s)b(s), \\ b'(s) &= -\tau(s)n(s), \end{aligned} \quad (2.3)$$

que são denominadas **fórmulas de Frenet**.

Finalizamos esta seção com a definição de curva fechada simples.

**Definição 2.1.8.** Uma **curva fechada** é uma curva parametrizada regular  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $C$  e todas as suas derivadas coincidem em  $a$  e  $b$ , ou seja,

$$C(a) = C(b), \quad C'(a) = C'(b), \quad C''(a) = C''(b)$$

e assim por diante. Além disso, diz-se que uma curva  $C$  é **simples** se ela não possui autointerseções, isto é, se  $t_1, t_2 \in [a, b], t_1 \neq t_2$ , então  $C(t_1) \neq C(t_2)$ .

## 2.1.2 Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção exibimos um resumo sobre a geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Para mais detalhes e demonstrações dos teoremas e proposições apresentados aqui, recomendamos [3] e [12].

**Definição 2.1.9.** *Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p \in \mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $X : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que*

(1)  *$X$  é diferenciável. Isto significa que se escrevermos*

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

*as funções  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  e  $z(u, v)$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em  $U$ .*

(2)  *$X$  é um homeomorfismo.*

(3) *(Condição de regularidade) Para todo  $q \in U$ , a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetora.*

A aplicação  $X$  é chamada uma **parametrização**, ou **carta**, ou ainda **sistema de coordenadas** (locais) em (uma vizinhança de)  $p$ . A vizinhança  $V \cap S$  de  $p$  em  $S$  é chamada uma **vizinhança coordenada**.

**Definição 2.1.10.** *Seja  $S$  uma superfície regular com uma parametrização  $X$ . Então, fixado um ponto  $(u_0, v_0) \in U$ , as curvas*

$$u \mapsto X(u, v_0)$$

$$v \mapsto X(u_0, v)$$

*são chamadas **curvas coordenadas** de  $X$  em  $(u_0, v_0)$ .*

**Proposição 2.1.2.** *Seja  $p$  um ponto de uma superfície regular  $S$ , e sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  duas parametrizações de  $S$ , tais que  $p \in X(U) \cap Y(V) = W$ . Então a mudança de coordenadas*

$$h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$$

é um difeomorfismo, isto é,  $h$  é diferenciável e tem uma inversa diferenciável  $h^{-1}$ .

**Definição 2.1.11.** *Seja  $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, definida em um subconjunto aberto  $V$  de uma superfície regular  $S$ . Então  $f$  é diferenciável em  $p \in V$  se, para alguma parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , com  $p \in X(U) \subset V$ , a composição*

$$f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

*é diferenciável em  $X^{-1}(p)$ . A função  $f$  é diferenciável em  $V$  se é diferenciável em todos os pontos de  $V$ .*

Segue diretamente da Proposição 2.1.2 que a Definição 2.1.11 não depende da escolha da parametrização  $X$ .

**Definição 2.1.12.** *Uma **superfície parametrizada**  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $X$  de um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^3$ . O conjunto  $X(U) \subset \mathbb{R}^3$  é chamado o **traço** de  $X$ . Além disso,  $X$  é **regular** se a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetora para todo  $q \in U$ . Um ponto  $p \in U$  no qual  $dX_p$  não é injetora é chamado um **ponto singular** de  $X$ .*

**Proposição 2.1.3.** *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regular parametrizada com  $q \in U$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $q$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que  $X(V) \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular.*

Passamos agora à definição do plano tangente a uma superfície  $S$ . Primeiramente, entendemos por vetor tangente a  $S$ , em um ponto  $p \in S$ , o vetor tangente  $C'(0)$  de uma curva parametrizada diferenciável  $C : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ , com  $C(0) = p$ .

**Proposição 2.1.4.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  e seja  $q \in U$ . O subespaço vetorial de dimensão 2,*

$$dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3 \tag{2.4}$$

*coincide com o conjunto de vetores tangentes a  $S$  em  $X(q)$ .*

É fácil ver que o plano  $dX_q(\mathbb{R}^2)$  definido em (2.4), que passa por  $X(q) = p$  não depende da parametrização  $X$ .

**Definição 2.1.13.** *O plano  $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$  como em (2.4) será chamado de **plano tangente** a  $S$  em  $X(q) = p$  e será denotado por  $T_p S$ .*

### 2.1.3 Linhas de Curvatura

O produto interno usual de  $\mathbb{R}^3$  induz em cada plano tangente  $T_p S$  de uma superfície regular  $S$  um produto interno de modo que, se  $w_1, w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$  então o produto interno de  $w_1$  e  $w_2$  em  $p$  é o mesmo que em  $\mathbb{R}^3$ . A este produto interno, que é um forma bilinear e simétrica, corresponde uma forma quadrática  $I_p$  dada por

$$\begin{aligned} I_p : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \langle w, w \rangle = |w|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

no ponto  $p \in S$ . Esta forma quadrática é chamada de **primeira forma fundamental**.

Considere agora

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S \\ (u, v) &\longmapsto X(u, v) \end{aligned}$$

uma parametrização local de  $S$ . Seja  $p = X(u_0, v_0)$  e  $w \in T_p S$ . Então existe uma curva regular  $C(t) = X(u(t), v(t)) \subset S$  tal que  $C(0) = p$  e  $C'(0) = w$ . Como  $C'(0) = X_u(u_0, v_0)u'(0) + X_v(u_0, v_0)v'(0)$ , vemos que  $w$  é combinação linear de  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$ , isto é,  $\{X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)\}$  é uma base de  $T_p S$ .

**Observação 2.1.1.** *Com o objetivo de simplificar a notação, a partir deste momento iremos omitir os parâmetros das funções  $X_u$ ,  $X_v$ ,  $u'$  e  $v'$ , considerando que estas funções indicam seus valores em  $p$ .*

Podemos escrever a primeira forma fundamental como

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle w, w \rangle \\ &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2, \end{aligned} \tag{2.5}$$

na qual

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle \quad e \quad G = \langle X_v, X_v \rangle. \tag{2.6}$$

Desta forma,  $E$ ,  $F$  e  $G$  são funções suaves em  $U$  e serão chamadas de **coeficientes da primeira forma fundamental**.

Agora, considere uma parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de uma superfície regular  $S$  em um ponto  $p \in S$ . Podemos escolher, para cada ponto  $q$  de  $X(U)$ , um vetor normal unitário  $N(q)$  dado por

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q).$$

De maneira geral, se  $V \subset S$  é um conjunto aberto em  $S$  e  $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável que associa a cada  $q \in V$  um vetor normal unitário em  $q$ , dizemos que  $N$  é um **campo diferenciável de vetores normais unitários em  $V$** .

Dessa forma, considere a aplicação

$$\begin{aligned} N : X(U) &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ p &\mapsto \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(p) \end{aligned}$$

sendo  $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ . Esta aplicação é denominada **aplicação de Gauss**, que relaciona a cada ponto  $p \in X(U)$  um vetor unitário e normal à superfície  $S$  em  $p$ .

**Definição 2.1.14.** Dizemos que uma superfície regular é **orientável** se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda a superfície. Desse modo, a escolha de tal campo  $N$  é chamada de **orientação** de  $S$ .

A diferencial  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta. Desta forma, podemos definir em  $T_pS$  a forma quadrática dada por

$$\begin{aligned} II_p : T_pS &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto -\langle dN_p(w), w \rangle, \end{aligned}$$

que é chamada de **segunda forma fundamental** de  $S$  em  $p$ .

**Definição 2.1.15.** Sejam  $C$  uma curva regular em  $S$  passando por  $p \in S$ ,  $k$  a curvatura de  $C$  em  $p$  e  $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ , tal que  $N$  é normal à superfície  $S$  e  $n$  é normal à curva  $C$ . Denominamos **curvatura normal** o número  $k_n = k \cos \theta$ .

Como  $dN_p$  é auto-adjunta, há uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_pS$  tal que  $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$  e  $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$ . Além disso,  $k_1$  e  $k_2$  ( $k_1 \leq k_2$ ) são, respectivamente, o mínimo e o máximo de  $II_p$  restrita ao círculo unitário em  $T_pS$ . Os números  $k_1$  e

$k_2$  são chamados de **curvaturas principais** em  $p$  e as direções principais geradas pelos vetores  $e_1$  e  $e_2$  são chamados de **direções principais** em  $p$ .

As curvaturas principais em  $p$  permitem calcular a curvatura normal segundo uma direção dada de  $T_pS$ . De fato, se  $v \in T_pS$  e  $|v| = 1$ , como  $e_1$  e  $e_2$  formam uma base ortonormal de  $T_pS$ , temos que

$$v = e_1 \cos \phi + e_2 \operatorname{sen} \phi,$$

na qual  $\phi$  é o ângulo de  $e_1$  a  $v$  na orientação de  $T_pS$ . Mais especificamente,  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_n$  se relacionam da seguinte maneira

$$k_n = k_1 \cos^2 \phi + k_2 \operatorname{sen}^2 \phi. \quad (2.7)$$

Esta relação é conhecida como **fórmula de Euler**.

**Definição 2.1.16.** *Se uma curva regular e conexa  $C$  em  $S$  é tal que para todo  $p \in C$  a reta tangente a  $C$  em  $p$  é uma direção principal em  $p$ , então  $C$  é chamada **linha de curvatura**.*

**Definição 2.1.17.** *Uma parametrização  $X$  de  $S$  em que as curvas coordenadas são linhas de curvatura é chamada de **carta principal**.*

**Proposição 2.1.5 (Olinde Rodrigues).** *Uma condição necessária e suficiente para que uma curva regular e conexa  $C$  em  $S$  seja uma linha de curvatura de  $S$  é que*

$$N'(t) = \lambda(t)C'(t),$$

para qualquer parametrização  $C(t)$  de  $C$ , em que  $N(t) = (N \circ C)(t)$  e  $\lambda$  é uma função diferenciável de  $t$ . Nesse caso,  $-\lambda(t)$  é a curvatura (principal) segundo  $C'(t)$ .

**Teorema 2.1.1 (Teorema de Joachimsthal).** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  duas superfícies regulares em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $S_1 \cap S_2 = C$  é uma curva regular em que  $\langle N_1(C(t)), N_2(C(t)) \rangle$  é constante. Aqui temos que  $N_1$  e  $N_2$  são os vetores normais a  $C(s)$  em  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente. Então,  $C(t)$  é uma linha de curvatura de  $S_1$  se, e somente se, é linha de curvatura de  $S_2$ .*

**Definição 2.1.18.** *Seja  $p \in S$  e  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de  $dN_p$  é chamado a **curvatura Gaussiana** de  $K$  de  $S$  em  $p$ . O negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamado a **curvatura média** de  $S$  em  $p$ . Em termos das curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  podemos escrever*

$$K = \det(dN_p) = k_1k_2 \quad \text{e} \quad H = -\frac{\text{tr}(dN_p)}{2} = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

**Definição 2.1.19.** *Um ponto de uma superfície  $S$  é chamado*

- (a) *Elíptico: se  $\det(dN_p) > 0$ ;*
- (b) *Hiperbólico: se  $\det(dN_p) < 0$ ;*
- (c) *Parabólico: se  $\det(dN_p) = 0$ , com  $dN_p \neq 0$ ;*
- (d) *Planar: se  $dN_p = 0$ .*

**Definição 2.1.20.** *Um ponto  $p \in S$  é denominado de **ponto umbílico** de  $S$  quando  $k_1 = k_2$  em  $p$ .*

**Proposição 2.1.6.** *Um ponto  $p \in S$  é umbílico se, e somente se,  $dN_p$  for um múltiplo da identidade.*

Considerando as Definições 2.1.18 e 2.1.20, temos que um ponto  $p$  é umbílico se, e somente se,  $H^2 - K = 0$ . Uma superfície na qual todos os pontos são umbílicos é chamada de **totalmente umbílica**.

**Proposição 2.1.7.** *Se todos os pontos de uma superfície conexa são umbílicos, então  $S$  está contida em um plano ou em uma esfera.*

Iremos agora obter a segunda forma fundamental a partir de um sistema de coordenadas. Para isso, considere  $X : U \rightarrow S$ ,  $p \in S$ ,  $w \in T_pS$  e  $C(t)$  como os utilizados no cálculo dos coeficientes da primeira forma fundamental. Tomando  $N_u = dN_p(X_u)$  e  $N_v = dN_p(X_v)$ , temos que

$$dN_p(w) = dN_p(X_u u' + X_v v') = N_u u' + N_v v'.$$

Como  $N_u, N_v \in T_p S$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v, \\ N_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v \end{aligned} \tag{2.8}$$

e, por conseguinte,

$$dN_p(w) = (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v.$$

Deste modo, escrevendo os vetores de  $T_p S$  na base  $\{X_u, X_v\}$ , obtemos

$$dN_p \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Assim, na base  $\{X_u, X_v\}$ ,  $dN_p$  é dada pela matriz  $(a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ . Por outro lado, a segunda forma fundamental é dada por

$$\begin{aligned} II_p(w) &= -\langle dN_p(w), w \rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

na qual

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_u, X_v \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle, \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle, \end{aligned} \tag{2.10}$$

sendo que tais igualdades são verdadeiras pois  $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$ . Desta forma,  $e$ ,  $f$  e  $g$  são funções suaves em  $U$  e serão denominadas **coeficientes da segunda forma fundamental**.

Da definição dos coeficientes da segunda forma fundamental e pelas equações (2.6) e (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_u, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= \langle N_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -e &= \langle N_u, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -g &= \langle N_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned}$$



Estas relações podem ser resolvidas, de modo que

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aplicando as equações (2.11) nas definições de curvatura Gaussiana e média obtemos que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2} \frac{(eG - 2fF + gE)}{EG - F^2}. \quad (2.12)$$

De acordo com a Proposição 2.1.5, uma curva regular conexa  $C \subset S$ , parametrizada por  $C(t) = X(u(t), v(t))$ , é uma linha de curvatura de  $S$  se, e somente se,

$$dN_p(C'(t)) = \lambda(t)C'(t), \quad (2.13)$$

em que  $\lambda$  é uma função real. Das equações (2.9), (2.11) e (2.13) vemos que  $C$  é uma linha de curvatura se, e somente se,

$$\begin{aligned} \frac{fF - eG}{EG - F^2}u' + \frac{gF - fG}{EG - F^2}v' &= \lambda u', \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2}u' + \frac{fF - gE}{EG - F^2}v' &= \lambda v'. \end{aligned}$$

Isolando  $\lambda$  no sistema anterior, obtemos a **equação diferencial das linhas de curvatura**

$$(fG - gF)(v')^2 + (eG - gE)u'v' + (eF - fE)(u')^2 = 0, \quad (2.14)$$

que pode ser escrita na forma matricial como

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 0.$$

Por meio da Proposição 2.1.6 vemos que o ponto  $p \in S$  é umbílico se, e somente se,  $a_{11} = a_{22}$  e  $a_{12} = a_{21} = 0$ . Segue das equações em (2.11) que tais condições são satisfeitas quando  $gE - eG = gF - fG = fE - eF = 0$ . Desse modo, um ponto  $p$  é umbílico se, e somente se, os coeficientes da equação (2.14) se anulam simultaneamente em  $p$ .

Agora, usando o fato de que as direções principais são ortogonais entre si, decorre a seguinte proposição:

**Proposição 2.1.8.** *Seja  $X$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$ . As curvas coordenadas de  $S$  são linhas de curvatura se, e somente se,  $F = f = 0$ . Neste caso, as curvaturas principais são dadas por*

$$k_1 = \frac{e}{E} \quad e \quad k_2 = \frac{g}{G}.$$

**Proposição 2.1.9.** *Seja  $p \in S$  um ponto não umbílico de  $S$ . É possível parametrizar uma vizinhança de  $p$  de tal modo que as curvas coordenadas desta parametrização sejam as linhas de curvatura de  $S$ , isto é, a parametrização é uma carta principal.*

Com os resultados apresentados até aqui, podemos construir um triedro ortonormal similar ao triedro de Frenet. Desse modo, seja  $C : I \rightarrow S$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  e  $N(s)$  o vetor normal à uma superfície regular  $S$ . O referencial ortonormal  $\{t(s), v(s), N(s)\}$ , no qual  $v(s) = N(s) \times t(s)$ , é denominado **triedro de Darboux**.

Sabemos que  $\langle t(s), t(s) \rangle = 1$  e, portanto,  $\langle t'(s), t(s) \rangle = 0$ . Desse modo  $t'(s)$  está contido no plano gerado por  $\{v(s), N(s)\}$ . De maneira análoga, encontramos que  $v'(s)$  está contido no plano gerado por  $\{N(s), t(s)\}$  e  $N'(s)$  está contido no plano gerado por  $\{t(s), v(s)\}$ . Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} t'(s) &= a_1(s)v(s) + a_2(s)N(s), \\ v'(s) &= b_1(s)t(s) + b_2(s)N(s), \\ N'(s) &= c_1(s)t(s) + c_2(s)v(s), \end{aligned} \tag{2.15}$$

em que  $a_i = a_i(s)$ ,  $b_i = b_i(s)$  e  $c_i = c_i(s)$  são funções para  $i = 1, 2$ . É fácil ver que

$$\begin{aligned} a_1(s) &= \langle t'(s), v(s) \rangle, & b_2(s) &= \langle v'(s), N(s) \rangle, \\ a_2(s) &= \langle t'(s), N(s) \rangle, & c_1(s) &= \langle N'(s), t(s) \rangle, \\ b_1(s) &= \langle v'(s), t(s) \rangle, & c_2(s) &= \langle N'(s), v(s) \rangle. \end{aligned}$$

Sabemos que  $t(s)$ ,  $v(s)$  e  $N(s)$  são vetores ortogonais e, portanto, temos que ao derivarmos

$\langle t(s), v(s) \rangle$  obtemos que

$$\begin{aligned}\langle t'(s), v(s) \rangle &= -\langle t(s), v'(s) \rangle \\ &= -\langle t(s), b_1(s)t(s) + b_2(s)N(s) \rangle \\ &= -b_1(s).\end{aligned}$$

Desse modo, de (2.15) segue que  $a_1(s) = -b_1(s)$ . Analogamente, obtemos que

$$c_1(s) = -a_2(s) \quad e \quad c_2(s) = -b_2(s).$$

A **curvatura geodésica**  $k_g$  e a **torção geodésica**  $\tau_g$  são definidas como

$$k_g(s) = a_1(s) \quad e \quad \tau_g(s) = b_2(s).$$

Segue também da Definição 2.1.15 que

$$k_n(s) = a_2(s).$$

Desse modo, temos que as derivadas dos vetores do triedro  $\{t(s), v(s), N(s)\}$  satisfazem as seguintes equações, chamadas de **equações de Darboux**:

$$\begin{aligned}t'(s) &= k_g(s)v(s) + k_n(s)N(s), \\ v'(s) &= -k_g(s)t(s) + \tau_g(s)N(s), \\ N'(s) &= -k_n(s)t(s) - \tau_g(s)v(s).\end{aligned}\tag{2.16}$$

## 2.2 Superfícies Regradas

As superfícies regradas são bem conhecidas na área de geometria diferencial e, por conseguinte, apresentamos nesta seção alguns resultados sobre estas superfícies. Veja [3] para mais detalhes.

Uma **família** (diferenciável) **a 1-parâmetro de retas**  $\{C(t), w(t)\}$  é uma correspondência que associa a cada  $t \in I$  um ponto  $C(t) \in \mathbb{R}^3$  e um vetor  $w(t) \in \mathbb{R}^3, w(t) \neq 0$ , tais que ambos  $C(t)$  e  $w(t)$  sejam diferenciáveis em  $t$ . Para cada  $t \in I$ , a reta  $L_t$  passando por  $C(t)$  e que é gerada por  $w(t)$  é chamada a **reta da família em  $t$** .

**Definição 2.2.1.** Dada uma família a 1-parâmetro de retas  $\{C(t), w(t)\}$ , a superfície parametrizada

$$S(t, u) = C(t) + uw(t), \quad t \in I, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (2.17)$$

é chamada **superfície regrada gerada pela família**  $\{C(t), w(t)\}$ . As retas  $L_t$  são chamadas as **geratrizes**, e a curva  $C(t)$  é denominada **diretriz** ou **curva base** da superfície  $S$ .

### 2.2.1 Superfícies Regradas Não Cilíndricas

As superfícies regradas são tais que, em alguns casos, a curva base não é única. Desse modo, as superfícies não cilíndricas são especiais, visto que elas têm uma única diretriz que contém as singularidades da superfície, a qual é chamada **curva de estrição**.

**Definição 2.2.2.** Uma superfície regrada é **não cilíndrica** se  $w'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

Salvo menção em contrário, iremos supor que

$$S(t, u) = C(t) + vw(t)$$

é uma superfície regrada não cilíndrica com  $|w(t)| = 1, t \in I$ . Observe que a suposição  $|w(t)| \equiv 1$  implica que  $\langle w(t), w'(t) \rangle = 0$  para todo  $t \in I$ .

**Lema 2.2.1.** Seja  $f(t, u) = C(t) + uw(t)$  uma superfície regrada não cilíndrica. Então, existe uma reparametrização de  $f$ , dada por  $g(s, v) = D(s) + vw(s)$ , em que

$$D(s) = C(s) - \frac{\langle C'(s), w'(s) \rangle}{\langle w'(s), w'(s) \rangle} w(s)$$

e  $\langle D'(s), w'(s) \rangle = 0$ .

**Definição 2.2.3.** A curva  $D$  dada no Lema 2.2.1 é chamada **curva de estrição** e seus pontos são chamados **pontos centrais** da superfície regrada.

Não é difícil ver que a curva  $D$  não depende da escolha da curva diretriz  $C$  para a superfície regrada  $f$ . Além disso, os eventuais pontos singulares da superfície regrada  $g(s, u) = D(s) + vw(s)$  dada no Lema 2.2.1 estão sobre a curva de estrição.

Tomaremos agora a curva de estrição como a diretriz da superfície regrada e escreveremos a superfície da seguinte maneira

$$g(t, u) = D(t) + uw(t). \quad (2.18)$$

Com essa escolha, temos que

$$g_t = D' + uw', \quad g_u = w \quad e$$

$$g_t \times g_u = D' \times w + uw' \times w.$$

Como  $\langle w', w \rangle = 0$  e  $\langle w', D' \rangle = 0$ , concluímos que  $D' \times w = \lambda w'$  para alguma função  $\lambda = \lambda(t)$ . Assim,

$$|g_t \times g_u|^2 = |\lambda w' + uw' \times w|^2 = \lambda^2 |w'|^2 + u^2 |w'|^2$$

e, portanto,

$$|g_t \times g_u|^2 = (\lambda^2 + u^2) |w'|^2.$$

Segue-se que os eventuais pontos singulares da superfície regrada dada em (2.2.1) encontram-se ao longo da curva de estrição  $u = 0$ , e eles ocorrem se, e somente se,  $\lambda(t) = 0$ . Observe também que

$$\lambda = \frac{(D', w, w')}{|w'|^2},$$

em que,  $(D', w, w')$  é uma abreviação para  $\langle D' \times w, w' \rangle$ .

Vamos agora calcular a curvatura Gaussiana da superfície (2.2.1) em seus pontos regulares. Como

$$\overline{g_{tt}} = D'' + uw''(t), \quad \overline{g_{tu}} = w', \quad \overline{g_{uu}} = 0,$$

temos, para os coeficientes da segunda forma fundamental

$$g = 0, \quad f = \frac{(g_t, g_u, g_{tu})}{|g_t \times g_u|} = \frac{(D', w, w')}{|g_t \times g_u|},$$

em que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{\lambda^2 |w'|^4}{(\lambda^2 + u^2)^2 |w'|^4} = -\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + u^2)^2}.$$

Isso mostra que, em pontos regulares, a curvatura Gaussiana  $K$  de uma superfície regrada satisfaz  $K \leq 0$ , e é zero apenas ao longo das geratrizes que intersectam a curva de estrição em um ponto singular.

**Definição 2.2.4.** A função

$$\lambda(s) = \frac{\langle D'(s) \times w(s), w'(s) \rangle}{|w'(s)|^2}$$

é chamada de **o parâmetro de distribuição** da superfície regradada  $g(s, v)$ .

## 2.2.2 Superfícies Desenvolvíveis

As superfícies desenvolvíveis compõem uma classe especial de superfícies regradadas. Neste trabalho elas serão importantes na próxima seção e no Capítulo 3. Nesse sentido, apresentaremos algumas definições e resultados sobre tais superfícies.

**Definição 2.2.5.** Uma superfície regradada do tipo  $S(t, u) = C(t) + uw(t)$ ,  $t \in I$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , gerada pela família  $\{C(t), w(t)\}$  com  $|w(t)| = 1$ , recebe o nome de **superfície desenvolvível** se  $(w, w', C') \equiv 0$ .

É importante destacar que  $(w, w', C')$  é uma abreviação para  $\langle w \times w', C' \rangle$ . A fim de encontrar uma interpretação geométrica para a condição  $(w, w', C')$ , calculemos a curvatura Gaussiana  $K$  da superfície regradada desenvolvível  $S(t, u) = C(t) + uw(t)$ . Depois de alguns cálculos simples obtemos que:

$$g = 0 \quad e \quad f = \frac{(w, w', C')}{S_t \times S_u} = 0,$$

e assim

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \equiv 0.$$

Temos, portanto, que em pontos regulares a curvatura Gaussiana de uma superfície desenvolvível é identicamente nula.

Um caso particular de superfície desenvolvível e, portanto, de superfície regradada, é a superfície tangente.

**Definição 2.2.6.** Uma **superfície tangente** é uma superfície regradada da forma

$$S(t, u) = C(t) + uC'(t).$$

**Observação 2.2.1.** Podemos distinguir três casos, sem exaurir as possibilidades, de superfícies desenvolvíveis  $X(t, v) = C(t) + vw(t)$ :

(1) Se  $w(t) \times w'(t) \equiv 0$ , isto implica que  $w'(t) \equiv 0$ . Dessa forma,  $w(t)$  é constante e a superfície desenvolvível é um **cilindro** sobre a curva obtida interceptando o cilindro com um plano normal a  $w(t)$ .

(2) Se  $w(t) \times w'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ , então  $w'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ . Desse modo, a superfície é não-cilíndrica. Assim, verificando a curva de estrição  $D(s)$  obtemos que o parâmetro de distribuição é tal que

$$\lambda = \frac{(D', w, w')}{|w'|^2} = 0. \quad (2.19)$$

(2.1) Se  $D'(s) \neq 0$  para todo  $t \in I$ , segue de (2.19) e do fato de que  $\langle D', w' \rangle \equiv 0$  que  $w$  é paralelo a  $D'$ . Logo, a superfície regrada é a superfície tangente de  $D$ .

(2.2) Se  $D'(s) = 0$  para todo  $t \in I$ , então a curva de estrição é um ponto e a superfície regrada é um **cone** tendo esse ponto como vértice.

## 2.3 Construção de Superfícies Desenvolvíveis a Partir de uma Linha de Curvatura

Nas seções anteriores vimos alguns conceitos sobre linhas de curvatura e superfícies regradas, em especial, as superfícies desenvolvíveis. Nesta seção exibiremos uma maneira de construir superfícies desenvolvíveis e que contenham uma dada curva como linha de curvatura. O artigo base desta seção é [13]. Consideraremos em toda esta seção  $C$  como sendo uma curva parametrizada diferenciável. Por abuso de linguagem, denotaremos  $C(t)$  como sendo uma parametrização da curva  $C$ . Para iniciar nossos estudos, vejamos a seguinte proposição.

**Proposição 2.3.1.** *Seja  $C$  uma curva contida em uma superfície  $S$ . Considere a superfície dada por  $S_1(t, u) = C(t) + uN(t)$ , em que  $N$  é o normal da superfície  $S$  ao longo de  $C(t)$ . Então,  $C$  é linha de curvatura de  $S$  se, e somente se,  $S_1$  é uma superfície desenvolvível.*

**Demonstração:**

Seja  $C$  uma linha de curvatura de  $S$ . Segue da Proposição 2.1.5 que  $N'(t) = \lambda(t)C'(t)$ , em que  $\lambda$  é uma função diferenciável de  $t$ . Logo,  $(N(t), N'(t), C'(t)) = 0$ , ou seja, a superfície regradada é desenvolvível de acordo com a Definição 2.2.5.

Por outro lado, se a superfície gerada pela família  $\{C(t), N(t)\}$  é desenvolvível, então pela Definição 2.2.5 segue que  $(N(t), N'(t), C'(t)) = 0$  e, como  $\langle C'(t), N(t) \rangle = 0$  e  $\langle N'(t), N(t) \rangle = 0$ , temos que  $C'$  é paralelo a  $N'$ . Novamente pela Proposição 2.1.5 obtemos que  $C$  é linha de curvatura de  $S$ . ■

A partir de agora, salvo casos especiais, a curva  $C$  nesta seção é regular, suave e parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in I$ .

**Definição 2.3.1.** *Seja  $C$  uma curva com parâmetro  $s$ . A **superfície normal** de  $C$  é dada por*

$$Q(s, u) = C(s) + u\tilde{N}(s), \quad (2.20)$$

em que

$$\begin{aligned} \tilde{N}(s) &= \cos(\theta)n(s) + \operatorname{sen}(\theta)b(s), \\ \tilde{v}(s) &= \cos(\theta)b(s) - \operatorname{sen}(\theta)n(s) \end{aligned}$$

no qual  $\theta$  é o ângulo entre  $n$  e  $\tilde{N}$  e os vetores  $n$  e  $b$  pertencem ao triedro de Frenet.

Desse modo,  $\tilde{N}$  e  $\tilde{v}$  são as rotações de  $n$  e  $b$  da curva  $C(s)$  no plano normal. Veja a Figura 2.1.

**Observação 2.3.1.** *Seja  $C \subset S$ . Segue da Proposição 2.3.1 que  $C$  é linha de curvatura de  $S$  se, e somente se, a superfície normal  $Q$  de  $C$  é desenvolvível e  $\tilde{N} = N$ , em que  $N$  é o normal da superfície  $S$ .*

**Lema 2.3.1.** *Considere a superfície  $Q$  dada por  $Q(s, u) = C(s) + u\tilde{N}(s)$  tal como em (2.20). A superfície  $Q$  é desenvolvível se, e somente se,  $\theta'(s) = -\tau(s)$ .*

**Demonstração:**



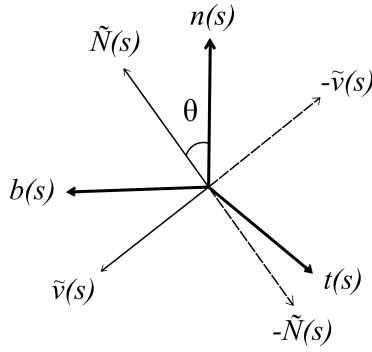


Figura 2.1: O Triedro de Frenet e os vetores  $\tilde{N}(s)$  e  $\tilde{v}(s)$ .

Da Definição 2.2.5,  $Q$  é desenvolvível quando  $(C', N, N') \equiv 0$ . Desta forma,

$$(C', N, N') = 0 \Leftrightarrow \left( t, \cos(\theta)n + \sin(\theta)b, \cos(\theta)n' - \theta' \sin(\theta)n + \sin(\theta)b' + \theta' \cos(\theta)b \right) = 0.$$

Como  $(C', N, N') = \langle C' \times N, N' \rangle$ , segue que

$$\begin{aligned} & \left( t, \cos(\theta)n + \sin(\theta)b, \cos(\theta)n' - \theta' \sin(\theta)n + \sin(\theta)b' + \theta' \cos(\theta)b \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left\langle t \times (\cos(\theta)n + \sin(\theta)b), \cos(\theta)n' - \theta' \sin(\theta)n + \sin(\theta)b' + \theta' \cos(\theta)b \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} & \left\langle \cos(\theta)b - \sin(\theta)n, \cos(\theta)(-kt + \tau b) - \theta' \sin(\theta)n + \sin(\theta)(-\tau b) + \theta' \cos(\theta)b \right\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow & \left\langle \cos(\theta)b - \sin(\theta)n, -k \cos(\theta)t + \theta'(\cos(\theta)b - \sin(\theta)n) + \tau(\cos(\theta)b - \sin(\theta)n) \right\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow & \theta' + \tau = 0 \\ \Leftrightarrow & \theta' = -\tau. \end{aligned}$$

Isto termina a prova do lema. ■

**Observação 2.3.2.** *Segue do Lema 2.3.1 que*

$$\theta = - \int_{s_0}^s \tau(s) ds + \theta_0,$$

de modo que  $s_0$  é um valor inicial do comprimento de arco  $s$ . Em geral temos que  $s_0 = 0$  e, portanto,  $\theta_0 = \theta(0)$ .

Apresentaremos agora um resultado descrito no começo da seção, ou seja, dada uma curva  $C$  queremos encontrar uma superfície desenvolvível que contenha  $C$  como linha de curvatura.

**Teorema 2.3.1.** *Dada uma curva  $C$  existe uma superfície desenvolvível  $S = S(s, u)$ ,  $s \in I$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , contendo  $C$  como linha de curvatura.*

**Demonstração:**

Consideremos  $Q(s, u)$  a superfície normal de  $C$ , dada por

$$Q(s, u) = C(s) + u\tilde{N}(s),$$

em que  $\tilde{N}(s) = \cos\theta(s)n(s) + \sin\theta(s)b(s)$ . Escolha  $\theta(s)$  como na Observação 2.3.2 e defina

$$v(s) = -\tilde{v}(s) = -(t(s) \times N(s)) = N(s) \times t(s).$$

Desse modo, podemos construir a seguinte superfície

$$S(s, u) = C(s) + uv(s).$$

Como  $C = S(s, 0)$  temos que  $C$  está contida na superfície  $S$ . Por outro lado,

$$(S_s \times S_u)|_{u=0} = ((C'(s) + uv'(s)) \times v(s))|_{u=0} = t(s) \times v(s) = N(s).$$

Assim,  $Q(s, u)$  e  $S(s, u)$  possuem o mesmo vetor normal quando restritas à curva  $C(s)$ . Além disso, como  $\theta$  está definido como na Observação 2.3.2, então segue do Lema 2.3.1 que  $Q(s, u)$  é desenvolvível.

De acordo com a Proposição 2.3.1, a superfície  $S(s, u)$  contém a curva  $C$  e  $C$  é uma linha de curvatura de  $S(s, u)$ . Finalmente, basta mostrarmos que a superfície  $S(s, u)$  é

uma superfície desenvolvível. Para isto, verificamos primeiramente que

$$\begin{aligned}
v'(s) &= -\tilde{v}'(s) \\
&= -\left(\cos\theta(s)b'(s) - \theta'(s)\operatorname{sen}\theta(s)b(s) - \operatorname{sen}\theta(s)n'(s) - \theta'(s)\cos\theta(s)n(s)\right) \\
&= \left(-b'(s) + \theta'(s)n(s)\right)\cos\theta(s) + \left(\theta'(s)b(s) + n'(s)\right)\operatorname{sen}\theta(s) \\
&= \left(-b'(s) - \tau(s)n(s)\right)\cos\theta(s) + \left(-\tau(s)b(s) + \tau(s)b(s) - k(s)t(s)\right)\operatorname{sen}\theta(s) \\
&= -k(s)\operatorname{sen}\theta(s)t(s).
\end{aligned}$$

Com isso obtemos que

$$(C'(s), v(s), v'(s)) = (t(s), N(s) \times t(s), -k(s)t(s)\operatorname{sen}(\theta)) \equiv 0.$$

Do Lema 2.3.1 concluímos que  $S$  é desenvolvível. ■

O Teorema 2.3.1 não somente prova a existência de uma superfície desenvolvível contendo uma dada curva  $C$  como linha de curvatura, mas também apresenta uma parametrização explícita da superfície. Convém observar aqui que as superfícies desenvolvíveis não são únicas, já que com a escolha de diferentes ângulos  $\theta_0$  obtemos diferentes superfícies.

A seguir, controlaremos a forma das superfícies desenvolvíveis pelos valores de  $\theta(s)$ . Mais especificamente, os próximos três teoremas nos dão condições suficientes e necessárias para que a superfície desenvolvível

$$S = S(s, u) = C(s) + uv(s) \tag{2.21}$$

seja de um dos três tipos de superfícies comentadas na Observação 2.2.1, ou seja, cilindro, cone ou tangente.

**Teorema 2.3.2.** *A superfície desenvolvível (2.21) é um cilindro se, e somente se,  $\operatorname{sen}\theta(s) = 0$ .*

**Demonstração:**

Pelo item (1) da Observação 2.2.1, a superfície dada em (2.21) é um cilindro se, e somente se,  $v(s) \times v'(s) = 0$ . Segue da prova do Teorema 2.3.1 que  $v'(s) = -k(s) \operatorname{sen}\theta(s)t(s)$ . Logo,

$$\begin{aligned} v(s) \times v'(s) &= \left( -\cos\theta(s)b(s) + \operatorname{sen}\theta(s)n(s) \right) \times \left( -k(s) \operatorname{sen}\theta(s)t(s) \right) \\ &= k(s) \operatorname{sen}\theta(s) \cos\theta(s)(b(s) \times t(s)) + (-k(s) \operatorname{sen}^2\theta(s)(n(s) \times t(s))) \\ &= k(s) \operatorname{sen}\theta(s) \cos\theta(s)n(s) + k(s) \operatorname{sen}^2\theta(s)b(s) \\ &= k(s) \operatorname{sen}\theta(s) \left( \cos\theta(s)n(s) + \operatorname{sen}\theta(s)b(s) \right) \\ &= k(s) \operatorname{sen}\theta(s)N(s). \end{aligned}$$

Como  $N$  é um vetor unitário não nulo e  $k(s) > 0$  para qualquer  $s$ , então

$$v(s) \times v'(s) = 0 \Leftrightarrow k(s) \operatorname{sen}\theta(s)N(s) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta(s) = 0.$$

concluindo a prova. ■

**Observação 2.3.3.** *A condição  $\operatorname{sen}\theta(s) = 0$  encontrada no Teorema 2.3.2 é equivalente a  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ . Contudo, em qualquer caso  $\theta' \equiv 0$  e, portanto,  $\tau \equiv 0$  na Observação 2.3.1. Deste modo,  $C$  é uma curva plana.*

**Teorema 2.3.3.** *A superfície dada em (2.21) é um cone se, e somente se,  $k(s) \operatorname{sen}\theta(s) = k_0 \operatorname{sen}\theta_0$ , na qual  $k_0 = k(0)$  e  $\theta_0 = \theta(0)$ .*

**Demonstração:**

Da Definição 2.2.3 temos que a curva de estrição da superfície dada em (2.21) é

$$D(s) = C(s) - \frac{\langle C'(s), v'(s) \rangle}{\langle v'(s), v'(s) \rangle} v(s).$$

Portanto, segue do item (2) da Observação 2.2.1 que  $S(s, u)$  é um cone se, e somente se,  $D'(s) = 0$ . Da expressão de  $v'$  obtida na prova do Teorema 2.3.1 sabemos que  $v'(s) = -k(s) \operatorname{sen}(\theta(s))t(s)$ . Com isso temos que

$$\frac{\langle C', v' \rangle}{\langle v', v' \rangle} = \frac{\langle C', -k(s) \operatorname{sen}\theta(s)t(s) \rangle}{k^2(s) \operatorname{sen}^2\theta(s)} = -\frac{1}{k(s) \operatorname{sen}\theta(s)}.$$

Desde que  $k(s) > 0$  e supondo  $\text{sen}\theta(s) \neq 0$ , temos que

$$D(s) = C(s) + \frac{1}{k(s) \text{sen}\theta(s)} v(s).$$

Derivando esta igualdade e fazendo alguns cálculos segue que

$$\begin{aligned} D'(s) &= t(s) + \frac{k(s) \text{sen}\theta(s)v'(s) - (k'(s) \text{sen}\theta(s) + k(s)\theta'(s) \cos\theta(s))v(s)}{k^2(s) \text{sen}^2\theta(s)} \\ &= t(s) + \frac{k(s) \text{sen}\theta(s)v'(s)}{k^2(s) \text{sen}^2\theta(s)} - \frac{(k'(s) \text{sen}\theta(s) + k(s)\theta'(s) \cos\theta(s))v(s)}{k^2(s) \text{sen}^2\theta(s)} \\ &= - \frac{(k'(s) \text{sen}\theta(s) + k(s)\theta'(s) \cos\theta(s))v(s)}{k^2(s) \text{sen}^2\theta(s)}. \end{aligned}$$

Logo,  $D'(s) = 0$  se, e somente se,  $k'(s) \text{sen}\theta(s) = -k(s)\theta'(s) \cos\theta(s)$ . Integrando esta última equação obtemos que

$$\int_0^s \frac{k'(t)}{k(t)} dt = - \int_0^s \frac{\theta'(t) \cos\theta(t)}{\text{sen}\theta(t)} dt.$$

Assim,  $\ln(k(s)) - \ln(k(0)) = \ln(\text{sen}\theta_0) - \ln(\text{sen}\theta(s))$ . Segue que  $k(s) \text{sen}\theta(s) = k_0 \text{sen}\theta_0$ , concluindo a prova do teorema. ■

**Teorema 2.3.4.** *A superfície desenvolvível dada em (2.21) é uma superfície tangente se, e somente se,  $k(s) \text{sen}\theta(s) \neq k_0 \text{sen}\theta_0$ , na qual  $k_0 = k(0)$  e  $\theta(0) = \theta_0$ .*

**Demonstração:**

Segue diretamente da prova do Teorema 2.3.3 que  $k(s) \text{sen}(\theta(s)) \neq k_0 \text{sen}(\theta_0)$  se, e somente se,  $D'(s) \neq 0$ . Além disso,

$$(D'(s), v(s), v'(s)) = \left( \frac{k'(s) \text{sen}\theta(s) - k(s)\theta'(s) \cos\theta(s)}{k^2(s) \text{sen}^2\theta(s)} v(s), v(s), v'(s) \right) = 0. \quad (2.22)$$

Por outro lado,

$$\left\langle D'(s), v'(s) \right\rangle = \left\langle \frac{k'(s) \text{sen}\theta(s) - k(s)\theta'(s) \cos\theta(s)}{k^2(s) \text{sen}^2\theta(s)} v(s), -k(s) \text{sen}\theta(s) t(s) \right\rangle = 0. \quad (2.23)$$

Como  $v$  é unitário, segue que  $\langle v, v' \rangle = 0$ . Isto juntamente com (2.22) e (2.23) implicam que  $D'$  é paralelo a  $v$ . Logo, concluímos a partir do item (2) da Observação 2.2.1 que a superfície dada em (2.21) é uma superfície tangente. ■

**Observação 2.3.4.** Quando o parâmetro  $r$  da curva  $C(r)$  é arbitrário e não necessariamente o comprimento de arco  $s$ , podemos construir a correspondente superfície desenvolvível  $S = S(r, u)$  possuindo  $C(r)$  como linha de curvatura como

$$S = S(r, u) = C(r) + uv(r),$$

em que

$$v(r) = \operatorname{sen}\theta(r)n(r) - \operatorname{cos}\theta(r)b(r) \quad e \quad \theta(r) = \int_{r_0}^r \tau dr + \theta_0.$$

Finalizamos esta seção apresentando um exemplo para cada tipo de superfície desenvolvível conforme Teoremas 2.3.2, 2.3.3 e 2.3.4. Iniciamos com uma superfície cilíndrica.

**Exemplo 2.3.1.** Seja  $C = C(r)$  a curva dada por

$$C(r) = (2r, r^2, 2r - 2r^2), \quad -1 < r < 1.$$

É fácil verificar que  $\tau(r) = 0$  e, portanto,  $\theta(r)$  é constante. Agora, iremos escrever os vetores do triedro de Frenet para que, em seguida, consigamos apresentar a superfície de acordo com (2.21). Desse modo, segue que

$$\begin{aligned} t(r) &= \frac{(1, r, 1 - 2r)}{\sqrt{5r^2 - 4r + 2}}, \\ n(r) &= \frac{(-30r + 12, -6r + 6, -r - 2)}{\sqrt{6(2 + 5r^2 - 4r)}}, \\ b(r) &= \left( \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6} \right). \end{aligned}$$

Observemos que a curva  $C$  não está parametrizada pelo comprimento de arco e, desta maneira, a curvatura  $k(r)$  de  $C$  é dada por

$$k(r) = \frac{|C'(r) \times C''(r)|}{|C'(r)|^3}.$$

Deste modo,

$$k(r) = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{(2 + 5r^2 - 4r)^3}}.$$

Segue que  $k_0 = k(0) = \sqrt{3}/4$ . A primeira superfície que construiremos é a cilíndrica. Para tal, devemos ter  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , de acordo com o Teorema 2.3.2. Sem perda de generalidade, utilizaremos  $\theta = \theta_0 = 0$  e, desse modo, obtemos os vetores

$$N(r) = \operatorname{cos}(\theta_0)n(r) + \operatorname{sen}(\theta_0)b(r) = n(r) \quad e$$

$$v(r) = N(r) \times t(r) = -b(r).$$

Portanto, a superfície  $S(r, u)$  como em (2.21) é dada por

$$\begin{aligned} S(r, u) &= C(r) + uv(r) \\ &= C(r) - ub(r) \\ &= \left( 2r - \frac{\sqrt{6}}{6}u, r^2 + \frac{\sqrt{6}}{3}u, 2r - 2r^2 + \frac{\sqrt{6}}{6} \right), \end{aligned}$$

em que  $-1 < r < 1$  e  $-1 < u < 1$ . A Figura 2.2 ilustra  $S$  contendo a curva  $C$  como linha de curvatura.

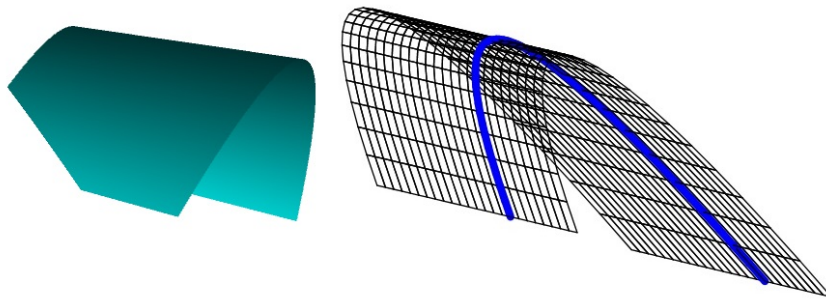


Figura 2.2: Superfície Desenvolvível (Cilindro)  $S(r, u)$  com a curva  $C$  como linha de curvatura.

No próximo exemplo ilustraremos uma superfície desenvolvível (o cone) contendo uma curva  $C$  como linha de curvatura.

**Exemplo 2.3.2.** Considere a curva  $C(r)$  dada por

$$C(r) = (a \cos(r), a \sin(r), 0), \quad a > 0, \quad 0 < r < 2\pi.$$

Novamente depois de alguns cálculos obtemos que

$$t(r) = (-a \sin(r), a \cos(r), 0),$$

$$n(r) = (-\cos(r), -\sin(r), 0),$$

$$b(r) = (0, 0, 1).$$

É fácil ver que  $|t(r)| = a$ ,  $k = 1/a$  e  $\tau = 0$  e, portanto,  $\theta$  é constante. Escolhendo  $a = 2$  e  $\theta = \theta_0 = \pi/4$  segue que

$$N(r) = \cos(\theta_0)n(r) + \sin(\theta_0)b(r) = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(r), -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(r), \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

e desta forma

$$v(r) = N(r) \times t(r) = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(r), -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(r), -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

A superfície desenvolvível  $S(r, u)$  é tal que

$$S(r, u) = \left( 2 \cos(r) - \frac{\sqrt{2}}{2} u \cos(r), \sqrt{2} \sin(r) - \frac{\sqrt{2}}{2} u \sin(r), -\frac{\sqrt{2}}{2} u \right),$$

em que  $0 < r < 2\pi$  e  $-1 < u < 1$ . Estas hipóteses satisfazem o Teorema 2.3.3. Esta superfície pode ser visualizada na Figura 2.3.

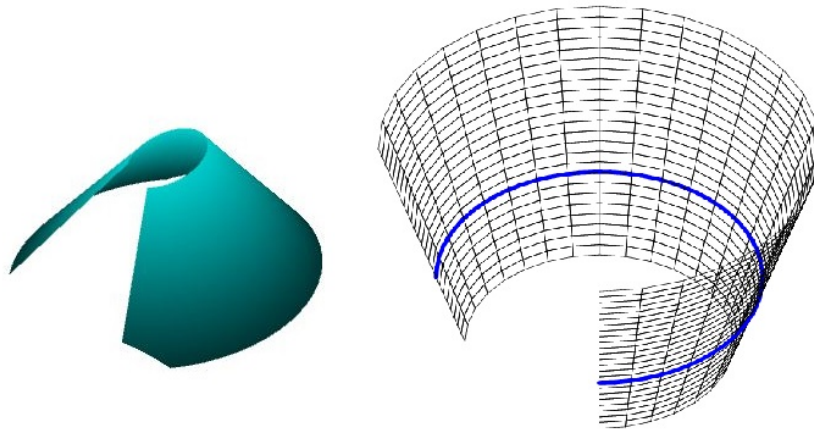


Figura 2.3: Superfície Desenvolvível (Cone)  $S(r, u)$  com a curva  $C$  como linha de curvatura.

Finalmente apresentaremos no próximo exemplo o caso de uma superfície tangente  $S$  que contém uma curva  $C$  como linha de curvatura.

**Exemplo 2.3.3.** Seja  $C(r)$  a curva parametrizada dada por

$$C(r) = (a \cos(r), a \sin(r), br), \quad a > 0, \quad b \neq 0, \quad 0 < r < 2\pi.$$

Após alguns cálculos, é fácil ver que

$$t(r) = \frac{(-a \sin(r), a \cos(r), b)}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$n(r) = (-\cos(r), -\sin(r), 0),$$

$$b(r) = \frac{(b \sin(r), -b \cos(r), a)}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Desta forma,

$$|C'(r)| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad k = \frac{a}{(a^2 + b^2)} \quad e \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Portanto,

$$\theta(r) = -\frac{b}{a^2 + b^2}r + \theta_0.$$

De acordo com o Teorema 2.3.4 a superfície  $S(r, u)$  é uma superfície tangente. Além disso, temos que os vetores  $N(r)$  e  $v(r)$  podem ser escritos, respectivamente, como

$$\begin{aligned} N(r) &= \cos(\theta)n(r) + \text{sen}(\theta)b(r) \\ &= \left( -\cos(\theta)\cos(r) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\text{sen}(\theta)\text{sen}(r), -\cos(\theta)\text{sen}(r) \right. \\ &\quad \left. - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\text{sen}(\theta)\cos(r), \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\text{sen}(\theta) \right) \quad e \\ v(r) &= N(r) \times t(r) \\ &= \left( -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos(\theta)\text{sen}(r) - \text{sen}(\theta)\cos(r), -\text{sen}(\theta)\text{sen}(r) \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos(\theta)\cos(r), -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos(\theta) \right). \end{aligned}$$

Se  $\theta_0 = \pi/3$ , temos que  $\theta(r) = (-b/(\sqrt{a^2 + b^2}))r + \pi/3$ . Escolhendo  $a = 2, b = 1$  obtemos que a superfície é dada por:

$$\begin{aligned} S(r, u) &= C(r) + uv(r) \\ &= \left( 2\cos(r) + u \left( -\frac{\sqrt{5}}{5}\text{sen}(r)\text{sen}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}r + \frac{\pi}{6}\right) - \text{sen}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}r + \frac{\pi}{3}\right)\cos(r) \right), \right. \\ &\quad \left. 2\text{sen}(r) + u \left( -\text{sen}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}r + \frac{\pi}{3}\right)\text{sen}(r) + \frac{\sqrt{5}}{5}\cos(r)\text{sen}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}r + \frac{\pi}{6}\right) \right), \right. \\ &\quad \left. r - \frac{2\sqrt{5}}{5}u\text{sen}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}r + \frac{\pi}{6}\right) \right), \end{aligned}$$

em que  $0 < r < 2\pi$  e  $-1 < u < 1$ . Tal superfície pode ser visualizada na Figura 2.4.

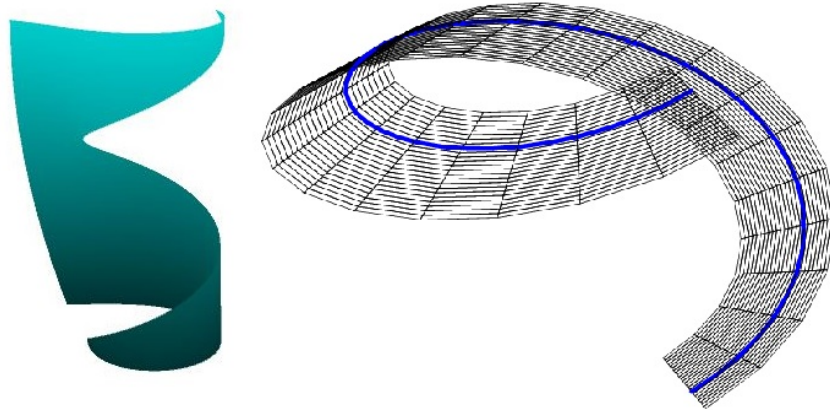


Figura 2.4: Superfície Desenvolvível (Tangente)  $S(r, u)$  com a curva  $C$  como linha de curvatura.

# Capítulo 3

## Torção Total de Linhas de Curvatura Fechadas

Neste capítulo discorreremos sobre alguns resultados clássicos acerca de torção total de curvas fechadas, bem como algumas generalizações que englobam linhas de curvatura. Os resultados apresentados na seção 2.3 do Capítulo 2 serão importantes para que possamos compreender o que está sendo exibido. As principais referências para este capítulo são os artigos [16] e [20].

### 3.1 O Conceito de Torção Total e o Ovaloide

Iniciaremos esta seção com a definição de torção total de uma curva fechada em  $\mathbb{R}^3$ . Posteriormente, apresentaremos um resultado sobre linhas de curvatura fechadas no ovaloide.

**Definição 3.1.1.** *Seja  $C : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular fechada em  $\mathbb{R}^3$ . A **torção total** da curva  $C$  é dada por*

$$T = \int_0^L \tau(s) ds, \quad (3.1)$$

na qual  $s$  e  $\tau$  são o comprimento do arco e a torção de  $C$ , respectivamente.

É importante pontuar que Blaschke [1] propôs 16 problemas sobre a geometria diferencial de ovaloides e o primeiro deles é o seguinte:

**Problema 3.1.1.** *O que podemos dizer sobre as linhas de curvatura em um ovaloide?*

O Teorema 3.1.1 que veremos nesta seção fornece uma resposta parcial ao Problema 3.1.1.

**Observação 3.1.1.** *É importante destacar que neste capítulo manteremos a notação utilizada no Capítulo 2, isto é,  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $n$  e  $N$ , que são os vetores normais da curva dada  $C$  e de uma superfície regular  $S$ , respectivamente. Além disso, utilizaremos os vetores  $v$  e  $N$  do triedro de Darboux, assim como definido na seção 2.1. Finalmente, a curva  $C$  estará sempre parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ .*

A seguir apresentamos dois lemas que serão muito utilizados no decorrer do trabalho.

**Lema 3.1.1.** *Seja  $C$  uma curva regular em uma superfície  $S$ . A torção geodésica  $\tau_g$  de  $C$  satisfaz a seguinte equação*

$$\tau_g(s) = \langle v'(s), N(s) \rangle = \tau(s) + \theta'(s). \quad (3.2)$$

**Demonstração:**

Seja  $C \subset S$  uma curva regular. Consideremos o triedro de Darboux  $\{t, v, N\}$  como feito na Seção 2.1. Da Observação 3.1.1 segue que

$$N(s) = \cos \theta(s)n(s) + \operatorname{sen} \theta(s)b(s) \quad (3.3)$$

no qual  $\theta$  é o ângulo entre  $n$  e  $N$ . Com isso, temos que

$$v(s) = N(s) \times t(s) = \operatorname{sen} \theta(s)n(s) - \cos \theta(s)b(s). \quad (3.4)$$

Como  $v'(s) = dv/ds$  e  $\theta'(s) = d\theta/ds$ , podemos utilizar as equações de Darboux (2.16) e obtemos diretamente que

$$\tau_g = \langle v'(s), N(s) \rangle.$$

Em seguida, derivando a expressão dada em (3.4) e utilizando as fórmulas de Frenet (2.3)

obtemos que

$$\begin{aligned}
\tau_g(s) &= \langle v'(s), N(s) \rangle \\
&= \left\langle \cos \theta(s) \theta' n(s) + \operatorname{sen} \theta(s) (-k(s)t(s) + \tau(s)b(s)) + \operatorname{sen} \theta(s) \theta' b(s) \right. \\
&\quad \left. + \cos \theta(s) \tau(s)n(s), \cos \theta(s)n(s) + \operatorname{sen} \theta(s)b(s) \right\rangle \\
&= \cos^2 \theta(s) \theta' + \operatorname{sen}^2 \theta(s) \tau(s) + \operatorname{sen}^2 \theta(s) \theta' + \cos^2 \theta(s) \tau(s) \\
&= (\cos^2 \theta(s) + \operatorname{sen}^2 \theta(s)) \theta'(s) + (\cos^2 \theta(s) + \operatorname{sen}^2 \theta(s)) \tau(s) \\
&= \theta'(s) + \tau(s)
\end{aligned}$$

e temos, portanto,

$$\tau_g(s) = \tau(s) + \theta'(s).$$

Temos assim demonstrado o lema. ■

**Lema 3.1.2.** *Seja  $C$  uma curva regular em uma superfície  $S$ . A curva  $C$  é uma linha de curvatura em  $S$  se, e somente se, a torção geodésica  $\tau_g$  de  $C$  se anula.*

**Demonstração:**

Seja  $C$  uma linha de curvatura em uma superfície  $S$ , então pela Proposição 2.1.5, temos  $N'(s) = -\lambda(s)t(s)$  e, portanto, segue da terceira equação de Darboux que

$$\tau_g(s) = -\langle N'(s), v(s) \rangle = \langle \lambda(s)t(s), v(s) \rangle = 0.$$

Por outro lado, se  $\tau_g = 0$  segue das equações de Darboux (2.16) que  $N'(s) = -k_n t(s)$ . Como  $N'(s)$  é um múltiplo de  $t(s)$ , segue novamente pela Proposição 2.1.5 que  $C$  é uma linha de curvatura em  $S$ . ■

**Definição 3.1.2.** *As superfícies  $S \subset \mathbb{R}^3$  compactas, conexas e com curvatura Gaussiana  $K > 0$  recebem o nome de **ovaloides**.*

Estamos agora prontos para apresentar um dos principais teoremas do artigo [16].

**Teorema 3.1.1.** *A torção total  $T$  de uma linha de curvatura fechada em um ovaloide é zero.*

**Demonstração:**

Sejam  $S$  um ovaloide e  $C : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma linha de curvatura fechada em  $S$ . Além disso, consideremos  $C(s)$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  com  $k(s) \neq 0$ . Como  $C$  é uma linha de curvatura de  $S$ , segue do Lema 3.1.2 que  $\tau_g$  de  $C$  é nula. Com isso, segue do 3.1.1 que  $\tau(s) = -\theta'(s)$ . Desse modo,

$$T = \int_0^L \tau(s) ds = - \int_0^L \theta'(s) ds = \theta(0) - \theta(L), \quad (3.5)$$

em que  $\theta$  é o ângulo entre  $n$  e  $N$ .

Como a curvatura Gaussiana  $K$  é positiva, então as curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  de  $S$  têm o mesmo sinal. Sem perda de generalidade, podemos escolhê-las com sinal negativo, assim o campo de vetores normal  $N(s)$  a  $S$  aponta para fora da superfície. Veja a Figura 3.1.

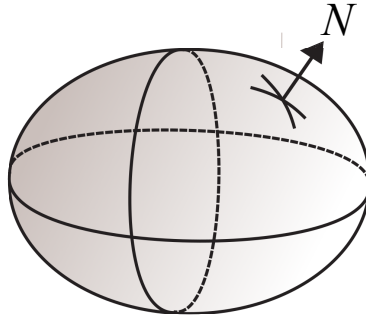


Figura 3.1: O Ovaloide.

Segue da fórmula de Euler (2.7) que

$$k_n = k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi,$$

em que  $\phi$  é o ângulo entre  $e_1$  e  $v$  em  $T_p S$ . Portanto, temos que  $k_n(s) < 0$ . Além disso, pela Definição 2.1.15, temos que  $k_n = k \cos \theta(s)$ . Como  $k(s) > 0$  segue que  $\cos \theta(s) < 0$  e, portanto,

$$\theta(s) \in \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right). \quad (3.6)$$

Em particular, como  $C$  é fechada, temos que

$$C(0) = C(L) \quad e \quad C^{(k)}(0) = C^{(k)}(L),$$

para  $k \in \mathbb{N}$  em que  $C^{(k)} = d^k C / ds^k$ . Consequentemente

$$\begin{aligned} t(0) &= C'(0) = C'(L) = t(L), \\ n(0) &= \frac{C''(0)}{|C''(0)|} = \frac{C''(L)}{|C''(L)|} = n(L). \end{aligned}$$

Disto segue que  $b(0) = b(L)$ . Como  $S$  é orientável, temos que  $N(0) = N(L)$ . Portanto, obtemos que

$$\theta(0) - \theta(L) = 2k\pi. \tag{3.7}$$

Assim, combinando (3.6) e (3.7) concluímos que

$$\theta(0) - \theta(L) = 0,$$

o que implica que  $T = 0$  por (3.5). Logo, a demonstração do teorema está concluída. ■

Sabemos que na esfera todo ponto é ponto umbílico e, de acordo com a Definição 2.1.16, não há problema em entender uma curva formada por pontos umbílicos como uma linha de curvatura. Assim, segue como corolário do Teorema 3.1.1 o resultado clássico devido a Geppert [9]. É importante destacar que no Capítulo 4 temos que uma linha de curvatura pode possuir pontos umbílicos, mas por motivos especiais, estudaremos curvas que não contêm este tipo de ponto.

**Teorema 3.1.2 (Teorema de Geppert).** *A torção total de qualquer curva fechada na esfera unitária  $S^2$  é zero.*

## 3.2 Torção Total de Linhas de Curvatura Fechadas

Nesta seção daremos ênfase no estudo da torção total sobre linhas de curvatura fechadas de algumas superfícies, em especial, sobre o toro. De maneira semelhante ao que fizemos na seção anterior, se considerarmos em vez de um ovaloide uma superfície qualquer em  $\mathbb{R}^3$ , temos o seguinte resultado.

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $S$  uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ . Então, temos que a torção total de uma linha de curvatura fechada em  $S$  é  $k\pi$ , em que  $k$  é um inteiro.*

**Demonstração:** Seja  $S$  uma superfície e  $C$  uma linha de curvatura fechada de  $S$ . Seguindo as mesmas linhas da demonstração do Teorema 3.1.1, obtemos que

$$T = \theta(0) - \theta(L).$$

Além disso, como  $C$  é fechada, obtemos também que  $t(0) = t(L)$ ,  $n(0) = n(L)$  e  $b(0) = b(L)$ .

A partir de agora, como não sabemos se a superfície  $S$  é orientável, temos que  $N(0) = \pm N(L)$ . Desse modo, obtemos que

$$T = \theta(0) - \theta(L) = k\pi,$$

para algum inteiro  $k$ , como queríamos demonstrar. ■

Podemos pensar agora no problema inverso do Teorema 3.2.1, ou seja, dada uma curva  $C$  com torção total  $k\pi$  existe uma superfície  $S$  contendo-a como linha de curvatura?

A resposta é SIM, e em [16] é apresentado o resultado para este problema. Iremos enunciá-lo por uma questão de completude, uma vez que sua prova segue diretamente do Teorema 2.3.1.

**Teorema 3.2.2.** *Se a torção total de uma curva fechada  $C$  em  $\mathbb{R}^3$  é  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , então a curva aparece como uma linha de curvatura em uma superfície.*

Ainda em [16] os autores apresentam um teorema interessante sobre linhas de curvatura no toro.

**Teorema 3.2.3.** *Considere  $C$  uma curva fechada em  $\mathbb{R}^3$ . Se a torção total  $T$  da curva  $C$  é  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , então existe um toro contendo  $C$  como linha de curvatura.*

**Demonstração:** Seja  $C$  uma curva fechada com torção total igual a  $2k\pi$ . Considere a seguinte superfície parametrizada  $S_1$  com parametrização

$$S_1 = S_1(s, u) = C(s) + u(\tilde{N}(s) \times t(s)), \quad (3.8)$$



na qual

$$\tilde{N}(s) = \cos(\theta)n(s) + \text{sen}(\theta)b(s) \quad e \quad \theta(s) = - \int_0^s \tau(s) ds. \quad (3.9)$$

Observe aqui que a superfície  $S_1$  é a superfície  $S$  construída no Teorema 2.3.1 na seção 2.3. Segue que  $\tilde{N}(s) = N(s)$ .

Construa agora a seguinte superfície parametrizada  $S_2$  dada por

$$S_2 = S_2(s, u) = C(s) + \delta \left( N(s) + \cos(u)(N(s) \times t(s)) + \text{sen}(u)N(s) \right), \quad (3.10)$$

em que  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $0 \leq s \leq L$  e  $\delta$  é uma constante. Explicitamente, temos que  $S_2$  é dada por

$$\begin{aligned} S_2(s, u) &= C(s) + \delta \left( N(s) + \cos(u)(N(s) \times t(s)) + \text{sen}(u)N(s) \right) \\ &= C(s) + \delta \left( \cos(\theta(s))n(s) + \text{sen}(\theta(s))b(s) + \cos(u)(\text{sen}(\theta(s))n(s) \right. \\ &\quad \left. - \cos(\theta(s))b(s)) + \text{sen}(u)(\cos(\theta(s))n(s) + \text{sen}(\theta(s))b(s)) \right). \end{aligned}$$

Por hipótese, a torção total de  $C$  é  $T = 2k\pi$  e, desse modo, segue de (3.9) que

$$\theta(0) = - \int_0^0 \tau(s) ds = 0 \quad e \quad \theta(L) = - \int_0^L \tau(s) ds = -2k\pi. \quad (3.11)$$

De (3.9) e (3.11) obtemos que  $S_2(0, u) = S_2(L, u)$ . De fato,

$$\begin{aligned} S_2(0, u) &= C(0) + \delta \left( N(0) + \cos(u)(N(0) \times t(0)) + \text{sen}(u)N(0) \right) \\ &= C(0) + \delta \left( \cos(0)n(0) + \text{sen}(0)b(0) + \cos(u)(\text{sen}(0)n(0) \right. \\ &\quad \left. - \cos(0)b(0)) + \text{sen}(u)(\cos(0)n(0) + \text{sen}(0)b(0)) \right) \\ &= C(0) + \delta \left( n(0) - \cos(u)b(0) + \text{sen}(u)n(0) \right). \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos para  $S_2(L, u)$  que

$$\begin{aligned} S_2(L, u) &= C(L) + \delta \left( N(L) + \cos(u)(N(L) \times t(L)) + \text{sen}(u)N(L) \right) \\ &= C(L) + \delta \left( \cos(-2k\pi)n(L) + \text{sen}(-2k\pi)b(L) + \cos(u)(\text{sen}(-2k\pi)n(L) \right. \\ &\quad \left. - \cos(-2k\pi)b(L)) + \text{sen}(u)(\cos(-2k\pi)n(L) + \text{sen}(-2k\pi)b(L)) \right) \\ &= C(L) + \delta \left( n(L) - \cos(u)b(L) + \text{sen}(u)n(L) \right). \end{aligned}$$

Sabemos que  $C(s)$  é fechada e, por conseguinte,  $C(0) = C(L)$ ,  $n(0) = n(L)$  e  $b(0) = b(L)$ . Logo, temos que  $S_2(0, u) = S_2(L, u)$ . Desta forma, temos construído um tubo de raio  $\delta$ . Agora, é fácil ver que  $S_2$  é homeomorfo a um toro se  $S_2$  é uma superfície regular.

A fim de facilitar a leitura usaremos a notação

$$P(s, u) = N(s) + \cos(u)(N(s) \times t(s)) + \sin(u)N(s). \quad (3.12)$$

Vamos agora mostrar explicitamente que  $S_2$  é uma superfície regular. As derivadas parciais de  $S_2$  são dadas por

$$S_{2_s}(s, u) = t(s) + \delta P_s(s, u),$$

$$S_{2_u}(s, u) = \delta P_u(s, u).$$

Segue que o produto vetorial de  $S_{2_s}$  por  $S_{2_u}$  é dado por

$$(S_{2_s} \times S_{2_u})(s, u) = \delta t(s) \times P_u(s, u) + \delta^2 \left( P_s(s, u) \times P_u(s, u) \right) = \delta t(s) \times P_u(s, u) + \delta^2 A(s, u),$$

em que

$$A(s, u) = P_s(s, u) \times P_u(s, u). \quad (3.13)$$

Desse modo, segue que

$$\begin{aligned} |(S_{2_s} \times S_{2_u})(s, u)|^2 &= \delta^2 + 2\delta^3(t(s) \times P_u(s, u))A(s, u) + \delta^4 A^2(s, u), \\ &= \delta^2 \left( 1 + 2\delta(t(s) \times P_u(s, u))A(s, u) + \delta^2 A^2(s, u) \right). \end{aligned}$$

Segue das definições de  $P(s, u)$  e  $A(s, u)$  dadas em (3.12) e (3.13), respectivamente, que estas funções são limitadas, visto que dependem somente dos vetores do triedro de Frenet, do triedro de Darboux e das funções trigonométricas  $\sin(u)$  e  $\cos(u)$ . Além disso, como  $C$  é uma curva fechada, existe um  $\delta > 0$  pequeno tal que

$$|(S_{2_s} \times S_{2_u})(s, u)|^2 > \frac{1}{2}\delta^2 > 0,$$

mostrando assim que  $S_2$  é uma superfície regular. Ainda, segue da Definição 2.1.14 que  $S_2$  uma superfície orientada. É fácil ver agora que  $C$  está sobre a superfície  $S_2$  com  $u = 3\pi/2$ , ou seja,

$$S_2\left(s, \frac{3\pi}{2}\right) = C(s).$$

Para finalizar a prova precisamos mostrar que  $C$  é uma linha de curvatura em  $S_2$ . Como  $C$  é uma curva em  $S_2$  para  $u = 3\pi/2$ , temos que

$$\frac{1}{\delta} (S_{2_s} \times S_{2_u})|_{u=(3\pi/2)} = \frac{1}{\delta} t(s) \times \left( \delta N(s) \times t(s) \right) = N(s),$$

o que implica que  $N(s)$  é o vetor normal de  $S_2$  ao longo de  $C(s)$ . Como já sabemos que  $N(s)$  é o vetor normal de  $S_1$  ao longo de  $C(s)$ , segue que  $S_1$  e  $S_2$  possuem ângulo constante ao longo de  $C(s)$ . De acordo com o Teorema 2.1.1 (Joachimsthal),  $C$  deve ser linha de curvatura em  $S_2$ , uma vez que o é em  $S_1$ . Logo, a prova está terminada. ■

A fim de ilustrarmos o Teorema 3.2.3, apresentamos a seguir um exemplo de um toro gerado a partir de uma curva fechada, assim como está feito na prova do Teorema 3.2.3.

**Exemplo 3.2.1.** *Seja*

$$C(t) = (\cos(t), \sin(t), \sin^2(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

*uma curva fechada. Não é difícil verificar que*

$$\tau(t) = \frac{6 \sin(t) \cos(t)}{12 \cos^4(t) - 12 \cos^2(t) + 5}.$$

*Após alguns cálculos, obtemos que a torção total  $T$  é zero. Conseguimos construir, com o programa computacional Maple [18], uma superfície  $S = S(t, u)$  com  $\delta = 1/3$  análoga a que está representada em (3.10), porém como sua expressão é muito grande, optamos por não apresentá-la aqui. O toro que está representado na Figura 3.2.*

### 3.3 Algumas Generalizações sobre Torção Total

Existem na literatura algumas generalizações do Corolário 3.1.2. Em particular, em [17] Segre obteve que, para curvas esféricas com curvatura  $k \neq 0$  em todo ponto, a seguinte afirmação é verdadeira

$$\int_C \frac{\tau}{k} ds = 0.$$

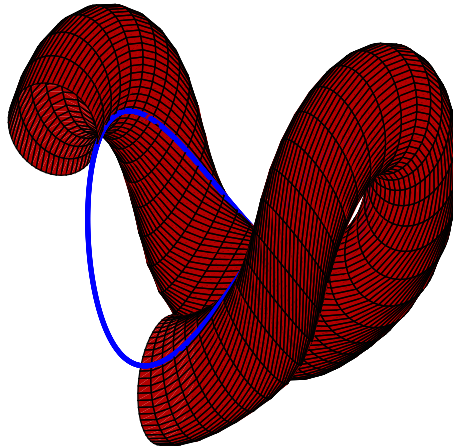


Figura 3.2: O Toro.

Além disso, se a fórmula anterior é verdadeira para qualquer curva fechada em uma superfície, então a superfície é parte de uma esfera ou plano. Ademais, Wang [19] demonstrou que, para qualquer curva esférica fechada  $C$  vale que, para todo  $m \in \mathbb{Z}$

$$\int_C k^m \tau ds = 0.$$

Mais recentemente, o conceito de torção total (3.1) foi ampliado por Pansonato-Costa [15] para curvas fechadas em variedades Riemannianas tridimensionais com curvatura constante. Nesta seção estudaremos alguns resultados apresentados por S. Yin e D. Zheng [20]. Vejamos alguns desses resultados.

**Lema 3.3.1.** *Sejam  $C$  uma linha de curvatura fechada, parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , em uma superfície regular orientada  $S$  e  $f$  uma função contínua de período  $2\pi$  tal que*

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 2k\pi,$$

em que  $k \in \mathbb{Z}$ . Então, temos que

$$\int_0^L f(\theta) \tau ds = 2k\pi,$$

em que  $\tau$  é a torção de  $C$ ,  $\theta$  é o ângulo entre  $N$  e  $n$  e  $k$  é um inteiro positivo.

**Demonstração:** Sendo  $C$  uma linha de curvatura, temos pelo Lema 3.1.2 que  $\tau_g = 0$  e do Lema 3.1.1 obtemos que  $\tau = -\theta'$ . Portanto, para uma função  $f$  com as hipóteses apresentadas no enunciado do lema, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^L f(\theta)\tau ds &= \int_0^L f(\theta)\left(\frac{-d\theta}{ds}\right) ds \\ &= - \int_{\theta(0)}^{\theta(L)} f(\theta) d\theta \\ &= - \int_{\theta(0)}^{\theta(0)+2m\pi} f(\theta) d\theta \\ &= - \int_0^{2m\pi} f(\theta) d\theta = 2m\pi. \end{aligned}$$

A igualdade é verificada, uma vez que  $C(0) = C(L)$  e  $\theta(L) = \theta(0) + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$ . Isto completa a prova. ■

Vejamos agora o resultado principal desta seção.

**Teorema 3.3.1.** *Seja  $C$  uma curva fechada parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  em uma esfera  $\mathbb{S}^2$  e  $f$  uma função contínua em  $\mathbb{R}$ . Então segue que*

$$\int_0^L f(k)\tau ds = 0,$$

na qual  $k$  e  $\tau$  são a curvatura e torção da curva  $C$ , respectivamente.

**Demonstração:**

Tendo em vista que  $\theta(s)$  é o ângulo entre  $N(s)$  e  $n(s)$  e  $C$  é uma curva em  $\mathbb{S}^2$ , temos que

$$C(s) = (R \cos \theta(s))n(s) + (R \operatorname{sen} \theta(s))b(s),$$

em que  $R$  é o raio da esfera  $\mathbb{S}^2$ . Ao derivarmos essa igualdade em relação a  $s$  e usando as fórmulas de Frenet (2.3) temos que

$$\begin{aligned} C'(s) = t(s) &= (-Rk(s) \cos \theta(s))t(s) - (R \operatorname{sen} \theta(s))\left(\frac{d\theta}{ds} + \tau(s)\right)n(s) \\ &\quad + (R \cos \theta(s))\left(\frac{d\theta}{ds} + \tau(s)\right)b(s). \end{aligned}$$

Como o conjunto  $\{t, n, b\}$  é linearmente independente, segue em particular que

$$1 + Rk(s) \cos \theta(s) = 0.$$

Lembremos que toda curva na esfera é linha de curvatura. Deste modo, segue do Lema 3.1.2 que  $\tau = -d\theta/ds$ . Além disso, temos por hipótese que  $C$  é uma curva fechada esférica, logo  $C(0) = C(L)$ ,  $\theta(0) = \theta(L)$ . Assim, pelo Teorema 3.3.1 e pela orientabilidade da esfera obtemos que

$$\int_C f(k(s))\tau(s)ds = \int_C f\left(\frac{-1}{R \cos \theta(s)}\right)\tau ds = - \int_{\theta(0)}^{\theta(L)} f\left(\frac{-1}{R \cos \theta(s)}\right) d\theta = 0.$$

Concluindo assim a prova do teorema. ■

# Capítulo 4

## Ciclos Principais Hiperbólicos

Neste capítulo daremos ênfase no comportamento das linhas de curvatura na vizinhança dos ciclos principais (linhas de curvatura fechadas). Ressaltamos que, neste capítulo, uma linha de curvatura pode conter pontos umbílicos, assim como os trabalhos [6], [10] e [11] o fazem. Para tal, apresentaremos os conceitos de ciclo principal hiperbólico e o expoente de hiperbolicidade, conceitos estes introduzidos pelos trabalhos pioneiros de C. Gutierrez e J. Sotomayor [10] e [11]. O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

*Dada uma curva fechada não circular em  $\mathbb{R}^3$  cuja torção total é um inteiro múltiplo de  $2\pi$ , podemos construir uma superfície suave local que contenha esta curva como ciclo principal hiperbólico.*

Este resultado pode ser encontrado em [6]. Nesta dissertação, este resultado é o Teorema 4.3.2.

### 4.1 Ciclos Principais

Consideraremos nesta seção  $S$  como uma superfície regular orientada. Agora, seja  $\mathcal{U}_S$  o **conjunto dos pontos umbílicos de  $S$** . Assim, as linhas de curvatura em  $S \setminus \mathcal{U}_S$  podem ser agrupadas em duas folheações ortogonais unidimensionais que serão denotadas por  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1(S)$  e  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(S)$ . Ao longo da primeira (resp. segunda), a curvatura normal

$k_n$  atinge seu mínimo  $k_1(p)$  (resp. máximo  $k_2(p)$ ). A tripla

$$\mathcal{P}_S = \{\mathcal{F}_1(S), \mathcal{F}_2(S), \mathcal{U}_S\}$$

é chamada de **configuração principal** de  $S$ . Para um estudo sobre a teoria qualitativa de linhas de curvatura principais veja [8].

Consideremos agora os pontos  $P_1, P_2 \in S$  e  $\gamma$  um arco regular de uma linha de curvatura principal mínima unindo  $P_1$  e  $P_2$ , ou seja,  $\gamma \in \mathcal{F}_1$ . Suponhamos que  $\gamma$  está orientada de  $P_1$  para  $P_2$ .

Sejam agora  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{F}_2$ , isto é,  $\Gamma_1(s_1)$  e  $\Gamma_2(s_2)$  são linhas de curvatura principais máximas parametrizadas pelos comprimentos de arco  $s_1$  e  $s_2$ , respectivamente. Assim, temos que  $\Gamma_1 = \Gamma_1(s_1)$  e  $\Gamma_2 = \Gamma_2(s_2)$  tais que  $\Gamma_1(0) = P_1$  e  $\Gamma_2(0) = P_2$ . Ademais, temos a condição de que  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  estão orientadas de modo que

$$e_1(P_1) \times e_2(P_2) = N(P_1),$$

$$e_1(P_2) \times e_2(P_2) = N(P_2),$$

em que  $N$  é uma orientação de  $S$  e  $e_1$  e  $e_2$  são campos de vetores tangentes unitários às linhas de curvatura mínimas e máximas, respectivamente. Veja a Figura 4.1.

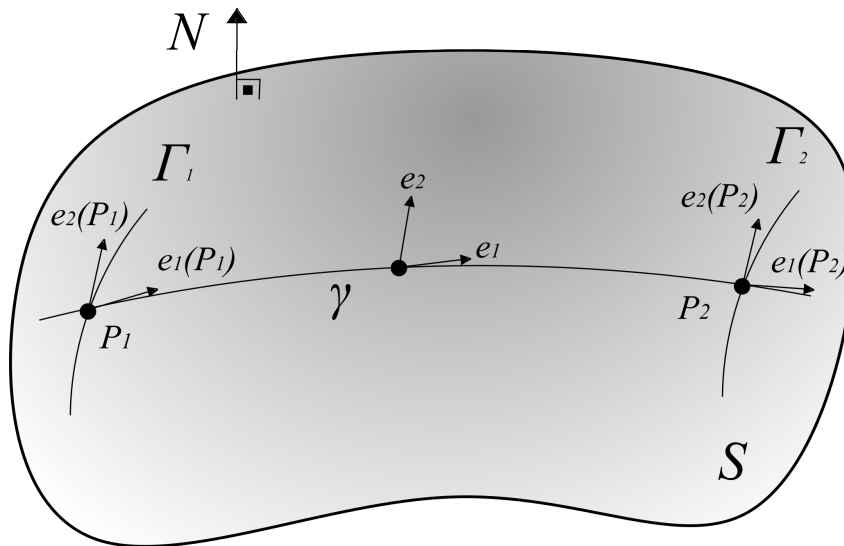


Figura 4.1: Linhas de curvatura de  $S$



As curvas integrais de  $e_2$  e  $e_1$ , denotadas por  $u$  e  $v$ , respectivamente, definem uma carta principal (com parâmetros  $u, v$ ) cujas coordenadas  $u = u_0$  e  $v = v_0$  são linhas de curvatura máxima e mínima, respectivamente. Decorre da Proposição 2.1.8 que, em uma carta principal, os coeficientes  $F$  e  $f$  das formas fundamentais são nulos.

Definimos agora a **aplicação de transição**

$$\begin{aligned}\pi : \Gamma_1 &\rightarrow \Gamma_2 \\ P &\mapsto \pi(P)\end{aligned}$$

na qual  $\pi(P)$  é um ponto obtido pela evolução de  $P \in \Gamma_1$  através das linhas de curvatura de  $\mathcal{F}_1$ , próximo a  $\gamma$ , conforme a Figura 4.2. Notemos que  $\pi(P_1) = P_2$ .

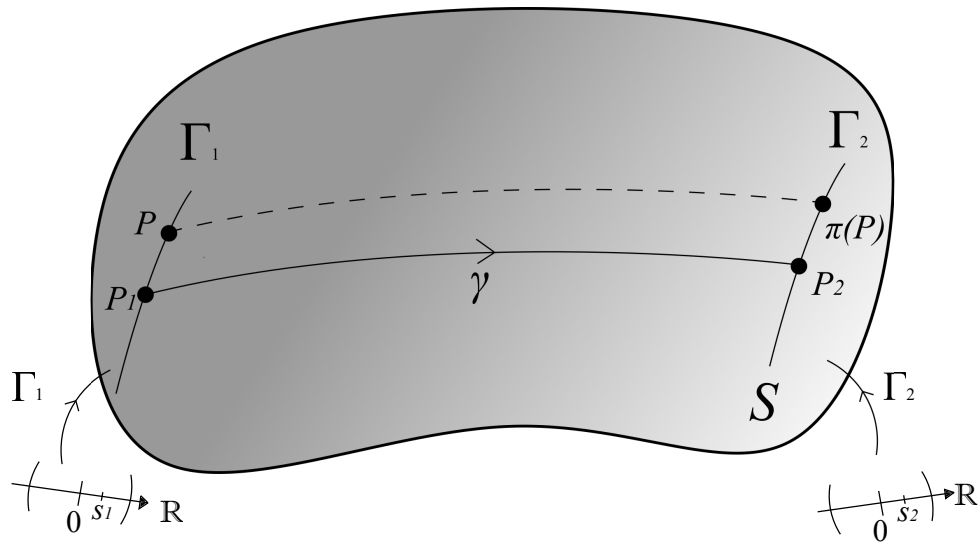


Figura 4.2: Aplicação de Transição  $\pi$ .

De maneira equivalente, podemos entender a aplicação de transição  $\pi$  como sendo:

$$\begin{aligned}\pi : \Gamma_1 &\rightarrow \Gamma_2 \\ s_1 &\mapsto \pi(s_1) = s_2 = \left( \Gamma_2^{-1} \circ \pi \circ \Gamma_1 \right)(s_1).\end{aligned}$$

Observemos que se  $L$  é o comprimento de  $\gamma$ , então a aplicação de transição é dada por

$$\begin{aligned}
s_2 = \pi(s_1) &= \int_0^{s_1} |\Gamma'_2(s)| ds \\
&= \int_0^{s_1} \sqrt{E(L, v)(L')^2 + 2F(L, v)L'v' + G(L, v)(v')^2} ds \\
&= \int_0^{s_1} \sqrt{G(L, v)(v')^2} ds \\
&= \int_0^{s_1} \sqrt{G(L, v)} \frac{dv}{ds} ds \\
&= \int_0^{s_1} \sqrt{G(L, v)} dv.
\end{aligned}$$

Deste modo, segue que a aplicação de transição é dada por

$$s_2 = \pi(s_1) = \int_0^{s_1} \sqrt{G(L, v)} dv. \quad (4.1)$$

O teorema a seguir nos fornece a derivada da aplicação de transição em função das curvaturas  $k_1$  e  $k_2$ .

**Teorema 4.1.1.** *A derivada da aplicação de transição satisfaz a seguinte equação*

$$\pi'(0) = \left. \frac{ds_2}{ds_1} \right|_{s_1=0} = \exp \left( - \int_{\gamma} \frac{dk_2}{k_2 - k_1} \right). \quad (4.2)$$

**Demonstração:**

Seja  $\phi(u, v)$  uma parametrização principal de  $S$  com parâmetros  $u$  e  $v$  em uma vizinhança de  $\gamma : [0, L] \rightarrow S$  tal que

$$\phi(0, 0) = P_1, \quad \phi(L, 0) = P_2,$$

$$\phi(u, 0) = \gamma, \quad u \in [0, L],$$

$$\phi(0, v) = \Gamma_1(v), \quad \phi(L, v) = \Gamma_2(v).$$

Como  $G(u, v) = \langle \phi_v(u, v), \phi_v(u, v) \rangle$  temos que

$$\begin{aligned}
G(0, v) &= \langle \phi_v(0, v), \phi_v(0, v) \rangle \\
&= |\phi_v(0, v)|^2 \\
&= |e_2(q)|^2 = 1,
\end{aligned}$$

para todo  $q \in \Gamma_1$ . Em particular,  $G(0, v) = 1$ .

Sendo  $L$  o comprimento de  $\gamma$ , temos que ao derivarmos a equação dada em (4.1) obtemos

$$\pi'(0) = \frac{ds_2}{ds_1} \Big|_{s_1=0} = \sqrt{G(L, 0)}. \quad (4.3)$$

Notemos primeiramente que

$$\begin{aligned} \exp \left( \int_{u=0}^{u=L} \frac{G_u(u, 0)}{2G(u, 0)} du \right) &= \exp \left( \frac{1}{2} \int_{u=0}^{u=L} \frac{G_u(u, 0)}{G(u, 0)} du \right) \\ &= \exp \left( \frac{1}{2} \left[ \ln G(u, 0) \right]_{u=0}^{u=L} \right) \\ &= \exp \frac{1}{2} \left( \ln G(L, 0) - \ln G(0, 0) \right) \\ &= \exp \left( \ln \sqrt{G(L, 0)} \right) \\ &= \sqrt{G(L, 0)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sqrt{G(L, 0)} = \exp \left( \int_{u=0}^{u=L} \frac{G_u(u, 0)}{2G(u, 0)} du \right). \quad (4.4)$$

Desta forma, segue das equações (4.3) e (4.4) que

$$\pi'(0) = \frac{ds_2}{ds_1} \Big|_{s_1=0} = \exp \left( \int_{u=0}^{u=L} \frac{G_u(u, 0)}{2G(u, 0)} du \right). \quad (4.5)$$

Por outro lado, da Proposição 2.1.5, vem que

$$N_u = -k_1 \phi_u, \quad N_v = -k_2 \phi_v, \quad (4.6)$$

em que  $k_1$  e  $k_2$  são as curvaturas mínima e máxima, respectivamente.

Derivando a primeira equação de (4.6) com respeito a  $v$  e a segunda equação com respeito a  $u$  obtemos as seguintes igualdades

$$N_{uv} = (-k_1)_v \phi_u - k_1 \phi_{uv}, \quad N_{vu} = (-k_2)_u \phi_v - k_2 \phi_{vu}. \quad (4.7)$$

Como  $N_{uv} = N_{vu}$  e  $\phi_{uv} = \phi_{vu}$ , segue de (4.7) que

$$(-k_1)_v \phi_u - k_1 \phi_{uv} = (-k_2)_u \phi_v - k_2 \phi_{vu}.$$

Desse modo, obtemos que

$$\phi_{uv} = \left( \frac{(k_1)_v}{k_2 - k_1} \right) \phi_u - \left( \frac{(k_2)_u}{k_2 - k_1} \right) \phi_v. \quad (4.8)$$

Como  $G = \langle \phi_v, \phi_v \rangle$ , segue que  $G_u = 2\langle \phi_{uv}, \phi_v \rangle$ . Juntando esta informação com (4.8), obtemos que

$$\frac{G_u}{2} = \left\langle \left( \frac{(k_1)_v}{k_2 - k_1} \right) \phi_u - \left( \frac{(k_2)_u}{k_2 - k_1} \right) \phi_v, \phi_v \right\rangle = -\frac{(k_2)_u}{k_2 - k_1} G,$$

isto é,

$$\frac{G_u}{2G} = -\frac{(k_2)_u}{k_2 - k_1}. \quad (4.9)$$

De (4.5) e (4.9) segue que

$$\pi'(0) = \frac{ds_2}{ds_1} \Big|_{s_1=0} = \exp \left( \int_{u=0}^{u=L} \frac{G_u(u, 0)}{2G(u, 0)} du \right) = \exp \left( \int_{u=0}^{u=L} -\frac{(k_2)_u}{k_2 - k_1} du \right),$$

e, portanto,

$$\pi'(0) = \frac{ds_2}{ds_1} \Big|_{s_1=0} = \exp \left( \int_{u=0}^{u=L} -\frac{(k_2)_u}{k_2 - k_1} du \right) = \exp \left( -\int_{u=0}^{u=L} \frac{dk_2}{k_2 - k_1} \right),$$

como queríamos demonstrar. ■

Agora, estamos em condição de definir os ciclos principais hiperbólicos. Vejamos esses conceitos.

**Definição 4.1.1.** *Uma linha de curvatura periódica recebe o nome de **ciclo principal**. Além disso, dizemos que um ciclo principal é **hiperbólico** quando a aplicação de retorno de Poincaré é hiperbólica, ou seja, sua derivada é diferente de 1.*

Seja  $\gamma$  um ciclo principal mínimo orientado de  $S$ . Deste modo, podemos entender a aplicação de retorno de Poincaré como sendo a aplicação de transição em que  $\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$ . Veja a Figura 4.3.

**Definição 4.1.2.** *Definimos o **expoente de hiperbolicidade** de  $\gamma$ ,  $\eta(\gamma)$ , como sendo o logaritmo natural da derivada da aplicação de retorno em 0, isto é,*

$$\eta = \eta(\gamma) = \ln \pi'(0) = \ln \left( \exp \left( -\int_{\gamma} \frac{dk_2}{k_2 - k_1} \right) \right) = -\int_{\gamma} \frac{dk_2}{k_2 - k_1}. \quad (4.10)$$

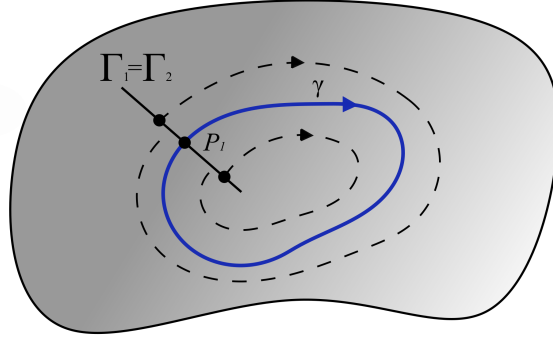


Figura 4.3: Aplicação de retorno de Poincaré.

**Observação 4.1.1.** *Segue das Definições 4.1.1 e 4.1.2 que um ciclo principal  $\gamma$  é hiperbólico se, e somente se,  $\eta(\gamma) \neq 0$ .*

**Proposição 4.1.1.** *Seja  $\gamma$  um ciclo principal mínimo orientado. As seguintes fórmulas são equivalentes:*

$$\eta(\gamma) = - \int_{\gamma} \frac{dk_2}{k_2 - k_1} = - \int_{\gamma} \frac{dk_1}{k_2 - k_1} = - \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{dH}{\sqrt{H^2 - K}}, \quad (4.11)$$

em que  $H = (k_1 + k_2)/2$  e  $K = k_1 k_2$ .

**Demonstração:** Segue diretamente da Definição 4.1.2 que

$$\eta(\gamma) = - \int_{\gamma} \frac{dk_2}{k_2 - k_1}.$$

Assim, a segunda igualdade pode ser encontrada da seguinte forma

$$\begin{aligned} \eta(\gamma) &= - \int_{\gamma} \frac{dk_2}{k_2 - k_1} \\ &= - \int_{\gamma} \frac{d(k_2 - k_1 + k_1)}{k_2 - k_1} \\ &= - \int_{\gamma} \frac{dk_1 + (dk_2 - dk_1)}{k_2 - k_1} \\ &= - \int_{\gamma} \frac{dk_1 + d(k_2 - k_1)}{k_2 - k_1} \\ &= - \int_{\gamma} \frac{dk_1}{k_2 - k_1} - \left[ \ln(k_2 - k_1) \right]_{\gamma} \\ &= - \int_{\gamma} \frac{dk_1}{k_2 - k_1}. \end{aligned}$$

A terceira igualdade decorre do seguinte fato

$$\begin{aligned} 2\eta(\gamma) &= - \int_{\gamma} \frac{dk_2}{k_2 - k_1} + \left( - \int_{\gamma} \frac{dk_1}{k_2 - k_1} \right) \\ &= - \int_{\gamma} \frac{dk_1 + dk_2}{k_2 - k_1}. \end{aligned}$$

Com isso obtemos que

$$\eta(\gamma) = -\frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{dH}{\sqrt{H^2 - K}},$$

em que  $dk_1 + dk_2 = 2dH$  e  $k_2 - k_1 = 2\sqrt{H^2 - K}$ . Temos, portanto, o resultado que queríamos. ■

**Observação 4.1.2.** *Segue da Proposição 4.1.1 que o expoente de hiperbolicidade  $\eta$  não depende da carta escolhida, uma vez que este pode ser escrito em função das curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  ou em função da curvatura média  $H$  e Gaussiana  $K$ . Aqui fica explícito a importância de escolher uma linha de curvatura sem pontos umbílicos para que as relações sobre o expoente de hiperbolicidade estejam bem definidas, uma vez que  $k_1 \neq k_2$  e, portanto, o denominador não se anula. O mesmo se aplica ao Teorema 4.3.1.*

## 4.2 Ciclos Principais Hiperbólicos

Iniciaremos esta seção descrevendo uma parametrização muito adequada para analisar ciclos principais. Ela recebe o nome de **canaleta** e foi introduzida em [11] e também foi utilizada em [6] para estudar uma superfície local suave contendo uma dada curva  $C$  como ciclo principal hiperbólico.

Ainda, como usaremos em vários momentos o conceito de Curva de Frenet, apresentaremos este conceito a seguir.

**Definição 4.2.1.** *Uma curva simples, fechada, suave e regular  $C \subset \mathbb{R}^3$  com curvatura  $k > 0$  é denominada **curva de Frenet**.*

Seja  $C = C(s)$  uma curva de Frenet de comprimento  $L$ . Considere o Triedro de Frenet

$\{t, n, b\}$  ao longo de  $C$ . A superfície parametrizada

$$\begin{aligned} \alpha(s, v) &= C(s) + (\cos(\theta(s))b(s) - \sin(\theta(s))n(s))v \\ &\quad + (\cos(\theta(s))n(s) + \sin(\theta(s))b(s)) \left( \frac{A(s)v^2}{2} + \frac{B(s)v^3}{6} + O(v^4) \right) \\ &= C(s) + v(N \times T)(s) + \left( \frac{A(s)v^2}{2} + \frac{B(s)v^3}{6} + O(v^4) \right) N(s), \end{aligned} \quad (4.12)$$

em que  $C'(s) = t(s) = T(s)$ ,  $\theta(s) = \theta(s + L)$ ,  $A(s) = A(s + L)$ ,  $B(s) = B(s + L)$ , são funções de período  $L$  e suaves com respeito a  $s$  e tal que  $v$  é pequeno. Esta superfície parametrizada é chamada de **superfície canaleta** e pode ser visualizada na Figura 4.4.

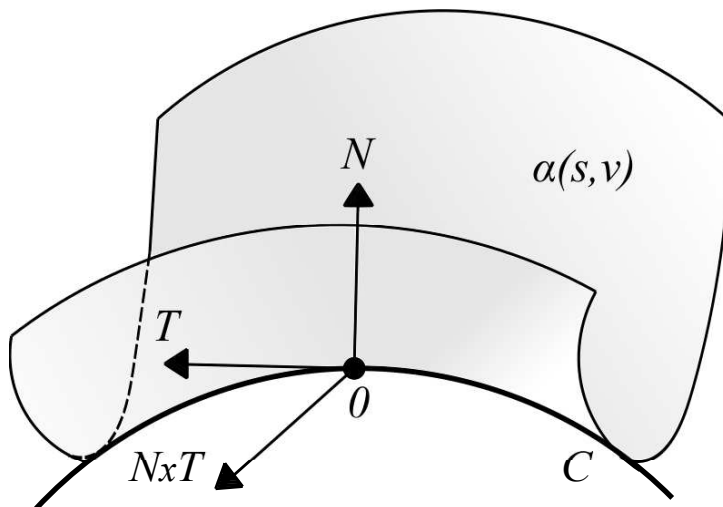


Figura 4.4: Superfície canaleta.

**Proposição 4.2.1.** *A curva  $C$  é a união de linhas de curvatura principais de  $\alpha$  se, e somente se,*

$$\tau(s) + \theta'(s) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \int_0^L \tau(s) ds = 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (4.13)$$

Além disso, para qualquer solução  $\theta(s)$  da equação (4.13) a superfície canaleta é uma superfície regular e orientada em uma vizinhança de  $C$ . O conjunto umbílico de pontos  $\mathcal{U}_\alpha \cap C$  é definido pela equação

$$A(s) - k(s) \cos \theta(s) = 0. \quad (4.14)$$

**Demonstração:**

A primeira parte da prova da proposição é feita de modo análogo ao que foi feito na prova do Lema 4.2.2. Desse modo,  $C$  é uma linha principal (união de linhas principais máximas e mínimas e pontos umbílicos) se, e somente se,  $\tau(s) + \theta'(s) = 0$ .

Agora, para a segunda parte da demonstração, podemos notar que, pela definição da superfície canaleta segue que

$$\alpha_s(s, 0) = t(s) \quad e \quad \alpha_v(s, 0) = \cos \theta(s)b(s) - \operatorname{sen} \theta(s)n(s)$$

são linearmente independentes e então,  $\alpha_s \times \alpha_v$  é um vetor não nulo. Desse modo,  $\alpha$  é localmente uma superfície regular em uma vizinhança de  $C$  e, portanto, segue da Proposição 2.1.2 que  $\alpha(s, v)$  é uma superfície regular.

Como a torção total é um inteiro múltiplo de  $2\pi$  e  $\tau(s) + \theta'(s) = 0$ , segue que para qualquer condição inicial  $\theta(0) = \theta_0$  temos que  $\alpha(s, v)$  define uma superfície orientada que contém  $C$  e sendo ela a união de linhas principais com os pontos umbílicos.

Vamos agora calcular o conjunto de pontos umbílicos da superfície canaleta restrita à curva  $C$ . Supondo  $\tau(s) + \theta'(s) = 0$  podemos listar os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de  $\alpha(s, v)$

$$\begin{aligned} E(s, v) &= 1 - 2k(s) \operatorname{sen} \theta(s)v \\ &\quad + \left( k(s)^2 \operatorname{sen}^2 \theta(s) - A(s)k(s) \cos \theta(s) \right) v^2 + O(v^3), \\ F(s, v) &= \frac{1}{2} A'(s) A(s) v^3 + O(v^4), \\ G(s, v) &= 1 + A(s)^2 v^2 + O(v^3), \\ e(s, v) &= k(s) \cos \theta(s) - k(s) \operatorname{sen} \theta(s) \left( k(s) \cos \theta(s) + A(s) \right) v + O(v^2), \\ f(s, v) &= A'(s)v + O(v^2), \\ g(s, v) &= A(s) + B(s)v + O(v^2). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Segue que os coeficientes da equação diferencial das linhas de curvatura principais são



dadas por:

$$\begin{aligned}
L(s, v) &= (Fg - Gf)(s, v) = -A'(s)v + O(v^2), \\
M(s, v) &= (Eg - Ge)(s, v) = A(s) - k(s) \cos \theta(s) \\
&\quad + \left( B(s) - A(s)k(s) \operatorname{sen} \theta(s) + \operatorname{sen} \theta \cos \theta k^2(s) \right) v + O(v^2), \\
N(s, v) &= (Ef - Fe)(s, v) = A'(s)v + O(v^2).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Os pontos umbílicos ao longo de  $C$  são dados pelas soluções de  $M(s, 0) = A(s) - k(s) \cos \theta(s) = 0$ . Desta forma, o conjunto dos pontos umbílicos é definido pela equação  $A(s) - k(s) \cos \theta(s) = 0$ . Temos assim a prova do teorema. ■

**Observação 4.2.1.** *A partir da superfície canaleta podemos considerar a seguinte família a um parâmetro de superfícies  $\alpha_{\theta_0}$ , parametrizada por:*

$$\begin{aligned}
\alpha_{\theta_0}(s, v) &= C(s) + (\cos \theta_0(s)b(s) - \operatorname{sen} \theta_0(s)n(s))v \\
&\quad + (\cos \theta_0(s)n(s) + \operatorname{sen} \theta_0(s)b(s)) \left( \frac{A(s)v^2}{2} + \frac{B(s)v^3}{6} + O(v^4) \right).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

*Em topologia a estrutura acima é conhecida como **open book**, isto é, é uma família de superfícies folheando uma vizinhança tubular  $V(C) \setminus C$  intersectando-se ao longo de  $C$ . Para mais detalhes, veja [5] e [6]. Segue da Proposição 4.2.1, do teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais e também da dependência suave das condições iniciais que para todo  $\theta_0$  fixado, a curva  $C$  é um ciclo principal de  $\alpha_{\theta_0}$ .*

### 4.3 Ciclos Principais Hiperbólicos: Um Problema Inverso

Dando sequência ao que foi feito na última seção, temos da Observação 4.2.1 e da Proposição 4.2.1 que  $C$  é um ciclo principal de  $\alpha_{\theta}(s, v)$  para todo  $\theta$ . Para resolver o problema principal deste capítulo, precisamos de um valor de  $\theta$  de modo que  $\alpha_{\theta_0}(s, 0)$  não contenha pontos umbílicos e, por conseguinte, que  $C$  seja um ciclo principal hiperbólico. Nesse sentido, exibiremos alguns resultados importantes para que esta situação seja resolvida.

**Teorema 4.3.1.** *Considere a superfície parametrizada  $\alpha_{\theta_0}$  dada em (4.17) tal que  $\mathcal{U}_{\alpha_{\theta_0}} \cap C = \emptyset$ . Então,  $C$  é um ciclo hiperbólico principal de  $\alpha_{\theta_0}$  se, e somente se, o expoente de hiperbolicidade  $\eta$  é tal que*

$$\eta(C) = \int_0^L \frac{A'(s)}{A(s) - k(s) \cos \theta(s)} ds \neq 0. \quad (4.18)$$

**Demonstração:** Como por hipótese a curva  $C$  não possui pontos umbílicos e já sabemos que  $C$  é um ciclo principal, basta calcularmos o expoente de hiperbolicidade de  $C$ . Depois de alguns cálculos obtemos que as curvaturas principais de  $C$  são dadas por:

$$k_1(s) = k(s) \cos \theta(s),$$

$$k_2(s) = A(s).$$

De acordo com a Definição (4.1.1) e das curvaturas encontradas acima, segue que

$$\eta(C) = \int_0^L \frac{dk_2}{k_2 - k_1} ds = \int_0^L \frac{A'(s)}{A(s) - k(s) \cos \theta(s)} ds.$$

Demonstrando assim o teorema. ■

Finalmente estamos em condição de demonstrar o principal resultado deste capítulo.

**Teorema 4.3.2.** *Seja  $C$  uma curva de Frenet de comprimento  $L$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que a torção  $\tau$  não é identicamente nula. Consideremos ainda que*

$$\int_0^L \tau(s) ds = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

*Então, existe uma superfície local suave orientada contendo  $C$  como ciclo principal hiperbólico.*

**Demonstração:**

Considere a superfície canaleta,  $\alpha$ , dada em (4.12). Pela Proposição 4.2.1,  $C$  é um ciclo principal quando

$$\theta'(s) = -\tau(s), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \int_0^L \tau(s) ds = 2m\pi.$$

Tomando  $A(s) = (1 + \cos \theta(s))k(s)$  e aproveitando os cálculos dos coeficientes da equação diferencial das linhas de curvatura principais obtidas na prova da Proposição 4.2.1, obtemos que

$$L(s, 0) = 0, \quad M(s, 0) = k(s) > 0 \quad e \quad N(s, 0) = 0.$$

Assim,  $\mathcal{U}_\alpha \cap C = \emptyset$ . Então,  $C$  é uma linha principal fechada da superfície canaleta  $\alpha$ .

Por outro lado, do Teorema 4.3.1 segue que  $C$  é um ciclo hiperbólico se, e somente se,

$$\eta(C) = \int_0^L \frac{A'(s)}{A(s) - k(s) \cos \theta(s)} ds \neq 0.$$

Usando o valor de  $A(s)$  tomado obtemos que  $C$  é um ciclo hiperbólico se, e somente se,

$$\begin{aligned} \eta = \ln(\pi'(0)) &= \int_0^L \frac{A'(s)}{A(s) - k(s) \cos \theta(s)} ds \\ &= \int_0^L \frac{((1 + \cos \theta(s))k(s))'}{(1 + \cos \theta(s))k(s) - k(s) \cos \theta(s)} ds \\ &= \int_0^L \frac{k'(s) + (\cos \theta(s)k(s))'}{k(s)} ds \\ &= \int_0^L \frac{k(s)'}{k(s)} ds + \int_0^L \frac{(\cos \theta(s)k(s))'}{k(s)} ds \\ &= \left[ \ln(k(s)) \right]_0^L + \int_0^L \frac{(\cos \theta(s)k(s))'}{k(s)} ds \\ &= \int_0^L \frac{(\cos \theta(s)k(s))'}{k(s)} ds \neq 0. \end{aligned}$$

Por hipótese temos que  $k(s) > 0$ ,  $\tau$  não é identicamente nula e ainda  $\theta'(s) = -\tau(s)$ . Logo,

$$\cos \theta(s) = \cos \left( \theta_0 - \int_0^s \tau(s) ds \right)$$

não é constante. Concluimos assim que  $k(s) \cos \theta(s)$  não é constante.

Dividiremos a prova do teorema em duas partes. Primeiramente, se  $\eta(C) \neq 0$  segue diretamente do Teorema 4.3.1 que  $C$  é hiperbólico e assim terminamos a prova do teorema.

Caso contrário, temos que  $k(s) \cos \theta(s)$  não é constante, mas

$$\int_0^L \frac{(\cos \theta(s)k(s))'}{k(s)} ds = 0.$$

Neste caso, consideremos uma deformação de  $\alpha$  dada por

$$\alpha_\epsilon(s, v) = \alpha(s, v) + \epsilon \frac{a(s)}{2} v^2 \left( \cos \theta(s) n(s) + \operatorname{sen} \theta(s) b(s) \right),$$

em que

$$a(s) = \left( k(s) \cos \theta(s) \right)'.$$

Logo,  $C$  ainda é um ciclo principal de  $\alpha_\epsilon$  e as curvaturas principais agora são dadas por:

$$k_1(s, 0, \epsilon) = k(s) \cos \theta(s),$$

$$k_2(s, 0, \epsilon) = A(s) + \epsilon(k(s) \cos \theta(s))' = (1 + \cos \theta(s))k(s) + \epsilon(k(s) \cos \theta(s))'.$$

Desse modo, pela Proposição 4.1.1 e Teorema 4.3.1 segue que

$$\eta(\epsilon) = \ln(\pi'_\epsilon(0)) = - \int_0^L \frac{k'_1(s, 0, \epsilon)}{k_2(s, 0, \epsilon) - k_1(s, 0, \epsilon)} ds = - \int_0^L - \frac{(k(s) \cos \theta(s))'}{k(s) + \epsilon(k(s) \cos \theta(s))'} ds.$$

Derivando a equação anterior com respeito a  $\epsilon$  e aplicando em  $\epsilon = 0$  segue que

$$\eta'(0) = \left. \frac{d}{d\epsilon} (\ln(\pi'_\epsilon(0))) \right|_{\epsilon=0} = \int_0^L \left( \frac{(k(s) \cos \theta(s))'}{k(s)} \right)^2 ds.$$

Para terminarmos a prova do teorema, basta mostrarmos que esta última integral é diferente de zero, ou seja,  $\eta'(0) \neq 0$ . De fato, suponha que

$$\int_0^L \left( \frac{(-k(s) \cos \theta(s))'}{k(s)} \right)^2 ds = 0.$$

Logo, deveríamos ter

$$\left( \frac{(-k(s) \cos \theta(s))'}{k(s)} \right)^2 = 0$$

e, portanto,

$$\frac{(-k(s) \cos \theta(s))'}{k(s)} = 0,$$

que é um absurdo, uma vez que  $(-k(s) \cos \theta(s))'$  não é constante. ■

O próximo corolário é um resultado direto do Teorema 4.3.2.

**Corolário 4.3.1.** *Seja  $C$  uma curva de Frenet, planar ou esférica, com comprimento  $L$  em  $\mathbb{R}^3$ . Então, existe uma superfície local suave orientada contendo  $C$  e a tendo como ciclo principal hiperbólico se, e somente se,  $C$  não é um círculo.*

**Demonstração:**

Consideremos primeiramente o caso em que a curva  $C$  é uma curva planar. Nesta situação, podemos considerar, sem perda de generalidade, que  $C(s) = (x(s), y(s), 0)$  com curvatura  $k \neq 0$ . Considere o triedro de Frenet  $\{t, n, z\}$ ,  $z = (0, 0, 1)$  associado a  $C$ . Qualquer superfície parametrizada  $\alpha$  contendo  $C$  como uma linha de curvatura principal tem o vetor normal igual a

$$N = \cos \theta(s)n(s) + \operatorname{sen} \theta(s)z.$$

Portanto,

$$N' = -k(s) \cos \theta(s)t(s) + \theta'(-\operatorname{sen} \theta(s)n(s) + \cos \theta(s)z).$$

Pela Proposição 2.1.5,  $N' = -\lambda(s)t(s)$  se, e somente se,  $\theta'(s) = 0$ , ou seja,  $\theta(s) = \theta_0 =$  constante. Segue também da Proposição 2.1.5 que uma curvatura principal é igual a  $k_1(s) = k(s) \cos \theta_0$ . Pela Proposição 4.1.1 e o Teorema 4.3.1, as curvaturas principais não podem ser constantes ao longo de um ciclo principal. Como a curvatura de uma circunferência é constante, temos que a curvatura principal somente não é constante caso a curva  $C$  não seja uma circunferência.

A construção da superfície local suave contendo  $C$  como um ciclo hiperbólico principal pode ser feito como na Proposição 4.2.1 e no Teorema 4.3.2. No caso de curvas esféricas, segue do Teorema 4.1.2 que qualquer curva fechada tem torção total igual a zero e assim a prova segue os mesmos passos do caso planar. Isto termina a prova. ■

# Capítulo 5

## Equações Diferenciais Binárias

Neste capítulo apresentamos um estudo sobre Equações Diferenciais Binárias (EDB's). Destacamos especialmente o caso em que a função discriminante possui uma singularidade do tipo Morse na origem. Este estudo será feito usando o método do levantamento do campo de direções a um campo no fibrado projetivo. Veja, por exemplo, [2] para um estudo sobre este tipo de levantamento. Estes resultados serão utilizados no estudo do comportamento das linhas de curvatura de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  próximos de pontos umbílicos. Para um estudo completo desse assunto veja, por exemplo, [7] e [10].

### 5.1 Equações Diferenciais Binárias

Uma **Equação Diferencial Implícita** (EDI) é uma equação da forma

$$F\left(u, v, \frac{dv}{du}\right) = 0,$$

sendo  $F$  uma função suave. Tais equações recebem o nome implícita para distinguí-las das equações diferenciais em que a derivada é dada explicitamente por uma função de  $u$  e  $v$ , isto é

$$\frac{dv}{du} = G(u, v).$$

Uma outra forma de escrever a equação acima é

$$a(u, v)dv + b(u, v)du = 0.$$

Genericamente, esta Equação Diferencial Ordinária (EDO) determina um campo de direções, ou seja, uma direção é relacionada com cada ponto do plano. Uma curva regular é chamada de **solução** da EDO se em cada um de seus pontos ela for tangente a direção dada. Os pontos tais que  $a$  e  $b$  se anulam simultaneamente são chamados de **pontos singulares** da EDO.

Uma EDI é chamada de **Equação Diferencial Binária** (EDB) se existirem no máximo duas direções para cada ponto do plano. Neste trabalho, estudaremos as EDB's da forma

$$a(u, v)dv^2 + 2b(u, v)dvd u + c(u, v)du^2 = 0, \quad (5.1)$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são funções suaves em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Relacionamos com a equação (5.1) a função

$$\delta(u, v) = b^2(u, v) - a(u, v)c(u, v),$$

chamada **função discriminante** da EDB, e o **conjunto discriminante**  $\Delta = \{(u, v) \in U : \delta(u, v) = 0\}$ .

**Proposição 5.1.1.** *A equação (5.1) define um par de direções em cada ponto  $(u, v) \in U$  no qual  $\delta(u, v) > 0$  e não existem direções em pontos em que  $\delta(u, v) < 0$ . Nos pontos de  $\Delta$ , em que as funções  $a$ ,  $b$  e  $c$  não se anulam simultaneamente, a EDB (5.1) define uma única direção.*

**Demonstração:** Seja  $(u_0, v_0) \in U$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $a(u_0, v_0) \neq 0$ . Tome as constantes  $a_0 = a(u_0, v_0)$ ,  $b_0 = b(u_0, v_0)$  e  $c_0 = c(u_0, v_0)$  e construa a seguinte equação do segundo grau na variável  $z$

$$a_0 z^2 + 2b_0 z + c_0 = 0. \quad (5.2)$$

Se  $\delta(u_0, v_0) > 0$ , então  $4b_0^2 - 4a_0c_0 > 0$  e a equação (5.2) possui duas raízes reais distintas, digamos  $z_1$  e  $z_2$ . A direção dada por  $du = 1$  e  $dv = z_1$  é solução da EDB (5.1) em  $(u_0, v_0)$ . Da mesma forma, a direção  $du = 1$  e  $dv = z_2$  é uma outra solução de (5.1) em  $(u_0, v_0)$ . Logo, a EDB define duas direções em  $(u_0, v_0)$ .

Se  $\delta(u_0, v_0) < 0$ , então  $4b_0^2 - 4a_0c_0 < 0$  e a equação (5.2) não possui raízes reais. Suponha que a EDB (5.1) define uma direção em  $(u_0, v_0)$ , com  $du = u_1$  e  $dv = v_1$ . Logo

$u_1 \neq 0$  ou  $v_1 \neq 0$ . Como  $a(u_0, v_0) \neq 0$ , temos que  $u_1 \neq 0$ , pois se  $u_1 = 0$ , então  $v_1$  também se anula, o que não é possível. Então  $z = v_1/u_1$  é solução de (5.2), contrariando o fato de que esta equação não possui soluções reais. Assim, a EDB não define nenhuma direção em  $(u_0, v_0)$ .

Por fim, se  $\delta(u_0, v_0) = 0$ , então  $4b_0^2 - 4a_0c_0 = 0$  e a equação (5.2) possui uma única raiz real, digamos  $z_1$ . A direção dada por  $du = 1$  e  $dv = z_1$  é solução de (5.1) em  $(u_0, v_0)$ , o que garante a existência. Suponha que exista uma outra solução  $du = u_1$  e  $dv = v_1$  para (5.1) em  $(u_0, v_0)$ . Então, como no caso anterior,  $u_1 \neq 0$  e  $z_2 = v_1/u_1$  é solução da equação do segundo grau. Como as direções são distintas, temos que  $z_2 \neq z_1$ , o que contradiz o fato de (5.2) ter uma única solução. Portanto, a EDB define uma única direção em  $(u_0, v_0)$ . ■

O conjunto discriminante juntamente com as direções definidas em cada ponto de  $U$  são chamados de configuração da EDB (5.1). Duas equações diferenciais binárias são ditas **topologicamente equivalentes**, se existir um homeomorfismo local do plano que leva a configuração de uma delas na da outra, e são chamadas de **suavemente equivalentes**, quando a configuração de uma é levada na configuração da outra por meio de uma mudança local de coordenadas e pela multiplicação por uma função suave não nula.

Ao longo deste capítulo consideramos o ponto de interesse como sendo a origem, isto é, iremos analisar o comportamento das soluções de (5.1) próximas do ponto  $(0, 0) \in U$ . Consideraremos também  $U = \mathbb{R}^2$ , para simplificar a notação.

Na próxima seção estudaremos a EDB (5.1) quando as funções  $a$ ,  $b$  e  $c$  se anulam simultaneamente na origem e a função discriminante possui uma singularidade de Morse em  $(0, 0)$ . Este estudo será feito através do levantamento do campo de direções.

## 5.2 Levantamento do Campo de Direções

O método do levantamento do campo de direções consiste em desdobrar a EDB em uma EDO definida num espaço mais complicado. Considere a EDB (5.1) e o espaço  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ , em que  $\mathbb{R}P^1$  representa o espaço projetivo. Tomando uma carta em  $\mathbb{R}P^1$ , dada



por  $r = dv/du$ , consideramos localmente em  $\mathbb{R}^3$  a superfície

$$M = \{(u, v, r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 : P(u, v, r) = 0\}, \quad (5.3)$$

com  $P(u, v, r) = a(u, v)r^2 + 2b(u, v)r + c(u, v)$ . Definimos  $a(u, v) = a_1u + a_2v + O(2)$ ,  $b(u, v) = b_1u + b_2v + O(2)$  e  $c(u, v) = c_1u + c_2v + O(2)$ , sendo  $O(2)$  termos de ordem maior do que ou igual a 2 nas variáveis  $u$  e  $v$ . Com isso, a superfície  $M$  contém o eixo projetivo  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ .

Poderíamos tomar a carta  $s = du/dv$  para  $\mathbb{R}P^1$  e obter a superfície

$$N = \{(u, v, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 : Q(u, v, s) = 0\},$$

sendo  $Q(u, v, s) = a(u, v) + 2b(u, v)s + c(u, v)s^2$ , mas neste caso os resultados seriam análogos.

Juntamente com a superfície  $M$  obtemos uma projeção natural

$$\begin{aligned} \pi : \quad M &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v, r) &\longmapsto (u, v), \end{aligned}$$

a qual será utilizada adiante.

**Proposição 5.2.1.** *Valem as seguintes afirmações.*

- (1) *A superfície  $M$  dada em (5.3) é suave em uma vizinhança de  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$  se, e somente se, a função discriminante  $\delta = b^2 - ac$  tem uma singularidade de Morse na origem.*
- (2) *A projeção  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $(u, v, r) \mapsto (u, v)$  é um difeomorfismo local fora de  $\pi^{-1}(\Delta)$ , em que  $\Delta$  é o conjunto discriminante.*

**Demonstração:**

(1) A superfície  $M$ , em uma vizinhança de  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ , será suave se, e somente se, 0 for um valor regular de  $P$  em uma vizinhança de  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ . A função  $P_r = \partial P / \partial r = 2ar + 2b$  é identicamente nula em  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ . Assim, 0 deixa de ser valor regular de  $P$  em uma vizinhança de  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$  se, e somente se,

$$\frac{\partial P}{\partial u}(0, 0, r) = a_1r^2 + 2b_1r + c_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial v}(0, 0, r) = a_2r^2 + 2b_2r + c_2$$

forem simultaneamente nulas para algum  $r$ . A matriz resultante  $R$  destes dois polinômios é dada por

$$R = \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & 2b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 2b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & 2b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\det(R) = 0 \iff (c_2a_1 - c_1a_2)^2 - 4(b_2a_1 - b_1a_2)(c_2b_1 - c_1b_2) = 0. \quad (5.4)$$

Portanto, existe uma solução  $r$  dos dois polinômios se, e somente se, (5.4) é verdadeira.

Por outro lado, a função discriminante é dada por

$$\delta = b^2 - ac = (b_1u + b_2v + O(2))^2 - (a_1u + a_2v + O(2))(c_1u + c_2v + O(2)).$$

Depois de alguns cálculos, resulta que

$$\delta = (b_1^2 - c_1a_1)u^2 + (2b_1b_2 - c_2a_1 - c_1a_2)uv + (b_2^2 - c_2a_2)v^2 + O(3). \quad (5.5)$$

A função discriminante possui uma singularidade na origem, e esta singularidade será de Morse quando o determinante da matriz Hessiana de  $\delta$  nesse ponto,  $\delta(0,0)$ , é diferente de zero. Este determinante é dado por

$$\det(\delta(0,0)) = 4(b_1^2 - c_1a_1)(b_2^2 - c_2a_2) - (2b_1b_2 - c_2a_1 - c_1a_2)^2.$$

Fazendo algumas simplificações, concluímos que

$$\det(\delta(0,0)) = 4(b_2a_1 - b_1a_2)(c_2b_1 - c_1b_2) - (c_2a_1 - c_1a_2)^2.$$

Portanto, o determinante de  $\delta(0,0)$  é diferente de zero se, e somente se, a equação (5.4) não é válida. Assim, a superfície  $M$  será suave em uma vizinhança de  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$  se, e somente se,  $\delta$  possui uma singularidade de Morse na origem.

**(2)** A projeção  $\pi$  não é um difeomorfismo local nos pontos  $(u, v, r)$  em que  $P_r(u, v, r) = 0$ , isto é, quando  $P = P_r = 0$  ( $P = 0$ , para que o ponto esteja na superfície  $M$ ), isto quer

dizer que o plano tangente à superfície  $M$  é vertical. Calculando o resultante de  $P$  e  $P_r$ , vemos que  $P = P_r = 0$  se, e somente se,  $b^2 - ac = 0$ , que é precisamente  $\pi^{-1}(\Delta)$ . ■

Assumindo que a superfície  $M$  é suave, podemos fazer a seguinte construção. Em cada ponto  $(u, v, r) \in M$  tomamos uma direção tangente a  $M$  e cuja projeção esteja sobre a reta que passa por  $(u, v)$  com direção  $r$ . De fato, seja  $r$  uma das direções definidas por (5.1) em  $(u, v)$ . O plano que é paralelo ao eixo  $r$  e contém a reta que passa por  $(u, v)$  com direção  $r$  é chamado **plano de contato**. O plano tangente a  $M$  em  $(u, v, r)$  é diferente do plano de contato sempre que  $P_r(u, v, r) \neq 0$ . Quando isto ocorre, a intersecção destes planos será uma reta. Além disso, se  $P_r(u, v, r) \neq 0$ , então isto também ocorrerá para todos os pontos em uma vizinhança de  $(u, v, r)$ . Assim, em uma vizinhança de  $(u, v, r)$ , os planos de contato e os planos tangentes se interceptarão segundo retas, dando origem a um campo de direções em  $M$  com as propriedades desejadas.

**Definição 5.2.1.** *Um campo vetorial  $\xi$  sobre a superfície  $M$  é chamado de **levantamento da EDB** (5.1) se, e somente se,  $d\pi_{(u,v,r)}(\xi)$  é um vetor de direção  $r$ . Quando  $\xi$  é, além disso, um campo tangente à superfície  $M$ , dizemos que  $\xi$  é um **levantamento adequado** sobre  $M$ .*

**Proposição 5.2.2.** *Valem as seguintes afirmações*

(1) *O campo vetorial*

$$\xi = P_r \frac{\partial}{\partial u} + rP_r \frac{\partial}{\partial v} - (P_u + rP_v) \frac{\partial}{\partial r}$$

*é um levantamento adequado sobre  $M$  do campo bivaluado (5.1). Esse campo é chamado de **Campo de Lie-Cartan**.*

(2) *O campo vetorial  $\xi$  tem genericamente um ou três pontos de equilíbrio em  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ .*

*Estes pontos são do tipo nó ou sela.*

**Demonstração:**

(1) Seja

$$\xi = A \frac{\partial}{\partial u} + B \frac{\partial}{\partial v} + C \frac{\partial}{\partial r}$$

um campo vetorial em  $M$ . O campo  $\xi$  é um levantamento adequado se ele for tangente à superfície  $M$  e  $d\pi_{(u,v,r)}(\xi)$  é um vetor de direção  $r$ . Como  $\pi(u, v, r) = (u, v)$ , segue que

$$d_{(u,v,r)}\pi(\xi) = A \frac{\partial}{\partial u} + B \frac{\partial}{\partial v},$$

portanto  $r = B/A$ .

A condição de tangência do campo  $\xi$  em  $M$  é dada por  $AP_u + rAP_v + CP_r = 0$ . Tomando  $A = 1$ , obtemos

$$C = \frac{-(P_u + rP_v)}{P_r}.$$

Multiplicando o campo  $\xi$  por  $P_r$ , resulta que

$$\xi = P_r \frac{\partial}{\partial u} + rP_r \frac{\partial}{\partial v} - (P_u + rP_v) \frac{\partial}{\partial r}.$$

(2) Os pontos de equilíbrio do campo  $\xi$  são dados pelo anulamento de  $P$ ,  $P_r$  e  $P_u + rP_v$ . Quando  $P = P_r = 0$ , temos que  $b^2 - ac = 0$ , e isto determina a imagem inversa de  $\Delta$  pela projeção  $\pi$ , que contém  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ . Assim, os pontos de equilíbrio do campo  $\xi$  em  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$  são dados pelos zeros de  $(P_u + rP_v)$  em  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ , ou seja, por  $(P_u + rP_v)(0, 0, r) = 0$ . Esta equação é uma cúbica em  $r$  dada por

$$\Phi(r) = a_2 r^3 + (2b_2 + a_1)r^2 + (2b_1 + c_2)r + c_1.$$

Genericamente podemos escolher  $a_i, b_i, c_i$ , com  $i = 1, 2$ , no conjunto aberto e denso de  $\mathbb{R}^6$ , que é o complementar do conjunto definido pelo anulamento de  $\Phi$  e  $\Phi'$  simultaneamente, de forma que a cúbica  $\Phi$  tenha uma ou três raízes reais distintas.

Procuramos agora o tipo topológico dos correspondentes pontos de equilíbrio de  $\xi$ . Para isto, é necessário analisar os autovalores da linearização de  $\xi$  nesses pontos. Seja  $r_1$  uma raiz da cúbica  $\Phi$ . Escrevendo o campo  $\xi$  na forma de sistema, obtemos

$$\xi = \begin{cases} u' = P_r = 2ar + 2b, \\ v' = rP_r = 2ar^2 + 2br, \\ r' = -(P_u + rP_v) = -\Phi(r). \end{cases}$$

A linearização do campo  $\xi$  em  $(0, 0, r_1)$  é

$$d\xi(0, 0, r_1) = \begin{pmatrix} 2(a_1 r_1 + b_1) & 2(a_2 r_1 + b_2) & 0 \\ 2r_1(a_1 r_1 + b_1) & 2r_1(a_2 r_1 + b_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\Phi'(r_1) \end{pmatrix}.$$

Os autovalores desta matriz são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\Phi'(r_1), \quad \lambda_3 = \alpha(r_1) = 2(a_2 r_1^2 + (a_1 + b_2)r_1 + b_1).$$

Como  $r_1$  não é uma raiz repetida de  $\Phi$ , segue que  $\Phi'(r_1) \neq 0$ , logo  $\lambda_2 \neq 0$ . Genericamente  $\alpha$  e  $\Phi$  não possuem raízes comuns, assim  $\alpha(r_1) \neq 0$  e  $\lambda_3 \neq 0$ . Desta forma, se  $\lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$ , temos que o ponto de equilíbrio do campo é do tipo nó, e se  $\lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$ , temos que o equilíbrio do campo é do tipo sela. Portanto, os pontos de equilíbrio do campo  $\xi$  sobre  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$  são do tipo nó ou sela. ■

### Observação 5.2.1.

- (1) A projeção  $\pi$  das curvas integrais do campo  $\xi$  são as soluções da EDB (5.1), com  $r = dv/du \neq 0$ .
- (2) Se considerarmos a carta afim em  $\mathbb{R}P^1$  com  $s = du/dv$ , as ideias e conclusões seriam análogas e o campo vetorial dado por

$$\eta = sQ_s \frac{\partial}{\partial u} + Q_s \frac{\partial}{\partial v} - (sQ_u + Q_v) \frac{\partial}{\partial s} \quad (5.6)$$

seria um levantamento adequado sobre  $N$ .

As EDB's aparecem em vários ramos da Matemática, em particular na geometria diferencial de superfícies. Na próxima seção iremos aplicar os resultados a respeito de EDB, vistos anteriormente, para estudar o comportamento das linhas de curvatura de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  próximas de um ponto umbílico. Mais detalhes podem ser encontrados em [7] e [10].

### 5.3 Linhas de Curvatura em Superfícies em $\mathbb{R}^3$ e Pontos Umbílicos Darbouxianos

Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície e  $p \in S$  um ponto umbílico. Tome  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$ , com  $x(0, 0) = p$ , e considere a equação das linhas de curvatura

$$(gF - fG)dv^2 + (gE - eG)dudv + (fE - eF)du^2 = 0. \quad (5.7)$$

Defina  $a = (gF - fG)$ ,  $2b = (gE - eG)$  e  $c = (fE - eF)$ . Tome a superfície  $M$ , a projeção  $\pi$  e o campo de Lie-Cartan  $\xi$  relacionados com a equação (5.7), como construídos na seção anterior.

**Definição 5.3.1.** *Seja  $p$  um ponto umbílico em uma superfície  $S$  e considere o cenário descrito acima. Diremos que  $p$  é um **ponto umbílico Darbouxiano** se ocorrem as duas condições a seguir:*

**T: (Condição de Transversalidade)** *A superfície  $M$  é suave em  $\pi^{-1}(0, 0)$ ;*

**D: (Condição do Discriminante)** *As singularidades do campo de Lie-Cartan são hiperbólicas e são dadas por um dos casos abaixo:*

**D<sub>1</sub>:** *uma única sela, ou*

**D<sub>2</sub>:** *um único nó e duas selas, ou*

**D<sub>3</sub>:** *três selas.*

Os índices 1, 2 e 3 correspondem ao número de selas do campo. A Figura 5.1 ilustra o comportamento dos casos acima, sendo que  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  são do tipo Lemon, Monstar e Star, respectivamente.

Escrevendo uma superfície  $S$  na forma de Monge, Gutierrez e Sotomayor mostraram em [11] que podemos relacionar as condições de Darboux com os coeficientes da parametrização de  $S$ .

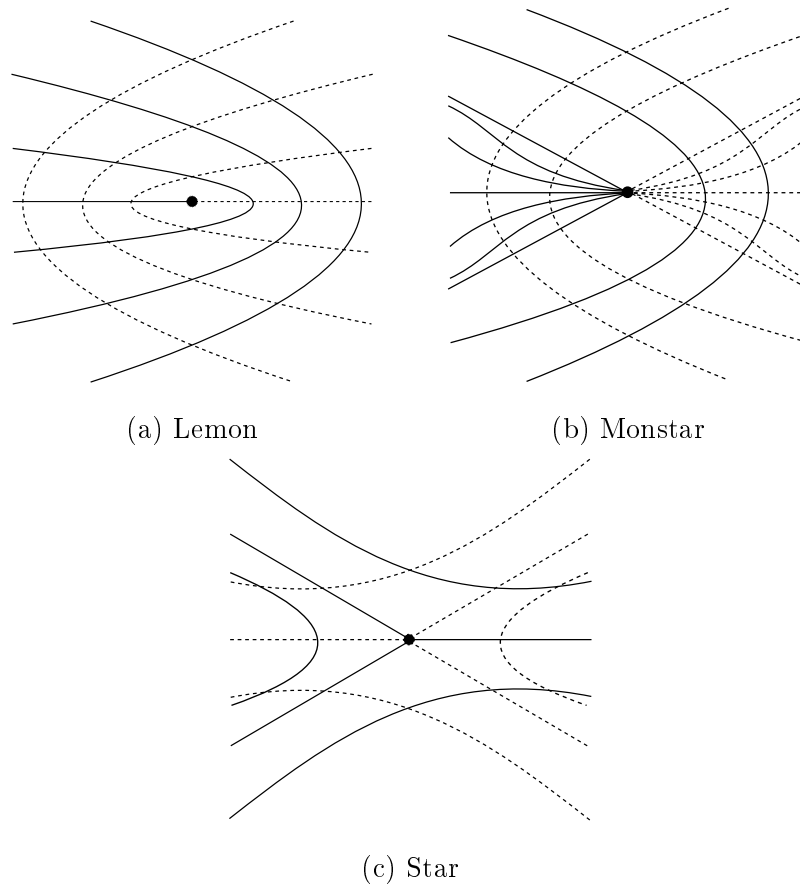


Figura 5.1: Configuração da EDB (5.1) de acordo com sua classificação:  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$ .

**Teorema 5.3.1.** *Seja  $p \in S$  um ponto umbílico. Transladando  $p$  para a origem e realizando algumas rotações, considere a carta de Monge  $\alpha$  de  $S$  em uma vizinhança de  $p$  dada por*

$$\alpha(u, v) = \left( u, v, \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3 + O(4) \right).$$

*Suponhamos as seguintes condições:*

**T)**  $b(b - a) \neq 0$ ;

**D<sub>1</sub>)**  $\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0$ ;

**D<sub>2</sub>)**  $\left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 > \frac{a}{b} > 1$ ,  $a \neq 2b$ ;

**D<sub>3</sub>)**  $\frac{a}{b} < 1$ .

Então o comportamento das linhas de curvatura próximas ao ponto umbílico  $p$ , nos casos  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$ , são do tipo *Lemon*, *Monstar* e *Star*, respectivamente.

**Demonstração:** Calculando os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de  $\alpha$ , encontramos

$$\begin{aligned} E &= 1 + \left( ku + \frac{a}{2}u^2 + \frac{b}{2}v^2 + O(3) \right)^2, \\ F &= \left( ku + \frac{a}{2}u^2 + \frac{b}{2}v^2 + O(3) \right) \left( kv + buv + \frac{c}{2}v^2 + O(3) \right), \\ G &= 1 + \left( kv + buv + \frac{c}{2}v^2 + O(3) \right)^2, \\ e &= k + au + O(2), \quad f = bv + O(2), \quad g = k + bu + cv + O(2). \end{aligned}$$

Por (5.7), a equação das linhas de curvatura é dada por

$$(-bv + O(2))dv^2 + \left( (b-a)u + cv + O(2) \right) dudv + (bv + O(2))du^2 = 0. \quad (5.8)$$

Associada à equação diferencial binária (5.8), consideremos a superfície

$$\begin{aligned} M = \{ (u, v, r) : P(u, v, r) = (-bv + O(2))r^2 + \left( (b-a)u + cv + O(2) \right)r \\ + (bv + O(2)) = 0 \}, \end{aligned}$$

com  $r = dv/du$ , como em (5.3).

Primeiramente verificaremos que a condição  $T$  é equivalente à superfície  $M$  ser suave em uma vizinhança de  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ . Pela Proposição 5.2.1, isto é equivalente à função discriminante,

$$\delta(u, v) = \left( (b-a)u + cv + O(2) \right)^2 - 4(-bv + O(2))(bv + O(2)),$$

ter uma singularidade de Morse na origem. De fato, a origem é uma singularidade de  $\delta$ . Além disso, o determinante da Hessiana desta função em  $(0, 0)$  é dado por

$$4(b-a)^2(c^2 + 4b^2) - 4c^2(b-a)^2 = 16b^2(b-a)^2.$$

Portanto, a função  $\delta$  é de Morse se, e somente se,  $b(b-a) \neq 0$ . Com isto, vemos que a condição  $T$  é equivalente a superfície  $M$  ser suave em  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ .



Para estudar o comportamento das linhas de curvatura, consideremos o campo de Lie-Cartan

$$\xi = P_r \frac{\partial}{\partial u} + rP_r \frac{\partial}{\partial v} - (P_u + rP_v) \frac{\partial}{\partial r}.$$

Podemos escrever o campo vetorial  $\xi$  na forma de sistema

$$\xi = \begin{cases} u' = P_r = -2bvr + (b-a)u + cv + O(2) \\ v' = rP_r = r \left( -2bvr + (b-a)u + cv + O(2) \right) \\ r' = -(P_u + rP_v) = - \left( (b-a)r + r(-br^2 + cr + b) + O(1) \right). \end{cases} \quad (5.9)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (5.9) são dados por  $P = P_r = P_u + rP_v = 0$ . As equações  $P = P_r = 0$ , nos fornecem os pontos  $(0, 0, r) \in \{0\} \times \mathbb{R}P^1$ . Os pontos nos quais  $P_u + rP_v = 0$  em  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$  são dados por uma cúbica  $\phi$  em  $r$ ,

$$\phi(r) = -(P_u + rP_v)(0, 0, r) = -(b-a)r - r(-br^2 + cr + b) = r(br^2 - cr + a - 2b) = 0.$$

As raízes desta cúbica são

$$r_0 = 0 \quad \text{e} \quad r_{\pm} = \frac{c}{2b} \pm \sqrt{\Delta},$$

sendo

$$\Delta = \left( \frac{c}{2b} \right)^2 - \frac{a}{b} + 2.$$

Portanto, quando  $\Delta > 0$ , o sistema apresenta três pontos de equilíbrio, denotados por

$$E_0 = (0, 0, 0), \quad E_+ = (0, 0, r_+), \quad E_- = (0, 0, r_-).$$

As raízes da cúbica  $\phi$  representam as possíveis direções ao longo das quais as linhas de curvatura podem se aproximar do ponto umbílico. Quando  $\Delta < 0$ , o sistema tem apenas  $E_0$  como ponto de equilíbrio. Passamos agora ao estudo do tipo topológico destes pontos de equilíbrios. A linearização do campo vetorial  $\xi$  dado em (5.9) no ponto  $(0, 0, r)$ , em que  $r \in \{0, r_-, r_+\}$ , tem a forma

$$D\xi(0, 0, r) = \begin{pmatrix} b-a & c-2br & 0 \\ (b-a)r & (c-2br)r & 0 \\ 0 & 0 & 3br^2 - 2cr + a - 2b \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Os autovalores da matriz em (5.10) são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3br^2 - 2cr + a - 2b, \quad \lambda_3 = -2br^2 + cr + b - a.$$

Observe que como  $r$  é raiz da equação cúbica  $\phi(r) = r(br^2 - cr + a - 2b)$ , podemos simplificar a escrita dos autovalores  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  como

i. Se  $r \neq 0$ , então

$$\lambda_2 = 3br^2 - 2cr + a - 2b = \underbrace{br^2 - cr + a - 2b}_{=0} + 2br^2 - cr = \underbrace{br^2 - cr}_{=2b-a} + br^2 = br^2 + 2b - a.$$

$$\lambda_3 = -2br^2 + cr + b - a = -\underbrace{(br^2 - cr + a - 2b)}_{=0} - br^2 - b = -b(r^2 + 1).$$

ii. Se  $r = 0$ , então

$$\lambda_2 = \underbrace{3br^2 - 2cr}_{=0} + a - 2b = a - 2b.$$

$$\lambda_3 = \underbrace{-2br^2 + cr}_{=0} + b - a = b - a.$$

De agora em diante, assumiremos então tais simplificações de  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ . Surgem os seguintes casos:

$$\text{Caso } D_1: \left( \Delta = \left( \frac{c}{2b} \right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0 \right).$$

Neste caso, a origem é a única raiz real de  $\phi(r)$ , ou seja, temos apenas  $E_0$  como ponto de equilíbrio. Os autovalores de  $D\xi(E_0)$  são  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = a - 2b$  e  $\lambda_3 = b - a$ . Para que tenhamos uma singularidade do tipo  $D_1$ , conforme a definição de ponto umbílico Darbouxiano, é suficiente mostrar que os autovalores  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  tenham sinais opostos. Como  $\Delta < 0$ , segue que

$$\frac{a - 2b}{b} > 0.$$

Portanto,  $(a - 2b)$  e  $b$  têm o mesmo sinal. Assim,

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{b - a}{a - 2b} = -1 - \frac{b}{a - 2b} < 0.$$

Segue, então, que  $E_0$  é um ponto de equilíbrio do tipo sela.

$$\text{Caso } D_2: \left( \Delta = \left( \frac{c}{2b} \right)^2 - \frac{a}{b} + 2 > 0, \quad \frac{a}{b} > 1, \quad a \neq 2b \right).$$

Neste caso temos três pontos de equilíbrios. Dividimos este caso em dois sub-casos. Primeiramente consideraremos

$$1 < \frac{a}{b} < 2.$$

É fácil ver que  $E_0$  é um ponto de equilíbrio do tipo nó, pois

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{b-a}{a-2b} = \frac{b\left(1 - \frac{a}{b}\right)}{b\left(\frac{a}{b} - 2\right)} = \frac{\left(1 - \frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a}{b} - 2\right)} > 0,$$

porque  $1 - a/b < 0$  e  $a/b - 2 < 0$ .

Para estudar a natureza dos pontos de equilíbrio  $E_{\pm}$ , consideremos a razão

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{2b - a + br^2}{-b(r^2 + 1)} = \frac{b\left(2 - \frac{a}{b} + r^2\right)}{-b(r^2 + 1)} = \frac{\left(2 - \frac{a}{b} + r^2\right)}{-(r^2 + 1)} < 0.$$

Portanto,  $E_{\pm}$  são pontos de equilíbrio do tipo sela, independentemente da escolha de  $r$ .

No segundo sub-caso, consideraremos

$$2 < \frac{a}{b} < 2 + \left( \frac{c}{2b} \right)^2.$$

De modo análogo ao sub-caso anterior, é fácil ver que  $E_0$  é um ponto de equilíbrio do tipo sela, ou seja,  $\lambda_3/\lambda_2 < 0$ . Estudaremos agora o tipo topológico dos pontos de equilíbrio  $E_{\pm}$ . Novamente consideraremos a razão

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{2b - a + br^2}{-b(r^2 + 1)} = \frac{b\left(2 - \frac{a}{b} + r^2\right)}{-b(r^2 + 1)} = \frac{\left(2 - \frac{a}{b} + r^2\right)}{-(r^2 + 1)}.$$

Neste caso temos que o sinal da razão depende do valor de  $r$  e é dado pelo numerador, já que o denominador é sempre negativo, independentemente de  $r$ . Passamos assim a estudar o sinal da expressão  $N_{\pm} = 2 - a/b + r_{\pm}^2$ . Substituindo o valor de  $r_{\pm}$  em  $N_{\pm}$ , chegamos na seguinte equação

$$N_{\pm} = 2\Delta \pm \frac{c}{b}\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{\Delta}\left(\sqrt{\Delta} \pm \frac{c}{2b}\right).$$

Como  $\Delta > 0$  os sinais de  $N_{\pm}$  seguem da expressão dentro dos parênteses. Assim, supondo  $bc > 0$ , segue que  $N_+$  é sempre positivo e o sinal  $N_-$  segue de

$$\sqrt{\Delta} - \frac{c}{2b} = \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2} - \frac{c}{2b} < \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{c}{2b}} = \left|\frac{c}{2b}\right| - \frac{c}{2b} = 0.$$

A desigualdade decorre do fato que  $2 < a/b$  e a última igualdade segue pois estamos considerando  $bc > 0$ . Assim, temos que  $E_+$  e  $E_-$  são pontos de equilíbrio do tipo sela e nó, respectivamente. De modo análogo, supondo  $bc < 0$ , concluímos que  $E_+$  e  $E_-$  são pontos de equilíbrio do tipo nó e sela, respectivamente.

**Caso  $D_3$ :**  $\left(\frac{a}{b} < 1\right)$ .

Neste caso temos 3 pontos de equilíbrio e todos são do tipo sela. De fato, a natureza de  $E_0$  segue do sinal da razão

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{b-a}{a-2b} = \frac{\left(1 - \frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a}{b} - 2\right)} < 0,$$

porque  $1 - a/b > 0$  e  $a/b - 2 < 0$ . O tipo topológico dos pontos de equilíbrio  $E_-$  e  $E_+$  é dado pelo sinal da seguinte razão

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{2b - a + br^2}{-b(r^2 + 1)} = \frac{b\left(2 - \frac{a}{b} + r^2\right)}{-b(r^2 + 1)} = \frac{\overbrace{\left(2 - \frac{a}{b}\right)}^{>0} + r^2}{-(r^2 + 1)} < 0.$$

■

Uma interpretação geométrica para a condição  $T$  é dada pela proposição a seguir.

**Proposição 5.3.1.** *Considere as curvas  $(gF - fG)(u, v) = 0$  e  $(gE - eG)(u, v) = 0$ . A interseção delas define os pontos umbílicos. A condição de transversalidade  $T$  significa que as curvas acima são regulares e se encontram transversalmente em  $(0, 0)$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $(gF)(u, v) = (fG)(u, v)$  e  $(gE)(u, v) = (eG)(u, v)$ . De

acordo com as equações (2.12), temos que

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + \overbrace{gE}^{=eG}}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{2eG - 2fF}{EG - F^2} = \frac{eG - fF}{EG - F^2},$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} H^2 - K &= \left( \frac{eG - fF}{EG - F^2} \right)^2 - \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{(eG - fF)^2 - (eg - f^2)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{-2eGfF + egF^2 + f^2EG}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{-2eGfF + e \overbrace{gF}^{=fG} F + fE \overbrace{fG}^{=gF}}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{-2eGfF + efGF + f \overbrace{Eg}^{=eG} F}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{-2eGfF + efGF + feGF}{(EG - F^2)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como  $(H^2 - K)(u, v) = 0$ , temos que a intersecção das duas curvas serão pontos umbílicos.

Por outro lado, nos pontos umbílicos temos que os coeficientes da equação (2.14) se anulam simultaneamente, em particular temos  $(gF - fG)(u, v) = 0$  e  $(gE - eG)(u, v) = 0$ . Logo, os pontos umbílicos são exatamente a intersecção das duas curvas.

Defina

$$\begin{aligned} A(u, v) &= (gF - fG)(u, v) = by + O(2) = 0, \\ B(u, v) &= (gE - eG)(u, v) = (b - a)u + cv + O(2) = 0. \end{aligned}$$

Temos

$$\det \begin{pmatrix} A_u(0, 0) & A_v(0, 0) \\ B_u(0, 0) & B_v(0, 0) \end{pmatrix} = -b(b - a).$$

Assim, se valer a condição  $T$ , o determinante anterior será diferente de 0. Logo, as linhas da matriz acima não se anulam e portanto as curvas são regulares em  $(0,0)$ . Além disto, o determinante diferente de zero significa que seus vetores tangentes são linearmente independentes, ou seja, as curvas se encontram transversalmente em  $(0,0)$ .



# Considerações Finais

Iniciamos nosso estudo com um método para construir superfícies desenvolvíveis a partir de uma dada curva de modo que esta curva seja uma linha de curvatura da superfície obtida. Este trabalho está presente em [13].

Além disso, discorremos no Capítulo 3 sobre o conceito de torção total bem como resultados em linhas de curvatura fechadas contidas no ovaloide e no toro. Também apresentamos algumas generalizações sobre curvas esféricas. Os trabalhos [16] e [20] focam importantes nesse estudo.

Estudamos no Capítulo 4 sobre os ciclos principais hiperbólicos, o expoente de hiperbolicidade e também sobre a aplicação de retorno de Poincaré. Apresentamos a parametrização denominada canaleta, que foi importante na construção da superfície local suave que continha uma dada curva como ciclo principal hiperbólico. O capítulo foi desenvolvido por meio dos trabalhos [6] e [10].

Em seguida, finalizamos o trabalho exibindo um estudo sobre as EDB's, o levantamento de Lie-Cartan e a classificação dos pontos umbílicos Darbouxianos  $D_1, D_2$  e  $D_3$ . Os trabalhos [7] e [10] foram importantes para que essa parte do trabalho fosse concluída.

# Referências Bibliográficas

- [1] BLASCHKE, W., *Kreis und Kugel*. (German) 2te Aufl. Walter de Gruyter Co., Berlin, 1956. viii+167 pp.
- [2] BRUCE, J.W.; TARI, F., *On binary differential equations*. Nonlinearity 8 (1995), no. 2, 255-271.
- [3] CARMO, M.P. do, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 5 ed., Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [4] EULER, L., *Recherches sur la courbure des surfaces*. Mémoires de l'Académie de Sciences de Berlin, 16:119-143, 1760.
- [5] GARCIA, R., *Linhas de curvatura de superfícies em  $\mathbb{R}^3$* . 4º Colóquio de Matemática da Região Nordeste, UFMA/SBM: 2018.
- [6] GARCIA, R.; MELLO, L.; SOTOMAYOR, J., *Surfaces Around Closed Principal Curvature Lines, an Inverse Problem*. Real and complex singularities, 158-166, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 380, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [7] GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J., *Differential Equations of Classical Geometry, a Qualitative Theory*. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications] 27º Colóquio Brasileiro de Matemática. [27th Brazilian Mathematics Colloquium] Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2009. ii+256 pp.
- [8] GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J., *Lines of curvature on Surfaces, Historical Comments and Recent Developments*. São Paulo J. Math. Sci. 2 (2008), no. 1, 99-143.



- [9] GEPPERT, H., *Sopra una caratterizzazione della sfera*. (Italian) Ann. Mat. Pura Appl. (4) 20, (1941). 59-66.
- [10] GUTIERREZ, C.; SOTOMAYOR, J., *Lines of Curvature and Umbilical Points on Surfaces*. Monografías del Instituto de Matemática y Ciencias Afines [Monographs of the Institute of Mathematics and Related Sciences], 3. Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA, Lima; Universidad Nacional de Ingeniería, Instituto de Matemáticas Puras y Aplicadas, Lima, 1998. viii+84 pp.
- [11] GUTIERREZ, C.; SOTOMAYOR, J., *Structurally stable configurations of lines of principal curvature*. Bifurcation, ergodic theory and applications (Dijon, 1981), 195-215, Astérisque, 98-99, Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [12] KREYSZIG, E., *Differential Geometry*. New York: Dover Publications, Inc., 1991.
- [13] LI, C.Y.; WANG, R.H.; ZHU, C.G., *An approach for designing a developable surface through a given line of curvature*. Computer-Aided Design, 45 (2013) 621–627..
- [14] MONGE, G., *Applications de l'algèbre a la Géométrie*. 2nd ed., Paris, 1850.
- [15] PANSONATO, C.C.; COSTA, S.I.R., *Total torsion of curves in three-dimensional manifolds..* Geom. Dedicata 136 (2008), 111-121.
- [16] QIN, Y.A.; LI, S.J., *Total torsion of closed lines of curvature*. Bull. Austral. Math. Soc. 65 (2002), no. 1, 73-78.
- [17] SEGRE, B., *Una nuova caratterizzazione della sfera* . (Italian) Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 3, (1947). 420-422.
- [18] Software **MAPLE R2019a**: <https://www.maplesoft.com/products/maple/>.
- [19] WANG, Y.N., *Remarks on spherical curves in  $\mathbb{R}^3$* . (Chinese) Beijing Shifan Daxue Xuebao 29 (1993), no. 3, 304-307.
- [20] YIN, S.; ZHENG, D., *The curvature and torsion of curves in a surface*. J. Geom. 108 (2017), no. 3, 1085-1090.