

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**O Teorema de Poincaré-Bendixson para campos
vetoriais planares, suaves por partes e na garrafa de
Klein**

Andrelucio Joaquim dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Fernando Pereira Micena

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 5 DE AGOSTO DE 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**O Teorema de Poincaré-Bendixson para campos
vetoriais planares, suaves por partes e na garrafa de
Klein**

Andrelucio Joaquim dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Fernando Pereira Micena

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática.

Área de Concentração: Topologia/Geometria

ITAJUBÁ – MG

5 DE AGOSTO DE 2019

Aos meus pais, irmãos e irmãs.

Agradecimentos

Foi intensa a caminhada no decorrer destes anos até chegar aqui, mas com esforço e força de vontade foi possível vencer qualquer obstáculo. E sem dúvida contei sempre com o apoio de pessoas especiais que passaram em minha vida trazendo alegria e contribuindo de alguma forma para que meu objetivo fosse alcançado.

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele nada seria possível, pois é Ele que nos dá conforto nas horas mais difíceis.

Agradeço a meu pai e minha mãe. Eles que me puseram neste mundo e souberam me educar para que me tornasse uma pessoa íntegra e de caráter.

Agradeço meus irmãos e irmãs ao qual compartilho os melhores momentos de minha vida.

Agradeço ao meu orientador, professor Dr. Fernando Pereira Micena pela excelente orientação neste trabalho e pelo conhecimento compartilhado.

Agradeço aos professores do PMAT, em especial aos que ministraram aulas em minha turma, que foram peças fundamentais para chegar até aqui, transmitindo conhecimento e conselhos em alguns momentos. Em especial também ao professor Bráulio pela ajuda, ensinamentos e conselhos.

Agradeço aos meus colegas do PMAT, no qual passamos por momentos inesquecíveis em sala de aula, especialmente aqueles ao qual tenho mais afinidades e aos demais amigos conquistei desde quando ingressei na UNIFEI.

Agradeço aos meus demais familiares e amigos que diretamente ou indiretamente contribuíram para chegar onde estou hoje.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro durante o mestrado.

"Tu te tornas eternamente responsável por tudo aquilo que cativas".

Antoine de Saint-Exupéry.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é apresentar diferentes versões do Teorema de Poincaré-Bendixson. Apresentaremos a versão clássica mais conhecida para campos vetoriais suaves no plano, uma versão para campos vetoriais contínuos no plano, uma versão para campos vetoriais suaves por partes no plano e uma versão para campos vetoriais contínuos na garrafa de Klein.

Palavras-chave: Teorema de Poincaré-Bendixson, campos vetoriais suaves por partes, garrafa de Klein.

Abstract

The main objective of this work is to present different versions of the Poincaré-Bendixson Theorem. We will present the well-known classical version for smooth vector fields in the plane, a version for continuous vector fields in the plane, a version for piecewise smooth vector fields in the plane, and a version for continuous vector fields on the Klein bottle.

Keywords: Poincaré-Bendixson theorem, piecewise smooth vector fields, Klein bottle.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	viii
Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Conceitos básicos	3
1.2 O Teorema do Fluxo Tubular	10
1.3 A transformação de Poincaré	12
2 O Teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais suaves no plano	14
2.1 Conjuntos limites	14
2.2 O Teorema de Poincaré-Bendixson	18
3 O Teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais contínuos no plano	24
3.1 Conceitos básicos para campos vetoriais contínuos no \mathbb{R}^n	24

3.2	O Teorema de Poincaré-Bendixson	26
4	Campos vetoriais suaves por partes	36
4.1	Conceitos básicos	36
4.2	O Teorema de Poincaré-Bendixson	45
4.3	Conjuntos minimais não triviais	51
5	Campos vetoriais contínuos em variedades	56
5.1	Conceitos básicos	56
5.2	Conjuntos limites e recorrência	62
5.3	Campos vetoriais definidos por um recobrimento duplo orientado	65
6	O Teorema de Poincaré-Bendixson na garrafa de Klein	71
6.1	Aspectos topológicos	71
6.2	O Teorema de Poincaré-Bendixson	82
	Considerações finais	96
	Referências Bibliográficas	97

Lista de Figuras

1.1	Seção transversal.	11
2.1	Ilustração do Lema 2.2.1.	19
2.2	Orientação da seção Σ	20
2.3	Curva de Jordan.	21
2.4	Ordenação da interseção de γ^+ com Σ	21
3.1	Trajetórias cruzando Σ	28
3.2	As seções transversais Σ_* e $\Sigma_{\bar{p}}$	32
3.3	Curva de Jordan J	34
4.1	Regiões de costura.	37
4.2	Região de escape.	38
4.3	Região de deslize.	38
4.4	Campo deslizante.	39
4.5	Casos onde ocorre tangência regular.	40
4.6	Casos onde ocorre tangência singular.	40
4.7	Não unicidade de órbita passando por um ponto.	43
4.8	Algumas possibilidades de pseudo-ciclo.	43
4.9	Algumas possibilidades de pseudo-gráfico.	44
4.10	Caso de tangência singular em $\omega(\Gamma_Z(t, p)) \cap S$	49
4.11	Curva de Jordan e vizinhança de q	50
4.12	Os conjuntos α -limite $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ e ω -limite $\{\omega_1, \Gamma_1\}$ de p são desconexos.	52
4.13	Curvas integrais e pontos de tangência.	55

5.1	Ilustração que T^2 é um recobrimento duplo orientado de K^2	67
5.2	Ilustração que o cilindro é um recobrimento duplo orientado da faixa de Möbius.. . . .	68
6.1	Soma conexa de dois toros $(T^2 \# T^2)$	72
6.2	Representação de P^2	72
6.3	A soma conexa de dois planos projetivos é homeomorfa a garrafa de Klein.	73
6.4	A garrafa de Klein K^2	81
6.5	Curvas representando classes de homotopia de $\pi_1(K^2)$	81
6.6	Círculo semi-transversal a X	83
6.7	Curvas fechadas simples.	83
6.8	Conexidade de $K^2 \setminus C$	84
6.9	Anel com fronteira C^1 e C^2 , e faixa de Möbius.	86
6.10	Anel K	88
6.11	p_1 entre p_2 e p	88
6.12	Sequência monótona $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$	89
6.13	Segmentos transversais $\Sigma_{\tilde{p}}$ e Σ_*	90
6.14	Anel \hat{K}	90
6.15	Círculos semi-transversais C e \tilde{C}	92
6.16	Círculo C homotópico a um ponto em K^2	93

Introdução

No estudo da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais ordinárias não estamos interessados em sua solução numérica e sim em descobrir o comportamento do sistema a longo prazo. Com esta finalidade, temos que investigar o conjunto limite das trajetórias quando o tempo vai para infinito. O Teorema de Poincaré-Bendixson é um resultado muito importante nesse estudo, pois ele estabelece para quais tipos de conjuntos limites as trajetórias de um campo vetorial deve convergir.

Uma versão mais fraca do teorema para campos vetoriais no plano foi originalmente concebida por Henri Poincaré, embora ele não tenha chegado a uma demonstração completa que foi posteriormente dada em 1901 por Ivan Bendixson.

Uma versão clássica do Teorema de Poincaré-Bendixson diz que se a trajetória de um campo vetorial em \mathbb{R}^2 estiver contida num conjunto compacto, então seu conjunto limite será uma órbita periódica, um ponto singular ou um gráfico (veja [11]).

O objetivo do nosso trabalho é apresentar uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais contínuos no \mathbb{R}^2 , tendo como referência principal [6]; uma versão para campos vetoriais suaves por partes, tendo como referência principal [1] e uma versão para campos vetoriais contínuos na garrafa de Klein, tendo como principal referência [3].

No Capítulo 1, apresentamos os preliminares para campos vetoriais suaves no plano, embasada em [11]. Definimos o que é um campo vetorial C^k , o que é uma solução para um campo vetorial, enunciaremos e demonstramos o Teorema de Existência e Unicidade de soluções. Apresentamos o Teorema do Fluxo Tubular e falamos da transformação de primeiro retorno de Poincaré.

No Capítulo 2, definimos os conjuntos α -limite e ω -limite de uma órbita e mostramos algumas propriedades destes conjuntos. Antes da demonstração do teorema, enunciamos o teorema da curva de Jordan e demonstramos alguns lemas usados na demonstração do teorema, e por fim apresentamos e demonstramos o Teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais suaves no plano. Também embasado em [11].

O Capítulo 3 foi todo embasado na referência [6]. Apresentamos conceitos preliminares da teoria de campos vetoriais contínuos no plano, definimos o que é uma órbita injetiva que é de grande importância na demonstração do teorema e apresentamos e demonstramos o Teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais contínuos no plano.

O Capítulo 4 aborda princípios da teoria de campos de vetores suaves por partes no plano, a principal referência deste capítulo é [1]. Apresentamos os conceitos básicos de campos de vetores suaves por partes, onde temos uma região de descontinuidade S , chamada de curva de separação e nesta curva aparece regiões de costura, regiões de deslize, regiões de escape e pontos de tangência. A versão do Teorema de Poincaré-Bendixson apresentada não leva em consideração a região de deslize e escape. Apresentamos e demonstramos a versão do teorema e depois expomos um exemplo de um conjunto minimal não trivial, no caso onde aparece movimento de deslize no campo vetorial.

No Capítulo 5, apresentamos conceitos básicos da teoria de campos vetoriais contínuos em variedades, embasado na referência [2]. Assumimos alguns resultados da Topologia Algébrica, estudamos os conjuntos α -limite e ω -limite e suas propriedades; definimos uma órbita fracamente ω -recorrente e uma órbita ω -recorrente. E por fim, definimos um campo vetorial dado por um recobrimento duplo orientado, definimos um levantamento e estudamos suas propriedades que serão úteis na demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson na garrafa de Klein.

O Capítulo 6 tem como principal referência [3]; também assumimos alguns resultados da Topologia Algébrica. Definimos curva de um lado e curva de dois lados. Apresentamos o grupo fundamental de K^2 . Apresentamos e demonstramos duas versões do Teorema de Poincaré-Bendixson, uma onde a órbita é injetiva fracamente ω -recorrente e outra versão onde a órbita é injetiva não fracamente ω -recorrente.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos conceitos básicos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias em campos vetoriais suaves no \mathbb{R}^n . Os resultados apresentados neste capítulo foram embasados na referência [11].

1.1 Conceitos básicos

Seja U um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$, em U é uma aplicação $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k . Ao campo vetorial X associamos a equação diferencial

$$x' = X(x). \tag{1.1}$$

A equação diferencial (1.1) é chamada de autônoma pois ela é independente da variável temporal t .

Definição 1.1.1. *Uma solução para o sistema (1.1) é uma aplicação diferenciável $\varphi : I \longrightarrow U$ (I intervalo de \mathbb{R}) tal que*

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)), \tag{1.2}$$

para todo $t \in I$. Estas soluções são chamadas de curvas integrais de X ou da equação diferencial (1.1).

Definição 1.1.2. Um ponto $p \in U$ é chamado de ponto singular ou ponto de equilíbrio de X se $X(p) = 0$ e é chamado de ponto regular de X se $X(p) \neq 0$.

Definição 1.1.3. Uma solução $\varphi : I \rightarrow U$ da equação diferencial (1.2) é chamada de solução máxima ou solução maximal em I , se para toda solução em J , $\psi : J \rightarrow U$ da equação diferencial (1.2), tal que $I \subseteq J$ e $\varphi = \psi|_I$, tivermos $I = J$ e, conseqüentemente, $\varphi = \psi$. Neste caso, I é chamado de intervalo máximo ou maximal.

Um problema de Cauchy ou problema do valor inicial envolvendo a equação diferencial (1.1) é um problema da forma

$$\begin{cases} x' = X(x), \\ x(s) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

com $(s, x_0) \in \mathbb{R} \times U$.

Uma solução em I do problema de Cauchy, é uma função $\varphi : I \rightarrow U$ satisfazendo a Definição 1.1.4, e ainda, $\varphi(s) = x_0$.

A seguir apresentaremos o Teorema de Picard sobre condições de existência e unicidade de soluções do problema de Cauchy (1.3).

Teorema 1.1.1 (Teorema de Existência e Unicidade). *Sejam U um conjunto aberto em \mathbb{R}^n e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$, em U . Para cada $x \in U$ existe um intervalo aberto I_x onde está definida a única solução máxima φ_x do problema de Cauchy (1.3).*

Demonstração. Como X é um campo vetorial de classe C^k em U , então sabemos que X é localmente lipschitziano em U , e ainda, se $A \subset U$, A compacto, então $X|_A$ é lipschitziano em A .

Seja $x_0 \in U$ e $V = \overline{B}(x_0, r) = \{w \in U : |w - x_0| \leq r\} \subset U$ uma bola fechada de raio r e centrada em x_0 . Notemos que V é compacto e podemos assumir as seguintes afirmações:

- existe um constante de Lipschitz K para X em V ;
- $|X(x)| \leq M$ em V ;
- escolha $\alpha < \min\{\frac{r}{M}, \frac{1}{k}\}$ e seja $I_{x_0} = [-\alpha, \alpha]$.

Vamos primeiro definir um sequência de funções $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ de I_{x_0} em V . Então provaremos que essas funções convergem uniformemente para um função que satisfaz a solução de (1.3). E depois mostraremos que não existe uma outra função desse tipo.

Seja $\varphi_0(t) = x_0$, para $t \in I_{x_0}$ defina

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= x_0 + \int_a^b X(\varphi_0(s))ds \\ \varphi_2(t) &= x_0 + \int_a^b X(\varphi_1(s))ds \\ &\vdots \\ \varphi_n(t) &= x_0 + \int_a^b X(\varphi_{n-1}(s))ds\end{aligned}$$

Como $|t| \leq \alpha$ e $|X(x_0)| \leq M$, segue que

$$\begin{aligned}|\varphi_1(t) - x_0| &= \left| \int_0^t X(x_0)ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t |X(x_0)|ds \right| \\ &= |t||X(x_0)| \\ &\leq \alpha M \leq r\end{aligned}$$

desde que $\varphi_1(t) \in V$ para todo $t \in I_{x_0}$. Assuma por indução que isso é válido para $n = j$, temos que

$$|\varphi_j(t) - x_0| \leq \alpha M \leq r$$

para todo $t \in I_{x_0}$ e então

$$\varphi_{j+1}(t) = x_0 + \int_0^t X(\varphi_j(s))ds$$

desde que $\varphi_j(s) \in V$ para todo $t \in I_{x_0}$

Para $n = j + 1$, temos que

$$\begin{aligned}|\varphi_{j+1}(t) - x_0| &= \left| \int_0^t X(\varphi_j(s))ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t |X(\varphi_j(s))|ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t Mds \right| \\ &= M|t| \\ &\leq M\alpha \leq r.\end{aligned}$$

Assim $|\varphi_{j+1}(t) - x_0| \leq r$ e $\varphi_{j+1}(t) \in V$ para todo $t \in I_{x_0}$.

A seguir mostraremos que existe um constante $L \geq 0$, tal que para todo $j \geq 0$,

$$|\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)| \leq (\alpha K)^j L. \quad (1.4)$$

Seja L o máximo de $|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)|$ sobre $t \in [-\alpha, \alpha]$. Pelo que foi visto acima, $L \leq M\alpha$.

Segue que

$$\begin{aligned} |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| &= \left| \int_0^t X(\varphi_1(s))ds - \int_0^t X(\varphi_0(s))ds \right| \\ &= \left| \int_0^t [X(\varphi_1(s)) - X(\varphi_0(s))]ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t |X(\varphi_1(s)) - X(\varphi_0(s))|ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t K|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)|ds \right| \\ &= K|t|L \\ &\leq \alpha KL. \end{aligned}$$

Por indução, suponha que vale (1.4) para $n = j$, então

$$|\varphi_j(t) - \varphi_{j-1}(t)| \leq (\alpha K)^{j-1} L.$$

Para $n = j + 1$, temos

$$\begin{aligned} |\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)| &= \left| \int_0^t X(\varphi_j(s))ds - \int_0^t X(\varphi_{j-1}(s))ds \right| \\ &= \left| \int_0^t [X(\varphi_j(s)) - X(\varphi_{j-1}(s))]ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t |X(\varphi_j(s)) - X(\varphi_{j-1}(s))|ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t K|\varphi_j(s) - \varphi_{j-1}(s)|ds \right| \\ &= K \left| \int_0^t [(\alpha K)^{j-1} L]ds \right| \\ &= K(\alpha K)^{j-1} L|t| \\ &\leq K(\alpha K)^{j-1} L\alpha \\ &= (\alpha K)^j L. \end{aligned}$$

Logo $|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \leq (\alpha K)^n$, $\forall n$ e $\forall t \in [-\alpha, \alpha]$.

Seja agora $\beta = \alpha K$, de modo que $\beta < 1$, por suposição. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher N grande o suficiente tal que, para $m, n > N$, tenhamos

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| &= \sum_{j=N}^{\infty} |\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)| \\ &\leq \sum_{j=N}^{\infty} \beta_j L \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo φ_n é uma sequência de Cauchy. Como $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo na norma uniforme, temos que $C^0(I, V) \subset C^0(I, \mathbb{R}^n)$ também é um espaço métrico completo, assim, φ_n converge uniformemente para uma função $\varphi : I_{x_0} \rightarrow V$.

Agora tomando o limite em ambos os membros na expressão

$$\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t X(\varphi_n(s)) ds$$

temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(t) &= x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t X(\varphi_n(s)) ds \\ \varphi(t) &= x_0 + \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} X(\varphi_n(s)) ds \\ &= x_0 + \int_0^t X(\varphi(s)) ds. \end{aligned}$$

Portanto $\varphi : I_{x_0} \rightarrow V$ é solução do problema de Cauchy (1.3).

Agora mostraremos que esta solução é única.

Suponha $\varphi, \psi : I_{x_0} \rightarrow V$ sejam duas soluções de problema de Cauchy (1.3) onde, como acima, I_{x_0} seja o intervalo $[-\alpha, \alpha]$. Nós mostraremos que $\varphi(t) = \psi(t)$, $\forall t \in I_{x_0}$.

Seja

$$C = \max_{t \in I_{x_0}} |\varphi(t) - \psi(t)|,$$

este máximo é atingido em algum ponto $t_1 \in I_{x_0}$. Então

$$\begin{aligned}
 C = |\varphi(t_1) - \psi(t_1)| &= \left| \int_0^{t_1} \varphi'(s) ds - \int_0^{t_1} \psi'(s) ds \right| \\
 &= \left| \int_0^{t_1} X(\varphi(s)) ds - \int_0^{t_1} X(\psi(s)) ds \right| \\
 &\leq \left| \int_0^{t_1} |X(\varphi(s)) - X(\psi(s))| ds \right| \\
 &\leq \left| \int_0^{t_1} K |\varphi(s) - \psi(s)| ds \right| \\
 &= K \left| \int_0^{t_1} |\varphi(s) - \psi(s)| ds \right| \\
 &= KC|t| \\
 &\leq \alpha KC.
 \end{aligned}$$

Daí $C \leq \alpha KC$, mas como $\alpha K < 1$, isso é impossível a menos que $C = 0$. Portanto $\varphi(t) = \psi(t)$, $\forall t \in I_{x_0}$. ■

Se o campo vetorial for apenas contínuo não é garantida a unicidade de soluções, mas o seguinte teorema nos garante a existência de soluções.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Peano). *Sejam U um conjunto aberto, $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo e $p \in U$. Então existe pelo menos uma curva integral de X passando por p .*

A demonstração deste teorema pode ser vista em [6, p. 10]

Uma consequência importante do Teorema de Peano é o seguinte corolário.

Corolário 1.1.1. *Seja $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo limitado por uma constante $C > 0$ e seja $K \subset U$ um conjunto compacto. Então existe $\alpha = \alpha(C, K) > 0$ com a propriedade de que, para todo $p \in K$, qualquer curva integral de X passando por p está definida no intervalo $[-\alpha, \alpha]$.*

A demonstração deste corolário pode ser vista em [6, p. 11]

A seguir apresentamos duas propriedades fundamentais equações diferenciais e definiremos o fluxo de um campo vetorial.

Teorema 1.1.3. *Sejam U um conjunto aberto em \mathbb{R}^n e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$, em U . Seja I_x o intervalo máximo onde a única solução φ_x de (1.3),*

- (a) (*Propriedade de grupo*) Se $y = \varphi_x(s)$ e $s \in I_x$, então $I_y = I_x - s = \{r - s : r \in I_x\}$, $\varphi_y(0) = y$ e $\varphi_y(t) = \varphi_x(t + s)$ para todo $t \in I_y$.
- (b) (*Diferenciabilidade em relação às condições iniciais*) O conjunto $D = \{(t, x) : x \in \Delta, t \in I_x\}$ é aberto em \mathbb{R}^{n+1} e a aplicação $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ é de classe C^k .

Definição 1.1.4. A aplicação $\varphi : D \rightarrow U$ é chamada de *fluxo gerado pelo vetorial X* , ou simplesmente, *fluxo gerado por X* , ou ainda, *fluxo local*.

Definição 1.1.5. Sejam $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$, em U e $\varphi : D \rightarrow U$ o fluxo gerado por X . O conjunto $\gamma_p = \{\varphi(t, p) \in U : t \in I_p\}$, isto é, a imagem da curva integral de X pelo ponto $p \in U$ é chamado de *órbita de X pelo ponto p* .

Observe que $q \in \gamma_p$ se, e somente se, $\gamma_q = \gamma_p$. De fato, se $q \in \gamma_p$, então existe $s \in I_p$ tal que $q = \varphi(s, p)$. Logo, pelo item (b) do Teorema 1.1.3

$$\begin{aligned} \varphi(t, p) &= \varphi(t, (\varphi(s, p))) \\ &= \varphi(t + s, p), \quad \forall t \in I_q = I_p - s \end{aligned}$$

Portanto, $\gamma_q = \{\varphi(t, q) \in U : t \in I_q\} = \gamma_p$. E reciprocamente, se $\gamma_p = \gamma_q$, então $q = \varphi(0, q) \in \gamma_q = \gamma_p$, isto é, $q \in \gamma_p$.

Este resultado define uma relação de equivalência entre órbitas de um campo vetorial X .

Assim, duas órbitas de X coincidem ou são disjuntas e, portanto, o conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ pode ser decomposto pelas órbitas de X , sendo que cada órbita pode ser:

1. biunívoca com um intervalo de \mathbb{R} ;
2. um ponto; ou
3. difeomorfa a um círculo;

correspondendo cada caso a uma das alternativas do Teorema 1.1.4 a seguir.

Teorema 1.1.4. *Sejam $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe $C^k, k \geq 1$ em U e $\varphi_x : I_x \rightarrow U$ solução máxima única em I_x do problema de Cauchy (1.3) com $x \in U$. Então, verifica-se somente uma das seguintes alternativas:*

- (a) φ_x é injetora;
- (b) $I_x = \mathbb{R}$ e φ_x é constante;
- (c) $I_x = \mathbb{R}$ e φ_x é periódica, isto é, existe $\tau \in \mathbb{R}, \tau > 0$ tal que $\varphi_x(t + \tau) = \varphi_x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi_x(t_1) \neq \varphi_x(t_2)$ se $|t_1 - t_2| < \tau$.

No caso (b) $\{p\} = \gamma_p$; a órbita chama-se *ponto singular*; no caso (c) a órbita chama-se *fechada* ou *periódica*.

1.2 O Teorema do Fluxo Tubular

Definição 1.2.1. *Sejam $X_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos vetoriais de classe $C^k, k \geq 1$, nos abertos U_1 e U_2 do \mathbb{R}^n , respectivamente, e $\varphi_1 : D_1 \rightarrow U_1$ e $\varphi_2 : D_1 \rightarrow U_2$ os fluxos gerados por X_1 e X_2 , respectivamente.*

- (a) *Diremos que X_1 é topologicamente conjugado a X_2 , se existir um homeomorfismo $h : U_1 \rightarrow U_2$ satisfazendo $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$ para todo $(t, x) \in D_1$.*
- (b) *Diremos que X_1 é C^r -conjugado a X_2 , se existir um difeomorfismo $h : U_1 \rightarrow U_2$ de classe $C^r, r \geq 1$, em U_1 , satisfazendo $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$ para todo $(t, x) \in D_1$.*

Nestes casos tem-se necessariamente $I_1(x) = I_2(h(x))$, onde $I_1(x)$ e $I_2(h(x))$ denotam os intervalos máximos das respectivas soluções máximas. O homeomorfismo h é chamado de conjugação topológica (C^r -conjugação) entre X_1 e X_2 .

Definição 1.2.2. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe $C^k, k \geq 1$, em U e $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ aberto. Uma função*

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow U \\ a &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

de classe C^r , $r \geq 1$, em A é chamada de seção transversal local de X (de classe C^r) quando para todo $a \in A$, $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ e $X(f(a))$ geram o espaço \mathbb{R}^n . Seja $\Sigma = f(A)$ munido da topologia induzida por U . Se $f : A \rightarrow \Sigma$ é um homeomorfismo, então Σ é uma seção transversal de X .

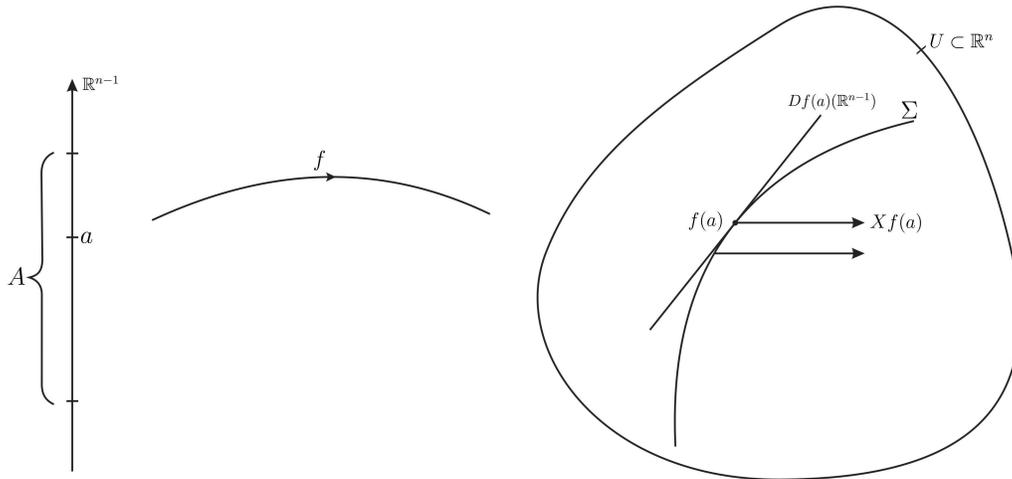


Figura 1.1: Seção transversal.

Decorre da definição anterior, que uma seção transversal Σ de um campo vetorial X é constituída apenas de pontos regulares de X .

Teorema 1.2.1 (Teorema do Fluxo Tubular). *Sejam $p \in U$ um ponto regular do campo vetorial $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , $k \geq 1$, em U e $f : A \rightarrow \Sigma$ uma seção transversal local de X de classe C^k , $k \geq 1$, em A , tal que $f^{-1}(p) = 0 \in A$. Então existe uma vizinhança V de p em U e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe C^k , $k \geq 1$, em V , onde $\varepsilon > 0$ e B é uma bola aberta em \mathbb{R}^{n-1} de centro na origem $0 = f^{-1}(p)$ tal que*

(a) $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$;

(b) h é uma C^k -conjugação entre $X|_V$ e o campo constante $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$,
 $Y = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Corolário 1.2.1. *Seja Σ uma seção transversal de X . Para todo ponto $p \in \Sigma$ existem $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$, uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^n e uma função $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , $k \geq 1$, tais que $\tau(V \cap \Sigma) = \{0\}$. Além disto:*

(a) para todo $q \in V$, a curva integral $\varphi(t, p)$ de $X|_V$ é definida e biunívoca em $J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q))$;

(b) $\xi(q) = \varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$ é o único ponto onde $\varphi(t, q)|_{J_q}$ intersecta a seção Σ . Em particular, $q \in \Sigma \cap V$ se, e somente se, $\tau(q) = 0$;

(c) A função

$$\begin{aligned} \xi : V &\longrightarrow \Sigma \cap V \\ q &\longmapsto \xi(q) = \varphi(\tau(q), q) \end{aligned}$$

é de classe classe C^k , $k \geq 1$, e $D\xi(q) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ é sobrejetora para todo $q \in V$.

Mais ainda, $D\xi(q)v = 0$ se, e somente se, v é colinear com $X(q)$, isto é, $v = \alpha X(q)$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.3 A transformação de Poincaré

A transformação de Poincaré π associada com uma órbita periódica γ de um campo vetorial X é um difeomorfismo que descreve o comportamento qualitativo das órbitas de X em um vizinhança V de γ .

Sejam U um conjunto aberto em \mathbb{R}^n , $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$, em U e $\varphi : D \longrightarrow U$ o fluxo gerado por X . Sejam também $\gamma = \{\varphi(t, p) \in U : 0 \leq t \leq \tau_0\}$ uma órbita periódica ou fechada do campo vetorial X com período $\tau_0 \in \mathbb{R}$, $\tau_0 > 0$, e Σ uma seção transversal de X em p .

Pela continuidade de fluxo gerado por X , $\varphi : D \longrightarrow U$, se $q \in \Sigma$ é ponto suficientemente próximo de $p \in \Sigma$, então a trajetória $\varphi(t, q)$ permanece próxima de γ para todo t em um intervalo compacto contendo $[0, \tau_0]$. A transformação de Poincaré π associada com γ é tal que $\pi(q)$ é o primeiro ponto no qual $\varphi(t, q)$ retorna a seção transversal Σ .

Sendo $\Sigma_0 \subset \Sigma$ o domínio da transformação de Poincaré π , isto é, $\pi : \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma$, então $p \in \Sigma_0$ e $\pi(p) = p$, ou seja, p é ponto fixo ou periódico da transformação de Poincaré.

Muitas propriedades do retrato de fase de X perto de γ podem ser obtidas através da análise de π . Por exemplo as órbitas periódicas de X vizinhas de γ correspondem a pontos periódicos de π que são pontos $q \in \Sigma_0$ para os quais $\pi^n(q) = q$ para algum $n \geq 1$.

O comportamento assintótico das órbitas de X em uma vizinhança $V \subset U$, de $\gamma \subset U$ também é descrito pela transformação de Poincaré π . Assim, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n(q) = p, \quad \forall q \in V \cap \Sigma_0, \quad q \neq p,$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, p), \gamma) = 0,$$

sendo

$$d(\varphi(t, p), \gamma) = \inf\{|\varphi(t, q) - r| : r \in \gamma\}.$$

Definição 1.3.1. *Sejam U um aberto de \mathbb{R}^2 e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Uma órbita periódica γ chama-se ciclo limite se existe uma vizinhança V de γ tal que γ é a única órbita fechada de X que intersecta V .*

Proposição 1.3.1. *Com as notações da definição acima, existem apenas os seguintes tipos de ciclos limite (diminuindo V se necessário):*

- (a) *Estável, quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V$;*
- (b) *Instável, quando $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V$;*
- (c) *Semi-estável, quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V \cap \text{Ext} \gamma$; e $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V \cap \text{Int} \gamma$, ou o contrário.*

Capítulo 2

O Teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais suaves no plano

Este capítulo é dedicado a demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson, que nos permite entender qualitativamente o comportamento de órbitas de um campo planar quando o tempo vai para o infinito e a semi-órbita positiva (negativa) está contida em um subconjunto compacto do \mathbb{R}^2 .

2.1 Conjuntos limites

Sejam U um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$, em U .

Seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ a curva integral de X passando pelo ponto p , definida no seu intervalo máximo $I_p = (\tau^-(p), \tau^+(p))$. Se $\tau^+(p) = +\infty$, define-se o conjunto

$$\omega(p) = \{q \in U : \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow +\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}.$$

Analogamente, se $\tau^-(p) = -\infty$, define-se o conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in U : \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}.$$

Os conjuntos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ são chamados, respectivamente, de *conjunto ω -limite* e *conjunto α -limite* de p .

Observação 2.1.1.

- (a) Se p é um ponto singular de campo X , então, $\alpha(p), \omega(p) = \{p\}$, pois neste caso $\varphi(t) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (b) Se γ_p é a órbita de X pelo ponto p e $q \in \gamma_p$, então $\omega(p) = \omega(q)$. De fato, se $q \in \gamma_p$, existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $\varphi(t, q) = \varphi(t + c, p)$. Analogamente, $\alpha(p) = \alpha(q)$.

Em virtude do item (b) desta observação podemos definir

Definição 2.1.1. O conjunto ω -limite de uma órbita γ , que denotamos por $\omega(\gamma)$, é o conjunto $\omega(p)$ para qualquer $p \in \gamma$. O conjunto α -limite de uma órbita γ , que denotaremos por $\alpha(\gamma)$, é o conjunto $\alpha(p)$, para qualquer $p \in \gamma$.

Definição 2.1.2.

- (a) A semiórbita positiva de X passando por p e contida em γ_p é o conjunto $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p) : t \geq 0\}$.
- (b) A semiórbita negativa de X passando por p e contida em γ_p é o conjunto $\gamma_p^- = \{\varphi(t, p) : t \leq 0\}$.

Teorema 2.1.1. Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$, definido num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e γ_p^+ (respectivamente, γ_p^-) a semiórbita positiva (respectivamente, a semiórbita negativa) do campo X pelo ponto p . Se γ_p^+ (respectivamente, γ_p^-) está contida num subconjunto compacto $K \subset U$, então

- (a) $\omega(p) \neq \emptyset$ (respectivamente, $\alpha(p)$);
- (b) $\omega(p)$ é compacto (respectivamente, $\alpha(p)$);
- (b) $\omega(p)$ é invariante por X (respectivamente, $\alpha(p)$), isto é, se $q \in \omega(p)$, então a curva integral de X por q está contida em $\omega(p)$;
- (d) $\omega(p)$ é conexo (respectivamente, $\alpha(p)$).

Demonstração.

- (a) Para $n = 1, 2, 3, \dots$, defina $t_n = n$ e considere a sequência $\{\varphi(n, p)\}$ no compacto K . Existe então uma subsequência convergente $\{n_k\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ tal que $\varphi(t_{n_k}, p)$ converge para um ponto $q \in K$. Seja $t_k = n_k$, temos então $\varphi(t_k, p) \rightarrow q$ quando $k \rightarrow +\infty$, o que implica que $q \in \omega(p)$. Portanto $\omega(p) \neq \emptyset$.
- (b) Temos que $\omega(p) \subseteq \overline{\gamma^+(p)} \subseteq K$. Como $\omega(p)$ está contido em K compacto, basta mostrar que $\omega(p)$ é fechado.

Seja $q_n \in \omega(p)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, tal que $q_n \rightarrow q$, quando $n \rightarrow +\infty$, devemos mostrar que $q \in \omega(p)$.

Como $q_n \in \omega(p)$, existem t_n , $t_1 < t_2 < t_3 \dots$ onde

$$d(\varphi(t_n, p), q_n) < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Seja $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $d(q_n, q) < \frac{\varepsilon}{2}$; n_0 pode ser tomado de tal forma que $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Segue que

$$\begin{aligned} d(\varphi(t_n, p), q) &\leq d(\varphi(t_n, p), q_n) + d(q_n, q) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto $q \in \omega(p)$ e assim $\omega(p)$ é fechado.

- (c) Seja $q \in \omega(p)$ e $\psi(t, q)$ a trajetória do campo X passando no ponto q quando $t = 0$. Um ponto desta trajetória é da forma $\varphi(\tau, q) = \tilde{q}$.
- Como $q \in \omega(p)$ existe um sequência $\{t_n\}$ tal que $t_n \rightarrow +\infty$ e $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Seja $s_n = t_n + \tau$ e como $\varphi(t_n + \tau, p) = \varphi(\tau, \varphi(t_n, p))$ segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(s_n, p) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n + \tau, p) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\tau, \varphi(t_n, p)) \\ &= \varphi(\tau, \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, p)) \\ &= \varphi(\tau, q) \\ &= \tilde{q} \end{aligned}$$

Portanto $\tilde{q} \in \omega(p)$ e $\omega(p)$ é invariante por X .

(d) Suponha que $\omega(p)$ não seja conexo. Podemos encontrar conjuntos A e B fechados em $\omega(p)$, não vazios e disjuntos tais que $\omega(p) = A \cup B$. Note que A e B são conjuntos compactos e considere $d > 0$ a distância entre A e B . Seja $a \in A$ e $b \in B$, então podemos tomar uma sequência $\{t_n\}$ tais que $\varphi(t_n, p) \rightarrow a$, se n é ímpar e $\varphi(t_n, p) \rightarrow b$ se n é par. Além disso, podemos construir $\{t_n\}$ de forma que:

$$\begin{cases} \text{se } n \text{ é ímpar } d(\varphi(t_n, p), A) < \frac{d}{2}; \\ \text{se } n \text{ é par } d(\varphi(t_n, p), A) > \frac{d}{2}. \end{cases}$$

Para $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ e n ímpar a função $g(t) = d(\varphi(t, p), A)$ é contínua e $g(t_n) < \frac{d}{2}$ e $g(t_{n+1}) > \frac{d}{2}$. Segue do Teorema do valor intermediário que existe $t_n^* \in (t_n, t_{n+1})$ tal que

$$g(t_n^*) = d(\varphi(t_n^*, p), A) = \frac{d}{2}.$$

Como $\omega^+(p) \subset K$, então existe uma subsequência convergente da sequência $\{\varphi(t_n^*, p)\}$ que por simplicidade denotaremos por $\{\varphi(t_n^*, p)\}$. Seja

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n^*, p) = q$$

então $q \in \omega(p)$. Mas,

- $q \notin A$, pois se $q \in A$, então $d(q, A) = 0$;
- $q \notin B$, pois se $q \in B$, então $d(q, A) \geq d$.

O que contradiz o fato de $q \in \omega(p) \subset A \cup B$. Logo $\omega(p)$ é conexo. ■

2.2 O Teorema de Poincaré-Bendixson

No que segue, vamos supor U um subconjunto aberto do \mathbb{R}^2 e X um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$, em U .

Teorema 2.2.1 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ uma curva integral de X , definida para todo $t \geq 0$, tal que $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p) : t \geq 0\}$ esteja contida num conjunto compacto $K \subset U$. Suponha que o campo X possua um número finito de singularidades em $\omega(p)$. Então têm-se uma das seguintes alternativas:*

- (a) *Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.*
- (b) *Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando $t \rightarrow \pm\infty$.*
- (c) *Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto singular.*

O fator essencial para a validade do Teorema de Poincaré-Bendixson é o fato que no \mathbb{R}^2 vale o Teorema da Curva de Jordan, o que não é válido no toro, nem nos espaços euclidianos de dimensão maior que 2.

Teorema 2.2.2 (Teorema da Curva de Jordan). *Se J é um curva fechada e simples em \mathbb{R}^2 , isto é, homeomorfa a S^1 , então o conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus J$ possui duas componentes conexas, uma limitada, denotada por $Int J$ e outra não limitada, denotada por $Ext J$, cuja fronteira comum é J .*

Demonstraremos o Teorema de Poincaré-Bendixson em uma sequência de lemas para facilitar a prova.

Lema 2.2.1. *Se $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$ é um ponto regular, sendo Σ uma seção transversal a X e $\gamma = \{\varphi(t)\}$ uma órbita de X , então p pode ser expresso como limite de uma sequência de pontos da órbita $\{\varphi(t_n)\}$ sobre Σ .*

Demonstração. Suponhamos $\gamma = \{\varphi(t)\} = \{\varphi(t, q)\}$ e $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$. Seja V um vizinhança tubular de p tal que Σ intersecta todas as órbitas de X com condição inicial em V .

Como $p \in \omega(\gamma)$, existe uma sequência $\{\tilde{t}_n\}$ tal que $\tilde{t}_n \rightarrow +\infty$ e $\varphi(\tilde{t}_n) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow +\infty$ e $\varphi(\tilde{t}_n) \in V$ para todo $n \geq 1$.

Para cada $q \in V$ defina $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ (τ é definida como no Corolário 1.2.1), onde $\varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$, sendo $\tau(q)$ é o menor valor (em módulo) tal que $\varphi(t, q) \in \Sigma$.

Para cada $n \geq 1$, defina $\tau_n = \tau(\varphi(\tilde{t}_n)) = \tau(q_n)$, onde $q_n = \varphi(\tilde{t}_n) \rightarrow p$.

Defina $p_n = \varphi(t_n, q_n) \in \Sigma$. Como τ é contínua segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\tau_n, q_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\tau_n, \varphi(\tilde{t}_n)) \\ &= \varphi\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\tilde{t}_n)\right) \\ &= \varphi\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau(q_n), p\right) \\ &= \varphi(\tau(p), p) \\ &= \varphi(0, p) \\ &= p \end{aligned}$$

■

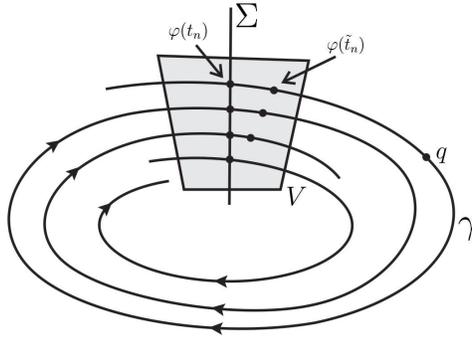


Figura 2.1: Ilustração do Lema 2.2.1.

Como X é um campo definido em $U \subseteq \mathbb{R}^2$, uma seção transversal Σ de X é difeomorfa a um intervalo de \mathbb{R} . Podemos orientar Σ , o que implica uma ordem em Σ . Faz sentido com respeito a orientação de Σ comparar $p, q \in \Sigma$, ou seja, $p > q$, $p < q$ ou $p = q$.

Lema 2.2.2. *Seja Σ um seção transversal a X contida em U . Se γ é uma órbita de X e $p \in \Sigma \cap \gamma$, então $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p) : t > 0\}$ intersecta Σ numa sequência monótona $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$*

Demonstração. Pelo Teorema do Fluxo Tubular os valores de $t \geq 0$ tais que $\varphi(t, p) \in \Sigma$ formam um conjunto discreto sobre \mathbb{R} , logo enumerável e ordenado. Seja $D = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots\}$ o conjunto dos valores de t , tais que $\varphi(t) \in \Sigma$, $t \geq 0$.

Seja $p_1 = p$. Defina, caso exista, $p_2 = \varphi(t_1, p)$. Indutivamente, podemos definir $p_n = \varphi(t_{n-1}, p)$.

Se $p_1 = p_2$, então a órbita γ é fechada de período $\tau = t_1$ e a sequência p_n é constante.

Se $p_1 \neq p_2$. Digamos, $p_2 > p_1$, iremos mostrar que se existir p_3 , então $p_3 > p_2$.

Vamos orientar a seção transversal como na Figura 2.2 (a). Como Σ é conexa e X é contínua, segue que as órbitas de X intersectam a seção transversal numa mesma direção, digamos da esquerda para direita como na Figura 2.2 (b). Caso contrário, como X é contínuo existiria pelo menos um ponto $z \in \Sigma$ com $X(z) = 0$ ou com a mesma direção de Σ , daí Σ não seria um seção transversal.

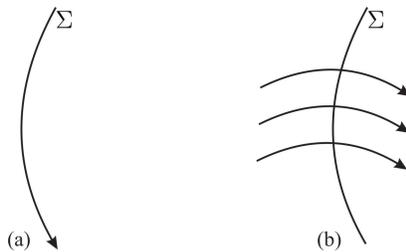


Figura 2.2: Orientação da seção Σ .

Considere a curva de Jordan J formada pelo arco $[p_1, p_2]_\gamma$ sobre a órbita $\varphi(t, p)$, $t \in [t_0, t_1]$ unido com o segmento $\overline{p_1 p_2} \subset \Sigma$, como mostra a Figura 2.3.

Podemos afirmar que a curva $\varphi(t, p)$, $t > t_1$ permanece na região limitada por J . De fato, se $\varphi(t, p)$, $t > t_1$ escapar da região limitada por J , então a órbita deve cortar J .

- Se isto ocorrer em um ponto de $[p_1, p_2]_\gamma$, temos um contradição com o Teorema de Existência e Unicidade;

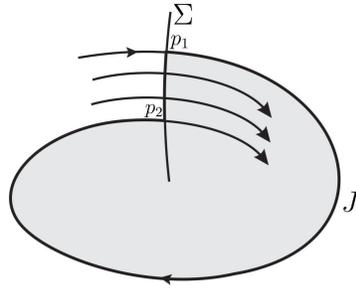


Figura 2.3: Curva de Jordan.

- Se a órbita $\varphi(t, p)$, $t > t_1$ escapar por $\overline{p_1 p_2}$, então esta reverte o sentido de fluxo sobre Σ , o que contradiz o Teorema do Fluxo Tubular.

Logo $\varphi(t, p)$ está na região limitada por J , e com isso $p_3 > p_2 > p_1$. Prosseguindo desta forma $p_{n+1} > p_n$, para todo $n \geq 0$.

Se ocorrer $p_1 < p_0$, então teríamos de modo análogo $p_{n+1} < p_n$, para todo $n \geq 0$. ■

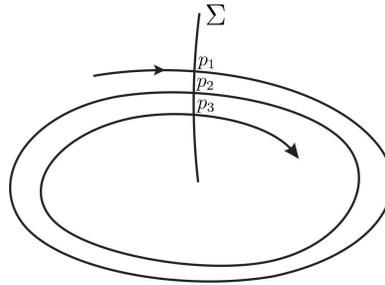


Figura 2.4: Ordenação da interseção de γ^+ com Σ .

Lema 2.2.3. *Se Σ é uma seção transversal ao campo X e $p \in U$, então Σ intersecta $\omega(p)$ no máximo em um ponto.*

Demonstração. Em virtude do lema anterior, o conjunto de pontos de γ_p^+ em Σ tem no máximo um ponto limite, pois o mesmo forma uma sequência monótona. Daí o resultado segue do Lema 2.2.1. ■

Lema 2.2.4. *Sejam $p \in U$, com γ_p^+ contida num compacto, e γ uma órbita de X com $\gamma \in \omega(p)$. Se $\omega(\gamma)$ contém pontos regulares então γ é uma órbita fechada e $\omega(p) = \gamma$.*

Demonstração. Seja $q \in \omega(\gamma)$ um ponto regular, Σ_q uma seção transversal a X em q e V uma vizinhança tubular de q .

Como $q \in \omega(\gamma)$, então pelo Lema 2.2.1 existe uma sequência $\{t_n\}$ tal que $t_n \rightarrow +\infty$, $\varphi(t_n) \rightarrow q$, quando $n \rightarrow +\infty$ e $\varphi(t_n) \in \Sigma_q$, para todo $n \geq 1$. Como $\varphi(t_n) \in \omega(p) \cap \Sigma_q$, pelo Lema 2.2.3, $\omega(p)$ intersecta Σ_q em um único ponto, o que implica que a sequência $\{\varphi(t_n)\}$ é constante e $\varphi(t_n) \rightarrow q$ para todo $n \geq 1$. Logo γ é uma órbita periódica.

Agora mostremos que $\gamma = \omega(p)$. Como $\omega(p)$ é conexo e não vazio, basta mostrar que o conjunto γ é fechado e aberto em $\omega(p)$.

- γ é fechado, pois é a imagem por uma função contínua de um intervalo fechado e limitado.
- γ é aberto, para isso vamos mostrar que abertos de γ induzidos de \mathbb{R}^2 coincidem com abertos de $\omega(p)$ induzidos de \mathbb{R}^2 .

Seja $\bar{p} \in \gamma$ e $V_{\bar{p}}$ uma vizinhança tubular aberta de \bar{p} . Mostremos que $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$.

Como $\gamma \subset \omega(p)$ então $V_{\bar{p}} \cap \gamma \subset V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. Suponha que exista $\bar{q} \in V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$, mas $\bar{q} \notin V_{\bar{p}} \cap \gamma$. Em particular $\bar{q} \notin \gamma$. Podemos usar o Teorema do Fluxo Tubular para encontrar um ponto $\varphi(\tau(\bar{q}), \bar{q}) = \tilde{q} \in \Sigma_{\bar{p}} \cap V_{\bar{p}}$. Como $\bar{q} \notin \gamma$, então $\tilde{q} \notin \gamma$. Com isso $\tilde{q} \neq \bar{p}$ são pontos distintos de $\omega(p)$ em $\Sigma_{\bar{p}}$, o que contradiz o Lema 2.2.3. Logo $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. Portanto γ é aberto em $\omega(p)$, o que implica $\omega(p) = \gamma$. ■

Agora demonstraremos o Teorema de Poincaré-Bendixson.

Demonstração.

- (a) Se $\omega(p)$ contém apenas pontos regulares e $q \in \omega(p)$, então a órbita $\gamma_q \subset \omega(p)$. Sendo $\omega(p)$ compacto resulta que $\omega(\gamma_q) \neq \emptyset$. Decorre imediatamente do Lema 2.2.4 que $\omega(p) = \gamma_q$ é uma órbita periódica.

- (b) Se $\omega(p)$ contiver pontos regulares e singulares e seja q é um ponto regular de $\omega(p)$ e $\gamma_q \subset \omega(p)$, pelo Lema 2.2.4, $\alpha(\gamma_q)$ e $\omega(\gamma_q)$ não pode conter pontos regulares, pois neste caso $\omega(p)$ seria um órbita periódica e não conteria pontos singulares. Logo $\alpha(\gamma_q)$ e $\omega(\gamma_q)$ contém apenas pontos singulares. Por hipótese, o número de singularidades do campo X é finito, assim $\alpha(\gamma_q)$ e $\omega(\gamma_q)$ são conjuntos discretos e conexos. Portanto, $\alpha(\gamma_q)$ e $\omega(\gamma_q)$ consistem de um único ponto singular.
- (c) Se $\omega(p)$ está contido no conjunto pontos de singularidades de X e como o número de singulares de X é finito, então $\omega(p)$ é um conjunto discreto e conexo. Logo $\omega(p)$ consiste de uma única singularidade de X .

■

Capítulo 3

O Teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais contínuos no plano

Neste capítulo apresentaremos os resultados básicos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias em campos vetoriais contínuos no \mathbb{R}^n . Assim como, enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais contínuos no plano, resultado este pouco encontrado na literatura. Os resultados desta seção foram embasados na referência [6].

Neste cenário usaremos alguns fatos que diferem daqueles que usamos para a teoria de campos vetoriais suaves. Neste contexto a unidade de solução não é garantida. Também não temos o Teorema do Fluxo Tubular, mas apresentaremos um forma alternativa de substituí-lo.

3.1 Conceitos básicos para campos vetoriais contínuos no \mathbb{R}^n

Seja U um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Um campo vetorial contínuo em U é uma aplicação $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua. Ao campo vetorial X associamos a equação diferencial

$$x' = X(x). \tag{3.1}$$

A equação diferencial (3.1) é chamada de autônoma, pois ela é independente da variável temporal t .

Definição 3.1.1. *Uma solução para o sistema (3.1) é uma aplicação diferenciável $\varphi : I \rightarrow U$ (I intervalo de \mathbb{R}) tal que*

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)), \quad (3.2)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Estas soluções são chamadas de curvas integrais de X da equação diferencial (3.1).

Para campo vetorial contínuo não é garantida a unicidade de soluções, mas como visto no Capítulo 1 o Teorema de Peano garante a existência de soluções.

O teorema a seguir nos diz que o intervalo maximal de existência de uma curva integral de um campo vetorial contínuo X é aberto e se $-\infty < \tau^- < t < \tau^+ < +\infty$, a imagem da curva integral sairá de qualquer subconjunto compacto do domínio do campo X .

Teorema 3.1.1. *Sejam $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo e φ uma curva integral de X definida em algum intervalo. Então φ pode ser continuada (como curva integral) até um intervalo aberto maximal. Além disso, se (τ^-, τ^+) for o intervalo maximal de existência de φ e $\tau^+ < +\infty$ (respectivamente $\tau^- > -\infty$), então $\varphi(t)$ tenderá a fronteira de U quando $t \rightarrow \tau^+$ (respectivamente $t \rightarrow \tau^-$), isto é, para todo compacto $K \subset U$, existirá um $\varepsilon = \varepsilon(K) > 0$ tal que se $t \in [\tau^+ - \varepsilon, \tau^+)$ (respectivamente $t \in (\tau^-, \tau^- + \varepsilon]$), então $\varphi(t) \notin K$*

A demonstração deste teorema pode ser vista em [6, p. 12].

Teorema 3.1.2. *Seja $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um seqüência de campos vetoriais contínuos definidos no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $X_n \rightarrow X$, uniformemente, quando $n \rightarrow \infty$, em subconjuntos compactos de U . Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\varphi_n : (\tau_n^-, \tau_n^+) \rightarrow U$ uma curva integral máxima de X_n passando por $p_n \in U$. Suponhamos que $p_n \rightarrow p \in U$ quando $n \rightarrow \infty$. Então existe uma curva integral máxima $\varphi(\tau^-, \tau^+) \rightarrow U$ de X passando por p e uma seqüência de inteiros positivos $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfazendo*

$$\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(t) \quad (3.3)$$

onde o limite vale uniformemente em intervalos compactos de (τ^-, τ^+) .

A demonstração deste teorema pode ser vista em [6, p. 14].

Seja $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo. Pelo Teorema de Peano e Teorema 3.1.1, para cada ponto $p \in U$, existe uma curva integral $\varphi_p : I_p \rightarrow U$ de X definida em algum intervalo maximal aberto I_p que depende tanto da curva integral φ_p como do ponto de partida p .

A imagem da curva integral φ_p é o conjunto $\gamma_p = \{\varphi_p(t) : t \in I_p\}$ a qual chamamos de trajetória ou órbita de X passando por p definida em I_p . A definição de semiórbita positiva e a semiórbita negativa de X passando por p é a mesma dada na Definição 2.1.2.

Como a unicidade de trajetórias para campos vetoriais contínuos não é garantida, então elas podem se auto-intersectar ou se intersectar mutuamente. Se uma trajetória se auto-intersectar, então ela naturalmente conterá uma órbita periódica.

Na demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais suaves no plano usamos fortemente o fato da órbita não se auto-intersectar; isto ocorre devido à unicidade de soluções para campos vetoriais suaves. Como para campos vetoriais contínuos a unicidade não é garantida, então definimos o conceito de uma órbita injetiva para campos vetoriais contínuos. Este conceito que será usada na demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson para campos contínuos.

Definição 3.1.2. *Uma trajetória que não se auto-intersecta será dita injetiva.*

Um ponto singular e uma trajetória periódica são exemplos de trajetórias não injetivas.

3.2 O Teorema de Poincaré-Bendixson

Nesta seção, enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais contínuos no plano.

Seja U um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo. Dada uma órbita γ de X definida no intervalo maximal $I_\gamma = (\tau^-(\gamma), \tau^+(\gamma))$. Se $\tau^+(\gamma) = +\infty$, define-se o conjunto

$$\omega(\gamma) = \{q \in U : \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow +\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}.$$

Analogamente, se $\tau^-(\gamma) = -\infty$, define-se o conjunto

$$\alpha(\gamma) = \{q \in U : \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}.$$

Os conjuntos $\omega(\gamma)$ e $\alpha(\gamma)$ são chamados, respectivamente, de *conjunto ω -limite* e *conjunto α -limite* de γ .

O conjunto ω -limite (respectivamente α -limite) de uma órbita γ de X também será chamado de conjunto ω -limite da semiórbita positiva $\gamma^+ \subset \gamma$ (respectivamente conjunto α -limite da semiórbita negativa $\gamma^- \subset \gamma$) e será denotado por $\omega(\gamma^+)$ (respectivamente $\alpha(\gamma^-)$).

Teorema 3.2.1. *Sejam $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo e $\gamma^+ = \{\varphi(t) : t \geq 0\}$ uma semiórbita positiva de X . Então $\omega(\gamma^+)$ é fechado. Se γ^+ estiver contida num subconjunto compacto de U , então $\omega(\gamma^+)$ é não vazio, compacto e conexo.*

A demonstração deste teorema é análoga a demonstração do Teorema 2.1.1 e também pode ser vista na referência [6, p.145].

Note que, o Teorema 3.2.1 difere do Teorema 2.1.1 apenas pela questão do conjunto $\omega(\gamma)$ não ser invariante. Fato este que, ocorre devido a não unicidade de trajetórias para campos vetoriais contínuos. Mas, o seguinte teorema nos dá um certo tipo de "invariância" para o conjunto $\omega(\gamma)$.

Teorema 3.2.2. *Sejam $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo e $\gamma^+ = \{\varphi(t) : t \geq 0\}$ uma semiórbita positiva de X . Se $p \in \omega(\gamma^+)$, então X terá pelo menos uma órbita γ_p passando por p satisfazendo $\gamma_p \subset \omega(\gamma^+)$. Além disso, se γ^+ estiver contida num subconjunto compacto de U , então γ_p estará definida em $(-\infty, \infty)$ e $[\gamma_p \cup \alpha(\gamma_p) \cup \omega(\gamma_p)] \subset \omega(\gamma^+)$.*

A demonstração deste teorema pode ser vista na referência [6, p.145].

Corolário 3.2.1. *Nas condições do Teorema 3.2.2, se $\omega(\gamma^+)$ consistir de um único ponto $p \in U$, então p será um ponto singular singular de X e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma^+(t) = p$.*

No que segue, vamos supor U um subconjunto aberto do \mathbb{R}^2 e X um campo vetorial contínuo em U .

Definição 3.2.1. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo, em U e $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto. Uma função*

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow U \\ a &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

de classe C^r , $r \geq 1$, em A é chamada de seção transversal local de X (de classe C^r) quando para todo $a \in A$, $Df(a)(\mathbb{R})$ e $X(f(a))$ geram o espaço \mathbb{R}^2 . Seja $\Sigma = f(A)$ munido da topologia induzida por U . Se $f : A \rightarrow \Sigma$ é um homeomorfismo, então Σ é uma seção transversal de X .

Como consequência da definição anterior todo ponto da seção transversal Σ é regular e Σ não é tangente a qualquer órbita que o intersecta. E ainda, se $p \in U$ for um ponto regular de X , então existirá um segmento transversal passando por p .

Note que, devido ao fato de Σ ser conexo e da continuidade do campo X , as trajetórias de X cruzam a seção transversal Σ sempre no mesmo sentido, digamos, da esquerda para a direita (veja Figura 3.1). Caso contrário, como X é contínuo existiria pelo menos um ponto $z \in \Sigma$ com $X(z) = 0$, ou $X(z)$ teria a mesma direção do vetor tangente a Σ e com isso Σ não seria um seção transversal.

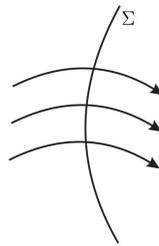


Figura 3.1: Trajetórias cruzando Σ .

Para campos vetoriais contínuos não temos o Teorema do Fluxo Tubular (Teorema 1.2.1). Assim, o seguinte lema é uma forma de substituí-lo neste ambiente. Tal resultado pode ser verificado na demonstração do Teorema 4.1 de [6, p. 152].

Lema 3.2.1. *Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo, temos:*

- (a) Seja Σ uma seção transversal passando por um ponto $p \in U$. Então existem $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^2 tais que todas as trajetórias de X passando por pontos de V estão definidas em $[-\varepsilon, \varepsilon]$ e intersectam Σ uma única vez para $|t| \leq \varepsilon$.
- (b) Um arco de trajetória fechado e limitado de X intersecta uma seção transversal no máximo em um número finito de pontos.

Demonstração.

- (a) Usaremos a aproximação linear da solução na demonstração. Seja $\delta > 0$ arbitrário, $p \in U$ e Σ uma seção transversal passando por p . Tome uma vizinhança V de p , tal que $V \in \bar{V}$, pelo Corolário 1.1.1, existe um $\varepsilon > 0$ de forma que todas as trajetórias γ_q de X passando por $q \in V$ estejam definidas em $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Seja γ_p uma trajetória de X por p e $r(t) = p + tX(p)$, como

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\varphi_p(t) - (p + tX(p))|}{|t|} = 0.$$

Se

$$\frac{|\varphi_p(t) - (p + tX(p))|}{|t|} < \delta,$$

então

$$|\varphi_p(t) - (p + tX(p))| < |t|\delta.$$

Seja agora γ_q uma trajetória de X passando por $q \in V$ e $r(t) = q + tX(p)$. Como δ é arbitrário podemos tomar δ de forma que

$$|\varphi_q(t) - (q + tX(p))| < |t|\delta$$

para todo $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Logo, para V suficientemente pequena γ_q intersecta Σ pelo menos uma vez, como as trajetórias de X cruzam Σ no mesmo sentido γ_q intersecta Σ no máximo uma vez se $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

- (b) Segue de (a) que uma trajetória intersecta Σ em um conjunto discreto. Assim, para um arco de trajetória fechado e limitado segue que o conjunto é finito.



Teorema 3.2.3 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Seja $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo e $\gamma^+ = \{\varphi(t) : t \geq 0\}$ uma semiórbita positiva injetiva de X contida num compacto $K \subset U$. Suponha que X possua um número finito de singularidades em $\omega(\gamma^+)$. Então ocorre uma das seguintes alternativas:*

- (a) $\omega(\gamma^+)$ é um órbita periódica;
- (b) $\omega(\gamma^+)$ é um ponto singular;
- (c) $\omega(\gamma^+)$ é constituído de pontos singulares $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ e de uma sequência (finita ou infinita) de arcos de órbitas $\{\varphi(t) : -\infty \leq \alpha_- < t < \alpha_+ \leq \infty\}$ de X que não contém pontos singulares, mas $\varphi(\alpha_+) = \lim_{t \rightarrow \alpha_+} \varphi(t)$ (respectivamente $\varphi(\alpha_-) = \lim_{t \rightarrow \alpha_-} \varphi(t)$) existe e pertence ao conjunto $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Observação 3.2.1. *Como a notação do Teorema 3.2.3, quando as condições iniciais determinam soluções únicas de X , então $\alpha_- = -\infty$ e $\alpha_+ = \infty$, pois $\varphi_k(t) = p_k$ é a única solução de X passando pelo ponto singular p_k .*

Antes da demonstração do teorema apresentaremos alguns resultados que facilitarão a demonstração do teorema.

Lema 3.2.2. *Seja $\gamma_+ = \{\varphi(t) : t \geq 0\}$ uma semiórbita positiva injetiva de um campo vetorial contínuo $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e seja Σ uma seção transversal a X . Se $\gamma^+ \cap \Sigma \neq \emptyset$, então γ^+ intersectará Σ em uma sequência estritamente monótona.*

A demonstração deste lema é análoga a feita no Lema 2.2.2, pois a semiórbita injetiva não se auto intersecta e não reverte o sentido sobre Σ , pelo Lema 3.2.1.

Lema 3.2.3. *Seja $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e considere $\gamma_+ = \{\varphi(t) : t \geq 0\}$ uma semiórbita positiva injetiva de X contida num compacto $K \subset U$. Então uma seção transversal Σ intersecta $\omega(\gamma_+)$, no máximo, em um ponto.*

Demonstração. Seja $p \in \omega(\gamma^+) \cap \Sigma$ um ponto regular. Sabemos que $\omega(\gamma^+)$ é compacto, assim pelo Lema 3.2.1 (b) $\omega(\gamma^+)$ intersecta Σ em um número finito de pontos e do lema

anterior γ^+ intersecta Σ em uma sequência monótona. Logo conjunto de pontos de γ^+ em Σ tem no máximo um ponto de acumulação. Daí $\omega(\gamma^+) \cap \Sigma$ só poderá conter o ponto p e o resultado segue. ■

Lema 3.2.4. *Seja $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e considere $\gamma^+ = \{\varphi(t) : t \geq 0\}$ uma semiórbita positiva injetiva de X contida num compacto $K \subset U$. Se $\omega(\gamma^+)$ contiver somente pontos regulares, então $\omega(\gamma^+)$ será uma órbita periódica.*

Demonstração. Seja $p \in \omega(\gamma^+)$ um ponto regular. Pelo Teorema 3.2.2, existe uma órbita γ_p de X passando por p , definida em \mathbb{R} e satisfazendo $\gamma_p \in \omega(\gamma^+)$. Além disso, $\omega(\gamma_p) \subset \omega(\gamma^+)$, pois γ^+ está contida num compacto K .

Note que pelo Teorema 3.2.1 $\omega(\gamma_p) \neq \emptyset$, pois $\omega(\gamma^+)$ é compacto. Seja $q \in \omega(\gamma_p)$, então q é um ponto regular, pois $\omega(\gamma^+)$ só contém pontos regulares. Considere uma seção transversal Σ_q passando por q .

Como $q \in \omega(\gamma_p) \subset \omega(\gamma^+)$, então a órbita γ_p intersecta Σ_q em infinitos pontos, estes pontos que juntamente com q , pertencem a $\omega(\gamma^+)$. Mas, pelo Lema 3.2.3 $\omega(\gamma^+)$ intersecta Σ_q , no máximo, em um ponto; logo estes pontos coincidem. Assim, existem números positivos $t_1 < t_2$ tais que $q = \varphi_p(t_1) = \varphi_p(t_2)$. Dessa forma, X possui uma órbita periódica $\tilde{\gamma}$ de período $\tau = t_2 - t_1$, tal que $\tilde{\varphi}(t) = \varphi_p(t)$ para $t \in [t_1, t_2]$. Como φ_p não é constante em nenhum intervalo (caso fosse seria um ponto singular), podemos supor que $\tilde{\varphi}(t_0) \neq \tilde{\varphi}(\hat{t})$ para $0 \leq t_0 < \hat{t} < \tau$.

- Afirmação: $\omega(\gamma^+) = \tilde{\gamma}$.

De fato, já sabemos que $\tilde{\gamma} \subset \omega(\gamma^+)$, devemos mostrar que $\omega(\gamma^+) \subset \tilde{\gamma}$. Suponha por contradição que $\omega(\gamma^+) \setminus \tilde{\gamma} \neq \emptyset$. Como $\tilde{\gamma} \subset \omega(\gamma^+)$ e $\omega(\gamma^+)$ é conexo, então $\omega(\gamma^+) \setminus \tilde{\gamma}$ tem um ponto de acumulação $\tilde{p} \in \tilde{\gamma}$. Seja $\Sigma_{\tilde{p}}$ uma seção transversal passando por \tilde{p} . Como toda vizinhança de \tilde{p} contém pontos de $\omega(\gamma^+) \setminus \tilde{\gamma}$, pelo Teorema 3.2.2 existe um ponto $p_* \in \omega(\gamma^+) \setminus \tilde{\gamma}$ e uma órbita $\gamma_{p_*} \subset \omega(\gamma^+)$ passando por p_* , definida em \mathbb{R} , tal que γ_{p_*} intersecta $\Sigma_{\tilde{p}}$. Pelo Lema 3.2.3 o ponto de interseção é \tilde{p} .

Seja \bar{t} o tempo tal que $\varphi_{p_*}(\bar{t}) = \tilde{p}$ e $\varphi_{p_*}(0) = p_*$. Considere o conjunto $A = \{t \in [0, \bar{t}] : \varphi_{p_*}(t) \in \tilde{\gamma}\}$. Como o conjunto A é fechado, existe um tempo mínimo $\eta \in A$, tal que $0 < \eta \leq \bar{t}$.

Tome $\varepsilon > 0$, assim $0 < \eta - \varepsilon < \eta \leq \bar{t}$. Seja $s = \eta - \varepsilon$, como $s \notin A$ e $\varphi_{p_*}(s)$ é um ponto regular, existe uma seção transversal Σ_* passando por $\varphi_{p_*}(s)$ que intersecta $\tilde{\gamma}$ e γ_{p_*} em dois pontos distintos (ver Figura 3.2). Assim, temos uma contradição com o Lema 3.2.3. Portanto $\omega(\gamma^+) = \tilde{\gamma}$. ■

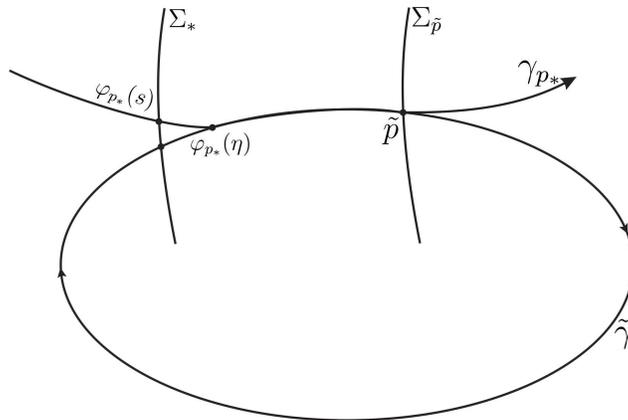


Figura 3.2: As seções transversais Σ_* e $\Sigma_{\tilde{p}}$.

Corolário 3.2.2. *Seja $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e considere $\gamma_+ = \{\varphi(t) : t \geq 0\}$ uma semiórbita positiva injetiva de X contida num compacto $K \subset U$. Se existir um trajetória periódica $\tilde{\gamma}$ em $\omega(\gamma^+)$ consistindo somente de pontos regulares, então $\omega(\gamma^+) = \tilde{\gamma}$.*

Demonstração. Segue da afirmação na demonstração do teorema anterior. ■

Corolário 3.2.3. *Seja γ^+ um semiórbita positiva injetiva de um campo vetorial contínuo $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e seja $p \in \omega(\gamma^+)$ um ponto regular. Então existe uma vizinhança V de p em U tal que X possui um única órbita passando por p em $\omega(\gamma^+) \cap V$.*

Demonstração. Suponha $p \in \omega(\gamma^+) \cap V$ e que exista duas órbitas distintas passando por $p \in \omega(\gamma^+)$. Seja Σ uma seção transversal passando por p . Assim como feito na demonstração do teorema anterior uma pequena translação em Σ em um direção conveniente, é uma seção transversal que intersecta ambas as órbitas passando por p em pontos distintos em $\omega(\gamma^+)$. Contradizendo o Lema 3.2.3. ■

Agora demonstraremos o Teorema de Poincaré-Bendixson (Teorema 3.2.3).

Demonstração. Se $\omega(\gamma^+)$ contiver somente pontos regulares, então pelo Lema 3.2.4 $\omega(\gamma^+)$ é uma órbita periódica.

Se $\omega(\gamma^+)$ não contiver pontos regulares, então $\omega(\gamma^+)$ contém somente pontos singulares, como X tem um número finito de pontos singulares em $\omega(\gamma^+)$ e $\omega(\gamma^+)$ é um conjunto conexo e discreto, temos que $\omega(\gamma^+)$ é um ponto singular.

Suponhamos agora que $\omega(\gamma^+)$ contenha pontos regulares e singulares. Pelo Teorema 3.2.2, para cada ponto regular p em $\omega(\gamma^+)$, existe um órbita γ_p de X passando por p definida em \mathbb{R} e satisfazendo $\gamma_p \subset \omega(\gamma^+)$. Prosseguindo, temos a seguinte afirmação:

- γ_p contém arcos de órbitas $\{\varphi(t) : -\infty \leq \alpha_- < t < \alpha_+ \leq \infty\}$ de X que não contém pontos singulares, mas $\varphi(\alpha_+) = \lim_{t \rightarrow \alpha_+} \varphi(t)$ (respectivamente $\varphi(\alpha_-) = \lim_{t \rightarrow \alpha_-} \varphi(t)$) existe e pertence ao conjunto $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Para demonstrar isto, iremos considerar somente a semiórbita positiva $\gamma_p^+ \subset \gamma_p$, pois para a semiórbita negativa $\gamma_p^- \subset \gamma_p$ o argumento é análogo. Daí, podemos afirmar que:

- Para todo $t \geq 0$, $t = \alpha_+$, $\varphi_p(\alpha_+)$ é um ponto singular para um tempo finito ou infinito, ou seja, $\alpha_+ < \infty$ ou $\alpha_+ = \infty$.

De fato. Se γ_p^+ só contém pontos regulares, procedendo como na demonstração do Lema 3.2.4 γ_p^+ contém um órbita periódica $\tilde{\gamma}$. Então pelo Corolário 3.2.2, $\tilde{\gamma} = \omega(\gamma^+)$, o que é uma contradição, pois por hipótese $\omega(\gamma^+)$ contém pontos regulares e singulares. Logo, γ_p^+ contém pontos singulares ou $\omega(\gamma_p^+)$ consiste de pontos singulares, e como ele é conexo, então $\omega(\gamma_p)$ é um ponto singular.

Agora mostraremos que o conjunto dos arcos de órbitas contidos em $\omega(\gamma^+)$ é enumerável. Afirmamos que existe uma única $\gamma_p^+ \subset \omega(\gamma^+)$ tal que $\gamma_p^+(\alpha_+)$ é um singularidade. De fato, caso exista uma outra órbita $\bar{\gamma}_p^+$ passando por p , então pelos mesmos argumentos usado na demonstração do Lema 3.2.4 uma pequena translação na seção transversal Σ passando por p seria uma outra seção transversal intersectando γ_p^+ e $\bar{\gamma}_p^+$ em dois pontos distintos. O que é uma contradição.

Como γ^+ é injetiva e o número de singularidades em X é finito, então existe um tempo T tal que se $t \geq T$, onde $\varphi(t)$ não é ponto singular. Assim γ^+ não contém nenhum dos pontos singulares $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Além disso, se $p \in \omega(\gamma^+)$ for um ponto regular e Σ uma seção transversal passando por p , então $\varphi(t) \neq p$ para todo $t \geq 0$, pois $\gamma^+ = \{\varphi(t) : t \geq 0\}$ intersecta Σ em uma sequência monótona de pontos que tende a p , ou seja, $\varphi(t_n) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$. Dessa forma γ^+ não intersecta nenhum desses arcos contido em $\omega(\gamma^+)$, ou seja, γ^+ e $\omega(\gamma^+)$ não têm pontos em comum.

Suponhamos por contradição, que o conjunto dos arcos de trajetórias contidos em $\omega(\gamma^+)$ não seja enumerável. Como X tem um número finito de singularidades em $\omega(\gamma^+)$, então existe um subconjunto não enumerável destes arcos que unem dois pontos singulares p_1 e p_2 . A união de qualquer um ou dois destes arcos forma um curva de Jordan. Como existe no máximo um conjunto enumerável de curvas de Jordan com pares de interiores disjuntos. Então existem uma curva de Jordan J formadas pelos arcos de órbitas J_1 e J_2 , tal que no interior de J existe um arco de órbita J_* ligando p_1 e p_2 (veja Figura 3.3). O que é uma contradição, pois γ^+ não intersecta nem J_1 e nem J_2 , assim não ocorre a Figura 3.3. Portanto, o conjunto dos arcos de órbitas contidos em $\omega(\gamma^+)$ é enumerável.

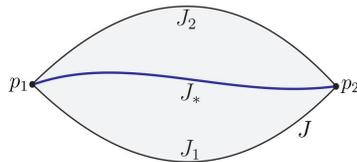


Figura 3.3: Curva de Jordan J .

■

Teorema 3.2.4. *Sejam $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo e $\gamma^+ = \{\varphi(t) : t \geq 0\}$ uma semiórbita positiva de X contida num conjunto compacto $K \subset U$. Então $\omega(\gamma^+)$ contém uma órbita periódica ou um ponto singular.*

Demonstração. Suponha que $\omega(\gamma^+)$ não contenha pontos singulares. Seja $p \in \omega(\gamma^+)$, pelo Teorema 3.2.2, existe um órbita γ_p de X passando por p , definida em \mathbb{R} e satisfazendo $\gamma_p \subset \omega(\gamma^+)$ e como γ^+ está contida num compacto, temos ainda, $\omega(\gamma_p) \subset \omega(\gamma^+)$. Se γ_p

for uma órbita injetiva, então $\omega(\gamma_p)$ é uma órbita periódica $\tilde{\gamma}$, pelo Lema 3.2.4. Se γ_p não for injetiva, temos $\varphi_p(t_1) = \varphi_p(t_2)$ para números reais positivos $t_1 < t_2$, então γ_p conterá um órbita periódica $\tilde{\gamma}$ tal que $\tilde{\varphi}(t) = \varphi_p(t)$ para $t \in [t_1, t_2]$. Logo em ambos os casos, $\omega(\gamma^+)$ conterá uma órbita periódica $\tilde{\gamma}$. ■

Teorema 3.2.5. *Sejam $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo e γ uma órbita periódica de X que não contém pontos singulares. Se o interior de γ estiver contido em U , então existirá um ponto singular de X no interior de γ .*

A demonstração deste teorema pode ser vista em [6, p.151].

Capítulo 4

Campos vetoriais suaves por partes

Campos vetoriais suaves por partes tornaram-se uma classe de sistemas comuns em modelagem de problemas de Matemática, Física ou Engenharia. Muitos autores contribuíram para o estudo de campos de vetores suaves por partes, principalmente Filippov.

Na primeira seção deste capítulo apresentaremos a teoria básica de campos vetoriais suaves por partes utilizando a convenção de Filippov que pode ser verificada em [4]. Na segunda seção apresentaremos e demonstraremos um dos objetivos principais do trabalho que é uma versão do *Teorema de Poincaré-Bendixson* para campos vetoriais suaves por partes embasado na referência [1]. E na terceira seção apresentaremos um exemplo de conjunto minimal não trivial, onde é permitindo movimento de deslize no campo vetorial.

Neste capítulo utilizaremos a notação Γ para representar uma trajetória global de um campo vetorial.

4.1 Conceitos básicos

Seja $V \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto contendo a origem. Consideramos um subvariedade de codimensão 1, S de \mathbb{R}^2 dado por $S = f^{-1}(0)$, onde $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é um função suave tendo $0 \in \mathbb{R}$ como um valor regular, ou seja, $\nabla f(p) \neq 0$, para todo $p \in f^{-1}(0)$. Chamamos S a curva de separação que divide o aberto V em duas regiões

$$S^+ = \{q \in V : f(q) \geq 0\} \text{ e } S^- = \{q \in V : f(q) \leq 0\}.$$

Assumimos que $f(x, y) = y$ em uma vizinhança próximo da origem.

Seja χ o espaço dos vetores C^k , $k \geq 1$, em $V \subseteq \mathbb{R}^2$ e Ω o espaço dos campos de vetores $Z : V \rightarrow \mathbb{R}^2$. Um campo de vetores suaves por partes é definido da seguinte forma:

$$Z(q) = \begin{cases} X(q), & \text{se } f(q) \in S^+ \\ Y(q), & \text{se } f(q) \in S^- \end{cases} \quad (4.1)$$

onde, $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2) \in \chi$.

As trajetórias de Z são soluções de $q' = Z(q)$ e Z é multi-valorado em pontos de S . Para investigar a dinâmica global do sistema (4.1) é essencial estudar o comportamento qualitativo dos subsistemas determinados pelos campos de vetores X , Y e a dinâmica definida na região de descontinuidade S .

Considere a derivada de Lie $Xf(p) = \langle \nabla f(p), X(p) \rangle$ e $X^i f(p) = \langle \nabla X^{i-1} f(p), X(p) \rangle$, $i \geq 2$. Onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual em \mathbb{R}^2 . Nós distinguimos no conjunto S as seguintes regiões de descontinuidades,

- (i) $S^c \subseteq S$ é a *região de costura* se $(Xf(p))(Yf(p)) > 0$ em S^c . Ver Figura 4.1.
- (ii) $S^e \subseteq S$ é a *região de escape* se $(Xf(p)) > 0$ e $(Yf(p)) < 0$ em S^e . Ver Figura 4.2
- (iii) $S^d \subseteq S$ é a *região de deslize* se $(Xf(0)) < 0$ e $(Yf(0)) > 0$ em S^d . Ver Figura 4.3.

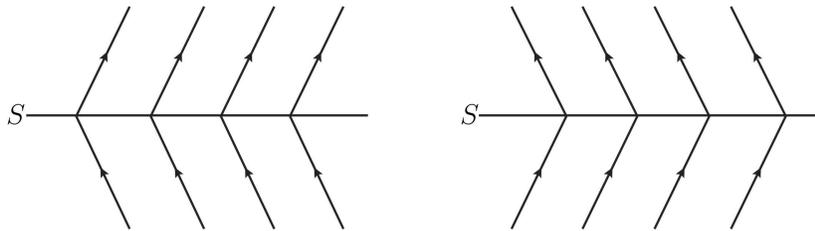


Figura 4.1: Regiões de costura.

Note que na região de costura temos,

$$\begin{aligned} (Xf(p))(Yf(p)) > 0 &\Rightarrow Xf(p) > 0 \text{ e } Yf(p) > 0 \text{ ou } Xf(p) < 0 \text{ e } Yf(p) < 0. \\ &\Rightarrow \langle X(p), \nabla f(p) \rangle > 0 \text{ e } \langle Y(p), \nabla f(p) \rangle > 0 \text{ ou} \\ &\quad \langle X(p), \nabla f(p) \rangle < 0 \text{ e } \langle Y(p), \nabla f(p) \rangle < 0. \end{aligned}$$

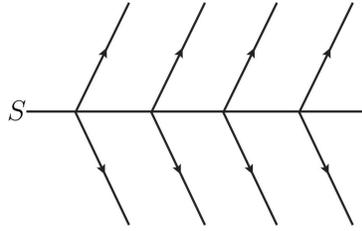


Figura 4.2: Região de escape.

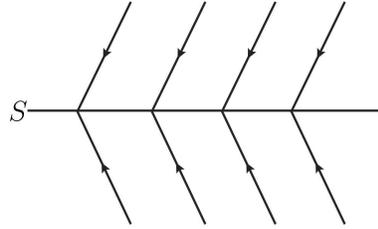


Figura 4.3: Região de deslize.

Sabemos que $\langle X(p), \nabla f(p) \rangle = |X(p)| |\nabla f(p)| \cos \theta$ (θ é ângulo entre os vetores $Xf(p)$ e $\nabla f(p)$), ou seja, quem determina o sinal do produto interno entre os vetores é o cosseno do ângulo formado por eles. Logo, se $\langle X(p), \nabla f(p) \rangle > 0$, então $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e se $\langle X(p), \nabla f(p) \rangle < 0$, então $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Analogamente, vemos que o mesmo vale para o ângulo entre os vetores $Yf(p)$ e $\nabla f(p)$.

Na região de escape temos,

$$Xf(p) > 0 \text{ e } Yf(p) < 0 \Rightarrow \langle X(p), \nabla f(p) \rangle > 0 \text{ e } \langle Y(p), \nabla f(p) \rangle < 0$$

assim, para os vetores $X(p)$ e $\nabla f(p)$ temos que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e para os vetores $Yf(p)$ e $\nabla f(p)$ temos que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. E caso contrário, teremos uma região de deslize.

O *campo vetorial deslizante ou campo de Filippov* associado a $S \in \Omega$ é o campo do vetor Z^S tangente a S^d e definido em $q \in S^d$ por $Z^S(q) = m - q$, sendo m um ponto do segmento unindo $q + X(q)$ e $q + Y(q)$ tal que $m - q$ é tangente a S^d (veja Figura 4.4). Uma vez que $q \in S^d$, então $q \in S^e$ para $-Z$ e então podemos definir um *campo vetorial de escape* em S^e associado a Z para $Z^e = -(-Z)^s$. No que segue usaremos a notação Z^S para ambos os casos.

Definição 4.1.1. Um ponto que $q \in S$ é chamado de *S-regular* se $(Xf(q))(Yf(q)) > 0$

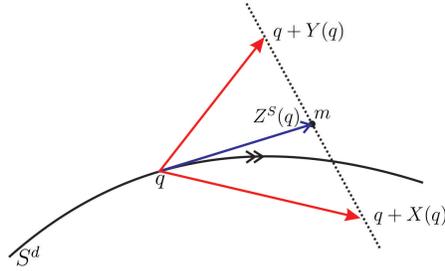


Figura 4.4: Campo deslizante.

ou $(Xf(q))(Yf(q)) < 0$ e $Z^S(q) \neq 0$. Caso contrário, é chamado de S -singular.

Definição 4.1.2. Um ponto $q \in S$ tal que $Z^S(q) = 0$ é chamado de pseudo-equilíbrio de Z .

Definição 4.1.3. Um ponto $q \in S$ tal que $(Xf(q))(Yf(q)) = 0$ é chamado uma singularidade tangencial ou ponto de tangência (q é um ponto tangência entre as trajetórias de X e/ou Y com S). O conjunto das singularidades tangenciais é denotado por S^t .

Definição 4.1.4. Seja $W \in \chi$, dizemos que um inteiro positivo r é a ordem de contato da trajetória Γ_W de W com S em p se $W^k f(p) = 0$, para todo $k = 0, \dots, r - 1$ e $W^r f(p) \neq 0$.

Definição 4.1.5. Seja $W = X$ (respectivamente Y) dizemos que $p \in S$ é tangência invisível se a ordem de contato r de Γ_X (respectivamente Γ_Y) passando por p for par e $X^r f(p) < 0$ (respectivamente $Y^r f(p) > 0$). Por outro lado, dizemos que $p \in S$ é uma tangência visível se a ordem de contato r de Γ_X (respectivamente Γ_Y) passando por p for par e $X^r f(p) > 0$ (respectivamente $Y^r f(p) < 0$).

Em outras palavras se houver uma órbita do campo vetorial X (ou Y) atingindo p em um tempo finito, então essa tangência é chamada de tangência visível para X (respectivamente Y). Caso contrário, chamamos uma tangência invisível para X (respectivamente Y).

Definição 4.1.6. Uma singularidade tangencial $p \in S^t$ é singular se p é uma tangência invisível para ambos X e Y . Por outro lado, uma singularidade tangencial $p \in S^t$ é regular se não for singular.

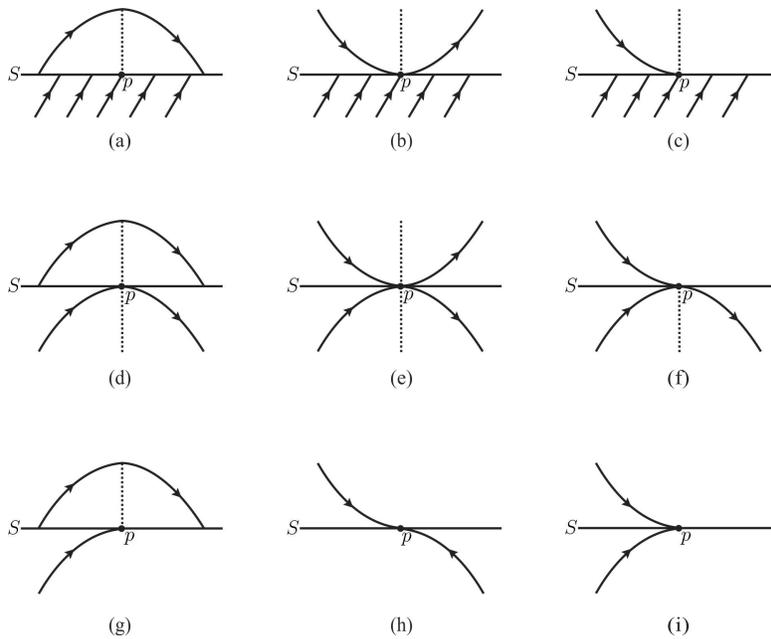


Figura 4.5: Casos onde ocorre tangência regular.

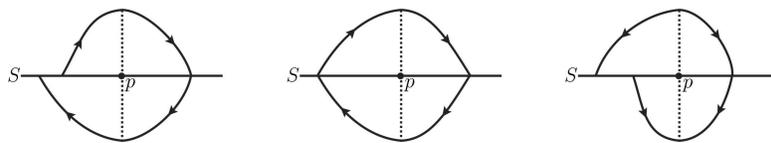


Figura 4.6: Casos onde ocorre tangência singular.

Observação 4.1.1. *Seja p em S e Γ_X (respectivamente Γ_Y) a trajetória de X passando por p . Considere $V_p = V_p^- \cup \{p\} \cup V_p^+$, onde $V_p^- = \{x \in S : x < p\}$ e $V_p^+ = \{x \in S : x > p\}$ ($>$ ou $<$ de acordo a orientação em S). Seja m a soma da ordem de contato das trajetórias Γ_X e Γ_Y com S em p . É possível dar uma caracterização do comportamento de $Z \in \Omega$ em um vizinhança de V_p de p em termos de m .*

De fato, se m é ímpar, então $V_p^- \subset S^c$ e $V_p^+ \subset S^d \cup S^e$ (ou vice-versa, dependendo da orientação). Veja a Figura 4.5, itens (a), (b), (f) e (g). Por outro se m é par temos três casos:

- (i) $V_p \setminus \{p\}$ está contido em S^c , veja a Figura 4.6 e Figura 4.5, item (d);
- (ii) $V_p \setminus \{p\}$ está contido em S^d ou S^e , veja a Figura 4.5, itens (c), (h) e (i).

(iii) $V_p^- \subset S^d$ e $V_p^+ \subset S^e$ ou vice-versa, veja a Figura 4.5, item (e).

Definição 4.1.7. Se W é um campo de vetor, denotamos seus fluxos por $\varphi_W(t, p)$. Assim,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi_W(t, p) = W(\varphi_W(t, p)), \\ \varphi_W(t_0, p) = p; \end{cases}$$

onde $t \in I = I(p, W) \subset \mathbb{R}$ é o intervalo no qual a trajetória passando por $p \in V$ está definida.

Definição 4.1.8. A trajetória local $\varphi_Z(t, p)$ para um campo de vetor suave por parte dado por (4.1) é definida como:

- (a) Para $p \in S^+ \setminus S$ ou $p \in S^- \setminus S$ a trajetória é dada por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$ ou $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$, respectivamente, onde $t \in I$.
- (b) Para $p \in S^e$ tal que $Xf(p) > 0$ e $Yf(p) > 0$ e tomando o tempo $t = t_0$ em p , a trajetória é definida como $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$ para $t \in I \cap \{t \leq t_0\}$ e $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$ para $t \in I \cap \{t \geq t_0\}$. Para o caso $Xf(p) < 0$ e $Yf(p) < 0$ a definição é análoga revertendo o tempo.
- (c) Para $p \in S^e$ e tomando o tempo $t = t_0$ em p , a trajetória é definida como $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{Zs}(t, p)$ se $t \in I \cap \{t \leq t_0\}$ e $\varphi_Z(t, p)$ é também $\varphi_X(t, p)$ ou $\varphi_Y(t, p)$ ou $\varphi_{Zs}(t, p)$ se $t \in I \cap \{t \geq t_0\}$. Para o caso $p \in S^d$ a definição é análoga revertendo o tempo.
- (d) Para p um ponto de tangência regular e tomando o tempo $t = t_0$ em p , a trajetória é definida com $\varphi_Z(t, p) = \varphi_1(t, p)$ se $t \in I \cap \{t \leq t_0\}$ e $\varphi_Z(t, p) = \varphi_2(t, p)$ se $t \in I \cap \{t \geq t_0\}$, onde cada φ_1, φ_2 ou é φ_X ou φ_Y ou φ_{Zs} .
- (e) Para p um ponto de tangência singular a trajetória é definida como $\varphi_Z = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observação 4.1.2. Note que, se $p \in S^e \cup S^d$ ou p é uma tangência regular a trajetória de Z passando por p pode ser escolhida de várias maneiras distintas.

Definição 4.1.9. Uma trajetória global $\Gamma_Z(t, p_0)$ de $Z \in \Omega$ passando por p é a união

$$\Gamma_Z(t, p_0) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \{\gamma_i(t, p_i) : t_i \leq t \leq t_{i+1}\}$$

de trajetórias locais preservando a orientação $\gamma_i(t, p_i)$ e satisfazendo $\gamma_i(t_i, p_i) = p_i$ e $\gamma_i(t_{i+1}, p_i) = p_{i+1}$.

Definição 4.1.10. Uma trajetória máxima $\Gamma_z(t, p_0)$ é uma trajetória global que não pode ser estendida a nenhuma outra trajetória global unindo-se a trajetórias locais, ou seja, se $\tilde{\Gamma}_z$ é uma trajetória global contendo Γ_Z então $\tilde{\Gamma}_z = \Gamma_Z$. Neste caso, chamamos $I = (\tau^-(p_0), \tau^+(p_0))$ o intervalo máximo das soluções Γ_Z , onde

$$\tau^-(p_0) = \lim_{i \rightarrow -\infty} t_i \text{ e } \tau^+(p_0) = \lim_{i \rightarrow +\infty} t_i.$$

Uma trajetória máxima é uma trajetória máxima positiva (respectivamente negativa) se $i \in \mathbb{N}$ (respectivamente $-i \in \mathbb{N}$).

Note que o intervalo máximo de soluções não pode cobrir o intervalo $(-\infty, +\infty)$, ou seja, $\tau^\pm(p_0)$ pode ser valores finitos.

Definição 4.1.11. Dado $\Gamma(t, p_0)$ uma trajetória máxima. Se $\tau^+(p_0) = +\infty$ (respectivamente $\tau^-(p_0) = -\infty$) o conjunto:

(a) $\omega(\Gamma_Z(t, p_0)) = \{q \in V : \exists \{t_n\} \text{ satisfazendo } \Gamma_Z(t_n, p_0) \longrightarrow q \text{ com } t_n \longrightarrow \tau^+(p_0) \text{ quando } n \longrightarrow +\infty\}$ é chamado conjunto ω -limite de $\Gamma_Z(t, p_0)$.

(b) $\alpha(\Gamma_Z(t, p_0)) = \{q \in V : \exists \{t_n\} \text{ satisfazendo } \Omega_Z(t_n, p_0) \longrightarrow q \text{ com } t_n \longrightarrow \tau^-(p_0) \text{ quando } n \longrightarrow -\infty\}$ é chamado conjunto α -limite de $\Gamma_Z(t, p_0)$.

(c) O conjunto ω -limite (respectivamente α -limite) de um ponto p é a união de conjuntos ω -limite (respectivamente α -limite) de trajetória máxima passando por p .

Exemplo 4.1.1. Considere a Figura 4.7. Observe que a órbita máxima que passa por $q \in S$ não é necessariamente única. De fato, note que $q \in S^e$, assim de acordo a Definição 4.1.8 (c), a trajetória local positiva de um ponto $q \in S^e$ pode ser obtida de três formas, ou seja, $\varphi_Z(t, q)$ pode ser igual a $\varphi_X(t, q)$, $\varphi_Y(t, q)$ ou $\varphi_{Z^s}(t, q)$, para um tempo $t \geq t_0$, t_0

em q , assim ela pode oferecer três caminhos distintos, a saber, Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 . Claramente o Teorema de Existência e Unicidade não é válido para o cenário de campos de vetores suaves por partes. Além disso, o conjunto ω -limite de Γ_i , $i = 1, 2, 3$ é, respectivamente, um foco, uma pseudo-equilíbrio e um ciclo limite e, conseqüentemente, o conjunto ω -limite do ponto q , sendo a união desses objetos, não é um conjunto conexo. Este fato não é previsto na teoria clássica de campos vetoriais suaves. Note que se $t \leq t_0$, então a trajetória local é dada por $\varphi_{Z^S}(t, p)$, assim a órbita máxima Γ é única e conjunto $\alpha(\Gamma) = \alpha(q)$ é um conjunto conexo composto pelo pseudo-equilíbrio p .

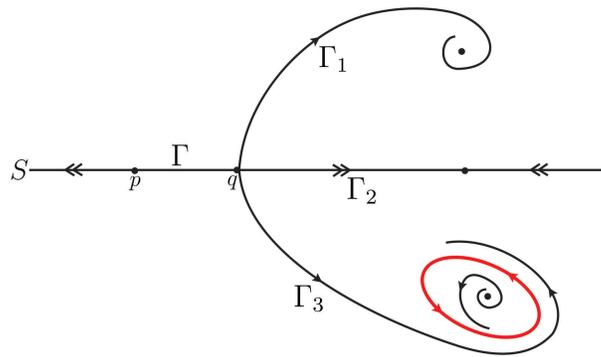


Figura 4.7: Não unicidade de órbita passando por um ponto.

Definição 4.1.12. Considere $Z = (X, Y) \in \Omega$. Uma órbita máxima fechada Δ é um:

- (a) Pseudo-ciclo se $\Delta \cap S \neq \emptyset$ e não contém nenhum equilíbrio ou pseudo-equilíbrio (ver Figura 4.8);
- (b) Pseudo-gráfico se $\Delta \cap S \neq \emptyset$ e é a união de equilíbrio, pseudo-equilíbrio e arcos de órbitas de Z juntando esses pontos (ver Figura 4.9).

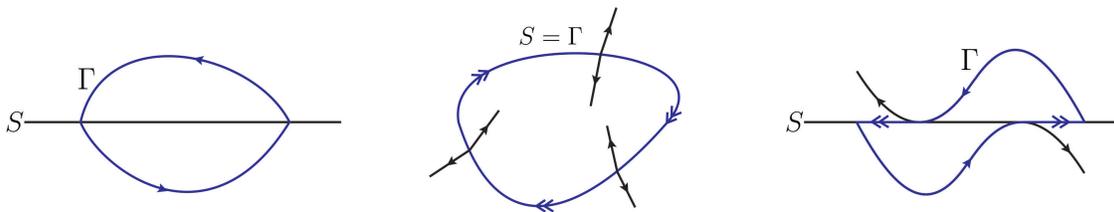


Figura 4.8: Algumas possibilidades de pseudo-ciclo.

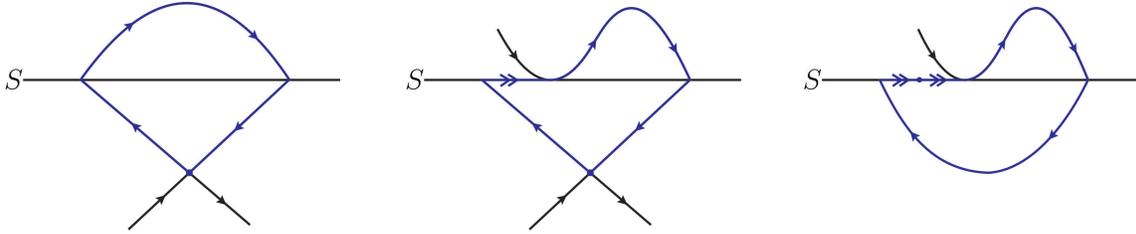


Figura 4.9: Algumas possibilidades de pseudo-gráfico.

Definição 4.1.13. *Dois campos de vetores suaves por partes $Z = (X, Y)$ e $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$ pertencentes a Ω definidos em conjuntos abertos U e \tilde{U} e com uma curva de separação S são S -equivalentes se houver um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ preservando a orientação e que leva $U \cap S$ em $\tilde{U} \cap S$, as órbitas de X restrita a $U \cap S^+$ à órbitas de \tilde{X} restrita a $\tilde{U} \cap S^+$, e as órbitas de Y restrita a $U \cap S^-$ à órbitas de \tilde{Y} restrita a $\tilde{U} \cap S^-$.*

Observação 4.1.3. *É importante notar que o foco costurado dado na Figura 4.6 pode ser alcançado em um tempo finito, isto é, $\tau^\pm(p_0)$ é finito nas definições anteriores. No entanto, também existe focos costurados alcançando em tempo infinito. Além disso, ambos os focos são S -equivalentes, então limite de ambos coincidem.*

Observação 4.1.4. *Nem um pseudo-gráfico e nem um pseudo-ciclo pode ser alcançado em tempo finito.*

De fato, seja $\Gamma = \Gamma(t, p)$ um pseudo-ciclo contendo um ponto regular p , com $t \in I_\Gamma$. Suponha que $p = \Gamma(0, p)$. Então existe um só tempo $\bar{t} \geq 0$, tal que o arco de trajetória γ conectando p a $\bar{p} = \Gamma(\bar{t}, p)$ pertence a Γ . Dado uma vizinhança V_γ de γ , toda trajetória convergindo a Γ gasta um tempo $\tilde{t} \in (\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon)$ em V_γ , com ε um número real positivo suficientemente pequeno. Seja agora uma trajetória Γ_1 e a sequência t_n , tal que $t_n \rightarrow \infty$ e $\Gamma_1(t_n, q) \rightarrow \bar{q} \in \Gamma$, quando $n \rightarrow \infty$, então Γ_1 deve retornar a vizinhança V_γ para uma infinidade de tempos. E assim obtemos o resultado. Para um pseudo-gráfico é análogo.

Definição 4.1.14. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é Z -invariante, se para cada $p \in A$ e toda trajetória máxima $\Gamma_Z(t, p)$ passando por p se mantém $\Gamma_Z(t, p) \subset A$.*

Definição 4.1.15. *Um conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^2$ é um conjunto minimal para $Z \in \Omega$ se:*

- (a) $M \neq \emptyset$;
- (b) M é compacto;
- (c) M é Z -invariante;
- (d) M não contém subconjunto próprio satisfazendo (a), (b) e (c).

Um conjunto minimal trivial é um ponto de equilíbrio, um pseudo-equilíbrio, um órbita periódica ou um pseudo-ciclo.

Observação 4.1.5. *Observe que o pseudo-ciclo Γ no centro da Figura 4.8 é o conjunto α -limite de todas as trajetórias máximas em uma vizinhança dele, no entanto, Γ não é Z -invariante de acordo com a Definição 4.1.14. Como $\Gamma = S$, note que todos os pontos de Γ pertence a uma região de escape, assim para um ponto $p \in \Gamma$ e uma trajetória Γ_1 , temos que para um tempo $t \geq t_0$, t_0 de p , pela Definição 4.1.8 (c), a trajetória $\Gamma_1(t, p)$ escapará de Γ e assim $\Gamma_1(t, p)$ não está contido em Γ . Este fato indica um aspecto distinto não previsto para a teoria clássica sobre campos vetoriais suaves, onde α -limite e ω -limite são conjuntos invariantes.*

4.2 O Teorema de Poincaré-Bendixson

Esta seção é dedicada a versão do Teorema de Poincaré-Bendixson (Teorema 4.2.1) no cenário de campos vetoriais suaves por partes, apresentando algumas considerações, bem como sua demonstração.

Teorema 4.2.1. *Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha que Z tenha trajetória máxima $\Gamma_Z(t, p)$ cuja trajetória positiva $\Gamma_Z^+(t, p)$ esteja contida num conjunto compacto $K \subset V$ e Z não tem movimento de deslize em uma vizinhança Z -invariante de K . Suponha também que X e Y têm um número finito de pontos críticos em K e um número finito de pontos de tangência em S . Então o conjunto ω -limite $\omega(\Gamma_Z(t, p))$ de $\Gamma_Z(t, p)$ é um dos seguintes objetos:*

- (a) um equilíbrio de X ou Y ;

- (b) *uma órbita periódica de X ou Y ;*
- (c) *um gráfico de X ou Y ;*
- (d) *um pseudo-ciclo;*
- (e) *um pseudo-gráfico;*
- (f) *uma tangência singular.*

Como consequência do Teorema 4.2.1, já que a unicidade das órbitas e trajetórias que passam por um ponto não é alcançada, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.2.1. *Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha que Z tenha trajetória máxima $\Gamma_Z(t, p)$ cuja trajetória positiva $\Gamma_Z^+(t, p)$ esteja contida num conjunto compacto $K \subset V$ e Z não tem movimento de deslize em um vizinhança Z -invariante de K . Suponha também que X e Y têm um número finito de pontos críticos em K e um número finito de pontos de tangência em S . Então o conjunto ω -limite $\omega(p)$ de um ponto $p \in V$ é um dos objetos descritos nos itens (a), (b), (c), (d), (e) e (f) ou uma união deles.*

O mesmo vale para o conjunto α -limite, revertendo o tempo.

Observe que o Teorema 4.2.1 leva em conta que o campo vetorial suave por partes não tem movimentos de deslize em um vizinhança do conjunto compacto K . Fenômenos novos e imprevisíveis poderiam ocorrer considerando o movimentos de deslize no conjunto compacto K . Isso acontece por que não é possível garantir a exclusividade das trajetórias nos pontos de deslize. Isso significa que não podemos generalizar o Teorema de Poincaré-Bendixson apresentado no Capítulo 2 sem assumir hipóteses extras. No entanto, no conjunto K é permitido ter trajetórias que são tangentes a curva de separação, o que as leva à não-unicidade em tais pontos. Assim, esse teorema não considera apenas trajetórias que cruzam transversalmente a curva de separação, mas também as que a tangenciam. De fato, considerando apenas as chegadas transversais, pode-se perceber que as trajetórias podem não retornar a curva de separação, o que significa que elas não estão confinadas em um compacto ou se acumulam em algum objeto previsto pela versão clássica do Teorema de Poincaré-Bendixson.

Agora faremos a demonstração do Teorema 4.2.1, que leva em conta a versão clássica do Teorema de Poincaré-Bendixson e da transformação de primeiro retorno de Poincaré.

Demonstração. Considere $p \in K \subset V$ e V_K um vizinhança Z -invariante de K . Se existe um tempo $t_0 > 0$ tal que a trajetória máxima $\Gamma_Z(t, p)$ passando por p não colide com S para $t \geq t_0$, então podemos aplicar o teorema clássico de Poincaré-Bendixson para concluir que dos três casos (a), (b) e (c) ocorre.

Passemos agora a considerar o caso em que existe uma sequência $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de tempos positivos, com $t_i \rightarrow \tau^+(p_0)$, tal que $p_i = \Gamma_Z(t_i, p) \in S$. Note que caso tal sequência não exista estamos exatamente no caso em que $\Gamma_Z(t, p) \notin S$ para $t \geq t_0$, isto é, $\Gamma_Z(t, p) \in S^+$ ou $\Gamma_Z(t, p) \in S^-$, para todo $t \geq t_0$ que já foi visto no parágrafo anterior.

A hipótese que Z não tem pontos de deslize em V_K implica que $Xf(p_i)Yf(p_i) \geq 0$, o que separa os pontos $p_i = \Gamma_Z(t_i, p)$ nos seguintes conjuntos:

$$E_p = \{p_i; p_i \text{ é uma tangência singular ou equilíbrio de } X \text{ ou } Y\}$$

$$T_p = \{p_i; \text{não há ambiguidade na escolha da trajetória local } p_i \text{ e } p_i \notin E_p\}.$$

$$N_p = \{p_i; p_i \notin E_p \cup T_p\}.$$

Note que pela Definição 4.1.8 (e), E_p tem no máximo um elemento p_1 e por hipótese os pontos de tangência é finito, logo N_p é finito.

Se $E_p \neq \emptyset$, então $\{p\} = \Gamma_Z(t, p) = \{p_1\} = \omega(p)$. Satisfazendo os itens (a) e/ou (f).

Caso contrário separamos a prova em dois casos: T_p finito e T_p infinito.

Suponha que T_p é finito. Denotamos por n_p e t_p o número de elementos dos conjuntos N_p e T_p , respectivamente. De acordo com a Definição 4.1.8 (d) uma trajetória máxima de Z por p_i que pertence a N_p pode seguir no máximo dois caminhos, pois Z não tem movimento de deslize em V_K . Vamos denotar por Γ_m o arco de $\Gamma_Z(t, p)$ conectando dois pontos consecutivos p_i e p_{i+1} , $i \in \mathbb{N}$. Neste caso existe no máximo $2^{n_p} + t_p$ arcos Γ_m de $\Gamma_Z(t, p)$. Como o tempo $t_i \rightarrow +\infty$ e os arcos Γ_m é finito, então em algum momento as arcos Γ_m intersecta S em algum ponto p_{i+1} , assim existe um subconjunto $\Upsilon \subset \{1, 2, \dots, 2^{n_p} + t_p\}$ tal que

$$\Gamma = \bigcup_{j \in \Upsilon} \Gamma_j$$

contém um órbita fechada que intersecciona S , ou seja, um pseudo-ciclo contido em $\Gamma_Z(t, p)$ e com a propriedade que $\Gamma_Z(t, p)$ visita cada arco Γ_j um número infinito de vezes.

No que segue provaremos que $\omega(\Gamma_Z(t, p)) = \Gamma$. De fato, tome $q \in \Gamma$, como $\Gamma_Z(t, p)$ deve visitar cada arco Γ_j um número infinito de vezes, então existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $\Gamma_Z(t_n, p) = q$, quando $t_n \rightarrow +\infty$, logo $\Gamma \subset \omega(\Gamma_Z(t, p))$.

Por outro lado, se $x_0 \in \omega(\Gamma_Z(t, p))$, então existe uma sequência $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R} com $s_k \rightarrow \tau^+(p_0)$, tal que $\Gamma_Z(s_k, p) = x_k$ e $x_k \rightarrow x_0$. Além disso, como $\Gamma_Z(t, p)$ também é composto por um número finito de arcos Γ_m e $\Gamma_Z(t, p)$ não possui equilíbrio, pois caso isso ocorresse a trajetória não visitaria S infinitas vezes. Existem arcos Γ_j que contém infinitos pontos x_k , daí existe um subseqüência $\{x_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{x_k\}$ que visita alguns arcos Γ_j infinitas vezes. Como Γ é compacto a subseqüência $\{x_{k_j}\}$ converge para algum ponto de Γ , logo $x_0 \in \Gamma$. Portanto $\omega(\Gamma_Z(t, p)) \subset \Gamma$ e $\omega(\Gamma_Z(t, p))$ é um pseudo-ciclo, satisfazendo o item (d) do teorema.

Agora suponha que T_p é infinito. Neste caso, como $\Gamma_Z(t, p)$ visita S infinitas vezes, existe um ponto $q \in S$ e uma subseqüência $\{t_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ da sequência $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que por simplicidade chamaremos por $\{s_j\}$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \Gamma(s_j, p) = q \quad (4.2)$$

desde que $\Gamma_Z^+(t, p) \subset K$, K compacto. Note que $q \in \omega(\Gamma_Z(t, p)) \cap S \neq \emptyset$. Como o campo vetorial Z não tem movimento de deslize em V_K , obtemos que $\{q\} = E_q$ ou $q \in T_q$ ou $q \in N_q$.

Se $\{q\} = E_q$, então q é uma tangência singular ou um ponto de equilíbrio de X ou Y . Se q é uma tangência singular, então X e Y têm um ponto de tangência invisível em q . Como consequência, existe uma sequência de tempos $\{s_k\}$ em \mathbb{R} com $s_k \rightarrow \tau^+(p_0)$, quando $k \rightarrow +\infty$ tal que $\Gamma_Z(s_k, p) \in S$ e $\Gamma_Z(s_k, p) = x_k$, e ainda, $x_k \rightarrow q$. Sendo assim existe um pequena vizinhança V_q de q tal que toda trajetória de Z que começa em um ponto de V_q converge para q , pois o limite é único. Portanto $\omega(\Gamma_Z(t, p)) = \{q\}$, satisfazendo o item (e) do teorema (veja Figura 4.10).

Se q é ponto de equilíbrio de X ou Y , então segue que o $\omega(\Gamma_Z(t, p)) = q$, ou seja, um

ponto de equilíbrio.

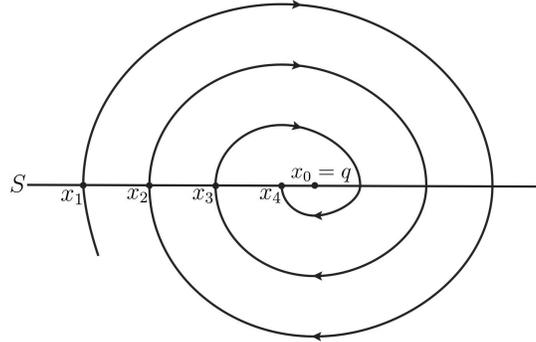


Figura 4.10: Caso de tangência singular em $\omega(\Gamma_Z(t, p)) \cap S$.

Na sequência separamos a análise em dois casos: $\Gamma_Z(t, q)$ contém equilíbrio ou não contém equilíbrio.

Considere o caso em que $\Gamma_Z(t, q)$ não contém equilíbrio. Se $q \in N_q$, então q é tangência visível para X e Y . Assim, pela Definição 4.1.8 há duas escolhas possíveis para a trajetória local positiva de Z passando por q , sendo elas a trajetória de X ou Y e pelo menos uma delas é tal que está contida em $\omega(\Gamma_Z(t, p))$. Por continuidade, a trajetória máxima $\Gamma_Z(t, q)$ que passa por q contida em $\omega(\Gamma_Z(t, p))$ deve retornar a uma vizinhança V_q de q em S , pois as trajetórias que passam por p e q estão próximas uma da outra.

Afirmamos que $\Gamma(t, q) \cap V_q = \{q\}$, ou seja, $\Gamma(t, q)$ é uma trajetória fechada. De fato, suponha que a trajetória que passa por q não retorna a q . Seja \tilde{q} o ponto onde ela retorna. Daí formamos uma curva de Jordan J formada pela união do arco $[q, \tilde{q}]_S$ de S com o arco $[q, \tilde{q}]_{\Gamma_Z(t, q)}$ de $\Gamma_Z(t, q)$. Pela unicidade da trajetória nos campos X e Y , temos que a trajetória $T_Z(t, q)$ e, conseqüentemente, $T_Z(t, p)$ entra em J e não sai intersectando $[q, \tilde{q}]_{\Gamma_Z(t, q)}$ (ver Figura 4.11); também não sai intersectando $[q, \tilde{q}]_S$, pois caso contrário reverteria o sentido do fluxo. Dessa forma, criamos um caixa de fluxo que preserva a orientação contendo as trajetórias $T_Z(t, q)$ e $T_Z(t, p)$, na qual não retorna a uma vizinhança de q . O que é uma contradição. Portanto $\Gamma_Z(t, q)$ é fechada, ou seja, um pseudo-ciclo e $\omega(\Gamma_Z(t, p)) = \Gamma_Z(t, q)$. Satisfazendo o item (d) do teorema.

Se $q \in T_q$, então está claro que a trajetória local que passa por q é única e afirmamos que $\Gamma_Z(\varepsilon, q) \subset \omega(\Gamma_Z(t, p))$, para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno.

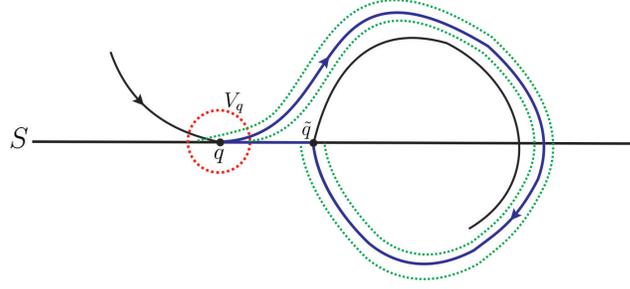


Figura 4.11: Curva de Jordan e vizinhança de q .

De fato, temos que $q \in \omega(\Gamma_Z(t, p))$, então existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $t_n \rightarrow \tau^+(p_0)$, tal que $\Gamma_Z(t_n, p) = x_n \rightarrow q$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Defina a sequência $s_n = t_n + \varepsilon$, com $s_n \rightarrow \tau^+(p_0)$. Como

$$\Gamma_Z(s_n, p) = \Gamma_Z(t_n + \varepsilon, p) = \Gamma_Z(\varepsilon, \Gamma_Z(t_n, p)).$$

Segue que, por continuidade de Γ_Z ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma_Z(\varepsilon, \Gamma_Z(t_n, p)) = \Gamma_Z(\varepsilon, \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma_Z(t_n, p)) = \Gamma_Z(\varepsilon, q).$$

Dessa forma, a trajetória máxima $\Gamma_Z(t, q)$ que passa por q está contida em $\omega(\Gamma_Z(t, p))$ e deve retornar a uma vizinhança V_q de q em S , pois $q \in \omega(\Gamma_Z(t, p))$, e como a trajetória que passa por p deve voltar numa vizinhança de q infinitas vezes, então por continuidade a trajetória que passa por q também deve retornar numa vizinhança de q , pois as trajetórias que passam por p e q estão próximas uma da outra. E novamente, pelo argumento da curva de Jordan usado acima, podemos concluir que $\omega(\Gamma_Z(t, p)) = \Gamma_Z(t, p)$ é um pseudo-ciclo.

O caso restante é quando $\Gamma_Z(t, q)$ tem equilíbrio em X ou Y . Neste caso, para o ponto regular $\bar{q} \in \omega(\Gamma_Z(t, p))$ considere a órbita local $\Gamma_Z(t, \bar{q})$ que está em $\omega(\Gamma_Z(t, p))$. O conjunto $\omega(\Gamma_Z(t, \bar{q}))$ não pode ser uma órbita periódica ou um gráfico contido em S^+ ou S^- , pois sabemos que $q \in \omega(\Gamma_Z(t, p)) \cap S$ e pela expressão (4.2) a órbita $\Gamma_Z(t, p)$ deve visitar qualquer vizinhança V_q infinitas vezes. Assim, a única opção é que $\omega(\Gamma_Z(t, \bar{q})) = \{z_i\}$, onde z_i é um equilíbrio de X ou Y , pois de outra forma, pelos argumentos dos parágrafos anteriores, $\omega(\Gamma_Z(t, q))$ deve ser um pseudo-ciclo, o que contradiz o fato de $\Gamma_Z(t, q)$ ter equilíbrio em X ou Y .

Similarmente, o conjunto α -limite $\alpha(\Gamma_Z(t, \bar{q})) = \{z_j\}$, onde z_j é também é um equilíbrio de X ou Y . Assim, com um ordenamento apropriado dos equilíbrios z_k , $k = 1, 2, 3, \dots, m$ (que podem ser distintos) e órbitas regulares $\Gamma_k \in \omega(\Gamma_Z(t, p))$, $k = 1, 2, 3, \dots, m$, temos

$$\alpha(\Gamma_k) = z_k \text{ e } \omega(\Gamma_k) = z_{k+1}$$

para $k = 1, 2, 3, \dots, m$, onde $z_{m+1} = z_1$ (pois por hipótese o número de pontos de equilíbrio é finito em K). Obtemos assim um pseudo-gráfico Δ composto pelo equilíbrio Z_k e os arcos Γ_k conectando-os.

Sendo assim, segue que a trajetória máxima $\Gamma_Z(t, p)$ converge espirando em direção de Δ , quando $t_n \rightarrow \tau^+(p_0)$, logo $\omega(\Gamma_Z(t, p)) = \Delta$. E o teorema está provado. ■

Agora demonstraremos o Corolário 4.2.1.

Demonstração. Seja $p \in V$, pela Definição 4.1.11 o conjunto ω -limite do ponto p é a união do conjunto ω -limite de todas as trajetórias máximas que passam por p . Portanto o resultado segue. ■

Exemplo 4.2.1. Considere a Figura 4.12. Notemos que ela representa um campo vetorial suave por partes sem movimento de deslize em S , onde as conclusões do Teorema 4.2.1 e do Corolário 4.2.1 podem ser observadas. Desde que, a unicidade das trajetórias por p não é alcançada (nem para tempos futuros e nem para tempos passados) ambos os conjuntos α -limite e ω -limite de p são conjuntos desconexos. O conjunto α -limite de p é a união do foco α_1 com o ponto de tangência singular α_2 . O conjunto ω -limite de p é a união da sela ω_1 com a órbita periódica Γ_1 .

4.3 Conjuntos minimais não triviais

Ao permitirmos movimento de deslize em K para cada subconjunto $N \subset S^e \cup S^d$ não há unicidade de soluções. Para um ponto $q \in N$, tal que não seja um pseudo-equilíbrio, existirá muitas soluções passando por q quando o tempo vai para o futuro ou para o passado (ver Figura 4.7). Por esta razão alguns fenômenos não previstos na teoria

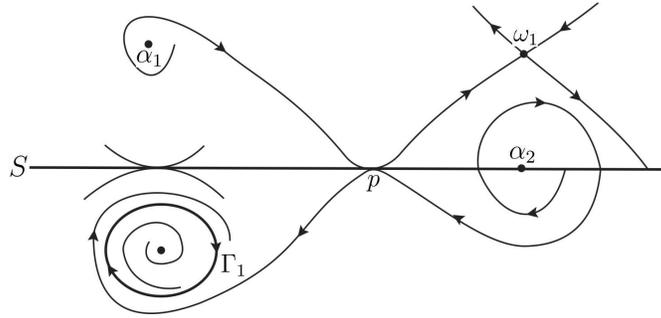


Figura 4.12: Os conjuntos α -limite $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ e ω -limite $\{\omega_1, \Gamma_1\}$ de p são desconexos.

clássica de campos vetoriais suaves podem ocorrer. Em particular, não pode ser possível estabelecer um versão do Teorema de Poincaré-Bendixson para este cenário.

Nesta seção, apresentaremos um conjunto minimal não trivial para um campo vetorial suave por partes que tem interior não vazio e não se parece com um ciclo ou um equilíbrio. Ressaltamos que o conjunto minimal apresentado nesta seção é exemplo de um comportamento não previsto no Teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais suaves por partes, uma vez que estamos considerando regiões de deslize.

Exemplo 4.3.1. Considere $Z = (X, Y) \in \Omega$, onde

$$\begin{aligned} X(x, y) &= (1, -2x) \\ Y(x, y) &= (-2, 2x - 4x^3) \end{aligned}$$

e

$$S = f^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}.$$

Com condições iniciais $(x(0), y(0)) = (0, k_+)$ e $(x(0), y(0)) = (0, k_-)$, para os campos X e Y , respectivamente.

Resolvemos o sistema para o campo X temos

$$\frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow dx = dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t dt \Rightarrow x - 0 = t - 0 \Rightarrow x = t$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x \Rightarrow dy = -2tdt \Rightarrow \int_{k_+}^y dy = \int_0^t -2tdt \Rightarrow y - k_+ = -t^2 - 0 \Rightarrow y = -t^2 + k_+ \Rightarrow y = -x^2 + k_+.$$

Resolvendo o sistema para o campo Y temos

$$\frac{dx}{dt} = -2 \Rightarrow dx = -2dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t -2dt \Rightarrow x - 0 = -2t + 2 \cdot 0 \Rightarrow x = -2t \Rightarrow t = -\frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = 2x - 4x^3 &\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2(-2t) - 4(-2t) \Rightarrow dy = (-4t + 32t^3)dt \Rightarrow \int_{k_+}^y dy = \int_0^t (-4t + 32t^3)dt \\ &\Rightarrow y - k_- = (-2t^2 + 8t^4)|_0^t \Rightarrow y - k_- = -2t^2 + 8t^4 \Rightarrow y = -2t^2 + 8t^4 + k_- \\ &\Rightarrow y = -2\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + 8\left(-\frac{x}{2}\right)^4 + k_- \Rightarrow y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + k_- \end{aligned}$$

Sendo assim, a expressão algébrica da equação paramétrica para curvas integrais de X e Y são dadas por

$$y = x^2 + k_+ \text{ e } y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + k_-$$

respectivamente.

Agora faremos alguns cálculos para analisar o retrato de fase do sistema. Segue que

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (0, 1) \\ Xf(x, y) &= (0, 1) \cdot (1, -2x) = -2x \\ Yf(x, y) &= (0, 1) \cdot (-2, 2x - 4x^3) = 2x - 4x^3 \\ X^2f(x, y) &= (-2, 0) \cdot (1, -2x) = -2 \\ Y^2f(x, y) &= (-2 - 12x^2, 0) \cdot (-2, 2x - 4x^3) = 4 - 24x^2 \end{aligned}$$

Para encontrar as regiões de costura, temos $Xf(x, y) \cdot Yf(x, y) > 0$, segue que

$$Xf(x, Y) \cdot Yf(x, y) = (-2x) \cdot (2x - 4x^3) > 0,$$

daí

$$8x^4 - 2x^2 > 0 \Rightarrow x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Para encontrar as regiões de escape, temos $Xf(x, y) > 0$ e $Yf(x, y) < 0$, segue que

$$-2x > 0 \Rightarrow x < 0$$

e

$$-4x^3 + 2x < 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0 \text{ ou } \frac{\sqrt{2}}{2} < x$$

Logo, $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$.

Para encontra as regiões de deslize, temos $Xf(x, y) < 0$ e $Yf(x, y) > 0$, segue que

$$-2x < 0 \Rightarrow 0 < x$$

e

$$-4x^3 + 2x > 0 \Rightarrow x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Para encontrar os pontos de tangência do campo X , temos

$$Xf(x, y) = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0,$$

assim a origem é ponto de tangência do campo X e como $X^2f(0, 0) = -2 < 0$, segue a origem é um ponto de tangência invisível para X .

Para encontrar os pontos de tangência do campo Y , temos

$$Yf(x, y) = 0 \Rightarrow -4x^3 + 2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

assim, os pontos de tangência são $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $(0, 0)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Como $Y^2f(0, 0) = -4 < 0$, seque que a origem é ponto de tangência visível de Y , e $Y^2f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = Y^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = 24\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4 = 8 > 0$, então $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ são pontos de tangência invisível de Y .

Considere agora as trajetórias particulares de X e Y para os casos onde $k_+ = 1$ e $k_- = 0$, respectivamente. Assim a raízes da equação da curva integral de X serão -1 e 1 , e da curva integral de Y serão $-1, 0$ e 1 . Essas curvas delimitam uma região limitada do plano que chamamos de Λ (ver Figura 4.13).

Denotamos os pontos $p = (0, 0)$, $p_- = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $p_+ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Proposição 4.3.1. *Considere $Z = (X, Y) \in \Omega$, onde*

$$\begin{aligned} X(x, y) &= (1, -2x) \\ Y(x, y) &= (-2, 2x - 4x^3) \end{aligned}$$

e

$$S = f^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}.$$

O conjunto

$$\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ e } \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} \leq y \leq 1 - x^2\}$$

é um conjunto minimal para Z .

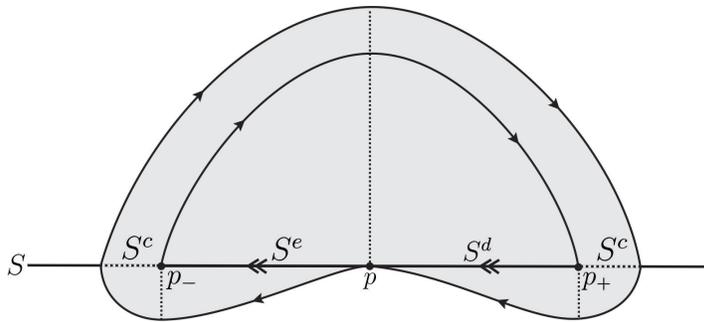


Figura 4.13: Curvas integrais e pontos de tangência.

Demonstração. Note que $\Lambda \neq \emptyset$ e é compacto, pois é fechado e limitado. Mostremos que Λ é Z -invariante. Pela Definição 4.1.8 em $\partial\Lambda \setminus \{p\}$ temos unicidades de trajetórias, pois p é ponto de tangência regular e os demais pontos da fronteira estão no campo X ou Y , ou são os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ que são pontos de costura. Note que uma trajetória máxima de qualquer ponto em Λ encontra p para algum tempo t^*

Desde que p é um ponto de tangência visível para Y e $p \in \overline{\partial S^e} \cap \overline{\partial S^d}$, pela Definição 4.1.8 (d), qualquer trajetória que passa por p pode tomar três caminhos, se $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{ZS}(t, p)$, então a trajetória fica contida na região de escape ou deslize que está entre os pontos p_- e p ou entre p e p_+ , respectivamente; se $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$ ou $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$, então a trajetória não intersecta Λ devido a unicidade de trajetórias dos campos X e Y . Assim a trajetória permanece em Λ . Portanto Λ é Z -invariante.

Agora mostremos que Λ não contém nenhum subconjunto próprio satisfazendo os itens (a), (b) e (c) da Definição 4.1.15.

Dado p_1 e p_2 em Λ a trajetória máxima positiva por p_1 alcança a região de deslize entre p e p_+ e desliza para p . A trajetória máxima negativa por p_2 alcança a região de escape entre p_- e p e desliza para p . Então, existe uma trajetória máxima conectando p_1 e p_2 .

Seja agora $\Lambda' \subset \Lambda$ um conjunto Z -invariante. Dado $q_1 \in \Lambda'$ e $q_2 \in \Lambda$, já que existe uma trajetória máxima conectando-os, concluímos que $q_2 \in \Lambda'$. Portanto, $\Lambda' = \Lambda$ e Λ é um conjunto minimal. ■

Capítulo 5

Campos vetoriais contínuos em variedades

Neste capítulo definiremos campos vetoriais contínuos em variedades e apresentaremos, para este contexto, os resultados locais provenientes da teoria de campos vetoriais contínuos. Estudaremos as propriedades dos conjuntos α -limite e ω -limite. Definiremos também um recobrimento duplo orientado entre variedades compactas bidimensionais e o levantamento de um campo vetorial contínuo por este recobrimento. E mostraremos que as órbitas de um dado campo vetorial contínuo estão relacionadas com o seu levantamento.

5.1 Conceitos básicos

Seja M um variedade de dimensão n , sem bordo e classe C^∞ . Para cada $p \in M$, seja T_pM o espaço de vetores tangentes a M em p e seja

$$TM = \{(p, v_p) : p \in M, v_p \in T_pM\},$$

o espaço fibrado tangente de M .

Denotemos por $\pi_1 : TM \rightarrow M$ a projeção dada por $\pi_1(p, v_p) = p$.

Definição 5.1.1. *Um campo vetorial contínuo em M é uma aplicação $X : M \rightarrow TM$ contínua tal que $\pi_1 \circ X : M \rightarrow M$ é a identidade, ou seja, X é uma aplicação contínua que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$.*

Denotemos por $\Omega(M)$ o espaço dos campos vetoriais contínuos em M .

Definição 5.1.2. *Uma curva integral de $X \in \Omega(M)$ passando por $p \in M$ é uma aplicação $\varphi : I \rightarrow M$ de classe C^1 tal que $\varphi(0) = p$ e $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$ para todo $t \in I$, onde I é um intervalo de \mathbb{R} contendo a origem.*

Numa carta local $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de M , um campo vetorial de $X \in \Omega(M)$ é representado pelo campo vetorial contínuo $x_* : x(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$x_*(X)(p) = dx_{x^{-1}(p)} \cdot X(x^{-1}(p)), p \in x(U),$$

onde dx e x^{-1} denotam, respectivamente, as aplicações derivada e inversa da carta local x . Diremos que $x_*(X)$ é a expressão de X na carta local $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Observe que se $\varphi : I \rightarrow U \subset M$ uma aplicação de classe C^1 . Então φ será curva integral de X se, e somente se, $x \circ \varphi : I \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^n$ for um curva integral de $x_*(X)$. De fato, por um lado temos que $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$. Seque que

$$\begin{aligned} [x(\varphi(t))]' &= x'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ &= x'(\varphi(t)) \cdot X(\varphi(t)) \\ &= x_*(X)(x(\varphi(t))) \end{aligned}$$

desde que, $x(\varphi(t)) = p$ e $p \in x(U)$.

Por outro lado, temos que $[x(\varphi(t))]' = x_*(X)(x(\varphi(t)))$. Seque que

$$\begin{aligned} x'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) &= x'(\varphi(t)) \cdot X(\varphi(t)) \\ \varphi'(t) &= X(\varphi(t)) \end{aligned}$$

Usando o fato acima e o Teorema de Peano, podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 5.1.1. *Sejam $X \in \Omega(M)$ e $p \in M$. Então existe pelo menos um curva integral de X passando por p .*

Lema 5.1.1. *Seja $X \in \Omega(M)$. Para cada ponto $p \in M$, existem uma vizinhança $V \subset M$ de p e um número real $\alpha > 0$ tais que todas as curvas integrais de X passando por um dado ponto de V estão definidas no intervalo $[-\alpha, \alpha]$.*

Demonstração. Segue do Corolário 1.1.1 aplicado em uma expressão $x^*(X)$ de X , cuja carta local x associada contém o ponto p no seu domínio. ■

Lema 5.1.2. *Sejam $X \in \Omega(M)$ e $\varphi : I \rightarrow M$ uma curva integral de X passando por um ponto $p \in M$. Fixemos $t_0 \in I$ e consideremos $\tilde{I} = \{t \in \mathbb{R} : t + t_0 \in I\}$. Então a curva $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \rightarrow M$ definida por $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t + t_0)$ é uma curva integral de X passando por $\varphi(t_0)$.*

Demonstração. Tomando uma carta local $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de M e aplicando a regra da cadeia, por um lado temos

$$[x(\tilde{\varphi}(t))] = x'(\tilde{\varphi}(t)) \cdot \tilde{\varphi}'(t),$$

por outro lado temos

$$[x(\varphi(t + t_0))] = x'(\varphi(t + t_0)) \cdot \varphi'(t + t_0) = x'(\tilde{\varphi}(t)) \cdot X(\varphi(t + t_0)) = x'(\tilde{\varphi}(t)) \cdot X(\tilde{\varphi}(t)).$$

Como $[x(\tilde{\varphi}(t))] = [x(\varphi(t + t_0))]$, então $x'(\tilde{\varphi}(t)) \cdot \tilde{\varphi}'(t) = x'(\tilde{\varphi}(t)) \cdot X(\tilde{\varphi}(t))$, o que implica que $\tilde{\varphi}'(t) = X(\tilde{\varphi}(t))$. ■

Definição 5.1.3. *Uma curva integral $\varphi : I \rightarrow M$ de $X \in \Omega(M)$ será dita máxima, se para toda curva integral $\psi : J \rightarrow M$ de X , tal que $I \subset J$ e $\varphi = \psi|_I$ tivermos $I = J$ e consequentemente $\varphi = \psi$. Neste caso, I será chamado intervalo maximal de existência de φ .*

Lema 5.1.3. *Sejam $X \in \Omega(M)$ e φ uma curva integral máxima de X . Se o intervalo de existência de φ não for todo o \mathbb{R} , então sua imagem não estará contida em nenhum subconjunto compacto de M .*

Demonstração. Seja φ um curva integral de X . Suponha que o intervalo maximal de existência de φ seja (a, b) com $b < +\infty$. O argumento para o caso $a > -\infty$ é análogo.

Suponha, por contradição, que $\varphi((a, b))$ esteja contida num compacto $K \subset M$. Considere um sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em (a, b) , com $t_n \rightarrow b$, quando $n \rightarrow +\infty$. Como $\varphi((a, b)) \subset K$ e K é compacto, então a sequência $\{\varphi(t_n)\}$ possui um subsequência que converge em K , que por simplicidade denotamos por $\{\varphi(t_n)\}$, podemos supor que $\{\varphi(t_n)\}$ converge para um ponto $p \in K$.

Sejam $V \subset M$ uma vizinhança de p e $\alpha > 0$ dados pelo Lema 5.1.1. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b - t_{n_0} < \frac{\alpha}{2}$ e $\varphi(t_{n_0}) \in V$. Pelo lema todas as curvas integrais de X passando por $\varphi(t_{n_0})$ estão definidas no intervalo (α, α) . Pelo Lema 5.1.2, existe uma curva integral $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t + t_{n_0})$, ou seja, a curva integral φ pode ser estendida ao intervalo $(a, t_{n_0} + \alpha) \supset (a, b)$. Mas isso contradiz o fato de (a, b) ser o intervalo máximo de solução da curva integral φ . Logo segue o resultado. ■

Teorema 5.1.2. *Seja M uma variedade compacta. Então as curvas integrais de $X \in \Omega(M)$ estão definidas em \mathbb{R} .*

Demonstração. Segue pela contra-positiva do lema anterior, pois sendo φ um curva integral máxima de X , se a imagem de qualquer curva integral está contida no conjunto compacto M , então o intervalo de existência de φ é todo o \mathbb{R} . ■

Teorema 5.1.3. *Seja $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega(M)$ uma sequência de campos vetoriais contínuos definidos em uma variedade compacta M tal que $X_n \rightarrow X$, uniformemente em M , quando $n \rightarrow \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva integral de X_n passando por $p_n \in M$. Suponhamos que $p_n \rightarrow p \in M$, quando $n \rightarrow \infty$. Então existem um curva integral $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M$ de X passando por p e um sequência de inteiros positivos $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfazendo*

$$\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(t), \quad (5.1)$$

onde o limite vale uniformemente em intervalos compactos de \mathbb{R} .

Demonstração. Primeiramente, mostremos que

- (i) se $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ for uma cartal local de M , então, para cada conjunto compacto $V \subset U$, existirá um $\alpha > 0$ tal que todas as curvas integrais de X e X_n , $n \in \mathbb{N}$, passando por um dado ponto de V estão definidas no intervalo $[-\alpha, \alpha]$.

De fato, sejam $x_*(X)$ e $x_*(X_n)$ as expressões de X e X_n , $n \in \mathbb{N}$, na carta local $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente.

Como x é contínua, considere $x(V) \subset x(U)$ um conjunto compacto, assim existe um conjunto aberto W tal que $x(V) \subset W \subset \overline{W} \subset x(U)$. Note que $\overline{W} \subset M$, logo é

compacto. Sabemos que $x_*(X)(p) = dx_{x^{-1}(p)} \cdot X(x^{-1}(p))$, $p \in x(U)$, daí $x_*(X)(\overline{W}) = dx_{x^{-1}(\overline{W})} \cdot X(x^{-1}(\overline{W}))$ e como $X_n \rightarrow X$, uniformemente em M , quando $n \rightarrow \infty$ e dx é uniformemente contínua no conjunto compacto $X(x^{-1}(\overline{W}))$, então $x_*(X_n) \rightarrow x_*(X)$, uniformemente em \overline{W} , quando $n \rightarrow \infty$. Logo, existe $C > 0$ tal que $|x_*(X)| < C$ e $|x_*(X_n)| < C$, $n \in \mathbb{N}$, em \overline{W} , onde $|\cdot|$ é a norma euclidiana em \mathbb{R}^n . Pelo Corolário 1.1.1, existe um $\alpha > 0$, independente de n , tal que todas as curvas integrais de $x_*(X)$ e $x_*(X_n)$ passando por um dado ponto de $x(V)$ estão definidas no intervalo $[-\alpha, \alpha]$. Assim vale (i).

Seja agora $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um cobertura aberta de M constituída por domínios de cartas locais $x_n : U_n \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tome uma cobertura aberta $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de M tal que $\overline{V}_n \subset U_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como M é compacta, $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui um subcobertura finita, ou seja,

$$M = \bigcup_{i=1}^l V_i.$$

Suponha que $p \in V_1$. Como $p_n \rightarrow p$, quando $n \rightarrow \infty$, podemos assumir que $p_n \in V_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Iremos construir φ definida no intervalo $[0, \infty)$. A construção no intervalo $(-\infty, 0]$ é análoga.

Por (i), para cada $i \in \{1, \dots, l\}$, existe $\alpha_i > 0$ tal que todas as curvas integrais de X e X_n , $n \in \mathbb{N}$, passando por um dado ponto de V_i estão definidas no intervalo $[-\alpha_i, \alpha_i]$. Seja $\alpha = \min\{\alpha_i : i = 1, \dots, l\}$.

Aplicando o Teorema 3.1.2 aos campos $x_{1*}(X)$ e $x_{1*}(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, obtemos um sequência de inteiros positivos $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(t)$ vale uniformemente em $[0, \alpha]$ e φ é uma curva integral de X , passando por p . Se o ponto $\varphi(\alpha)$ pertence a V_1 , então a sequência $\{n_k\}_{n \in \mathbb{N}}$ pode ser substituída por uma subsequência, que ainda denotaremos por $\{n_k\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que o $\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(t)$ vale uniformemente em $[\alpha, 2\alpha]$ e φ é uma curva integral de X .

Podemos supor que este processo pode ser repetido j vezes, onde $\varphi(m\alpha) \in V_1$ para $m = 0, \dots, j-1$ e $\varphi(j\alpha) \notin V_1$, pois caso, pelo Teorema 3.1.2 o teorema estaria demonstrado. Sendo assim, sejam $t_1 = j\alpha$ e $r \in \{2, \dots, l\}$ tais que $\varphi(t_1) \in V_r$.

Repetindo o argumento acima, obtemos φ definida no intervalo $[t_1, t_1 + j_1\alpha]$, onde $\varphi(t_1 + m\alpha) \in V_r$, para $m = 0, \dots, j_1 - 1$ e $\varphi(j_1\alpha) \notin V_r$.

Repetindo novamente o argumento acima, obtemos φ definida no intervalo $[t_2, t_2 + j_2\alpha]$, onde $\varphi(t_2 + m\alpha) \in V_r$, para $m = 0, \dots, j_2 - 1$ e $\varphi(j_2\alpha) \notin V_r$.

Consideremos $t_3 = t_2 + j_2\alpha$ e prosseguindo desta forma, obtemos um sequência estritamente crescente de números reais $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e uma sequência de subsequências sucessivas de inteiros

$$\begin{array}{cccc} n_{1_1} & < & n_{1_2} & < & n_{1_3} & < & \dots \\ n_{2_1} & < & n_{2_2} & < & n_{2_3} & < & \dots \\ n_{3_1} & < & n_{3_2} & < & n_{3_3} & < & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{array}$$

tais que o limite $\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(t)$ vale uniformemente em $[0, t_m]$, se $n_k = n_{m_k}$. Isto mostra que φ está definida em $[0, \infty)$ e o método da diagonal de Cantor nos fornece um sequência $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfazendo $\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(t)$. E o resultado segue. ■

A partir de agora nos restringiremos ao campos vetoriais contínuos sobre variedades bidimensionais compactas. Uma variedade bidimensional compacta é uma variedade bidimensional, compacta, conexa e de classe C^∞ . Exceto quando mencionado, assumiremos que qualquer variedade compacta bidimensional é sem bordo.

Sejam M um variedade compacta bidimensional e $X \in \Omega(M)$. Pelo Teorema 5.1.2, para cada ponto $p \in M$, existe pelo menos uma curva integral $\varphi_p : \mathbb{R} \rightarrow M$ de X . O conjunto $\gamma_p = \{\varphi_p(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é a órbita ou trajetória de X passando por p . A semiórbita positiva de X passando por p e contida em γ_p é o conjunto $\gamma_p^+ = \{\varphi_p(t) : t \geq 0\}$ e a semiórbita negativa é o conjunto $\gamma_p^- = \{\varphi_p(t) : t \leq 0\}$.

Uma subvariedade unidimensional Σ de M será dita transversal ao campo vetorial X , se não contiver nenhuma singularidade de X e for transversal a cada órbita de X . Uma transversal será dita uma seção transversal se for homeomorfa a intervalo fechado e não degenerado de \mathbb{R} .

5.2 Conjuntos limites e recorrência

Por abuso de linguagem a partir de agora usaremos a notação γ para representar uma curva integral tanto como a órbita dada pela sua imagem, ou seja, a órbita $\gamma = \{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Sejam M um variedade compacta bidimensional e $X \in \Omega(M)$. Dada uma órbita γ de X , define-se o conjunto

$$\omega(\gamma) = \{q \in M : \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow +\infty \text{ e } \gamma(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}.$$

Analogamente, define-se o conjunto

$$\alpha(\gamma) = \{q \in M : \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \gamma(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}.$$

Os conjuntos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ são chamados, respectivamente, de *conjunto ω -limite* e *conjunto α -limite* de γ .

O conjunto ω -limite (respectivamente α -limite) de uma órbita γ de X também será chamado de conjunto ω -limite da semiórbita positiva $\gamma^+ \subset \gamma$ (respectivamente conjunto α -limite da semiórbita negativa $\gamma^- \subset \gamma$) e será denotado por $\omega(\gamma^+)$ (respectivamente $\alpha(\gamma^-)$).

Proposição 5.2.1. *Sejam $X \in \Omega(M)$ e $\gamma^+ = \{\gamma(t) : t \geq 0\}$ uma semiórbita positiva de X . Então valem as seguintes propriedades:*

- (a) $\omega(\gamma^+) \neq \emptyset$;
- (b) $\omega(\gamma^+)$ é compacto;
- (c) $\omega(\gamma^+)$ é conexo.

A demonstração deste teorema é análoga a feita no Teorema 2.1.1.

Definição 5.2.1. *Sejam γ e $\tilde{\gamma}$ trajetórias de $X \in \Omega(M)$. Diremos que $\tilde{\gamma}$ é acompanhada por γ (ou γ acompanha $\tilde{\gamma}$), se as seguintes condições forem satisfeitas:*

- (i) *Existe uma sequência crescente $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, com $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$;*

(ii) Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{\gamma}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t + t_n)$, onde o limite vale uniformemente em intervalos compactos de \mathbb{R} .

Notemos que para campos vetoriais contínuos em variedades o conjunto ω -limite não é invariante. O próximo resultado nos fornece um certo tipo de "invariância" para o conjunto ω -limite.

Proposição 5.2.2. *Sejam $X \in \Omega(M)$ e γ uma órbita de X . Se $p \in \omega(\gamma)$, então existe uma órbita γ_p de X passando por p e acompanhada por γ .*

Demonstração. Seja $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente de números reais com $t_n \rightarrow \infty$ e $\gamma(t_n) \rightarrow p$, quando $n \rightarrow \infty$. Defina $p_n = \gamma(t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue do Lema 5.1.2 que $\gamma_{p_n}(t) = \gamma(t + t_n)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma órbita de X passando pelo ponto p_n . Usando o Teorema 5.1.3, podemos tomar uma subsequência crescente $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e uma órbita passando por p e satisfazendo

$$\gamma_p(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(t + t_{n_k}), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde o limite vale uniformemente em intervalos de \mathbb{R} . Logo, segue o resultado. ■

Corolário 5.2.1. *Nas condições da proposição acima. Se $\omega(\gamma)$ consistir de um único ponto $p \in M$, então p é um ponto singular de X e $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = p$.*

Demonstração. Se $\omega(\gamma)$ consiste de um único ponto p , então para a órbita γ_p passando por p temos que $\gamma_p(t) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, p é um ponto singular. Logo $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = p$. ■

Definição 5.2.2. *Seja γ uma órbita de $X \in \Omega(M)$. Diremos que γ é*

- *fracamente ω -recorrente (respectivamente fracamente α -recorrente), se existir $p \in \gamma$ tal que $p \in \omega(\gamma)$ (respectivamente $p \in \alpha(\gamma)$). Nestas condições, diremos também que γ é fracamente ω -recorrente (respectivamente fracamente α -recorrente) no ponto p .*
- *fracamente recorrente, se for fracamente ω -recorrente ou fracamente α -recorrente. Se além disso, $\gamma \subset \omega(\gamma)$, (respectivamente $\gamma \subset \alpha(\gamma)$), diremos que γ é ω -recorrente (respectivamente α -recorrente).*

- *recorrente, se for ω -recorrente ou α -recorrente.*

Um ponto singular e uma órbita periódica são órbitas recorrentes, ao qual, dizemos que a órbita é recorrente trivial ou fracamente recorrente trivial.

A seguir, apresentaremos um exemplo de um campo vetorial contínuo no toro T^2 onde a trajetória é recorrente não trivial.

Exemplo 5.2.1. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T^2 \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$\phi(u, v) = ((2 + \cos 2\pi v) \cos 2\pi u, (2 + \cos 2\pi v) \sin 2\pi u, \sin 2\pi v).$$

O conjunto

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : [(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - 2]^2 + z^2 = 1\}$$

é obtido pela rotação de circunferência

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 = 1\}$$

em torno do eixo z .

A aplicação ϕ é um difeomorfismo local que leva as retas horizontais de \mathbb{R}^2 em paralelos de T^2 , as retas verticais em meridianos e o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ sobre T^2 . Além disso, $\phi(u, v) = \phi(\tilde{u}, \tilde{v})$ se, e somente se, $u - \tilde{u} = m$ e $v - \tilde{v} = n$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$.

Para cada $a \in \mathbb{R}$, consideremos o campo vetorial $X_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$X_a(u, v) : (1, a).$$

Notemos que $Y_a = \phi_* X_a = d\phi \circ X_a \circ \phi^{-1}$ está bem definido e é um campo vetorial de classe C^∞ em T^2 . As trajetórias de Y_a são as imagens por ϕ das trajetórias de X_a , sendo estas as retas de inclinação a em \mathbb{R}^2

Mostremos que, para a racional, toda trajetória de Y_a é periódica e, para a irracional, toda trajetória de Y_a é densa em T^2 .

Para cada $c \in \mathbb{R}$, denote Δ_c a reta de \mathbb{R}^2 que passa pelo ponto $(0, c)$ e tem inclinação a , isto é, $\Delta_c = \{(u, c + au) : u \in \mathbb{R}\}$. Como já observamos $\phi(\Delta_c)$ é uma trajetória de Y_a . Se a for racional, esta trajetória será periódica, para todo $c \in \mathbb{R}$. De fato, se $a = \frac{n}{m}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, então $(m, c + \left(\frac{n}{m}\right)m) \in \Delta_c$ e $\phi(m, c + n) = \phi(0, c)$.

Suponhamos agora, que a seja irracional e fixemos $\bar{c} \in \mathbb{R}$. Afirmamos que o conjunto $C = \{c \in \mathbb{R} : \phi(\Delta_c) = \phi(\Delta_{\bar{c}})\}$. Considerando a afirmação verdadeira, então $\bigcup_{c \in C} \Delta_c$ é densa em \mathbb{R}^2 , sendo assim, $\phi(\Delta_{\bar{c}}) = \phi\left(\bigcup_{c \in C} \Delta_c\right)$ é densa em T^2 . Logo, basta provarmos a afirmação.

Para mostrar que C é denso em \mathbb{R} é suficiente mostrar que o conjunto $G = \{ma + n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em \mathbb{R} , pois $c \in C$ se, e somente se, $c - \bar{c} \in G$. Como G é um subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$, então ou G é denso ou G é discreto. Assim, resta mostrar que G não é discreto. De fato, para cada $m \in \mathbb{Z}$, existe $n \in \mathbb{Z}$, tal que $u_m = ma + n$ pertence o intervalo $[0, 1]$. A sequência $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tem um ponto de acumulação e, como a é irracional, seus elementos são distintos. Logo, G é denso.

O campo Y_a como acima é chamado campo racional ou irracional em T^2 conforme a seja racional ou irracional. Se a for racional, o conjunto ω -limite de qualquer trajetória é ela própria. Se a for irracional, o conjunto ω -limite de qualquer trajetória é todo o toro T^2 .

Em T^2 não é possível uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson, justamente pelo fato de um curva de Jordan não separar T^2 em duas componentes conexas.

5.3 Campos vetoriais definidos por um recobrimento duplo orientado

Nesta seção definiremos um recobrimento duplo orientado entre variedades compactas bidimensionais e o levantamento de um campo vetorial contínuo por este recobrimento. Mostraremos que as órbitas de um campo vetorial contínuo estão relacionadas com o seu levantamento. Assumiremos alguns resultados que podem ser verificados na referência [8].

Definição 5.3.1. *Sejam M e \widetilde{M} variedades compactas bidimensionais (com ou sem bordo). Um recobrimento duplo orientado é uma aplicação $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ de classe C^k , $k \geq 1$, com as seguintes propriedades:*

(a) \widetilde{M} é uma variedade orientada e M é uma variedade não-orientável;

(b) π é um difeomorfismo local;

(c) Para cada $p \in M$, a imagem inversa $\pi^{-1}(p)$ contém exatamente dois pontos.

Segue da definição acima que para todo $p \in M$, existe um aberto $U_p \subset M$ de p , tal que $\pi^{-1}(U_p) = \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2$ é a união disjunta de dois abertos de \tilde{M} , onde $\pi : \tilde{U}_1 \rightarrow U$ e $\pi : \tilde{U}_2 \rightarrow U$ são difeomorfismos.

As vezes, por abuso de linguagem, podemos dizer que \tilde{M} é um recobrimento duplo orientado de M .

Dada uma variedade compacta bidimensional \tilde{M} (com ou sem bordo). Denotemos por $id : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ a aplicação identidade de \tilde{M} .

Seja $\alpha : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ um involução (isto é, $\alpha \circ \alpha = id$) de classe C^k que inverte a orientação de \tilde{M} e não possui pontos fixos. Indicaremos por \tilde{M}/α a variedade quociente. Pela Proposição (3) de [8, p. 241] a aplicação quociente $\Pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\alpha$ é um recobrimento duplo orientado. Reciprocamente, o Corolário da Proposição (6) de [8, p. 250] diz que todo recobrimento duplo orientado é obtido da mesma maneira.

Corolário 5.3.1. *Seja $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ um recobrimento duplo orientado. Existe uma única involução $\alpha : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ de classe C^k que inverte a orientação de \tilde{M} tal que $\pi \circ \alpha = \pi$. A involução α não tem pontos fixos. Existe um único difeomorfismo $\xi : \tilde{M}/\alpha \rightarrow M$ tal que $\pi : \xi \circ \Pi$, onde $\Pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\alpha$ é a aplicação quociente.*

A demonstração pode ser vista em [8, p. 251].

A seguir apresentaremos alguns exemplos de um recobrimento duplo orientado.

Exemplo 5.3.1. A esfera S^2 é um recobrimento duplo orientado do plano projetivo P^2 .

De fato. Consideremos a aplicação antípoda da esfera unitária S^2 , $\alpha : S^2 \rightarrow S^2$, dada por

$$\alpha(x) = -x,$$

a qual não tem pontos fixos. Como α é uma involução que inverte a orientação de S^2 , então $\Pi : S^2 \rightarrow S^2/\alpha$ é um recobrimento duplo orientado no plano projetivo $P^2 = S^2/\alpha$.

Exemplo 5.3.2. O toro T^2 é um recobrimento duplo orientado da garrafa de Klein K^2 .

De fato. Seja $T^2 = S^1 \times S^1$, onde $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Consideremos a aplicação

$\alpha : T^2 \rightarrow T^2$ definida por

$$\alpha(z, w) = (\bar{z}, w), \quad z, w \in S^1,$$

onde \bar{z} é o complexo conjugado de z . Note que α é um involução, pois $\alpha(\alpha(z, w)) = \alpha(\bar{z}, w) = (z, w)$. Além disso, inverte a orientação de T^2 e não possui pontos fixos.

Seja $z \in S^1$ e façamos a identificação com \bar{z} conforme a Figura 5.1 (a). Note que z forma ângulo θ com o eixo das ordenadas e \bar{z} forma um ângulo $-\theta$. Representado S^1 como o segmento $[0, 1]$, onde 0 e 1 estão identificados pela involução α , podemos identificar o segmento conforme a Figura 5.1 (b), para todo $z \in [0, 1]$. Como para $w \in [0, 1]$ não temos alteração, podemos representar T^2/α pelo polígono da Figura 5.1 (c), que é a representação poligonal da garrafa de Klein. Daí, vemos que a variedade quociente T^2/α é homeomorfa a K^2 . Assim, a aplicação quociente $\Pi : T^2 \rightarrow T^2/\alpha$ representa o toro como recobrimento duplo orientado da garrafa de Klein.

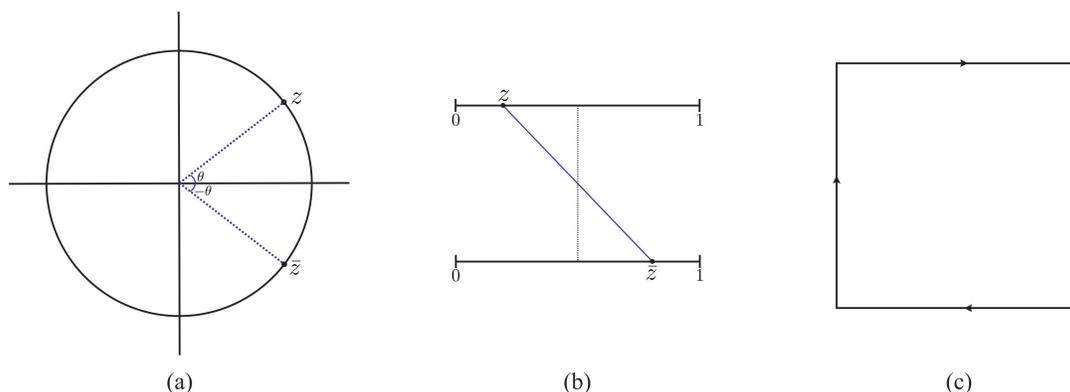


Figura 5.1: Ilustração que T^2 é um recobrimento duplo orientado de K^2 .

Exemplo 5.3.3. O cilindro é um recobrimento duplo orientado da faixa de Möbius. De fato. Consideremos a aplicação $\alpha : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow S^1 \times [-1, 1]$ definida por

$$\alpha(z, t) = (-z, -t).$$

Note que α é um involução, pois $\alpha(\alpha(z, t)) = \alpha(-z, -t) = (z, t)$. Além disso, inverte a orientação de $S^1 \times [-1, 1]$ e não possui pontos fixos.

Considere a Figura 5.2 (a). Para todo $z \in S^1$, temos a identificação de $z \sim -z$ pela

aplicação antípoda. Para todo $t \in [0, 1]$ temos a identificação pela relação $t \sim -t$. Sendo assim obtemos a representação poligonal da faixa de Möbius, conforme Figura 5.2 (b).

Assim, a aplicação quociente $\Pi : S^1 \times [-1, 1] \longrightarrow S^1 \times [-1, 1]/\alpha$ representa o cilindro como recobrimento duplo orientado da faixa de Möbius.

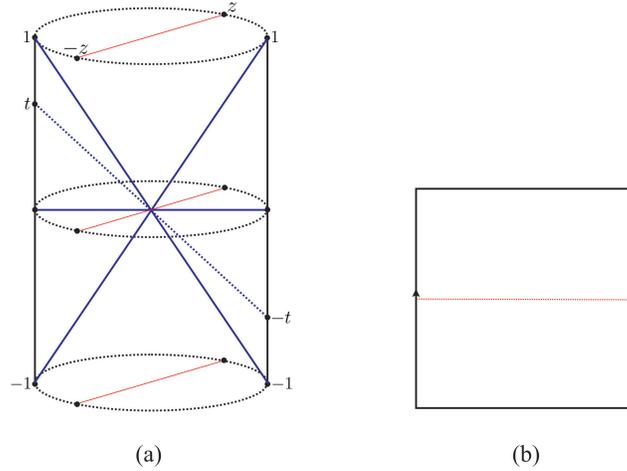


Figura 5.2: Ilustração que o cilindro é um recobrimento duplo orientado da faixa de Möbius..

Agora iremos definir campos vetoriais contínuos a partir de um recobrimento duplo orientado.

Seja $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ um recobrimento duplo orientado. Dado um campo vetorial contínuo X em M , podemos definir um campo vetorial contínuo $\pi^*(X)$ em \widetilde{M} , denominado *levantamento de X* , por

$$\pi^*(X)(p) = (d\pi_p)^{-1} \cdot X(\pi(p)), \quad p \in \widetilde{M}.$$

Fixemos $p \in M$ e consideremos $\pi^{-1}(p) = \{\tilde{p}, \hat{p}\}$. Seja $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ uma curva integral de X passando por p . Pelo Teorema Fundamental de Levantamento (veja [8, Proposição 5, p. 147]), existe um único caminho de classe C^1 , $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \widetilde{M}$ satisfazendo $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ e $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Derivando ambos os membros da igualdade $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ na variável t , temos

$$d\pi_{\tilde{\gamma}(t)} \cdot \tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(t).$$

Como $d\pi_{\tilde{\gamma}}(t)$ é um isomorfismo e $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, segue que

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'(t) &= (d\pi_{\tilde{\gamma}}(t))^{-1} \cdot X(\gamma(t)) \\ &= (d\pi_{\tilde{\gamma}}(t))^{-1} \cdot X(\pi(\tilde{\gamma}(t))),\end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{\gamma}'(t) = \pi^*(X)(\tilde{\gamma}(t))$. Portanto, $\tilde{\gamma}$ é uma curva integral de $\pi^*(X)$ passando por \tilde{p} .

Analogamente, existe um única curva integral $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{M}$ de $\pi^*(X)$ passando por \hat{p} e satisfazendo $\pi \circ \hat{\gamma} = \gamma$.

Daí, segue que $\pi^{-1}(\gamma)$ é a união de duas trajetória disjuntas de $\pi^*(X)$, digamos $\tilde{\gamma}$ e $\hat{\gamma}$ ou $\pi^{-1}(\gamma)$ é igual a $\tilde{\gamma}$, neste caso, $\hat{\gamma}$ é uma reparametrização da curva $\tilde{\gamma}$. Assim concluímos que a projeção $\pi \circ \tilde{\gamma}$ de uma trajetória $\tilde{\gamma}$ de $\pi^*(X)$ é uma trajetória de X . Reciprocamente, toda trajetória de X é a projeção de, no máximo, duas trajetórias de $\pi^*(X)$.

Com isso, podemos enunciar o seguinte resultado.

Lema 5.3.1. *Sejam $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ um recobrimento duplo orientado e $\pi^*(X) \in \Omega(\widetilde{M})$ o levantamento de $X \in \Omega(M)$. Sejam $\tilde{\gamma}$ uma trajetória de $\pi^*(X)$ e $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ a trajetória correspondente de X . Então as seguintes afirmações se verificam:*

- (i) γ será um ponto singular se, e somente se, $\tilde{\gamma}$ for um ponto singular;
- (ii) γ será uma trajetória injetiva se, e somente se, $\tilde{\gamma}$ for injetiva;
- (iii) γ será uma trajetória periódica se, e somente se, $\tilde{\gamma}$ for periódica.

Lema 5.3.2. *Sejam $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ um recobrimento duplo orientado e $\pi^*(X) \in \Omega(\widetilde{M})$ o levantamento de $X \in \Omega(M)$. Sejam $\tilde{\gamma}$ uma trajetória de $\pi^*(X)$ e $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ a trajetória correspondente de X . Então $\pi(\omega(\tilde{\gamma})) = \omega(\gamma)$.*

Demonstração. Seja $\tilde{p} \in \omega(\tilde{\gamma})$. Tomemos uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais tal que $t_n \rightarrow \infty$ e $\tilde{\gamma}(t_n) \rightarrow \tilde{p}$, quando $n \rightarrow \infty$. Como π é contínua e $\gamma(t_n) = \pi(\tilde{\gamma}(t_n))$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(\tilde{\gamma}(t_n)) = \pi(\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}(t_n)) = \pi(\tilde{p})$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n) = \pi(\tilde{p}) \in \pi(\omega(\tilde{\gamma})).$$

Mas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n) = p \in \omega(\gamma).$$

Logo, $\pi(\omega(\tilde{\gamma})) \subset \omega(\gamma)$.

Seja agora $p \in \omega(\gamma)$. Tomemos uma sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais tal que $s_n \rightarrow \infty$ e $\tilde{\gamma}(s_n) \rightarrow p$, quando $n \rightarrow \infty$.

Considere um aberto $U \subset M$ tal que $p \in U$ e $\pi^{-1}(U) = \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2$, onde \tilde{U}_1 e \tilde{U}_2 são abertos disjuntos de \tilde{M} e $\pi|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \rightarrow U$ um difeomorfismo, $i = 1, 2$. Suponha que $\gamma(s_n) \in U$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, a sequência $\{\tilde{\gamma}(s_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{\tilde{\gamma}(s_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ contida em \tilde{U}_1 ou \tilde{U}_2 .

Suponha que $\{\tilde{\gamma}(s_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ esteja contida em \tilde{U}_1 . Como $(\pi|_{\tilde{U}_1})^{-1} : U \rightarrow \tilde{U}_1$ é contínua e $\pi(\tilde{\gamma}(s_j)) = \gamma(s_j)$, quando $j \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}(s_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi|_{\tilde{U}_1})^{-1}(\gamma(s_j)) = (\pi|_{\tilde{U}_1})^{-1}(\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(s_j)) = (\pi|_{\tilde{U}_1})^{-1}(p) \in \omega(\tilde{\gamma})$$

Daí, $\pi^{-1}(p) \cap \tilde{U}_1 \in \omega(\tilde{\gamma})$. Assim $p \in \pi(\omega(\tilde{\gamma}))$. Portanto $\omega(\gamma) \subset \pi(\omega(\tilde{\gamma}))$ e o resultado segue. ■

Capítulo 6

O Teorema de Poincaré-Bendixson na garrafa de Klein

Neste capítulo, na primeira seção apresentaremos os aspectos topológicos da garrafa de Klein K^2 e alguns resultados auxiliares que serão úteis na seção seguinte. Na segunda seção apresentaremos duas versões do Teorema de Poincaré-Bendixson na garrafa de Klein, uma onde a órbita é injetiva fracamente ω -recorrente e outra versão onde a órbita é injetiva não fracamente ω -recorrente.

6.1 Aspectos topológicos

Nesta seção apresentaremos os aspectos topológicos da garrafa de Klein. Do qual, precisamos do conhecimento de alguns resultados clássicos da Topologia Algébrica. Como nosso objetivo principal são as versões do Teorema de Poincaré-Bendixson na garrafa de Klein, assumiremos tais resultados que podem ser verificados na referência [9].

Sejam M_1 e M_2 variedades compactas bidimensionais disjunta. Remova dois pequenos discos abertos (isto é, homeomorfos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$) em cada variedade e, em seguida, cole ambos as variedades ao longo dos bordos que resultaram a remoção dos discos. O espaço topológico formado é uma variedade compacta bidimensional que é chamada *soma conexa* de M_1 e M_2 e denotada por $M_1 \# M_2$.

Uma descrição mais precisa da soma conexa de M_1 e M_2 é: sejam $D_1 \subset M_1$ e $D_2 \subset M_2$ discos fechados (isto é, homeomorfos a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$). Denotemos por M_i^c o complementar do interior de D_i em M_i , $i = 1, 2$. Se $h : \partial M_1^c \rightarrow \partial M_2^c$ for um homeomorfismo do bordo de M_1^c no bordo de M_2^c , então $M_1 \# M_2$ é o espaço quociente de $M_1^c \cup M_2^c$ obtido identificando-se os pontos p com $h(p)$, para todo $p \in \partial M_1^c$. O tipo da variedade $M_1 \# M_2$ não depende da escolha dos discos D_1 e D_2 nem da escolha do homeomorfismo h .

Na Figura 6.1 temos a soma conexa de dois toros T^2 .

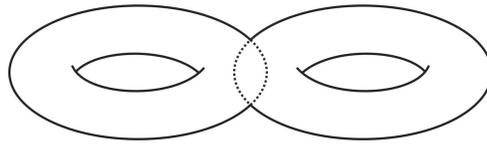


Figura 6.1: Soma conexa de dois toros ($T^2 \# T^2$).

Note que, se M_1 e M_2 forem variedades orientáveis, então $M_1 \# M_2$ também será orientável, enquanto que $M_1 \# M_2$ não será orientável, se M_1 ou M_2 não for orientável.

Exemplo 6.1.1. A soma conexa de dois planos projetivos ($P_1^2 \# P_2^2$) é homeomorfa a garrafa de Klein K^2 .

De fato, usaremos a técnica de "cortar e colar" para fazer a demonstração.

Podemos representar o plano projetivo pelo polígono da Figura 6.2.

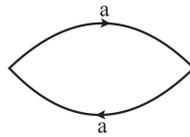


Figura 6.2: Representação de P^2 .

Agora procedemos de acordo com a Figura 6.3.

- (1) Devemos recortar círculo em cada plano projetivo através de um vértice, nomeando de c as fronteiras do interior destes círculo. Representamos o complemento do interior dos círculo nos dois planos projetivos por triângulos.
- (2) Identificamos os segmentos c , obtendo um quadrilátero.

- (3) Traçamos a diagonal d e fazemos um corte ao longo de d , obtendo novamente dois triângulos.
- (4) Agora, girarmos um dos triângulos 180° e identificamos os segmentos b , obtendo a representação poligonal da garrafa de Klein.

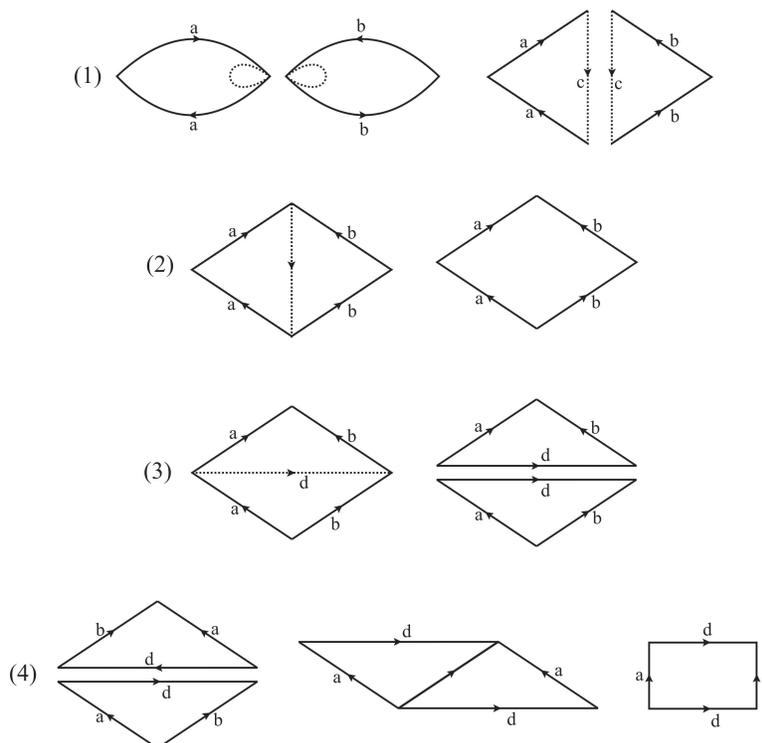


Figura 6.3: A soma conexa de dois planos projetivos é homeomorfa a garrafa de Klein.

Teorema 6.1.1. *Toda variedade bidimensional compacta é homeomorfa a esfera, a soma conexa de toros, ou a soma conexa de planos projetivos.*

A demonstração deste teorema pode ser verificada em [9, p. 10].

No caso orientável, a superfície é homeomorfa a esfera ou a soma conexa de toros. No caso não orientável é homeomorfa a soma conexa de planos projetivos.

Definição 6.1.1. *Seja M uma variedade compacta bidimensional. Uma triangulação de M é uma família finita de triângulos curvilíneos (imagens difeomorfas de triângulos no plano) que cobrem M , de tal modo que dois deles ou não se intersectam, ou se intersectam em um vértice em comum ou uma aresta em comum.*

Definição 6.1.2. A característica de Euler de uma variedade compacta bidimensional M é dada pela forma

$$\chi(M) = v - a + f$$

onde v, a e f são respectivamente o número de vértices, arestas e faces de uma triangulação.

A característica de Euler é um invariante topológico, isto é, depende somente da superfície M e não da triangulação escolhida. Como veremos a seguir, o número $\chi(M)$ identifica M a menos de homeomorfismos.

Exemplo 6.1.2. A seguir temos as características de Euler da esfera, do toro e do plano projetivo que podem ser verificadas em [9, p. 29]:

(i) $\chi(S^2) = 2$

(ii) $\chi(T^2) = 0$

(iii) $\chi(P^2) = 1$

Proposição 6.1.1. Sejam M_1 e M_2 variedades compactas bidimensionais disjuntas. Então

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

Demonstração. Seja o número de vértice, arestas e faces de uma triangulação de M_1 dado por: $\{v_1, a_1, f_1\}$. Analogamente para M_2 : $\{v_2, a_2, f_2\}$.

As características de Euler de M_1 e M_2 são dadas por:

$$\chi(M_1) = v_1 - a_1 + f_1 \text{ e } \chi(M_2) = v_2 - a_2 + f_2$$

Retirando uma face (interior de um triângulo) de cada superfície e identificando as arestas e vértices das fronteiras obtemos $M_1 \# M_2$.

Após feita a soma conexa $M_1 \# M_2$ o número de vértices, arestas e faces na triangulação da superfície resultante é dada por:

- $v = v_1 + v_2 - 3$: houve identificação dos vértices de um triângulo de M_1 com um de M_2 ;

- $a = a_1 + a_2 - 3$: houve identificação das arestas de um triângulo de M_1 com um de M_2 ;
- $f = f_1 + f_2 - 2$: foram retiradas duas faces para ser feita a soma conexa.

Logo a característica de Euler de $M_1 \# M_2$ é dada por:

$$\begin{aligned}
 \chi(M_1 \# M_2) &= v - a + f \\
 &= v_1 + v_2 - 3 - (a_1 + a_2 - 3) + f_1 + f_2 - 2 \\
 &= v_1 - a_1 + f_1 + v_2 - a_2 + f_2 - 3 + 3 - 2 \\
 &= \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2
 \end{aligned}$$

■

Proposição 6.1.2. *A característica de Euler de uma variedade compacta bidimensional, formada pela soma conexa de*

- (a) *n toros, é $2 - 2n$;*
- (b) *n planos projetivos, é $2 - n$;*
- (c) *um plano projetivo e n toros, é $1 - 2n$;*
- (d) *um garrafa de Klein e n toros, é $-2n$.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução finita usando a proposição anterior e o Exemplo 6.1.2.

- (a) Consideremos $M = T^2 \# \dots \# T^2$ a soma conexa de n toros, $n \geq 1$.

Se $n = 1$, então $\chi(M) = \chi(T^2) = 2 - 2 \cdot 1 = 0$.

Suponhamos que a afirmação é válida para $n = j$. Então $\chi(M) = 2 - 2j$.

Para $n = j + 1$, temos

$$\begin{aligned}
 \chi(M) &= \chi((T^2 \# \dots \# T^2) \# T^2) \\
 &= \chi(T^2 \# \dots \# T^2) + \chi(T^2) - 2 \\
 &= 2 - 2j + 0 - 2 \\
 &= 2j \\
 &= 2 - 2(j + 1).
 \end{aligned}$$

(b) Consideremos $M = P^2 \# \dots \# P^2$ a soma conexa de n planos projetivos, $n \geq 1$.

Se $n = 1$, então $\chi(M) = \chi(P^2) = 2 - j = 1$.

Suponhamos que a afirmação é válida para $n = j$. Então $\chi(M) = 2 - j$.

Para $n = j + 1$, temos

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \chi((P^2 \# \dots \# P^2) \# P^2) \\ &= \chi(P^2 \# \dots \# P^2) + \chi(P^2) - 2 \\ &= 2 - j + 1 - 2 \\ &= -j + 1 \\ &= 2 - (j + 1). \end{aligned}$$

(c) Consideremos $M = (T^2 \# \dots \# T^2) \# P^2$ a soma conexa de n toros com um plano projetivo, $n \geq 1$.

Se $n = 1$, então $\chi(M) = \chi(T^2 \# P^2) = \chi(T^2) + \chi(P^2) - 2 = 0 + 1 - 2 = 1 - 2 \cdot 1$.

Suponhamos que a afirmação é válida para $n = j$. Então $\chi(M) = 1 - 2j$.

Para $n = j + 1$, temos

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \chi(((T^2 \# \dots \# T^2) \# T^2) \# P^2) \\ &= (\chi(T^2 \# \dots \# T^2) + \chi(T^2) - 2) + \chi(P^2) - 2 \\ &= 2 - 2j + 0 - 2 + 1 - 2 \\ &= -1 - 2j \\ &= 1 - 2(j + 1). \end{aligned}$$

(d) Consideremos $M = (T^2 \# \dots \# T^2) \# K^2$ a soma conexa de n toros com uma garrafa de Klein, $n \geq 1$.

Se $n = 1$, então $\chi(M) = \chi(T^2 \# K^2) = \chi(T^2) + \chi(K^2) - 2 = 0 + 0 - 2 = (-2) \cdot 1$.

Suponhamos que a afirmação é válida para $n = j$. Então $\chi(M) = -2j$.

Para $n = j + 1$, temos

$$\begin{aligned}
 \chi(M) &= \chi(((T^2 \# \dots \# T^2) \# T^2) \# K^2) \\
 &= (\chi(T^2 \# \dots \# T^2) + \chi(T^2) - 2) + \chi(K^2) - 2 \\
 &= 2 - 2j + 0 - 2 + 0 - 2 \\
 &= -2j - 2 \\
 &= -2(j + 1).
 \end{aligned}$$

■

Observação 6.1.1. *Podemos notar que a característica de Euler de uma superfície orientável é sempre par, enquanto que a característica de Euler de uma superfície não orientável pode ser par ou ímpar.*

Assumindo que a característica de Euler é um invariante topológico e usando Teorema 6.1.1 temos o seguinte importante resultado.

Teorema 6.1.2 (Teorema de Classificação de Variedades). *Sejam M_1 e M_2 variedades compactas bidimensionais. Então M_1 e M_2 são homeomorfas se, e somente se, suas características de Euler são iguais e ambas são orientáveis ou não orientáveis.*

A demonstração pode ser vista em [9, p. 33].

O teorema acima reduz o problema de classificação das variedades compactas bidimensionais à determinação da orientabilidade e da característica de Euler, ambos problemas solúveis. Logo, o Teorema 6.1.1 caracteriza as possíveis variedades compactas bidimensionais.

Uma variedade compacta bidimensional que é a soma conexa de n toros ou n planos projetivos é dita ser de gênero n . Em particular, a esfera é dita ser de gênero 0.

Temos a seguinte relação entre o gênero g e a característica χ de uma variedade compacta bidimensional

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi), & \text{no caso orientável} \\ 2 - \chi, & \text{no caso não orientável.} \end{cases}$$

Prosseguimos agora a fim de apresentarmos um teorema de classificação para variedades compactas bidimensionais com bordo.

Seja M uma variedade compacta bidimensional com bordo e suponhamos que este bordo tenha k componentes, $k \geq 1$. Cada componente do bordo é homeomorfa a um círculo. Se tomarmos k discos fechados e colarmos o bordo do i -ésimo disco na i -ésima componente do bordo de M obteremos um variedade compacta bidimensional M^* . O tipo de topologia de M^* depende somente do tipo de topologia de M . Porém, a recíproca não é tão óbvia. O tipo de topologia de uma variedade com bordo M , depende somente do número de componentes de seu bordo e do tipo de topologia de M^* obtida ao colar um disco fechado sobre cada componente do bordo. Estabelecemos este resultado através do seguinte teorema.

Teorema 6.1.3. *Sejam M_1 e M_2 variedades compactas bidimensionais com bordo. Suponhamos que o seus bordos tenham o mesmo número de componentes. Então M_1 e M_2 são homeomorfas se, e somente se, as variedades M_1^* e M_2^* , obtidas por colar um disco fechado em cada uma das componentes do bordo são homeomorfas.*

A demonstração deste teorema pode ser vista em [9, p. 37].

A característica de Euler de uma variedade compacta bidimensional com bordo triangulada é definida exatamente da mesma forma para o caso de um variedade sem bordo.

Se começamos com uma variedade compacta bidimensional M^* (sem bordo) e removermos dela o interior de k triângulos disjuntos, obteremos uma variedade compacta bidimensional com bordo M de forma que

$$\chi(M) = \chi(M^*) - k. \quad (6.1)$$

De fato. Seja o número de vértice, arestas e faces de uma triangulação de M^* dado por: $\{v^*, a^*, f^*\}$. Analogamente para M : $\{v, a, f\}$. As características de Euler de M^* e M são dadas por:

$$\chi(M^*) = v^* - a^* + f^* \text{ e } \chi(M) = v - a + f.$$

Como são removidos o interior de k triângulos disjuntos de M^* , temos que $v = v^*$,

$a = a^*$ e $f = f^* - k$. Daí

$$\begin{aligned}\chi(M) &= v - a + f \\ \chi(M) &= v^* - a^* + f^* - k \\ \chi(M) &= \chi(M^*) - k.\end{aligned}$$

Assim, a característica de Euler de M é determinada pela característica de Euler de M^* e vice-versa. Usando esta relação, juntamente com o Teorema 6.1.1, obtemos todas as variedades compactas bidimensionais cujo bordo tem k componentes. Note também que M e M^* são ambas orientáveis ou ambas não orientáveis. Logo, chegamos a um teorema de classificação para variedades compactas bidimensionais com bordo.

Teorema 6.1.4. *Duas variedades compactas com bordo são homeomorfa se, e somente se, elas têm o mesmo número de componentes de bordo, são ambas orientáveis ou não orientáveis e têm a mesma característica de Euler.*

A demonstração pode ser vista em [9, p. 37]

Sejam M_1 , M_2 e $M_1 \cap M_2$ variedades compactas bidimensionais (com ou sem bordo). Temos a seguinte propriedade com relação a característica de Euler:

$$\chi(M_1 \cup M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(M_1 \cap M_2). \quad (6.2)$$

Definição 6.1.3. *Consideremos uma curva fechada simples C em uma variedade compacta bidimensional M . Diremos que C é de dois lados, se ela possuir uma vizinhança homeomorfa a um cilindro.*

Definição 6.1.4. *Consideremos uma curva fechada simples C em uma variedade compacta bidimensional M . Diremos que C é de um lado, se ela possuir uma vizinhança homeomorfa a uma faixa de Möbius.*

As curvas fechada simples na esfera S^2 ou no toro T^2 são exemplos de curvas de dois lados.

Dadas um curva de dois lados C sobre uma variedade compacta bidimensional M e um vizinhança $N(C)$ de C homeomorfa a um cilindro, então $N(C) \setminus C$ tem duas componentes conexas. Definimos os dois lados de C como sendo estas componentes conexas.

Lema 6.1.1. *Seja C um curva fechada simples na garrafa de Klein K^2 . Se C for de dois lados e $K^2 \setminus C$ for conexo então $K^2 \setminus C$ será um cilindro.*

Demonstração. Sejam V_0 e V_1 vizinhanças de C homeomorfas a um cilindro e tais que $\overline{V_0} \subset V_1$. Pela propriedade (6.2) temos que

$$\chi(K^2) = \chi(K^2 \setminus V_0) + \chi(\overline{V_1}) - \chi((K^2 \setminus V_0) \cap \overline{V_1}).$$

Como $\chi(K^2) = 0$ (pois K^2 é homeomorfa a $P_1^2 \# P_2^2$), $\chi(\overline{V_1}) = \chi(S^1 \times [0, 1]) = 0$ e $\chi((K^2 \setminus V_0) \cap \overline{V_1}) = \chi((S^1 \times [0, 1]) \cup (S^1 \times [0, 1])) = 0$, segue que $\chi(K^2 \setminus V_0) = 0$. Sendo $K^2 \setminus V_0$ uma variedade compacta cujo bordo consiste de dois círculos, temos que $\chi(K^2 \setminus V_0) = \chi(M^*) - 2$, o que implica que $\chi(M^*) = 2$, ou seja, M^* é homeomorfa a uma esfera, assim $\chi(K^2 \setminus V_0)$ é orientável, logo $\chi(K^2 \setminus V_0)$ é um cilindro. Tome agora uma sequência de vizinhança $\{V_0^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $V_0^{n+1} \subset V_0^n$, daí $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_0^n = C$, logo $K^2 \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K^2 \setminus V_0^n)$, como V_0^n é conexo para todo n , segue que $K^2 \setminus C$ é conexo. Portanto $K^2 \setminus C$ é um cilindro, pois cada componente da união é um cilindro. ■

Lema 6.1.2. *Se C_1 , C_2 e C_3 forem três curvas fechadas simples e disjuntas na garrafa de Klein K^2 , então pelo menos uma das curvas será de dois lados.*

Demonstração. Mostremos que se C_1 e C_2 forem curvas de um lado, então C_3 será necessariamente um curva de dois lados.

Seja $N(C_1)$ um vizinhança de C_1 em K^2 homeomorfa a uma faixa de Möbius tal que $N(C_1) \cap C_2 = \emptyset$. Se colarmos um disco fechado no bordo de $K^2 \setminus N(C_1)$ e usando a fórmula (6.1), temos que $\chi(K^2 \setminus N(C_1)) = \chi(M^*) - 1$, como $\chi(K^2 \setminus N(C_1)) = 0$ implica que $\chi(M^*) = 1$. Usando o Teorema de Classificação das Variedades, obtemos que $M^* = P^2$, ou seja, o plano projetivo.

Como C_2 é uma curva de um lado em P^2 , então podemos considerar um vizinhança $N(C_2)$ de C_2 em P^2 homeomorfa a faixa de Möbius tal que $N(C_2) \cap C_3 = \emptyset$. Se colarmos um disco fechado no bordo de $P^2 \setminus N(C_2)$ e usando a fórmula (6.1), temos que $\chi(P^2 \setminus N(C_2)) = \chi(M^*) - 1$, como $\chi(P^2 \setminus N(C_2)) = 1$ (pois $P^2 \setminus N(C_2)$ é homeomorfo a um disco) implica que $\chi(M^*) = 2$. Usando o Teorema de Classificação das Variedades,

obtemos que $M^* = S^2$, ou seja, a esfera. Como todas as curvas fechadas em S^2 são de dois lados e C_3 está contida em S^2 , então C_3 é necessariamente de dois lados. E o resultado segue. ■

Na sequência, apresentaremos o grupo fundamental de K^2 que é denotado por $\pi_1(K^2)$.

Seja G o grupo gerado pelos homeomorfismos $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $\alpha(u, v) = (u+1, v)$, e $\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $\beta(u, v) = (-v, v+1)$. Como $\alpha\beta = \beta\alpha^{-1}$, os elementos de G podem ser escritos sob a forma $\beta^m\alpha^n$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$. O espaço quociente \mathbb{R}^2/G é a garrafa de Klein. Assim, o grupo fundamental de K^2 é isomorfo a G (veja [8, Exemplo 12, p. 208]).

A garrafa de Klein pode ser visualizada com o espaço obtido a partir de um quadrado pela identificação dos lados opostos como na Figura 6.4.

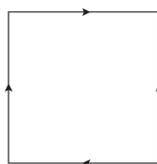


Figura 6.4: A garrafa de Klein K^2 .

Uma curva fechada simples que não é homotópica a um ponto em K^2 representa um dos seguintes elementos de $\pi_1(K^2)$:

$$\alpha, \alpha^{-1}, \beta^2, \beta^{-2}, \text{ ou } \beta^{-1}\alpha^n, n \in \mathbb{Z}.$$

A prova deste resultado pode ser vista em [5, Lema 2.3, p. 138].

A Figura 6.5 mostra como essas classes de homotopia podem ser representadas por curvas fechadas simples.

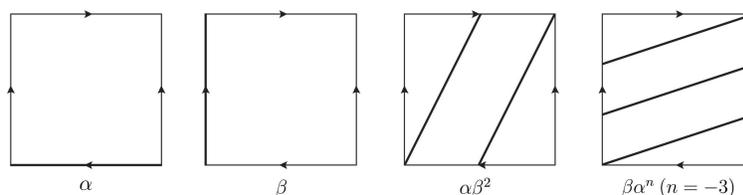


Figura 6.5: Curvas representando classes de homotopia de $\pi_1(K^2)$.

Observação 6.1.2. *Seja j um elemento de $\pi_1(K^2)$, e seja J um curva fechada simples representado j . Então $K^2 \setminus J$ terá*

- (a) *duas componentes, se $j = 1$ (um das quais é difeomorfa a um disco aberto);*
- (b) *um componente difeomorfa a um cilindro, se $j = \alpha^{\pm 1}$;*
- (c) *um componente difeomorfa a uma faixa de Möbius, se $j = \beta\alpha^n$ ou $j = \beta^{-1}\alpha^n$;*
- (d) *duas componentes difeomorfas a uma faixa de Möbius, se $j = \beta^{\pm 2}$.*

Este resultado pode ser visto em [5, p. 139].

Note que um curva fechada simples na garrafa de Klein será de dois lados, se sua classe de homotopia for $\alpha^{\pm 1}$ ou $\beta^{\pm 2}$.

6.2 O Teorema de Poincaré-Bendixson

Nesta seção, chegamos a um dos objetivos principal do trabalho, apresentaremos uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson na garrafa de Klein onde a órbita injetiva de $X \in K^2$ é fracamente ω -recorrente e outra onde a órbita injetiva de $X \in K^2$ não é fracamente ω -recorrente.

Definição 6.2.1. *Sejam M uma variedade compacta bidimensional e γ um órbita de $X \in \Omega(M)$ que intersecta uma seção transversal Σ em pontos p e q . Diremos que a curva $C = [p, q]_\gamma \cup [p, q]_\Sigma$ formado pela união do arco de órbita $[p, q]_\gamma$ de γ com o segmento $[p, q]_\Sigma$ de Σ é um círculo semi-transversal a X por γ , se ela for um curva fechada simples de dois lados (veja Figura 6.6).*

Lema 6.2.1. *Seja γ um órbita injetiva de $X \in \Omega(K^2)$. Se γ intersectar uma seção transversal Σ em quatro pontos distintos, então existirá um círculo semi-transversal a X por γ .*

Demonstração. Sejam p_1, p_2, p_3 e p_4 pontos distintos e consecutivos da interseção de γ com Σ . Assuma, sem perda de generalidade, que p_1, p_2, p_3 e p_4 formam um sequência

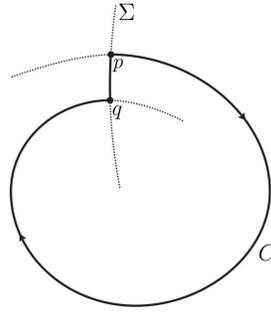


Figura 6.6: Círculo semi-transversal a X .

monótona em Σ . Caso contrário, a construção de um círculo semi-transversal a X por γ é imediata.

Consideremos as seguintes curvas fechadas simples $C_1 = [p_1, p_2]_\gamma \cup [p_1, p_2]_\Sigma$, $C_2 = [p_2, p_3]_\gamma \cup [p_2, p_3]_\Sigma$ e $C_3 = [p_3, p_4]_\gamma \cup [p_3, p_4]_\Sigma$ (ver Figura 6.7 (a)). Fazendo uma pequena perturbação dessas curvas, obtemos curvas fechadas simples e disjuntas, \tilde{C}_1 , \tilde{C}_2 e \tilde{C}_3 (ver Figura 6.7 (b)). Logo, pelo Lema 6.1.2, segue que pelo menos uma dessas curvas é de dois lados. Portanto, existe um círculo semi-transversal a X por γ . ■

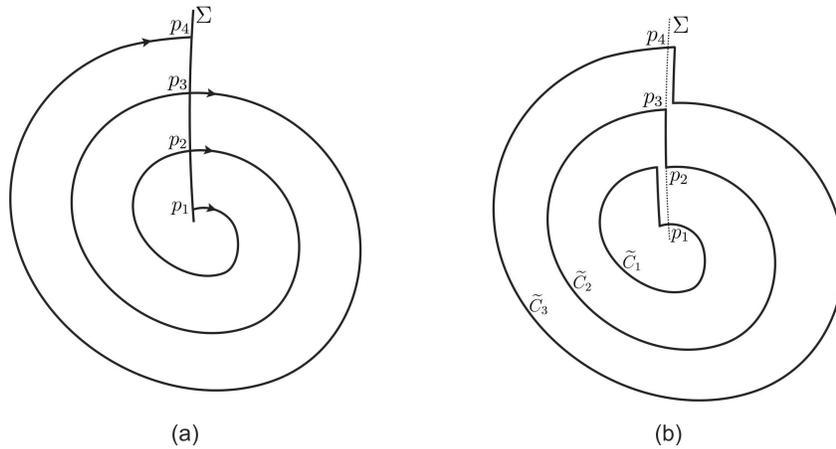


Figura 6.7: Curvas fechadas simples.

Corolário 6.2.1. *Se γ for uma órbita injetiva fracamente ω -recorrente (respectivamente fracamente α -recorrente) de $X \in \Omega(K^2)$, então existirá um círculo C semi-transversal a X por γ . Além disso, $K^2 \setminus C$ será conexo.*

Demonstração. Seja $p \in X$ e suponha que γ é fracamente ω -recorrente em p , ou seja, $p \in \gamma$ e $p \in \omega(\gamma)$. Seja Σ um segmento transversal passando por p . Como $p \in \omega(\gamma)$, então a semiórbita $\gamma_p^+ \subset \gamma$ intercepta Σ em um número infinito de pontos. Daí, pelo Lema 6.2.1, existe um círculo $C = [p_1, p_2]_\gamma \cup [p_1, p_2]_\Sigma$ semi-transversal a X por γ , onde $p_1 \in \gamma_p^+ \subset \gamma$ (veja Figura 6.8).

Suponha agora que, p pertence a componente de $\Sigma \setminus \{p_2\}$ que contém p_1 (veja as Figuras 6.8 (a) e 6.8 (b)). Vamos denotar por p_3 o primeiro ponto que a semiórbita positiva $\gamma_{p_2}^+ \subset \gamma$ intersecta essa componente. Como γ é injetiva o arco de órbita $(p_2, p_3)_\gamma$ é um caminho ligando os dois lados de C , sem intersectar C . Note que se uma curva liga pontos em lados diferentes, então deveria existir mais de uma componente se os lados estivesse em componentes diferentes. Como isso não ocorre em $K^2 \setminus C$, então $K^2 \setminus C$ é conexo.

Se p não pertence a componente conexa $\Sigma \setminus \{p_2\}$ que contém p_1 , temos que o arco de órbita $(p, p_1)_\gamma$ também é um caminho ligando os dois de C (veja Figura 6.8 (c)), o que novamente implica que $K^2 \setminus C$ é conexo. ■

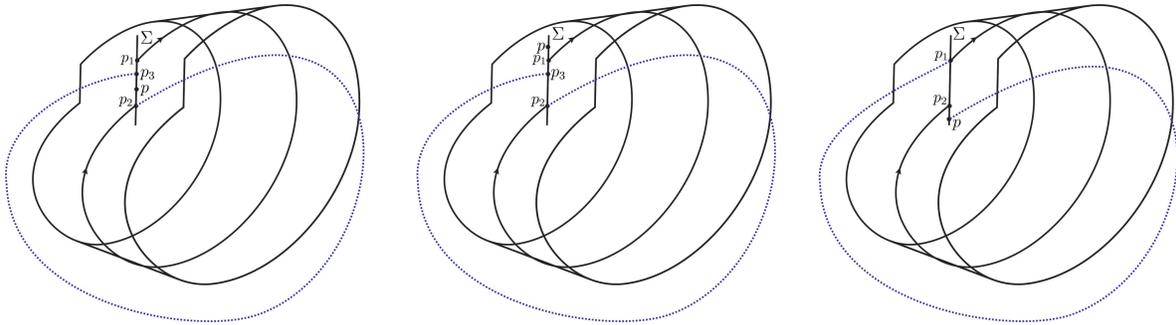


Figura 6.8: Conexidade de $K^2 \setminus C$.

Definição 6.2.2. *Seja M uma variedade compacta bidimensional. Um gráfico para $X \in \Omega(M)$ é um subconjunto fechado e conexo de M constituído de finitas singularidades e de um sequência (finita ou infinita) de órbitas injetivas e regulares tais que os conjuntos α -limite e ω -limite são singularidades.*

Observação 6.2.1. *Sejam M uma variedade compacta bidimensional, $X \in \Omega(M)$ e $N \subset M$ uma região homeomorfa a um cilindro. Suponhamos que o campo X possua um*

número finito de singulares em N . Se uma semiórbita positiva γ^+ estiver contida em N , então o seu conjunto ω -limite apresentará as mesmas possibilidades que o Teorema de Poincaré-Bendixson em \mathbb{R}^2 , ou seja, será uma órbita periódica, um ponto singular ou um gráfico.

A demonstração desta observação é similar a demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson em \mathbb{R}^2 , considerando o fato que uma curva de Jordan J em N divide $N \setminus J$ em duas componentes conexas limitadas contendo em seus bordos a curva J .

Agora apresentaremos um versão do Teorema de Poincaré-Bendixson onde a órbita injetiva de $X \in \Omega(K^2)$ é fracamente ω -recorrente.

Teorema 6.2.1. *Seja $X \in \Omega(K^2)$ um campo vetorial contínuo com um número finito de singularidades e seja γ um órbita injetiva fracamente ω -recorrente. Então $\omega(\gamma)$ é exatamente um dos seguintes conjuntos:*

- (a) *Uma órbita periódica;*
- (b) *Um gráfico.*

Demonstração. Pelo Corolário 6.2.1, existe um círculo C semi-transversal a X por γ tal que $K^2 \setminus C$ é conexo. Pelo Lema 6.1.1, $K^2 \setminus C$ é um cilindro. Como o cilindro é homeomorfo a um anel, podemos assumir que $K^2 \setminus C$ é um anel, onde os círculo fronteiras, que denotaremos por C_1 e C_2 , são orientados pelas setas como na Figura 6.9 (a). Tais círculos podem ser identificados por um homeomorfismo $h : C_1 \rightarrow C_2$ que preserva a orientação.

Temos a seguinte afirmação: existe $r \in \gamma$ tal que a semiórbita positiva $\gamma_r^+ \subset \gamma$ fica contida no anel $K^2 \setminus C$ ou em uma faixa de Möbius.

De fato, basta mostrarmos que se γ intersectar C em três pontos consecutivos p , q e r , então a semiórbita positiva $\gamma_r^+ \subset \gamma$ ficará contida em um faixa de Möbius.

Denotemos por \overline{pq} o arco de C com extremos p e q contendo r . Como $K^2 \setminus C$ é um anel e γ é injetiva, a semiórbita $\gamma_r^+ \subset \gamma$ pode intersectar C somente outra vez no arco $\overline{r\bar{q}} \subset \overline{pq}$ com extremos r e q (veja Figura 6.9 (a)). Note que a região limitada pelos arcos de órbitas formados pelos pontos r e q e pelos pontos p e q funciona como uma caixa de

fluxo. Como o homeomorfismo h preserva a orientação segue que a semiórbita $\gamma_r^+ \subset \gamma$ fica contida na faixa de Möbius, representada na Figura 6.9 (b). Caso contrário, $\gamma_r^+ \subset \gamma$ ficaria contida no anel $K^2 \setminus C$.

Note que $\omega(\gamma)$ não pode ser um ponto singular pois γ é injetiva fracamente ω -recorrente. Como $K^2 \setminus C$ é um cilindro pela Observação 6.2.1, o conjunto $\omega(\gamma)$ apresenta as mesmas possibilidades do Teorema de Poincaré-Bendixson em \mathbb{R}^2 , dessa forma, $\omega(\gamma)$ será um órbita periódica ou um gráfico; e usando o fato de que o cilindro é um recobrimento duplo orientado da faixa de Möbius e o Lema 5.3.2, segue que $\omega(\gamma)$ é uma um órbita periódica ou um gráfico. ■

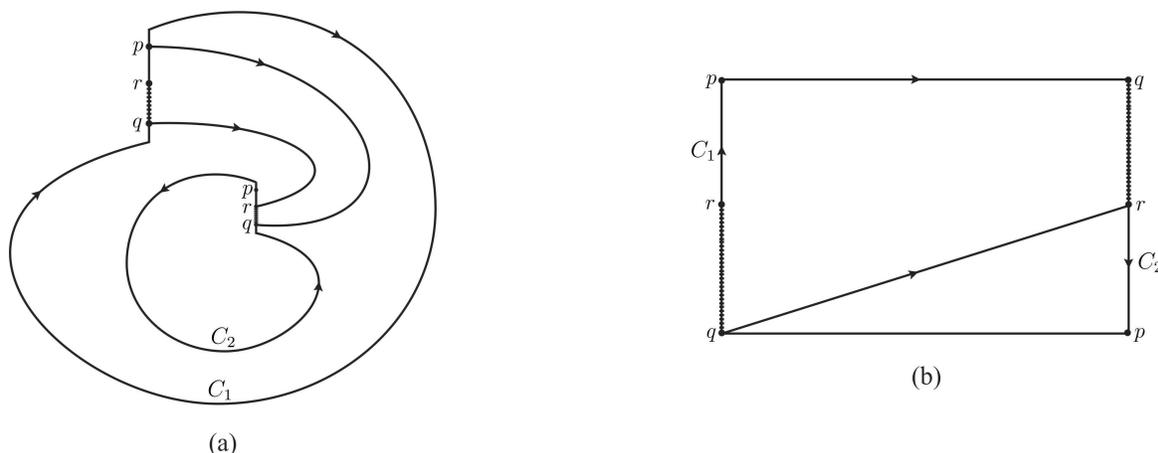


Figura 6.9: Anel com fronteira C^1 e C^2 , e faixa de Möbius.

Corolário 6.2.2. *Um campo vetorial contínuo $X \in \Omega(K^2)$ não possui órbita injetiva ω -recorrente.*

Demonstração. Seja γ uma órbita ω -recorrente, então $\gamma \subset \omega(\gamma)$. Como γ também é fracamente ω -recorrente pelo teorema anterior o conjunto $\omega(\gamma)$ é uma órbita periódica ou um gráfico.

Se $\omega(\gamma)$ for uma órbita periódica, então $\gamma \subset \omega(\gamma)$ é periódica, logo não pode ser injetiva. Se $\omega(\gamma)$ for um gráfico, como $\gamma \subset \omega(\gamma)$ e o número de singulares de X é finito, então em algum tempo t a curva γ se auto-intersectaria em algum ponto singular, logo γ não pode ser injetiva. ■

Na sequência, apresentaremos uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson na garrafa de Klien no caso onde a órbita injetiva de $X \in \Omega(K^2)$ não é fracamente ω -recorrente. Mas antes mostraremos dois resultados que ajudará na demonstração do teorema.

Proposição 6.2.1. *Seja $X \in \Omega(M)$ um campo vetorial contínuo em uma variedade compacta orientável bidimensional M e seja γ uma órbita injetiva que não é fracamente ω -recorrente. Se $\tilde{\gamma}$ for uma órbita periódica acompanhada por γ , então $\omega(\gamma) = \tilde{\gamma}$.*

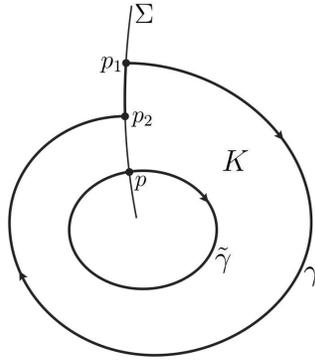
Demonstração. Seja M uma variedade bidimensional orientável, $X \in \Omega(M)$ um campo vetorial contínuo e $\tilde{\gamma}$ uma órbita periódica de X . Como M é orientável então $\tilde{\gamma}$ é uma curva de dois lados. Assim, possui um vizinhança U homeomorfa a um anel tal que $\tilde{\gamma}$ separa U em duas componentes conexas. Sabemos que o campo X é contínuo e $\{0\}$ é fechado, então $\{X^{-1}(0)\}$ é fechado, ou seja, o conjunto dos pontos de singularidades de X é fechado e, portanto, disjunto de $\tilde{\gamma}$. Assim, podemos considerar que a vizinhança U seja suficientemente pequena de tal forma que ela não contenha pontos singulares.

Seja Σ uma seção transversal passando por um ponto $p \in \tilde{\gamma}$, tal que $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\gamma}$ intersecta Σ somente em p . Como $p \in \omega(\gamma)$, pois $\tilde{\gamma}$ é acompanhada por γ , então γ intersecta Σ infinitas vezes. Sejam p_1 e p_2 pontos consecutivos da interseção de γ e Σ com respeito o tempo crescente (ver Figura 6.10). Como $\tilde{\gamma}$ é acompanhada por γ , podemos tomar p_1 suficientemente próximo a p para que o arco de órbita $[p_1, p_2]_\gamma$ fique contido em U . A órbita $\tilde{\gamma}$ separa U em duas componentes conexas e $\tilde{\gamma} \cap \gamma = \emptyset$. Dessa forma $[p_1, p_2]_\gamma$ pertence a um única componente de $U \setminus \tilde{\gamma}$. Logo a curva fechada simples $T = [p_1, p_2]_\gamma \cup [p_1, p_2]_\Sigma$ não intercepta $\tilde{\gamma}$ e fica contida em U .

Se T limitar um domínio simplesmente conexo D em U , pelos Teorema 3.2.4 e Teorema 3.2.5, $D \subset U$ conterá um ponto singular. Mas isto contradiz o fato da vizinhança U não conter ponto singulares. Portanto a curva T não é homotópica a um ponto em U e junto com $\tilde{\gamma}$ limitam uma região anular $K \subset U$ (veja Figura 6.10).

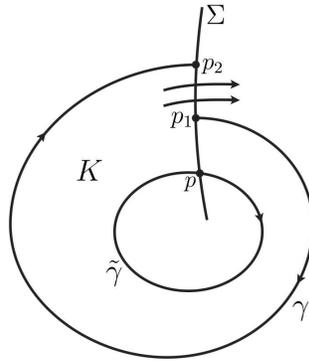
Denotemos por Σ_R e Σ_L as componente de $\Sigma \setminus \{p\}$. Suponhamos agora que $p_1, p_2 \in \Sigma_R$. Como $p \in \omega(\gamma)$ somente uma das seguintes alternativas ocorre:

(a) a semiórbita positiva $\gamma_2^+ \subset \gamma$ não intersecta Σ_L ;

Figura 6.10: Anel K .

(b) a semiórbita positiva $\gamma_2^+ \subset \gamma$ intersecta Σ_L em pontos arbitrariamente próximos de p .

Para o caso (a), mostraremos que p_2 está em Σ entre p_1 e p . Suponhamos que isto não aconteça, ou seja, p_1 está em Σ entre p_2 e p . Sendo assim, pelo Lema 3.2.1 em $[p_1, p_2]_\Sigma$ todas as semiórbitas saem de K e como γ é injetiva temos que $\gamma_{p_2}^+ \subset \gamma$ deixa o anel K e não o intercepta mais (veja Figura 6.11). Isso significa que $\gamma_{p_2}^+ \subset \gamma$ não intersecta Σ em qualquer vizinhança de p , contradizendo o fato de $p \in \omega(\gamma)$.

Figura 6.11: p_1 entre p_2 e p .

Agora provaremos o teorema no caso (a). Já sabemos que p_2 está em Σ entre p_1 e p . Chamaremos por p_3 o primeiro ponto onde a semiórbita $\gamma_{p_2}^+ \subset \gamma$ intersecta Σ . Podemos afirmar que p_3 está em Σ entre p_2 e p . De fato, em $[p_1, p_2]_\Sigma$ todas as semiórbitas entram em K e como γ é injetiva temos que $\gamma_{p_2}^+ \subset \gamma$ entra em K e não pode mais sair. Por isso, $p_3 \notin [p_1, p_2]_\Sigma$, logo $p_3 \in [p_2, p]_\Sigma$. Prosseguindo dessa forma, obtemos uma sequência $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em Σ com as seguintes propriedades:

- (a₁) $p_{n+1} \in \gamma_{p_n}^+ \cap \Sigma$, onde $\gamma_{p_n}^+ \subset \gamma$;
- (a₂) o ponto p_{n+1} está em Σ entre p_n e p ;
- (a₃) $\gamma_{p_1}^+ \subset \gamma$ não intersecta Σ em qualquer ponto, exceto em p_n , $n \in \mathbb{N}$ (veja Figura 6.12).

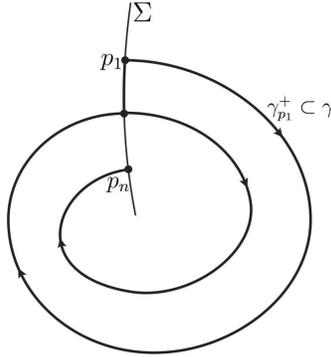


Figura 6.12: Sequência monótona $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Pela propriedade (a₂), a sequência $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem um ponto de acumulação $q \in \Sigma$. Como $p \in \omega(\gamma)$, então $q = p$. E ainda, (a₂) e (a₃) implicam que $\omega(\gamma) \cap \Sigma = \{p\}$

Uma vez que a semiórbita $\gamma_{p_2}^+ \subset \gamma$ está contida em K , o mesmo raciocínio utilizado acima nos fornece que:

- (a₄) qualquer seção transversal passando por um ponto $\tilde{p} \in \tilde{\gamma}$ intersecta $\omega(\gamma)$ somente em \tilde{p} .

Suponhamos agora que $\omega(\gamma) \setminus \tilde{\gamma} \neq \emptyset$. Sendo assim, $\omega(\gamma) \setminus \tilde{\gamma}$ tem um ponto de acumulação $\tilde{p} \in \tilde{\gamma}$, pois $\omega(\gamma)$ é conexo. Seja $\Sigma_{\tilde{p}}$ uma seção transversal passando por \tilde{p} . Pela Proposição 5.2.2 e como toda vizinhança de \tilde{p} contém pontos de $\omega(\gamma) \setminus \tilde{\gamma}$, então existe uma órbita $\gamma_{p_*} \subset \overline{K}$ passando por um ponto $p_* \in \omega(\gamma) \setminus \tilde{\gamma}$ e intersectando $\Sigma_{\tilde{p}}$. Por (a₄), o ponto de interseção é necessariamente \tilde{p} .

Seja \bar{t} o tempo tal que $\gamma_{p_*}(\bar{t}) = \tilde{p}$ e $\gamma_{p_*}(0) = p_*$. Considere o conjunto $A = \{t \in [0, \bar{t}] : \gamma_{p_*}(t) \in \tilde{\gamma}\}$. Como o conjunto A é fechado, existe um tempo mínimo $\eta \in A$, tal que $0 < \eta \leq \bar{t}$.

Tome $\varepsilon > 0$, assim $0 < \eta - \varepsilon < \eta \leq \bar{t}$. Seja $s = \eta - \varepsilon$, como $s \notin A$ e $\gamma_{p_*}(s)$ é um ponto regular, existe uma seção transversal Σ_* passando por $\gamma_{p_*}(s)$ que intersecta $\tilde{\gamma}$ e γ_{p_*} em

dois pontos distintos (ver Figura 6.13). O que é uma contradição com o item (a_4) . Logo $\omega(\gamma) \setminus \tilde{\gamma} = \emptyset$ e, conseqüentemente, $\omega(\gamma) \subset \tilde{\gamma}$. Portanto $\omega(\gamma) = \tilde{\gamma}$.

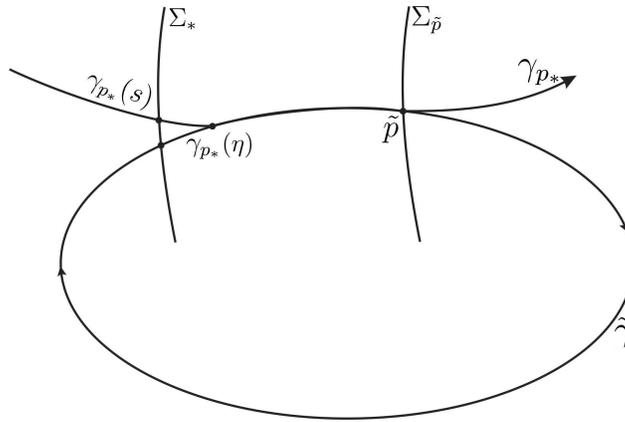


Figura 6.13: Segmentos transversais $\Sigma_{\tilde{p}}$ e Σ_* .

Agora demonstraremos o teorema para o caso (b) . Segue de argumentos anteriores que, neste caso, a semiórbita $\gamma_2^+ \subset \gamma$ deixa K e não o intersecta mais. Analogamente à construção de K , construímos um anel $\hat{K} \subset U$ limitado por $\tilde{\gamma}$ e por uma curva fechada simples formada pela união de um arco $[\hat{p}_1, \hat{p}_2]_\gamma$ com o intervalo $[\hat{p}_1, \hat{p}_2]_\Sigma$ de Σ (veja Figura 6.14). Como $\tilde{\gamma} \subset \omega(\gamma)$, implica que $\gamma_{p_2}^+ \subset \gamma$ tem que entrar no anel \hat{K} , sendo assim, \hat{p}_2 está entre \hat{p}_1 e p .

O restante da demonstração é análoga ao caso (a) , com K , p_1 , p_2 substituído por \hat{K} , \hat{p}_1 e \hat{p}_3 , respectivamente. ■

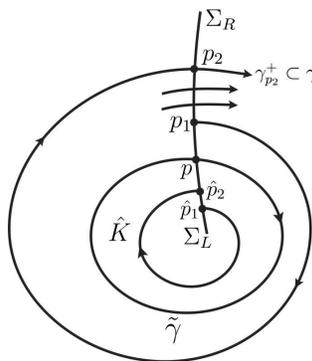


Figura 6.14: Anel \hat{K} .

Proposição 6.2.2. *Sejam $X \in \Omega(K^2)$ e γ um órbita injetiva que não é fracamente ω -recorrente. Suponhamos que no campo vetorial X possua um número finito de singularidades em $\omega(\gamma)$. Se $\tilde{\gamma}$ é uma órbita injetiva acompanhada por γ , então $\omega(\tilde{\gamma})$ e $\alpha(\tilde{\gamma})$ são singularidades.*

Demonstração. Suponha que $\omega(\tilde{\gamma})$ contenha um ponto regular p . Seja Σ uma seção transversal passando por p . Como $p \in \omega(\tilde{\gamma})$, então a semiórbita positiva $\tilde{\gamma}^+ \subset \tilde{\gamma}$ intersecta Σ em um número infinito de pontos. Daí, pelo Lema 6.2.1, existe um círculo semi-transversal a X por $\tilde{\gamma}$, seja ele, $\tilde{C} = [p_1, p_2]_{\tilde{\gamma}} \cup [p_1, p_2]_{\Sigma}$. Um vez que $\tilde{\gamma}$ é acompanhada por γ , podemos construir um círculo C semi-transversal a X por γ , suficientemente, próximo de \tilde{C} , com p_1 ou p_2 pertencente a C (veja Figura 6.15).

Digamos que $p_1 \in C$ (veja Figura 6.15 (a)). Como $p_1 \in \omega(\gamma)$, existem arcos de órbitas de X contidos em γ , ligando os dois lados de C e sem interceptar C . Note que se uma curva liga pontos em lados diferentes, então deveria existir mais de uma componente se os lados estivesse em componentes diferentes. Logo $K^2 \setminus C$ é conexo, e ainda, $K^2 \setminus C$ é um cilindro pelo Lema 6.1.1.

Usando o mesmo raciocínio da demonstração do Teorema 6.2.1, temos que a seguinte afirmação: existe $r \in \gamma$ tal que a semiórbita positiva $\gamma_r^+ \subset \gamma$ fica contida no anel $K^2 \setminus C$ ou em uma faixa de Möbius.

Pela Observação 6.2.1, o conjunto $\omega(\gamma)$ apresenta as mesmas possibilidades do Teorema de Poincaré-Bendixson em \mathbb{R}^2 . Mas $\tilde{\gamma} \subset \omega(\gamma)$ é injetiva, o que implica que $\tilde{\gamma}$ é não periódica. Logo, $\omega(\gamma)$ é um gráfico. Mas isso contradiz a existência de um ponto regular p em $\omega(\tilde{\gamma})$. Portanto, $\omega(\tilde{\gamma})$ é um ponto singular.

Analogamente, $\alpha(\tilde{\gamma})$ é um ponto singular pertencente a $\omega(\gamma)$. ■

Agora apresentaremos a versão do Teorema de Poincaré-Bendixson na garrafa de Klein no caso onde a órbita injetiva de $X \in \Omega(K^2)$ não é fracamente ω -recorrente.

Teorema 6.2.2. *Seja $X \in \Omega(K^2)$ um campo vetorial contínuo com um número finito de singularidades. Se γ é uma órbita injetiva não fracamente ω -recorrente, então $\omega(\gamma)$ é exatamente um dos seguintes conjuntos:*

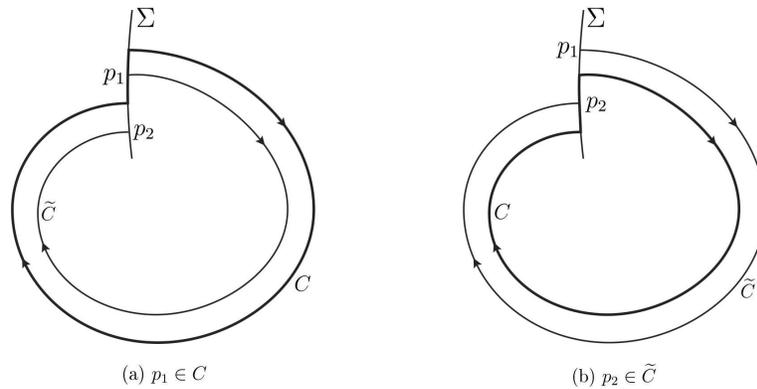


Figura 6.15: Círculos semi-transversais C e \tilde{C} .

- (a) *Uma singularidade;*
- (b) *Uma órbita periódica;*
- (c) *Um gráfico.*

Demonstração. Se $\omega(\gamma)$ não contiver pontos regulares, então $\omega(\gamma)$ é uma única singularidade, pois o número de singularidades de X é finito e $\omega(\gamma)$ é conexo.

Suponha agora que $\omega(\gamma)$ contém um ponto regular p . Considere um seção transversal a X por p . Assim, existe um sequência $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em Σ tal que $p_n \rightarrow p$, quando $n \rightarrow +\infty$. Pelo Lema 6.2.1 existe um círculo semi-transversal a X por γ , digamos, $C = [p_1, p_2]_\gamma \cup [p_1, p_2]_\Sigma$.

Se C for uma curva não homotópica a um ponto em K^2 , então C tem uma vizinhança homeomorfa a um cilindro. Pelo Lema 6.1.1 $K^2 \setminus C$ é um cilindro, se for conexo, ou consistirá da união de duas faixas de Möbius, pela Observação 6.1.2.

Assim, existe $r \in \gamma$ tal que $\gamma_r^+ \subset \gamma$ fica contida no cilindro ou em uma faixa de Möbius. Pela Observação 6.2.1, se $\gamma_r^+ \subset \gamma$ está contida no cilindro, então $\omega(\gamma)$ é uma órbita periódica ou um gráfico. Se $\gamma_r^+ \subset \gamma$ está contida numa faixa de Möbius, como o cilindro é um recobrimento duplo orientado da faixa de Möbius, pelo Lema 5.3.2, $\omega(\gamma)$ também é uma órbita periódica ou um gráfico.

Se C for uma curva homotópica a um ponto em K^2 , então C limitará um disco aberto D em K^2 . Notemos que neste caso, $p \notin C$.

Se $p \in D$, então vale as possibilidades do Teorema de Poincaré-Bendixson em \mathbb{R}^2 e $\omega(\gamma)$ é uma órbita periódica ou um gráfico.

No que segue, podemos supor que todos os círculos semi-transversais a X por γ são homotópicos a um ponto em K^2 e que p não pertence aos discos abertos que estes círculos limitam. Assim, $p \notin D$ (veja Figura 6.16).

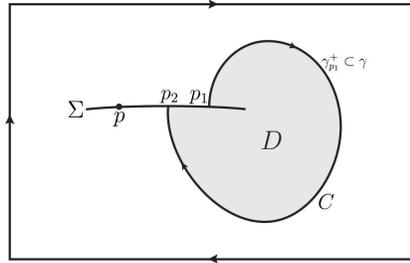


Figura 6.16: Círculo C homotópico a um ponto em K^2 .

Como $p \in \omega(\gamma)$, então a semiórbita positiva $\gamma_{p_1}^+ \subset \gamma$ intersecta Σ em uma sequência $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde $p_n = \gamma(t_n)$, com $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente de números reais e $p_n \rightarrow p$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Afirmamos que $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona em Σ .

De fato, suponha que $\{p_n\}$ não seja monótona em Σ , então $\gamma_{p_1}^+ \subset \gamma$ intersecta Σ em três pontos não consecutivos. Seja p_2 o primeiro ponto de retorno da órbita $\gamma_{p_1}^+$, daí obtemos uma curva $C_* = [p_1, p_2]_{\gamma_{p_1}^+} \cup [p_1, p_2]_{\Sigma}$ homotópica a um ponto em K^2 , logo C_* é o bordo de um disco. Podemos tomar uma vizinhança aberta suficientemente pequena deste disco, homeomorfa a um disco aberto.

Se a órbita $\gamma_{p_1}^+ \subset \gamma$ cruza a seção Σ em um terceiro ponto p_3 entre p_1 e p_2 (p_1 e p_2 segundo a orientação em Σ), então a trajetória sai do disco aberto até a próxima interseção com Σ . Ao retornar ao disco aberto deverá intersectar a C_* em $[p_1, p_2]_{\Sigma}$ ou em $[p_1, p_2]_{\gamma_{p_1}^+}$. Em ambos os casos temos uma contradição, pois se cruza em $[p_1, p_2]_{\Sigma}$ reverte o sentido do fluxo e se cruza em $[p_1, p_2]_{\gamma_{p_1}^+}$ contraria a injetividade da órbita.

Se a órbita $\gamma_{p_1}^+ \subset \gamma$ cruza a seção Σ em um terceiro ponto p_3 entre p_2 e p_1 , então a trajetória entra no disco aberto e permanece no disco até a próxima interseção com Σ . Sendo assim, a órbita cruza C_* em $[p_2, p_1]_{\Sigma}$ ou em $[p_1, p_2]_{\gamma_{p_1}^+}$. E novamente temos uma

contradição, pois se cruza em $[p_2, p_1]_\Sigma$ reverte o sentido fluxo e se cruza em $[p_1, p_2]_{\gamma_{p_1}^+}$ contraria a injetividade da órbita. Portanto $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona.

Consideremos as curvas fechadas

$$C_n = [p_n, p_{n+1}]_\gamma \cup [p_n, p_{n+1}]_\Sigma, \quad n = 1, 2, \dots$$

Afirmamos que C_n é uma curva de dois lados para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, suponha, por contradição, que exista $n_0 \geq 0$ tal que C_{n_0} é uma curva de um lado. Temos as seguintes opções:

- (i) existe $n > n_0$, tal que C_n é uma curva de dois lados;
- (ii) C_n é uma curva de um lado para todo $n \geq n_0$.

O caso (i) não pode acontecer. Suponha que aconteça, como $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona, podemos considerar que $C_{n_0} \subset C_n$. Mas toda curva contida no interior de C_n é homotópica a um ponto em K^2 e C_{n_0} é uma curva de um lado não homotópica a um ponto em K^2 . O que é uma contradição. Se $C_n \subset C_{n_0}$, então C_{n_0} é bordo de um disco, daí C_{n_0} e C_n são homotópicas, donde concluímos que C_{n_0} é homotópica a um ponto em K^2 . O que também é um contradição.

O caso (ii) também não é válido. Pois como $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona, então podemos obter mais de duas curvas disjuntas de um lado em K^2 . Pelo Lema 6.1.2, só existe duas curvas disjuntas de um lado em K^2 . Sendo assim, não existe $n_0 \geq 2$ tal que C_{n_0} é de um lado.

Como $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona em Σ , temos que $\omega(\gamma) \cap \Sigma = \{p\}$. Como p é arbitrário, isto implica que existe uma única órbita de X , que chamaremos de $\tilde{\gamma}$, passando por p tal que $\tilde{\gamma} \subset \omega(\gamma)$, pois caso contrário, existiria dois pontos distintos de $\omega(\gamma)$ em uma mesma seção transversal.

Agora analisaremos a órbita $\tilde{\gamma} \subset \omega(\gamma)$.

Se $\tilde{\gamma} \subset \omega(\gamma)$ é periódica, segue do fato que do toro T^2 ser um recobrimento duplo orientado da garrafa de Klein, da Proposição 6.2.1 e do Lema 5.3.2 que $\omega(\gamma) = \tilde{\gamma}$, ou seja, uma órbita periódica.

Se $\tilde{\gamma} \subset \omega(\gamma)$ não é periódica, então $\tilde{\gamma}$ é injetiva. Daí pela Proposição 6.1.1 os conjuntos $\omega(\tilde{\gamma})$ e $\alpha(\tilde{\gamma})$ são singularidades e, conseqüentemente, $\omega(\gamma)$ é um gráfico. O teorema está demonstrado. ■

Considerações finais

O Teorema de Poincaré-Bendixson é um resultado importante da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Através deste teorema temos uma descrição completa de todos os possíveis comportamentos assintóticos das soluções de uma equação diferencial ordinária no plano, mesmo sem conhecer as soluções explícitas da equação.

O Teorema da Curva Jordan é um fator indispensável para a demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson no \mathbb{R}^2 .

Para campos vetoriais contínuos a injetividade da órbita foi necessária para provar o teorema no plano. Percebemos que o teorema na teoria clássica é um corolário do teorema para campos vetoriais contínuos.

Para campos vetoriais suaves por partes no plano sem movimento de deslize, comportamentos análogos ocorrem. Por outro lado na presença de movimento de deslize pode ocorrer fenômenos não descritos na teoria clássica para campos suaves no plano.

Para campos vetoriais em variedades bidimensionais vimos o conceito de órbitas recorrentes, o que não ocorre no plano, e que pode acontecer do conjunto ω -limite ser igual a variedade, ou seja, $\omega(\gamma) = M$; como no caso do toro com o fluxo irracional.

Para as versões do Teorema de Poincaré-Bendixson na garrafa de Klein são necessários muitas ferramentas topológicas para garantir que argumentos análogos aos utilizados na demonstração do teorema da versão clássica funcionem, neste caso, com as hipóteses consideradas. O interessante de se observar é que a curva de dois lados faz o papel da curva de Jordan neste ambiente.

Referências Bibliográficas

- [1] BUZZI, C. A., CARVALHO, T., EUZÉBIO, R. D., ET AL. On poincaré-bendixson theorem and non-trivial minimal sets in planar nonsmooth vector fields. *Publicacions Matemàtiques* 62, 1 (2018), 113–131.
- [2] DEMUNER, D. P. *O Teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais contínuos na garrafa de Klein*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2008.
- [3] DEMUNER, D. P., FEDERSON, M., GUTIERREZ, C., ET AL. The poincaré–bendixson theorem on the klein bottle for continuous vector fields. *Discrete Contin. Dyn. Syst* 25, 2 (2009), 495–509.
- [4] FILIPPOV, A. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems*, vol. 18. Springer Science & Business Media, 1988.
- [5] GODBILLON, C. *Dynamical systems on surfaces*. Springer Science & Business Media, New York, 1983.
- [6] HARTMAN, P. Ordinary differential equations, society for industrial and applied mathematics siam, philadelphia, pa. *Classics Appl. Math* 38 (2002).
- [7] HIRSCH, M. W., SMALE, S., AND DEVANEY, R. L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.
- [8] LIMA, E. L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CNPq., 1977.
- [9] MASSEY, W. S. *Algebraic topology: an introduction*. Springer New York, 1967.

- [10] PALIS, J., AND DE MELO, W. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.
- [11] SOTOMAYOR, J. *Equações diferenciais ordinárias*, vol. 4. Livraria da Física, 2011.