

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Perfil Assimptótico de Soluções com Camada de Transição de uma Equação Bi-estável

Luana de Carvalho Maciel

Orientador: Prof. Dr. Maicon Sônego

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES
e da FAPEMIG

ITAJUBÁ, 13 DE JULHO DE 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Perfil Assimptótico de Soluções com Camada de Transição de uma Equação Bi-estável

Luana de Carvalho Maciel

Orientador: Prof. Dr. Maicon Sônego

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise Matemática

ITAJUBÁ – MG

13 DE JULHO DE 2019

À Isabel, Joaquim, Kelly e Kaylan.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, à Deus pela saúde e determinação que me tem dado em todos os dias de minha vida.

Aos meus pais Isabel e Joaquim, à minha irmã Kelly e ao meu sobrinho Kaylan, que sempre me apoiaram em minhas decisões e me deram forças para continuar. Sem minha família seria impossível concluir esta jornada.

Ao meu Prof. Dr. Maicon Sônego, pela chance que me foi dada e pela paciência e disponibilidade em me ajudar a pesquisar e a escrever a minha dissertação.

Aos meus amigos do mestrado, Elaine, Ronísio e Deysquele, que sempre estavam prontos para me ajudar e que tinham uma palavra de estímulo quando tudo parecia não dar certo. Sou imensamente agradecida pela amizade e companheirismo.

Aos funcionários e ao corpo docente do Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Itajubá. Em especial, o meu muito obrigada aos professores Leandro Gomes, Denis de Carvalho, Luis Fernando Mello e Fábio Scalco, que foram de uma importância ímpar na minha formação acadêmica e na minha trajetória dentro do programa.

À banca examinadora, à Prof. Dra. Mariza Simsen e ao Prof. Dr. Arnaldo Simal por terem aceitado o convite e por terem lido atentamente este trabalho, dando sugestões que contribuíram para o enriquecimento do mesmo.

À PROAP que disponibilizou recurso financeiro para incrementar minha formação acadêmica.

À FAPEMIG e à CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, com todos vocês compartilho esta conquista.

“Não há docência sem discência, as duas se explicam e seus sujeitos, apesar das diferenças que os conotam, não se reduzem à condição de objeto um do outro. Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender.”

Paulo Freire.

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo o estudo do perfil assintótico de uma família de minimizadores globais correspondentes ao funcional de energia associado ao problema $-\varepsilon^2 \Delta u = h(|x|)^2(u - a(|x|))(1 - u^2)$ em $B_1(0)$ com condição de Neumann homogênea, onde $a, h \in C^1([0, 1])$ tal que $a'(0) = 0$, $h'(0) = 0$ e $-1 < a(|x|) < 1$. Estudaremos o caso onde a função a não é identicamente nula, mas $a(r) \equiv 0$ em um intervalo fechado $I = [r_1, r_2] \subset (0, 1)$. Mostraremos que $u_\varepsilon(x)$ é radialmente simétrico e que o mesmo converge uniformemente à -1 e 1 nos subconjuntos compactos $A_- = \{x \in B_1(0); a(|x|) < 0\}$ e $A_+ = \{x \in B_1(0); a(|x|) > 0\}$, respectivamente. Além disso, estimaremos a energia da camada de transição de $u_\varepsilon(x)$ e mostraremos que esta camada é única em I quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Também provaremos que o ponto de mínimo de $r^{N-1}h(r)$ em I terá um papel muito importante na localização desta camada. Por fim, apresentaremos futuros problemas que poderão ser resolvidos com as técnicas que serão estudadas neste trabalho, tais problemas, se resolvidos, consolidarão em resultados inéditos.

Palavras-chave: funcional de energia, camada de transição, perfil assintótico, método variacional.

Abstract

This work has as main objective the study of the asymptotic profile of a family of global minimizers corresponding to the energy functional associated to the problem $-\varepsilon^2 \Delta u = h(|x|)^2(u - a(|x|))(1 - u^2)$ in $B_1(0)$ with homogeneous Neumann condition, where $a, h \in C^1([0, 1])$ such that $a'(0) = 0$, $h'(0) = 0$ and $-1 < a(|x|) < 1$. We will study the case where the function a is not identically zero, but $a(r) \equiv 0$ in a closed interval $I = [r_1, r_2] \subset (0, 1)$. We will show that $u_\varepsilon(x)$ is radially symmetric and that it converges uniformly to -1 and 1 in compact subsets $A_- = \{x \in B_1(0); a(|x|) < 0\}$ and $A_+ = \{x \in B_1(0); a(|x|) > 0\}$, respectively. In addition, we will estimate the energy of the transition layer of $u_\varepsilon(x)$ and show that this layer is unique in a closed interval $I = [r_1, r_2] \subset (0, 1)$ when $\varepsilon \rightarrow 0$. We will also prove that the minimum point of $r^{N-1}h(r)$ in I will play a very important role in locating this layer. Finally, we will present future problems that can be solved with the techniques that will be studied in this work, such problems, if solved, will consolidate in results unpublished.

Keywords: energy functional, transition layer, asymptotic profile, variational method.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	viii
Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Definições	4
1.1.1 Espaço de Sobolev	4
1.1.2 Cálculo Variacional	6
1.2 Alguns Resultados Necessários	7
2 O Teorema Principal	17
3 Demonstração do Teorema Principal	21
3.1 Parte 1	25
3.2 Parte 2	27
3.2.1 Passo 2.1	29
3.2.2 Passo 2.2	35

3.3	Parte 3	43
4	Conclusões e Perspectivas	48
4.1	O Problema com Difusibilidade Variável	48
4.2	O Problema sobre Superfícies de Revolução	49
	Bibliografia	54

Lista de Figuras

1.1	Ilustrando M com $F(x , u) = \int_{-1}^u f(x , s) ds$ e $-1 < a < 1$	9
1.2	Ilustrando M para $a = -1$ e $u = 1$	9
2.1	Perfil de um minimizador global u_ε (Caso 1).	18
2.2	Perfil de um minimizador global u_ε (Caso 2).	19
3.1	Compreendendo a função $w_\varepsilon(r)$	27
3.2	Esquematização do processo feito no Passo 2.1.	29
3.3	Compreendendo a função $V(t)$	31
3.4	Esquematização do processo feito no Passo 2.2.	35
3.5	Esquematização de discos presentes no Passo 2.2.	39
3.6	Esquematização do processo feito no Passo 3.	43
3.7	Gráfico de $g(x)$ para $-1 < a < 0$: onde $F(r, u_\varepsilon) = \int_{-1}^{u_\varepsilon} g(x) dx$ e $F(r, 1) =$ $\int_{-1}^1 g(x) dx$, respectivamente.	44
4.1	Domínio de revolução sem fronteira.	50
4.2	Domínio de revolução com fronteira.	51

Introdução

O foco principal deste trabalho é estudar o perfil assintótico de uma família de minimizadores globais correspondente ao funcional de energia associado ao seguinte problema de reação e difusão com condições de Neumann homogêneas

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u = h(|x|)^2(u - a(|x|))(1 - u^2) & \text{em } B_1(0), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial B_1(0). \end{cases} \quad (1)$$

Na equação (1) temos que $B_1(0)$ denota a bola unitária de centro na origem de \mathbb{R}^N ; ε é um parâmetro pequeno e positivo; ν representa o vetor unitário normal exterior a $\partial B_1(0)$. Além disso, $a \in C^1([0, 1])$ satisfaz $-1 < a(|x|) < 1$, $a'(0) = 0$ e $h \in C^1([0, 1])$ é positiva de tal modo que $h'(0) = 0$.

Sempre que conveniente, denotaremos $|x|$ por r .

As equações de reação e difusão têm sido extensivamente estudadas nas últimas décadas. Desde questões relacionadas a boa-postura ou existência de soluções não-triviais ou positivas ou que mudam de sinal ou simétricas e etc, até questões relacionadas à multiplicidade, estabilidade ou comportamento assintótico.

Em particular, aquelas soluções que são mínimos do funcional de energia associado (e é essa a classe de soluções que estamos interessados) possuem grande relevância, por exemplo no estudo dos mecanismos de formação de padrões. Exemplos na biologia, nos processos de modelagem dos organismos e na compreensão de genética populacional, e em química, nos estudos de reações, podem ser conferidos em [1] e em suas referências.

Além disso, tais equações modelam fenômenos relacionados à transições de fases e, em alguns casos, as soluções geram camadas de transição quando o coeficiente da difusão (no nosso caso, ε) é muito pequeno. Esta é exatamente a situação explorada neste trabalho e

o responsável por isto é o termo de reação dado por $h(|x|)^2(u - a(|x|))(1 - u^2)$. Neste caso temos duas soluções triviais para o problema que são: $u \equiv 1$ e $u \equiv -1$. Estas soluções podem representar duas fases distintas do problema. A grosso modo, e com as devidas hipóteses sobre a , provamos que um mínimo global do funcional energia associado à (1), vai de uma fase para outra conforme o parâmetro ε vai à zero.

A camada de transição é vista como a interface das fases, ou de forma mais clara, ela é vista como a ligação entre as fases. Neste trabalho, estudamos o caso onde a função a não é identicamente nula, mas $a(r) \equiv 0$ em um intervalo fechado $I \subset (0, 1)$ e concluímos que o ponto de mínimo da função $r^{N-1}h(r)$ em I tem um papel muito importante na localização de tal camada de transição em I .

Evidentemente, o modo como as camadas se comportam e a suas localizações são fundamentais, por exemplo, para entender e classificar as classes de soluções, mas principalmente para compreender como são formados os padrões no estudo de tais fenômenos. Sendo assim, o estudo realizado neste trabalho é de importante valia para a matemática aplicada em diversos campos.

Os resultados apresentados nesta dissertação são baseados nos resultados de [7] que, por sua vez, foi inspirado no trabalho [4].

Assim, este trabalho está estruturado da seguinte forma: inicialmente são expostas algumas definições importantes para a compreensão do resultado principal e também dos resultados preliminares, os quais também estão presentes no capítulo inicial. Posteriormente, enunciamos nosso principal resultado, tendo em sua companhia algumas figuras para melhor compreensão do mesmo. Logo após fazemos a demonstração deste teorema, tal demonstração é dividida em três partes e esta divisão se faz necessária para uma melhor organização deste trabalho.

Por fim apresentamos as conclusões oriundas do presente estudo e, além disso, fazemos uma exposição de perspectivas de problemas futuros inspirados pela dissertação. Especificamente, estudaremos o mesmo problema no caso onde o coeficiente de difusibilidade é variável e o objetivo será exibir o perfil geométrico das soluções; espera-se, novamente, a formação de uma camada de transição, porém a localização da interface certamente irá

dependem também do coeficiente de difusibilidade adicionado. Um segundo caso é estudar o problema posto sobre uma superfície de revolução; a simetria dos minimizadores do funcional associado permitirá aplicar a mesma técnica a fim de obter a formação da camada de transição e, neste caso, a geometria da superfície deverá interferir na localização da interface. Tais problemas, se resolvidos, serão resultados inéditos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo iremos expor algumas definições e resultados necessários para a compreensão e demonstração do Teorema Principal.

1.1 Definições

As definições a seguir foram baseadas em [5] e se fazem necessárias para as demonstrações presentes neste trabalho.

1.1.1 Espaço de Sobolev

Definição 1.1.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e com fronteira suave. Dizemos que uma função $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tem suporte compacto se existir um aberto $V \subset U$ onde*

$$\text{supp } \phi \subset V,$$

sendo

$$\text{supp } \phi = \overline{\{x \in U; \phi(x) \neq 0\}}.$$

Notação: Seja $C_c^\infty(U)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto em U . Chamaremos $\phi \in C_c^\infty(U)$ de *função teste*.

Definição 1.1.2. *Suponha que $u, v \in L^1_{loc}(U)$ e α um multi-índice. Nós diremos que v é a α -ésima derivada parcial fraca de u , escrevendo*

$$D^\alpha u = v,$$

se

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi \, dx,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Definição 1.1.3. *Fixe $1 \leq p \leq \infty$ e seja $k \in \mathbb{N}$. O Espaço de Sobolev*

$$W^{k,p}(U)$$

consiste em todas as funções $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ que são localmente L^1 tais que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, temos que $D^\alpha u$ existe no sentido fraco a $L^p(U)$.

Observação 1.1.1. *Se $p = 2$ então iremos escrever*

$$H^k(U) = W^{k,2}(U); k \in \mathbb{N}.$$

A letra H é utilizada pois $H^k(U)$ é um Espaço de Hilbert, ou seja, é um espaço com produto interno completo. Tal demonstração foge do escopo desta dissertação, entretanto ela pode ser encontrada na Seção 5.2.3 de [5].

Definição 1.1.4. *Denotaremos por*

$$W_0^{k,p}(U)$$

o fecho de $C_c^\infty(U)$ em $W^{k,p}(U)$.

Notação: denotaremos $W_0^{k,p}(U)$ por $H_0^k(U)$.

1.1.2 Cálculo Variacional

Nesta subseção a referência utilizada foi [5].

Suponha que queremos resolver alguma Equação Diferencial Parcial, que nesta subseção escreveremos na seguinte forma

$$A[u] = 0, \tag{1.1}$$

onde $A[\cdot]$ é um operador diferencial parcial e u é desconhecido. Em geral, não existe uma fórmula geral para resolver todas as equações diferenciais parciais, e o cálculo variacional identifica uma classe importante de tais problemas que podem ser resolvidos utilizando técnicas relativamente simples.

Esta é a classe dos problemas variacionais que são as Equações Diferenciais Parciais da forma (1.1), onde o operador $A[\cdot]$ é a “derivada” (que no nosso caso será chamada de primeira variação) de um funcional de energia $I[\cdot]$.

Escrevemos

$$A[u] = I'[u].$$

Assim, (1.1) fica da seguinte forma

$$I'[u] = 0. \tag{1.2}$$

A vantagem desta nova formulação é que podemos reconhecer as soluções de (1.1) como os pontos críticos de $I[\cdot]$, e estes, eventualmente, podem ser fáceis de encontrar.

Definição 1.1.5. *Suponha que $U \subset \mathbb{R}^N$ é limitado, aberto e com fronteira suave e que*

$$L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$

seja uma função suave.

Notação: Chamaremos L de *Lagrangeano* e escreveremos

$$L = L(p, z, x) = L(p_1, \dots, p_n, z, x_1, \dots, x_n),$$

para $p \in \mathbb{R}^N$, $z \in \mathbb{R}$, $x \in \bar{U}$. Assim “p” representa $Dw(x)$, “z” representa $w(x)$.

Definição 1.1.6. *Considere o seguinte funcional*

$$I[w] := \int_U L(Dw(x), w(x), x) \, dx, \quad (1.3)$$

definido para $w : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Seja $1 < q < \infty$ fixado. Suponha que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{existem constantes } \alpha > 0, \beta \geq 0, \text{ tal que} \\ L(p, z, x) \geq \alpha|p|^q - \beta \\ \forall p \in \mathbb{R}^N, z \in \mathbb{R}, x \in B_1(0). \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Consequentemente

$$I[w] \geq \alpha \|Dw\|_{L^q(B_1(0))}^q - \gamma; \quad (1.5)$$

para $\gamma := \beta|B_1(0)|$. Então $I[w] \rightarrow \infty$ quando $\|Dw\|_{L^q} \rightarrow \infty$. É comum chamarmos (1.5) de **condição de coercividade** em $I[\cdot]$.

1.2 Alguns Resultados Necessários

Teorema 1.2.1. *Assuma que L satisfaça (1.4) e que L é convexo na variável p . Então existe ao menos uma função $u \in H^1(B_1(0))$ que é solução de*

$$I[u] = \min_{w \in H^1(B_1(0))} I[w].$$

O Teorema 1.2.1 não é demonstrado nesta dissertação, mas a sua prova pode ser encontrada na Seção 8.2 de [5].

O funcional de energia associado a (1) é

$$J_\varepsilon(u) = \int_{B_1(0)} \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 - F(|x|, u) \right] \, dx,$$

onde $F(|x|, u) = \int_{-1}^u f(|x|, s) \, ds$, com $f(|x|, u) = h(|x|)^2(u - a(|x|))(1 - u^2)$.

A seguir veremos que o nosso problema de minimização tem um minimizador:

$$\inf \{ J_\varepsilon(u) \mid u \in H^1(B_1(0)) \}. \quad (1.6)$$

De fato, inicialmente observe que

$$\begin{aligned}
F(|x|, u) &= \int_{-1}^u f(|x|, s) \, ds \\
&= \int_{-1}^u [h(|x|)^2 (s - a(|x|))(1 - s^2)] \, ds \\
&= h(|x|)^2 \int_{-1}^u [s - s^3 - a(|x|) + s^2 a(|x|)] \, ds \\
&= h(|x|)^2 \left[\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4} - sa(|x|) + \frac{s^3}{3} a(|x|) \right]_{-1}^u \\
&= \frac{h(|x|)^2}{12} [6s^2 - 3s^4 - 12sa(|x|) + 4s^3 a(|x|)]_{-1}^u \\
&= \frac{h(|x|)^2}{12} [6s^2 - 3s^4 + (4s^3 - 12s)a(|x|)]_{-1}^u \\
&= \frac{h(|x|)^2}{12} \{6u^2 - 3u^4 + (4u^3 - 12u)a(|x|) - [6 - 3 + (-4 + 12)a(|x|)]\} \\
&= \frac{h(|x|)^2}{12} [6u^2 - 3u^4 + (4u^3 - 12u - 8)a(|x|) - 3].
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Assim usando o resultado obtido em (1.7) temos que

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u) &\geq \int_{B_1(0)} \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{B_1(0)} F(|x|, u) \, dx \\
&\geq \int_{B_1(0)} \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 \, dx - \|h\|_\infty^2 \int_{B_1(0)} \left| \frac{1}{12} [6u^2 \right. \\
&\quad \left. - 3u^4 + (4u^3 - 12u - 8)a(|x|) - 3] \right| \, dx \\
&\geq \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 \, dx - M.
\end{aligned}$$

Portanto $J_\varepsilon(u) \geq \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 \, dx - M$.

Onde M é o máximo que a seguinte equação

$$\left| \frac{1}{12} [6u^2 - 3u^4 + (4u^3 - 12u - 8)a(|x|) - 3] \right|$$

atinge. Temos que este máximo é atingido quando $a = -1$ e $u = 1$.

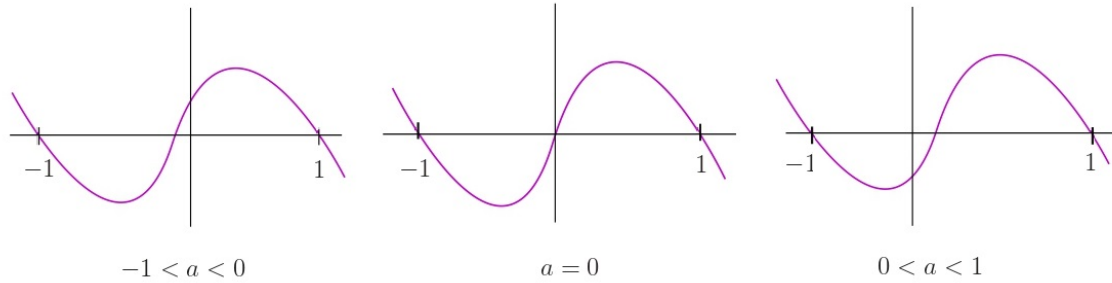


Figura 1.1: Ilustrando M com $F(|x|, u) = \int_{-1}^u f(|x|, s) ds$ e $-1 < a < 1$.

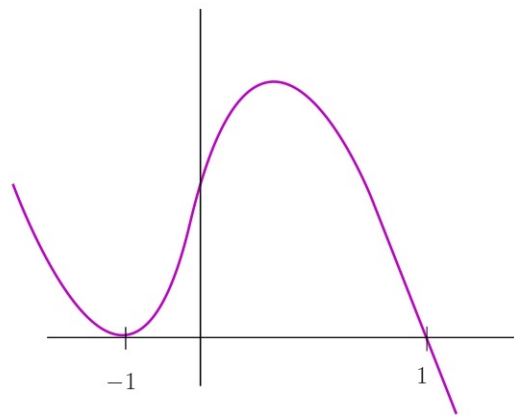


Figura 1.2: Ilustrando M para $a = -1$ e $u = 1$.

Note que, neste caso temos

$$L(p, z, x) = \frac{\varepsilon^2}{2} p^2 - h(|x|)^2 (z - a(|x|))(1 - z^2).$$

Assim, é fácil ver que L é convexo na variável p . Logo, pelo Teorema 1.2.1 temos que existe $u_\varepsilon \in H^1(B_1(0))$ tal que u_ε é o minimizador de (1.6).

Agora seja D um domínio limitado em \mathbb{R}^N . Seja $\bar{f}(x, t)$ uma função definida em $\bar{D} \times \mathbb{R}$ que é limitada em $\bar{D} \times [-1, 1]$. Suponha que \bar{f} é contínua em $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in \bar{D}$ e mensurável em D para cada $t \in \mathbb{R}$. Assuma também que:

$$\begin{cases} \bar{f}(x, t) > 0, & \text{para } x \in D, t < -1; \\ \bar{f}(x, t) < 0, & \text{para } x \in D, t > 1. \end{cases} \quad (1.8)$$

Considere o problema de minimização:

$$\inf \left\{ \bar{J}_\varepsilon(u, D) = \int_D \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 - \bar{F}(x, u) \right] dx ; u - \eta \in H_0^1(D) \right\}, \quad (1.9)$$

onde $\eta \in H^1(D)$ com $-1 \leq \eta \leq 1$ em D e

$$\bar{F}(x, t) = \int_{-1}^t \bar{f}(x, s) ds.$$

Lema 1.2.1. *Suponha que $\bar{f}(x, t)$ satisfaça (1.8). Seja u_ε um minimizador de (1.9). Então $-1 \leq u_\varepsilon \leq 1$.*

Demonstração.

Provaremos que $u_\varepsilon \geq -1$ em D . Para isso considere o seguinte conjunto

$$M = \{x \in D ; u_\varepsilon(x) < -1\},$$

e defina \tilde{u}_ε por

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = \begin{cases} u_\varepsilon(x), & \text{se } x \in D \setminus M; \\ -1, & \text{se } x \in M. \end{cases}$$

Como u_ε é um minimizador de (1.9) então $u_\varepsilon - \eta = 0$ sobre ∂D e assim

$$u_\varepsilon = \eta \geq -1$$

sobre ∂D . Portanto M está compactamente contido em D , ou seja, $\bar{M} \subset D$.

Como consequência temos que $\tilde{u}_\varepsilon - \eta \in H_0^1(D)$.

Agora considere m a medida de Lebesgue. Suponha que $m(M) > 0$, assim temos que

$$\begin{aligned} \bar{J}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon, D) &= \int_{D \setminus M} \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|^2 - \bar{F}(|x|, \tilde{u}_\varepsilon) \right] dx + \int_M \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|^2 - \bar{F}(|x|, \tilde{u}_\varepsilon) \right] dx \\ &= \int_{D \setminus M} \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|^2 - \bar{F}(|x|, \tilde{u}_\varepsilon) \right] dx \\ &< \int_D \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 - \bar{F}(|x|, u_\varepsilon) \right] dx \\ &= \bar{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, D). \end{aligned}$$

A desigualdade acima é válida pois $u_\varepsilon(x) < -1$ em M , e assim $\bar{f}(x, u_\varepsilon(x)) > 0$.

Logo

$$-\bar{F}(x, u_\varepsilon(x)) = - \int_{-1}^{u_\varepsilon(x)} \bar{f}(x, s) ds = \int_{u_\varepsilon(x)}^{-1} \bar{f}(x, s) ds > 0.$$

Além disso, em $D \setminus M$ temos que $u_\varepsilon(x) \geq -1$.

Então obtemos

$$\bar{J}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon, D) < \bar{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, D),$$

o que é um absurdo, pois u_ε é um minimizador de (1.9). Portanto, $m(M) = 0$ e assim $u_\varepsilon(x) \geq -1$ em D , como queríamos demonstrar.

Similarmente é possível mostrar que $u_\varepsilon(x) \leq 1$. ■

O próximo resultado será utilizado na demonstração do Lema 1.2.3 e sua demonstração pode ser encontrada em [5].

Lema 1.2.2. (*Refinamento do Lema de Hopf*) *Suponha que $V \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, $v \in C^2(\bar{V})$, e $c \in L^\infty(V)$. Assuma*

$$\begin{cases} -\Delta v + cv \geq 0, & \text{em } V \\ v \geq 0, & \text{em } V \end{cases}$$

Suponha também que $v \neq 0$.

(i) *Se $x^0 \in \partial V$, $v(x^0) = 0$, e V satisfaz a condição da bola interior em x_0 , então*

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x^0) < 0$$

(ii) *Além disso, $v > 0$ em V .*

Lema 1.2.3. *Suponha que $\bar{f}_1(t, x)$ e $\bar{f}_2(t, x)$ satisfaçam (1.8) e a mesma regularidade assumida em \bar{f} . Assuma que $\eta_i \in H^1(D)$ tal que*

$$-1 \leq \eta_i \leq 1 \text{ em } D,$$

para $i = 1, 2$. Seja $u_{\varepsilon,i}(x)$ um minimizador correspondente de (1.9) onde

$$\bar{f} = \bar{f}_i, \quad \eta = \eta_i,$$

para $i = 1, 2$. Além disso, suponha que

$$\bar{f}_1(x, t) \geq \bar{f}_2(x, t), \quad \forall (x, t) \in \bar{D} \times [-1, 1]$$

e

$$1 \geq \eta_1 \geq \eta_2 \geq -1.$$

Então $u_{\varepsilon,1}(x) \geq u_{\varepsilon,2}(x)$.

Demonstração.

Seja

$$M = \{x \in D ; u_{\varepsilon,1}(x) < u_{\varepsilon,2}(x)\}$$

e defina $\varphi_\varepsilon(x) = (u_{\varepsilon,2}(x) - u_{\varepsilon,1}(x))^+$, lembrando que

$$(u_{\varepsilon,2}(x) - u_{\varepsilon,1}(x))^+ = (u_{\varepsilon,2}(x) - u_{\varepsilon,1}(x)) \vee 0.$$

Como por hipótese, $\eta_1 \geq \eta_2$ e $u_{\varepsilon,i}(x)$ é um minimizador de (1.9), onde $\bar{f} = \bar{f}_i$ e $\eta = \eta_i$ para $i = 1, 2$, então temos

$$u_{\varepsilon,1}(x) - \eta_1(x) \in H_0^1(D);$$

$$u_{\varepsilon,2}(x) - \eta_2(x) \in H_0^1(D).$$

Logo,

$$(u_{\varepsilon,2}(x) - u_{\varepsilon,1}(x)) - (\eta_2(x) - \eta_1(x)) \in H_0^1(D)$$

e assim $u_{\varepsilon,2}(x) - u_{\varepsilon,1}(x) \leq 0$ em ∂D .

Portanto $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ em ∂D e assim $\varphi_\varepsilon(x) \in H_0^1(D)$.

Seja

$$\bar{F}_i(x, u) = \int_{-1}^{u(x)} \bar{f}_i(x, s) ds.$$

Para $i = 1, 2$ temos que $u_{\varepsilon,i}(x)$ é um minimizador de

$$J_{\varepsilon,i}(u, D) := \int_D \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 - \bar{F}_i(x, u) \right] du$$

e $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ para $x \in D \setminus M$, assim

$$\begin{aligned} 0 &\leq J_{\varepsilon,1}(u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x), D) - J_{\varepsilon,1}(u_{\varepsilon,1}(x), D) \\ &= \int_D \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla(u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x))|^2 - \bar{F}_1(x, u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)) \right] dx \\ &\quad - \int_D \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u_{\varepsilon,1}(x)|^2 - \bar{F}_1(x, u_{\varepsilon,1}(x)) \right] dx \\ &= \int_D \frac{\varepsilon^2}{2} [|\nabla(u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x))|^2 - |\nabla u_{\varepsilon,1}(x)|^2] dx \\ &\quad - \int_D [\bar{F}_1(x, u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)) - \bar{F}_1(x, u_{\varepsilon,1}(x))] dx. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
& \int_D [\bar{F}_1(x, u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)) - \bar{F}_1(x, u_{\varepsilon,1}(x))] dx = \\
& = \int_D \left[\int_{-1}^{u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)} \bar{f}_1(x, s) ds - \int_{-1}^{u_{\varepsilon,1}(x)} \bar{f}_1(x, s) ds \right] dx \\
& = \int_D \left[\int_{-1}^{u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)} \bar{f}_1(x, s) ds + \int_{u_{\varepsilon,1}(x)}^{-1} \bar{f}_1(x, s) ds \right] dx \\
& = \int_D \int_{u_{\varepsilon,1}(x)}^{u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)} \bar{f}_1(x, s) ds dx.
\end{aligned}$$

Assim, voltando à (1.10) obtemos:

$$\begin{aligned}
0 & \leq J_{\varepsilon,1}(u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x), D) - J_{\varepsilon,1}(u_{\varepsilon,1}(x), D) \\
& = \int_D \frac{\varepsilon^2}{2} [|\nabla(u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x))|^2 - |\nabla u_{\varepsilon,1}(x)|^2] dx - \int_D \int_{u_{\varepsilon,1}(x)}^{u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)} \bar{f}_1(x, s) ds dx \\
& = \int_{D \setminus M} \frac{\varepsilon^2}{2} [|\nabla u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)|^2 - |\nabla u_{\varepsilon,1}(x)|^2] dx \\
& \quad - \int_{D \setminus M} \int_{u_{\varepsilon,1}(x)}^{u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)} \bar{f}_1(x, s) ds dx \\
& + \int_M \frac{\varepsilon^2}{2} [|\nabla(u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x))|^2 - |\nabla u_{\varepsilon,1}(x)|^2] dx - \int_M \int_{u_{\varepsilon,1}(x)}^{u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)} \bar{f}_1(x, s) ds dx \\
& \leq \int_M \frac{\varepsilon^2}{2} [|\nabla u_{\varepsilon,2}(x)|^2 - |\nabla(u_{\varepsilon,2}(x) - \varphi_\varepsilon(x))|^2] dx - \int_M \int_{u_{\varepsilon,2}(x) - \varphi_\varepsilon(x)}^{u_{\varepsilon,2}(x)} \bar{f}_2(x, s) ds dx.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Observe novamente que:

$$\begin{aligned}
& \int_M \int_{u_{\varepsilon,2}(x) - \varphi_\varepsilon(x)}^{u_{\varepsilon,2}(x)} \bar{f}_2(x, s) ds dx \\
& = \int_M \left[\int_{-1}^{u_{\varepsilon,2}(x)} \bar{f}_2(x, s) ds + \int_{u_{\varepsilon,2}(x) - \varphi_\varepsilon(x)}^{-1} \bar{f}_2(x, s) ds \right] dx \\
& = \int_M \left[\int_{-1}^{u_{\varepsilon,2}(x)} \bar{f}_2(x, s) ds - \int_{-1}^{u_{\varepsilon,2}(x) - \varphi_\varepsilon(x)} \bar{f}_2(x, s) ds \right] dx.
\end{aligned}$$

Retornando à (1.11) obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq J_{\varepsilon,1}(u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x), D) - J_{\varepsilon,1}(u_{\varepsilon,1}(x), D) \\
&\leq \int_M \frac{\varepsilon^2}{2} [|\nabla u_{\varepsilon,2}(x)|^2 - |\nabla(u_{\varepsilon,2}(x) - \varphi_\varepsilon(x))|^2] dx - \int_M \int_{u_{\varepsilon,2}(x) - \varphi_\varepsilon(x)}^{u_{\varepsilon,2}(x)} \bar{f}_2(x, s) ds dx \\
&= \int_M \frac{\varepsilon^2}{2} [|\nabla u_{\varepsilon,2}(x)|^2 - |\nabla(u_{\varepsilon,2}(x) - \varphi_\varepsilon(x))|^2] dx \\
&\quad - \int_M \left[\int_{-1}^{u_{\varepsilon,2}(x)} \bar{f}_2(x, s) ds - \int_{-1}^{u_{\varepsilon,2}(x) - \varphi_\varepsilon(x)} \bar{f}_2(x, s) ds \right] dx \\
&= \int_M \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u_{\varepsilon,2}(x)|^2 - \int_{-1}^{u_{\varepsilon,2}(x)} \bar{f}_2(x, s) ds \right] dx \\
&\quad - \int_M \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla(u_{\varepsilon,2}(x) - \varphi_\varepsilon(x))|^2 - \int_{-1}^{u_{\varepsilon,2}(x) - \varphi_\varepsilon(x)} \bar{f}_2(x, s) ds \right] dx \\
&= \int_M \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u_{\varepsilon,2}(x)|^2 - \bar{F}_2(x, u_{\varepsilon,2}(x)) \right] dx - \int_M \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u_{\varepsilon,2}(x) - \varphi_\varepsilon(x)|^2 \right. \\
&\quad \left. - \bar{F}_2(x, u_{\varepsilon,2}(x) - \varphi_\varepsilon(x)) \right] dx \\
&= J_{\varepsilon,2}(u_{\varepsilon,2}(x), D) - J_{\varepsilon,1}(u_{\varepsilon,2}(x) + \varphi_\varepsilon(x), D) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)$ é também um minimizador de $J_{\varepsilon,1}(u(x), D)$.

Agora seja $L > 0$ suficientemente grande tal que

$$\bar{f}_1(x, t) + Lt$$

é estritamente crescente para $x \in \bar{D}, t \in [-1, 1]$.

Assim, como $u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)$ é um minimizador de $J_{\varepsilon,1}(u(x), D)$, obtemos da equação

$$-\varepsilon^2 \Delta(u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)) = \bar{f}_1(u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)),$$

o seguinte:

$$-\varepsilon^2 \Delta \varphi_\varepsilon(x) = \bar{f}_1(u_{\varepsilon,1}(x) - \varphi_\varepsilon(x)) - \bar{f}_1(u_{\varepsilon,1}(x)).$$

Então ficamos com

$$-\varepsilon^2 \Delta \varphi_\varepsilon(x) + L \varphi_\varepsilon(x) = \bar{f}_1(u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)) + L(u_{\varepsilon,1}(x) + \varphi_\varepsilon(x)) - (\bar{f}_1(u_{\varepsilon,1}(x)) + L(u_{\varepsilon,1}(x))).$$

Como $\bar{f}_1(x, t) - Lt$ é estritamente crescente para $x \in \bar{D}, t \in [-1, 1]$ então

$$-\varepsilon^2 \Delta \varphi_\varepsilon(x) + L\varphi_\varepsilon(x) > 0, \text{ em } D.$$

Agora suponha por absurdo que existe $z_0 \in M$ fixado e $x_0 \in \partial M$ tal que

$$|x_0 - z_0| = \text{dist}(z_0, \partial M).$$

Assim, utilizando o Lema 1.2.2 em

$$B = B_{\text{dist}(z_0, \partial M)}(z_0)$$

obtemos

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon(x_0)}{\partial \nu} < 0$$

onde $\nu = \frac{x_0 - z_0}{|x_0 - z_0|}$ é o vetor unitário exterior a B em x_0 .

Entretanto, $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ com $x \in D \setminus M$, logo

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon(x_0)}{\partial \nu} = 0.$$

Isto é uma contradição. Portanto o conjunto M é vazio. ■

O próximo resultado é o Teorema 2.3 de [6].

Teorema 1.2.2. *Considere o problema de valor na fronteira*

$$x'' = f(t, x, x'; \mu); \tag{1.12}$$

$$x(a) = \alpha; \quad x(b) = \beta, \tag{1.13}$$

e assuma

(I) $f(t, x_1, x_2; \mu)$ é contínuo em $[a, b] \times \mathbb{R}^3$;

(II) Existe uma solução $x_0(t)$ para o problema de valor na fronteira

$$x'' = f(t, x, x'; \mu_0); \tag{1.14}$$

$$x(a) = \alpha_0, \quad x(b) = \beta_0, \tag{1.15}$$

tal que se $x(t)$ é outra solução de (1.14) e $x(t_i) = x_0(t_i)$, $i = 1, 2$, para $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ então $x(t) = x_0(t)$ em $[t_1, t_2]$.

Então existe $\delta > 0$ tal que para todo μ com $|\mu - \mu_0| < \delta$, existe uma solução de $x(t; \mu)$ para o problema de valor na fronteira em questão. Além disso, $x(t; \mu) \rightarrow x_0(t)$ na norma de C^1 em $[a, b]$ quando $\mu \rightarrow \mu_0$.

Capítulo 2

O Teorema Principal

Neste capítulo apresentamos o Teorema Principal deste trabalho.

Teorema 2.0.1. *Seja u_ε um minimizador de (1.6). Então u_ε é radialmente simétrico e*

$$u_\varepsilon \longrightarrow \begin{cases} 1, & \text{uniformemente em cada subconjunto compacto de } A_-, \\ -1, & \text{uniformemente em cada subconjunto compacto de } A_+. \end{cases}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, sendo

$$A_- = \{x \in B_1(0); a(|x|) < 0\},$$

$$A_+ = \{x \in B_1(0); a(|x|) > 0\}.$$

Em particular u_ε converge uniformemente próximo à fronteira de $B_1(0)$, ou seja:

- se $a(r) < 0$ em $[r_0, 1]$ para algum $r_0 > 0$, então $u_\varepsilon \rightarrow 1$ uniformemente em $\overline{B_1(0)} \setminus B_{r_0}(0)$;
- se $a(r) > 0$ em $[r_0, 1]$ para algum $r_0 > 0$, então $u_\varepsilon \rightarrow -1$ uniformemente em $\overline{B_1(0)} \setminus B_{r_0}(0)$.

Além disso, para alguns $0 < r_1 \leq r_2 < 1$ com

$$\begin{cases} a(r) \neq 0, & r < r_1, \quad r > r_2, \text{ pequeno;} \\ a(r) = 0, & r \in [r_1, r_2]. \end{cases}$$

1. Se

$$\begin{cases} a(r) < 0, & r < r_1 \\ a(r) > 0, & r > r_2, \end{cases}$$

então para alguns $\eta, \theta > 0$ pequenos existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

(a) Para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ existem $t_{\varepsilon,1} < t_{\varepsilon,2}$ tal que

$$\begin{cases} u_\varepsilon(r) > 1 - \eta, & r \in [r_1 - \theta, t_{\varepsilon,1}); \\ u_\varepsilon(t_{\varepsilon,1}) = 1 - \eta; \\ u_\varepsilon(t_{\varepsilon,2}) = -1 + \eta; \\ u_\varepsilon(r) < -1 + \eta, & r \in (t_{\varepsilon,2}, r_2 + \theta]. \end{cases}$$

(b) A função $u_\varepsilon(t)$ é decrescente em $(t_{\varepsilon,1}, t_{\varepsilon,2})$.

(c) Vale a desigualdade

$$0 < R_1 \leq \frac{t_{\varepsilon,2} - t_{\varepsilon,1}}{\varepsilon} \leq R_2,$$

onde R_1 e R_2 são constantes independentes de $\varepsilon > 0$.

(d) Se $t_{\varepsilon_j,1}, t_{\varepsilon_j,2} \rightarrow \bar{t}$ para alguma sequência positiva $\varepsilon_j \rightarrow 0$ com $j \rightarrow \infty$ então

$$h(\bar{t})\bar{t}^{N-1} = \min_{s \in [r_1, r_2]} h(s)s^{N-1}.$$

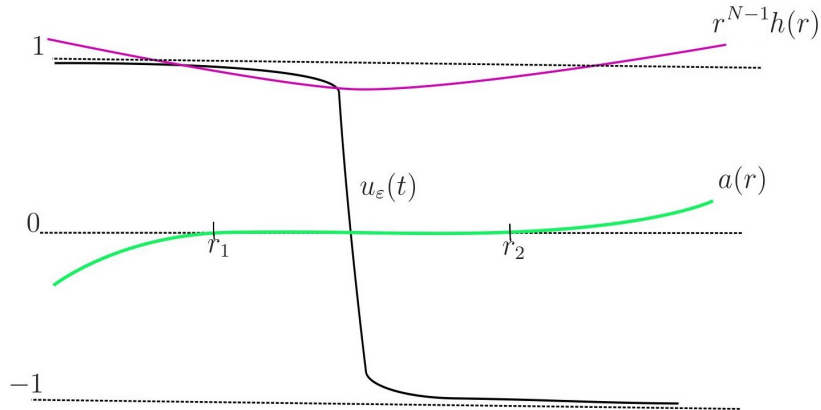


Figura 2.1: Perfil de um minimizador global u_ε (Caso 1).

2. Se

$$\begin{cases} a(r) > 0, r < r_1 \text{ pequeno;} \\ a(r) < 0, r > r_2, \end{cases}$$

então para alguns $\eta, \theta > 0$ pequenos existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

(a) para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ existem $t_{\varepsilon,1} < t_{\varepsilon,2}$ tal que

$$\begin{cases} u_\varepsilon(r) < -1 + \eta, r \in [r_1 - \theta, t_{\varepsilon,1}); \\ u_\varepsilon(t_{\varepsilon,1}) = -1 + \eta; \\ u_\varepsilon(t_{\varepsilon,2}) = 1 - \eta; \\ u_\varepsilon(r) > 1 - \eta, r \in (t_{\varepsilon,2}, r_2 + \theta]. \end{cases}$$

(b) A função $u_\varepsilon(t)$ é crescente em $(t_{\varepsilon,1}, t_{\varepsilon,2})$.

(c) Vale a desigualdade

$$0 < R_1 \leq \frac{t_{\varepsilon,2} - t_{\varepsilon,1}}{\varepsilon} \leq R_2,$$

onde R_1 e R_2 são constantes independentes de $\varepsilon > 0$.

(d) Se $t_{\varepsilon_j,1}, t_{\varepsilon_j,2} \rightarrow \bar{t}$ para alguma sequência positiva $\varepsilon_j \rightarrow 0$ com $j \rightarrow \infty$ então

$$h(\bar{t})\bar{t}^{N-1} = \min_{s \in [r_1, r_2]} h(s)s^{N-1}.$$

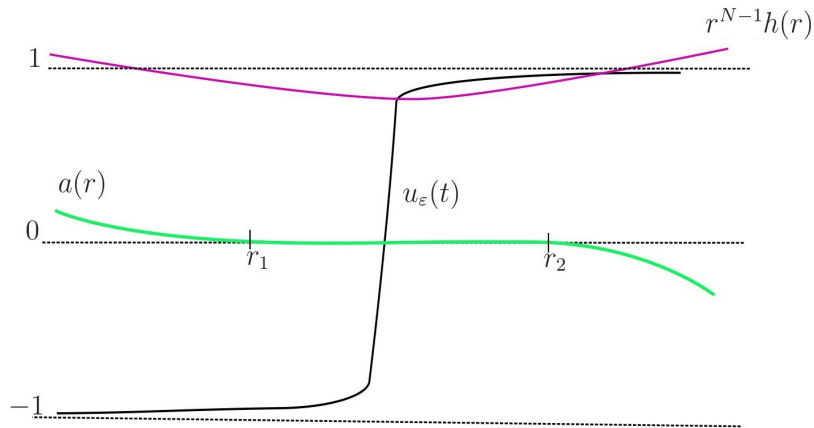


Figura 2.2: Perfil de um minimizador global u_ε (Caso 2).

Observação 2.0.1.

- *Observe que, em ambos os casos, somente o resultado (d) depende da função h .*
- *Se $\min_{s \in [r_1, r_2]} h(s)s^{N-1}$ atinge um único \bar{t} então conseguimos mostrar que $t_{\varepsilon_j, 1}, t_{\varepsilon_j, 2} \rightarrow \bar{t}$ sem tomar subsequências.*
- *Se a função $r^{N-1}h(r)$ é constante em $[r_1, r_2]$ então, em geral, é muito difícil encontrar $\bar{t} \in [r_1, r_2]$.*

Capítulo 3

Demonstração do Teorema Principal

Neste capítulo iremos demonstrar o caso onde

$$\begin{cases} a(r) < 0, & \text{em } [0, r_1]; \\ a(r) = 0, & \text{em } [r_1, r_2]; \\ a(r) > 0, & \text{em } (r_2, 1], \end{cases}$$

para alguns $0 < r_1 < r_2 < 1$.

Para melhor compreensão veja Figura 1.

Como já dito anteriormente, nossa demonstração estará dividida em três partes. A seguinte proposição será utilizada na Parte 1.

Proposição 3.0.1. *Seja $u_\varepsilon(x)$ um minimizador de*

$$\inf \{ J_\varepsilon(u) ; u \in H^1(B_1(0)) \}.$$

Então $u_\varepsilon(x)$ satisfaz

$$u_\varepsilon \longrightarrow \begin{cases} 1, & \text{uniformemente em cada subconjunto compacto de } A_-, \\ -1, & \text{uniformemente em cada subconjunto compacto de } A_+, \end{cases}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração.

Iremos mostrar que $u_\varepsilon(x) \rightarrow 1$ uniformemente em cada subconjunto compacto de A_- quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Para tanto, seja $x_0 \in A_-$. Escolha $\delta > 0$ pequeno tal que $B_\delta(x_0)$ esteja

compactamente contido em A_- , isto é, tal que o fecho da bola centrada em x_0 e de raio δ esteja contido em A_- .

Tome

$$b \in \max_{z \in \overline{B_\delta(x_0)}} \{a(z), 0\}$$

e defina

$$f_{x_0, \delta, b}(t) = \left(\min_{z \in \overline{B_\delta(x_0)}} h(|z|)^2 \right) (t - b)(1 - t^2).$$

Então para $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$, $t \in [-1, 1]$ temos

$$\begin{aligned} f(|x|, t) &= h(|x|)^2(t - a(|x|))(1 - t^2) \\ &\geq \left(\min_{z \in \overline{B_\delta(x_0)}} h(|z|)^2 \right) (t - b)(1 - t^2) \\ &= f_{x_0, \delta, b}(t). \end{aligned}$$

ou seja, $f(|x|, t) \geq f_{x_0, \delta, b}(t)$.

Seja $u_{\varepsilon, x_0, \delta, b}(x)$ um minimizador de

$$\inf \left\{ \int_{B_\delta(x_0)} \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 - F_{x_0, \delta, b}(u) \right] dx ; u + 1 \in H_0^1(B_\delta(x_0)) \right\}$$

e

$$F_{x_0, \delta, b}(t) = \int_{-1}^t f_{x_0, \delta, b}(s) ds.$$

Logo, segue dos Lemas 1.2.1 e 1.2.3 que

$$-1 \leq u_{\varepsilon, x_0, \delta, b}(x) \leq u_\varepsilon(x) \leq 1,$$

para $x \in B_\delta(x_0)$.

Agora suponha que $\int_{-1}^t f_{x_0, \delta, b}(s) ds > 0$. Assim, pelo Lema 3.1 de [3] temos que

$$u_{\varepsilon, x_0, \delta, b}(x) \rightarrow 1$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformemente em $B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$, e então

$$u_\varepsilon(x) \rightarrow 1$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformemente em $B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$.

De forma análoga é possível demonstrar que $u_\varepsilon(x) \rightarrow -1$ em cada subconjunto compacto de A_+ . ■

Proposição 3.0.2. *Seja u um minimizador local do problema*

$$\inf \left\{ \int_{B_1(0)} \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - G(|x|, u) \right] dx; u \in H^1(B_1(0)) \right\},$$

onde $G(r, t) = \int_{-1}^t g(r, s) ds$, $g(r, t) \in C^1$ para $t \in \mathbb{R}$, para cada $r \geq 0$, e $g(r, t)$, $g_t(r, t)$ mensuráveis em $[0, \infty)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, $g(r, t) < 0$ se $t < -1$ ou $t > 1$ e $|g(r, t)| + |g_t(r, t)|$ é limitado em $[0, k] \times [-2, 2]$ para algum $k > 0$. Então u é radial, isto é, $u(x) = u(|x|)$.

Demonstração. Podemos escrever u em um sistema de coordenadas polares, ou seja, é possível denotar u da seguinte forma

$$u = u(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1}).$$

Suponha por absurdo que u não é radial. Assim podemos escolher um sistema de coordenadas tal que

$$\frac{\partial u}{\partial \theta_{N-1}} \neq 0.$$

Logo $\frac{\partial u}{\partial \theta_{N-1}}$ satisfaz a seguinte equação

$$\begin{cases} -\Delta v - g_t(r, u)v = 0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

ou seja, temos que

$$\begin{cases} -\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial \theta_{N-1}} \right) - g_t(r, t) \left(\frac{\partial u}{\partial \theta_{N-1}} \right) = 0, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \theta_{N-1}} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Assim, como $u = u(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})$ tem período 2π e como u não é constante, $\frac{\partial u}{\partial \theta_{N-1}}$ muda de sinal.

Como Δ e g_t são aplicações lineares e v é uma autofunção, temos que

$$-\Delta v - g_t(r, u)v = \lambda v$$

onde λ é o autovalor associado à autofunção v . Observe que, por (3.1) $\frac{\partial u}{\partial \theta_{N-1}}$ é uma autofunção associada ao autovalor $\lambda = 0$.

Agora, é bem conhecido ([10], Capítulo 11) que a autofunção associada ao primeiro autovalor não muda de sinal. Daí concluímos que o primeiro autovalor é negativo.

Por outro lado, como u é um minimizador local, temos

$$\int_{\Omega} |D\varphi|^2 - g_t(|x|, u)\varphi^2 \, dx \geq 0,$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Além disso, é bem conhecido que (veja [10])

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_{\Omega} [|D\varphi|^2 - g_t(|x|, u)\varphi^2] \, dx ; \varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|_{L^2} = 1 \right\} \geq 0.$$

Logo, obtemos uma contradição e portanto u é radial. ■

Lema 3.0.1. *Seja $0 < \eta < 1$ uma constante fixada e w satisfazendo*

$$\begin{cases} -w_{zz} = w(1 - w^2) \text{ em } \mathbb{R}, \\ w(0) = -1 + \eta, (\text{respectivamente } w(0) = 1 - \eta), \end{cases}$$

com

$$w(z) \leq -1 + \eta, (\text{respectivamente } w(z) \geq 1 - \eta) \text{ para } z \leq 0;$$

w limitada em \mathbb{R} .

Então w é única solução de

$$\begin{cases} -w_{zz} = w(1 - w^2) \text{ em } \mathbb{R}, \\ w(0) = -1 + \eta, (\text{respectivamente } w(0) = 1 - \eta), \end{cases}$$

com

$$w'(z) > 0, (\text{respectivamente } w'(z) < 0), z \in \mathbb{R}$$

$$w(z) \rightarrow \pm 1, (\text{respectivamente } w(z) \rightarrow \mp 1), \text{ com } z \rightarrow \pm\infty.$$

A prova do lema acima pode ser conferido em [8]. Em suma, quando olhamos para o retrato de fase do problema, w representa a única órbita heteroclínica, isto é, w conecta os dois pontos de equilíbrios do problema, a saber: -1 e 1 . Para mais detalhes veja [12].

3.1 Parte 1

Inicialmente iremos mostrar que $u_\varepsilon(x)$ converge uniformemente próximo à fronteira de $B_1(0)$, ou seja, se $a(r) > 0$ em $[r_2, 1]$ mostraremos que $u_\varepsilon(x)$ converge uniformemente para -1 em

$$\overline{B_1(0)} \setminus B_{r_2+\tau}(0),$$

para qualquer $\tau > 0$ pequeno.

Para o caso $a(r) < 0$ em $[0, r_1]$ é feito de forma similar.

Note que $u_\varepsilon(x)$ converge uniformemente para -1 em $\overline{B_{1-\tau}(0)} \setminus B_{r_2+\tau}(0)$, com ε pequeno convergindo para 0, pois $\overline{B_{1-\tau}(0)} \setminus B_{r_2+\tau}(0)$ é um compacto em A_+ e assim o resultado segue da Proposição 3.0.1.

Afirmamos que $u_\varepsilon(r) \leq u_\varepsilon(1-\tau) := T_\varepsilon$, para $r \in [1-\tau, 1]$.

Defina a função \tilde{u}_ε por

$$\tilde{u}_\varepsilon(r) := \begin{cases} u_\varepsilon(r), & \text{se } r \in [0, 1-\tau]; \\ u_\varepsilon(r), & \text{se } u_\varepsilon(r) < T_\varepsilon, r \in [1-\tau, 1]; \\ T_\varepsilon, & \text{se } u_\varepsilon(r) \geq T_\varepsilon, r \in [1-\tau, 1]. \end{cases}$$

Note que, como $u_\varepsilon \in H^1(B_1(0))$, cada componente de \tilde{u}_ε também pertence a $H^1(B_1(0))$ e, além disso, \tilde{u}_ε é contínua, então temos que $\tilde{u}_\varepsilon \in H^1(B_1(0))$ e

$$\begin{aligned} -F(t, T_\varepsilon) &= -\int_{-1}^{T_\varepsilon} f(r, s) \, ds \\ &\leq -\int_{-1}^t f(r, s) \, ds \\ &= -F(r, t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

para $\varepsilon > 0$, $|r-1|$ pequeno e $T_\varepsilon \leq t$.

Vale ressaltar que, por definição $\tilde{u}_\varepsilon = T_\varepsilon$ se $u_\varepsilon \geq T_\varepsilon$ e $r \in [1-\tau, 1]$. Assim, neste caso, \tilde{u}_ε será constante. Logo, $\nabla \tilde{u}_\varepsilon = 0$ e assim

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \int_{B_1(0)} |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|^2 \, dx < \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{B_1(0)} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx. \tag{3.3}$$

Daí de (3.2) e (3.3) temos que

$$\begin{aligned}
 J_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon(x)) &= \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{B_1(0)} |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|^2 dx - \int_{B_1(0)} F(r, s) ds \\
 &< \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{B_1(0)} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx - \int_{B_1(0)} F(r, s) ds \\
 &= J_\varepsilon(u_\varepsilon(x)).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$J_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon(x)) < J_\varepsilon(u_\varepsilon(x)).$$

Agora, se supusermos que o seguinte conjunto

$$\{r \in [0, 1]; u_\varepsilon(r) > T_\varepsilon, r \in [1 - \tau, 1]\}$$

tem medida positiva, chegamos em uma contradição.

Assim não existe $r \in [0, 1]$ tal que $u_\varepsilon(r) > T_\varepsilon$ e $r \in [1 - \tau, 1]$. Então $u_\varepsilon(r) \leq T_\varepsilon$.

Além disso, do Lema 1.2.1 obtemos que $-1 \leq u_\varepsilon(r)$. Sendo assim,

$$-1 \leq u_\varepsilon(r) \leq T_\varepsilon.$$

Como $T_\varepsilon := u_\varepsilon(1 - \tau)$, $u_\varepsilon(1 - \tau) \in \overline{B_1(0)} \setminus B_{r_2 + \tau}(0)$ e todas as funções neste disco convergem uniformemente para -1 , chegamos que

$$T_\varepsilon \rightarrow -1.$$

Finalmente, podemos concluir que $u_\varepsilon \rightarrow -1$ uniformemente em

$$\overline{B_1(0)} \setminus B_{r_2 + \tau}(0),$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.2 Parte 2

Pela Proposição 3.0.2 temos que u_ε é radial e afirmamos que para quaisquer

$$0 < t_1 < t_2 < 1,$$

u_ε é um minimizador do seguinte problema

$$\inf\{J_\varepsilon(u, B_{t_2}(0) \setminus \overline{B_{t_1}(0)}); u - u_\varepsilon \in H_0^1(B_{t_2}(0) \setminus \overline{B_{t_1}(0)})\} \quad (3.4)$$

onde

$$J_\varepsilon(u, M) = \int_M \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 - F(|x|, u) \right] dx$$

para qualquer conjunto M aberto.

De fato, se u_ε não é um minimizador de (3.4) então existe v_ε tal que

$$J_\varepsilon(v_\varepsilon, B_{t_2}(0) \setminus \overline{B_{t_1}(0)}) < J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_{t_2}(0) \setminus \overline{B_{t_1}(0)}).$$

Se definirmos

$$w_\varepsilon(r) := \begin{cases} u_\varepsilon & \text{em } B_{t_1}(0); \\ v_\varepsilon & \text{em } B_{t_2}(0) \setminus \overline{B_{t_1}(0)}; \\ u_\varepsilon(r) & \text{em } B_1(0) \setminus B_{t_2}(0), \end{cases}$$

teremos que $J_\varepsilon(w_\varepsilon, B_1(0)) < J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_1(0))$, o que é um absurdo.

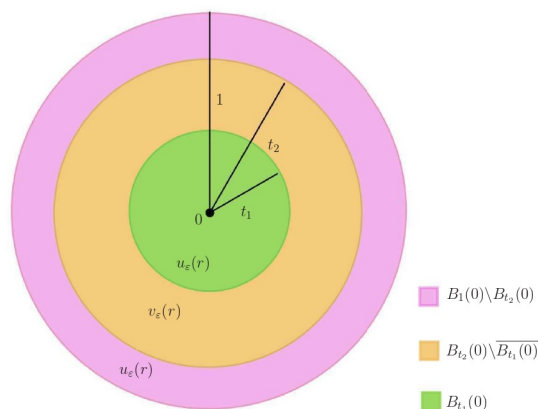


Figura 3.1: Compreendendo a função $w_\varepsilon(r)$.

Denotemos por $m_{\varepsilon, t_1, t_2}$ o valor mínimo deste problema de minimização, isto é

$$m_{\varepsilon, t_1, t_2} = J_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}, B_{t_2}(0) \setminus \overline{B_{t_1}(0)}).$$

Agora, a segunda parte da demonstração será dividida em dois passos, como segue. No primeiro passo estimaremos a energia da camada de transição e no segundo iremos provar que a família $\{u_{\varepsilon}\}$ desenvolve exatamente uma camada de transição próximo ao intervalo $[r_1, r_2]$.

3.2.1 Passo 2.1

Sejam $\eta > 0$ e $\theta > 0$ números pequenos. Como $u_\varepsilon \rightarrow 1$ uniformemente em $[0, r_1 - \theta]$ é possível encontrarmos $\bar{r}_\varepsilon \in (r_1 - \theta, r_2 + \theta)$ tal que

$$u_\varepsilon(r) \geq 1 - \eta, \text{ se } r \in [0, \bar{r}_\varepsilon]$$

e

$$u_\varepsilon(r) < 1 - \eta, \text{ se } r > \bar{r}_\varepsilon \text{ pequeno.}$$

Como $u_\varepsilon \rightarrow -1$ uniformemente em $[r_2 + \theta, 1 - \theta]$ é possível encontrar $\tilde{r}_\varepsilon > \bar{r}_\varepsilon$ tal que

$$u_\varepsilon(r) \leq -1 + \eta, \text{ se } r \in [\tilde{r}_\varepsilon, 1 - \theta]$$

e

$$u_\varepsilon(r) > -1 + \eta, \text{ se } r < \tilde{r}_\varepsilon \text{ pequeno.}$$

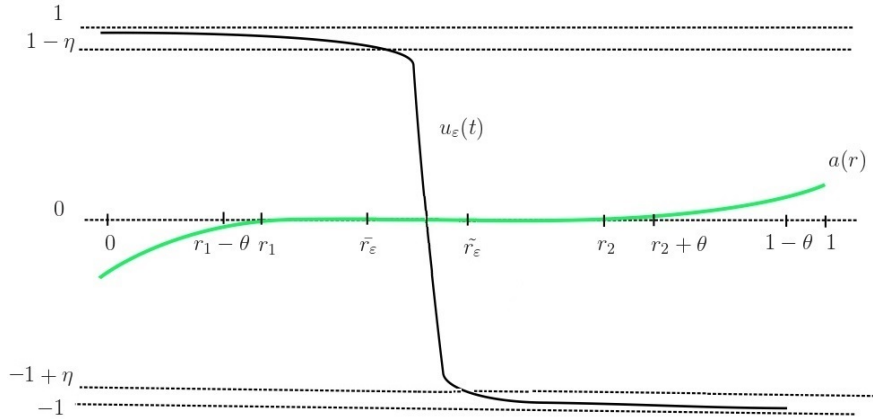


Figura 3.2: Esquematização do processo feito no Passo 2.1.

Agora assumimos que

$$\bar{r}_\varepsilon \rightarrow \bar{r} \text{ e } \tilde{r}_\varepsilon \rightarrow \tilde{r}$$

onde $\bar{r}, \tilde{r} \in [r_1, r_2]$. De fato, se $\bar{r}, \tilde{r} \notin [r_1, r_2]$ temos um absurdo devido à Proposição 3.0.1.

Fazendo o seguinte reescalonamento em relação à \bar{r}_ε

$$v_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(\varepsilon t + \bar{r}_\varepsilon) \tag{3.5}$$

obtemos

$$(v_\varepsilon)_{tt} + \frac{(\varepsilon t + \bar{r}_\varepsilon)_t(N-1)}{\varepsilon t + \bar{r}_\varepsilon}(v_\varepsilon)_t + f(\varepsilon t + \bar{r}_\varepsilon, v_\varepsilon) = 0,$$

assim

$$-v_\varepsilon'' + \frac{\varepsilon(N-1)}{\varepsilon t + \bar{r}_\varepsilon}(v_\varepsilon)' = f(\varepsilon t + \bar{r}_\varepsilon, v_\varepsilon)$$

com $-1 \leq v_\varepsilon \leq 1$ e $v_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(\bar{r}_\varepsilon) = 1 - \eta$.

Como $\bar{r}_\varepsilon \rightarrow \bar{r} \in [r_1, r_2]$, pelo Teorema 1.2.2 é possível mostrar que $v_\varepsilon \rightarrow v$ em $C_{loc}^1(\mathbb{R})$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e

$$-v'' = h(\bar{r})^2(v - v^3), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

e $v(t) \geq 1 - \eta$ para $t \leq 0$.

Definindo $V(\cdot)$ por

$$v(t) = V(h(\bar{r})t) \quad (3.7)$$

temos que

$$v'(t) = V'(h(\bar{r})t)h(\bar{r}),$$

$$v''(t) = V''(h(\bar{r})t)h^2(t).$$

Logo, de (3.6) e (3.7)

$$\begin{aligned} -V''(h(\bar{r})t) &= \frac{-v''(t)}{h^2(t)} \\ &= \frac{h(\bar{r})^2(v - v^3)}{h(\bar{r})^2} \\ &= v - v^3 \\ &= V(h(\bar{r})t) - V^3(h(\bar{r})t). \end{aligned}$$

Portanto $-V'' = V - V^3$.

Além disso,

$$V(0) = 1 - \eta,$$

$$V(t) \geq 1 - \eta, \quad \text{para } t \leq 0.$$

Assim a função V satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} -V'' = V - V^3, \text{ em } \mathbb{R} \\ V(0) = 1 - \eta, \\ V(t) \geq 1 - \eta, \text{ para } t \leq 0. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Logo, pelo Lema 3.0.1 temos que V é a única solução de

$$\begin{cases} -V'' = V - V^3, & \text{em } \mathbb{R} \\ V(0) = 1 - \eta, \\ V'(t) < 0, & t \leq 0, \\ V(t) \rightarrow \pm 1 & \text{quando } t \rightarrow \mp\infty. \end{cases} \quad (3.9)$$

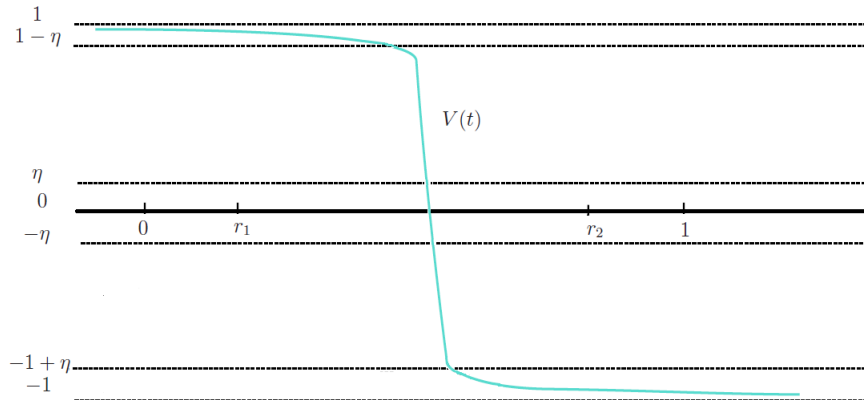


Figura 3.3: Compreendendo a função $V(t)$.

Então podemos encontrar $R > 0$ tal que $v(R) = -1 + \eta$. Como $v_\varepsilon \rightarrow v$ em $C_{loc}^1(\mathbb{R})$, é possível encontrar $R_\varepsilon \in (R - 1, R + 1)$ tal que

$$v'_\varepsilon(r) < 0, \text{ se } r \in [0, R_\varepsilon],$$

$$v_\varepsilon(R_\varepsilon) = -1 + \eta.$$

Consequentemente $u'_\varepsilon(r) < 0$ se $r \in [\bar{r}_\varepsilon, \bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon]$ e $u_\varepsilon(\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon) = -1 + \eta$. Então

temos (utilizando coordenadas polares):

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)}) &= \int_{B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)}} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 - F(|x|, u_\varepsilon) \right) dx \\
&= \int_{B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0)} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 - F(|x|, u_\varepsilon) \right) dx \\
&\quad - \int_{B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 - F(|x|, u_\varepsilon) \right) dx \\
&= \omega_{N-1} \int_0^{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} |u'_\varepsilon|^2 - F(t, u_\varepsilon) \right) t^{N-1} dt \\
&\quad - \omega_{N-1} \int_0^{\bar{r}_\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} |u'_\varepsilon|^2 - F(t, u_\varepsilon) \right) t^{N-1} dt \\
&= \omega_{N-1} \int_{\bar{r}_\varepsilon}^{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} |u'_\varepsilon|^2 - F(t, u_\varepsilon) \right) t^{N-1} dt,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

onde ω_{N-1} denota a área da esfera unitária em \mathbb{R}^N .

Agora afirmamos que $\frac{\varepsilon^2}{2} |u'_\varepsilon|^2 - F(t, u_\varepsilon) \geq 0$.

De fato, temos que $\frac{\varepsilon^2}{2} |u'_\varepsilon|^2 \geq 0$ e, além disso

$$\begin{aligned}
F(t, u_\varepsilon) &= \int_{-1}^{u_\varepsilon} [h^2(t)(s - s^3)] ds \\
&= h^2(t) \int_{-1}^{u_\varepsilon} (s - s^3) ds \\
&= h^2(t) \left[\frac{u_\varepsilon^2}{2} - \frac{u_\varepsilon^4}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right] \\
&= (-1)h^2(t) \frac{(u_\varepsilon^2 - 1)^2}{4} \\
&\leq 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Assim, $-F(t, u_\varepsilon) \geq 0$ e portanto $\frac{\varepsilon^2}{2} |u'_\varepsilon|^2 - F(t, u_\varepsilon) \geq 0$.

Sendo assim, voltamos à (3.10)

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)}) &= \omega_{N-1} \int_{\bar{r}_\varepsilon}^{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} |u'_\varepsilon|^2 - F(t, u_\varepsilon) \right) t^{N-1} dt \\
&\leq \omega_{N-1} (\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon)^{N-1} \int_{\bar{r}_\varepsilon}^{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} |u'_\varepsilon|^2 - F(t, u_\varepsilon) \right) dt \\
&= \omega_{N-1} (\bar{r}_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1)) \int_{\bar{r}_\varepsilon}^{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} |u'_\varepsilon|^2 - F(t, u_\varepsilon) \right) dt \\
&= \omega_{N-1} (\bar{r}_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1)) \int_0^{R_\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} |u'_\varepsilon(\varepsilon t + \bar{r}_\varepsilon)|^2 \right. \\
&\quad \left. - F(\varepsilon t + \bar{r}_\varepsilon, u_\varepsilon) \right) \varepsilon dt,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $o_\varepsilon(1) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Lembrando que $v_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(\varepsilon t + \bar{r}_\varepsilon)$ temos que (3.12) fica da seguinte forma

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)}) &\leq \omega_{N-1}(\bar{r}_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1))\varepsilon \left[\int_0^{R_\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{2} \left| \frac{v'_\varepsilon(t)^2}{\varepsilon} \right|^2 \right. \\
&\quad \left. - F(\varepsilon t + \bar{r}_\varepsilon, v_\varepsilon) \right] dt \\
&= \omega_{N-1}(\bar{r}_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1))\varepsilon \left[\int_0^{R_\varepsilon} \left(\frac{1}{2} |v'_\varepsilon|^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - F(\varepsilon t + \bar{r}_\varepsilon, v_\varepsilon) \right) dt \right]. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Como v_ε converge para v quando ε converge para 0 em $C_{loc}^1(\mathbb{R})$ e $v(t) = V(h^2(\bar{r})t)$, temos que (3.13) resulta em

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)}) &\leq \omega_{N-1}(\bar{r}_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1))\varepsilon \left[\int_0^{R_\varepsilon} \left(\frac{1}{2} |v'|^2 - F(\bar{r}, v) \right) dt \right. \\
&\quad \left. + o_\varepsilon(1) \right] \\
&= \omega_{N-1}(\bar{r}_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1))\varepsilon \left[\int_0^{R_\varepsilon} \left(\frac{1}{2} |V'(h^2(\bar{r})t)|^2 h^2(\bar{r}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - F(\bar{r}, V(h^2(\bar{r})t)) \right) dt + o_\varepsilon(1) \right] \\
&= \omega_{N-1}(\bar{r}_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1))\varepsilon \left[\int_0^{R_\varepsilon} \left(\frac{1}{2} |V'(t)|^2 h^2(\bar{r}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - F(\bar{r}, V(t)) \right) \frac{dt}{h(\bar{r})} + o_\varepsilon(1) \right]. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Por um procedimento similar ao feito em (3.11) obtemos que (3.14) sera o seguinte

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)}) &\leq \omega_{N-1}(\bar{r}_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1))\varepsilon \left[\int_0^{R_\varepsilon} \left(\frac{1}{2} |V'(t)|^2 h^2(\bar{r}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + h^2(\bar{r}) \frac{(V^2 - 1)^2}{4} \right) \frac{dt}{h(\bar{r})} + o_\varepsilon(1) \right] \\
&= \omega_{N-1}(\bar{r}_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1))\varepsilon h(\bar{r}) \left[\int_0^{R_\varepsilon} \left(\frac{1}{2} |V'(t)|^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(V^2 - 1)^2}{4} \right) dt + o_\varepsilon(1) \right] \\
&= \omega_{N-1}(\bar{r}_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1))\varepsilon \left\{ h(\bar{r}) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} |V'(t)|^2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(V^2 - 1)^2}{4} \right) dt \right] + O(\eta) + o_\varepsilon(1) \right\} \\
&= \omega_{N-1}(\bar{r}_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1))\varepsilon (\beta_{h(\bar{r})} + O(\eta) + o_\varepsilon(1)), \tag{3.15}
\end{aligned}$$

onde $|O(\eta)| \leq C|\eta|$ quando $\eta \rightarrow 0$, sendo C uma constante positiva e

$$\begin{aligned}\beta_{h(s)} &= h(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}|V'(t)|^2 + \frac{(V^2(t) - 1)^2}{4} \right) dt \\ &= h(s)\beta_1 \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

onde

$$\beta_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}|V'(t)|^2 + \frac{(V^2(t) - 1)^2}{4} \right) dt.$$

Justificando $O(\eta)$:

$$\begin{aligned}\int_0^{R_\varepsilon} \left[\frac{1}{2}|V'(t)|^2 + \frac{(V^2(t) - 1)^2}{4} \right] dt + o_\varepsilon(1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}|V'(t)|^2 + \frac{(V^2(t) - 1)^2}{4} \right] dt \\ &\quad - \int_{-\infty}^0 \left[\frac{1}{2}|V'(t)|^2 + \frac{(V^2(t) - 1)^2}{4} \right] dt \\ &\quad - \int_{R_\varepsilon}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}|V'(t)|^2 + \frac{(V^2(t) - 1)^2}{4} \right] dt \\ &\quad + o_\varepsilon(1) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}|V'(t)|^2 + \frac{(V^2(t) - 1)^2}{4} \right] dt \\ &\quad + O(\eta) + o_\varepsilon(1),\end{aligned}$$

onde as seguintes integrais convergem para 0 quando $\eta \rightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^0 \left[\frac{1}{2}|V'(t)|^2 + \frac{(V^2(t) - 1)^2}{4} \right] dt \quad e \quad \int_{R_\varepsilon}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}|V'(t)|^2 + \frac{(V^2(t) - 1)^2}{4} \right] dt.$$

3.2.2 Passo 2.2

Iremos mostrar que a família $\{u_\varepsilon\}$ desenvolve exatamente uma camada de transição próximo do intervalo $[r_1, r_2]$. Para mostrar isto basta provar a seguinte afirmação:

AFIRMAÇÃO: $\tilde{r}_\varepsilon = \bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon$.

Suponha que esta afirmação é falsa. Então podemos encontrar

$$t_\varepsilon > \bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon$$

tal que

$$u_\varepsilon(r) < -1 + \eta \text{ se } r \in (\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon, t_\varepsilon),$$

$$u_\varepsilon(t_\varepsilon) = -1 + \eta.$$

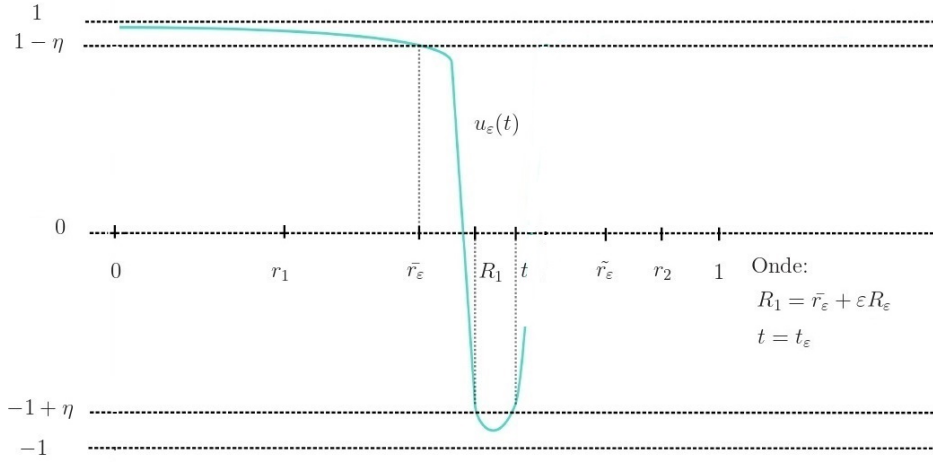


Figura 3.4: Esquematização do processo feito no Passo 2.2.

Assim, usando o mesmo método utilizado em (3.5), agora em t_ε , temos que existe

$$\tilde{t}_\varepsilon = t_\varepsilon + \varepsilon \tilde{R}_\varepsilon$$

tal que $u'_\varepsilon(r) > 0$ se $r \in (t_\varepsilon, \tilde{t}_\varepsilon)$ e $u_\varepsilon(\tilde{t}_\varepsilon) = 1 + \eta$. Aqui podemos assumir que $t_\varepsilon, \tilde{t}_\varepsilon \rightarrow \bar{t} \in [r_1, r_2]$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Além disso, de modo similar à (3.12)-(3.15) temos que

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_{\tilde{t}_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{t_\varepsilon}(0)}) \leq \omega_{N-1}(t_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1))(\beta_{h(\bar{t})} + O(\eta) + o_\varepsilon(1))\varepsilon. \quad (3.16)$$

Agora observe que, como já vimos, $\bar{r}_\varepsilon \rightarrow \bar{r} \in [r_1, r_2]$. Neste caso, pode ocorrer que $\bar{r} = r_1$ ou $\bar{r}_\varepsilon < r_1$ para todo $\varepsilon > 0$. Assim poderá acontecer que $\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon = r_1$ ou $\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon < r_1$. Daí para todo $t_\varepsilon > \bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon$ pode ocorrer que $t_\varepsilon < r_1$.

Então, provaremos que $\tilde{t}_\varepsilon \geq r_1$. Suponha por absurdo que $\tilde{t}_\varepsilon < r_1$. Defina

$$F_\alpha(t) = \int_{-1}^t [(v - \alpha)(1 - v^2)] dv.$$

Então para algum $t > 0$ pequeno e $s \in [-1 + t, 1 - t]$ temos que:

$$\begin{aligned} F_\alpha(1 - t) &= \int_{-1}^{1-t} [(v - \alpha)(1 - v^2)] dv \\ &= \int_{-1}^{1-t} (v - v^3 - \alpha + \alpha v^2) dv \\ &= \int_{-1}^{1-t} v - v^3 dv - \alpha \int_{-1}^{-1+t} (1 - v^2) dv \\ &= \int_{-1}^{1-t} [(v - 0)(1 - v^2)] dv - \alpha \int_{-1}^{1-t} (1 - v^2) dv \\ &= F_0(1 - t) - \alpha \int_{-1}^{1-t} (1 - v^2) dv, \end{aligned} \tag{3.17}$$

e além disso,

$$\begin{aligned} F_\alpha(s) &= \int_{-1}^s [(v - \alpha)(1 - v^2)] dv \\ &= F_0(s) - \alpha \int_{-1}^s (1 - v^2) dv. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Logo, de (3.17) e (3.18) obtemos

$$\begin{aligned} F_\alpha(1 - t) - F_\alpha(s) &= F_\alpha(1 - t) - F_\alpha(s) + F_0(1 - t) - F_0(1 - t) + F_0(s) - F_0(s) \\ &= \left[F_0(1 - t) - \alpha \int_{-1}^{1-t} (1 - v^2) dv \right] - \left[F_0(s) - \alpha \int_{-1}^s (1 - v^2) dv \right] \\ &+ F_0(1 - t) - F_0(1 - t) + F_0(s) - F_0(s) \\ &= F_0(1 - t) - F_0(s) - \alpha \int_{-1}^{1-t} (1 - v^2) dv - \alpha \int_s^{-1} (1 - v^2) dv \\ &= F_0(1 - t) - F_0(s) - \alpha \int_s^{1-t} (1 - v^2) dv, \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde

$$\begin{aligned}
 F_0(1-t) &= \int_{-1}^{1-t} (v - v^3) \, dv \\
 &= \left. \frac{2v^2 - v^4}{4} \right|_{-1}^{1-t} \\
 &= \frac{2(1-t)^2 - (1-t)^4 - 1}{4} \\
 &= \frac{-((1-t)^2 - 1)^2}{4},
 \end{aligned}$$

e

$$F_0(s) = \frac{-(s^2 - 1)^2}{4}.$$

Portanto

$$F_\alpha(1-t) - F_\alpha(s) = \left[\frac{(v^2 - 1)^2}{4} \right]_{1-t}^s - \alpha \int_s^{1-t} (1 - v^2) \, dv. \quad (3.20)$$

Então, de (3.20), se $\alpha < 0$ temos que

$$F_\alpha(1-t) - F_\alpha(s) > 0$$

para $s \in [-1+t, 1-t]$.

Agora defina

$$\bar{u}_\varepsilon(r) := \begin{cases} 1 - \eta & \text{se } r \in [\bar{r}_\varepsilon, \bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon] \cup [t_\varepsilon, \tilde{t}_\varepsilon]; \\ -u_\varepsilon(r) & \text{se } r \in [\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon, t_\varepsilon]. \end{cases}$$

Como supomos que $\tilde{t}_\varepsilon < r_1$ e obtemos em (3.20) que $F_a(s) < F_a(1-t)$ se $s \leq 1-t$ assim

$$F(r, u_\varepsilon) < F(r, \bar{u}_\varepsilon),$$

se $r \in [\bar{r}_\varepsilon, \tilde{t}_\varepsilon]$. De fato, se $r \in [\bar{r}_\varepsilon, \tilde{t}_\varepsilon]$ então

$$\begin{aligned}
F(r, u_\varepsilon) &= \int_{-1}^{u_\varepsilon} [h^2(r)(v - \alpha)(1 - v^2)] \, dv \\
&= h^2(r) \int_{-1}^{u_\varepsilon} [(v - \alpha)(1 - v^2)] \, dv \\
&= h^2(r) F_\alpha(u_\varepsilon) \\
&< h^2(r) F_\alpha(\bar{u}_\varepsilon) \\
&= h^2(r) \int_{-1}^{\bar{u}_\varepsilon} [(v - \alpha)(1 - v^2)] \, dv \\
&= \int_{-1}^{\bar{u}_\varepsilon} [h^2(r)(v - \alpha)(1 - v^2)] \, dv \\
&= F(r, \bar{u}_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Portanto

$$-F(r, u_\varepsilon) > -F(r, \bar{u}_\varepsilon),$$

e

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon, B_{\tilde{t}_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{t_\varepsilon}(0)}) &= \int_{B_{\tilde{t}_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{t_\varepsilon}(0)}} [|\nabla u_\varepsilon|^2 - F(r, \bar{u}_\varepsilon)] \, dr \\
&< \int_{B_{\tilde{t}_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{t_\varepsilon}(0)}} [|\nabla u_\varepsilon|^2 - F(r, u_\varepsilon)] \, dr \\
&= J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_{\tilde{t}_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{t_\varepsilon}(0)}),
\end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois u_ε é um minimizador.

Segue que, $\tilde{t}_\varepsilon \geq r_1$, como queríamos mostrar.

Agora voltando à demonstração da afirmação inicial, vejamos que, desde que $a(r) \geq 0$ para $r \in [r_1, 1]$, temos que se $r \in [r_1, 1]$ então

$$\begin{aligned}
F(r, t) &= \int_{-1}^t [h^2(r)(s - a(r))(1 - s^2)] \, ds \\
&\leq \int_{-1}^{-1} [h^2(r)(s - a(r))(1 - s^2)] \, ds \\
&= F(r, -1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Relembrando que

$$m_{\varepsilon, \bar{r}_\varepsilon, \tilde{r}_\varepsilon} = J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_{\tilde{r}_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)}).$$

Além disso, se $u_\varepsilon \in (-1, -1 + \eta)$ para $r \in [\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon, t_\varepsilon]$ então temos que

$$\begin{aligned}
m_{\varepsilon, \bar{r}_\varepsilon, \tilde{r}_\varepsilon} &= J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon, B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)}) + J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon, B_{\tilde{t}_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{t_\varepsilon}(0)}) \\
&+ J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon, B_{t_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0)}) + J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon, B_{\tilde{r}_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\tilde{t}_\varepsilon}(0)}) \\
&= \omega_{N-1}(\bar{r}_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1))(\beta_{h(\bar{r})} + O(\eta) + o_\varepsilon(1))\varepsilon \\
&+ \omega_{N-1}(t_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1))(\beta_{h(\bar{t})} + O(\eta) + o_\varepsilon(1))\varepsilon \\
&+ J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon, B_{t_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0)}) + J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon, B_{\tilde{r}_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\tilde{t}_\varepsilon}(0)}) \\
&= \omega_{N-1}(\bar{r}_\varepsilon^{N-1} \beta_{h(\bar{r})} \varepsilon + t_\varepsilon^{N-1} \beta_{h(\bar{t})} \varepsilon) + O(\eta \varepsilon) + o(\varepsilon) \\
&+ J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon, B_{t_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0)}) + J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon, B_{\tilde{r}_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\tilde{t}_\varepsilon}(0)}) \\
&\geq \omega_{N-1}(\bar{r}_\varepsilon^{N-1} \beta_{h(\bar{r})} \varepsilon + t_\varepsilon^{N-1} \beta_{h(\bar{t})} \varepsilon) + O(\eta \varepsilon) + o(\varepsilon) \\
&+ \inf \left\{ - \int_{B_{t_\varepsilon}(0) \setminus B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0)} F(r, w) \, dx; -1 \leq w \leq -1 + \eta \right\} \\
&+ \inf \left\{ - \int_{B_{\tilde{r}_\varepsilon}(0) \setminus B_{\tilde{t}_\varepsilon}(0)} F(r, w) \, ds; -1 \leq w \leq 1 \right\} \\
&\geq \omega_{N-1}(\bar{r}_\varepsilon^{N-1} \beta_{h(\bar{r})} \varepsilon + t_\varepsilon^{N-1} \beta_{h(\bar{t})} \varepsilon) + O(\eta \varepsilon) + o(\varepsilon),
\end{aligned} \tag{3.21}$$

onde $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|o(\varepsilon)|}{\varepsilon} = 0$.

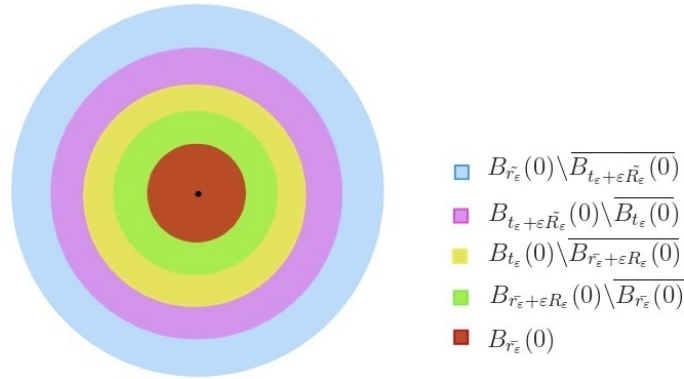


Figura 3.5: Esquematização de discos presentes no Passo 2.2.

Assim, obtemos um limitante inferior para $m_{\varepsilon, \bar{r}_\varepsilon, \tilde{r}_\varepsilon}$.

Seja $R > 0$ tal que $V(h(\bar{r})R) = -1 + \eta$, onde V é a única solução de (3.9).

Defina a função \hat{u}_ε como segue

$$\hat{u}_\varepsilon(r) := \begin{cases} V(h(\bar{r})\frac{r-\bar{r}_\varepsilon}{\varepsilon}), & \text{se } r \in [\bar{r}_\varepsilon, \bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R]; \\ -1 + \eta - \frac{\eta}{\varepsilon}(r - \bar{r}_\varepsilon - \varepsilon R), & \text{se } r \in [\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R, \bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R + \varepsilon]; \\ -1, & \text{se } [\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R, \tilde{r}_\varepsilon - \varepsilon]; \\ -1 + \frac{\eta}{\varepsilon}(r - \tilde{r}_\varepsilon + \varepsilon), & \text{se } r \in [\tilde{r}_\varepsilon - \varepsilon, \tilde{r}_\varepsilon]. \end{cases} \quad (3.22)$$

Observe que para $-1 \leq t \leq -1 + \eta$ e $r \in [\bar{r}_\varepsilon, \tilde{r}_\varepsilon]$, \hat{u}_ε é contínua.

De fato, basta notar que

$$V\left(h(\bar{r})\left(\frac{(\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R) - \bar{r}_\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right) = -1 + \eta$$

e

$$-1 + \eta + \frac{\eta}{\varepsilon}((\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R) - \bar{r}_\varepsilon - \varepsilon R) = -1 + \eta.$$

Para os demais casos basta fazer de modo análogo. Logo, \hat{u}_ε é contínua, como queríamos.

Além disso, como em (3.11), temos que para $r \in [\bar{r}_\varepsilon, \tilde{r}_\varepsilon]$ e $-1 \leq t \leq -1 + \eta$ vale que

$$|F(r, t)| = O(\eta).$$

Agora, tendo em mãos os procedimentos de (3.12)-(3.15) é possível majorar os seguintes funcionais:

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon, B_{\tilde{r}_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon - \varepsilon}(0)}) &= \omega_{N-1} \left[\int_{\tilde{r}_\varepsilon - \varepsilon}^{\tilde{r}_\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} \left| \frac{\eta}{\varepsilon} \right|^2 t^{N-1} - F(r, t) t^{N-1} \right) dt \right] \\ &= \omega_{N-1} \left[\int_{\tilde{r}_\varepsilon - \varepsilon}^{\tilde{r}_\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} \left| \frac{\eta}{\varepsilon} \right|^2 t^{N-1} - O(\eta) t^{N-1} \right) dt \right] \\ &= \omega_{N-1} \tilde{r}_\varepsilon^{N-1} \left[\int_{\tilde{r}_\varepsilon - \varepsilon}^{\tilde{r}_\varepsilon} \left(\frac{\eta^2}{2} + O(\eta) \right) dt \right] \\ &= \omega_{N-1} \tilde{r}_\varepsilon^{N-1} \left(\frac{\eta^2}{2} \varepsilon + O(\eta) \varepsilon \right) \\ &= \omega_{N-1} \tilde{r}_\varepsilon^{N-1} \frac{\eta^2}{2} \varepsilon + O(\eta \varepsilon) \\ &\leq O(\eta \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.23)$$

e

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon, B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R + \varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R}(0)}) &= \omega_{N-1} \left[\int_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R + \varepsilon}^{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} \left| \frac{-\eta}{\varepsilon} \right|^2 t^{N-1} - F(r, t) t^{N-1} \right) dt \right] \\
&= \omega_{N-1} \left[\int_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R + \varepsilon}^{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} \left| \frac{-\eta}{\varepsilon} \right|^2 t^{N-1} - O(\eta) t^{N-1} \right) dt \right] \\
&\leq \omega_{N-1} (\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R + \varepsilon) \int_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R + \varepsilon}^{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R} \frac{\eta^2}{2} dt \\
&\quad + \omega_{N-1} (\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R + \varepsilon)^{N-1} \int_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R + \varepsilon}^{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R} O(\eta) dt \\
&= \omega_{N-1} (\bar{r}_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1)) \frac{\eta^2}{2} \varepsilon \\
&\quad + \omega_{N-1} (\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R + \varepsilon)^{N-1} O(\eta) \varepsilon \\
&= \omega_{N-1} \bar{r}_\varepsilon^{N-1} \frac{\eta^2}{2} \varepsilon + \omega_{N-1} o_\varepsilon(1) \varepsilon \frac{\eta^2}{2} \\
&\quad + \omega_{N-1} (\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R + \varepsilon)^{N-1} O(\eta \varepsilon) \\
&\leq O(\eta \varepsilon) + o(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Então, usando os resultados (3.12)-(3.15), (3.23) e (3.24) é possível determinar um limitante superior para $m_{\varepsilon, \bar{r}_\varepsilon, \tilde{r}_\varepsilon}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
m_{\varepsilon, \bar{r}_\varepsilon, \tilde{r}_\varepsilon} &\leq J_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon, B_{\tilde{r}_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)}) \\
&= J_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon, B_{\bar{r}_\varepsilon + R\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)}) + J_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon, B_{\tilde{r}_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon - \varepsilon}(0)}) \\
&\quad + J_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon, B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R + \varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R}(0)}) \\
&\leq \omega_{N-1} (\bar{r}_\varepsilon^{N-1} + o_\varepsilon(1)) (\beta_{h(\bar{r})} + O(\eta) + o_\varepsilon(1)) \varepsilon + O(\eta \varepsilon) + o(\varepsilon) + O(\eta \varepsilon) \\
&\leq \omega_{N-1} \bar{r}_\varepsilon^{N-1} \beta_{h(\bar{r})} \varepsilon + O(\eta \varepsilon) + o(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Assim, por (3.21) e (3.25) temos que

$$\omega_{N-1} (\bar{r}_\varepsilon^{N-1} \beta_{h(\bar{r})} \varepsilon + t_\varepsilon^{N-1} \beta_{h(\hat{t})} \varepsilon) + O(\eta \varepsilon) + o(\varepsilon) \leq \omega_{N-1} \bar{r}_\varepsilon^{N-1} \beta_{h(\bar{r})} \varepsilon + O(\eta \varepsilon) + o(\varepsilon)$$

ou seja,

$$\omega_{N-1} t_\varepsilon^{N-1} \beta_{h(\hat{t})} \varepsilon \leq O(\eta \varepsilon) + o(\varepsilon). \tag{3.26}$$

Seja $A := O(\eta \varepsilon)$ e $B := o(\varepsilon)$, assim temos que

$$A \leq C \eta \varepsilon,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{B}{\varepsilon} = 0,$$

com C uma constante positiva.

Voltando à (3.26) obtemos:

$$\omega_{N-1} t_\varepsilon^{N-1} \beta_{h(\bar{r})} \varepsilon \leq C\eta\varepsilon + B,$$

ou ainda,

$$\omega_{N-1} t_\varepsilon^{N-1} \beta_{h(\bar{t})} \leq C\eta + \frac{B}{\varepsilon},$$

e por fim temos

$$\omega_{N-1} r_1 \beta_{h(\bar{t})} < \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{N-1} t_\varepsilon^{N-1} \beta_{h(\bar{t})} \leq C\eta,$$

o que resulta em um absurdo, pois $\omega_{N-1} r_1 \beta_{h(\bar{t})}$ é fixo e η é tão pequeno quanto queira.

Portanto podemos concluir que $\tilde{r}_\varepsilon = \bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon$.

3.3 Parte 3

Nos resta mostrar que se $r_{\varepsilon_j}^- \rightarrow \bar{r}$ para alguma sequência $\varepsilon_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, então \bar{r} satisfaz

$$\bar{r}^{N-1}h(\bar{r}) = \min_{s \in [r_1, r_2]} s^{N-1}h(s).$$

Relembre que na Parte 1 da demonstração mostramos que $-1 \leq u_\varepsilon \leq -1 + \eta$ para $r \in [\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon, 1]$.

Seja

$$H(s) = s^{N-1}h(s)$$

e assumamos que o resultado que queremos demonstrar seja falso. Assim existe uma subseqüência $\{\bar{r}_\varepsilon\}$ tal que $\bar{r}_\varepsilon \rightarrow r' \in [r_1, r_2]$ e

$$H(r') > \min_{s \in [r_1, r_2]} H(s).$$

Então é possível encontrar $\bar{t} \in [r_1, r_2]$ tal que $\bar{t} < r'$ e $H(\bar{t}) < H(r')$.

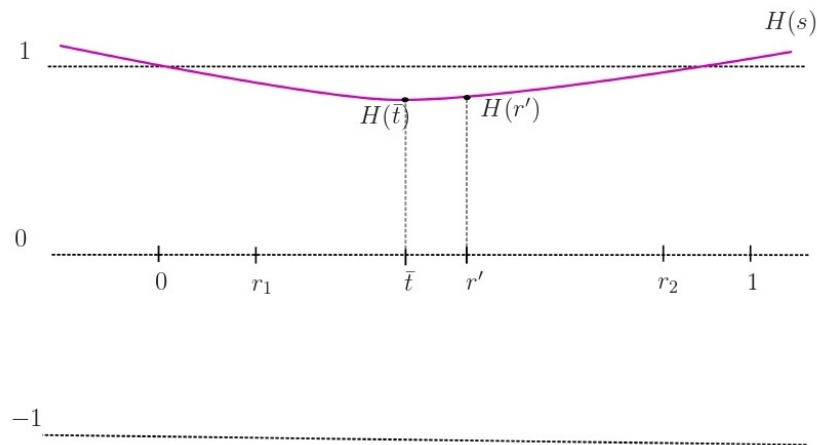


Figura 3.6: Esquematização do processo feito no Passo 3.

Inicialmente observe que

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u_\varepsilon) &= J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)) + J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)}) \\ &\quad + J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_1(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0)}). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Assim, iremos minorar cada parcela de (3.27).

Para estimar $J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_{\bar{r}_\varepsilon}(0))$ note que para $r \leq \bar{r}_\varepsilon$ e $\eta > 0$ suficientemente pequeno temos

$$1 - \eta \leq u_\varepsilon(r) \leq 1.$$

Assim para $u \in [1 - \eta, 1]$ temos que

$$-F(r, u) \geq -F(r, 1). \quad (3.28)$$

De fato, recordemos que

$$-F(r, u) = - \int_{-1}^u [h^2(r)(s - a(r))(1 - s^2)] \, ds$$

e

$$-F(r, 1) = - \int_{-1}^1 [h^2(r)(s - a(r))(1 - s^2)] \, ds,$$

sendo assim, seja

$$g(x) = -(x - a)(1 - x^2).$$

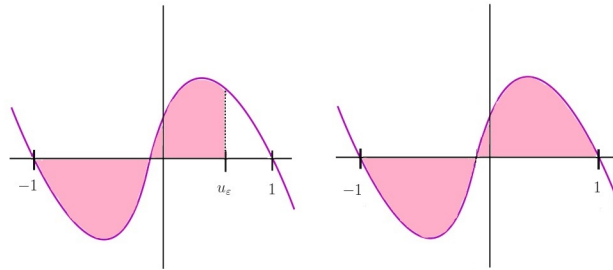


Figura 3.7: Gráfico de $g(x)$ para $-1 < a < 0$: onde $F(r, u_\varepsilon) = \int_{-1}^{u_\varepsilon} g(x) \, dx$ e $F(r, 1) = \int_{-1}^1 g(x) \, dx$, respectivamente.

Portanto $-F(r, u) \geq -F(r, 1)$, para $u \in [1 - \eta, 1]$, como queríamos.

Além disso, desde que a satisfaça:

$$\begin{cases} a(r) < 0, r < r_1; \\ a(r) = 0, r_1 \leq r \leq r_2; \\ a(r) > 0, r > r_2, \end{cases}$$

obtemos o seguinte

$$\begin{cases} -F(r, 1) < 0, r < r_1; \\ -F(r, 1) = 0, r_1 \leq r \leq r_2; \\ -F(r, 1) > 0, r > r_2. \end{cases}$$

De fato, se $a(r) = 0$, resulta que, para $r_1 \leq r \leq r_2$:

$$\begin{aligned} -F(r, 1) &= \int_{-1}^1 [h^2(r)(s - s^3)] \, ds \\ &= h^2(r) \int_{-1}^1 (s - s^3) \, ds \\ &= h^2(r) \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4} \right)_{-1}^1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

e para os demais casos, basta analisar o seguinte resultado

$$\begin{aligned} -F(r, 1) &= -h^2(r) \int_{-1}^1 [(s - a(r))(1 - s^2)] \, ds \\ &= -h^2(r) \int_{-1}^1 [s - s^3 - a(r) + s^2 a(r)] \, ds \\ &= -h^2(r) \left[\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4} - a(r)s + \frac{s^3}{3} a(r) \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{-h^2(r)}{12} [6s^2 - 3s^4 + (4s^3 - 12s)a(r)]_{-1}^1 \\ &= \frac{4}{3} h^2(r) a(r). \end{aligned}$$

Assim,

- se $a(r) < 0$, então $-F(r, 1) < 0$;
- se $a(r) > 0$, então $-F(r, 1) > 0$,

como queríamos demonstrar.

Consequentemente

$$- \int_{r_1}^{r_2} r^{N-1} F(r, 1) \, dr \geq 0.$$

Portanto, utilizando os resultados acima e os procedimentos de (3.10), somos capazes de minorar a primeira parcela de (3.27):

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)) &= \int_{B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)} \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 - F(x, u_\varepsilon) \right] dx \\
&= \omega_{N-1} \int_0^{\bar{r}_\varepsilon} \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 - F(r, u_\varepsilon) \right] r^{N-1} dr \\
&\geq - \int_0^{\bar{r}_\varepsilon} [r^{N-1} F(r, u_\varepsilon)] dr \\
&\geq - \int_0^{\bar{r}_\varepsilon} [r^{N-1} F(r, 1)] dr \\
&= - \int_0^{r_1} [r^{N-1} F(r, 1)] dr - \int_{r_1}^{\bar{r}_\varepsilon} [r^{N-1} F(r, 1)] dr \\
&\geq - \int_0^{r_1} [r^{N-1} F(r, 1)] dr := A.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Para minorar a segunda parcela de (3.27), basta utilizar o método usado em (3.10), isto é,

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon}(0)}) \geq \omega_{N-1} H(r') \beta_1 \varepsilon + (\eta \varepsilon) + o(\varepsilon). \tag{3.30}$$

Por fim, note que, como $-1 \leq u_\varepsilon(r) \leq -1 + \eta$ para $r \geq \bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon$ e $\eta > 0$ suficientemente pequeno, então pelos mesmos procedimentos realizados para provar (3.28) temos que

$$-F(r, u) \geq -F(r, -1) = 0,$$

para $u \in [-1, -1 + \eta]$.

Logo obtemos a seguinte minoração para a terceira parcela de (3.27):

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u_\varepsilon, B_1(0) \setminus \overline{B_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}(0)}) &= \omega_{N-1} \int_0^1 \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 - F(r, u_\varepsilon) \right] r^{N-1} dr \\
&\quad - \omega_{N-1} \int_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}^1 \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 - F(r, u_\varepsilon) \right] r^{N-1} dr \\
&= \omega_{N-1} \int_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}^1 [-r^{N-1} F(r, u_\varepsilon)] dr \\
&\geq \int_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}^1 [-r^{N-1} F(r, u_\varepsilon)] dr \\
&\geq \int_{\bar{r}_\varepsilon + \varepsilon R_\varepsilon}^1 [r^{N-1} F(r, -1)] dr \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Enfim, de (3.29), (3.30) e (3.31):

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u_\varepsilon) &\geq A + \omega_{N-1}r'^{N-1}\beta_{h(r')}\varepsilon + O(\eta\varepsilon) + o(\varepsilon) \\
&= A + \omega_{N-1}r'^{N-1}h(r')\beta_1\varepsilon + O(\eta\varepsilon) + o(\varepsilon) \\
&= A + \omega_{N-1}H(r')\beta_1\varepsilon + O(\eta\varepsilon) + o(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Por fim, vamos majorar $J_\varepsilon(u_\varepsilon)$. Para isso, defina a função

$$\bar{w}_\varepsilon(r) := \begin{cases} 1, r \in [0, \bar{t} - \varepsilon]; \\ 1 - \frac{\eta}{\varepsilon}(r - \bar{t} + \varepsilon), r \in [\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}]; \\ V\left(h(\bar{t})\frac{r - \bar{t}}{\varepsilon}\right), r \in [\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon R']; \\ -1 - \frac{\eta}{\varepsilon}(r - \bar{t} - \varepsilon R' - \varepsilon), r \in [\bar{t} + \varepsilon R', \bar{t} + \varepsilon R' + \varepsilon]; \\ -1, r \in [\bar{t} + \varepsilon R' + \varepsilon, 1], \end{cases}$$

onde $R' > 0$ é tal que $V(h(\bar{t})R') = -1 + \eta$.

A prova da continuidade da função \bar{w}_ε para $-1 \leq t \leq 1$ e $r \in [0, 1]$ é análoga à demonstração de continuidade da função \hat{u}_ε , a qual foi feita anteriormente neste trabalho na Parte 2.2.

Do mesmo modo que obtemos (3.32), somos capazes de majorar $J_\varepsilon(\bar{w}_\varepsilon)$.

Assim, obtemos

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(\bar{w}_\varepsilon) \leq A + \omega_{N-1}H(\bar{t})\beta_1\varepsilon + O(\eta\varepsilon) + o(\varepsilon). \tag{3.33}$$

Portanto, de (3.32) e (3.33) temos uma contradição.

Assim, se $r_{\varepsilon_j}^- \rightarrow \bar{r}$ para alguma sequência $\varepsilon_j \rightarrow 0$, quando $j \rightarrow \infty$ então \bar{r} satisfaz

$$r^{\bar{N}-1}h(\bar{r}) = \min_{s \in [r_1, r_2]} s^{N-1}h(s).$$

Logo, a Parte 3 da demonstração está provada.

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho desenvolvemos um estudo detalhado sobre o perfil assintótico de uma família de minimizadores globais da família de funcionais associada a equação (1), o que nos proporcionou a oportunidade de fazer uma análise matemática sobre a equação em questão e assim enriquecer nosso conhecimento quanto aos processos desenvolvidos durante a demonstração dos resultados aqui presentes.

Assim, o estudo deste problema de reação e difusão em $B_1(0)$ nos permitiu estudar, principalmente, os seguintes aspectos do problema: existência de solução via minimização do funcional de energia, técnicas envolvendo majoração e minoração do funcional, formação e localização de camada de transição interna, entre outros. Tais assuntos aparecem como importantes temas da Análise Matemática de Equações Diferenciais Parciais e, certamente, servirão de base para estudos futuros.

No que segue, apresentamos dois problemas que podem ser abordados com as técnicas estudadas nesta dissertação.

4.1 O Problema com Difusibilidade Variável

A primeira ideia consiste em considerar o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \operatorname{div}(k^2(|x|)\nabla u) = (u - a(|x|))(1 - u^2) \text{ em } B_1(0), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial B_1(0), \end{cases} \quad (4.1)$$

onde a é uma função com as mesmas hipóteses que anteriormente e k é uma função de classe C^1 estritamente positiva. A função $k(\cdot)$, chamada *difusibilidade*, indica a não-homogeneidade do operador de difusão do problema. Podemos interpretar tal função, por exemplo, como aquela que descreve a difusibilidade material onde o fenômeno de difusão ocorre. Como, evidentemente, é natural supor tal material não homogêneo é também natural considerar e estudar o caso com $k(\cdot)$ variável.

A função k possui um papel fundamental na procura por soluções do problema (4.1), principalmente aquelas vindas via minimização do funcional associado. Esperamos que, procedendo de maneira similar, consigamos uma família de soluções desenvolvendo camada de transição interna em $(0, 1)$ com as mesmas características daquelas obtidas no Teorema 2.0.1. Em particular, e este pode ser o mais difícil e interessante resultado, a localização da interface da camada de transição deve estar relacionado ao mínimo da função $k(r)r^{N-1}$.

4.2 O Problema sobre Superfícies de Revolução

O objetivo aqui é estudar a mesma equação (1) posta sobre uma superfície de revolução com ou sem fronteira.

Sejam C uma curva em \mathbb{R}^3 parametrizada por

$$\begin{cases} x_1 = \psi(s), \\ x_2 = 0, \\ x_3 = \chi(s), \end{cases} \quad (4.2)$$

com $s \in I := [0, 1]$, e as funções ψ e χ de classe $C^2(I)$. Ainda, $\psi > 0$ em $(0, 1)$ e

$$(\psi')^2 + (\chi')^2 = 1 \text{ em } I. \quad (4.3)$$

Por simplicidade, vamos supor ainda que

$$\chi' \geq 0 \text{ em } (0, 0 + \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1), \quad (4.4)$$

para algum $\epsilon > 0$.

Seja \mathcal{M} a superfície de revolução de \mathbb{R}^3 obtida através da revolução da curva C em torno do eixo x_3 . Assim, \mathcal{M} é parametrizada por

$$\begin{cases} x_1 = \psi(s) \cos(\theta), \\ x_2 = \psi(s) \sin(\theta), \\ x_3 = \chi(s), \end{cases} \quad (4.5)$$

com $(s, \theta) \in I \times [0, 2\pi)$.

Separamos nosso problema em dois casos:

- *Caso 1:* Considere $\psi(0) = \psi(1) = 0$, então \mathcal{M} não possui fronteira. Neste caso tomamos $\psi'(0) = -\psi'(1) = 1$, uma vez que sempre assumimos que \mathcal{M} e a métrica Riemannian g (a ser definida adiante) definida sobre \mathcal{M} são suaves (veja [2]).

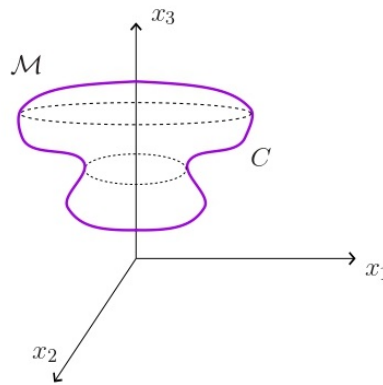


Figura 4.1: Domínio de revolução sem fronteira.

- *Caso 2:* Considere $\psi(0) > 0$ e $\psi(1) > 0$, então \mathcal{M} é uma superfície de revolução com fronteira $\partial\mathcal{M}$. Temos que $\partial\mathcal{M} = \gamma_2 \cup \gamma_1$, onde γ_2 e γ_1 são duas circunferências parametrizadas com coordenadas locais (s, θ) por

$$\gamma_2 : \begin{cases} s(t) = 0, \\ \theta(t) = t, \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_1 : \begin{cases} s(t) = 1, \\ \theta(t) = t, \end{cases}$$

com $t \in [0, 2\pi)$.

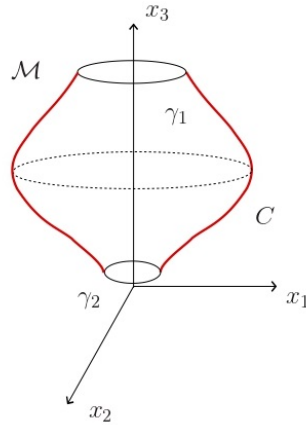


Figura 4.2: Domínio de revolução com fronteira.

A superfície de revolução \mathcal{M} , com parametrização (4.5), é uma variedade Riemanniana 2-dimensional com a métrica em coordenadas locais dada por (usando notação de Einstein)

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad (g^{ij}) = (g_{ij}^{-1}), \quad |g| = \det(g_{ij}).$$

O elemento de área sobre \mathcal{M} é

$$d\sigma = \sqrt{|g|} dx^1 dx^2$$

e $d\gamma$ denota o elemento de comprimento de arco sobre \mathcal{M} .

Dado um campo vetorial suave X sobre \mathcal{M} , o operador divergente de X é definido como

$$\operatorname{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} X^i), \quad (4.6)$$

e o gradiente Riemanniano, denotado por $\nabla_g \phi$, de uma função real ϕ suficientemente suave definida em \mathcal{M} , é dado por

$$(\nabla_g \phi)^i = g^{ij} \partial_j \phi. \quad (4.7)$$

Agora veremos como o operador Laplaciano $\Delta_g u := \operatorname{div}_g(\nabla_g u)$ pode ser expresso na superfície de revolução \mathcal{M} com coordenadas $x^1 = s$, $x^2 = \theta$. Aqui assumimos que $f(\cdot, u)$

é independente da variação angular θ . Assim, reescrevendo nosso problema sobre \mathcal{M} , obtemos

$$-\varepsilon^2 \Delta_g u = f(x, u), \quad x \in \mathcal{M} \quad (4.8)$$

onde $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície de revolução sem fronteira, ou seja, estamos no *Caso 1*. Quando estivermos no *Caso 2*, ou seja, o domínio é uma superfície de revolução com fronteira, então trocaremos a notação \mathcal{M} por \mathcal{D} . Além disso, consideramos a condição de Neumann homogênea na fronteira:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_g u = f(x, u), & x \in \mathcal{D} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial \mathcal{D} \end{cases} \quad (4.9)$$

sendo ν o vetor normal unitário e exterior à $\partial \mathcal{D}$.

Fixando $x^1 = s$ e $x^2 = \theta$, temos que

$$(g_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \psi^2 \end{bmatrix},$$

portanto $|g| = \psi^2$, e uma conta simples (veja (4.6) e (4.7)) mostra que

$$\nabla_g u = \left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{1}{\psi^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (4.10)$$

e

$$\Delta_g u = u_{ss} + \frac{(\psi)_s}{\psi} u_s + \frac{1}{\psi^2} u_{\theta\theta}. \quad (4.11)$$

Assim, as soluções do problema (4.8) definido sobre \mathcal{M} necessariamente satisfazem

$$u_{ss} + \frac{(\psi)_s}{\psi} u_s + \frac{1}{\psi^2} u_{\theta\theta} + f(s, u) = 0, \quad (s, \theta) \in (0, 1) \times (0, 2\pi). \quad (4.12)$$

Em relação às soluções de problema (4.9) definido sobre \mathcal{D} , temos que $\partial \mathcal{D} = \gamma_2 \cup \gamma_1$ (veja *Caso 2*). Assim, usando (4.4) temos que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{\partial u}{\partial s}(0) \text{ em } \gamma_2, \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial s}(1) \text{ em } \gamma_1. \quad (4.13)$$

Portanto, de (4.11) e (4.13) as soluções do problema (4.9) satisfazem

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \left[u_{ss} + \frac{(\psi)_s}{\psi} u_s + \frac{1}{\psi^2} u_{\theta\theta} \right] = f(s, u), & (s, \theta) \in (0, 1) \times (0, 2\pi) \\ u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

É bem conhecido que se u_ε é um minimizante (até mesmo local) do funcional associado a (4.8) ou (4.9) então u_ε é independente da variação angular θ (veja [9], por exemplo). Assim, como estamos interessados em estudar o comportamento assintótico de soluções que são minimizantes globais, podemos nos restringir a estudar a equação

$$u_{ss} + \frac{(\psi)_s}{\psi} u_s + f(s, u) = 0 \text{ em } (0, 1), \quad u'(0) = u'(1) = 0$$

ou

$$(\psi u_s)_s + \psi(s) f(s, u) = 0 \text{ em } (0, 1), \quad u'(0) = u'(1) = 0.$$

Assumindo as mesmas hipóteses para f , a semelhança deste problema com aquele estudado nesta dissertação nos permite inferir que a mesma técnica pode ser aplicada a fim de se obter a existência de uma família de soluções (mínimos globais dos respectivos funcionais) desenvolvendo camada de transição interna com características similares àquelas obtidas no Teorema 2.0.1.

Em particular, quando $h \equiv 1$, espera-se uma interessante interpretação geométrica: neste caso, a localização da interface formada pelas soluções deverá depender do valor mínimo de ψ em $[x_1, x_2]$ o qual está relacionado à geometria da superfície onde o problema foi posto; a grosso modo, supondo que ψ tenha um mínimo local isolado $\bar{x} \in (x_1, x_2)$, teremos que a formação da camada de transição é induzida por um “pescoço local” da superfície.

Importante ressaltar que nos últimos anos muitos pesquisadores têm se dedicado a estudar problemas postos sobre superfícies de revolução, por exemplo veja [9, 11] e suas referências. Em geral, descrever o comportamento assintótico de uma família de soluções não é uma tarefa fácil neste contexto, por isso, mostrar o papel que a geometria do domínio pode ter nessa tarefa é um resultado bastante interessante e, se de fato atingido, tem grandes chances de ser aceito para publicação numa boa revista especializada.

Referências Bibliográficas

- [1] ANGENENT, S. B.; MALLET-PARET, J., PATELIER, L.A., *Stable Transition Layers in a Semilinear Boundary Value Problem*, J. Differential Equations, 67 (1987), 212-242.
- [2] BESSE, A.L., *Manifolds All of Whose Geodesics are Closed*, Vol. 93, Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] CLÉMENT, P., SWEERS, G., *Existence and Multiplicity Results for a Semilinear Elliptic Eigenvalue Problem*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classi de Scienze, 14(1987), 97-121.
- [4] DANCER, E.N.; YAN, S., *Construction of Various Types of Solutions for an Elliptic Problem*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations 20(2004), 93-118.
- [5] EVANS, C.L., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Vol. 19.
- [6] INGRAM, K.S., *Continuous Dependence on Parameters and Boundary data for non-linear two-point boundary value problem*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 41, No. 2, 1972.
- [7] MATSUZAWA, H., *On a Solution With Transition Layers for a Bistable Reaction-Diffusion Equation With Spatially Heterogeneous Environments*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Supplement 2009, 516-525.
- [8] MATSUZAWA, H., *Stable Transition Layers in a Balanced Bistable Equation With Degeneracy*, Nonlinear Analysis 58 (2004), 45-67.

- [9] NASCIMENTO, A. S.; SÔNEGO, M., *The Roles of Diffusivity and Curvature in Patterns on Surfaces of Revolution*, J. Math. Anal. Appl. 412 (2014), 1084-1096.
- [10] SMOLLER, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, Second Edition, 1994.
- [11] SONEGO, M., *Patterns in a Balanced Bistable Equation With Heterogeneous Environments on Surfaces of Revolution*, Differential Equations & Applications Vol. 8, N.4(2016), 521-533.
- [12] SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.