Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Dinâmica assintoticamente autônoma para equações parabólicas

Daiane Lourenço Nogueira

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

Itajubá, 3 de julho de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dinâmica assintoticamente autônoma para equações parabólicas

Daiane Lourenço Nogueira

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise Matemática

ITAJUBÁ – MG
3 DE JULHO DE 2019

Dedico este trabalho ao meu
irmão, Nairo (in memoriam)

Agradecimentos

A Deus por me proporcionar a vida para que pudesse lutar em prol deste sonho, sabendo que com ele, muitos outros poderão ser alcançados. Mais uma vez posso afirmar: "Até aqui me ajudou o Senhor".

Aos meus pais, Jairo e Maita, e minhas irmãs, Daisa e Danielle, pelo incentivo moral, pelo amor, orações e por acreditarem em mim. Vocês são minha fonte de inspiração. Agradeço a minha família que sempre esteve torcendo por mim.

Ao Prof. Dr. Jacson Simsen pela paciência, competência e dedicação na orientação de meus estudos. Vejo em você um exemplo de profissionalismo a ser seguido.

Aos professores Dr. Maicon Sônego e Dr. Rodrigo A. Samprogna, membros da banca examinadora, pela disposição em analisar e apontar as melhoras necessárias.

Aos professores Dra. Mariza S. Simsen, Dr. Fabio S. Dias, Dr. Leandro G. Gomes, Dr. Maicon Sônego e Dr. Juan Valentín M. Mogollón pelos ensinamentos que contribuíram para minha formação acadêmica.

Em especial, aos meus amigos Paulo e Tiago por transmitirem forças nos momentos de dificuldades. Obrigada pela paciência, carinho, conselhos e momentos de descontração. Vocês são muito especiais para mim.

Aos amigos de mestrado, Luis Filipe, Deysquele, Luana, Yessica, Edgar Ramires, Edgar Calizaya, Cristian, Edilson, Gina, Ronísio e Elaine pela amizade e pelas maratonas para jogar "presidente".

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação.

"O sucesso é a soma de pequenos esforços repetidos dia após dia."

Robert Collier

Resumo

Dado um sistema assintoticamente autônomo, apresentamos um teorema que mostra a convergência do atrator pullback para o atrator global se, e somente se, o atrator pullback for compacto para frente. Outros resultados com condições diversas, ora suficientes, ora necessárias, também destacam essa convergência. Além disso, definimos o conjunto limite e o conjunto limite inferior do atrator pullback e apontamos resultados que mostram a relação entre estes e o atrator global. Por fim, aplicamos os resultados obtidos numa equação parabólica quase-linear com expoente variável na qual o operador principal depende do tempo.

Palavras–chave: problemas assintoticamente autônomos, atrator pullback, atrator global, processo de evolução, semigrupo, equação parabólica, expoente variável.

Abstract

Given an asymptotically autonomous system, we present a theorem that shows the convergence of the pullback attractor to the global attractor if and only if the pullback attractor is forward compact. Other results with different sufficient conditions also highlight this convergence. Results with necessary conditions are also presented. Moreover, we define the limit-set and the lower limit-set of pullback attractor and we present results that show the relationship between these and the global attractor. Finally, we apply the results obtained to a quasi-linear parabolic equation with variable exponent in which the principal operator depends on time.

Keywords: asymptotically autonomous problems, pullback attractor, global attractor, evolution process, semigroup, parabolic equation, variable exponents.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho estudamos sistemas dinâmicos assintoticamente autônomos aplicados às Equações Diferenciais Parciais. Assim, a proposta do mesmo é reunir num texto resultados abstratos que mostram, em geral, a convergência de atratores não-autônomos para autônomos e aplicá-los em uma equação parabólica quase-linear com expoente variável na qual o operador principal depende do tempo. Baseamo-nos principalmente no artigo [9] e as referências [[11], [12], [10]] complementações.

Adotamos a convenção [ ] para indicar onde as definições e os resultados podem ser encontrados, caso o leitor queira saber mais detalhes.

Esta dissertação foi organizada da seguinte forma: no Capítulo 2, enunciamos algumas definições e resultados de Análise Funcional, Álgebra Linear e Topologia Geral necessários para a compreensão dos resultados dados nos Capítulos 3 e 4. O Capítulo 3 contém definições e resultados teóricos sobre dinâmicas assintoticamente autônomas. Neste, apontamos um teorema que garante a convergência das seções $\mathcal{A}(t)$ do atrator pullback $\mathcal{A} := \{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ para o atrator global $\mathcal{A}_\infty$ quando $t \longrightarrow +\infty$, com condição necessária e suficiente, e que reduz as condições de uniformidade dadas por Kloeden e Simsen [[10], Teorema 3.2]. Além disso, destacamos outros teoremas com condições suficientes, outros somente com condições necessárias, que mostram essa convergência.

Posteriormente apresentamos a construção do conjunto limite $\mathcal{A}(\infty) := \bigcap_{t\in\mathbb{R}} \overline{\bigcup_{r\geq t} \mathcal{A}(r)}$ do atrator pullback e discutimos a relação de inclusão entre este e o atrator global $\mathcal{A}_\infty$.

Destacamos um caso especial onde vale a semi-continuidade inferior.

Para finalizar o capítulo, apresentamos a definição do conjunto limite inferior $\mathcal{A}_L(\infty) := \bigcap_{r_n \uparrow \infty} \{x \in X : \exists\, x_n \in \mathcal{A}(r_n) \text{ tal que } x_n \longrightarrow x\}$ do atrator pullback e uma proposição onde a semi-continuidade inferior é válida se, e somente se, $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_L(\infty)$. O Capítulo 4 destina-se a aplicação dos resultados obtidos no decorrer do trabalho à uma equação parabólica com expoente variável, da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t) - div\big(D(t,x)|\nabla u(t)|^{p(x)-2}\nabla u(t)\big) + |u(t)|^{p(x)-2}u(t) = B\big(u(t)\big),$$

em um domínio limitado Ω, na qual o operador principal depende do tempo.

Capítulo 2

Pré-Requisitos

2.1 Uma coletânea de resultados

Nesta seção serão apresentadas algumas definições e resultados de Análise Funcional, Álgebra Linear e Topologia Geral que utilizaremos no decorrer do trabalho.

Definição 1. *[1] Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ seja $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e indiquemos por $d(x, y)$ a imagem de um par genérico $(x, y) \in X \times X$, através da função d. Dizemos que d é* ***métrica*** *sobre X se as seguintes condições se verificam para quaisquer $x, y, z \in X$:*

i) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. *(Desigualdade triangular)*

Nessas condições cada imagem $d(x, y)$ recebe o nome de ***distância de x a y*** *e um par (X, d), onde d é uma métrica sobre X, é o que chamamos de* ***espaço métrico****.*

Definição 2. *[1] Seja (X, d) um espaço métrico. Dados $p \in X$ e $A \subset X (A \neq \emptyset)$, chama-se* ***distância*** *de p ao conjunto A, e indica-se por $d(p, A)$, o seguinte número real não negativo:*

$$d(p, A) = \inf\{d(p, x) : x \in A\}.$$

Proposição 3. *[1] Seja (X, d) um espaço métrico. Se $A \subset X (A \neq \emptyset)$ e $p, q \in X$, então:*

$$|d(p, A) - d(q, A)| \leq d(p, q).$$

Demonstração. Tome $x \in A$, então $d(p, A) \leq d(p, x)$. Pela desigualdade triangular, $d(p, x) \leq d(p, q) + d(q, x)$. Daí $d(p, A) - d(p, q) \leq d(q, x)$. Como esta desigualdade vale para todo $x \in A$, então a constante $d(p, A) - d(p, q)$ é um limite inferior do conjunto dos elementos do tipo $d(q, x)$, com $x \in A$. Assim, $d(p, A) - d(p, q) \leq d(q, A)$, ou melhor,

$$d(p, q) \geq d(p, A) - d(q, A). \tag{2.1}$$

Por outro lado, tome $x \in A$, então $d(q, A) \leq d(q, x)$. Pela desigualdade triangular, $d(q, x) \leq d(q, p) + d(p, x)$. Daí $d(q, A) - d(q, p) \leq d(p, x)$. Como esta desigualdade vale para todo $x \in A$, então a constante $d(q, A) - d(q, p)$ é um limite inferior do conjunto dos elementos do tipo $d(p, x)$, com $x \in A$. Assim, $d(q, A) - d(q, p) \leq d(p, A)$, ou melhor,

$$-d(p, q) \leq d(p, A) - d(q, A). \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2) concluímos que

$$|d(p, A) - d(q, A)| \leq d(p, q),$$

como queríamos.

■

Definição 4. *[1] Seja p um ponto de um espaço métrico (X, d). Sendo $\epsilon > 0$ um número real, a* ***bola de centro p e raio*** *ϵ, indicada por $B(p, \epsilon)$, é o seguinte subconjunto de X:*

$$B(p, \epsilon) = \{x \in X : d(x, p) < \epsilon\}.$$

Definição 5. *[1] Seja A um subconjunto de um espaço métrico (X, d). Um ponto $p \in X$ se diz* ***ponto aderente*** *ao conjunto A se, para todo $\epsilon > 0$, vale a relação*

$$B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes ao subconjunto A chama-se ***fecho*** *de A e é indicado por $\overline{A}$. É imediato que $A \subset \overline{A}$.*

Proposição 6. *[2] Seja A um subconjunto de um espaço métrico (X, d). Então, $x \in \overline{A}$ se, e somente se, $d(x, A) = 0$.*

Demonstração. Ver página 79.

■

Como corolário da Proposição 6 temos o seguinte resultado:

Proposição 7. *[2] Para que um subconjunto A de um espaço métrico (X, d) seja fechado, é necessário e suficiente que $d(x, A) = 0$ implique $x \in A$.*

Demonstração. Ver página 79.

■

Definição 8. *[1] Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f : M \longrightarrow N$ se diz* ***contínua*** *no ponto $p \in M$ se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que*

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d\big(f(x), f(p)\big) < \epsilon.$$

Este δ depende, em geral, não só de ϵ como também do ponto p. Existem casos em que δ depende apenas de ϵ, ou seja, pode-se usar o mesmo δ em todos os pontos de M, veja a próxima definição.

Dizer que f é ***contínua*** *significa que f é contínua em todos os pontos de M.*

Definição 9. *[1] Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f : M \longrightarrow N$ se diz* ***uniformemente contínua*** *se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que*

$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow d\big(f(x), f(y)\big) < \epsilon.$$

Definição 10. *[1] Um* ***espaço vetorial sobre*** $\mathbb{R}$ *é um conjunto E sobre o qual estão definidas duas leis de composição, uma interna*

$$(u, v) \longmapsto u + v \ \textit{(adição)}$$

e uma externa, de $\mathbb{R} \times E$ em E,

$$(\alpha, u) \longmapsto \alpha u \ \textit{(multiplicação por escalares)}$$

para as quais se verificam as seguintes condições:

i) $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall\ u, v, w \in E$;

ii) $u + v = v + u, \forall\ u, v \in E$;

iii) Existe $0 \in E$ *de modo que* $0 + u = u, \forall\ u \in E$;

iv) Para todo $u \in E$, *existe* $(-u) \in E$ *de maneira que* $u + (-u) = 0$ *ou seja,* E *é um grupo abeliano em relação à adição e, ainda*

v) $(\alpha\beta)\ u = \alpha\ (\beta u), \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $\forall\ u \in E$;

vi) $(\alpha + \beta)\ u = \alpha u + \beta u, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $\forall\ u \in E$;

vii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall\ u, v \in E$;

viii) $1u = u, \forall\ u \in E$.

Os elementos de um espaço vetorial são genericamente chamados de ***vetores****.*

Definição 11. *[1] Uma* ***norma*** *sobre um espaço vetorial* E *sobre* $\mathbb{R}$ *é uma função que associa a cada* $u \in E$ *um número real não negativo, indicado por* $\|u\|$, *e chamado* ***norma de u****, de maneira que:*

i) $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$;

ii) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall\ u \in E$;

iii) $\|u + v\| \ \leq\ \|u\| \ +\ \|v\|, \forall\ u, v \in E$.

Definição 12. *[1] Um* ***espaço vetorial normado real*** *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *dotado de uma norma. Se* E *é um espaço vetorial normado, então* $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por* $d(u, v) = \|u - v\|$ *é uma métrica sobre* E *pois:*

i) $d(u, v) = \|u - v\| \ = 0 \Longleftrightarrow u - v = 0 \Longleftrightarrow u = v$;

ii) $d(u, v) = \|u - v\| \ = \|(-1)(v - u)\| \ = |-1| \|v - u\| \ = \|v - u\| \ = d(v, u)$;

iii) $d(u, v) = \|u - v\| \ = \|u - w + w - v\| \ \leq\ \|u - w\| \ +\ \|w - v\| \ = d(u, w) + d(w, v)$.

A métrica d *assim obtida chama-se* ***métrica induzida pela norma*** *dada sobre* E.

Definição 13. *[2] Uma sequência* $\{x_n\}$ *em um espaço métrico* (X, d) *é dita de* ***Cauchy*** *se, para todo* $\epsilon > 0$, *existir um* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $d(x_n, x_m) < \epsilon$, *se* $n, m > n_0$.

Toda sequência convergente é de Cauchy. Porém, nem toda sequência de Cauchy é convergente.

Definição 14. *[2] Um espaço métrico* (X, d) *é dito* ***completo*** *se toda sequência de Cauchy converge em* X.

Definição 15. *[4] Um espaço normado X é chamado de **Espaço de Banach** se é um espaço métrico completo em relação à métrica induzida por sua norma.*

Definição 16. *[1] Se E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, um **produto interno** em E é uma aplicação que associa a cada $(u, v) \in E \times E$ um número real, indicado por $\langle u, v \rangle$ e chamado "u escalar v", de modo que:*

i) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \ \langle u, v \rangle, \forall \ \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall \ u, v \in E$;

ii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall \ u, v \in E$;

iii) $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle, \forall \ u_1, u_2, v \in E$;

iv) $\langle u, u \rangle > 0$ *sempre que* $u \neq 0$.

*Um espaço vetorial E com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é chamado de **espaço produto interno**. Assim, temos que um **Espaço de Hilbert** é um espaço produto interno que é completo com a norma induzida pelo produto interno, a saber $\|u\|= \sqrt{\langle u, u \rangle}$.*

Os Espaços de Hilbert formam a classe mais importante de Espaços de Banach. Neles, valem as desigualdades:

Proposição 17. *[4] Se E é um espaço produto interno, então para todos $u, v \in E$:*

i) (desigualdade de Cauchy-Schwarz) $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|$; a igualdade ocorre se, e somente se, $\{u, v\}$ é linearmente dependente.

ii) (desigualdade triangular) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$; a igualdade ocorre se, e somente se, $u = 0$ ou $v = tu$ para algum $t \geq 0$.

Demonstração. Ver página 120.

■

Definição 18. *[6] Uma sequência $\{x_n\}$ de números reais chama-se **crescente** quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se vale $x_n \leq x_{n+1}$ para todo n, a sequência diz-se **não-decrescente**.*

*Analogamente, quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência $\{x_n\}$ diz-se **decrescente**. Ela é chamada **não-crescente** quando $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 19. *[1] Seja (X, d) um espaço métrico. Diz-se que um subconjunto $A \subset X$ é **compacto** se, para toda sequência $\{x_n\}$ de pontos de A, existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$*

que converge para um ponto $p \in A$*. Um espaço métrico* (X, d) *se diz* ***compacto*** *se o conjunto* X *é compacto.*

Sejam $K_1, K_2, \cdots, K_n$ *subconjuntos compactos de um espaço métrico* X*. Sua reunião* $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ *é compacta.*

Proposição 20. *[1] Toda sequência convergente de um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Ver página 146.

■

Proposição 21. *[1] Seja* $\{x_n\}$ *uma sequência de Cauchy num espaço métrico* X*. Se existe uma subsequência de* $\{x_n\}$ *que converge para* $p \in X$*, então* $\lim x_n = p$*.*

Demonstração. Ver página 147.

■

Proposição 22. *[2] O produto cartesiano* $X \times Y$ *é compacto se, e somente se,* X *e* Y *são espaços compactos.*

Demonstração. Ver página 182.

■

Proposição 23. *[2] A imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é um conjunto compacto.*

Demonstração. Ver página 179.

■

Proposição 24. *[1] Seja* A *um subconjunto compacto de um espaço métrico* (X, d)*. Se* $K \subset X$*, então existe* $p \in A$ *tal que* $d(p, K) = d(A, K)$*.*

Demonstração. Ver página 125.

■

Definição 25. *[3] Um conjunto A em um espaço métrico (X, d) é chamado **relativamente compacto** se o fecho $\overline{A}$ é compacto.*

Teorema 26. *[3] Um conjunto A em um espaço métrico (X, d) é relativamente compacto se, e somente se, toda sequência $\{x_n\}$ cujos elementos pertencem a A, tem uma subsequência convergente.*

Demonstração. Ver página 122.

■

Definição 27. *[3] Um conjunto A em um espaço métrico (X, d) é chamado **pré-compacto** se para cada $\epsilon > 0$, existe um conjunto finito de pontos $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ em X, tal que A está contido na união das bolas abertas $B(x_i, \epsilon)$, $i = 1, \cdots, n$, isto é,*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon).$$

Teorema 28. *[3] Todo conjunto relativamente compacto em um espaço métrico (X, d) é pré-compacto.*

Demonstração. Ver página 122.

■

Teorema 29. *[3] Seja (X, d) um espaço métrico completo. Todo subconjunto pré-compacto de X é relativamente compacto.*

Demonstração. Ver página 126.

■

Teorema 30. *[6] **(Compactos Encaixados)** Seja $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$ uma sequência descendente de compactos não-vazios. Então $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ é não-vazio (e compacto).*

Demonstração. Ver página 184.

■

Lema 31. *[7] **(Gronwall-Bellman)** Seja $m \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ tal que $m \geq 0$ qtp em $(0,T)$ e seja a uma constante não-negativa. Seja ϕ uma função contínua de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$ verificando*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\phi(s)ds,$$

para todo $t \in [0,T]$. Então,

$$\phi(t) \leq ae^{\int_0^t m(s)ds}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Definição 32. *[5] Seja X um espaço de medida com μ uma medida positiva. Se $0 < p < \infty$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável, definimos*

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

sendo $\|f\|_p$ a norma L^p de f e

$$L^p(\mu) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ é mensurável} : \|f\|_p < \infty\}.$$

Se $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é mensurável, definimos $\|f\|_\infty$ como o supremo essencial de $|f|$, ou seja,

$$\|f\|_\infty := sup\ ess|f|$$

e

$$L^\infty(X,\mu) = L^\infty(\mu) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ é mensurável} : \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Capítulo 3

Resultados teóricos sobre dinâmicas assintoticamente autônomas

Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Durante o restante deste capítulo, usaremos as seguintes notações:

$K(X) := \{K \subset X : K \neq \emptyset$ é um conjunto compacto em X$\}$.

$\mathfrak{B}(X) := \{B \subset X : B \neq \emptyset$ é um conjunto limitado em X$\}$.

$\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$.

$\uparrow$:= monótona crescente.

$\downarrow$:= monótona decrescente.

Definição 33. *[9] Uma família de aplicações $S := \{S(t,s) : X \longrightarrow X,\ t \geq s \in \mathbb{R}\}$ é chamada de* ***processo de evolução*** *em X se satisfaz*

(i) *$S(s,s) = I_X$ (identidade em X);*

(ii) *$S(t,s) = S(t,r)S(r,s)$, para todo $t \geq r \geq s$.*

Assumimos que o processo de evolução S é contínuo nas variáveis de tempo e espaço, isto é, a aplicação

$$\sigma : [s, +\infty) \times X \longrightarrow X$$
$$(t,x) \longmapsto S(t,s)x$$

é contínua para todo $s \in \mathbb{R}$.

Um processo de evolução é chamado de ***autônomo*** *se* $S(t,s) = S(t-s,0)$ *para todo* $t \geq s$.

Definição 34. *[8] Uma família de operadores* $T := \{T(t) : t \geq 0\}, T(t) : X \longrightarrow X$ *contínuo, é chamada de* ***semigrupo*** *se satisfaz*

(i) $T(0) = I_X$;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *para todo* $t, s \geq 0$.

Um semigrupo T *é chamado contínuo se a aplicação*

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R}_+ \times X &\longrightarrow X \\ (t,x) &\longmapsto T(t)x \end{aligned}$$

é contínua.

Seja $\{S(t-s,0), t \geq s\}$ um processo de evolução autônomo, a família de operadores $\{T(t) : t \geq 0\}$ dada por $T(t) = S(t,0) (t \geq 0)$ define um semigrupo.

De fato, $T(0) = S(0,0) = I$ e para todo $t + s \geq \tau \geq 0$,

$$T(t+s) = S(t+s,0) = S(t+s,\tau)S(\tau,0) = S(t+s-\tau,0)S(\tau,0).$$

Em particular, para $\tau = s$ temos

$$T(t+s) = S(t,0)S(s,0) = T(t)T(s).$$

Portanto T é um semigrupo.

Como a aplicação

$$\begin{aligned} \{t-s \in \mathbb{R}_+ : t \geq s\} \times X &\longrightarrow X \\ (t-s,x) &\longmapsto S(t-s,0)x \end{aligned}$$

é contínua, então

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ \times X &\longrightarrow X \\ (t,x) &\longmapsto T(t)x \end{aligned}$$

é uma aplicação contínua. Logo, $T(t) := S(t,0) (t \geq 0)$ é um semigrupo contínuo.

Reciprocamente, seja um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ contínuo, a família $\{S(t,s) : t \geq s\}$ dada por $S(t,s) = T(t-s) (t \geq s)$ é um processo de evolução autônomo.

De fato, $S(t,t) = T(t-t) = T(0) = I$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $t \geq \tau \geq s$,

$$S(t,\tau)S(\tau,s) = T(t-\tau)T(\tau-s) = T(t-\tau+\tau-s) = T(t-s) = S(t,s).$$

Sendo a aplicação

$$\mathbb{R}_+ \times X \longrightarrow X$$
$$(t,x) \longmapsto T(t)x$$

contínua, então

$$\{t-s \in \mathbb{R}_+ : t \geq s\} \times X \longrightarrow X$$
$$(t-s,x) \longmapsto T(t-s)x$$

é uma aplicação contínua. Logo, $S(t,s) = T(t-s)(t \geq s)$ é um processo de evolução.

Definição 35. *[8] Sejam A e M subconjuntos não-vazios de X. Dizemos que A atrai M (pelo semigrupo T) se para qualquer $\epsilon > 0$, existe $t(\epsilon, M) \geq 0$ tal que $T(t)M \subset \mathcal{O}_\epsilon(A)$ para todo $t \geq t(\epsilon, M)$, onde $\mathcal{O}_\epsilon(A) := \{x \in X : d(x,A) < \epsilon\}$. Dizemos que A atrai um ponto $x \in X$, se A atrai o conjunto unitário $\{x\}$.*

Definição 36. *[8] Seja A um subconjunto não-vazio de X. Se A atrai cada ponto $x \in X$, então A é chamado um **atrator global de pontos** (para o semigrupo T); Se A atrai cada conjunto $B \in \mathfrak{B}$, então A é chamado um $B-$**atrator global**.*

Uma família de conjuntos $\mathcal{P} := \{\mathcal{P}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ sobre X significa um mapeamento com valores definidos dado por $\mathcal{P}(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow 2^X \setminus \emptyset$.

Definição 37. *[9] Uma família de conjuntos $\mathcal{P}$ sobre X é dita ser:*

***(i) compacta** se cada conjunto $\mathcal{P}(t)$ for compacto;*

***(ii) compacta para frente** se for compacta e $\bigcup_{s \geq t} \mathcal{P}(s)$ é pré-compacta para cada $t \in \mathbb{R}$;*

***(iii) compacta para trás** se for compacta e $\bigcup_{s \leq t} \mathcal{P}(s)$ é pré-compacta para cada $t \in \mathbb{R}$;*

***(iv) uniformemente compacta** se for compacta e $\bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{P}(s)$ for pré-compacta.*

Definição 38. *[11] Seja $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que esta família é **invariante pelo processo de evolução S** se*

$$S(t,s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t), \ \forall \ t \geq s.$$

Definição 39. *[9] Denotamos por $dist_X$ a semi-distância de Hausdorff entre conjuntos não-vazios A e B, ou seja,*

$$dist_X(A, B) := \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a, b).$$

e por $dist_H$ a distância de Hausdorff, ou seja,

$$dist_H(A, B) := \max\{dist_X(A, B), dist_X(B, A)\}.$$

Definição 40. *[9] Uma família $\mathcal{A} := \{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos compactos de X é dita um **atrator pullback** para o processo de evolução S se*

(i) *for invariante pelo processo de evolução S;*

(ii) *atrai pullback subconjuntos limitados de X, isto é, para cada $B \in \mathfrak{B}, t \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{\tau\longrightarrow+\infty} dist_X\big(S(t, t-\tau)B, \mathcal{A}(t)\big) = 0.$$

Definição 41. *[8] Seja B um subconjunto de X. Dizemos que B é **invariante pelo semigrupo T** se*

$$T(t)B = B,\ \forall\ t \geq 0.$$

Definição 42. *[8] Um conjunto $\mathcal{A}_\infty \subseteq X$ é um **atrator global** para o semigrupo T se*

(i) *for compacto;*

(ii) *for invariante pelo semigrupo T;*

(iii) *atrai cada subconjunto limitado de X, isto é, $\mathcal{A}_\infty$ é um $B-$atrator global.*

Definição 43. *[9] Seja S um processo de evolução e T um semigrupo em X. Dizemos que S é **assintoticamente autônomo** para T se*

$$\lim_{\tau\longrightarrow+\infty} \|S(\tau+t, \tau)x_\tau - T(t)x_0\|_X = 0,\ \forall\ t \geq 0, \tag{3.1}$$

sempre que $\|x_\tau - x_0\|_X \longrightarrow 0$ quando $\tau \longrightarrow +\infty$.

Definição 44. *[9] Seja S um processo de evolução e T um semigrupo em X. Dizemos que S é **uniformemente assintoticamente autônomo** para T se a convergência em (3.1) é uniforme em $t \geq 0$, ou seja,*

$$\lim_{\tau\longrightarrow+\infty} \sup_{t\geq 0} \|S(\tau+t, \tau)x_\tau - T(t)x_0\|_X = 0.$$

3.1 Convergência de atratores não-autônomos para autônomos

Nesta seção, apontamos um teorema que reduz as condições de uniformidade dadas por Kloeden e Simsen $\big[$[10], Teorema 3.2$\big]$. Além disso, este apresenta uma condição necessária e suficiente.

Definição 45. *[9] Seja S um processo de evolução com um atrator pullback $\mathcal{A}$ e T um semigrupo com um atrator global A_∞. Dizemos que S é **fracamente assintoticamente autônomo** para T se para cada $t \geq 0$,*

$$\lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \|S(\tau + t, \tau)x_\tau - T(t)x_0\|_X = 0, \tag{3.2}$$

sempre que $x_\tau \in \mathcal{A}(\tau)$ e $x_\tau \longrightarrow x_0$ quando $\tau \longrightarrow +\infty$.

Teorema 46. *[9] Suponha que S seja fracamente assintoticamente autônomo para T. Então a semi-continuidade superior é válida, isto é,*

$$\lim_{\tau \longrightarrow +\infty} dist_X(\mathcal{A}(\tau), \mathcal{A}_\infty) = 0 \tag{3.3}$$

se, e somente se, $\mathcal{A}$ for compacto para frente.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que a semi-continuidade superior (3.3) seja verdadeira. Queremos provar que $\mathcal{A}$ é compacto para frente, ou seja, que $\bigcup_{r \geq t} \mathcal{A}(r)$ é pré-compacta para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado.

Tomemos uma sequência qualquer $\{x_n\}$ desta união. Se $\{x_n\} \subset \bigcup_{r=1}^{j} \mathcal{A}(r)$, não há nada que provar, pois $\bigcup_{r=1}^{j} \mathcal{A}(r)$ é compacta, logo $\{x_n\}$ possui subsequência convergente.

Agora, como $\{x_n\} \subset \bigcup_{r \geq t} \mathcal{A}(r)$ escolhemos $r_n \geq t$ tal que $x_n \in \mathcal{A}(r_n)$, para cada n. Vamos provar que a sequência $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergente em dois casos:

- *Caso 1*:

$$r_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} r_n < +\infty.$$

Neste caso, temos que

$$\{r_n\} \subset [t, r_0] \Longrightarrow \{x_n\} \subset \bigcup_{t \leq r \leq r_0} \mathcal{A}(r).$$

Defina a aplicação contínua

$$\begin{aligned} \sigma : [t, +\infty) \times X &\longrightarrow X \\ (r, x) &\longmapsto S(r, t)x. \end{aligned}$$

Afirmação:

$$\bigcup_{t \le r \le r_0} \mathcal{A}(r) = \sigma\big([t, r_0] \times \mathcal{A}(t)\big).$$

De fato, seja $y \in \bigcup_{t \le r \le r_0} \mathcal{A}(r)$. Logo, $y \in \mathcal{A}(\tilde{r})$ para algum $t \le \tilde{r} \le r_0$. Pela invariância do atrator pullback $\mathcal{A}$, existe $x \in \mathcal{A}(t)$ tal que

$$y = S(\tilde{r}, t)x = \sigma(\tilde{r}, x) \in \sigma\big([t, r_0] \times \mathcal{A}(t)\big).$$

Portanto,

$$\bigcup_{t \le r \le r_0} \mathcal{A}(r) \subset \sigma\big([t, r_0] \times \mathcal{A}(t)\big).$$

Seja agora $w \in \sigma\big([t, r_0] \times \mathcal{A}(t)\big)$. Logo, $w = \sigma(l, x)$, onde $l \in [t, r_0]$ e $x \in \mathcal{A}(t)$. Pela invariância do atrator pullback $\mathcal{A}$, temos que

$$w = S(l, t)x \in \mathcal{A}(l) \subset \bigcup_{t \le r \le r_0} \mathcal{A}(r).$$

Assim,

$$\sigma\big([t, r_0] \times \mathcal{A}(t)\big) \subset \bigcup_{t \le r \le r_0} \mathcal{A}(r).$$

Portanto,

$$\bigcup_{t \le r \le r_0} \mathcal{A}(r) = \sigma\big([t, r_0] \times \mathcal{A}(t)\big).$$

Logo, $\bigcup_{t \le r \le r_0} \mathcal{A}(r)$ é compacta, pois a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é um conjunto compacto. Sendo assim, existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que

$$x_{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} z \in \bigcup_{t \le r \le r_0} \mathcal{A}(r) \subset \bigcup_{r \ge t} \mathcal{A}(r).$$

- *Caso 2*:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} r_n = +\infty.$$

Passando para uma subsequência, assuma que $r_n \uparrow +\infty$. Sendo verdadeira a semi-continuidade superior (3.3), temos

$$d(x_n, \mathcal{A}_\infty) \leq dist_X(\mathcal{A}(r_n), \mathcal{A}_\infty) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.4}$$

Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher $y_n \in \mathcal{A}_\infty$ tal que

$$d(x_n, y_n) < d(x_n, \mathcal{A}_\infty) + 1/n.$$

Visto que o atrator global $\mathcal{A}_\infty$ é um conjunto compacto, segue que a sequência $\{y_n\}$ possui uma subsequência convergente, ou seja, $y_{n_k} \longrightarrow y \in \mathcal{A}_\infty$ quando $k \longrightarrow \infty$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} d(x_{n_k}, y) &\leq d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y) \\ &= d(y_{n_k}, y) + d(x_{n_k}, y_{n_k}) \\ &\leq d(y_{n_k}, y) + d(x_{n_k}, \mathcal{A}_\infty) + \frac{1}{n_k}, \end{aligned}$$

que juntamente com (3.4) implica que $x_{n_k} \longrightarrow y$ quando $k \longrightarrow \infty$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\mathcal{A}$ seja compacto para frente, então $\bigcup_{r\geq t}\mathcal{A}(r)$ é pré-compacta para cada $t \in \mathbb{R}$. Logo, $C := \overline{\bigcup_{r\geq 0}\mathcal{A}(r)}$ é compacto.

Suponha agora que a semi-continuidade superior (3.3) não seja verdadeira, logo existe $\delta > 0$ e $0 < \tau_n \uparrow +\infty$ tal que

$$dist_X(\mathcal{A}(\tau_n), \mathcal{A}_\infty) \geq 4\delta, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Escolha $x_n \in \mathcal{A}(\tau_n)$ de modo que

$$d(x_n, \mathcal{A}_\infty) \geq dist_X(\mathcal{A}(\tau_n), \mathcal{A}_\infty) - \delta \geq 3\delta, \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Como o semigrupo T possui um atrator global $\mathcal{A}_\infty$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$dist_X(T(\tau_{n_0})C, \mathcal{A}_\infty) < \delta. \tag{3.6}$$

Pela invariância do atrator pullback $\mathcal{A}$, podemos reescrever x_n como

$$x_n = S(\tau_n, \tau_n - \tau_{n_0})y_n,$$

sendo $y_n \in \mathcal{A}(\tau_n - \tau_{n_0})$.

Como $\{y_n : n \geq n_0\}$ está incluso no conjunto compacto C, para n suficientemente grande, segue que existe uma subsequência $\{y_{n_k}\}$ e $y \in C$ tal que $y_{n_k} \longrightarrow y$ em X quando $k \longrightarrow \infty$.

Aplicando a condição de convergência (3.2) no caso em que $\tau = \tau_{n_k} - \tau_{n_0} \longrightarrow +\infty$ quando $k \longrightarrow \infty$ e $t = \tau_{n_0}$, obtemos:

$$d(x_{n_k}, T(\tau_{n_0})y) = d\big(S\big((\tau_{n_k} - \tau_{n_0}) + \tau_{n_0}, \tau_{n_k} - \tau_{n_0}\big)y_{n_k}, T(\tau_{n_0})y\big) < \delta \tag{3.7}$$

se k for suficientemente grande. De (3.6) e (3.7) temos que

$$\begin{aligned} d(x_{n_k}, \mathcal{A}_\infty) &\leq d(x_{n_k}, T(\tau_{n_0})y) + dist_X(T(\tau_{n_0})C, \mathcal{A}_\infty) \\ &< \delta + \delta = 2\delta, \end{aligned}$$

o que contradiz (3.5). Portanto a semi-continuidade superior (3.3) é verdadeira, como queríamos demonstrar.

■

3.2 Condições suficientes

Nesta seção, serão apresentados alguns resultados com condições suficientes para garantir a convergência do atrator pullback para o atrator global.

Definição 47. *[12] Uma família $\{E(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de conjuntos não-vazios é dita ser*

(i) *limitada para frente, se para todo $s \in \mathbb{R}$, existe um conjunto limitado B tal que*

$$\bigcup_{t \geq s} E(t) \subset B;$$

(ii) *limitada para trás, se para todo $s \in \mathbb{R}$, existe um conjunto limitado K tal que*

$$\bigcup_{t \leq s} E(t) \subset K.$$

Observação 48. *A condição assintoticamente autônoma abaixo*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \|S(t + T_0, t)x - T(T_0)x\|_X = 0, \forall\ T_0 > 0,$$

pode ser reescrita como

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \|S(t, t - T_0)x - T(T_0)x\|_X = 0, \forall\ T_0 > 0.$$

3.2.1 Convergência para frente num tempo futuro

Aqui, apresentamos resultados que mostram a convergência do atrator pullback para o atrator global utilizando limitação para frente ao invés de compacto para frente. Isto é uma melhora, pois para certas EDP's não é possível mostrar que o atrator pullback é compacto para frente.

Teorema 49. *[12] Suponha que S seja um processo de evolução com um atrator pullback $\mathcal{A}$ e T um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}_\infty$. Se*

(i) *$\mathcal{A}$ é limitado para frente, ou seja, se para todo $s \in \mathbb{R}$, existe um conjunto limitado B tal que*

$$\bigcup_{t \geq s} \mathcal{A}(t) \subset B;$$

(ii) *a seguinte condição é válida*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \sup_{x \in B} \|S(t + T_0, t)x - T(T_0)x\|_X = 0, \forall\ T_0 > 0. \tag{3.8}$$

Então

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} dist_X\big(\mathcal{A}(t), \mathcal{A}_\infty\big) = 0. \tag{3.9}$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que (3.9) não seja verdadeira, logo existe $\delta > 0$ e $0 < t_n \uparrow +\infty$ tal que

$$dist_X\big(\mathcal{A}(t_n), \mathcal{A}_\infty\big) \geq \delta,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Como o atrator pullback $\mathcal{A}$ é compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_n \in \mathcal{A}(t_n)$ tal que

$$dist_X(x_n, \mathcal{A}_\infty) = dist_X\big(\mathcal{A}(t_n), \mathcal{A}_\infty\big) \geq \delta,\ \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Sabemos que $\mathcal{A}_\infty$ atrai B pelo semigrupo T, então existe $T_0 > 0$ tal que

$$dist_X\big(T(T_0)B, \mathcal{A}_\infty\big) < \delta/2. \tag{3.11}$$

Além disso, pela invariância do atrator pullback $\mathcal{A}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos reescrever x_n como

$$x_n = S(t_n, t_n - T_0)y_n,$$

sendo $y_n \in \mathcal{A}(t_n - T_0) \subset B$. Assim, escrevemos (3.10) da seguinte forma:

$$dist_X(x_n, \mathcal{A}_\infty) = dist_X\big(S(t_n, t_n - T_0)y_n, \mathcal{A}_\infty\big) \geq \delta, \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Por outro lado, pela condição (3.8), existe $N = N(\delta) > 0$ tal que

$$d\big(S(t_N, t_N - T_0)y_N, T(T_0)y_N\big) \leq \sup_{x \in B} d\big(S(t_N, t_N - T_0)x, T(T_0)x\big) < \delta/2, \tag{3.13}$$

assim, por (3.11) e (3.13) segue que

$$\begin{aligned} dist_X\big(S(t_N, t_N - T_0)y_N, \mathcal{A}_\infty\big) &\leq d\big(S(t_N, t_N - T_0)y_N, T(T_0)y_N\big) + d\big(T(T_0)y_N, \mathcal{A}_\infty\big) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

o que dá uma contradição com (3.12).

Portanto,

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} dist_X\big(\mathcal{A}(t), \mathcal{A}_\infty\big) = 0.$$

■

Teorema 50. *[10] Seja $\mathcal{A}$ um atrator pullback para o processo de evolução S em X e $\mathcal{A}_\infty$ um atrator global para o semigrupo T em X. Suponha que para cada $\epsilon > 0$ exista $\tau_0 = \tau_0(\epsilon)$ e um conjunto limitado $\mathcal{B}(\tau_0)$ em X tal que*

$$\sup_{\psi \in \mathcal{A}(\tau_0)} \|S(t, \tau_0)\psi - T(t - \tau_0)\psi\|_X < \epsilon,\ \forall\ t \geq \tau_0, \tag{3.14}$$

$$\bigcup_{t \geq \tau_0} \mathcal{A}(t) \subset \mathcal{B}(\tau_0). \tag{3.15}$$

Então

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} dist_X\big(\mathcal{A}(t), \mathcal{A}_\infty\big) = 0.$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ dado e seja $\tau_1 = \tau_0(\epsilon/3)$. Como o atrator global $\mathcal{A}_\infty$ do semigrupo T atrai subconjuntos limitados de X, existe t_1 positivo com $t_1 = t_1\big(\epsilon/3, \mathcal{B}(\tau_1)\big) > \tau_1$ tal que

$$dist_X\big(T(t - \tau_1)\mathcal{B}(\tau_1), \mathcal{A}_\infty\big) < \epsilon/3,\ \forall\ t \geq t_1. \tag{3.16}$$

Então, por (3.16), pela invariância do atrator pullback $\mathcal{A}$ e por (3.14) com $\epsilon/3$ e τ_1 em vez de ϵ e τ_0 respectivamente, temos

$$\begin{aligned} dist_X\big(\mathcal{A}(t), \mathcal{A}_\infty\big) &= dist_X\big(S(t,\tau_1)\mathcal{A}(\tau_1), \mathcal{A}_\infty\big) \\ &= \sup_{\psi\in\mathcal{A}(\tau_1)} dist_X\big(S(t,\tau_1)\psi, \mathcal{A}_\infty\big) \\ &\leq \sup_{\psi\in\mathcal{A}(\tau_1)} dist_X\big(S(t,\tau_1)\psi, T(t-\tau_1)\psi\big) \\ &\quad + \sup_{\psi\in\mathcal{A}(\tau_1)} dist_X\big(T(t-\tau_1)\psi, \mathcal{A}_\infty\big) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $t \geq t_1$.

■

Observação 51. *Note que o Teorema 49 desenvolvido por Cui sai como um corolário do Teorema 50 desenvolvido por Kloeden e Simsen pois a condição (i) do Teorema 49 implica em (3.15) do Teorema 50 e (3.8) é mais forte do que (3.14). Vale ressaltar aqui, que o Teorema 50 surgiu antes na literatura do que o Teorema 49.*

A próxima proposição estabelece condições nas quais podemos obter a convergência no sentido da distância de Hausdorff, não apenas no sentido de semi-distância. Para isso, é conveniente começarmos com uma convergência mais geral, a de atrator pullback para atrator pullback quando $t \longrightarrow +\infty$.

Proposição 52. *Suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ sejam atratores pullback para os processos de evolução S e S_∞, respectivamente. Se*

(i) *$\mathcal{A}$ é limitado para frente, ou seja, se para todo $s \in \mathbb{R}$, existe um conjunto limitado B tal que*

$$\bigcup_{t\geq s} \mathcal{A}(t) \subset B;$$

(ii) *a seguinte convergência é válida*

$$\sup_{x\in B, \tau\in\mathbb{R}_+} d\big(S(t,t-\tau)x, S_\infty(t,t-\tau)x\big) \longrightarrow 0, \text{ quando } t \longrightarrow +\infty. \tag{3.17}$$

Então

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} dist_X\big(\mathcal{A}(t), \mathfrak{A}(t)\big) = 0. \tag{3.18}$$

Se, além disso, $\mathfrak{A}$ *for limitado para frente, então os atratores* $\mathcal{A}$ *e* $\mathfrak{A}$ *são* ***assintoticamente idênticos num tempo futuro****, isto é,*

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} dist_H\big(\mathcal{A}(t), \mathfrak{A}(t)\big) = 0. \tag{3.19}$$

Demonstração. Provemos a primeira parte por contradição. Suponha que (3.18) não seja verdadeira, logo existe $\delta > 0$ e uma sequência $0 < t_n \uparrow +\infty$ tal que

$$dist_X\big(\mathcal{A}(t_n), \mathfrak{A}(t_n)\big) \geq \delta, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Como o atrator pullback $\mathcal{A}$ é compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_n \in \mathcal{A}(t_n)$ tal que

$$dist_X\big(x_n, \mathfrak{A}(t_n)\big) = dist_X\big(\mathcal{A}(t_n), \mathfrak{A}(t_n)\big) \geq \delta, \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

Pela invariância do atrator pullback $\mathcal{A}$, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, podemos reescrever x_n como

$$x_n = S(t_n, t_n - m)b_{n,m},$$

sendo $b_{n,m} \in \mathcal{A}(t_n - m) \subset B$. Assim, pela condição (3.17), existe $N = N(\delta) > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &d\big(x_N, S_\infty(t_N, t_N - m)b_{N,m}\big) \\ &\quad = d\big(S(t_N, t_N - m)b_{N,m}, S_\infty(t_N, t_N - m)b_{N,m}\big) \\ &\quad \leq \sup_{x\in B, \tau\in\mathbb{R}_+} d\big(S(t_N, t_N - \tau)x, S_\infty(t_N, t_N - \tau)x\big) \\ &\quad < \frac{\delta}{2}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Além disso, como $\{b_{n,m}\} \subset B$ é atraído por $\mathfrak{A}$ pelo processo de evolução S_∞, existe $M = M(N, \delta) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &dist_X\big(S_\infty(t_N, t_N - m)b_{N,m}, \mathfrak{A}(t_N)\big) \\ &\quad \leq dist_X\big(S_\infty(t_N, t_N - m)B, \mathfrak{A}(t_N)\big) < \delta/2, \forall\ m \geq M. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Logo, de (3.21) e (3.22) segue que, para todo $m \geq M$,

$$\begin{aligned} dist_X\big(x_N, \mathfrak{A}(t_N)\big) &\leq d\big(x_N, S_\infty(t_N, t_N - m)b_{N,m}\big) \\ &\quad + dist_X\big(S_\infty(t_N, t_N - m)b_{N,m}, \mathfrak{A}(t_N)\big) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

o que contradiz (3.20).

Portanto,

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} dist_X\big(\mathcal{A}(t), \mathfrak{A}(t)\big) = 0.$$

Agora, para provarmos a segunda parte, no caso de $\mathfrak{A}$ ser também limitado para frente, trocamos $\mathcal{A}$ por $\mathfrak{A}$ na demonstração acima e obtemos:

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} dist_X\big(\mathfrak{A}(t), \mathcal{A}(t)\big) = 0.$$

Portanto, (3.19) é válida, ou seja, os atratores pullback $\mathcal{A}$ e $\mathfrak{A}$ são assintoticamente idênticos num tempo futuro.

■

Como corolário da Proposição 52 temos

Teorema 53. *Suponha que S seja um processo de evolução com um atrator pullback $\mathcal{A}$ e que T seja um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}_\infty$. Se*

(i) *$\mathcal{A}$ é limitado para frente, ou seja, se para todo $s \in \mathbb{R}$, existe um conjunto limitado B tal que*

$$\bigcup_{t \geq s} \mathcal{A}(t) \subset B;$$

(ii) *a seguinte condição é válida*

$$\sup_{x \in B, \tau \in \mathbb{R}_+} d\big(S(t, t-\tau)x, T(\tau)x\big) \longrightarrow 0, \ \textit{quando} \ t \longrightarrow +\infty.$$

Então, o atrator global $\mathcal{A}_\infty$ é o conjunto ω-limite do atrator pullback $\mathcal{A}$, ou seja,

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} dist_H\big(\mathcal{A}(t), \mathcal{A}_\infty\big) = 0.$$

Demonstração. Note que, basta definirmos $S_\infty(t,s)x := T(t-s)x$ para $t \geq s$ e $x \in X$. Assim, S_∞ é um processo de evolução com um atrator pullback $\mathfrak{A}$ com $\mathfrak{A} \equiv \mathcal{A}_\infty$. Portanto, pela Proposição 52 o teorema segue.

■

3.2.2 Convergência para trás num tempo passado

Aqui, apresentamos resultados que mostram a convergência do atrator pullback para o atrator global utilizando a compacidade e limitação para trás.

O próximo teorema é semelhante ao Teorema 46 mas com a condição de que o atrator pullback $\mathcal{A}$ seja compacto para trás.

Teorema 54. *[12] Seja S um processo de evolução com um atrator pullback $\mathcal{A}$ e T um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}_\infty$. Suponha que*

(i) *para qualquer $\{x_t\}$ com $x_t \in \mathcal{A}(t)$ e $lim_{t \longrightarrow -\infty} \|x_t - x_0\|_X = 0$,*

$$\lim_{t \longrightarrow -\infty} \|S(t, t - T_0)x_t - T(T_0)x_0\|_X = 0, \forall\ T_0 \in \mathbb{R}_+; \tag{3.23}$$

(ii) *$\mathcal{A}$ é compacto para trás.*

Então

$$\lim_{t \longrightarrow -\infty} dist_X\big(\mathcal{A}(t), \mathcal{A}_\infty\big) = 0. \tag{3.24}$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que (3.24) não seja verdadeira, logo existe $\delta > 0$ e uma sequência $t_n \longrightarrow \infty$ tal que

$$dist_X\big(\mathcal{A}(-t_n), \mathcal{A}_\infty\big) \geq \delta, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Como o atrator pullback $\mathcal{A}$ é compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_n \in \mathcal{A}(-t_n)$ tal que

$$dist_X(x_n, \mathcal{A}_\infty) = dist_X\big(\mathcal{A}(-t_n), \mathcal{A}_\infty\big) \geq \delta, \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

Como $\mathcal{A}$ é compacto para trás, então $\bigcup_{t \leq r} \mathcal{A}(t)$ é pré-compacta para cada $t \in \mathbb{R}$, ou seja, o conjunto $B := \overline{\bigcup_{t \leq 0} \mathcal{A}(t)}$ é compacto. Sabemos que $\mathcal{A}_\infty$ atrai B pelo semigrupo T, então existe $T_0 > 0$ tal que

$$dist_X\big(T(T_0)B, \mathcal{A}_\infty\big) < \delta/2. \tag{3.26}$$

Além disso, pela invariância do atrator pullback $\mathcal{A}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos reescrever x_n como

$$x_n = S(-t_n, -t_n - T_0)b_n$$

sendo $b_n \in \mathcal{A}(-t_n - T_0) \subset B$ e $b_n \longrightarrow b_0$ quando $n \longrightarrow \infty$ para algum $b_0 \in B$. Assim, escrevemos (3.25) da seguinte forma:

$$dist_X(x_n, \mathcal{A}_\infty) = dist_X\big(S(-t_n, -t_n - T_0)b_n, \mathcal{A}_\infty\big) \geq \delta, \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.27}$$

Por outro lado, pela condição (3.23), existe $N = N(\delta) > 0$ tal que

$$d\big(x_N, T(T_0)b_0\big) = d\big(S(-t_N, -t_N - T_0)b_N, T(T_0)b_0\big) < \delta/2, \tag{3.28}$$

assim, por (3.28) e (3.26) segue que

$$\begin{aligned} dist_X(x_N, \mathcal{A}_\infty) &\leq d\big(x_N, T(T_0)b_0\big) + dist_X\big(T(T_0)b_0, \mathcal{A}_\infty\big) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

o que contradiz (3.27).

Portanto,

$$\lim_{t \longrightarrow -\infty} dist_X\big(\mathcal{A}(t), \mathcal{A}_\infty\big) = 0.$$

■

A proposição a seguir estabelece condições nas quais podemos obter a convergência no sentido da distância de Hausdorff, não apenas no sentido de semi-distância. Para mostrarmos isso, começaremos com uma convergência mais geral, a de atrator pullback para atrator pullback quando $t \longrightarrow -\infty$.

Proposição 55. *[12] Suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ sejam atratores pullback para os processos de evolução S e S_∞, respectivamente. Se*

(i) *$\mathcal{A}$ é limitado para trás, ou seja, se para todo $s \in \mathbb{R}$, existe um conjunto limitado B tal que*

$$\bigcup_{t \leq s} \mathcal{A}(t) \subset B;$$

(ii) *a seguinte convergência é válida*

$$\sup_{x \in B, \tau \in \mathbb{R}_+} d\big(S(t, t-\tau)x, S_\infty(t, t-\tau)x\big) \longrightarrow 0, \text{ quando } t \longrightarrow -\infty. \tag{3.29}$$

Então

$$\lim_{t \longrightarrow -\infty} dist_X\big(\mathcal{A}(t), \mathfrak{A}(t)\big) = 0. \tag{3.30}$$

Se, além disso, $\mathfrak{A}$ *for limitado para trás, então os atratores* $\mathcal{A}$ *e* $\mathfrak{A}$ *são* ***assintoticamente idênticos num tempo passado****, isto é,*

$$\lim_{t\longrightarrow -\infty} dist_H\big(\mathcal{A}(t), \mathfrak{A}(t)\big) = 0. \tag{3.31}$$

Demonstração. Provemos a primeira parte por contradição. Suponha que (3.30) não seja verdadeira, logo existe $\delta > 0$ e uma sequência $t_n \longrightarrow \infty$ tal que

$$dist_X\big(\mathcal{A}(-t_n), \mathfrak{A}(-t_n)\big) \geq \delta, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como o atrator pullback $\mathcal{A}$ é compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_n \in \mathcal{A}(-t_n)$ tal que

$$dist_X\big(x_n, \mathfrak{A}(-t_n)\big) = dist_X\big(\mathcal{A}(-t_n), \mathfrak{A}(-t_n)\big) \geq \delta, \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.32}$$

Pela invariância do atrator pullback $\mathcal{A}$, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, podemos reescrever x_n como

$$x_n = S(-t_n, -t_n - m)b_{n,m},$$

sendo $b_{n,m} \in \mathcal{A}(-t_n - m) \subset B$. Assim, pela condição (3.29), existe $N = N(\delta) > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &d\big(x_N, S_\infty(-t_N, -t_N - m)b_{N,m}\big) \\ &\quad = d\big(S(-t_N, -t_N - m)b_{N,m}, S_\infty(-t_N, -t_N - m)b_{N,m}\big) \\ &\quad \leq \sup_{x\in B, \tau\in\mathbb{R}_+} d\big(S(-t_N, -t_N - \tau)x, S_\infty(-t_N, -t_N - \tau)x\big) \\ &\quad < \frac{\delta}{2}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Além disso, como $\{b_{n,m}\} \subset B$ é atraído por $\mathfrak{A}$ pelo processo de evolução S_∞, existe $M = M(N, \delta) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &dist_X\big(S_\infty(-t_N, -t_N - m)b_{N,m}, \mathfrak{A}(-t_N)\big) \\ &\quad \leq dist_X\big(S_\infty(-t_N, -t_N - m)B, \mathfrak{A}(-t_N)\big) < \delta/2, \forall\, m \geq M. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Logo, de (3.33) e (3.34) segue que, para todo $m \geq M$,

$$\begin{aligned} dist_X\big(x_N, \mathfrak{A}(-t_N)\big) &\leq d\big(x_N, S_\infty(-t_N, -t_N - m)b_{N,m}\big) \\ &\qquad + dist_X\big(S_\infty(-t_N, -t_N - m)b_{N,m}, \mathfrak{A}(-t_N)\big) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

o que contradiz (3.32).

Portanto,

$$\lim_{t \longrightarrow -\infty} dist_X\big(\mathcal{A}(t), \mathfrak{A}(t)\big) = 0.$$

Agora, para provarmos a segunda parte, no caso de $\mathfrak{A}$ ser também limitado para trás, trocamos $\mathcal{A}$ por $\mathfrak{A}$ na demonstração acima e obtemos:

$$\lim_{t \longrightarrow -\infty} dist_X\big(\mathfrak{A}(t), \mathcal{A}(t)\big) = 0.$$

Portanto, (3.31) é válida, ou seja, os atratores pullback $\mathcal{A}$ e $\mathfrak{A}$ são assintoticamente idênticos num tempo passado.

■

Como Corolário da Proposição 55, temos

Teorema 56. *[12] Suponha que S seja um processo de evolução com um atrator pullback $\mathcal{A}$ e que T seja um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}_\infty$. Se*

(i) *$\mathcal{A}$ é limitado para trás, ou seja, se para todo $s \in \mathbb{R}$, existe um conjunto limitado B tal que*

$$\bigcup_{t \leq s} \mathcal{A}(t) \subset B;$$

(ii) *a seguinte condição é válida*

$$\sup_{x \in B, \tau \in \mathbb{R}_+} d\big(S(t, t-\tau)x, T(\tau)x\big) \longrightarrow 0, \ \textit{quando } t \longrightarrow -\infty. \tag{3.35}$$

Então, o atrator global $\mathcal{A}_\infty$ é o conjunto α-limite do atrator pullback $\mathcal{A}$, ou seja,

$$\lim_{t \longrightarrow -\infty} dist_H\big(\mathcal{A}(t), \mathcal{A}_\infty\big) = 0.$$

Demonstração. Note que, basta definirmos $S_\infty(t,s)x := T(t-s)x$ para $t \geq s$ e $x \in X$. Assim, S_∞ é um processo de evolução com um atrator pullback $\mathfrak{A}$ com $\mathfrak{A} \equiv \mathcal{A}_\infty$. Portanto, pela Proposição 55 o teorema segue.

■

3.3 Condições necessárias

Nesta seção, apresentamos duas proposições com condições necessárias para garantir a convergência de atrator pullback para atrator global. Para isso, temos a seguinte definição:

Definição 57. *[12] Uma família $\mathfrak{E} = \{E_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de conjuntos compactos não-vazios é considerada* ***localmente uniformemente compacta****, se para qualquer intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$ a união $\bigcup_{t\in I} E_t$ é pré-compacta.*

Proposição 58. *[12] Suponha que $\{E_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ seja uma família de conjuntos compactos não-vazios localmente uniformemente compacta em X. Então existe um conjunto compacto não-vazio E tal que*

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} dist_X(E_t, E) = 0$$

se, e somente se, a família $\{E_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é compacta para frente.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Queremos provar que a família $\{E_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é compacta para frente, ou seja, que $\bigcup_{t\geq 0} E_t$ é pré-compacta. Tomemos uma sequência qualquer $\{x_n\} \subset \bigcup_{t\geq 0} E_t$, logo precisamos provar que $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergente. Como $\{x_n\} \subset \bigcup_{t\geq 0} E_t$, existe uma sequência $\{t_n\} \subset [0,\infty)$ tal que $x_n \in E_{t_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos dois casos a considerar:

- *Caso 1*: existe uma quantidade finita $E_1, E_2, \cdots, E_k$ de modo que

$$\{x_n\} \subset \bigcup_{j=1}^{k} E_j.$$

Note que, neste caso, $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergente pois $\bigcup_{j=1}^{k} E_j$ é compacta.

- *Caso 2*: existem infinitos índices l's tais que $x_l \in E_{t_l}$, para todo $l \in \mathbb{N}$, com $x_l \neq x_j$ e $E_{t_l} \neq E_{t_j}$ quando $l \neq j$.

Considere uma subsequência $\{x_{l_k}\}$ da sequência $\{x_l\}$ com a subsequência $\{t_{l_k}\}$ crescente.

Temos duas possibilidades:

- *Possibilidade 1*: $t_{l_k} \uparrow +\infty$.

Como $\{x_{l_k}\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{t_{l_k}}$, com $x_{l_k} \in E_{t_{l_k}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$d(x_{l_k}, E) \leq d(E_{t_{l_k}}, E) \longrightarrow 0 \text{ quando } k \longrightarrow \infty.$$

Assim, $\lim_{k \longrightarrow \infty} d(x_{l_k}, E) = 0$. Logo, para todo $j \in \mathbb{N}$ ($\epsilon = 1/j$), $x_{l_{k_j}} \in \mathcal{O}_{1/j}(E)$ para $l_{k_j} \geq k_0(j)$ e, ainda, existe $w_{k_j} \in E$ tal que $d(x_{l_{k_j}}, w_{k_j}) < 1/j$. Como E é compacto podemos considerar $w_{k_j} \longrightarrow x \in E$ quando $j \longrightarrow \infty$.

Afirmação: $x_{l_{k_j}} \longrightarrow x$.

De fato,

$$\begin{aligned} d(x_{l_{k_j}}, x) &\leq d(x_{l_{k_j}}, w_{k_j}) + d(w_{k_j}, x) \\ &< \frac{1}{j} + d(w_{k_j}, x). \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{j \longrightarrow \infty} d(x_{l_{k_j}}, x) = 0$.

Portanto, a sequência $\{x_l\}$ possui a subsequência $\{x_{l_{k_j}}\}$ que é convergente. Visto que $\{x_l\}$ é uma subsequência da sequência original $\{x_n\}$ provamos que a sequência $\{x_n\}$ possui subsequência convergente.

- *Possibilidade 2*: $t_{l_k} \uparrow a$ com $a < \infty$.

Temos que $\{x_{l_k}\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{t_{l_k}}$, com $x_{l_k} \in E_{t_{l_k}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Note que $t_{l_k} \in [0, a]$, assim

$$\{x_{l_k}\} \subset \bigcup_{t_{l_k} \in [0,a]} E_{t_{l_k}} \subset \bigcup_{t \in [0,a]} E_t.$$

Por hipótese, $\bigcup_{t \in [0,a]} E_t \in K(X)$, logo $\{x_{l_k}\}$ possui subsequência convergente e o resultado está provado.

($\Leftarrow$) Suponha que a família $\{E_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ seja compacta para frente, então $\bigcup_{t \geq 0} E_t$ é pré-compacta, ou seja, $E := \overline{\bigcup_{t \geq 0} E_t}$ é compacto.

Note que $E \neq \emptyset$ pois, por hipótese, $\{E_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família de conjuntos não-vazios.

Temos que $\lim_{t \longrightarrow \infty} dist_X(E_t, E) = 0$, pois $E_t \subset E$ para todo $t \geq 0$. ■

Proposição 59. *Suponha que $\{E_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ seja uma família de conjuntos compactos não-vazios localmente uniformemente compacta em X. Então existe um conjunto compacto não-vazio E tal que*

$$\lim_{t \longrightarrow -\infty} dist_X(E_t, E) = 0$$

se, e somente se, a família $\{E_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *é compacta para trás.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Queremos provar que a família $\{E_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é compacta para trás, ou seja, que $\bigcup_{t\leq 0} E_t$ é pré-compacta. Tomemos uma sequência qualquer $\{x_n\} \subset \bigcup_{t\leq 0} E_t$, logo precisamos provar que $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergente. Como $\{x_n\} \subset \bigcup_{t\leq 0} E_t$, existe uma sequência $\{t_n\} \subset (-\infty, 0]$ tal que $x_n \in E_{t_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos dois casos a considerar:

- *Caso 1*: existe uma quantidade finita $E_1, E_2, \cdots, E_k$ de modo que

$$\{x_n\} \subset \bigcup_{j=1}^{k} E_j.$$

Note que, $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergente pois $\bigcup_{j=1}^{k} E_j$ é compacta.

- *Caso 2*: existem infinitos índices l's tais que $x_l \in E_{t_l}$, para todo $l \in \mathbb{N}$, com $x_l \neq x_j$ e $E_{t_l} \neq E_{t_j}$ quando $l \neq j$.

Considere uma subsequência $\{x_{l_k}\}$ da sequência $\{x_l\}$ com a subsequência $\{t_{l_k}\}$ decrescente.

Temos duas possibilidades:

- *Possibilidade 1*: $t_{l_k} \downarrow -\infty$.

Como $\{x_{l_k}\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{t_{l_k}}$, com $x_{l_k} \in E_{t_{l_k}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$d(x_{l_k}, E) \leq d(E_{t_{l_k}}, E) \longrightarrow 0 \text{ quando } k \longrightarrow +\infty.$$

Assim, $\lim_{k\longrightarrow+\infty} d(x_{l_k}, E) = 0$. Logo, para todo $j \in \mathbb{N}$ ($\epsilon = 1/j$), $x_{l_{k_j}} \in \mathcal{O}_{1/j}(E)$ para $l_{k_j} \geq k_0(j)$ e, ainda, existe $w_{k_j} \in E$ tal que $d(x_{l_{k_j}}, w_{k_j}) < 1/j$. Como E é compacto podemos considerar $w_{k_j} \longrightarrow x \in E$ quando $j \longrightarrow \infty$.

Afirmação: $x_{l_{k_j}} \longrightarrow x$.

De fato,

$$\begin{aligned} d(x_{l_{k_j}}, x) &\leq d(x_{l_{k_j}}, w_{k_j}) + d(w_{k_j}, x) \\ &< \frac{1}{j} + d(w_{k_j}, x). \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{j\longrightarrow+\infty} d(x_{l_{k_j}}, x) = 0$.

Portanto, a sequência $\{x_l\}$ possui a subsequência $\{x_{l_{k_j}}\}$ que é convergente. Visto que $\{x_l\}$ é uma subsequência da sequência original $\{x_n\}$ provamos que a sequência $\{x_n\}$ possui subsequência convergente.

- *Possibilidade 2*: $t_{l_k} \downarrow a$ com $a > -\infty$.

Temos que $\{x_{l_k}\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{t_{l_k}}$, com $x_{l_k} \in E_{t_{l_k}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Note que $t_{l_k} \in [a, 0]$, assim

$$\{x_{l_k}\} \subset \bigcup_{t_{l_k} \in [a,0]} E_{t_{l_k}} \subset \bigcup_{t \in [a,0]} E_t.$$

Por hipótese, $\bigcup_{t \in [a,0]} E_t \in K(X)$, logo $\{x_{l_k}\}$ possui subsequência convergente e o resultado está provado.

($\Leftarrow$) Suponha que a família $\{E_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ seja compacta para trás, então $\bigcup_{t \leq 0} E_t$ é pré-compacta, ou seja, $E := \overline{\bigcup_{t \leq 0} E_t}$ é compacto.

Note que $E \neq \emptyset$ pois, por hipótese, $\{E_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família de conjuntos não-vazios.

Temos que $\lim_{t \longrightarrow -\infty} dist_X(E_t, E) = 0$, pois $E_t \subset E$ para todo $t \leq 0$.

$\blacksquare$

3.4 Construção do conjunto limite do atrator pullback

Nesta seção, faremos comparações entre o atrator global $\mathcal{A}_\infty$ e o conjunto limite $\mathcal{A}(\infty)$ do atrator pullback.

Definição 60. *[9] O conjunto limite $\mathcal{A}(\infty)$ do atrator pullback é definido da seguinte forma:*

$$\mathcal{A}(\infty) := \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{r \geq t} \mathcal{A}(r)}$$

Proposição 61. *Considere o conjunto limite $\mathcal{A}(\infty)$ do atrator pullback definido acima. Então*

$$\mathcal{A}(\infty) = \bigcup_{r_n \uparrow \infty} \{x \in X : \exists\, x_n \in \mathcal{A}(r_n) \text{ tal que } x_n \longrightarrow x\}. \tag{3.36}$$

Demonstração. Queremos mostrar que

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{r \geq t} \mathcal{A}(r)} \subset \bigcup_{r_n \uparrow \infty} \{x \in X : \exists\, x_n \in \mathcal{A}(r_n) \text{ tal que } x_n \longrightarrow x\}.$$

Seja $w \in \bigcap\limits_{t\in\mathbb{R}} \overline{\bigcup\limits_{r\geq t} \mathcal{A}(r)}$. Considere uma sequência $t_n \uparrow +\infty$, ou seja,

$$t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n < \cdots.$$

Então $w \in \overline{\bigcup\limits_{r\geq t_n} \mathcal{A}(r)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\{w_j^n\} \subset \bigcup\limits_{r\geq t_n} \mathcal{A}(r)$ tal que $w_j^n \longrightarrow w$ quando $j \longrightarrow \infty$. Note que, $w_j^n \in \mathcal{A}(s_j^n)$ para algum $s_j^n \geq t_n$. Considerando, $r_j := s_j^j$ onde $r_j \geq t_j$ segue que $x_j := w_j^j \in \mathcal{A}(r_j)$ e $x_j \longrightarrow w$ quando $j \longrightarrow \infty$, como queríamos.

Agora, mostremos que

$$\bigcup_{r_n\uparrow\infty} \{x \in X : \exists\, x_n \in \mathcal{A}(r_n) \text{ tal que } x_n \longrightarrow x\} \subset \bigcap_{t\in\mathbb{R}} \overline{\bigcup_{r\geq t} \mathcal{A}(r)}.$$

Seja $x \in \bigcup\limits_{r_n\uparrow\infty} \{x \in X : \exists\, x_n \in \mathcal{A}(r_n) \text{ tal que } x_n \longrightarrow x\}$. Então existe uma sequência $\{x_n\}$ com $x_n \in \mathcal{A}(r_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \longrightarrow x$ e $r_n \uparrow +\infty$.

Seja $t \in \mathbb{R}$ arbitrariamente fixado. Queremos mostrar que $x \in \overline{\bigcup\limits_{r\geq t} \mathcal{A}(r)}$. Como $r_n \uparrow +\infty$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1 \Longrightarrow r_n \geq t$.

Logo, com $n \geq n_1$, $x_n \in \mathcal{A}(r_n)$, $r_n \geq t$ e $x_n \to x$ se $n \longrightarrow \infty$.

Reenumerando a sequência $y_1 = x_{n_1}$, $y_2 = x_{n_{1+1}}$, $y_3 = x_{n_{1+2}}$,... e $\tilde{r}_1 = r_{n_1}$, $\tilde{r}_2 = r_{n_{1+1}}$, $\tilde{r}_3 = r_{n_{1+2}}$,... temos que $y_n \in \mathcal{A}(\tilde{r}_n)$, $\tilde{r}_n \geq t$ e $y_n \longrightarrow x$. Assim, $x \in \overline{\bigcup\limits_{r\geq t} \mathcal{A}(r)}$. Como t é arbitrário concluímos que $x \in \bigcap\limits_{t\in\mathbb{R}} \overline{\bigcup\limits_{r\geq t} \mathcal{A}(r)}$, como queríamos.

Portanto, temos que

$$\bigcap_{t\in\mathbb{R}} \overline{\bigcup_{r\geq t} \mathcal{A}(r)} = \bigcup_{r_n\uparrow\infty} \{x \in X : \exists\, x_n \in \mathcal{A}(r_n) \text{ tal que } x_n \longrightarrow x\}.$$

■

Proposição 62. *[9] Seja S um processo de evolução com um atrator pullback $\mathcal{A}$ compacto para frente e um semigrupo T com um atrator global $\mathcal{A}_\infty$. Suponha que S seja assintoticamente autônomo para T, então temos $\mathcal{A}(\infty) \subset \mathcal{A}_\infty$.*

Demonstração. Como, por hipótese, $\mathcal{A}$ é compacto para frente, segue que $\overline{\bigcup_{r\geq t} \mathcal{A}(r)}$ ($t \in \mathbb{R}$) é uma família decrescente de conjuntos compactos. Pelo Teorema dos Compactos Encaixados, sua interseção $\mathcal{A}(\infty)$ é compacta não-vazia.

Seja agora $x \in \mathcal{A}(\infty)$. Então, pela Proposição 61 existem sequências $r_n \uparrow +\infty$ e $x_n \in \mathcal{A}(r_n)$ tais que $x_n \longrightarrow x$ quando $n \longrightarrow \infty$. Pelo Teorema 46, temos que $dist_X(\mathcal{A}(r_n), \mathcal{A}_\infty) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Consequentemente

$$\begin{aligned} d(x, \mathcal{A}_\infty) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, \mathcal{A}_\infty) \\ &\leq d(x, x_n) + dist_X\big(\mathcal{A}(r_n), \mathcal{A}_\infty\big) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

logo $d(x, \mathcal{A}_\infty) = 0$. Como $\mathcal{A}_\infty$ é fechado, $x \in \mathcal{A}_\infty$. Logo, $\mathcal{A}(\infty) \subset \mathcal{A}_\infty$, como queríamos. ■

Para provarmos a igualdade $\mathcal{A}(\infty) = \mathcal{A}_\infty$, precisamos de condições mais fortes. Para isso, segue a proposição abaixo.

Proposição 63. *[9] Sob as mesmas hipóteses da Proposição 62, temos $\mathcal{A}(\infty) = \mathcal{A}_\infty$ se assumirmos as seguintes condições:*

(i) *$\mathcal{A}(\infty)$ é um forward atrator para $S(\cdot, 0)$, ou seja, para cada $B \in \mathfrak{B}$,*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} dist_X\big(S(t,0)B, \mathcal{A}(\infty)\big) = 0;$$

(ii) *$S(\cdot, 0)$ converge uniformemente para T em conjuntos limitados, ou seja, para cada $B \in \mathfrak{B}$,*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \sup_{x \in B} d\big(S(t,0)x, T(t)x\big) = 0.$$

Demonstração. Mostraremos que $\mathcal{A}(\infty)$ é um $B-$atrator global para o semigrupo T. De fato, seja $B \in \mathfrak{B}$ e $t \geq 0$. Então, para cada $x \in B$,

$$\begin{aligned} d\big(T(t)x, \mathcal{A}(\infty)\big) &\leq d\big(T(t)x, S(t,0)x\big) + d\big(S(t,0)x, \mathcal{A}(\infty)\big) \\ &\leq \sup_{x \in B} d\big(T(t)x, S(t,0)x\big) + dist_X\big(S(t,0)B, \mathcal{A}(\infty)\big) \end{aligned}$$

Fazendo $t \longrightarrow +\infty$, por (i) e (ii), temos

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} dist_X\big(T(t)B, \mathcal{A}(\infty)\big) = 0.$$

Como o atrator global $\mathcal{A}_\infty$ é invariante pelo semigrupo T, segue que

$$dist_X\big(\mathcal{A}_\infty, \mathcal{A}(\infty)\big) = dist_X\big(T(t)\mathcal{A}_\infty, \mathcal{A}(\infty)\big) \longrightarrow 0.$$

Logo, $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{O}_\epsilon\big(\mathcal{A}(\infty)\big)$, para todo ϵ, ou seja,

$$\mathcal{A}_\infty \subset \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{O}_\epsilon\big(\mathcal{A}(\infty)\big) = \overline{\mathcal{A}(\infty)} = \mathcal{A}(\infty),$$

pois $\mathcal{A}(\infty)$ é um conjunto fechado.

Portanto, $\mathcal{A}(\infty) = \mathcal{A}_\infty$, como queríamos.

■

Observação 64. *A Proposição 63 é verdadeira se (i) e (ii) são verdadeiros para* $B = \mathcal{A}_\infty$.

O lema a seguir apresenta um caso especial onde o atrator global é um único ponto e, assim, obtemos a semi-continuidade inferior.

Lema 65. *[9] Sob as mesmas hipóteses da Proposição 62, se o atrator global for um único ponto, ou seja,* $\mathcal{A}_\infty = \{x_0\}$, *então* $\mathcal{A}(\infty) = \mathcal{A}_\infty$. *Neste caso, temos que a semi-continuidade inferior é válida, ou seja,*

$$dist_X\big(\mathcal{A}_\infty, \mathcal{A}(t)\big) \longrightarrow 0 \text{ quando } t \longrightarrow +\infty.$$

Demonstração. Como, por hipótese, $\mathcal{A}$ é compacto para frente, segue que $\overline{\bigcup_{r\geq t}\mathcal{A}(r)}$ ($t \in \mathbb{R}$) é uma família decrescente de conjuntos compactos. Pelo Teorema dos Compactos Encaixados, sua interseção $\mathcal{A}(\infty)$ é não-vazia. Seja y um elemento arbitrário em $\mathcal{A}(\infty)$. Pela Proposição 62, $\mathcal{A}(\infty) \subset \mathcal{A}_\infty$ e então $y \in \mathcal{A}_\infty = \{x_0\}$. Portanto, $y = x_0$ e assim $\mathcal{A}(\infty) = \mathcal{A}_\infty$ como queríamos.

Por outro lado, como $\mathcal{A}_\infty = \{x_0\}$, temos

$$dist_X\big(\mathcal{A}_\infty, \mathcal{A}(t)\big) = d\big(x_0, \mathcal{A}(t)\big) \leq dist_X\big(\mathcal{A}(t), x_0\big) = dist_X\big(\mathcal{A}(t), \mathcal{A}_\infty\big).$$

Pelo Teorema 46, temos que $dist_X\big(\mathcal{A}(t), \mathcal{A}_\infty\big) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow +\infty$, logo a semi-continuidade inferior é válida, ou seja, $dist_X\big(\mathcal{A}_\infty, \mathcal{A}(t)\big) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow +\infty$, como queríamos demonstrar.

■

3.5 Construção do conjunto limite inferior do atrator pullback

Nesta seção, apresentamos a definição do conjunto limite inferior e uma proposição onde a semi-continuidade inferior é válida se, e somente se, o atrator global for igual ao conjunto limite inferior.

Definição 66. *[9] Definimos o conjunto limite inferior, $\mathcal{A}_L(\infty)$, por:*

$$\mathcal{A}_L(\infty) = \bigcap_{r_n \uparrow \infty} \{x \in X : \exists\ x_n \in \mathcal{A}(r_n) \text{ tal que } x_n \longrightarrow x\}. \tag{3.37}$$

Proposição 67. *[9] Sob as mesmas hipóteses da Proposição 62, a semi-continuidade inferior é válida, ou seja,*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} dist_X\big(\mathcal{A}_\infty, \mathcal{A}(t)\big) = 0 \tag{3.38}$$

se, e somente se, $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_L(\infty)$. Em ambos os casos, $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}(\infty)$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que (3.38) seja verdadeiro. Então para cada $x \in \mathcal{A}_\infty$ temos que $d\big(x, \mathcal{A}(t)\big) \leq dist_X\big(\mathcal{A}_\infty, \mathcal{A}(t)\big) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow +\infty$. Seja $\{r_n\}$ uma sequência arbitrária tal que $r_n \uparrow +\infty$. Como $\mathcal{A}(r_n)$ é compacto, existe $x_n \in \mathcal{A}(r_n)$ tal que

$$d(x, x_n) = d\big(x, \mathcal{A}(r_n)\big) \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty.$$

Pela definição de $\mathcal{A}_L(\infty)$, sabemos que $x \in \mathcal{A}_L(\infty)$ e assim $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{A}_L(\infty)$.

Por outro lado, de (3.36) e (3.37) temos que $\mathcal{A}_L(\infty) \subset \mathcal{A}(\infty)$. Pela Proposição 62 sabemos que $\mathcal{A}(\infty) \subset \mathcal{A}_\infty$. Em outras palavras, temos

$$\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{A}_L(\infty) \subset \mathcal{A}(\infty) \subset \mathcal{A}_\infty.$$

Disso, $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_L(\infty)$, como queríamos.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_L(\infty)$. Queremos mostrar que (3.38) é verdadeiro.

Suponhamos que (3.38) não seja verdadeiro, logo existe $\delta > 0$ e uma sequência $r_n \uparrow +\infty$ tal que

$$d\big(\mathcal{A}_\infty, \mathcal{A}(r_n)\big) \geq 2\delta, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Como $\mathcal{A}_\infty$ é compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_n \in \mathcal{A}_\infty$ tal que

$$d\big(x_n, \mathcal{A}(r_n)\big) = d\big(\mathcal{A}_\infty, \mathcal{A}(r_n)\big) \geq 2\delta, \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.39}$$

Ainda pelo fato de $\mathcal{A}_\infty$ ser compacto, temos que existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $x_{n_k} \longrightarrow x \in \mathcal{A}_\infty$ quando $k \longrightarrow \infty$.

Sem perda de generalidade, suponha que $d(x_{n_k}, x) < \delta$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então pela Desigualdade (2.2) da Proposição 3 do Capítulo 2 e por (3.39) segue que

$$d\big(x, \mathcal{A}(r_{n_k})\big) \geq d\big(x_{n_k}, \mathcal{A}(r_{n_k})\big) - d(x_{n_k}, x) \geq \delta, \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.40}$$

Como $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_L(\infty)$, sabemos que $x \in \mathcal{A}_L(\infty)$. Como $r_{n_k} \uparrow +\infty$, segue da definição de $\mathcal{A}_L(\infty)$ que existe $y_k \in \mathcal{A}(r_{n_k})$ tal que $y_k \longrightarrow x$ quando $k \longrightarrow \infty$. Consequentemente,

$$d\big(x, \mathcal{A}(r_{n_k})\big) \leq d(x, y_k) \longrightarrow 0, \text{ quando } k \longrightarrow \infty$$

o que contradiz (3.40). Portanto, (3.38) é verdadeiro.

■

Capítulo 4

Aplicação

Neste capítulo apresentamos um exemplo de aplicação para uma equação parabólica com expoente variável.

Considere a equação não-autônoma abaixo:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t) - div\big(D(t,x)|\nabla u(t)|^{p(x)-2}\nabla u(t)\big) + |u(t)|^{p(x)-2}u(t) = B\big(u(t)\big), \tag{4.1}$$

em um domínio limitado Ω.

A equação (4.1) pode ser escrita como uma equação abstrata em $H := L^2(\Omega)$ da seguinte forma:

$$\frac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) = B\big(u(t)\big), t \geq \tau, u(\tau) = \psi_\tau, \tag{4.2}$$

sendo $A(t)u(t) := -div\big(D(t,x)|\nabla u(t)|^{p(x)-2}\nabla u(t)\big) + |u(t)|^{p(x)-2}u(t)$.

Considere agora a equação autônoma:

$$\frac{dv}{dt}(t) + A_\infty v(t) = B\big(v(t)\big), v(0) = \psi_0, \tag{4.3}$$

sendo $A_\infty v(t) := -div\big(D^*|\nabla v(t)|^{p(x)-2}\nabla v(t)\big) + |v(t)|^{p(x)-2}v(t)$.

Consideremos as seguintes hipóteses:

- Hipóteses sobre B: A função $B : H \longrightarrow H$ é globalmente Lipschitz, isto é, existe $L > 0$ tal que

$$\|B(u_1) - B(u_2)\|_H \leq L\|u_1 - u_2\|_H, \ \forall\ u_1, u_2 \in H.$$

- Hipóteses sobre D: $D \in L^\infty(\mathbb{R} \times \Omega)$ de modo que:

(D1) Existe uma constante positiva α tal que $0 < \alpha \leq D(t,x)$ para $(t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$;

(D2) $t \longrightarrow D(t,x)$ é uma função decrescente em $\mathbb{R}$ para cada $x \in \Omega$, ou seja, $D(t,x) \geq D(s,x)$ para cada $x \in \Omega$ e $t \leq s$;

(D3) $D(t+\tau,\cdot) \longrightarrow D^*(\cdot)$ em $L^\infty(\Omega)$ quando $\tau \longrightarrow +\infty$ para todo $t \geq 0$.

Pelo Teorema 2.8 do artigo [11] o problema (4.2) tem uma única solução global u. Dessa forma, podemos definir um processo de evolução por $S(t,\tau)\psi_\tau = u(t,\tau,\psi_\tau)$ sendo que $u(t,\tau,\psi_\tau)$ indica a solução calculada no tempo t com $u(\tau) = \psi_\tau$. Pelo Teorema 3.8 do artigo [11] o processo de evolução associado com o problema (4.2) possui atrator pullback $\mathcal{A}$. Como caso particular, o problema (4.3) tem uma única solução global v. Além disso, este define um semigrupo T que tem atrator global $\mathcal{A}_\infty$. (Veja também [13], [14], [15], [16]).

Temos, pelo Teorema 4.2 do artigo [10], o seguinte lema:

Lema 68. *[10] Para cada $\tau \in \mathbb{R}$ existe uma função decrescente $g_\tau : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ tal que $g_\tau(t) \longrightarrow 0$ quando $\tau \longrightarrow +\infty$ para todo t e*

$$\langle A(t+\tau)u(t+\tau) - A_\infty v(t), u(t+\tau) - v(t)\rangle \geq -g_\tau(t), \forall\ t \in \mathbb{R}^+, \tau \in \mathbb{R}, \tag{4.4}$$

para cada solução u de (4.2) e v de (4.3).

No próximo teorema mostraremos que o processo de evolução S é assintoticamente autônomo.

Teorema 69. *[10] O processo de evolução S é assintoticamente autônomo para T, isto é, $S(\ell+\tau,\tau)\psi_\tau \longrightarrow T(\ell)\psi_0$ em H quando $\tau \longrightarrow +\infty$ para todo $\ell \geq 0$ sempre que $\psi_\tau \longrightarrow \psi_0$ em H quando $\tau \longrightarrow +\infty$.*

Demonstração. Seja $\ell \geq 0$ dado e considere $T > \ell$.

Subtraindo a Equação (4.3) da Equação (4.2) obtemos:

$$\frac{d}{dt}\big(u(t+\tau) - v(t)\big) + A(t+\tau)u(t+\tau) - A_\infty v(t) = B\big(u(t+\tau)\big) - B\big(v(t)\big) \tag{4.5}$$

para quase todo $t \in [0,T]$.

Multiplicando os termos da Equação (4.5) por $u(t+\tau)-v(t)$ e tomando o produto interno, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{d}{dt}\big(u(t+\tau)-v(t)\big), u(t+\tau)-v(t)\right\rangle \\
&\qquad = -\langle A(t+\tau)u(t+\tau) - A_\infty v(t), u(t+\tau)-v(t)\rangle \\
&\qquad + \langle B\big(u(t+\tau)\big) - B\big(v(t)\big), u(t+\tau)-v(t)\rangle.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Afirmação: $\dfrac{d}{dt}\big\|u(t+\tau)-v(t)\big\|^2 = 2\left\langle \dfrac{d}{dt}\big(u(t+\tau)-v(t)\big), u(t+\tau)-v(t)\right\rangle.$
De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big\|u(t+\tau)-v(t)\big\|^2 &= \frac{d}{dt}\Big\langle u(t+\tau)-v(t), u(t+\tau)-v(t)\Big\rangle \\
&= \left\langle \frac{d}{dt}\big(u(t+\tau)-v(t)\big), u(t+\tau)-v(t)\right\rangle \\
&\quad + \left\langle u(t+\tau)-v(t), \frac{d}{dt}\big(u(t+\tau)-v(t)\big)\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{d}{dt}\big(u(t+\tau)-v(t)\big), u(t+\tau)-v(t)\right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{d}{dt}\big(u(t+\tau)-v(t)\big), u(t+\tau)-v(t)\right\rangle \\
&= 2\left\langle \frac{d}{dt}\big(u(t+\tau)-v(t)\big), u(t+\tau)-v(t)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e da hipótese de B ser globalmente Lipschitz temos:

$$\begin{aligned}
\langle B\big(u(t+\tau)\big) - B\big(v(t)\big), u(t+\tau)-v(t)\rangle &\leq \ \|B\big(u(t+\tau)\big) - B\big(v(t)\big)\| \ \|u(t+\tau)-v(t)\| \\
&\leq L\ \|u(t+\tau)-v(t)\|\ \|u(t+\tau)-v(t)\| \\
&\leq L\ \|u(t+\tau)-v(t)\|^2.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Agora, da Desigualdade (4.7) junto com a afirmação acima e o Lema 68, obtemos da Equação (4.6) que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t+\tau)-v(t)\|_H^2 \leq L\ \|u(t+\tau)-v(t)\|_H^2 + g_\tau(t). \tag{4.8}$$

Integrando o primeiro termo da Inequação (4.8) de 0 a t, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\|u(s+\tau)-v(s)\|_H^2 ds &= \frac{1}{2}\ \|u(s+\tau)-v(s)\|_H^2\Big|_0^t \\
&= \frac{1}{2}\ \left[(\|u(t+\tau)-v(t)\|_H^2)-(\|u(\tau)-v(0)\|_H^2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\ \|u(t+\tau)-v(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\ \|\psi_\tau-\psi_0\|_H^2.
\end{aligned}$$

Integrando o segundo termo da Desigualdade (4.8) de 0 a t, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \big(L\ \|u(s+\tau)-v(s)\|_H^2 + g_\tau(t)\big)ds &= \int_0^t L\ \|u(s+\tau)-v(s)\|_H^2 ds + \int_0^t g_\tau(s)ds \\
&\leq L\int_0^t \|u(s+\tau)-v(s)\|_H^2 ds + t g_\tau(0).
\end{aligned}$$

Então,

$$\|u(t+\tau)-v(t)\|_H^2 \leq \|\psi_\tau-\psi_0\|_H^2 + 2tg_\tau(0) + 2L\int_0^t \|u(s+\tau)-v(s)\|_H^2 ds.$$

Pelo Lema 31 (Gronwall-Bellman),

$$\begin{aligned}
\|u(t+\tau)-v(t)\|_H^2 &\leq \big(\|\psi_\tau-\psi_0\|_H^2 + 2tg_\tau(0)\big)e^{2Lt} \\
&\leq \big(\|\psi_\tau-\psi_0\|_H^2 + 2Tg_\tau(0)\big)e^{2LT}
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Em particular,

$$\|u(\ell+\tau)-v(\ell)\|_H^2 \leq \big(\|\psi_\tau-\psi_0\|_H^2 + 2Tg_\tau(0)\big)e^{2Lt}.$$

Como $\psi_\tau \longrightarrow \psi_0$ em H quando $\tau \longrightarrow +\infty$ e $g_\tau(0) \longrightarrow 0$ quando $\tau \longrightarrow +\infty$, segue que

$$\|u(\ell+\tau)-v(\ell)\|_H^2 \longrightarrow 0 \text{ quando } \tau \longrightarrow +\infty.$$

Logo,

$$S(\ell+\tau,\tau)\psi_\tau \longrightarrow T(\ell)\psi_0$$

em H quando $\tau \longrightarrow +\infty$.

■

Temos, pelo Corolário 4.1 do artigo [10], que o atrator pullback $\mathcal{A}$ é compacto para frente. Assim, pelo Teorema 46, temos que

$$\lim_{\tau \longrightarrow +\infty} dist(\mathcal{A}(\tau), \mathcal{A}_\infty) = 0,$$

sendo que $dist$ é a semi-distância no espaço $H = L^2(\Omega)$.

Referências Bibliográficas

[1] DOMINGUES, H. H. *Espaços métricos e introdução à topologia*. 1. ed. São Paulo: Atual, 1982.

[2] LIMA, E. L. *Elementos de topologia geral*. 1. ed. Rio de Janeiro: Atual, 1970.

[3] TAYLOR, A. E. *General theory of functions and integration*. Dover Science, 1985.

[4] de OLIVEIRA, C.R. *Introdução a análise funcional*. 1. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides-Impa, 2012.

[5] RUDIN, W. *Real and complex analysis*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1987.

[6] LIMA, E. L. *Curso de análise volume 1*. 12. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides-Impa, 2009.

[7] SIMSEN, J. *Semicontinuidade superior de atratores para semigrupos multívocos*. Tese (Programa de Pós-Graduação em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, São Carlos, 2007.

[8] LADYZHENSKAYA, O. *Attractors for semigroups and evolution equations*. 1. ed. Cambridge University Press, 1991.

[9] LI, Y.; SHE, L.; WANG, R. *Asymptotically autonomous dynamics for parabolic equations*. J. Math. Anal. Appl. 459 (2018) 1106-1123.

[10] KLOEDEN, P. E.; SIMSEN, J. *Attractors of asymptotically autonomous quasi-linear parabolic equation with spatially variable exponents*. J. Math. Anal. Appl. 425 (2015) 911-918.

[11] KLOEDEN, P. E.; SIMSEN, J. *Pullback attractors for non-autonomous evolution equations with spatially variable exponents*. Commun. Pure Appl. Anal. 13 (2014), 2543-2557.

[12] CUI, H. *Convergences of asymptotically autonomous pullback attractors towards semigroup attractors*. Discrete and Continuous Dynamical Systems - B. doi: 10.3934/dcdsb.2018276.

[13] SIMSEN, J. *A global attractor for a p(x)-Laplacian parabolic problem*. Nonlinear Anal. 73 (2010) 3278-3283.

[14] SIMSEN, J.; SIMSEN, M. S. *PDE and ODE limit problems for p(x)-Laplacian parabolic equations*. J. Math. Anal. Appl. 383 (2011) 71-81.

[15] SIMSEN, J. *A global attractor for a p(x)-Laplacian inclusion*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 351 (2013) 87-90.

[16] SHMAREV, S.; SIMSEN, J.; SIMSEN, M. S.; PRIMO, M. R. T. *Asymptotic behavior for a class of parabolic equations in weighted variable Sobolev spaces*. Asymptotic Analysis 111 (2019) 43-68.