
CAMPO DE LEE-WICK
NA PRESENÇA DE FRONTEIRAS
SEMI-TRANSPARENTES

EVERSON HENRIQUE RODRIGUES
FABRÍCIO AUGUSTO BARONE RANGEL

*Programa de Pós Graduação em Física
Universidade Federal de Itajubá*

2020
ITAJUBÁ

CAMPO DE LEE-WICK
NA PRESENÇA DE FRONTEIRAS
SEMI-TRANSPARENTES

EVERSON HENRIQUE RODRIGUES
ORIENTADOR: FABRÍCIO AUGUSTO BARONE RANGEL

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DE ITAJUBÁ, COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM FÍSICA.

2020
ITAJUBÁ

*“Once I rose above the noise and confusion
Just to get a glimpse beyond the illusion
I was soaring ever higher, but I flew too high
Though my eyes could see I still was a blind man
Though my mind could think I still was a mad man
I hear the voices when I’m dreamin’, I can hear them say*

*Carry on my wayward son
For there’ll be peace when you are done
Lay your weary head to rest
Don’t you cry no more*

Carry on Wayward Son - Kansas

Agradecimentos

Não há progresso sem ciência. A partir dela compreendemos a natureza e somente assim nos tornamos capazes de realizar avanços, sejam eles tecnológicos ou humanos. Vivemos tempos em que as ciências avançam rapidamente. Apesar dos avanços, paradoxalmente, o obscurantismo segue crescendo. Cientistas são atacados, demitidos de seus postos por defenderem o pensamento crítico, a metodologia e a verdade observada. Além disso, constantemente são obrigados a reafirmar o óbvio, a perseverar ante ao descrédito, ao descaso e quase completo abandono por parte daqueles que deveriam ser os principais interessados em alimentar a ciência e a criticidade. Todos esses fatos, tornam o ser cientista um desafio quase diário de força e determinação, o que nos moldam melhores seres humanos. Portanto agradeço a todos que me o fizeram.

Assim, agradeço àqueles que me instigaram, do meu pai, atento à cada pormenor no desenvolvimento de suas atividades profissionais, com seu pensamento investigativo e sua dedicação, ao meu avô, que desde sempre instigou-me com seus feitos engenhosos, com as suas criações complexas e seu pensamento analítico ímpar. Porém, não há cientista sem ser humano. Nesse sentido devo um agradecimento àqueles ajudaram a me formar um ser humano capaz e forte, sempre me apoiando quando necessário, dos primeiros anos de vida à idade adulta. Agradeço à minha mãe pela educação, amor e apoio, à minha avó pelo cuidado e carinho e à minhas irmãs pelo companheirismo e amizade. Graças a vocês cheguei onde estou.

O desenvolvimento das atividades científicas quase sempre demandam esforços, sejam eles mentais, emocionais e por vezes físicos. O cansaço e a apatia podem se tornar monstros grandes demais para se combater sozinho. Assim, agradeço à minha companheira de longa data Bárbara, por me apoiar, me consolar e por vezes me motivar. Essa vitória também é sua.

A capacidade profissional está sem dúvida grandemente relacionada àqueles que nos treinam e nos capacitam. Capacidades essas grandemente me passadas através da orientação melhor impossível do professor Fabricio. Sou grato pela sua ajuda, pela sua paciência, seu tempo e seus conhecimentos a mim dedicados.

Também devo os agradecimentos ao meus amigos e companheiros de morada, vocês sem dúvida me ajudaram com os melhores momentos de descontração. O meu muito obrigado a vocês, Gabriel, Pedro e André.

Por fim, agradeço a todos os amigos que estiveram presentes nesse período da vida. Obrigado por tornarem a jornada ainda mais satisfatória. Essa vitória pertence, em grande parte a todos vocês.

Resumo

Neste trabalho, é feita uma revisão a respeito do campo vetorial do tipo Lee-Wick quando há interação entre uma carga e uma placa plana perfeitamente condutora. Demonstra-se que o propagador de interação obtido não pode ser encontrado a partir de uma composição simples entre o propagador para o campo de Proca e o campo de Maxwell. Obtém-se analiticamente o propagador campo escalar de Lee-Wick e, numericamente, demonstra-se o comportamento da energia e da força de interação. É analisada a interação entre carga e placa plana imperfeitamente condutora na presença de um campo vetorial de Lee-Wick. Tanto para o caso vetorial quanto escalar, a força de interação apresenta pontos extremos para valores finitos dos parâmetros de acoplamento na lagrangiana. As análises de casos extremos para esses parâmetros nos levam a resultados consistentes já previamente obtidos.

Palavras Chave: Análise-Numérica, Campos, Força, Lee-Wick, Propagador.

Abstract

In this study, we do a review about the Lee-Wick vectorial field, where is showed that if there is an interaction between point-like charge and a perfectly conductive plane plate. It is shown that interaction propagator can not be obtained by a simple sum of propagators for Proca and Maxwell fields. We analyze for the scalar field, achieving analytically the propagator and numerically the energy and force. It is analyzed the interaction between charge and plate in Lee-Wick field. For both cases, the interaction force shows extrema points for finite values of the Lagrangian coupling parameters. The analysis of extrema cases shows that these parameters generate consistent results previously obtained.

Keywords: Fields, Force, Numerical-Analysis, Lee-Wick, Propagator.

Conteúdo

1	Introdução	5
1.1	Campos do tipo Lee-Wick	5
1.2	Potenciais e fontes tipo delta (δ)	6
1.3	Campo de Lee-Wick na presença de potenciais e fontes	7
2	Eletrodinâmica de Lee-Wick na presença de plano condutor	8
2.1	O propagador	8
2.2	O propagador na presença de um espelho perfeito	10
2.3	Interação espelho-carga	15
3	Campo de Lee-Wick escalar na presença de fontes e potenciais	18
3.1	O propagador	19
3.2	Energia e força de interação	22
3.3	Análise de casos	24
3.3.1	Análise para a massa de Podolsky	24
3.3.2	Análise para a massa de Klein-Gordon	33
3.3.3	Análise para o fator de transparência	41
4	Eletrodinâmica de Lee-Wick na presença de potenciais	51
4.1	O propagador	51
4.2	Energia e força de interação	54
4.3	Análise de casos	56
4.3.1	Análise para a massa de Podolsky	56
4.3.2	Análise para o fator de transparência	61
5	Conclusões	67

Capítulo 1

Introdução

1.1 Campos do tipo Lee-Wick

Modelos de campos com derivadas de ordem superior têm sido considerados na literatura já faz algum tempo. Possuindo uma vasta gama de aplicações, que vão desde modelos microscópicos na física de partículas até aplicações em cosmologia, muita atenção tem sido dada às formulações vetoriais, espinoriais ou escalares de modelos com derivadas de ordem superior.

A primeira proposição que se tem notícia de teoria de campo com derivada de ordem superior foi feita por Podolsky, com o intuito de generalizar a teoria de Maxwell mantendo a linearidade das equações de campo ^{[1][2]}. Posteriormente, Lee e Wick em 1969, propondo uma métrica negativa para a teoria quântica eletromagnética (QED) que conservasse a matriz S unitária, alteraram o propagador do fóton mantendo os diagramas de Feynman invariantes. Essa lagrangiana possuía derivadas de ordem superior e levava a uma renormalização finita de massa e carga. ^{[3][4]}

Apesar das proposições de Lee e Wick em 1969, a unitariedade dos modelos com derivadas de ordem superior permanecem um problema. Dentre diversas formas de resolver as questões a respeito da unitariedade, uma que recentemente tem sido explorada é utilização de "*fakeons*". "*fakeons*" são falsos graus de liberdade, isso é, graus de liberdade que não estão presentes no espectro físico, mas se propagam nos diagramas de Feynman. Esse tipo de solução mantém a unitariedade do modelo como amplamente discutido por Anselmi (2018)^[5]. Nesse sentido, alguns problemas permanecem, como a impossibilidade de manter o modelo unitário no espaço de Minkowsky, sendo necessário a aplicação de um espaço de Minkowsky com uma rotação de Wick ^[6]. De uma forma geral, a unitariedade permanece sendo uma questão a ser discutida.

As proposições de Podolsky e Lee-Wick, inicialmente distintas, buscavam resolver diferentes problemas. Posteriormente mostrou-se que ambas as proposições eram equivalentes entre si. Atualmente, modelos de campos com essas derivadas de ordem superior na lagrangiana são conhecidos como modelos de Lee-Wick.

Recentemente, os estudos realizados por Lee e Wick foram revisitados por Grinstein, O'Connell e Wise no escopo da teoria de campos. Reutilizando o formalismo, eles desenvolveram uma extensão para o modelo padrão com derivadas de ordem superior na Lagrangiana, que ficou

conhecido como *Lee-Wick Standard Model*. Essa extensão do modelo é livre de divergências quadráticas relacionadas à massa de Higgs, resolve o problema da hierarquia [7]. Além disso, é passível de verificação junto ao *Large Hadron Collider* (LHC) e aplicável em grandes escalas de energia, como neutrinos pesados.[8]

É importante destacar também que há pouco se mostrou que a eletrodinâmica de Lee-Wick leva a uma auto-energia finita para cargas pontuais [9]. Note que para a maioria dos campos conhecidos a energia de auto interação é divergente.

A teoria de Lee-Wick, inicialmente aplicada ao contexto microscópico em QED, tem sido expandida para inúmeras outras aplicações. Destaca-se uma de suas aplicações em cosmologia, na qual se propôs que é possível obter um modelo de universo oscilante sem o problema da singularidade cosmológica, com a escala primordial menor que a de Planck. A interação com o campo escalar de Lee-Wick drena parte da energia do campo de radiação, o que o impede de destruir a contração do Universo, possibilitando a concentração da matéria e posterior expansão com um novo desacoplamento entre matéria e energia [10][11][12].

Diante da importância dos campos tipo Lee-Wick, tem-se realizado uma série de pesquisas a respeito de sua interação com diversos tipos de fontes [13], principalmente as espacialmente concentradas em modelos abelianos ou não-abelianos, além de consequências no efeito Casimir [14].

1.2 Potenciais e fontes tipo delta (δ)

Uma classe de formalismos interessante para o tratamento de teorias de campos na presença de fronteiras materiais se caracteriza pela proposição de modelos onde temos a presença de potenciais externos espacialmente localizados acoplados com campos. Nesse contexto, destacam-se potenciais tipo delta de Dirac.

Potenciais do tipo *delta* vêm ganhando ainda mais destaque com os estudos do efeito Casimir em teoria quântica de campos (QFT) [15] [16] [17]. Como esse efeito consiste em placas ou regiões de potencial espacialmente concentrados sob o efeito de um campo, a função delta é ideal para sua representação.

Dentre os inúmeros trabalhos que utilizaram potencial tipo δ , destaca-se o de Kimball (2005) [18] que, buscando calcular as energias e pressões de Casimir de um campo escalar, mostrou que a aplicação de um potencial de fundo tipo δ possibilita o cancelamento das divergências e o seu cálculo exato.

Além da aplicação no efeito Casimir convencional, diversas outras aplicações para esse tipo de potencial já foram exploradas. Fosco e Losada (2008) [19] [20] calcularam o efeito Casimir para campos fermiônicos introduzindo um potencial delta em interação com as placas planas e paralelas. Barone *et al.* (2008) [21], utilizando a delta, investigaram as flutuações enérgicas do vácuo para campos quânticos em interação com potenciais concentrados branas.

Por fim, particularmente importante para esse trabalho são os estudos desenvolvidos por

Camilo *et al.* (2013) ^[22], que analisaram campos em interação com cargas e potenciais espacialmente concentrados. Dois casos foram analisados, o primeiro deles consistia em um hiperplano potencial e uma fonte pontual. No segundo, tanto a fonte quanto o potencial eram pontuais. Em ambos os casos foram investigadas as consequências dessa interação, bem como calculadas as energias de interação entre fronteiras materiais ou fronteiras materiais e fontes de campo. Em todos os casos estudados, foram simuladas a presença de fronteiras semi-transparentes.

1.3 Campo de Lee-Wick na presença de potenciais e fontes

O campo de Lee-Wick possui uma série de aplicações, tendo singular importância nas áreas de teoria de campos, física de partículas e cosmologia. Da mesma forma, potenciais tipo delta têm sido recorrentemente utilizados. Diversas pesquisas foram desenvolvidas tratando do campo de Lee-Wick e dos potenciais tipo delta separadamente, mas até o momento não são encontrados na bibliografia estudos que tragam campos de Lee-Wick em interação com uma região de potencial espacialmente concentrada. Assim, o presente trabalho se desenvolve em torno da junção desses dois importantes temas, pretendendo obter o comportamento da energia, com novos e únicos resultados. Também se pretende verificar a consistência das operações matemáticas desenvolvidas neste trabalho através de uma análise numérico-computacional.

Esse estudo é importante, pois a utilização de potenciais espacialmente localizados pode simular de forma mais realística a presença de fronteiras materiais em comparação com a simples imposição de condições de contorno sob os campos.

No capítulo 2 é feita uma revisão de estudos sobre o campo de Lee-Wick e suas aplicações. Nesta parte, o intuito é apresentar ao leitor o que é o campo de Lee-Wick e o procedimento matemático envolvido.

No capítulo 3 é desenvolvido o estudo a respeito do campo de Lee-Wick escalar em interação simultânea com cargas e com os potenciais espacialmente localizados.

No quarto capítulo é feito procedimento análogo ao descrito no capítulo 3, porém para o campo de Lee-Wick eletromagnético. Em todos os capítulos são calculados os propagadores. Os resultados físicos são obtidos a partir destes propagadores. Discutimos também as dificuldades analíticas encontradas. Fazemos uma análise numérica com gráficos.

O capítulo 5 é dedicado às conclusões finais e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Eletrodinâmica de Lee-Wick na presença de plano condutor

Interações intermediadas por campos do tipo Lee-Wick podem ser discutidas em diferentes contextos, como o efeito Casimir e interações entre distribuições de cargas e correntes, por exemplo. Podemos também pensar na interação de fronteiras materiais e cargas.

Em todos esses casos, o formalismo funcional se mostra o mais direto para o tratamento dos campos com derivadas de ordens superiores. A partir desse formalismo, é possível, uma vez encontrado o propagador, obter a energia de interação do sistema. Um trabalho deste tipo foi realizado por Barone e Nogueira(2015) ^[23].

A metodologia aplicada neste trabalho, bem como os resultados obtidos, são de grande importância para o tratamento de campos vetoriais com derivadas de ordem superior. Devido a essa relevância, esse capítulo foi dedicado a realizar uma recapitulação desse artigo. amsthm

Vamos utilizar a métrica de Minkowski denotada por $(+, -, -, -)$, com uma dimensão temporal e três espaciais. O tensor intensidade de campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ é definido como $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, sendo \mathbf{A}^μ o campo de calibre.

2.1 O propagador

A Lagrangiana da teoria de Lee-Wick eletromagnética é

$$\mathcal{L}_{LW} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4m^2}F_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha F^{\mu\nu} - \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\xi} - \mathcal{J}_\mu A^\mu, \quad (2.1)$$

com m sendo definida como a massa de Podolsky e \mathcal{J}_μ a densidade de corrente devido à fonte externa.

A lagrangiana 2.1 pode ser reduzida a uma lagrangiana equivalente em termos dos quadretes potenciais eletromagnéticos. Dessa forma, escrevendo cada um dos componentes da expressão em termos de A_μ e A_ν tem-se para o segundo termo

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha F^{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \partial_\alpha\partial^\alpha (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= 2[(\partial_\mu A_\nu)\partial_\alpha\partial^\alpha(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu)\partial_\alpha\partial^\alpha(\partial^\nu A^\mu)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

que, após inserido η^μ_ν com algumas manipulações de índices, é levado a

$$F_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha F^{\mu\nu} = 2A_\mu[-\eta^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha(\partial_\gamma\partial^\gamma) + \partial_\gamma\partial^\gamma(\partial^\mu\partial^\nu)]A_\nu. \quad (2.3)$$

Portanto

$$-\frac{1}{4m^2}F_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha F^{\mu\nu} = \frac{1}{2m^2}A_\mu[\eta^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha(\partial_\gamma\partial^\gamma) - \partial_\gamma\partial^\gamma(\partial^\mu\partial^\nu)]A_\nu. \quad (2.4)$$

O terceiro termo da lagrangiana pode ser semelhantemente reescrito, realizando uma integração por partes e posteriormente inserindo $\eta^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu A^\mu)^2 &= \partial_\mu A^\mu \partial^\nu A^\nu \\ &= -A^\mu \partial_\mu \partial^\nu A^\nu \\ &= -A_\mu \partial_\mu \partial^\mu \eta^{\mu\nu} A_\nu \end{aligned} \quad (2.5)$$

A soma de cada um dos termos, que reescrito tomando o calibre de Feynman, isto é, $\xi = 1$

$$\mathcal{L}_{LW} = \frac{1}{2}A_\mu \left[\eta^{\mu\nu} \left(1 + \frac{\partial_\gamma\partial^\gamma}{m^2} \right) \partial_\alpha\partial^\alpha - \frac{\partial_\gamma\partial^\gamma}{m^2} \partial^\mu\partial^\nu \right] A_\nu. \quad (2.6)$$

A Lagrangiana (2.6) dá origem ao operador diferencial $\Theta(x)$ ^{[23], [22] [24]}, tal que sua atuação na variável x do propagador $G_{\mu\nu}(x, y)$ nos fornece, por definição, a função delta de Dirac quadrimensional. Assim

$$\Theta^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \left[\eta^{\mu\nu} \left(1 + \frac{\partial_\gamma\partial^\gamma}{m^2} \right) \partial_\alpha\partial^\alpha - \frac{\partial_\gamma\partial^\gamma}{m^2} \partial^\mu\partial^\nu \right]. \quad (2.7)$$

onde

$$\Theta^{\mu\nu}(x)G_{\nu\beta}(x, y) = \eta^\mu_\beta \delta^4(x, y). \quad (2.8)$$

Para resolver essa equação diferencial, o procedimento consiste em definir um $\tilde{G}_{\nu\beta}(p)$ que é escrito em termos da transformada de Fourier

$$G_{\nu\beta}(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{G}_{\nu\beta}(p) e^{-ip(x-y)}. \quad (2.9)$$

Aplicando o operador definido por (2.7) na equação (2.9) como mostra a (2.8)

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Theta^{\mu\nu} \tilde{G}_{\nu\beta}(p) e^{-ip(x-y)} = \eta^\mu_\beta \delta^4(x, y), \quad (2.10)$$

escrevendo a delta de Dirac em termos de sua transformada de Fourier e então igualando os integrandos em ambos os lados,

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} \tilde{G}_{\nu\beta}(p) e^{-ip(x-y)} &= \eta^\mu_\beta e^{-ip(x-y)} \\ \left[-p^2\eta^{\mu\nu} + \frac{p^4}{m^2}\eta^{\mu\nu} - \frac{p^2}{m^2}p^\mu p^\nu \right] \tilde{G}_{\nu\beta}(p) e^{-ip(x-y)} &= \eta^\mu_\beta e^{-ip(x-y)} \\ \left[-p^2\eta^{\mu\nu} + \frac{p^4}{m^2}\eta^{\mu\nu} - \frac{p^2}{m^2}p^\mu p^\nu \right] \tilde{G}_{\nu\beta}(p) &= \eta^\mu_\beta \end{aligned} \quad (2.11)$$

Agora a tarefa reside em resolver a equação algébrica de modo a obter $\tilde{G}_{\nu\beta}(p)$. Para isso, escolheu-se como possível solução

$$\tilde{G}_{\nu\beta}(p) = F(p)\eta_{\nu\beta} + E(p)p_\nu p_\beta \quad (2.12)$$

onde $E(p)$ e $F(p)$ são fatores multiplicativos, funções de p tais que decompõe a $\tilde{G}_{\nu\beta}(p)$. Essas duas funções devem ser encontradas, para isso, substitui-se a equação (2.12) em (2.11)

$$\begin{aligned} \left[-p^2\eta^{\mu\nu} + \frac{p^4}{m^2}\eta^{\mu\nu} - \frac{p^2}{m^2}p^\mu p^\nu \right] [F(p)\eta_{\nu\beta} + E(p)p_\nu p_\beta] &= \eta^\mu{}_\beta \\ -\frac{p^2}{m^2}p^\mu p_\nu F(p) + \left[\frac{p^4}{m^2} - p^2 \right] F(p)\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\beta} - p^2 E(p)\eta^{\mu\nu}p_\nu p_\beta &= \eta^\mu{}_\beta \end{aligned} \quad (2.13)$$

de onde obtivemos imediatamente

$$F(p) = \left[\frac{p^4}{m^2} - p^2 \right]^{-1}, \quad (2.14)$$

sendo assim, o fator $E(p)$ pôde ser encontrado

$$E(p) = -\frac{1}{m^2} \left[\frac{p^4}{m^2} - p^2 \right]^{-1}. \quad (2.15)$$

Com os fatores multiplicativos obtidos, é possível reescrever a equação (2.12)

$$\tilde{G}_{\nu\beta}(p) = \left[\frac{p^4}{m^2} - p^2 \right]^{-1} \eta_{\nu\beta} - \frac{1}{m^2} \left[\frac{p^4}{m^2} - p^2 \right]^{-1} p_\nu p_\beta \quad (2.16)$$

que ao ser integrada nos fornece a função de Green

$$G_{\nu\beta}(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{p^4}{m^2} - p^2 \right]^{-1} \eta_{\nu\beta} e^{-ip(x-y)} - \frac{1}{m^2} \left[\frac{p^4}{m^2} - p^2 \right]^{-1} p_\nu p_\beta e^{-ip(x-y)} \quad (2.17)$$

simplificando e fazendo uma mudança de índices obtemos o propagador livre da teoria (isto é, sem a presença de potenciais externos)

$$G_{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{1}{p^2} \right] \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right] e^{-ip(x-y)}. \quad (2.18)$$

Esse propagador é apresentado por Barone e Nogueira (2015) ^[23] de modo direto, sendo o procedimento para sua obtenção demonstrado acima.

2.2 O propagador na presença de um espelho perfeito

Nessa seção consideramos o campo de Lee-Wick na presença de um espelho perfeito, ou de modo equivalente, de um placa perfeitamente condutora.

Inicialmente, precisamos entender o que viria a ser uma placa desse tipo na eletrodinâmica de Lee-Wick. Para isso, consideramos os efeitos desse tipo de placa que decorrem no eletromagnetismo de Maxwell.

Na teoria eletromagnética de Maxwell, uma placa perfeitamente condutora seria uma superfície sob a qual a força de Lorentz se anularia. Desse modo, essa placa impõe condições sobre o campo eletromagnético. Essa condição equivale a impor que a componente do campo magnético normal à placa seja nula sob a placa, e a componente do campo elétrico paralela a placa seja nula sob essa. Expressando em termos da notação de vetores usualmente adotada, isso é equivalente a

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot \mathbf{B}_\perp &= 0 \\ \hat{n} \times \mathbf{E}_\parallel &= 0\end{aligned}\tag{2.19}$$

Considerando uma placa em um sistema de coordenadas tal que o quadri vetor perpendicular a ele seja dado por $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$ e sua posição seja $x^\mu = (0, 0, 0, a)$, em uma notação vetorial, teremos a condição de contorno $F^{*3\nu}|_{x^3=a} = 0$, ou seja

$$\begin{aligned}n^\mu F_{\mu\nu}^* &= \eta_3^\mu F_{\mu\nu}^* \rightarrow n^\mu F_{\mu\nu}^* = F_{3\nu}^* \\ F_{3\nu}^* &= E^1 - E^2 + B^3\end{aligned}\tag{2.20}$$

o que imediatamente nos leva a

$$n^\mu F_{\mu\nu}^* = 0\tag{2.21}$$

onde $F^{*\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ é o tensor dual ao tensor eletromagnético.

Para o campo de Lee-Wick, as mesmas considerações podem ser feitas a respeito das condições de contorno descritos anteriormente.^[23], pois o acoplamento do campo de Lee-Wick com a matéria é o mesmo acoplamento do campo de Maxwell com a matéria. Sendo assim, vamos ter a mesma condição de contorno para planos condutores par as duas teorias.

Vamos agora calcular o funcional gerador associado ao campo. A forma geral do funcional gerador é

$$Z_C[\mathcal{J}_\mu] = \int \mathcal{D}A_C e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_{LW} - \mathcal{J}^\mu A_\mu)}.\tag{2.22}$$

O subíndice C no diferencial indica que soma ocorre somente sobre as configurações que satisfazem a condição (2.21). Isso pode ser reescrito em termos de um funcional que se anula para todas as funções que não satisfazem (2.21), condição semelhante àquela imposta pela função delta de Dirac. Uma integração na função delta de Dirac resulta em zero para as configurações de campo que não estão de acordo com a condição de contorno estabelecida. Esse funcional é representado por $\delta[F_{3\nu}^*(x)]$, e possui uma representação de Fourier,

$$\delta[F_{3\nu}^*(x)|_{x^3=0}] = \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \delta(x^3 - a) B_\nu(x_\parallel) F_{3\nu}^*(x) \right].\tag{2.23}$$

onde $B_\nu(x_\parallel)$ é um campo auxiliar de natureza vetorial, que depende das coordenadas paralelas ao plano e possui simetria de calibre tal que $B_\nu(x_\parallel) \rightarrow B_\nu(x_\parallel) + \partial_\nu \lambda^k(x_\parallel)$.

A partir desta delta, o funcional gerador na presença de uma placa é

$$Z_C[\mathcal{J}_\mu] = \int \mathcal{D}A \delta[F_{3\nu}^*(x)|_{x^3=0}] e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_{LW} - \mathcal{J}^\mu A_\mu)}. \quad (2.24)$$

Utilizando o procedimento de Fadeev-Popov para eliminar a divergência imposta pela invariância de calibre de B em (2.24), pode-se mostrar que a expressão (2.23) é dada por

$$\begin{aligned} \delta[F_{3\nu}^*(x)|_{x^3=0}] = N \int \mathcal{D}B \exp \left[-i \int d^4x \delta(x^3 - a) A_\beta \epsilon_3^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha B_\nu(x) \right] \times \\ \times \exp \left[\frac{i}{2\gamma} \int d^4x d^4y \delta(x^3 - a) B_\mu(x_{||}) \frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial x_{||\mu} \partial y_{||\nu}} \delta(y^3 - a) B_\nu(x_{||}) \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Onde $Q(x, y)$ é uma função arbitrária.

Com as equações (2.24) e (2.25), temos que

$$\begin{aligned} Z_C[\mathcal{J}_\mu] = \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_{LW} - \mathcal{J}^\mu A_\mu) \right] \times \\ \times \exp \left[-i \int d^4x \delta(x^3 - a) A_\beta \epsilon_3^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha B_\nu(x) \right] \times \\ \times \exp \left[\frac{i}{2\gamma} \int d^4x d^4y \delta(x^3 - a) B_\mu(x_{||}) \frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial x_{||\mu} \partial y_{||\nu}} \delta(y^3 - a) B_\nu(x_{||}) \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Os argumento das exponenciais presentes em (2.26) estão escritos em termos dos campos A_μ e B_μ . Na segunda exponencial os campos se encontram acoplados. Desacoplar esses campos torna possível separar o funcional gerador em uma parte o campo Lee-Wick sem a presença da placa e uma parte que envolve a interação com a placa.

Para separar (2.26), inicialmente toma-se uma translação no campo A tal que

$$A^\beta \rightarrow A^\beta + \int d^4y \delta(x^3 - a) D^\beta_\alpha \epsilon_3^{\nu\gamma\alpha} \partial_\gamma B_\nu(x) \quad (2.27)$$

assim, afim de realizar essa translação, as exponenciais serão consideradas separadamente para serem posteriormente multiplicadas. Considerando a primeira e fazendo a substituição para o A transladado,

$$\begin{aligned} \int d^4x (\mathcal{L}_{LW} - \mathcal{J}^\mu A_\mu) \rightarrow \\ - \int d^4x \mathcal{J}^\mu A_\mu - \int d^4x \left(\int d^4y \delta(x^3 - a) \mathcal{J}^\mu D_{\mu\alpha}(x, y) \epsilon_3^{\nu\gamma\alpha} \partial_\gamma B_\nu(x) \right) + \int d^4x A_\mu \Theta^{\mu\nu}(x) A_\nu \\ + \int d^4x \left(\int d^4y \delta(x^3 - a) D_{\mu\alpha}(x, y) \epsilon_3^{\zeta\gamma\alpha} \partial_\gamma B_\zeta(x) \Theta^{\mu\nu}(x) \int d^4y \delta(x^3 - a) D_{\nu\lambda}(x, y) \epsilon_3^{\pi\rho\lambda} \partial_\rho B_\pi(x) \right) \\ + \int d^4x \left(A_\mu \Theta^{\mu\nu}(x) \int d^4y \delta(x^3 - a) D_{\nu\lambda}(x, y) \epsilon_3^{\pi\rho\lambda} \partial_\rho B_\pi(x) \right) \\ + \int d^4x \left(\int d^4y \delta(x^3 - a) D_{\mu\alpha}(x, y) \epsilon_3^{\zeta\gamma\alpha} \partial_\gamma B_\zeta(x) \Theta^{\mu\nu}(x) A_\nu \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

e o argumento da segunda exponencial se torna

$$\begin{aligned}
 & - \int d^4x \delta(x^3 - a) A_\beta \epsilon_3^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha B_\nu(x) \rightarrow - \int d^4x \left(\delta(x^3 - a) A_\beta \epsilon_3^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha B_\nu(x) \right) \\
 & - \int d^4x \left(\int d^4y \delta(x^3 - a) D_{\alpha\beta}(x, y) \epsilon_3^{\alpha\nu\gamma} \partial_\gamma B_\nu(x) \delta(x^3 - a) \epsilon_3^{\beta\pi\rho} \partial_\rho B_\pi(x) \right), \tag{2.29}
 \end{aligned}$$

com a terceira exponencial permanecendo inalterada uma vez que não há dependência no campo A .

É possível identificar o termo associado ao campo padrão de Lee-Wick na equação (2.28). Considerando essa informação

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x (\mathcal{L}_{LW} - \mathcal{J}^\mu A_\mu) \rightarrow \\
 & \int d^4x (\mathcal{L}_{LW} - \mathcal{J}^\mu A_\mu) - \int d^4x \left(\int d^4y \delta(x^3 - a) \mathcal{J}^\mu D_{\mu\alpha}(x, y) \epsilon_3^{\nu\gamma\alpha} \partial_\gamma B_\nu(x) \right) \\
 & + \int d^4x \left(\int d^4y \delta(x^3 - a) D_{\mu\alpha}(x, y) \epsilon_3^{\zeta\gamma\alpha} \partial_\gamma B_\zeta(x) \Theta^{\mu\nu}(x) \int d^4y \delta(x^3 - a) D_{\nu\lambda}(x, y) \epsilon_3^{\pi\rho\lambda} \partial_\rho B_\pi(x) \right) \\
 & + \int d^4x \left(A_\mu \Theta^{\mu\nu}(x) \int d^4y \delta(x^3 - a) D_{\nu\lambda}(x, y) \epsilon_3^{\pi\rho\lambda} \partial_\rho B_\pi(x) \right) \\
 & + \int d^4x \left(\int d^4y \delta(x^3 - a) D_{\mu\alpha}(x, y) \epsilon_3^{\zeta\gamma\alpha} \partial_\gamma B_\zeta(x) \Theta^{\mu\nu}(x) A_\nu \right), \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

Como as exponenciais estão sendo multiplicadas, os seus argumentos se somam. Realizando esse procedimento, o segundo termo da equação (2.29) se anula com o termo presente na quarta e quinta linha de (2.30), após se aplicar o operador Θ e realizar a integração em y .

Neste ponto, as exponenciais podem ser separadas entre uma parte dependente somente dos campos A e uma parte dependente somente dos campos B , pois os termos que apresentam ambos os campos se anulam. As exponenciais em função de A podem ser condensadas no funcional padrão do campo de Lee-Wick, definido como $Z_{LW}(\mathcal{J})$. Desse modo, as exponenciais que possuem o campo auxiliar serão concentradas em um fator denominados \bar{Z} , desse modo:

$$\begin{aligned}
 Z_C[\mathcal{J}] &= N \int \mathcal{D}A \exp \left[\int d^4x \mathcal{L}_{LW} - \mathcal{J}^\mu A_\mu \right] \times \\
 & \times \int \mathcal{D}B \exp \left[\int d^4x \left(\int d^4y \delta(x^3 - a) \mathcal{J}^\mu D_{\mu\alpha}(x, y) \epsilon_3^{\nu\gamma\alpha} \partial_\gamma B_\nu(x) \right) \right. \\
 & + \int d^4x \left(\int d^4y \delta(x^3 - a) D_{\mu\alpha}(x, y) \epsilon_3^{\zeta\gamma\alpha} \partial_\gamma B_\zeta(x) \Theta^{\mu\nu}(x) \int d^4y \delta(x^3 - a) D_{\nu\lambda}(x, y) \epsilon_3^{\pi\rho\lambda} \partial_\rho B_\pi(x) \right) \\
 & \left. - \int d^4x \left(\int d^4y \delta(x^3 - a) D_{\alpha\beta}(x, y) \epsilon_3^{\alpha\nu\gamma} \partial_\gamma B_\nu(x) \delta(x^3 - a) \epsilon_3^{\beta\pi\rho} \partial_\rho B_\pi(x) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{i}{2\gamma} \int d^4x d^4y \delta(x^3 - a) B_\mu(x_{||}) \frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial x_{||\mu} \partial y_{||\nu}} \delta(y^3 - a) B_\nu(x_{||}) \right] \tag{2.31}
 \end{aligned}$$

assim

$$Z_C[\mathcal{J}] = NZ_{LW}[\mathcal{J}]\bar{Z}[\mathcal{J}] \quad (2.32)$$

O funcional $\bar{Z}[\mathcal{J}]$ pode ser reduzido ao realizar integrações por parte nos termos que o compõe. Após somar os termos resultantes, o funcional $\bar{Z}[\mathcal{J}]$ se torna

$$\begin{aligned} \bar{Z}[\mathcal{J}] = & \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \left(\int d^4y \epsilon_3^{\nu\gamma\alpha} \delta(x^3 - a) \mathcal{J}^\mu \partial_\gamma D_{\mu\alpha}(x, y) \right) B_\nu(x_{||}) \right] \\ & + \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \int d^4y \delta(x^3 - a) \delta(y^3 - a) B_\nu(x_{||}) B_\pi(y_{||}) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{1}{2} \epsilon_3^{\pi\rho\lambda} \epsilon_3^{\nu\gamma\alpha} \partial_\rho \partial_\gamma D_{\nu\lambda}(x, y) + \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial x_{||\nu} \partial y_{||\pi}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

A expressão apresentada em (2.33) surge devido à presença da placa. Escolhendo a função $Q(x, y)$ como

$$Q(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{1}{p^2} \right) e^{-ip(x-y)}. \quad (2.34)$$

e levando na (2.33), temos

$$\begin{aligned} \bar{Z}[\mathcal{J}] = & \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \left(\int d^4y \epsilon_3^{\nu\gamma\alpha} \delta(x^3 - a) \mathcal{J}^\mu \partial_\gamma D_{\mu\alpha}(x, y) \right) B_\nu(x_{||}) \right] \\ & + \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \int d^4y \delta(x^3 - a) \delta(y^3 - a) B_\nu(x_{||}) B_\pi(y_{||}) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{1}{2} \epsilon_3^{\pi\rho\lambda} \epsilon_3^{\nu\gamma\alpha} \partial_\rho \partial_\gamma D_{\nu\lambda}(x, y) + \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x_{||\nu} \partial y_{||\pi}} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{1}{p^2} \right) e^{-ip(x-y)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Na equação (2.35) é possível realizar uma integração ao longo dos momentos perpendiculares o plano, isto é, em p^3 . Essa integração leva a

$$\begin{aligned} \int \frac{dp^3}{(2\pi)} \left(\frac{1}{p^2 - m^2} \right) e^{-ip^3(x^3 - y^3)} &= -\frac{i}{(p_{||}^2 - m^2)^{1/2}} e^{i(p_{||}^2 - m^2)^{1/2}|x^3 - y^3|} \\ \int \frac{dp^3}{(2\pi)} \left(\frac{1}{p^2} \right) e^{-ip^3(x^3 - y^3)} &= -\frac{i}{(p_{||}^2)^{1/2}} e^{i(p_{||}^2)^{1/2}|x^3 - y^3|} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Inserindo (2.36) na (2.35), definindo as quantidades $\Gamma = (p_{||}^2 - m^2)^{1/2}$ e $L = (p_{||}^2)^{1/2}$ e efetuando algumas manipulações, encontramos

$$\bar{Z}[\mathcal{J}] = \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y \mathcal{J}^\mu(x) \bar{D}_{\mu\nu}(x, y) \mathcal{J}^\nu(y) \right), \quad (2.37)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \bar{D}^{\mu\nu}(x, y) &= \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{(-i)}{2} \frac{L\Gamma}{L-\Gamma} \left(\eta_{\parallel}^{\mu\nu} - \frac{p_{\parallel}^{\mu} p_{\parallel}^{\nu}}{p_{\parallel}^2} \right) \times \\ &\times \frac{1}{(L\Gamma)^2} \left(\Gamma e^{L(x^3-a)} - L e^{\Gamma(x^3-a)} \right) \left(\Gamma e^{L(y^3-a)} - L e^{\Gamma(y^3-a)} \right) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Usando o fato de que, para a teoria livre (sem a presença da placa), temos o funcional gerador

$$Z_{LW}[\mathcal{J}] = Z[0] \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4 x \int d^4 y \mathcal{J}^{\mu}(x) D_{\mu\nu}(x, y) \mathcal{J}^{\nu}(y) \right) \quad (2.39)$$

e usando as equações (2.32) e (2.37), podemos escrever

$$Z_C[\mathcal{J}] = Z[0] \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4 x \int d^4 y \mathcal{J}^{\mu}(x) [D_{\mu\nu}(x, y) + \bar{D}_{\mu\nu}(x, y)] \mathcal{J}^{\nu}(y) \right) \quad (2.40)$$

Podemos então identificar o propagador da teoria na presença da placa como

$$D_C(x, y) = D(x, y) + \bar{D}(x, y). \quad (2.41)$$

Neste ponto, é importante reconsiderar algumas análises realizadas por Barone e Nogueira a respeito deste propagador. Para o campo livre, o propagador pode ser obtido a partir da subtração do de Maxwell pelo de Proca, o que leva, na maioria dos casos, à resultados triviais. Um exemplo disso é a interação entre duas cargas pontuais estacionárias. Nessa caso, a interação entre essas é dada pela interação coulombiana subtraída pela interação de Yukawa ^[14]. Quando temos a presença de um a placa condutora, essa trivialidade não é mais válida, como será discutido a seguir.

2.3 Interação espelho-carga

Como já discutido anteriormente, a teoria de Lee-Wick livre (sem a presença da placa) tem seu propagador dado pela soma do propagador de Maxwell subtraído pelo propagador de Proca. Isso faz com que diversos efeitos físicos fiquem triviais nesse cenário. no entanto, quando temos a presença da placa, isso não é mais válido, e os efeitos físicos nesse caso não são tão simples de serem obtidos. A energia de interação entre uma carga estacionária e a placa é um exemplo disso.

Vamos tomar uma carga pontual estacionária, localizada na posição \mathbf{b} . A correspondente quadricorrente é dada por

$$\mathcal{J}^{\mu}(x, y) = q\eta^{\mu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{b}). \quad (2.42)$$

Pode-se mostrar que a energia do sistema na presença de placas é dada por ^{[22][14]}

$$E = \frac{1}{2T} \int dx^4 dy^4 \mathcal{J}_{\mu}(x) \bar{D}^{\mu\nu}(x, y) \mathcal{J}_{\nu}(y). \quad (2.43)$$

Levando em conta a equação (2.41), podemos ver que a contribuição dada pelo propagador livre $\bar{D}^{\mu\nu}(x, y)$ nada mais é do que a auto-energia da carga pontual. Esse fator está presente mesmo na ausência da placa e não contribui para a interação espelho-carga. Dessa forma, vamos desconsiderá-lo de agora em diante. Com isso, ao substituirmos (2.42) na energia (2.43) temos

$$E = -\frac{q^2}{4} \int \frac{d^2 \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{\sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2 + m^2} \sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2}}{\sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2 + m^2} - \sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2}} \left(\frac{e^{\sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2}}}{\sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2}} - \frac{e^{-\sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2 + m^2}}}{\sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2 + m^2}} \right)^2. \quad (2.44)$$

Utilizando coordenadas polares em (2.44), integrando na parte angular e usando a substituição $p = |\mathbf{p}|/m$, podemos escrever

$$E = -\frac{mq^2}{8\pi} \int dp p^2 [(p^2 + 1) + p(p^2 + 1)^{1/2}] \left[\frac{e^{-pmR}}{p} - \frac{e^{-\sqrt{p^2+1}mR}}{\sqrt{(p^2 + 1)}} \right]^2 \quad (2.45)$$

onde a força sobre a carga pode ser imediatamente obtida por uma derivação da energia com respeito à posição da carga, mantendo-se a placa fixa,

$$F = -\frac{m^2 q^2}{4\pi} \int dp p^2 (p^2 + p\sqrt{p^2 + 1} + 1) (e^{-m\sqrt{p^2+1}R} - e^{-mpR}) \left(\frac{e^{-mpR}}{p} - \frac{e^{-m\sqrt{p^2+1}R}}{\sqrt{p^2 + 1}} \right). \quad (2.46)$$

A expressão para a força foi integrada numericamente, levando ao gráfico representado em 2.1. Esse gráfico claramente demonstra que, em um certo intervalo próximo à origem, a força apresenta valores positivos, indicando um caráter repulsivo na interação. Após esse intervalo, a força passa a ser de natureza atrativa. Isso indica que o método das imagens não é mais válido na eletrodinâmica de Lee-Wick.

Como foi demonstrado, a eletrodinâmica de Lee-Wick, quando sujeito a determinadas condições de contorno apresentam um comportamento ímpar. O propagador proveniente da interação entre uma fonte pontual e uma placa condutora perfeita, não pode ser trivialmente obtido a partir de uma simples composição entre o campo de Proca e o de Maxwell. Nessa montagem, o método das imagens tradicional sequer é válido, com a apresentação de força repulsiva na interação placa-carga. Esses fatos, reforçam a necessidade de se estudar esse campo quando sujeitos a diferentes condições.

Trabalhos recentes ^{[22][25][13]} tem tratado sob diversas condições de contorno para diferentes campos, tendo já algumas considerações sido feitas a respeito do campo de Lee-Wick, como o trabalho discutido neste capítulo. Porém, ainda não foi considerado na literatura o caso de um condutor não perfeito na eletrodinâmica de Lee-Wick. Esse será o tema de investigação tratado nos demais capítulos.

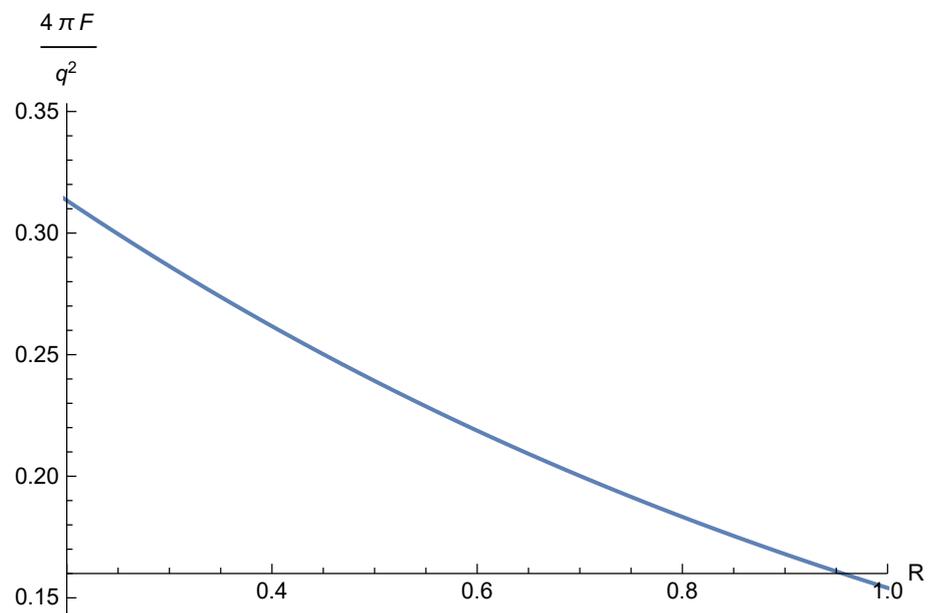


Figura 2.1: Plotagem da força em função da distância da carga para a placa. Foi considerada uma massa m unitária

Capítulo 3

Campo de Lee-Wick escalar na presença de fontes e potenciais

Como discutido no capítulo anterior, campos do tipo Lee-Wick em interação com fontes pontuais foram recentemente discutidas por Barone *et al.* (2013) ^[13]. Os resultados encontrados mostram que o comportamento energético é diferente do potencial tipo Yukawa, que seria encontrado caso se considerasse o campo sem as derivadas de ordem superior.^[13]

Também vimos que ao considerarmos o campo de Lee-Wick na presença de um espelho perfeito e uma carga estacionária pontual, não obtemos uma interação que corresponda ao método das imagens.

Nesse contexto, surge uma pergunta natural; qual seria a interação entre um espelho semi-transparente e uma carga pontual em teorias com derivadas de ordens superiores? Esse tipo de espelho pode ser simulado pela presença de potenciais externos espacialmente localizados, como discutido por Camilo *et al.*^[22] (2013). Além disso, pode ser interessante questionar se o método utilizado permaneceria aplicável a ponto de fornecer os resultados almejados em teorias com derivadas de ordens superiores.

Como abordado na referência ^[17] ^[18], a presença de fronteiras semi-transparentes pode originar fenômenos físicos interessantes, e podem modelar situações mais realísticas. Na referência *et al.* (2013) ^[13] a energia de interação de uma superfície desse tipo e uma carga pontual foi considerada. Nessa seção generalizamos esses resultados para o caso onde temos a presença de derivadas de ordem superior para o campo escalar. Os resultados a serem apresentados estão entre os principais do trabalho e, até onde sabemos, nunca foram apresentados na literatura até o momento.

O capítulo está dividido em três seções. Na primeira, obtemos a função de Green do modelo na presença de um potencial externo espacialmente localizado. A segunda seção discute o método de obtenção da expressão geral da energia de interação entre o potencial e uma carga estacionária.

Já a terceira seção, traz uma série de análises para as expressões da energia e da força, com análises de casos limítrofes de interesse. Também são plotados e analisados os gráficos obtidos para a variação dos parâmetros envolvidos na lagrangiana (m, M e mu), com o intuito de visualizar a mudança no comportamento do sistema com essas quantidades.

3.1 O propagador

Nesse capítulo consideramos um modelo de campo escalar. Adicionalmente, consideramos a presença de um termo de acoplamento entre o campo e um potencial externo espacialmente localizado (potencial tipo delta de Dirac) ao longo de um plano. Vamos sempre estar restritos ao caso 3 + 1-dimensional. Definiremos o quadrivetor posição como $x = (t, \mathbf{x})$, sendo a parte espacial $\mathbf{x} = (x_\perp, \mathbf{x}_\parallel)$. O vetor x_\perp será aquele perpendicular ao plano onde o potencial delta se concentra, ao passo que \mathbf{x}_\parallel são as coordenadas espaciais paralelas ao plano. Escolhemos um sistema de coordenadas onde o plano se localiza em $x_\perp = 0$, portanto esperamos um potencial com a estrutura $\delta(x_\perp)$.

Como também estará presente uma fonte pontual, sua contribuição deverá ser percebida na Lagrangiana através de um acoplamento linear com o campo. Essa contribuição acontece por meio de uma fonte externa $\mathcal{J}(x)$

$$\mathcal{J}(x) = \lambda \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad (3.1)$$

onde \mathbf{a} designa a posição da carga. Sem perda de generalidade, podemos escolher um sistema de coordenadas onde $\mathbf{a} = (0, 0, a)$, ou seja, somente a componente perpendicular ao plano é não nula.

A densidade Lagrangiana \mathcal{L} que soma as contribuições da fonte, das derivadas de ordem superior e do plano potencial é tal que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi + \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \left(\frac{\partial_\sigma \partial^\sigma}{m^2} \right) \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} [M^2 + \mu \delta(x_\perp)] \phi^2 + \mathcal{J} \phi. \quad (3.2)$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange para a Lagrangiana com derivada de ordem superior ^[26], encontramos uma equação diferencial para o campo. A correspondente função de Green deve satisfazer

$$\left[\partial_\nu \partial^\nu + \left(\frac{\partial_\sigma \partial^\sigma}{m^2} \right) \partial_\nu \partial^\nu - M^2 + \mu \delta(x_\perp) \right] G(x, x') = \delta^4(x - x'), \quad (3.3)$$

onde definiremos $G(x, x')$ em termos de sua transformada de Fourier ^[27]

$$G(x, x') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{d\mathbf{p}_\parallel}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p}_\parallel(\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}'_\parallel)} \mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_\parallel; x, x'), \quad (3.4)$$

com $p^\mu = (\omega, \mathbf{p})$ sendo o quadrivetor momento e $\mathbf{p} = (p_\perp, \mathbf{p}_\parallel)$ sua parte espacial.

Como a função de Green da equação (3.3) nos trará o propagador com a presença do plano potencial, é correto definir a função livre G_0 ^[22]

$$\left[\partial_\nu \partial^\nu + \left(\frac{\partial_\sigma \partial^\sigma}{m^2} \right) \partial_\nu \partial^\nu - M^2 \right] G_0(x, x') = \delta^3(x - x'), \quad (3.5)$$

que é a função de Green livre do sistema, isso é, na ausência de interações.

De posse da (3.4) o passo seguinte consiste em resolver a (3.5), para tal, tomamos escrevemos a função de Green livre como uma integral de Fourier

$$G_0(x, y) = \int \frac{d^4 p}{2\pi} e^{-ip(x-y)} \tilde{G}_0(p), \quad (3.6)$$

ou de forma equivalente

$$G_0(x, y) = \int \frac{d\omega}{(2\pi)^2} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{d\mathbf{p}_{\parallel}}{2\pi} e^{i\mathbf{p}_{\parallel}(x-y)} \int \frac{dp_{\perp}}{2\pi} e^{ip_{\perp}(x-y)} \tilde{G}_0(\omega, \mathbf{p}). \quad (3.7)$$

onde a transformada de Fourier $\tilde{G}_0(p)$ é uma função a ser encontrada. Nessa notação $p = (\omega, \mathbf{p})$ e $\mathbf{p} = (p_{\perp}, \mathbf{p}_{\parallel})$ indicam os momentos perpendiculares e paralelos ao plano.

Usando o fato de que $\partial_{\nu}\partial^{\nu} = \partial_t^2 - \partial_{\mathbf{x}_{\parallel}}^2 - \partial_{x_{\perp}}^2$ e substituindo (3.7) em (3.5) obtemos

$$\left[(\partial_t^2 - \partial_{\mathbf{x}_{\parallel}}^2 - \partial_{x_{\perp}}^2) + \frac{1}{m^2} (\partial_t^2 - \partial_{\mathbf{x}_{\parallel}}^2 - \partial_{x_{\perp}}^2) (\partial_t^2 - \partial_{\mathbf{x}_{\parallel}}^2 - \partial_{x_{\perp}}^2) + M^2 \right] \times \\ \times \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{d\mathbf{p}_{\parallel}}{2\pi} e^{i\mathbf{p}_{\parallel}(\mathbf{x}_{\parallel}-\mathbf{x}'_{\parallel})} \int \frac{dp_{\perp}}{2\pi} e^{ip_{\perp}(x_{\perp}-x'_{\perp})} \tilde{G}_0(\omega, p) = \delta^3(x-x'), \quad (3.8)$$

Atuando com os operadores diferenciais e escrevendo a função delta como uma integral de Fourier, podemos escrever

$$\tilde{G}_0(\omega, p) = \frac{1}{p^4/m^2 - p^2 + M^2}. \quad (3.9)$$

Separando (3.9) em termos das frações parciais, $\tilde{G}_0(\omega, p)$ se torna

$$\tilde{G}_0(\omega, p) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4M^2}{m^2}}} \left[\frac{1}{p^2 - \frac{m^2}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{4M^2}{m^2} \right)^{1/2} \right]} - \frac{1}{p^2 - \frac{m^2}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{4M^2}{m^2} \right)^{1/2} \right]} \right]. \quad (3.10)$$

Essa equação mostra dois polos massivos do propagador $\tilde{G}_0(\omega, p)$, isso é, valores de massa para os campos que geram propagador divergentes. Os definiremos como m_1 e m_2 com o intuito de simplificar (3.10)

$$m_1^2 = \frac{m^2}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{4M^2}{m^2} \right)^{1/2} \right], \quad (3.11)$$

$$m_2^2 = \frac{m^2}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{4M^2}{m^2} \right)^{1/2} \right], \quad (3.12)$$

assim

$$\tilde{G}_0(\omega, p) = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{p^2 - m_2^2} - \frac{1}{p^2 - m_1^2} \right], \quad (3.13)$$

com $R = \left(1 - \frac{4M^2}{m^2} \right)^{1/2}$.

Nota-se que nas equações de definição das massas, é possível obter valores imaginários se considerarmos $4M^2 > m^2$. Nesse regime, o propagador que será obtido permitirá modos taquiónicos. [28]. No intuito de evitar esses modos, vamos nos restringir ao caso onde $4M^2 < m^2$.

Agora, estabelecendo a igualdade entre (3.4) e (3.7) e utilizando o resultado obtido para $\tilde{G}_0(\omega, p)$

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{d\mathbf{p}_{\parallel}}{2\pi} e^{i\mathbf{p}_{\parallel}(x_{\parallel}-x'_{\parallel})} \int \frac{dp_{\perp}}{2\pi} e^{ip_{\perp}(x_{\perp}-x'_{\perp})} \tilde{G}_0(\omega, \mathbf{p}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{d\mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p}_{\parallel}(x_{\parallel}-x'_{\parallel})} \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x, y), \quad (3.14)$$

$$\mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x, x') = \int \frac{dp_{\perp}}{2\pi} e^{ip_{\perp}(x_{\perp}-x'_{\perp})} \tilde{G}_0(\omega, \mathbf{p}) \quad (3.15)$$

Com a equação (3.13) temos que

$$\mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x, x') = \int \frac{dp_{\perp}}{2\pi R} e^{ip_{\perp}(x_{\perp}-x'_{\perp})} \left(\frac{1}{p_{\perp}^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2 - \omega^2 - m_2^2} - \frac{1}{p_{\perp}^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2 - \omega^2 - m_1^2} \right). \quad (3.16)$$

Para simplificar a notação definimos σ_1 e σ_2 tais que

$$\sigma_1 = (m_1^2 - p_{\parallel}^2 + \omega^2)^{1/2}, \quad (3.17)$$

$$\sigma_2 = (m_2^2 - p_{\parallel}^2 + \omega^2)^{1/2}, \quad (3.18)$$

portanto

$$\mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x, x') = \int \frac{dp_{\perp}}{2\pi R} e^{ip_{\perp}(x_{\perp}-x'_{\perp})} \left(\frac{1}{(p_{\perp} + \sigma_2)(p_{\perp} - \sigma_2)} - \frac{1}{(p_{\perp} + \sigma_1)(p_{\perp} - \sigma_1)} \right). \quad (3.19)$$

As integrais acima podem ser facilmente resolvidas,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x, x') &= \int \frac{dp_{\perp}}{4\pi R} e^{ip_{\perp}(x_{\perp}-x'_{\perp})} \left(\frac{1}{(p_{\perp} + \sigma_2)(p_{\perp} - \sigma_2)} - \frac{1}{(p_{\perp} + \sigma_1)(p_{\perp} - \sigma_1)} \right) \\ &= \frac{e^{-\sigma_2|x-x'|}}{2 R \sigma_2} - \frac{e^{-\sigma_1|x-x'|}}{2 R \sigma_1} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Esse resultado pode ser encontrado na referência ^[13].

O propagador que possui a parte de interação é tal que deve ser solução de (3.3). Este propagador pode ser obtido tomando a equação diferencial com o potencial (3.3) e então buscando uma solução completa que a satisfaça. Tal método já utilizado por Camilo *et al.*(2013) para o campo de Klein-Gordon escreve $\mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x, x')$ em termos de $\mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x, x')$ como

$$\mathcal{G}(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x, x') = \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x, x') - \frac{\mu \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x, 0) \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; x, x')}{1 + \mu \mathcal{G}_0(\omega, \mathbf{p}_{\parallel}; 0, 0)}, \quad (3.21)$$

assim

$$\mathcal{G}(\omega, p_{\parallel}, x, x') = \frac{(\sigma_2 e^{-\sigma_1|x-x'|} + \sigma_1 e^{-\sigma_2|x-x'|})}{4 R^2 \sigma_1 \sigma_2} - \frac{\mu (\sigma_1 e^{-\sigma_2|x|} - \sigma_2 e^{-\sigma_1|x|}) (\sigma_1 e^{-\sigma_2|x'|} - \sigma_2 e^{-\sigma_1|x'|})}{4 R^2 \sigma_2^2 \sigma_1^2 + 2 \mu R \sigma_1 \sigma_2 (\sigma_1 - \sigma_2)}. \quad (3.22)$$

O primeiro termo do propagador acima existe independentemente da presença do potencial externo, ou seja se trata de um termo que estará presente mesmo para o campo livre. O segundo termo é uma correção produzida pelo potencial.

3.2 Energia e força de interação

Nessa seção obtemos a energia de interação entre o potencial, descrito na seção anterior, e uma fonte pontual estacionária, que sumula o que viria a ser uma carga para o campo escalar.

Inicialmente consideramos o funcional gerador da teoria^[29],

$$Z(\mathcal{J}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \mathcal{J}(x') G(x, x') \mathcal{J}(x) \right]. \quad (3.23)$$

e consideramos o fato de que o funcional gerador está relacionado à energia de vácuo do sistema E (estado de menor energia) por

$$Z(\mathcal{J}) = \exp(iET) \quad (3.24)$$

onde está implícito o limite $T \rightarrow \infty$, para escrever

$$E = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int d^4x \int d^4x' \mathcal{J}(x) G(x, x') \mathcal{J}(x') \quad (3.25)$$

No caso em questão, temos uma fonte externa dada por $\mathcal{J}(x) = \lambda \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, o que fornece

$$\begin{aligned} E &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-\lambda^2}{2T} \int d^4x \int d^4x' \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}) G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{a}) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-\lambda^2}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt' G(t, \mathbf{a}; t', \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Tendo em vista as equações (3.4), (3.22) e (3.26), podemos ver que o primeiro termo do lado direito de (3.22) fornece uma contribuição para a energia que existiria mesmo sem a presença do potencial. De fato, essa contribuição vem do propagador livre (sem a presença do potencial) e corresponde à auto-energia da fonte pontual. De agora em diante vamos descartar essa contribuição e escrever

$$\begin{aligned} E &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt' \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt e^{-i\omega(t-t')} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \times \\ &\quad \mu \left[(m_1^2 - p_{\parallel}^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 - p_{\parallel}^2)^{1/2} |a|} - (m_2^2 - p_{\parallel}^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 - p_{\parallel}^2)^{1/2} |a|} \right]^2 \\ &= \frac{4R^2(m_2^2 - p_{\parallel}^2)(m_1^2 - p_{\parallel}^2) + 2R\mu (m_1^2 - p_{\parallel}^2)^{1/2}(m_2^2 - p_{\parallel}^2 + \omega^2)^{1/2} \left[(m_1^2 - p_{\parallel}^2)^{1/2} - (m_2^2 - p_{\parallel}^2)^{1/2} \right]}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Integrando em t (no intervalo $-T/2$ a $T/2$), integrando em ω , posteriormente em t' e considerando o limite $T \rightarrow \infty$, podemos escrever

$$\begin{aligned} E &= \frac{\lambda^2}{2(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{p}_{\parallel} \times \\ &\quad \mu \left[(m_1^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2)^{1/2} |a|} - (m_2^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2)^{1/2} |a|} \right]^2 \\ &\times \frac{4R^2(m_2^2 + \mathbf{p}^2)(m_1^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2) + 2R\mu (m_1^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2)^{1/2}(m_2^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2)^{1/2} \left[(m_1^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2)^{1/2} - (m_2^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2)^{1/2} \right]}{(2\pi)^2}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

Utilizando coordenadas polares e integrando na parte angular, obtemos finalmente a energia de interação fonte-potencial

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \times \\
 &\quad \mu \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2}|a|} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 + r^2)^{1/2}|a|} \right]^2 \\
 &\quad \times \frac{4R^2(m_2^2 + r^2)(m_1^2 + r^2) + 2R\mu (m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]}{4R^2(m_2^2 + r^2)(m_1^2 + r^2) + 2R\mu (m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]}.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Essa expressão, apresenta um integração em r e dependência nas distância entre o plano potencial e a fonte a , assim como nas variáveis, m_1 e m_2 que são quantidades independentes de r e já definidas em (3.11), (3.12) com $R = \left(1 - \frac{4M^2}{m^2}\right)^{1/2}$.

Infelizmente não conseguimos resolver analiticamente a integral em (3.29). Sendo assim, temos que apelar para métodos numéricos para compreender qual é o comportamento físico do sistema. Para isso será mais conveniente estudar a força de interação entre o potencial e a fonte, ao invés da energia.

Encontra-se a expressão da força em termos da integral em r . Derivando a energia com relação à posição, isto é, com relação a a

$$\begin{aligned}
 F(\mu, M, m, a) &= -\frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \times \\
 &\quad \times \left[(m_2^2 + r^2)^{1/2}(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_1^2 + r^2)^{1/2}} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_2^2 + r^2)^{1/2}} \right] \times \\
 &\quad \times \frac{2\mu \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_2^2 + r^2)^{1/2}} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_1^2 + r^2)^{1/2}} \right]}{4R^2(m_1^2 + r^2)(m_2^2 + r^2) + 2\mu R(m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]}.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Essa integral também não pôde ser resolvida analiticamente.

Entretanto, um fato importante pode ser observado: se fizermos $a = 0$, ou seja, tomando nula a distância entre a fonte e o potencial, como pode ser visto a seguir

$$\begin{aligned}
 F(\mu, M, m, a = 0) &= -\frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \times \\
 &\quad \times \left[(m_2^2 + r^2)^{1/2}(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-0(m_1^2 + r^2)^{1/2}} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-0(m_2^2 + r^2)^{1/2}} \right] \times \\
 &\quad \times \frac{2\mu \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-0(m_2^2 + r^2)^{1/2}} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-0(m_1^2 + r^2)^{1/2}} \right]}{4R^2(m_1^2 + r^2)(m_2^2 + r^2) + 2\mu R(m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]}, \\
 &= -\frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \times \\
 &\quad \times \left[(m_2^2 + r^2)^{1/2}(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}(m_1^2 + r^2)^{1/2} \right] \times \\
 &\quad \times \frac{2\mu \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} \right]}{4R^2(m_1^2 + r^2)(m_2^2 + r^2) + 2\mu R(m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]},
 \end{aligned}$$

que nos leva a

$$F(\mu, M, m, a = 0) = 0. \quad (3.31)$$

Isso significa que, para quaisquer condições finitas impostas sobre os demais parâmetros, a força será nula para $a = 0$!

Algo semelhante também ocorre na interação entre duas cargas pontuais para o campo de Lee-Wick escalar. A força entre duas cargas é finita mesmo quando essas são superpostas.

3.3 Análise de casos

Com a impossibilidade de se realizar as integrais (3.29) e (3.30) analiticamente, fizemos uma análise numérica da força e energia. Nas seções seguintes expomos essa análise em função dos parâmetros m , M , μ e a . Para evitar modos taquiônicos, manteve-se como única restrição $m^2 > 4M^2$. É necessário ressaltar que a força e a energia estão dados em termos de m_1 e m_2 . As massas de Podolsky e Klein-Gordon possuem dimensões de massa, ao passo que o parâmetro μ possui dimensão inversa de massa. Isso significa que $[m] = (\mathbf{M})$, $[M] = (\mathbf{M})$, $[\mu] = (\mathbf{M})^{-1}$ e $[a] = (\mathbf{L})$.

3.3.1 Análise para a massa de Podolsky

A massa de Podolsky aparece como denominador do termo de derivada de ordem superior da Lagrangiana (termo de Lee-Wick) e nesse trabalho foi denotada por m .¹ No limite $m \rightarrow \infty$ o termo de Lee-Wick anula-se e retornamos ao caso tratado por Camilo *et al.* (2013)^[22].

Energia

Fixando os parâmetros $M = 10$ e $\mu = 15$, plotamos gráficos para a energia (3.29) em função da distância a para valores de $m = 30$ até $m = 190$. A figura 3.1 compila quatro diferentes valores de m , sendo elas próximas do valor definido inicialmente. Pode ser observado que para valores de crescentes de a o valor da energia tende a zero para as diferentes massas.

Para distâncias próximas de 0, a energia assume valores maiores para m maiores. Esse comportamento fica ainda mais claro quando se compara os gráficos 3.1 e 3.2. Portanto, o esperado para uma massa elevada é uma energia também elevada.

Para distâncias crescentes, a diferença entre os valores de energia para massas diferentes é cada vez menor. A partir de determinado ponto, a energia se comporta, praticamente, como função independente da massa. Esse comportamento pode ser visto, por exemplo, em 3.1 pelo decaimento conjunto das diversas curvas, obtidas para diferentes valores de m , a partir da distância $a = 0.10$.

¹Por termo de Lee-Wick, entende-se a derivada de ordem superior presente na Lagrangiana, isto é, o termo $\frac{1}{2} \partial_\nu \phi \left(\frac{\partial_\sigma \partial^\sigma}{m^2} \right) \partial^\nu \phi$ de (3.2).

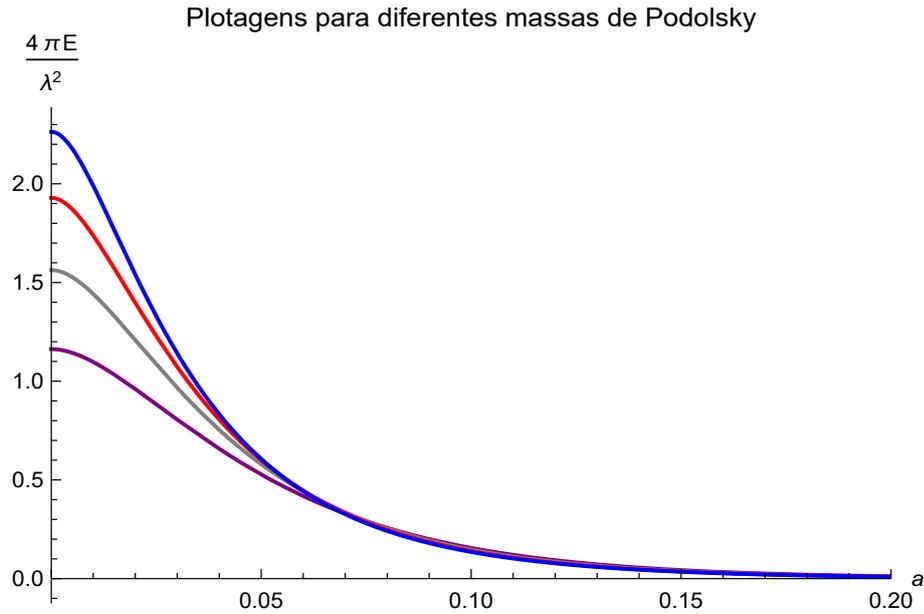


Figura 3.1: Plotagem da energia para diversos valores de massa m em função da distância a . Em roxo: $m = 30$, em cinza: $m = 40$, em vermelho: $m = 50$ e em azul: $m = 60$

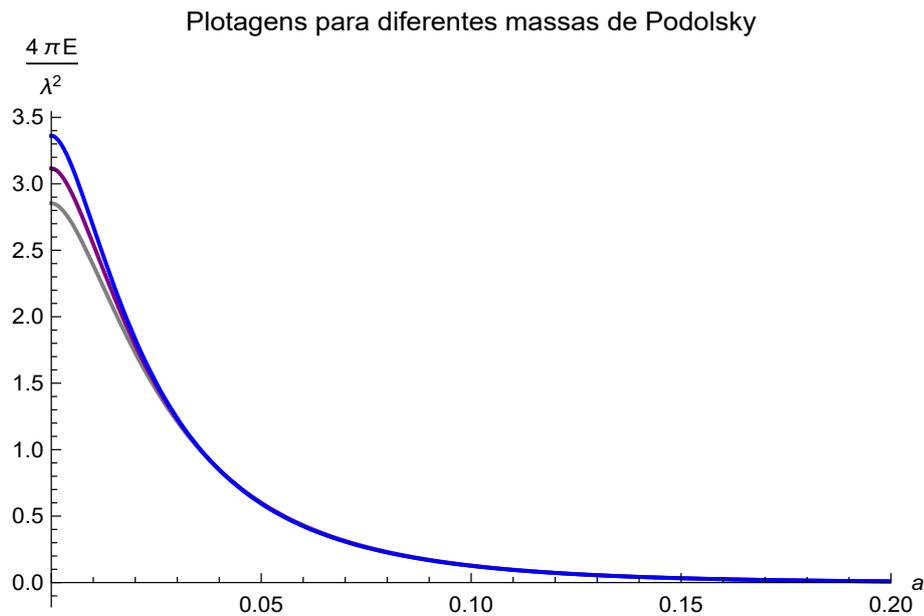


Figura 3.2: Plotagem da energia para diversos valores de massa m em função da distância a . Em cinza: $m = 80$, em roxo: $m = 90$ e em azul: $m = 100$

Uma análise de interesse é o comportamento dos valores de energia com a distância $a = 0$.

Nesse regime, a Eq. (3.29) se torna

$$\begin{aligned}
 E(\mu, M, m, a) &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \times \\
 &\times \frac{\mu [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]^2}{4R^2(m_2^2 + r^2)(m_1^2 + r^2) + 2R\mu (m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Apesar de ser muito mais simples do que a expressão (3.29) para a energia, ainda assim não é possível encontrar uma solução analítica de (3.32).

Vamos verificar a finitude do integrando de E nos extremos, isso é, para o limite em que $r \rightarrow \infty$ e quando $r \rightarrow 0$ em (3.32). Tomando primeiro o limite em que $r \rightarrow 0$ na (3.32) temos

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda^2}{4\pi} r \times \frac{\mu [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]^2}{4R^2(m_2^2 + r^2)(m_1^2 + r^2) + 2R\mu (m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \\
 = \frac{\lambda^2}{4\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \left[r \times \frac{\mu [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]^2}{4R^2(m_2^2 + r^2)(m_1^2 + r^2) + 2R\mu (m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \right] \\
 = 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, fica claro que para $a = 0$, a energia permanece com valor finito quando r é muito pequeno. Agora considerando $r \rightarrow \infty$ temos

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{4\pi} r \times \frac{\mu [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]^2}{4R^2(m_2^2 + r^2)(m_1^2 + r^2) + 2R\mu (m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \\
 = \frac{\lambda^2}{4\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \times \frac{\mu [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]^2}{4R^2(m_2^2 + r^2)(m_1^2 + r^2) + 2R\mu (m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \right] \\
 = 0,
 \end{aligned}$$

Ambos os extremos são finitos e nulos e o integrando não possui polos em \mathcal{R} para r real. Isso significa que no intervalo de 0 a ∞ o integrando é uma função integrável e finita. Como estamos tratando o caso em que $a = 0$, que fisicamente representa o posicionamento da carga sobre a placa potencial, esse integrando finito nos diz que a energia de interação quando a distância vai a zero é também finita.

Voltando à integração numérica, com o intuito de corroborar a finitude da energia para $a = 0$, fez-se a integração para os parâmetros de massa dados em 3.3. Encontrou-se para as massas $m = 40, 70, 50$ e 140 , valores finitos de energia respectivamente iguais a $1.56, 1.92, 2.57$ e 4.20 , em unidades de $\frac{\lambda^2}{4\pi}$.

Outro caso de interesse é aquele no qual $m \rightarrow \infty$. Isso significa extinguir a contribuição na lagrangiana do termo com derivadas de ordem superior, isso é, o campo deixa de ser do tipo Lee-Wick e passa a ser um campo de Klein-Gordon. Esse sistema foi discutido por Camilo *et al.* (2013) que possuía como Lagrangiana ^[22]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} [M^2 + \mu \delta(x_\perp)] \phi^2 + \mathcal{J} \phi, \tag{3.33}$$

sendo a correspondente energia entre o plano potencial e a carga dada por dada por ^[22]

$$E = \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \frac{\mu (r^2)^{1/2} e^{-2|a|(M^2 + r^2)^{1/2}}}{2\mu (M^2 + r^2)^{1/2} + 4M^2 + 4r^2}. \tag{3.34}$$

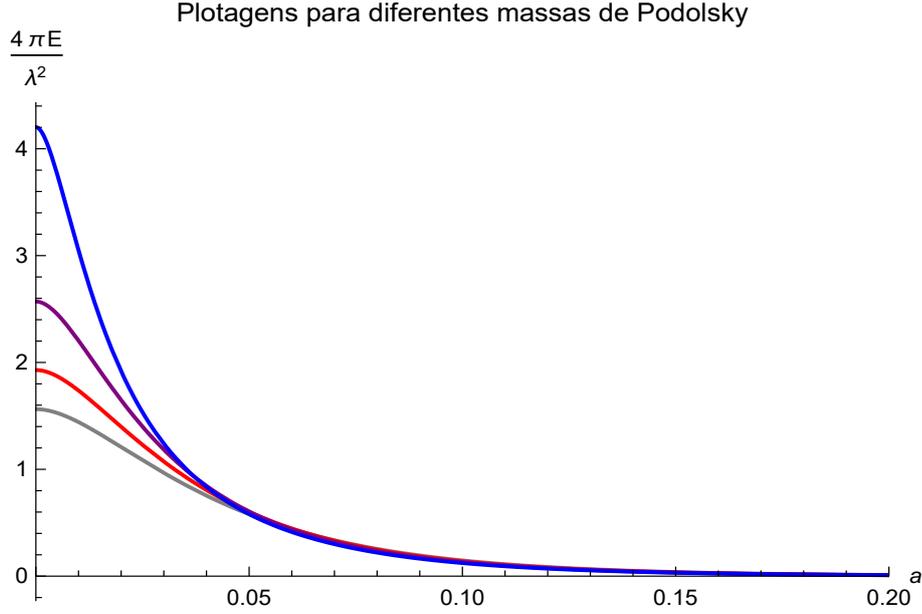


Figura 3.3: Plotagem da Energia para diversos valores de massa m em função da distância a .
Em cinza: $m = 40$, em vermelho: $m = 50$, em roxo: $m = 70$, em azul: $m = 140$

Fazer $m \rightarrow \infty$ para o limite em que $a = 0$ significa analisar um campo do tipo Klein-Gordon, sob presença de placa e da fonte, quando a distância entre eles vai a zero. Neste contexto, na expressão da energia (3.32) temos

$$\begin{aligned}
 E(\mu, M, m, a = 0) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \times \\
 &\times \frac{\mu [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]^2}{4R^2(m_2^2 + r^2)(m_1^2 + r^2) + 2R\mu (m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]}
 \end{aligned} \quad (3.35)$$

como já definido anteriormente, $m_1 = \frac{1}{2}(m^2 + R)^{1/2}$, $m_2 = \frac{1}{2}(m^2 - R)^{1/2}$ e $R = (1 - 4M^2/m^2)^{1/2}$,

$$\begin{aligned}
 E(\mu, M, m, a = 0) &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr \times \\
 &\times r \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mu [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]^2}{4R^2(m_2^2 + r^2)(m_1^2 + r^2) + 2R\mu (m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \\
 &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr (r^2)^{1/2} \frac{\mu(r^2)^{1/2}}{2\mu(M^2 + r^2)^{1/2} + 4M^2 + 4r^2}.
 \end{aligned}$$

Dessa maneira com $a = 0$ e $m \rightarrow \infty$

$$E(\mu, M, m \rightarrow \infty, a = 0) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \frac{\mu(r^2)^{1/2}}{2\mu(M^2 + r^2)^{1/2} + 4M^2 + 4r^2}. \quad (3.36)$$

Seguindo essa linha, o esperado é que a energia para o campo de Lee-Wick quando $m \rightarrow \infty$ seja a mesma que a energia calculada a partir da Lagrangiana de Klein-Gordon descrita por

Camilo ^[22]. Nota-se ao comparar (3.36) e (3.34) que as energias consistentemente são iguais tomando $a = 0$.

De fato, usando as definições de R , m_1 e m_2 , podemos mostrar que os integrandos em (3.34) e (3.29) são exatamente iguais.

Outro fato que pode ser percebido da (3.36) é que essa integral obviamente é divergente e positiva. Neste caso, posicionar a carga muito próxima da placa ($a = 0$), gera uma energia infinita. Esse efeito nos informa que o termo responsável por manter não divergente a energia é o termo de Lee-Wick, isto é, o termo que apresenta as derivadas de ordem superior na Lagrangiana.

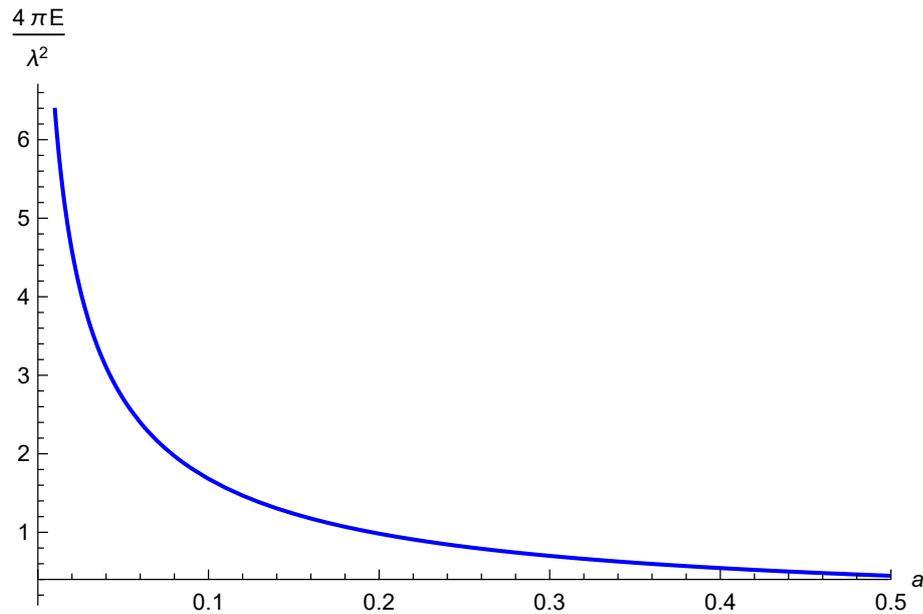


Figura 3.4: Plotagem da energia para $m = 10^{16}$

O gráfico 3.4 apresenta uma plotagem realizada para um valor inicial de $a = 0.01$, com a massa $m = 10^{16}$. Esse valor para m foi escolhido levando em conta a precisão computacional do *software* utilizado. Como o programa possui precisão de 16 algarismos decimais, tomar a massa $m = 10^{16}$ significa que qualquer fração dos demais parâmetros (que no início dessa subseção foram definidos como $M = 10$ e $\mu = 15$) com relação a m , resultam em $\mu/m = M/m = 1 \times 10^{-16}$ que é virtualmente zero, ou seja, relativamente $m = \infty$.

A análise de 3.4 mostra que para $m \rightarrow \infty$, a energia cai continuamente a medida a medida que a distância cresce, até valores próximos de 0 para a suficientemente grande. Esse comportamento coincide com o comportamento apresentado para o caso em que não há o termo de Lee-Wick ^[22], como o esperado.

Força

A partir do resultado (3.30), estudar o comportamento da força. Da mesma forma que fizemos para a energia, utilizamos $M = 10$ e $\mu = 15$.

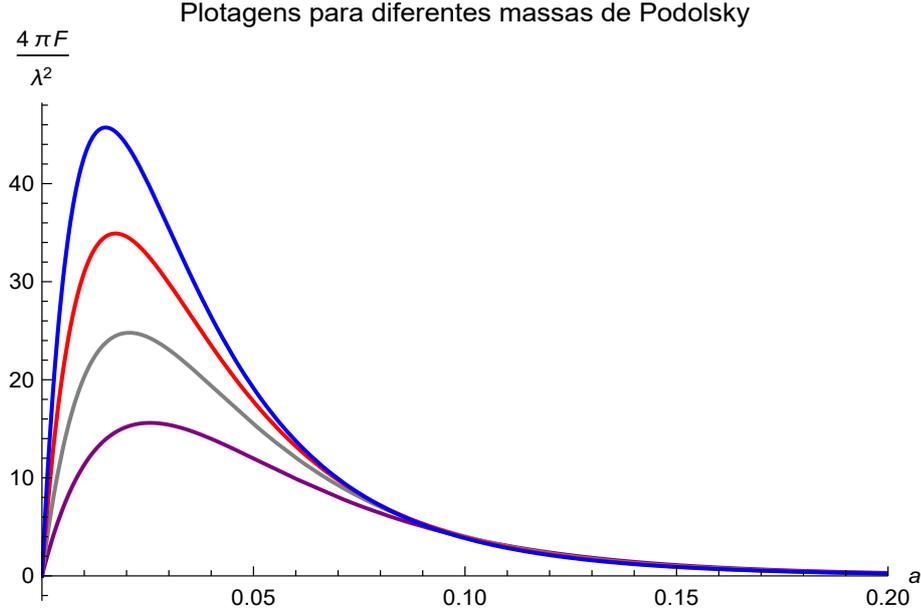


Figura 3.5: Plotagem da força para diversas massas. Em roxo $m = 30$, em cinza $m = 40$, em vermelho $m = 50$ e em azul $m = 60$

Na figura (3.5) temos as curvas obtidas por integração numérica da equação (3.30) em função da distância a , para as massas de Podolsky iguais a 30, 40, 50 e 60.

O principal ponto que pode ser observado na figura (3.6) é a presença de um máximo na força. A presença desse máximo, nos indica que a força cresce a medida que se afasta da placa até atingir um ponto em que o valor é máximo, decrescendo até tender assintoticamente a 0. Isso significa também que a força, inicialmente nula para $a = 0$, permanece finita para qualquer distância da placa.

O pico da força depende da massa de Podolsky, como mostrado em 3.4. Ao que tudo indica, um acréscimo em m promove um decréscimo na posição do ponto de máximo da força, o que pode ser também observado na figura 3.6.

Os pontos de extremos da força são dados pela condição

$$\frac{dF}{da} = 0. \quad (3.37)$$

Portanto, utilizando (3.30) temos que

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{da} \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \left[(m_2^2 + r^2)^{1/2} (m^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 + r^2)^{1/2} a} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} (m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} a} \right] \times \\ & \times \frac{2\mu \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} a} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_1^2 + r^2)^{1/2}} \right]}{4R^2 (m_1^2 + r^2) (m_2^2 + r^2) + 2\mu R (m_1^2 + r^2)^{1/2} (m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} = 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

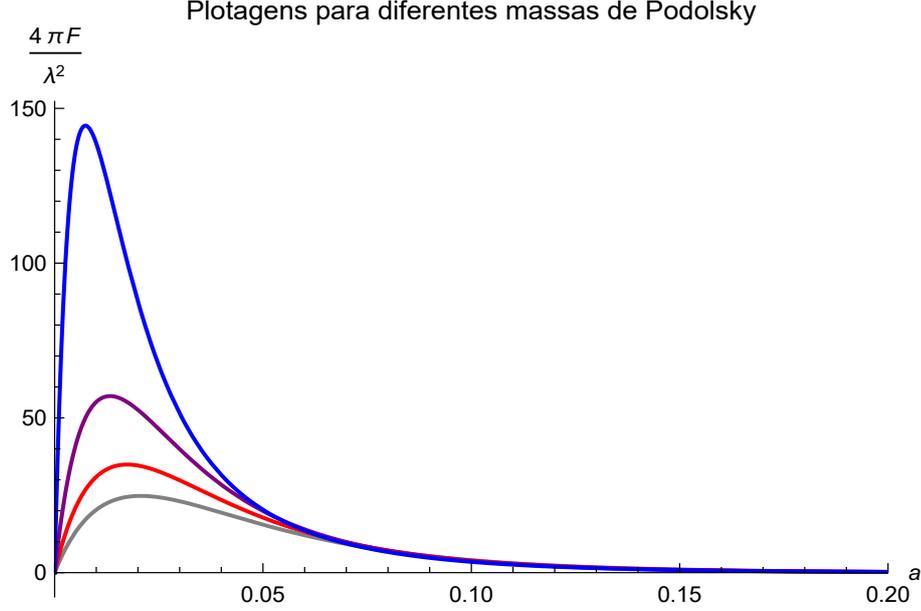


Figura 3.6: Plotagem da força para diversas massas. Em cinza $m = 40$, em vermelho $m = 50$, em roxo $m = 70$ e em azul $m = 140$

como a integração ocorre somente em r , a derivada pode atuar diretamente no integrando

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_0^\infty dr r \times \\
 & \times \frac{d}{da} \left[(m_2^2 + r^2)^{1/2} (m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 + r^2)^{1/2} a} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} (m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} a} \right] \times \\
 & \times \frac{2\mu \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} a} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_1^2 + r^2)^{1/2}} \right]}{4R^2 (m_1^2 + r^2) (m_2^2 + r^2) + 2\mu R (m_1^2 + r^2)^{1/2} (m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} = 0,
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

assim, a derivada do integrando $\frac{d\mathcal{I}}{da}$ resulta em

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{I}}{da} = & \frac{2\mu\sqrt{r^2} \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_1^2 + r^2)^{1/2}} - (m_1^2 + r^2)^{1/2} (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_2^2 + r^2)^{1/2}} \right]^2}{4R^2 (m_1^2 + r^2) (m_2^2 + r^2) + 2\mu R (m_1^2 + r^2)^{1/2} (m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \\
 & - \frac{2\mu\sqrt{r^2} \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} (m_2^2 + r^2) e^{-|a|(m_2^2 + r^2)^{1/2}} - (m_1^2 + r^2) (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_1^2 + r^2)^{1/2}} \right]}{4R^2 (m_1^2 + r^2) (m_2^2 + r^2) + 2\mu R (m_1^2 + r^2)^{1/2} (m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \times \\
 & \times \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_2^2 + r^2)^{1/2}} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_1^2 + r^2)^{1/2}} \right].
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Encontrar a relação entre o ponto de máximo da força e a distância da placa, consiste em

integrar a expressão anterior com relação a r e então, após igualar a 0, resolver para a . Note que, para dados valor de massa m , o máximo da força deverá ser obtido para um determinado a correspondente. Com isso esperamos ter a em função de m . Não fomos capazes de fazer isso analiticamente e recorremos a métodos numéricos para resolver o problema. Na figura (3.7) temos um gráfico das posições a , onde ocorrem os máximos da força, em função da massa de Podolsky m no intervalo $m = 40$ a $m = 2240$.

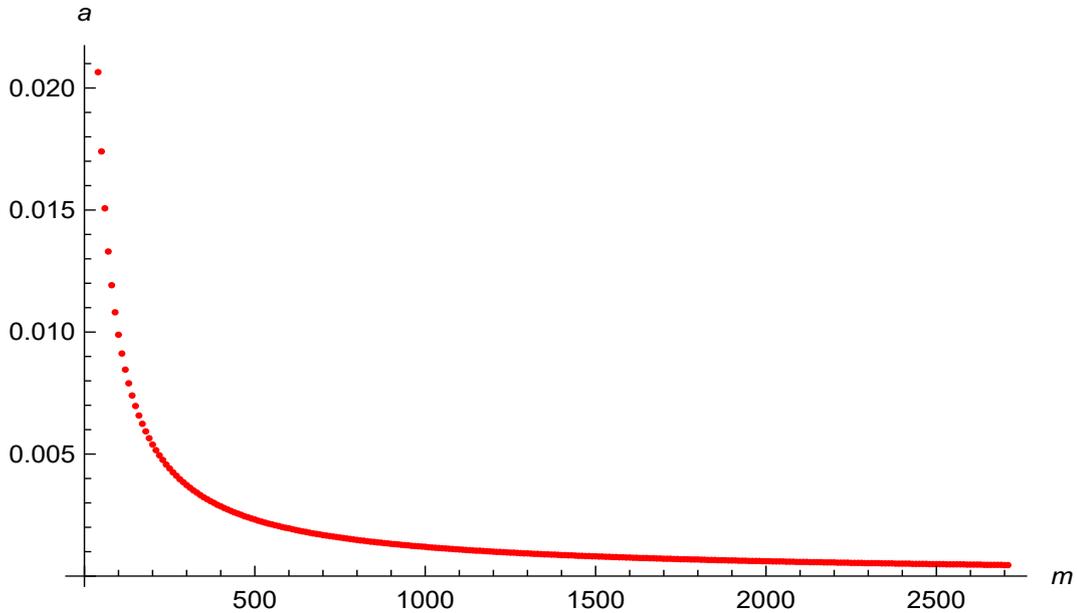


Figura 3.7: Plotagem da posição dos máximos de força para as massas no intervalo de $m = 40$ a $m = 2780$.

Para massas menores, o máximo da força se encontra mais distante da placa e a medida que a massa de Podolsky cresce, o máximo fica cada vez mais próximo à placa. Para massas m muito grandes, o gráfico 3.7 indica que o pico da força irá para cada vez mais próximo da placa, com a tendendo a 0 nesse caso. Esse resultado corrobora a ideia inicial obtida quando observado o gráfico 3.6 e induz ao raciocínio de que para $m \rightarrow \infty$ a posição do máximo da força deve ir a zero, ou seja, o máximo estará posicionado sob a placa. Esses comportamentos são evidenciados respectivamente em 3.8 e em 3.9.

Para $m \rightarrow \infty$ o máximo da força deve divergir e se localizar sob a placa. Força infinitamente grande para uma carga infinitamente próxima do espelho é o comportamento esperado para o caso de Klein-Gordon. Como citado anteriormente, fazer a massa m ir a infinito, reduz a Lagrangiana (3.2) à Lagrangiana do tipo Klein-Gordon e portanto o comportamento da força deve ser o mesmo, o que realmente ocorre.

Os estudos de caso dessa subseção indicam que a energia de interação é finita para qualquer m finito, tende a um valor definido para uma distância nula da placa e tende a zero a medida que a distância cresce. A força também é sempre finita para uma massa finita e é nula para uma distância $a = 0$, crescendo até atingir um máximo e posteriormente tendendo a zero para

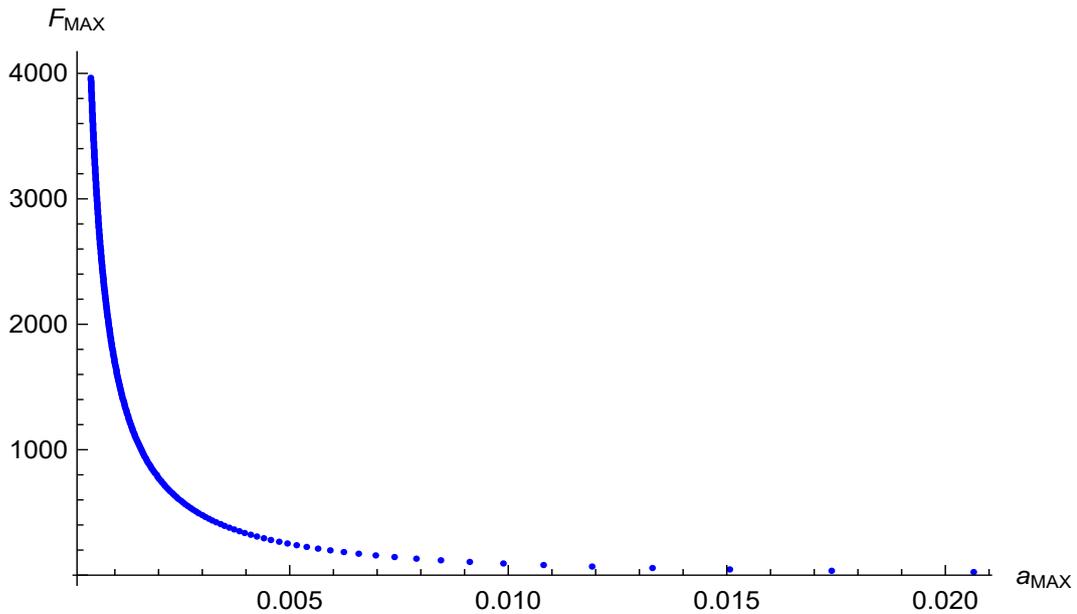


Figura 3.8: Plotagem do valor dos máximos da força F_{MAX} com relação à posição a_{MAX} do pico.

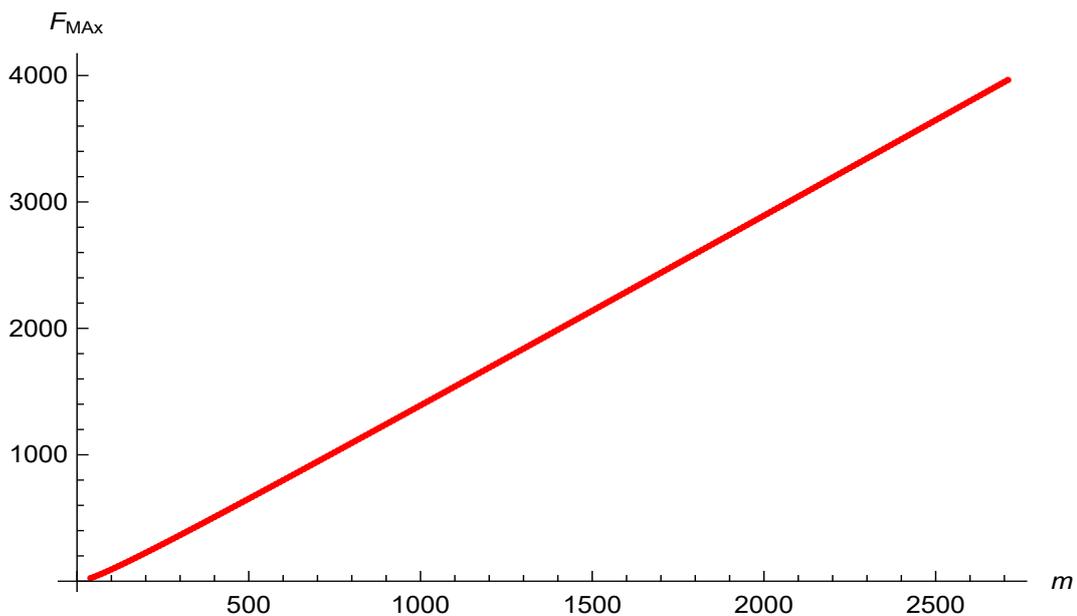


Figura 3.9: Plotagem do valor dos máximos da força F_{MAX} com relação à massa, no intervalo de $m = 40$ a $m = 2780$.

distâncias crescentes. Também foi visto que a posição do máximo depende da massa e fica cada vez mais próximo da placa a medida que a massa cresce, ficando infinitamente próximo para um valor suficientemente grande de m . Tanto para a energia quanto para a força, quando a massa de Podolsky vai a infinito, a teoria se resume ao caso do campo Klein-Gordon discutido por Camilo *et al.* (2013) [22].

3.3.2 Análise para a massa de Klein-Gordon

Tendo realizado as variações na massa de Podolsky, a abordagem se voltou para analisar o comportamento da energia e força com mudanças na massa de Klein-Gordon M . Essa massa, acopla quadraticamente com o campo e aparece como numerador na raiz $R = (1 - 4M^2/m^2)^{1/2}$, que entra na definição dos polos massivos m_1 e m_2 . Alterações nessa massa alterarão dramaticamente os comportamentos da energia.

Assim como realizado para a massa de Podolsky, a massa de Klein-Gordon, fizemos uma análise numérica da energia e força, mantendo $\mu = 15$ e $m = 100$ nessa subseção. Novamente, a fim de evitar os modos taquiônicos, M foi escolhido sempre tal que $4M^2 < m^2$.

Energia

Na figura 3.10 temos diversos gráficos da energia em função de a com quatro valores distintos de M .

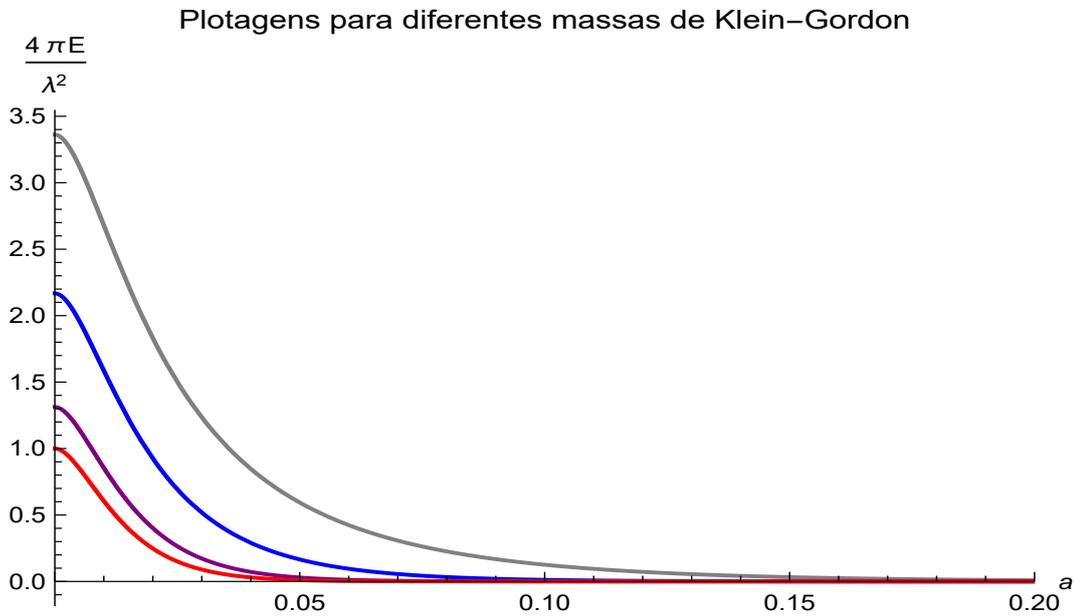


Figura 3.10: Plotagem da energia para diversas massas de Klein-Gordon. Em cinza $M = 10$, em azul $M = 20$, em roxo $M = 35$ e em vermelho $M = 45$.

O gráfico 3.10 mostra que a energia se altera com a massa de Klein-Gordon como esperado. Diferentemente da massa de Podolsky, um acréscimo da massa de Klein-Gordon significa um decréscimo dos valores da energia para uma mesma distância a .

Preliminarmente, a plotagem 3.10, indica que se tomarmos M grande, a energia será pequena. Apesar de pequena, a energia será sempre finita dado que a massa de Klein-Gordon está superiormente limitada para evitar modos taquiônicos. Podemos nos perguntar o que aconteceria se $4M^2 \rightarrow m^2$, ou seja, quando tivermos o valor máximo de M (o que corresponde a uma

energia mínima). Isso pode ser encontrado tomando o limite de $R \rightarrow 0$ na expressão (3.29)

$$\begin{aligned}
 E(\mu, M = m/2, m, a) &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \times \\
 &\times \frac{\mu \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2}|a|} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 + r^2)^{1/2}|a|} \right]^2}{4R^2(m_2^2 + r^2)(m_1^2 + r^2) + 2R\mu (m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \\
 &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \frac{\mu m^4 \left(a\sqrt{2(m^2 + 2r^2)} + 2 \right)^2}{4(m^2 + 2r^2) \left[\mu m^2 \sqrt{2(m^2 + 2r^2)} + 2(m^2 + 2r^2)^2 \right]} e^{-\sqrt{2(m^2 + 2r^2)}|a|},
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

a qual fazendo a substituição de variável $r' = (m^2 + 2r^2)$ fornece

$$E(\mu, M = m/2, m, a) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{4} \int_{m^2}^\infty dr' \frac{\mu m^4 \left(a\sqrt{2r'} + 2 \right)^2}{4r' \left[\mu m^2 \sqrt{2r'} + 2r'^2 \right]} e^{-\sqrt{2r'}|a|}. \tag{3.42}$$

Como demonstrado pela (3.42), quando fazemos $4M^2 \rightarrow m^2$ a expressão para a energia se torna muito mais simples. Isso ocorre porque para $R = 1$ os polos massivos se tornam $m_1 = m_2 = m^2/2$. A forma geral para a energia inferiormente limítrofe é dada por (3.42) para um dado m e μ . Utilizando os mesmos parâmetros da figura 3.10, construímos o gráfico da figura 3.11, com a energia mínima que o sistema pode possuir.

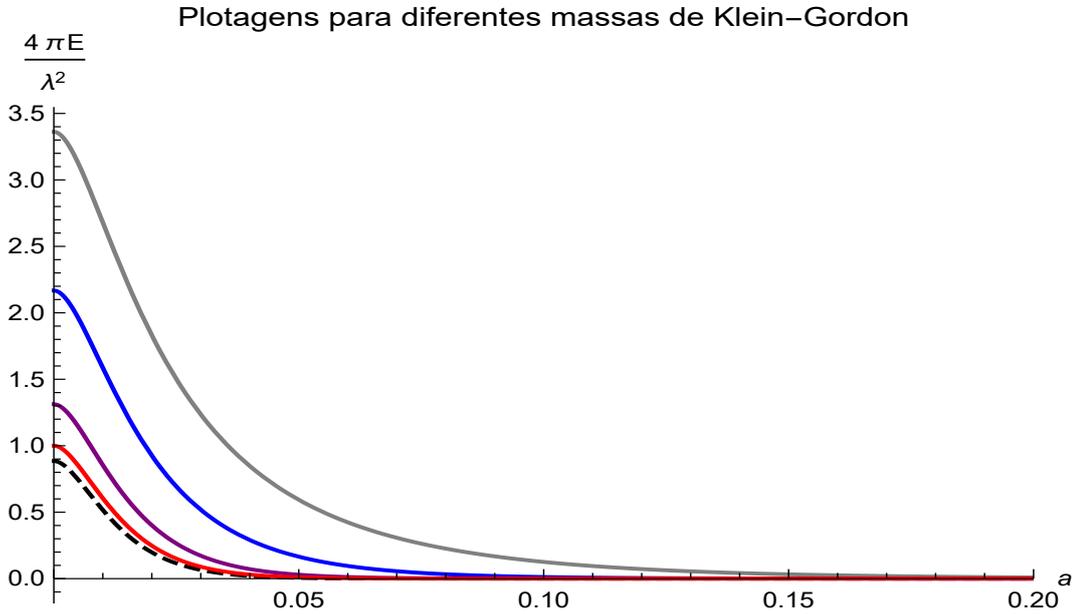


Figura 3.11: Plotagem da energia para diversas massas de Klein-Gordon. Em cinza $M = 10$, em azul $M = 20$, em roxo $M = 35$, em vermelho $M = 45$, e em pontilhado o valor limite superior de $M = m/2 = 50$.

A massa de Klein-Gordon está superiormente definida pela massa de Podolsky, contudo, *a priori*, não há limitação inferior para a massa de Klein-Gordon, podendo ela ser nula. Na

investigação das consequências de se tomar M pequeno, o que pode ser imediatamente percebido de 3.10 é que massas menores de KG ² geram valores de maiores energia.

Tomar $M = 0$ equivale a fazer $R \rightarrow 1$. Com isso temos que

$$\begin{aligned}
 E(\mu, M = 0, m, a) &= \lim_{R \rightarrow 1} \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \times \\
 &\quad \times \frac{\mu \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} |a|} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 + r^2)^{1/2} |a|} \right]^2}{4R^2 (m_2^2 + r^2) (m_1^2 + r^2) + 2R\mu (m_1^2 + r^2)^{1/2} (m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \\
 &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \frac{\mu \left[r e^{-|a| \sqrt{m^2 + r^2}} - \sqrt{m^2 + r^2} e^{-|a| \sqrt{r^2}} \right]^2}{2r \left[(m^2 + r^2) (\mu + 2r) - \mu r \sqrt{m^2 + r^2} \right]}, \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

ou seja

$$E(\mu, M = 0, m, a) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr \frac{\mu \left[r e^{-|a| \sqrt{m^2 + r^2}} - \sqrt{m^2 + r^2} e^{-|a| \sqrt{r^2}} \right]^2}{2 \left[(m^2 + r^2) (\mu + 2r) - \mu r \sqrt{m^2 + r^2} \right]}. \tag{3.44}$$

Integrando numericamente a (3.44) e então plotando a energia pela distância, encontramos a linha pontilhada no gráfico 3.12, que é o limite superior para a energia. Para essa massa de KG, os valores de energia pela distância permanecem finitos, com comportamento muito semelhante aquele exibido para demais valores de massa M . Apesar da semelhança, a energia vai muito mais lentamente a zero nesse caso.

Força

Vamos agora fazer uma análise para o comportamento da força em função da distância ao variarmos a massa de Klein-Gordon. Novamente, acréscimos na massa de KG levam a valores menores da força para cada posição a , semelhantemente ao que ocorre para a energia - evidenciado no gráfico 3.10.

Assim como o que ocorre para a massa de Podolsky, todos os valores de força são finitos para diferentes massas M finitas. Para distância $a = 0$ a força é nula para qualquer massa M nesta análise.

A força correspondente à energia 3.42, que foi calculada para $R \rightarrow 0$, ou seja $4M^2 \rightarrow m^2$ é

²Adotaremos essa notação para Klein-Gordon de agora em diante.

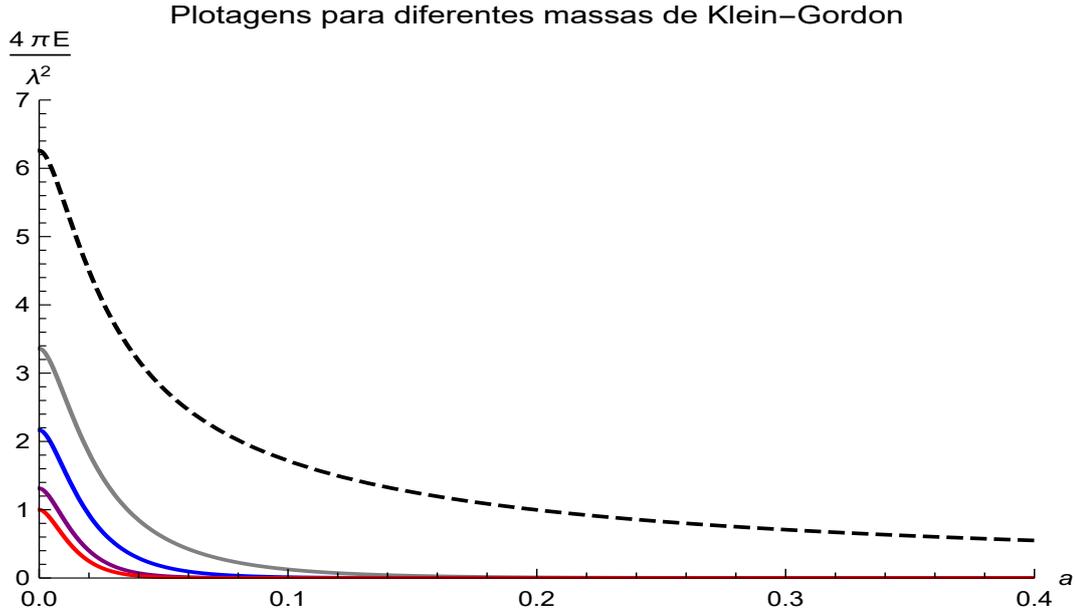


Figura 3.12: Plotagem da energia para diversas massas de Klein-Gordon. Em cinza $M = 10$, em azul $M = 20$, em roxo $M = 35$, em vermelho $M = 45$ e em pontilhado a plotagem de $M = 0$.

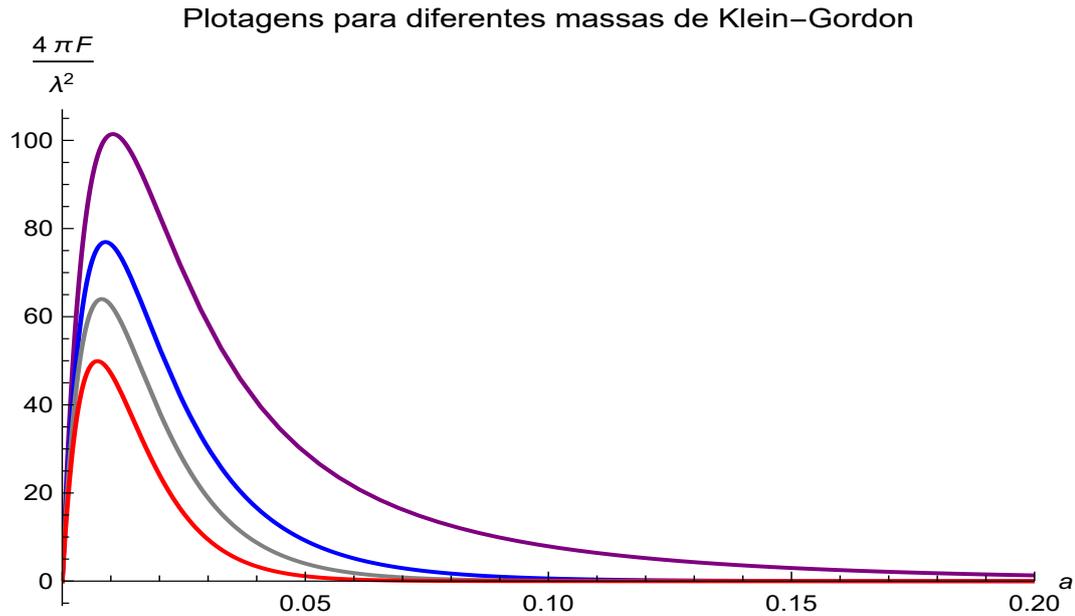


Figura 3.13: Plotagem da força para diversas massas de Klein-Gordon. Em roxo $M = 5$, em azul $M = 20$, em cinza $M = 30$ e em vermelho $M = 45$

dada por

$$\begin{aligned}
 F(\mu, M = m/2, m, a) &= -\frac{dE_{R \rightarrow 0}}{da} = \frac{d}{da} \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{4} \int_{m^2}^{\infty} dr' \frac{\mu m^4 (a\sqrt{2r'} + 2)^2}{4r' [\mu m^2 \sqrt{2r'} + 2r'^2]} e^{-\sqrt{2r'}|a|} \\
 &= \frac{d}{da} \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{4} \int_{m^2}^{\infty} dr' \frac{d}{da} \frac{\mu m^4 (a\sqrt{2r'} + 2)^2}{4r' [\mu m^2 \sqrt{2r'} + 2r'^2]} e^{-\sqrt{2r'}|a|} \\
 &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{4} \int_{m^2}^{\infty} dr' \frac{a \mu m^4 (a\sqrt{2r'} + 2)}{2 [\mu m^2 \sqrt{2r'} + 2r'^2]} e^{-\sqrt{2r'}|a|}.
 \end{aligned}$$

A dependência linear existente em (3.45) revela que para $a = 0$ a força será $F = 0$. O comportamento geral do gráfico da força (??) não é muito diferente do caso em que $4M^2 \neq m^2$ e está representado pela linha pontilhada verde no gráfico 3.14. Essa linha representa os valores mínimos que a força pode assumir para cada a , sem que surjam modos taquiônicos.

Se considerarmos $M = 0$, a força poderá ser igualmente obtida por derivação direta da expressão para a energia relativa. Nesse caso, derivando (3.44) obtemos

$$\begin{aligned} F(\mu, M = 0, m, a) &= -\frac{dE_{R \rightarrow 1}}{da} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \frac{\mu \left[r e^{-|a|\sqrt{m^2+r^2}} - \sqrt{m^2+r^2} e^{-|a|\sqrt{r^2}} \right]^2}{2r \left[(m^2+r^2)(\mu+2r) - \mu r \sqrt{m^2+r^2} \right]}, \\ &= -\frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \frac{d}{da} \frac{\mu \left[r e^{-|a|\sqrt{m^2+r^2}} - \sqrt{m^2+r^2} e^{-|a|\sqrt{r^2}} \right]^2}{2r \left[(m^2+r^2)(\mu+2r) - \mu r \sqrt{m^2+r^2} \right]}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

que pode ser simplificada como

$$\begin{aligned} F(\mu, M = 0, m, a) &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr \frac{\mu r \sqrt{m^2+r^2} \left(r e^{-|a|\sqrt{m^2+r^2}} - e^{-|a|r} \sqrt{m^2+r^2} \right)}{\left[(m^2+r^2)(\mu+2r) - \mu r \sqrt{m^2+r^2} \right]} \times \\ &\times \left(e^{-|a|r} - e^{-|a|\sqrt{m^2+r^2}} \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

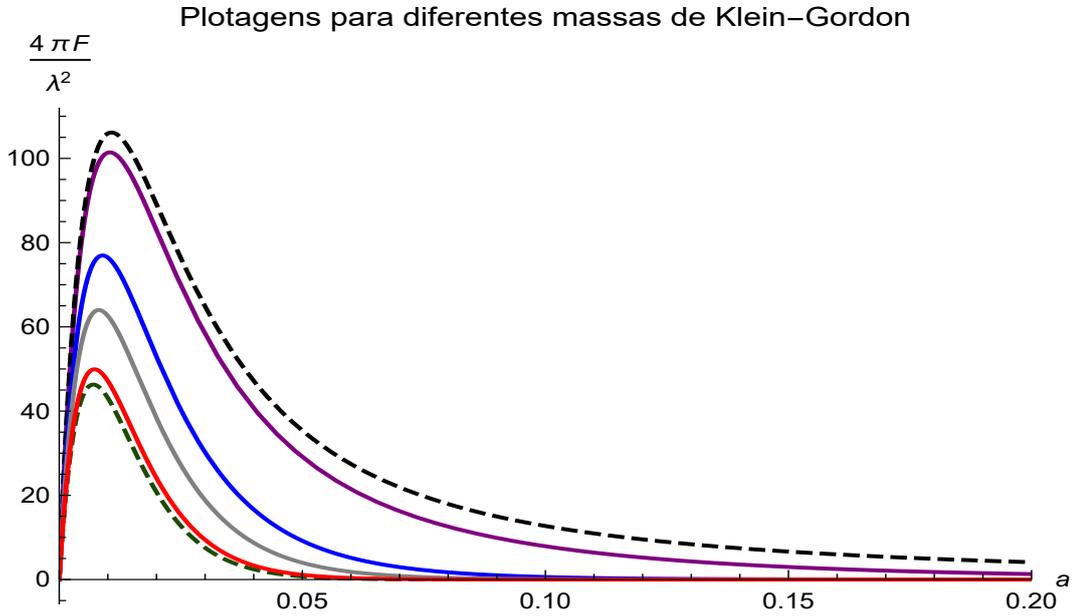


Figura 3.14: Plotagem da força para diversas massas de Klein-Gordon. Em roxo $M = 5$, em azul $M = 20$, em cinza $M = 30$, em vermelho $M = 45$, em pontilhado cinza a plotagem de $M = 0$ e em pontilhado verde $M = m/2$.

A expressão para força em 3.46, quando plotada em função da distância, nos leva ao limite superior para os valores da força, representados pela linha preta pontilhada no gráfico 3.14.

Nesse gráfico, para $a = 0$, a força aparenta ser nula, o que é confirmado pela expressão 3.46, uma vez que o termo $(e^{-|a|r} - e^{-|a|\sqrt{m^2+r^2}})$ se anula para esse valor de a .

Nas figuras 3.13 e 3.14, podemos notar que a posição dos picos se alteram para diferentes valores de massa de KG. Assim como realizado para a massa e Podolsky, para visualizar a relação que existe entre a posição do pico e a massa M relativa, fizemos a figura 3.15.

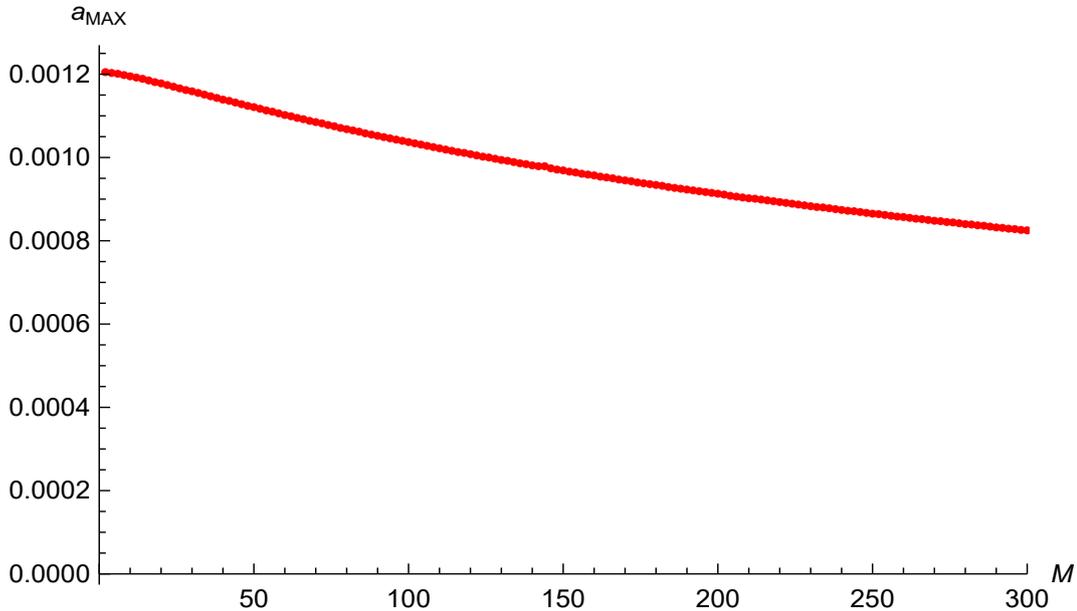


Figura 3.15: Valores da posição a_{MAX} do ponto máximo plotados com relação as massas de Klein-Gordon de cada ponto extremo F_{MAX} .

Acréscimos na massa de KG, M , levam a um deslocamento do máximo para um posição mais próxima da placa, semelhantemente ao que ocorre para a massa de Podolsky. A distinção reside no gráfico 3.16, que mostra que quanto mais próximo da placa, menor o valor do máximo da força. No caso de Podolsky o comportamento era o contrário, ou seja, quanto mais próximo da placa, maior a F_{MAX} .

Os gráficos 3.15, 3.16 e 3.17 foram construídos utilizando a massa de Podolsky $m = 1000$. Valor este escolhido para aumentar a faixa de variação do M , permitindo assim a escolha de mais pontos para as curvas.

Também diferente do que ocorria para a massa de Podolsky, quanto maiores são as massas de Klein-Gordon menores são os valores para o máximo da força, o que pode ser visto na figura 3.17. Para esse caso, a massa não pode ser aumentada indefinidamente, possuindo um limite superior. Assim, devido a essa limitação, dentre os máximos das forças para todas as massas possíveis haverá um valor limite mínimo, que é o máximo da linha pontilhada verde no gráfico 3.14.

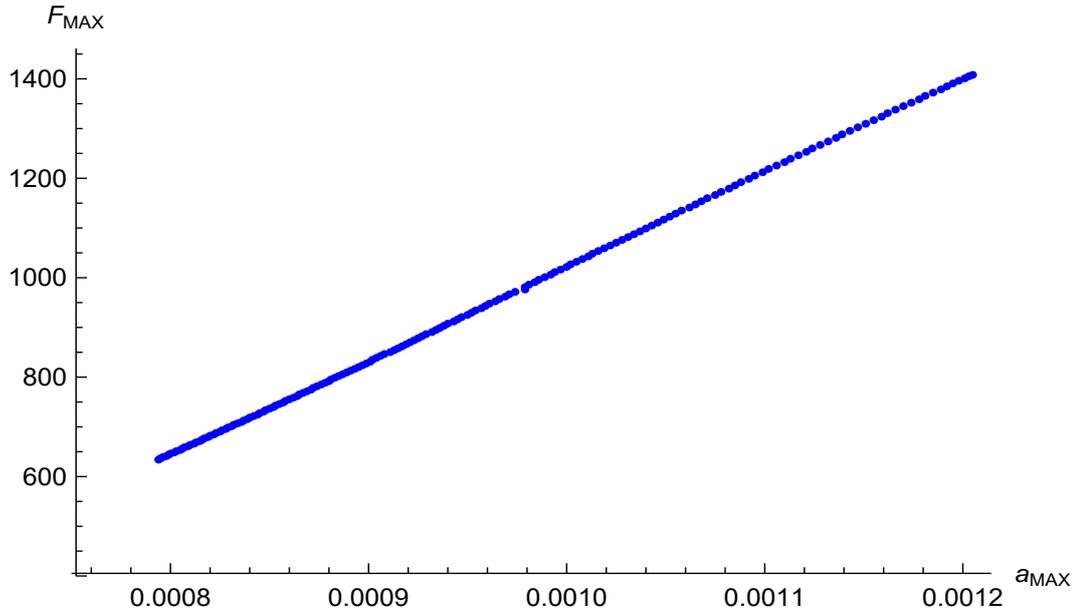


Figura 3.16: Valores dos máximos da força F_{MAX} plotados em função da distância a_{MAX} que o máximo se encontra da placa.

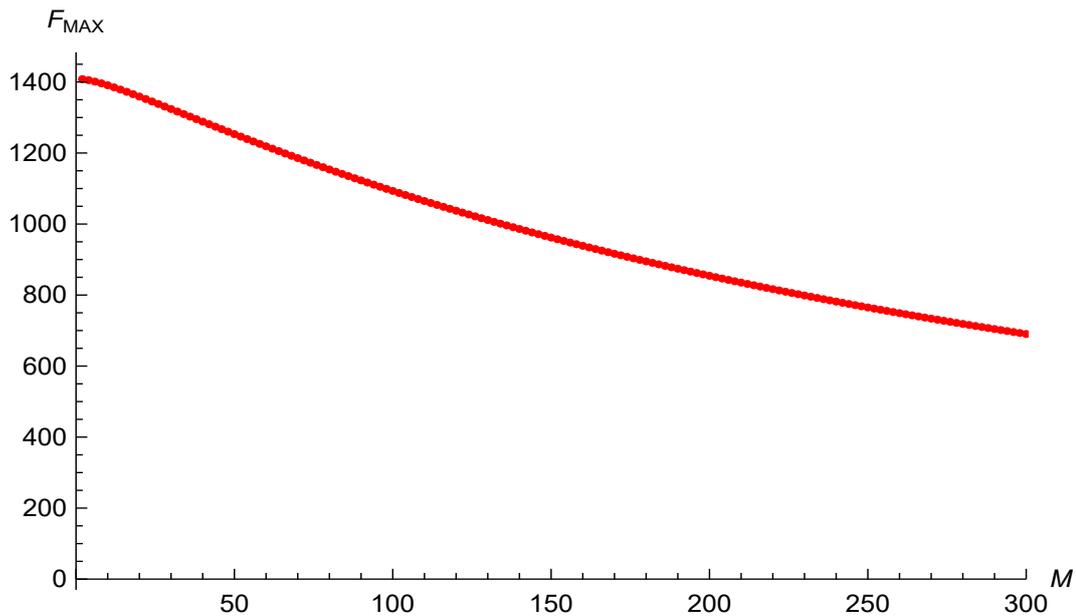


Figura 3.17: Valores dos máximos da força F_{MAX} plotados pela massa de Klein-Gordon correspondente.

Uma situação especial consiste em tomar $m \rightarrow \infty$ em (3.46), como segue

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow \infty} F(\mu, M = 0, m, a) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr \mu r \sqrt{m^2 + r^2} \times \\
 &\quad \times \frac{\left(e^{-|a|r} - e^{-|a|\sqrt{m^2 + r^2}} \right) \left(r e^{-|a|\sqrt{m^2 + r^2}} - e^{-|a|r} \sqrt{m^2 + r^2} \right)}{\left[(m^2 + r^2)(\mu + 2r) - \mu r \sqrt{m^2 + r^2} \right]} \quad (3.47) \\
 &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr \frac{\mu r e^{-2|a|r}}{\mu + 2r}
 \end{aligned}$$

que pode ser escrita como

$$F(\mu, M = 0, m \rightarrow \infty, a) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \left(\frac{\mu}{4a} - \frac{\mu \Gamma(0, a\mu)}{4} e^{a\mu} \right) \quad (3.48)$$

A força em (3.48) é claramente divergente para distâncias pequenas entre a carga e o plano. Como estamos no limite onde a massa de Podolsky tende a infinito, a Lagrangiana do sistema não mais apresenta contribuições do termo de derivadas de ordem superior. A fim de visualizar graficamente o comportamento da expressão (3.48), plotamos a força em função da distância na figura 3.18.

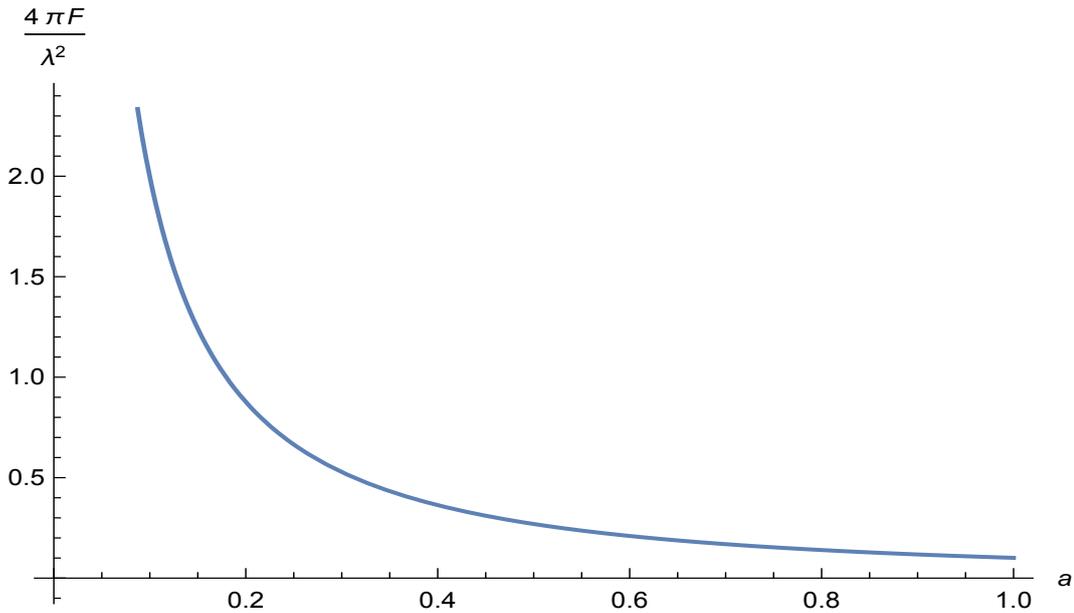


Figura 3.18: Valores da força F plotados pela distância para o caso em que a massa de Klein-Gordon nula e a massa de Podolsky é tal que $m \rightarrow \infty$.

As análises dessa subseção mostram que a energia de interação entre o espelho e a carga é finita para qualquer valor da massa de KG M , e que a energia assume um valor finito não nulo para distâncias $a = 0$. Diferentemente do que ocorria para as variações na massa de Podolsky, acréscimos na massa de KG geram energias inferiores para uma mesma distância a . As forças apresentam pontos máximos que ficam mais próximos da placa para massas de KG maiores. O valor absoluto do máximo da força é menor para massas de KG maiores. Tanto a força quanto a energia se encontram limitadas entre um padrão máximo e um mínimo, mostrados nos gráficos 3.11, 3.12 e 3.14 por linhas pontilhadas. Os padrões máximos e mínimos surgem devido à limitação imposta a M a fim de evitar modos taquiônicos e são provenientes do caso especial em que é tomado o limite $M \rightarrow m/2$ e para quando $M = 0$. Expressões mais simples podem ser obtidas para a força e energia quando o limite de $M \rightarrow m/2$ é tomado e quando $M = 0$. Para o caso em que $M = 0$ e a massa de Podolsky é tal que $m \rightarrow \infty$, uma expressão para a força pode ser obtida analiticamente, na qual a força vai a infinito para pequenas distâncias.

3.3.3 Análise para o fator de transparência

Nessa seção fazemos um estudo sobre a energia e a força de interação entre o potencial delta e a carga pontual em função do parâmetro μ , que pode ser tomado como um fator de transparência da placa, no sentido em que ao tomarmos $\mu \rightarrow \infty$, temos um problema equivalente ao campo de Lee-Wick escalar submetido à condição de Dirichlet sob o plano onde o potencial se concentra. Quando $\mu = 0$ temos o campo de Lee-Wick escalar livre (sem a presença do potencial).

Energia

Mantivemos as massas de Podolsky e Klein-Gordon iguais a, respectivamente, $m = 100$ e $M = 10$. Fizemos numericamente gráficos para a energia de interação entre o potencial e a carga tomando diversos valores para o fator de transparência. Os resultados podem ser vistos na figura 3.19.

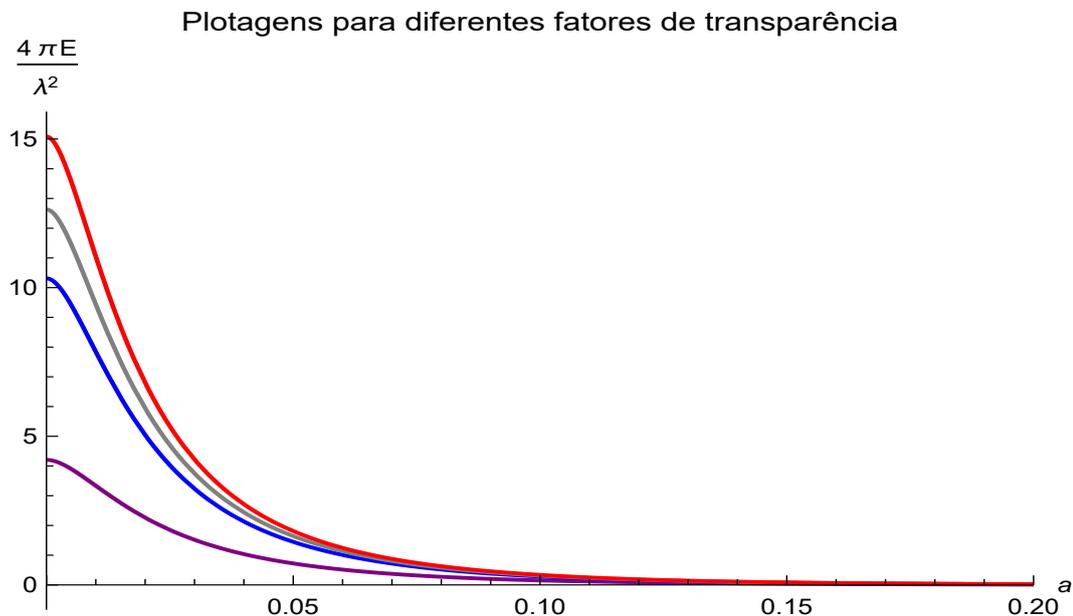


Figura 3.19: Valores da energia E plotados em função da distância para diversos fatores de transparência μ . Em roxo: $\mu = 20$, em azul: $\mu = 80$, em cinza: $\mu = 120$ e em vermelho: $\mu = 180$.

Para valores maiores de μ , temos valores correspondentes de energia mais altos. Isso é esperado pois aumentamos a intensidade da interação entre o potencial e o plano, ou de forma equivalente, aumentamos a refletividade do espelho. Diminuir μ significa aumentar sua transparência e portanto as correspondentes energias de interação diminuem.

No limite $\mu \rightarrow \infty$, a refletividade do potencial é máxima e recuperamos o caso onde o campo é submetido à condição de Dirichlet no plano. Essa situação pode ser estudada pelo conhecido método das imagens, onde a interação carga-plano pode ser simulada pela interação

carga-carga imagem. O caso $\mu \rightarrow \infty$ está representado pela linha pontilhada na figura 3.20, e pode ser obtido como segue

$$\begin{aligned}
 E(\mu \rightarrow \infty, M, m, a) &= \\
 &\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \times \\
 &\times \frac{\mu \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} |a|} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 + r^2)^{1/2} |a|} \right]^2}{4R^2(m_2^2 + r^2)(m_1^2 + r^2) + 2R\mu (m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \\
 &= \int_0^\infty dr r \times \\
 &\times \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\mu \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} |a|} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 + r^2)^{1/2} |a|} \right]^2}{4R^2(m_2^2 + r^2)(m_1^2 + r^2) + 2R\mu (m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \\
 &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \frac{\left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} |a|} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 + r^2)^{1/2} |a|} \right]^2}{2R (m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]}, \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

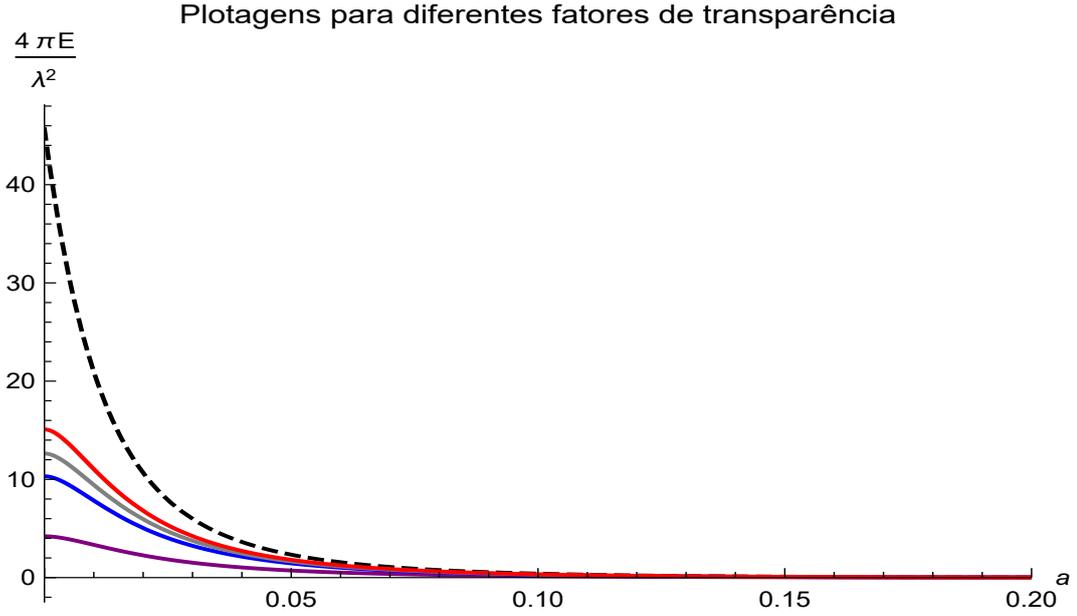


Figura 3.20: Valores da energia E plotados em função da distância para diversos fatores de transparência μ . Em roxo: $\mu = 20$, em azul: $\mu = 80$, em cinza: $\mu = 120$, em vermelho: $\mu = 180$ e em pontilhado a linha obtida quando analiticamente se faz $\mu \rightarrow \infty$.

Quando $\mu = 0$ o espelho torna-se totalmente transparente e não há interação alguma com

a carga.

$$\begin{aligned}
 E(\mu = 0, M, m, a) &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \times \\
 &\times \frac{\mu \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2}|a|} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 + r^2)^{1/2}|a|} \right]^2}{4R^2(m_2^2 + r^2)(m_1^2 + r^2) + 2R\mu (m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Em todos os gráficos acima, podemos ver que, quando a distância entre o plano e a carga é nula, a energia é finita e diferente de zero. No gráfico 3.20, mesmo para o caso do espelho perfeito, a energia ainda apresenta um valor finito para a distância nula. Isso pode ser analiticamente verificado tomando $a = 0$ na expressão (3.49)

$$\begin{aligned}
 E(\mu \rightarrow \infty, M, m, a = 0) &= \\
 &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \frac{[(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]^2}{2R (m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]}
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

que pode ser resolvida analiticamente resultando em

$$E_{\mu \rightarrow \infty} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{m_1 - m_2}{2R}. \tag{3.52}$$

Outra característica interessante é o fato de que, para distâncias pequenas, o comportamento da energia pode variar bastante em função $\mu \rightarrow \infty$, como destacado no gráfico 3.21. O gráfico mostra que para os fatores de transparência finitos, a energia decresce muito lentamente, ao passo que o padrão pontilhado ($\mu \rightarrow \infty$) decresce mais rapidamente.

Força

Nessa seção fazemos um estudo sobre a força de interação entre o plano potencial e uma carga pontual, tendo em vista seu comportamento com a distância e com o parâmetro de transparência μ . Tomamos as massas de Podolsky e Klein-Gordon como sendo $m = 100$ e $M = 10$, respectivamente. Assim como para a energia, valores maiores para o fator de transparência μ geraram valores maiores para a força, como disposto no gráfico 3.22. Para transparência finita, os valores da força foram finitos para qualquer distância, sendo zero para a distância nula.

Como ocorre para a massa de Podolsky e para a massa de Klein-Gordon, existe uma ligeira relação entre a posição dos extremos da força e o valor de μ . Valores maiores de máximo se encontram mais próximos da placa. Isso não é imediatamente percebido a partir da gráfico 3.22, pois a fim de observar o padrão completo entre os diversos valores de μ , a diferença entre eles foi escolhida de no máximo 60. Para explicitar essa diferença construiu-se a figura 3.23, com valores para a transparência até a ordem de 10^{25} .

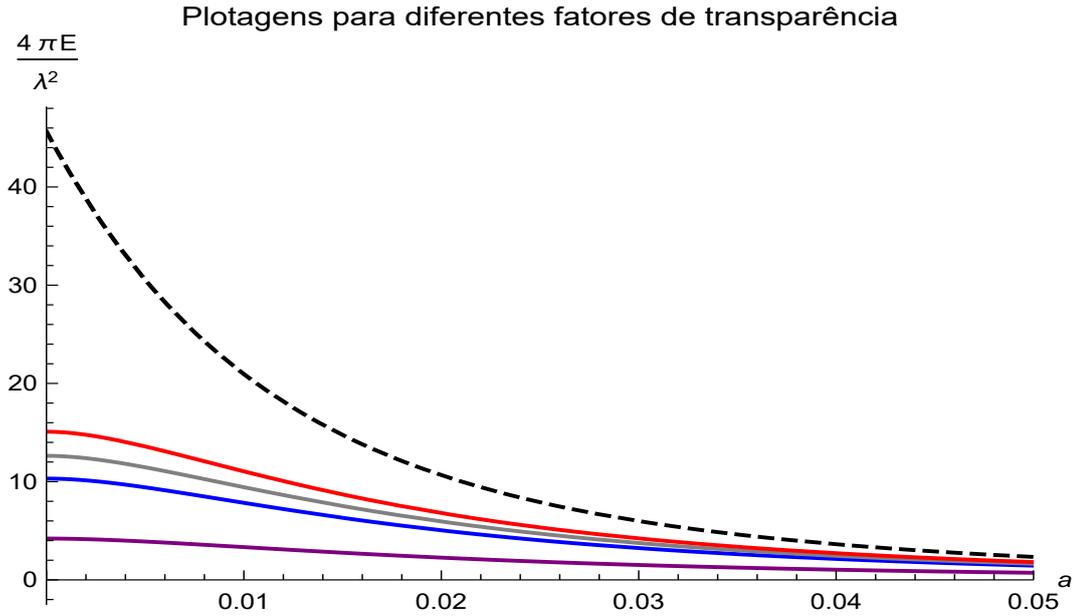


Figura 3.21: Valores da energia F_{MAX} plotados em função da distância para diversos fatores de transparência μ . Em roxo: $\mu = 20$, em azul: $\mu = 80$, em cinza: $\mu = 120$, em vermelho: $\mu = 180$ e em pontilhado $\mu \rightarrow \infty$.

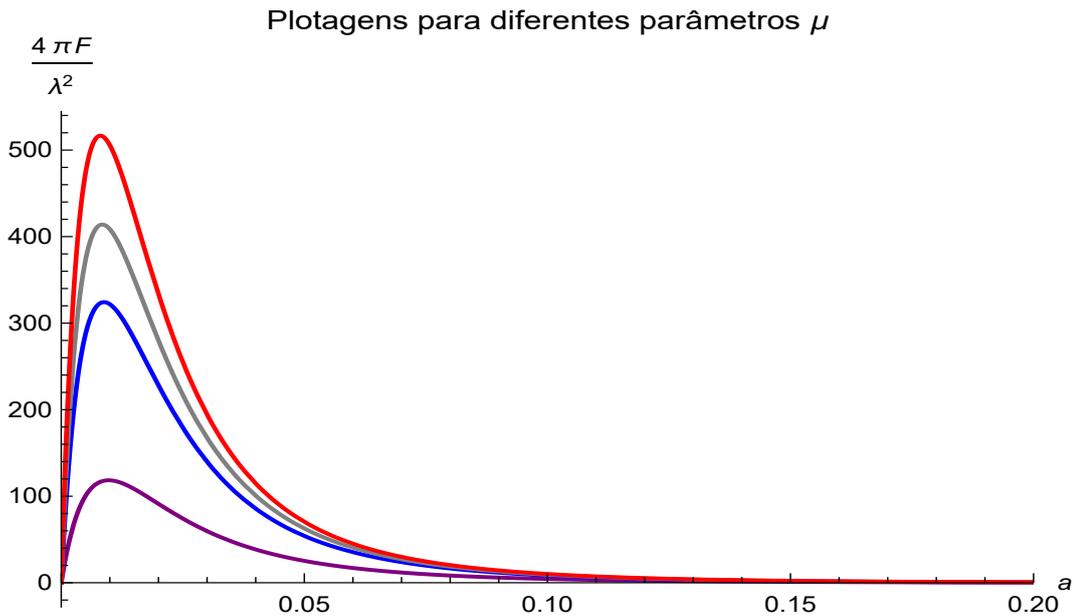


Figura 3.22: Valores da energia F_{MAX} plotados em função da distância para diversos fatores de transparência μ . Em roxo: $\mu = 20$, em azul: $\mu = 80$, em cinza: $\mu = 120$ e em vermelho: $\mu = 180$.

O valor dos extremos na figura 3.22 cresce a medida em que μ cresce. Esse comportamento para μ está evidenciado na figura 3.24, onde também foram plotados valores para a transparência até a ordem de 10^{14} . Valores altos foram acrescentados com o intuito de verificar o comportamento de (3.30) para grandes valores numéricos desse parâmetro. No gráfico 3.24 os

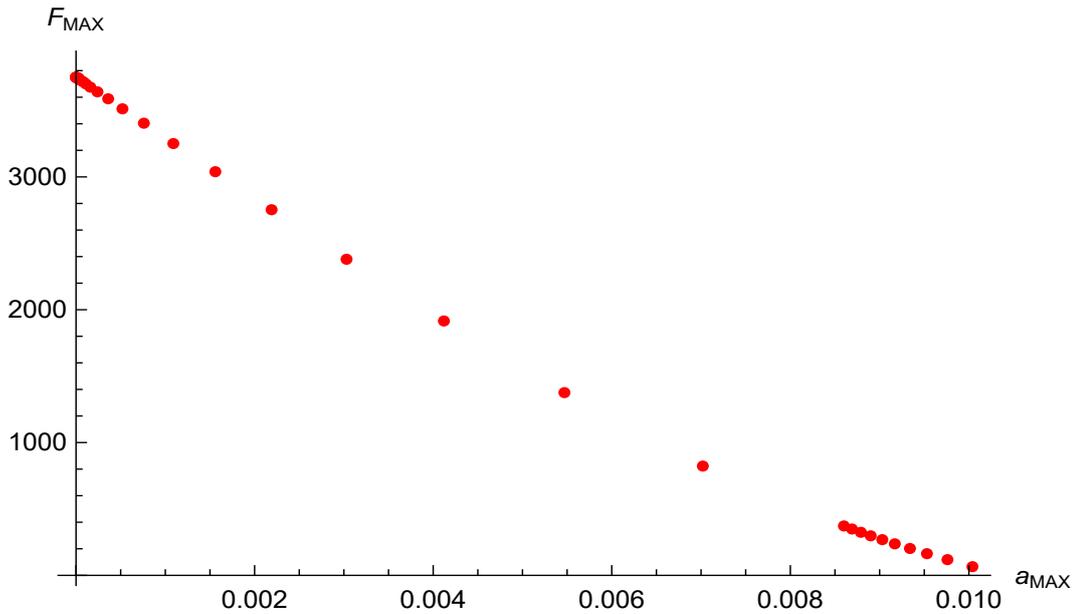


Figura 3.23: Máximos da força para diferentes valores de μ em função das respectivas distâncias a que se encontram da placa.

valores máximos da força F_{MAX} foram plotados pela respectiva transparência, que ocupa o eixo horizontal. Os parâmetros de massa foram mantidos constantes.

O máximo da força é maior para maiores valores de μ , até que o máximo se torna insensível a mudanças do parâmetro de transparência. Isso significa que, mantendo as massas finitas e a distância não nula, não há F_{MAX} infinito para $\mu \rightarrow \infty$. Dessa forma, se o máximo da força é finito para valores grandes de μ a força permanecerá finita. Isso está claro na tendência dos pontos na figura 3.24 e *a priori* pode ser verificado analiticamente.

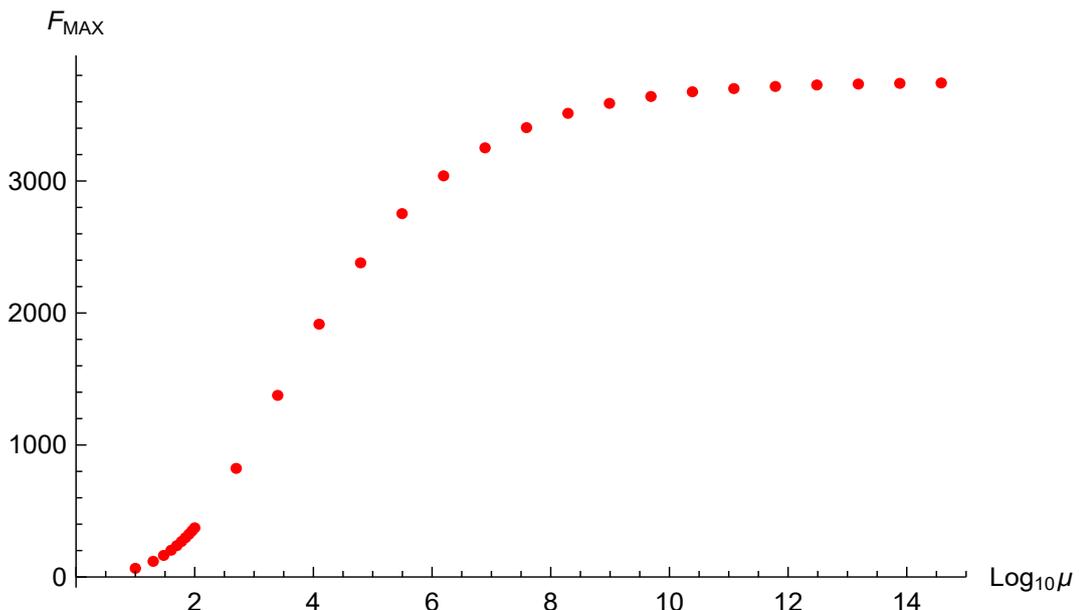


Figura 3.24: Máximos da força plotados pelos diferentes valores de $\text{Log}_{10}\mu$.

O estudo da finitude da expressão para força com μ tendendo a infinito por meio analítico, ocorre aplicando o limite na expressão para força

$$\begin{aligned}
 F(\mu \rightarrow \infty, M, m, a) &= - \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \times \\
 &\times \left[(m_2^2 + r^2)^{1/2} (m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 + r^2)^{1/2} a} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} (m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} a} \right] \times \\
 &\times \frac{2\mu \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} a} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_1^2 + r^2)^{1/2}} \right]}{4R^2 (m_1^2 + r^2) (m_2^2 + r^2) + 2\mu R (m_1^2 + r^2)^{1/2} (m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \\
 &= - \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \times \\
 &\times \left[(m_2^2 + r^2)^{1/2} (m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 + r^2)^{1/2} a} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} (m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} a} \right] \times \\
 &\times \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{2\mu \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} a} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_1^2 + r^2)^{1/2}} \right]}{4R^2 (m_1^2 + r^2) (m_2^2 + r^2) + 2\mu R (m_1^2 + r^2)^{1/2} (m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \\
 &= - \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \frac{2 \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} a} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_1^2 + r^2)^{1/2}} \right]}{2R (m_1^2 + r^2)^{1/2} (m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \times \\
 &\times \left[(m_2^2 + r^2)^{1/2} (m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 + r^2)^{1/2} a} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} (m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} a} \right].
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

A equação (3.53) nos dá a força para $\mu \rightarrow \infty$ como função da distância e dos parâmetros de massa. Nesse caso temos o maior valor de extremo para a força, que ocorre em $a = 0$, ou seja, bem em cima do plano potencial, onde a carga está em cima da placa. Esse fato já havia sido verificado numericamente no gráfico 3.22, e agora temos uma constatação analítica. Realizando integrações numéricas da equação (3.53) para $m = 100$ e $M = 10$, temos os gráficos da figura 3.25.

Na figura 3.26 temos o comportamento dos máximos da força em função de μ para valores da massa de Podolsky iguais a $m = 100$, $m = 150$, $m = 300$ e $m = 1000$

Quando m tende a infinito, a lagrangiana se torna a lagrangiana (3.33). Dessa forma, fazer m e então μ tenderem a infinito na Lagrangiana original deve prover resultado semelhante ao obtido, no limite $\mu \rightarrow \infty$, por Camilo *et al.* Eles encontram em seu estudo um valor para a força dado por

$$F(\mu \rightarrow \infty, M, a) = \frac{\lambda^2}{8\pi} \frac{e^{-2|a|M}}{2a^2} + \frac{M\lambda^2}{8\pi} \frac{e^{-2|a|M}}{2a}. \tag{3.54}$$

A fim de verificar a consistência da força (3.53), no limite da massa de Podolsky indo a infinito, escrevemos

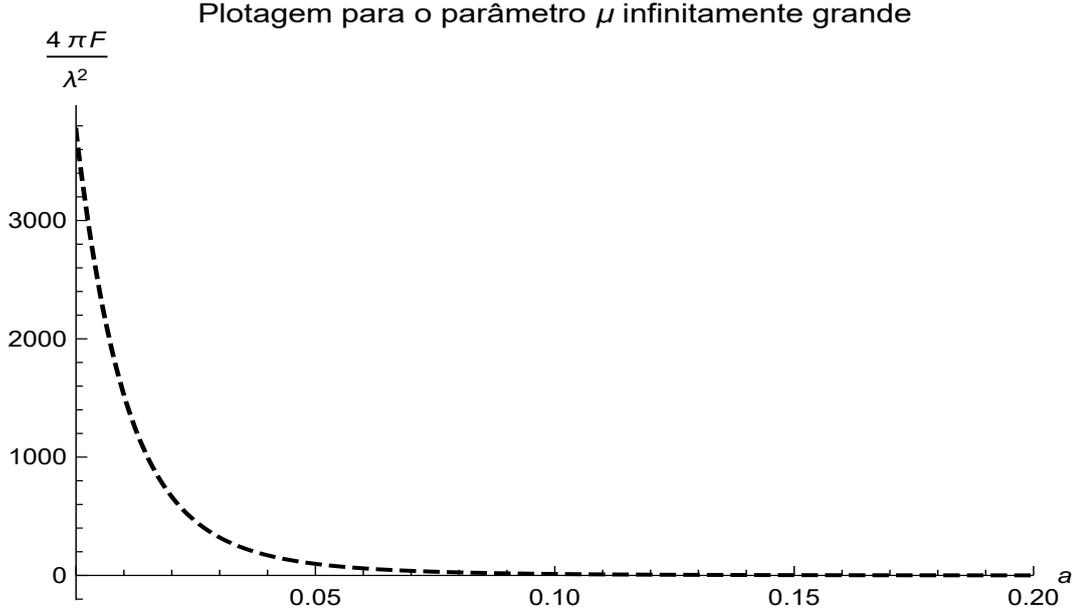


Figura 3.25: Plotagem do comportamento da expressão (3.53) no limite em que $\mu \rightarrow \infty$.

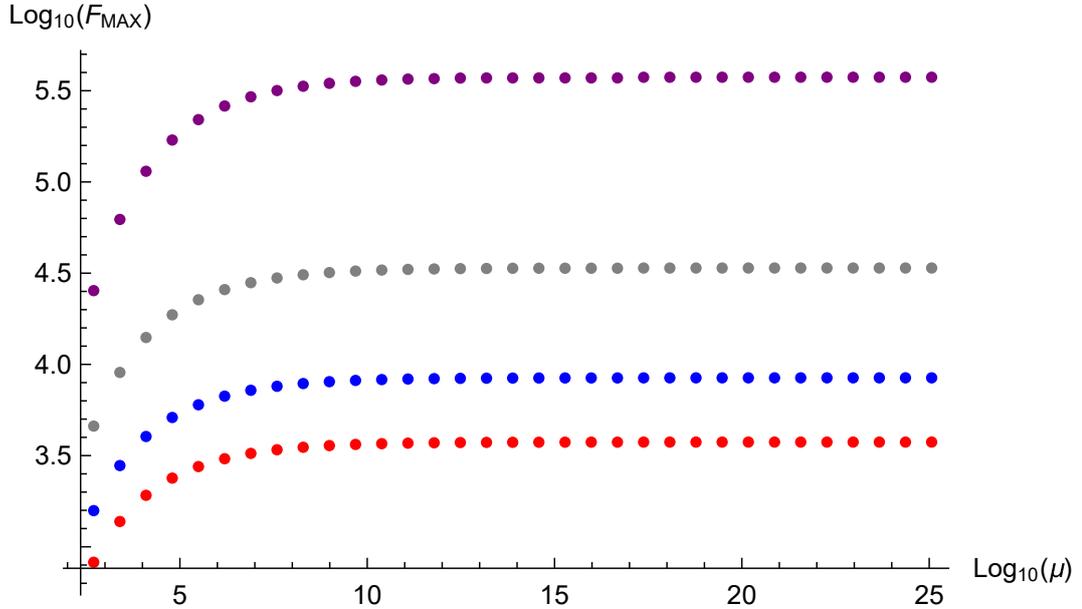


Figura 3.26: Máximos da força plotados pelos diferentes valores de $\text{Log}_{10}\mu$ para diferentes massas de Podolsky. Em vermelho: $m = 100$, em azul: $m = 150$, em cinza: $m = 300$ e em roxo: $m = 1000$

$$\begin{aligned}
 F(\mu \rightarrow \infty, M, m \rightarrow \infty, a) &= - \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \times \\
 &\times \frac{2 \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2}|a|} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_1^2 + r^2)^{1/2}} \right]}{2R(m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \times \\
 &\times \left[(m_2^2 + r^2)^{1/2}(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 + r^2)^{1/2}|a|} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2}|a|} \right]
 \end{aligned}$$

newpage

$$\begin{aligned}
 F(\mu \rightarrow \infty, M, m \rightarrow \infty, a) &= -\frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \times \\
 &\times \frac{2 \lim_{m \rightarrow \infty} \left[(m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} a} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} e^{-|a|(m_1^2 + r^2)^{1/2}} \right]}{2R(m_1^2 + r^2)^{1/2}(m_2^2 + r^2)^{1/2} [(m_1^2 + r^2)^{1/2} - (m_2^2 + r^2)^{1/2}]} \times \\
 &\times \lim_{m \rightarrow \infty} \left[(m_2^2 + r^2)^{1/2} (m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_1^2 + r^2)^{1/2} |a|} - (m_2^2 + r^2)^{1/2} (m_1^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m_2^2 + r^2)^{1/2} |a|} \right] \\
 F(\mu \rightarrow \infty, M, m \rightarrow \infty, a) &= -\frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r e^{-2|a|(M^2 + r^2)^{1/2}}
 \end{aligned}$$

que após a integração resulta em

$$F(\mu \rightarrow \infty, M, m \rightarrow \infty, a) = \frac{\lambda^2}{8\pi} \frac{e^{-2|a|M}}{2a^2} + \frac{M\lambda^2}{8\pi} \frac{e^{-2|a|M}}{2a}. \quad (3.55)$$

A expressão (3.55) é exatamente a mesma daquela já obtida na literatura ^[22], porém agora encontrada a partir de condições especiais impostas ao campo de Lee-Wick. Como essa equação descreve um campo de Yukawa, pode-se afirmar que esse tipo de campo é um campo escalar do tipo Lee-Wick, com massa de Podolsky, infinita no qual a placa potencial é completamente refletiva à interação.

Além disso, a equação (3.55) informa que para uma massa de Podolsky infinita, a força somente será infinita se o valor da posição for zero. Isso significa que os máximos da força descritos em 3.26 para diferentes massas de Podolsky, não crescem indefinidamente com o crescimento de m .

Para tentar verificar se a equação (3.55) apresenta um ponto extremo, calculamos a derivada

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{da} F(\mu \rightarrow \infty, M, m \rightarrow \infty, a) &= \frac{d}{da} \left(\frac{\lambda^2}{8\pi} \frac{e^{-2|a|M}}{2a^2} + \frac{M\lambda^2}{8\pi} \frac{e^{-2|a|M}}{2a} \right) \\
 &= -\frac{M e^{-2\sqrt{a^2}M}}{2a\sqrt{a^2}} + \frac{M e^{-2\sqrt{a^2}M} (2\sqrt{a^2}M + 1)}{2a\sqrt{a^2}} + \frac{e^{-2\sqrt{a^2}M} (2\sqrt{a^2}M + 1)}{2a^3} \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

que resolvida em termos de a resulta em valores imaginários. Isso significa que não existem pontos de extremo no conjunto dos reais. Os gráficos 3.22 e 3.25 forneciam indícios de que para m e μ grandes, o pico estaria muito próximo da placa. Aparentemente, para m e μ indo a infinito, a posição do pico coincide com a placa.

Outro caso extremo que foi considerado é aquele em que $M = 0$. Nesse caso, as massas m_1 e m_2 se tornaram respectivamente $m_1 = m$ e $m_2 = 0$. Isso faz com que a expressão 3.53 possa

ser escrita de modo mais simples, como segue

$$F(\mu \rightarrow \infty, M = 0, m, a) = -\frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \frac{2 \left[(m^2 + r^2)^{1/2} e^{-ar} - r e^{-|a|(m^2+r^2)^{1/2}} \right]}{2r(m^2 + r^2)^{1/2} [(m^2 + r^2)^{1/2} - r]} \times \quad (3.57)$$

$$\times \left[r(m^2 + r^2)^{1/2} e^{-(m^2+r^2)^{1/2}a} - r(m^2 + r^2)^{1/2} e^{-ar} \right],$$

que resulta em

$$F(\mu \rightarrow \infty, M = 0, m, a) = -\frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \frac{\left[(m^2 + r^2)^{1/2} e^{-ar} - r e^{-|a|(m^2+r^2)^{1/2}} \right]}{[(m^2 + r^2)^{1/2} - r]} \times \quad (3.58)$$

$$\times \left[e^{-(m^2+r^2)^{1/2}a} - e^{-ar} \right].$$

Aplicando o limite da massa de Podolsky indo a infinito na expressão 3.58, o caso deve se reduzir àquele obtido para o campo de Klein-Gordon com a massa $M = 0$, e efetuando o limite, temos que

$$F(\mu \rightarrow \infty, M = 0, m \rightarrow \infty, a) = -\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \frac{\left[(m^2 + r^2)^{1/2} e^{-ar} - r e^{-|a|(m^2+r^2)^{1/2}} \right]}{[(m^2 + r^2)^{1/2} - r]} \times$$

$$\times \left[e^{-(m^2+r^2)^{1/2}a} - e^{-ar} \right]$$

$$= -\frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left[(m^2 + r^2)^{1/2} e^{-ar} - r e^{-|a|(m^2+r^2)^{1/2}} \right]}{[(m^2 + r^2)^{1/2} - r]} \times$$

$$\times \left[e^{-(m^2+r^2)^{1/2}a} - e^{-ar} \right]. \quad (3.59)$$

o que resulta na integral

$$F(\mu \rightarrow \infty, M = 0, m \rightarrow \infty, a) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^\infty dr r e^{-2ar} \quad (3.60)$$

que quando calculada fornece

$$F(\mu \rightarrow \infty, M = 0, m \rightarrow \infty, a) = \frac{\lambda^2}{8\pi} \frac{1}{2a^2}. \quad (3.61)$$

A força descrita em (3.61) é exatamente igual á força em (3.54) com M sendo tomado nulo. Esse resultado é importante por mostrar que adotando a massa de Podolsky e o parâmetro de acoplamento infinitos, a força possui a mesma forma que a obtida na interação de Coulomb intermediada por um campo escalar (onde temos a natureza atrativa da interação).

Variações no fator de transparência podem levar a diversas análises e diferentes resultados. Nessa seção, mostrou-se que incrementos finitos no fator de transparência levam a incrementos na energia, desde que mantido os demais parâmetros fixos. Esse comportamento também ocorreu para a força, sendo os valores extremos maiores para μ maiores. Ao fazer o fator

μ tender a infinito a energia permaneceu finita para todo a , com uma maior curvatura na região em que a distância é pequena, como demonstrado pela linha pontilhada em 3.20. Os extremos da força, que são maiores para distâncias menores, não cresceram indefinidamente com o crescimento de μ , mas ficaram insensíveis à mudanças nesse parâmetro quando ele se torna grande. Uma vez aplicado o limite analítico $\mu \rightarrow \infty$, o pico para a força se aproxima suficientemente da placa para, numericamente, sua posição ser considerada $a = 0$.

Além de $\mu \rightarrow \infty$, uma vez feito $m \rightarrow \infty$, foi possível calcular analiticamente a força correspondente. Nesse caso reobtivemos resultados que já encontrados previamente na literatura, para o campo de Klein-Gordon (sem derivadas de ordem superior).^[22] Com esses parâmetros infinitos, a força permanece finita e dependente de M e a , descrevendo uma campo tipo Yukawa, com massa M . A força se torna infinitamente grande para uma distância infinitamente próxima da placa. Para o caso em que $M = 0$, encontrou-se a força de interação de Coulomb. Esse resultado também já havia sido previamente encontrado na literatura por Camilo *et al.* (2013). A coincidência dos cálculos analíticos que puderam ser analisados nos casos extremos, indica a consistência do estudo desenvolvido.

Capítulo 4

Eletrodinâmica de Lee-Wick na presença de potenciais

Efeitos originados pela presença de um plano condutor perfeito na eletrodinâmica de Lee-Wick foram exaustivamente analisados na referência [23]. Dentre esses efeitos destaca-se a interação do plano com uma carga pontual estacionária.

Um importante ponto a ser estudado consiste na análise da eletrodinâmica de Lee-Wick na presença de espelho plano não necessariamente perfeitamente condutor. A presença desse tipo de espelho pode ser simulada por um potencial tipo delta de Dirac acoplado ao campo de calibre. O problema análogo para o campo escalar foi tratado no capítulo 3 deste trabalho. Nesse capítulo fazemos o estudo do campo vetorial.

Inicialmente calculamos o propagador do campo de calibre na presença do potencial. Uma vez encontrado o propagador, encontramos a energia e a força de interação entre o potencial e uma carga pontual. Obtivemos os resultados em forma de quadratura. Alguns casos limítrofes foram examinados. Casos estes importante para manifestar a consistência dos resultados até então obtidos.

Uma análise numérica foi desenvolvida a fim de explicitar o comportamento das expressões para a força e energia encontradas. Casos adicionais foram discutidos com o intuito de entender o comportamento das expressões a medida em que se alteram os parâmetros de acoplamento do modelo.

4.1 O propagador

Nessa secção consideramos a eletrodinâmica de Lee-Wick na presença de um potencial externo tipo delta de Dirac concentrado ao longo de um plano. O modelo é definido em um espaço $3 + 1$ dimensional com métrica $+, -, -, -$. Escolhemos um sistema de eixos no qual o potencial se localiza no plano $x^3 = 0$. Vamos definir o quadri vetor normal à esse plano como $S^\gamma = \eta^\gamma_3$ e denotar por μ a constante de acoplamento entre o campo e o potencial. Consideramos também a presença de fontes externas J^μ . A lagrangeana do modelo é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4m^2}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \mu \left(\frac{1}{2}S^\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)^2 \delta(x^3) - \mathcal{J}^\mu A_\mu, \quad (4.1)$$

com A^μ sendo o quadri vetor potencial e $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ o tensor intensidade de campo eletromagnético. O símbolo \square representa o operador D'Alambertiano, $\square = \partial^\alpha \partial_\alpha$ e m é a massa

de Podolsky.

Introduzimos também um termo de fixação de calibre, sendo ξ um fator de calibre [30]. Por fim, para o índice de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$, a convenção adotado foi tal que $\epsilon^{0123} = 1$.

A Lagrangeana (4.1) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_\mu \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu - \mathcal{J}^\nu A_\nu . \quad (4.2)$$

onde definimos o operador

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} = \mathcal{O}^{(0)\mu\nu} + \Delta \mathcal{O}^{\mu\nu} . \quad (4.3)$$

com o operador do campo de Lee-Wick livre

$$\mathcal{O}^{(0)\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \left(1 + \frac{\square}{m^2} \right) \square - \left(1 - \frac{1}{\xi} + \frac{\square}{m^2} \right) \partial^\mu \partial^\nu , \quad (4.4)$$

e o termo de correção

$$\Delta \mathcal{O}^{\mu\nu} = \frac{2}{\mu} \delta(x^3) \left(\eta_{\parallel}^{\mu\nu} \square_{\parallel} - \partial_{\parallel}^{\mu} \partial_{\parallel}^{\nu} \right) , \quad (4.5)$$

onde $\eta_{\parallel}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \eta^{\mu 3} \eta^{\nu 3}$ e $\square_{\parallel} = \partial_{\parallel}^{\alpha} \partial_{\parallel \alpha}$

A função de Green livre (na ausência do potencial) correspondente deve satisfazer a equação diferencial

$$\mathcal{O}^{(0)\mu\nu}(x) G_{\nu\beta}^{(0)}(x, y) = \eta_{\beta}^{\mu} \delta^4(x - y) \quad (4.6)$$

$$\left[\eta^{\mu\nu} \left(1 + \frac{\square}{m^2} \right) \square - \left(1 - \frac{1}{\xi} + \frac{\square}{m^2} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] G_{\nu\beta}^{(0)}(x, y) = \eta_{\beta}^{\mu} \delta^4(x - y) . \quad (4.7)$$

No calibre de Feynman ($\xi = 1$), podemos mostrar que

$$G_{\mu\nu}^{(0)}(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{1}{p^2} \right) \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right) e^{-ip \cdot (x-y)} , \quad (4.8)$$

sendo essa a função de Green para a parte livre.

Sob a presença do potencial externo, a função de Green pode ser obtida com os mesmos procedimentos empregados nas referências [22][31][32]. No nosso caso, pode-se mostrar que a função de Green deve satisfazer a equação

$$G_{\mu\nu}(x, y) = G_{\mu\nu}^{(0)}(x, y) - \int d^4 z G_{\mu\gamma}(x, z) \Delta \mathcal{O}^{\gamma\sigma}(z) G_{\sigma\nu}^{(0)}(z, y) . \quad (4.9)$$

Para resolver a equação (4.9), será conveniente escrever $G_{\mu\nu}(x, y)$ e $G_{\mu\nu}^{(0)}(x, y)$ em termos das transformadas de Fourier nas direções paralelas ao espelho, da seguinte forma

$$G_{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x^3, y^3; p_{\parallel}) e^{-ip_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - y_{\parallel})} , \quad (4.10)$$

$$G_{\mu\nu}^{(0)}(x, y) = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)}(x^3, y^3; p_{\parallel}) e^{-ip_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - y_{\parallel})} , \quad (4.11)$$

com $x_{\parallel}^{\mu} = (x^0, x^1, x^2)$ sendo a coordenada paralela e $p_{\parallel}^{\mu} = (p^0, p^1, p^2)$ o momento paralelo ao espelho.

As funções $\mathcal{G}_{\mu\nu}(x^3, y^3; p_{\parallel})$ e $\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)}(x^3, y^3; p_{\parallel})$ são chamadas de funções de Green reduzidas.

Usando o fato de que

$$\int \frac{dp^3}{(2\pi)} \frac{e^{ip^3(x^3-y^3)}}{p^2 - m^2} = -\frac{i}{2\Gamma} e^{i\Gamma|x^3-y^3|}, \quad \int \frac{dp^3}{(2\pi)} \frac{e^{ip^3(x^3-y^3)}}{p^2} = -\frac{i}{2L} e^{iL|x^3-y^3|}, \quad (4.12)$$

com p^3 sendo a coordenada perpendicular ao espelho, $\Gamma = \sqrt{p_{\parallel}^2 - m^2}$ e $L = \sqrt{p_{\parallel}^2}$, com as equações (4.8) e (4.11) podemos mostrar que o propagador livre reduzido é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)}(x^3, y^3; p_{\parallel}) &= \frac{i}{2} \left\{ \left(\frac{e^{iL|x^3-y^3|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|x^3-y^3|}}{\Gamma} \right) \left(\eta_{\parallel\mu\nu} - \frac{p_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu}}{m^2} \right) + \right. \\ &\quad - \frac{1}{m^2} \text{sgn}(x^3 - y^3) \left(e^{iL|x^3-y^3|} - e^{i\Gamma|x^3-y^3|} \right) \left(\eta_{\nu 3} p_{\parallel\mu} + \eta_{\mu 3} p_{\parallel\nu} \right) + \\ &\quad \left. - \left[\left(\frac{e^{iL|x^3-y^3|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|x^3-y^3|}}{\Gamma} \right) + \frac{1}{m^2} \left(L e^{iL|x^3-y^3|} - \Gamma e^{i\Gamma|x^3-y^3|} \right) \right] \eta_{\mu 3} \eta_{\nu 3} \right\}, \quad (4.13) \end{aligned}$$

com a função sinal definida por $\text{sgn}(x) = 1$ para $(x > 0)$, $\text{sgn}(x) = -1$ para $(x < 0)$ e $\text{sgn}(0) = 0$.

Substituindo (4.10) e (4.11) em (4.9) temos que

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x^3, y^3; p_{\parallel}) e^{-ip_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - y_{\parallel})} &= \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)}(x^3, y^3; p_{\parallel}) e^{-ip_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - y_{\parallel})} + \\ - \int d^4 z \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_{\mu\gamma}(x^3, z^3; p_{\parallel}) e^{-ip_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - z_{\parallel})} \Delta \mathcal{O}^{\gamma\sigma}(z) &\int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_{\sigma\nu}^{(0)}(z^3, y^3; p_{\parallel}) e^{-ip_{\parallel} \cdot (z_{\parallel} - y_{\parallel})}, \quad (4.14) \end{aligned}$$

Com a definição (4.5) podemos efetuar a integração em x^3 facilmente, o que nos leva a

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(x^3, y^3; p_{\parallel}) = \mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)}(x^3, y^3; p_{\parallel}) + i\mu \mathcal{G}_{\mu\gamma}(x^3, y^3; p_{\parallel}) p_{\parallel}^2 \left(\eta_{\parallel\gamma\nu} - \frac{p_{\parallel\gamma} p_{\parallel\nu}}{p_{\parallel}^2} \right) \left(\frac{e^{iL|a-y^3|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|a-y^3|}}{\Gamma} \right). \quad (4.15)$$

Ainda é necessário resolver para $\mathcal{G}_{\mu\nu}(x^3, y^3; p_{\parallel})$ em termos da parte livre. Para isso, avaliemos a equação (4.15) em $y^3 = 0$, o que possibilita a obtenção da expressão

$$\mathcal{G}_{\mu\gamma}(x^3, 0; p_{\parallel}) \left[\eta_{\parallel\gamma\nu} - i\mu \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\Gamma} \right) p_{\parallel}^2 \left(\eta_{\parallel\gamma\nu} - \frac{p_{\parallel\gamma} p_{\parallel\nu}}{p_{\parallel}^2} \right) \right] = \mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)}(x^3, 0; p_{\parallel}), \quad (4.16)$$

com $\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)}(x^3, 0; p_{\parallel})$ sendo dada pela expressão (4.13). Uma vez com (4.16) e (4.13), multiplicar pela esquerda ambos os membros da equação (4.16) pela inversa do termo entre colchetes. Isso

nos leva a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{\mu\nu}(x^3, 0; p_{\parallel}) &= \frac{iB(p_{\parallel})}{2} \left\{ \left(\frac{e^{iL|x^3|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|x^3|}}{\Gamma} \right) \left[\eta_{\parallel\mu\nu} - \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{B(p_{\parallel})} + i\mu m^2 \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\Gamma} \right) \right) p_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{B(p_{\parallel})} \eta_{\mu 3} \eta_{\nu 3} \right] - \frac{1}{m^2 B(p_{\parallel})} \operatorname{sgn}(x^3) \left(e^{iL|x^3|} - e^{i\Gamma|x^3|} \right) (\eta_{\mu 3} p_{\parallel\nu} - \eta_{\nu 3} p_{\parallel\mu}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{m^2 B(p_{\parallel})} \left(L e^{iL|x^3|} - \Gamma e^{i\Gamma|x^3|} \right) \eta_{\mu 3} \eta_{\nu 3} \right\}, \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

com a definição da função $B(p_{\parallel})$

$$B(p_{\parallel}) = \left[1 - i\mu p_{\parallel}^2 \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\Gamma} \right) \right]^{-1}. \quad (4.18)$$

Substituindo (4.17) em (4.15) e usando as Eqs.(4.10), (4.11) e (4.18), o propagador total de Lee-Wick, isto é, a parte livre e a parte de interação devido à presença do plano potencial, fica dado por

$$G_{\mu\nu}(x, y) = G_{\mu\nu}^{(0)}(x, y) + G_{\mu\nu}^{(i)}(x, y), \quad (4.19)$$

com

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu}^{(i)}(x, y) &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} e^{-ip_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - y_{\parallel})} \left(\eta_{\parallel\mu\nu} - \frac{p_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu}}{p_{\parallel}^2} \right) \frac{p_{\parallel}^2}{\frac{1}{\mu} - ip_{\parallel}^2 \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\Gamma} \right)} \\
 &\quad \times \left(\frac{e^{iL|x^3|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|x^3|}}{\Gamma} \right) \left(\frac{e^{iL|y^3|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|y^3|}}{\Gamma} \right). \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

O espelho semitransparente é responsável por gerar uma correção no propagador do campo de Lee-Wick. Pode-se perceber que, tomando o limite $m \rightarrow \infty$ in Eq. (4.20), obtém-se o propagador de fóton sob a presença de um espelho plano semitransparente^[25]. Tomando o limite $\mu \rightarrow \infty$, obtém-se o propagador de Lee-Wick sob a presença de um espelho perfeito, já obtido por Barone e Nogueira (2015)^[23].

4.2 Energia e força de interação

Nessa seção consideramos um sistema composto pelo plano potencial e uma carga pontual estacionária. A obtenção da forma geral da energia de interação entre a fonte pontual e o espelho é idêntica à realizada para o campo escalar. Da mesma forma, a energia calculada depende somente da parte de interação do propagador e da densidade de corrente. Assim, a energia é escrita como

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int d^4 x d^4 y J^{\mu}(x) G_{\mu\nu}^{(i)}(x, y) J^{\nu}(y). \quad (4.21)$$

Sem perda de generalidade, podemos escolher a posição da carga como $\mathbf{a} = (0, 0, a)$, o que equivale a dizer que a distância entre a carga e o espelho é a . Desse modo, a quadricorrente do sistema fica

$$J^\mu(x) = \lambda \eta^{\mu 0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \quad (4.22)$$

onde o parâmetro λ é o parâmetro de acoplamento entre a carga e o campo. Esse parâmetro pode ser entendido como a intensidade de carga elétrica. Substituindo (4.22) em (4.21) e então usando (4.20) temos que

$$\begin{aligned} E &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int d^4x d^4y \lambda \eta^{\mu 0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}) G_{\mu\nu}^{(i)}(x, y) \lambda \eta^{\nu 0} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{a}) \\ &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^4x d^4y \lambda \eta^{\mu 0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \int d^3p_{\parallel} e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})} \left(\eta_{\parallel\mu\nu} - \frac{p_{\parallel\mu} p_{\parallel\nu}}{p_{\parallel}^2} \right) \times \\ &\quad \times \frac{p_{\parallel}^2}{\frac{1}{\mu} - ip_{\parallel}^2 \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\Gamma} \right)} \left(\frac{e^{iL|x^3|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|x^3|}}{\Gamma} \right) \left(\frac{e^{iL|y^3|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|y^3|}}{\Gamma} \right) \lambda \eta^{\nu 0} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Integrando nas coordenadas perpendiculares e temporais, podemos escrever

$$E(\mu, m, a) = - \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \int d^2\mathbf{p}_{\parallel} \frac{\mathbf{p}_{\parallel}^2 \sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2 + m^2}}{\left(\frac{1}{\mu} + \sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2} \right) \sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2 + m^2} - \mathbf{p}_{\parallel}^2} \left(\frac{e^{-|a| \sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2}}}{\sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2}} - \frac{e^{-|a| \sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2 + m^2}}}{\sqrt{\mathbf{p}_{\parallel}^2 + m^2}} \right)^2 \quad (4.24)$$

Agora usamos as coordenadas polares e integramos na parte angular

$$E(\mu, m, a) = - \frac{\lambda^2}{8\pi} \int_0^\infty dr r \frac{r^2 \sqrt{r^2 + m^2}}{\left(\frac{1}{\mu} + \sqrt{r^2} \right) \sqrt{r^2 + m^2} - r^2} \left(\frac{e^{-|a| \sqrt{r^2}}}{\sqrt{r^2}} - \frac{e^{-|a| \sqrt{r^2 + m^2}}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \right)^2, \quad (4.25)$$

onde a é a distância entre a carga e o espelho. Assim como para o caso escalar, integrar analiticamente a equação (4.25) não é trivial e talvez impossível. A utilização de métodos complexos fica impossibilitada devido à presença de raízes no denominador.

Diante da impossibilidade de realizar a integral analiticamente, alguns casos limites foram analisados a fim de verificar a consistência. O primeiro caso que pode ser analisado é fazer $m \rightarrow \infty$. Neste limite, a energia se reduz a

$$E(\mu, a) = - \frac{\lambda^2}{8\pi} \frac{e^{\frac{2a}{\mu}}}{\mu} \text{Ei} \left(- \frac{2a}{\mu} \right) - \frac{\lambda^2}{8\pi} \frac{1}{2a} \quad (4.26)$$

com a Ei sendo a função integral exponencial. Com a massa de Podolsky infinita, o termo da Lagrangiana com derivadas de ordem superior desaparece. Dessa forma, o resultado obtido deve ser equivalente ao caso em que inicialmente esse termo não está presente, o que realmente pode ser constatado ao compararmos com o resultado encontrado por Barone e Barone (2014).^[25]

A partir de derivação direta da energia com relação à distância da carga ao espelho, é possível encontrar a força de interação, ainda que em forma de quadratura

$$F(\mu, m, a) = \frac{\lambda^2}{8\pi} \int_0^\infty dr r \frac{2r^2 \sqrt{m^2 + r^2}}{\sqrt{m^2 + r^2} \left(\frac{1}{\mu} + r \right) - r^2} \left(\frac{e^{-ar}}{r} - \frac{e^{-a\sqrt{m^2+r^2}}}{\sqrt{m^2+r^2}} \right) \left(e^{-a\sqrt{m^2+r^2}} - e^{-ar} \right). \quad (4.27)$$

4.3 Análise de casos

Como o ocorrido para o campo escalar, não foi possível resolver analiticamente a integral para a energia (4.25). Essa impossibilidade leva a buscar diferentes análises do resultado pois diversos parâmetros estão envolvidos (μ , m e a).

4.3.1 Análise para a massa de Podolsky

A massa de Podolsky m , presente no denominador do termo de derivadas de ordem superior do campo, surge como um de inércia do campo na teoria de Lee-Wick. Dados experimentais mostram que esse valor é da ordem de 10^{-17} , em unidades naturais.

Energia

A expressão para energia descrita por (4.25) possui dependência nos dois parâmetros de acoplamento da Lagrangiana. Contudo, o parâmetro m provocou alterações mais intensas e significativas na energia, pois ele se encontra no argumento das exponenciais em 4.25. Não foi possível calcular analiticamente a expressão para energia, portanto a única maneira de entender como as alterações desse parâmetro modificam a energia E é através de integrações numéricas.

Na figura 4.1 temos o comportamento da energia em função da distância para alguns valores da massa de Podolsky.

A energia mostrada no gráfico apresenta valores finitos e não nulos para uma posição $a = 0$. Isso está em concordância com a descrição da energia de auto-interação na teoria de Lee-Wick. Os valores de energia são maiores em módulo para massas maiores, porém para todas as massas, a energia tende praticamente da mesma forma a zero com o crescimento da distância à placa.

A massa de Podolsky contribui com um termo $1/m$ para a Lagrangeana do modelo, é correto afirmar que valores maiores da massa significam menor contribuição do segundo termo na Lagrangiana 4.1. Como o gráfico mostra que maiores massas significam maiores energias, quanto menor a contribuição desse segundo termo, maior a energia de interação. Diante disso, é possível notar que o termo $F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu}$, "drena" parte da energia do sistema.

A relação entre a massa e energia indica que, para que haja uma energia máxima, é preciso uma razão $1/m$ mínima, ou seja, uma massa máxima. Como não há restrição à finitude da massa de Podolsky, uma suposição válida é aquela em que $m \rightarrow \infty$. Nesta situação a expressão

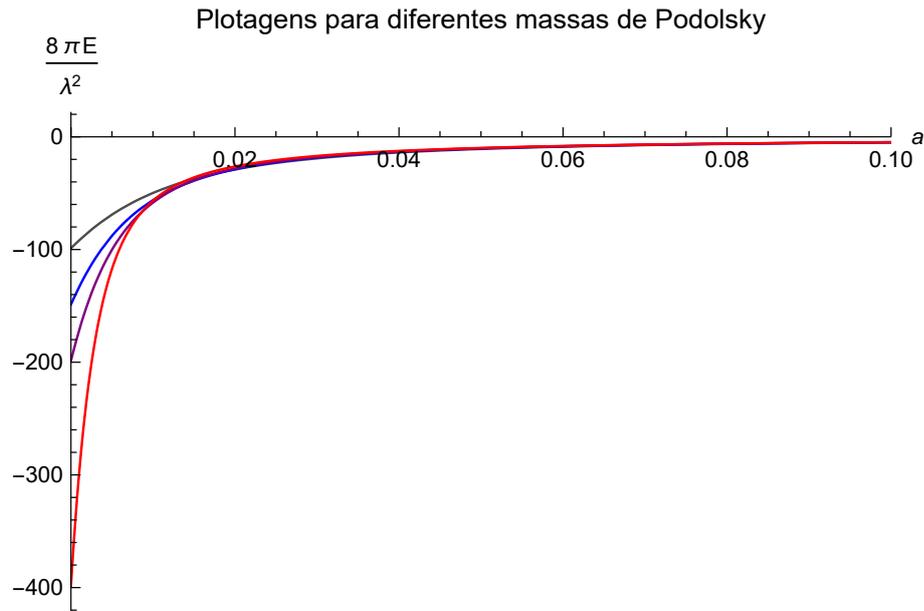


Figura 4.1: Plotagem da energia para diversos valores de m em função da distância a . , em cinza: $m = 100$, em azul: $m = 150$, em roxo: $m = 200$ e em vermelho: $m = 400$.

para a energia se torna a equação 4.26. O gráfico dessa expressão para a energia pela distância levou a figura 4.2.

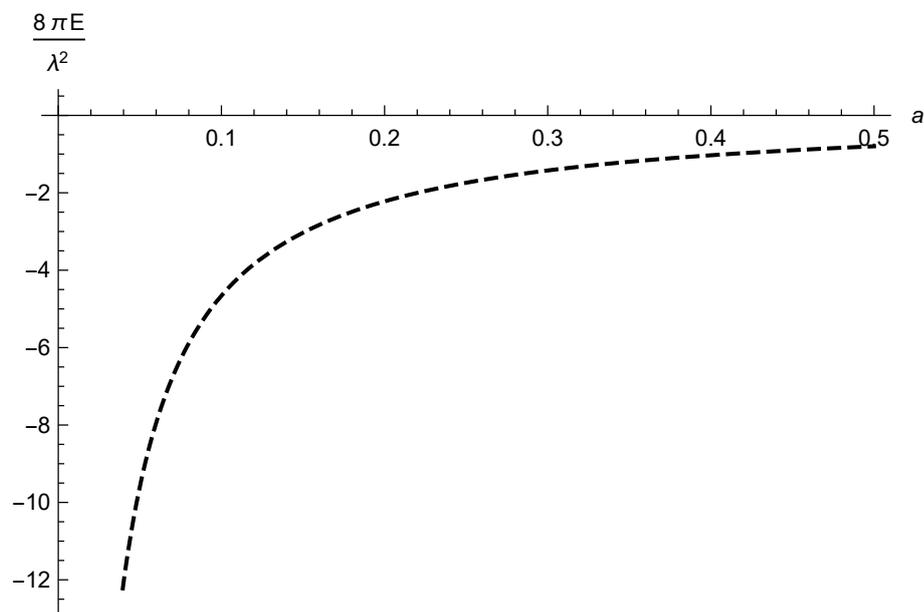


Figura 4.2: Plotagem da energia para o caso limite em que $m \rightarrow \infty$.

Para essa plotagem, a energia se torna grande para pequenos valores da posição. No limite em que a distância vai a zero, a energia vai a infinito. O comportamento para $m \rightarrow \infty$ quando a distância cresce é semelhante ao apresentado por m finito presente em 4.1. O crescimento da energia a infinito ocorre por não haver as derivadas de ordem superior, o que leva a teoria ao

caso eletromagnético clássico. Nesse caso, a energia drenada pelo termo de derivada de ordem superior se torna nula, portanto à medida que a carga se aproxima de sua imagem, isto é, quando se aproxima do espelho, a energia cresce indefinidamente.

Força

Para possibilitar uma compreensão de como as alterações na massa de Podolsky alteram a força, o mesmo tratamento foi adotado para a força, com integrações numéricas. Na figura 4.3 podemos ver vários gráficos da força em função da distância para diferentes valores de m .

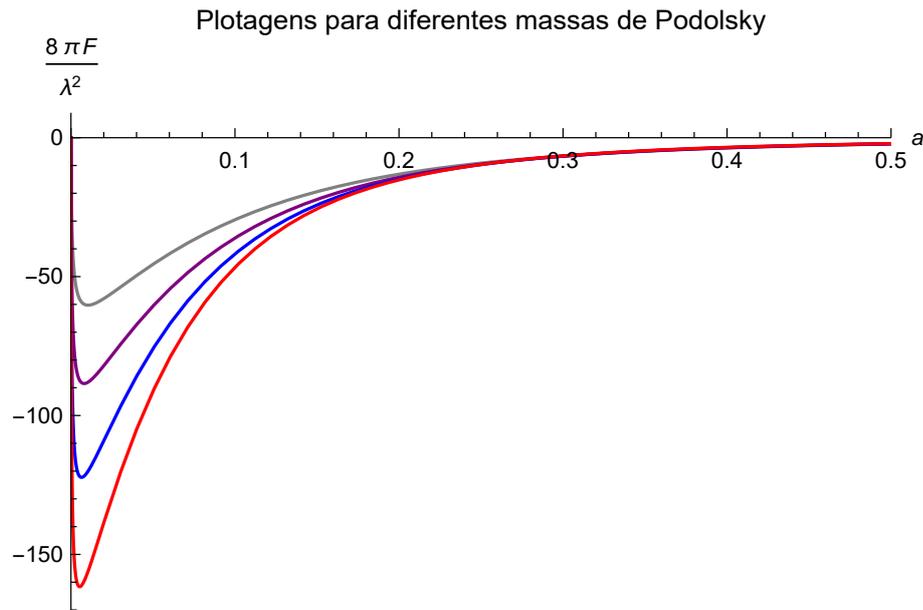


Figura 4.3: Plotagem da energia para diversos valores de m em função da distância a . Em cinza: $m = 10$, em roxo: $m = 12$, em azul: $m = 14$ e em vermelho: $m = 16$.

Assim como a energia, a força é altamente sensível a alterações na massa de Podolsky. Podemos notar que todos os gráficos para as forças sempre apresentam pontos de mínimo, como pode ser visto em 4.3. Além disso, para todas as massas, a força é nula para $a = 0$.

Um fato notado é que, para massas menores, a força tende mais lentamente a zero com o crescimento da distância. Isso fica claro ao observar os gráficos para massas levemente superiores à 16, presentes em 4.4. Este fenômeno ocorre pois a massa está presente na exponencial, multiplicando a distância.

Como não foi possível estabelecer de imediato uma relação entre a posição dos extremos das forças e seus correspondentes valores, fizemos gráficos de valores de extremos da força em função de suas respectivas posições para vários valores de m . O resultado encontra-se na figura 4.5. Nesse gráfico, as massas escolhidas foram de $m = 80$ até $m = 150$, com acréscimos sucessivos de 0.5 a cada iteração. O parâmetro μ foi mantido constante e igual a 15. Quanto maior em módulo o valor do extremo da força, menor as posições deles.

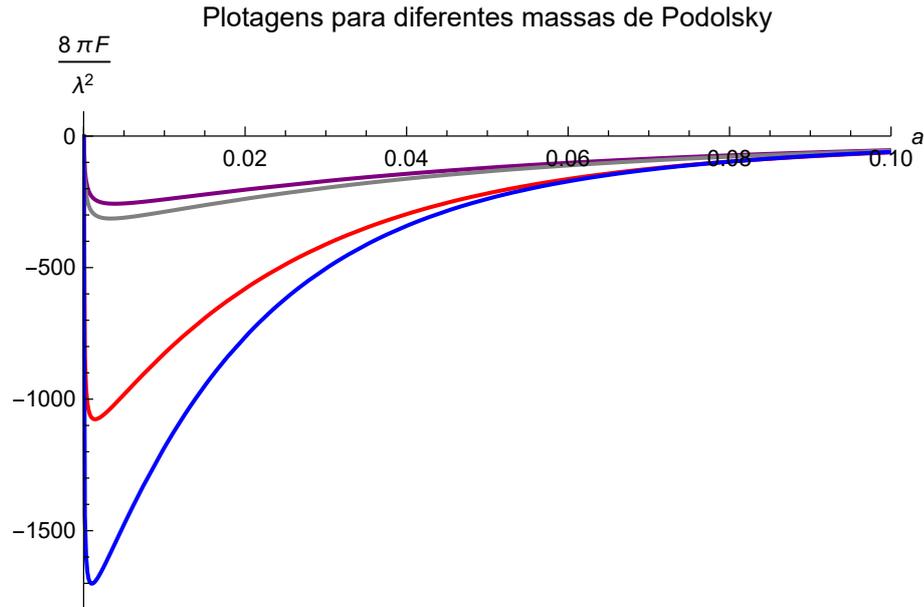


Figura 4.4: Plotagem da força para diversos valores de m em função da distância a . Em cinza: $m = 32$, em roxo: $m = 36$, em azul: $m = 38$ e em vermelho: $m = 50$.

Como existe uma relação crescente entre o mínimo da força e a massa de Podolsky, o aumento no valor da massa torna o extremo mais próximo à placa, como mostrado em 4.6. Isso indiretamente indica que o decrescimento da força acontece de modo cada vez mais intenso. Portanto, para uma dada fonte, o máximo em módulo da interação depende de m .

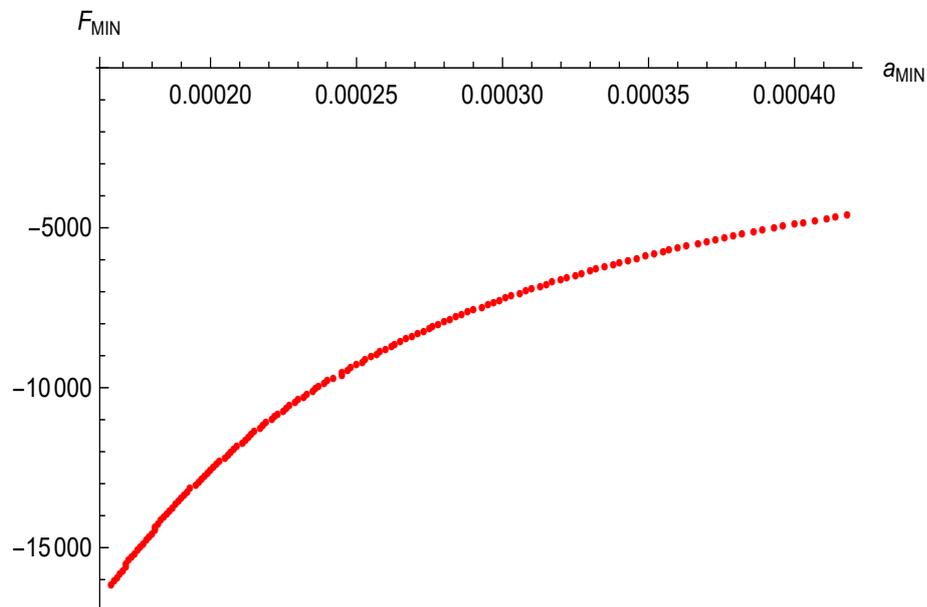


Figura 4.5: Plotagem dos valores mínimos da força, para cada massa de Podolsky pela posição de cada mínimo.

A dispersão dos pontos em 4.5 indica que, para pequenas massas de Podolsky, os valores

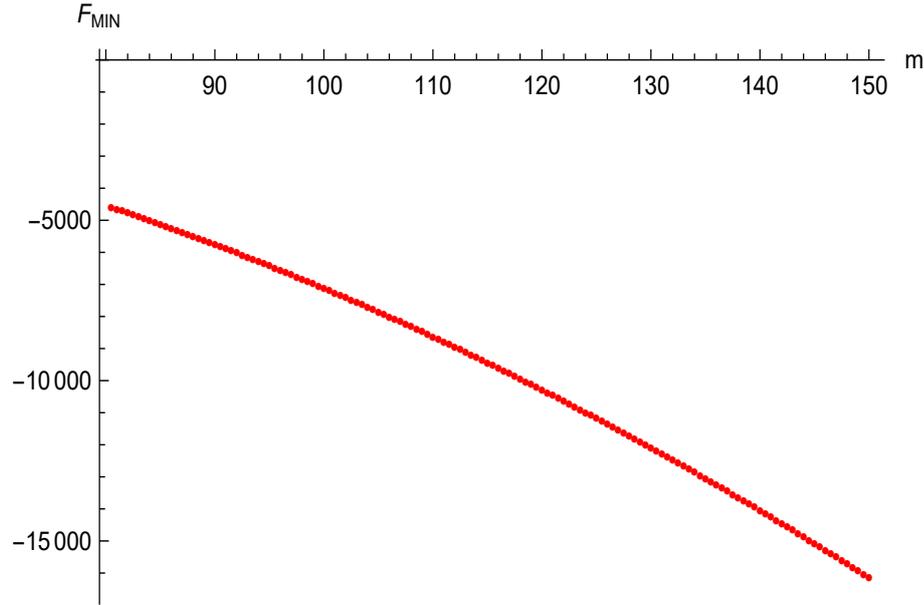


Figura 4.6: Plotagem dos mínimos da força pela massa de Podolsky de cada mínimo.

para mínimo da força serão também pequenos e localizados a grandes distâncias da placa. Para minimizar a força de interação, deve-se minimizar o valor de m . Assim, quando m se faz nulo ou muito próximo de zero, o mínimo da força estará localizado a uma distância a tal que $a \rightarrow \infty$, com um valor F_{MIN} nulo.

O outro limite extremo ocorre para $m \rightarrow \infty$. Nesta situação a força surge da derivação de (4.26), o que nos levou à expressão

$$\begin{aligned} F(\mu, m \rightarrow \infty, a) &= -\frac{d}{da} E(\mu, m \rightarrow \infty, a) \\ &= -\frac{d}{da} \left[-\frac{\lambda^2}{8\pi} \frac{e^{\frac{2a}{\mu}}}{\mu} \text{Ei} \left(-\frac{2a}{\mu} \right) - \frac{\lambda^2}{8\pi} \frac{1}{2a} \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

portanto a força será

$$F(\mu, m \rightarrow \infty, a) = \frac{\lambda^2}{8\pi} \left[-\frac{1}{2a^2} + \frac{2e^{\frac{2a}{\mu}}}{\mu^2} \text{Ei} \left(-\frac{2a}{\mu} \right) + \frac{1}{a\mu} \right]. \quad (4.29)$$

A figura 4.7 nos fornece a força (4.29) em função da distância. Por esse gráfico, podemos ver que não há um ponto de mínimo. A força nesse caso assume valores no infinito negativo quando a distância vai a zero. De acordo com a figura 4.5, quanto menor o valor do mínimo da força, menor é a posição em que ela se encontra. Diante desse fato, é possível interpretar a aparente ausência de um pico para $m \rightarrow \infty$ como um caso especial no qual o valor do pico é $F_{MIN} = -\infty$ e se encontra na posição $a = 0$, ou seja, sua posição coincide com a placa.

As análises desta subseção mostram que tanto a energia quanto a força permanecem finitas para valores finitos de m , com a energia assumindo um valor constante para $a = 0$, e a força sendo nula para essa distância. Valores maiores da massa levam a valores mais negativos para

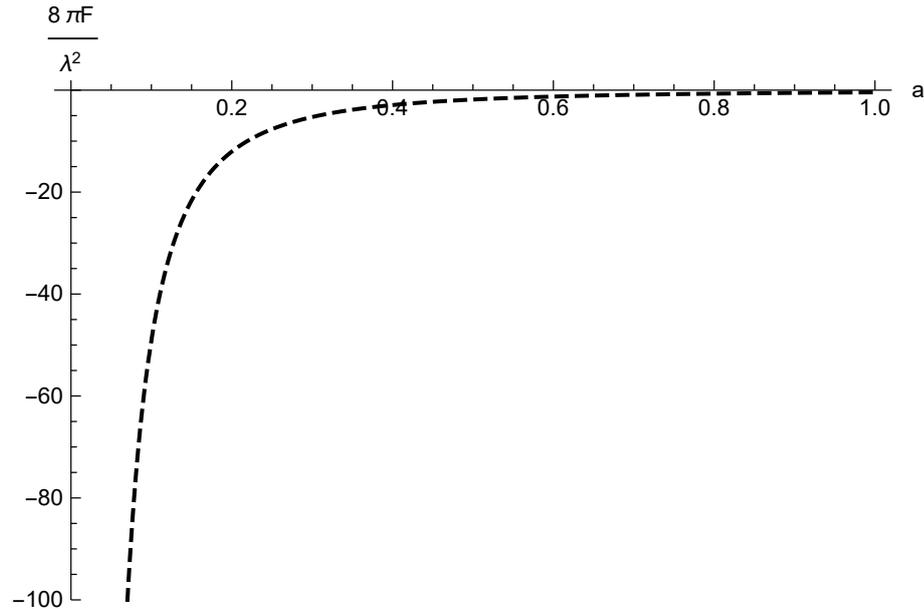


Figura 4.7: Plotagem da força pela posição para o caso em que $m \rightarrow \infty$.

a energia. A força apresenta pontos de mínimos dependentes da massa de Podolsky, com os mínimos se tornando maiores em módulo para massas maiores. No caso em que a massa se torna ∞ , a energia atinge um padrão máximo, não divergindo para μ finito e distância não nula. Quando a distância se anula, a energia tende a infinito. Esse comportamento da energia leva a um comportamento análogo para a força associada, que também tende a infinito para distâncias nulas. O gráfico 4.5 mostra que existe uma relação entre o ponto de mínimo da força e a sua posição, indicando que o caso em que $F_{MIN} \rightarrow \infty$ é um caso especial em que $a_{MIN} = 0$.

4.3.2 Análise para o fator de transparência

A Lagrangiana do sistema conta com um termo no qual está presente um potencial do tipo delta de Dirac. Esse potencial surge para simular a presença de um espelho semitransparente no sistema. O acoplamento entre o potencial e o campo ocorre mediante uma constante, μ . Essa constante pode ser entendida como o fator de transparência do espelho semitransparente, como já desenvolvida em trabalhos anteriores [23], [21], [22].

A única restrição necessária do modelo é $\mu > 0$. Nessa seção fazemos um estudo do comportamento da energia de interação entre o espelho e uma carga pontual para diversos valores de μ .

Energia

Na figura 4.8 temos diversos gráficos da energia de interação entre o potencial plano e uma carga pontual em função da distância entre estes (4.25), com diversos valores de μ e mantendo-se $m = 15$.

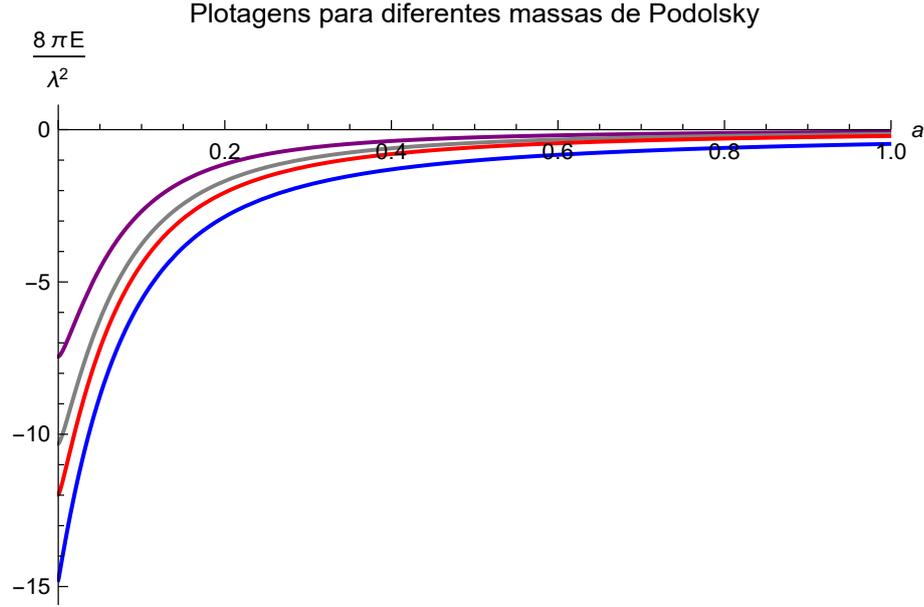


Figura 4.8: Plotagem da energia para diversos valores de μ em função da distância a . Em roxo: $\mu = 0.4$, em cinza: $\mu = 1.0$, em vermelho: $\mu = 2.0$, e em azul: $\mu = 60.0$

A energia plotada para uma distância nula apresenta valores finitos, e assim como para as demais distâncias, são maiores para μ maiores. Para uma distância nula, a energia se torna

$$E(\mu, m, a = 0) = -\frac{\lambda^2}{8\pi} \int_0^\infty dr r \frac{r^2 \sqrt{m^2 + r^2}}{\sqrt{m^2 + r^2} \left(\frac{1}{\mu} + \sqrt{r^2} \right) - r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{m^2 + r^2}} \right)^2 \quad (4.30)$$

Um fato que pode ser imediatamente percebido a partir do gráfico 4.8 é a proximidade existente entre as energias para os diferentes fatores de μ . Diferenças entre os valores de μ , por maior que sejam, não separam muito intensamente as linhas. Como exemplo, pode-se citar a diferença existente entre a linha para $\mu = 2$ e $\mu = 60$ com a distância nula. Para elas, os valores de energia são respectivamente $E = -11.9686$ e $E = -14.7849$. Isso mostra que para um fator de transparência 30 vezes maior, a energia se torna apenas aproximadamente 0.25 vezes menor. Em um caso extremo, para um parâmetro $\mu = 10^6$, a energia é dada por $E = -14.9998$, isto é, um parâmetro 10^5 maior que $\mu = 60$, gera uma energia apenas 0.01 vezes maior.

Essa tendência cada vez menor da energia de se alterar consideravelmente com alterações em μ é um reflexo do fato desse parâmetro aparecer com uma razão $1/\mu$ no denominador de E . Quando o fator de transparência se torna grande, a contribuição de $1/\mu$ se torna pequena comparada aos demais termos do denominador. Uma interpretação que pôde ser feita é que, para distâncias a baixas, a interação se torna suficientemente intensa para depender menos da transparência do espelho.

No limite de um espelho perfeito temos que

$$\begin{aligned}
 E(\mu \rightarrow \infty, m, a) &= - \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{8\pi} \int_0^\infty dr r \frac{r^2 \sqrt{r^2 + m^2}}{\left(\frac{1}{\mu} + \sqrt{r^2}\right) \sqrt{r^2 + m^2} - r^2} \left(\frac{e^{-|a| \sqrt{r^2}}}{\sqrt{r^2}} - \frac{e^{-|a| \sqrt{r^2 + m^2}}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \right)^2 \\
 &= - \frac{\lambda^2}{8\pi} \int_0^\infty dr \frac{r^2 \sqrt{r^2 + m^2}}{\sqrt{r^2 + m^2} - r^2} \left(\frac{e^{-|a| \sqrt{r^2}}}{\sqrt{r^2}} - \frac{e^{-|a| \sqrt{r^2 + m^2}}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Nesse caso temos o gráfico da figura 4.9, onde podemos ver que a energia permanece finita e com comportamento similar ao apresentado para os casos em que os fatores de transparências eram finitos.

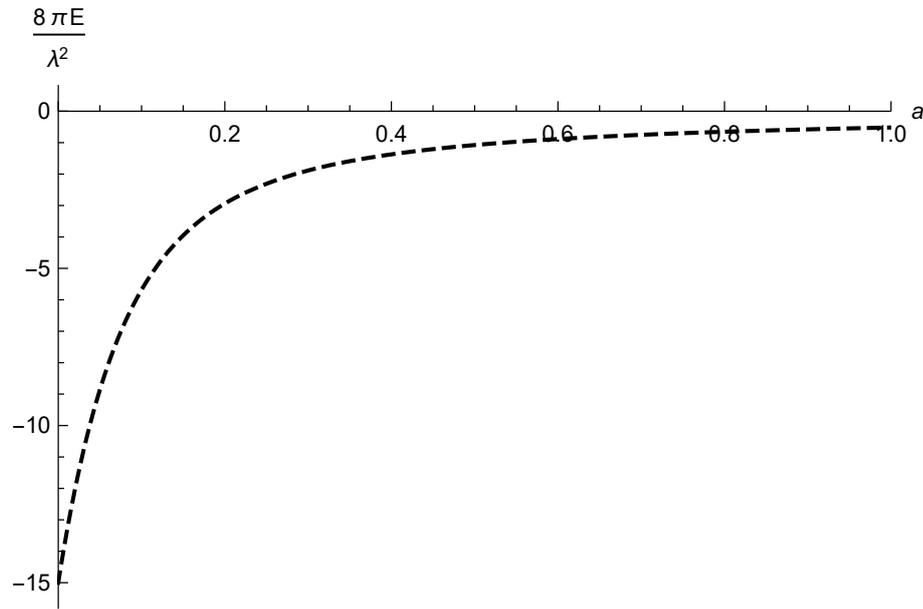


Figura 4.9: Plotagem da energia para o caso limítrofe em que μ tende a infinito.

Outro caso de interesse é aquele em que o fator de transparência vai a zero, o que significa tornar o espelho completamente transparente. Um espelho perfeitamente transparente implica em uma placa potencial completamente não interagente. Aplicou-se esse limite à expressão para energia

$$\begin{aligned}
 E(\mu \rightarrow 0, m, a) &= - \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\lambda^2}{8\pi} \int_0^\infty dr r \frac{r^2 \sqrt{r^2 + m^2}}{\left(\frac{1}{\mu} + \sqrt{r^2}\right) \sqrt{r^2 + m^2} - r^2} \left(\frac{e^{-|a| \sqrt{r^2}}}{\sqrt{r^2}} - \frac{e^{-|a| \sqrt{r^2 + m^2}}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \right)^2 \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Isso ocorreu porque no limite em que $\mu \rightarrow 0$, o termo $1/\mu$ se torna infinitamente grande. Como ele se encontra no denominador da expressão, a energia será nula.

Força

A força de interação entre a placa e a fonte pontual pode ser obtida por derivação direta da expressão para a energia e está representada na equação (4.27). Essa integral não pôde ser resolvida via métodos analíticos. Diante dessa impossibilidade, a integral foi feita numericamente para um μ inicial igual 10, sendo plotada em função da distância. Esse procedimento se repetiu até que μ se tornasse igual a 100. A partir da junção das plotagens para $\mu = 10$, $\mu = 30$, $\mu = 50$ e $\mu = 100$, obteve-se o gráfico 4.3.2.

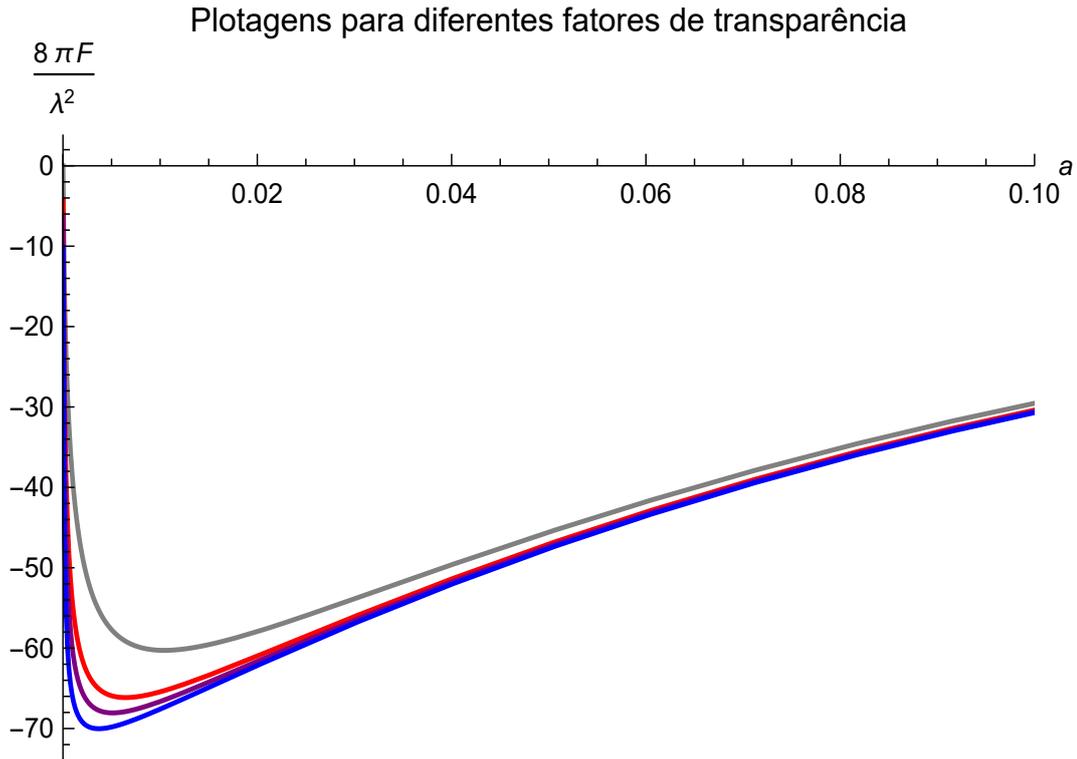


Figura 4.10: Plotagem da força para diversos valores de μ em função da distância a . Em cinza: $\mu = 10$, em vermelho: $\mu = 30$, em roxo: $\mu = 50$ e em azul: $\mu = 100$.

As forças representadas em apresentam valores negativos, possuindo um pico com um valor mínimo para cada valor do fator de transparência. Com a distância nula, a força apresenta um valor finito e nulo. Isso fica claro ao fazermos a distância igual a zero para a expressão (4.27). A subtração entre exponenciais $\left(e^{-a\sqrt{m^2+r^2}} - e^{-ar}\right)$ é zero para $a = 0$.

Os mínimos da força aparentam se alterar com mudanças no fator de transparência. Esse efeito pôde ser melhor analisado realizando uma série de gráficos dos valores de mínimo correspondentes a diversos valores de μ . O gráfico 4.11 apresenta diversos valores de mínimo em função de suas respectivas posições. Essa figura mostra que, para valores maiores de μ , o mínimo da força se torna menor.

Como no limite em que $\mu \rightarrow \infty$ a energia permanece finita, definindo um padrão máximo, a força também deve possuir esse comportamento. Com a força limitada a um padrão máximo,

os valores mínimos para cada μ devem também atingir um patamar a partir do qual não mais crescerão (ou crescerão insignificamente). Isso está demonstrado pela tendência dos pontos a um comportamento constante para F_{MIN} à medida que μ cresce.

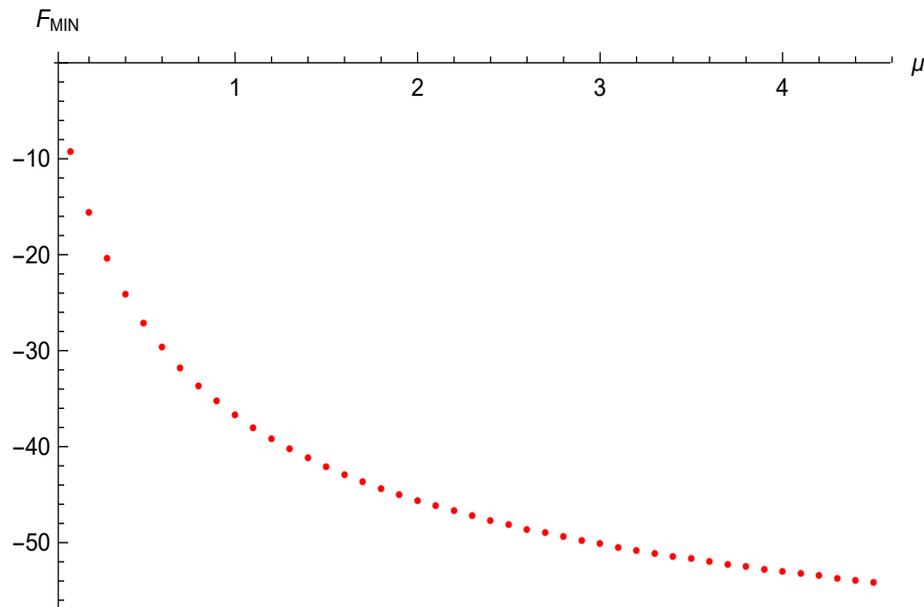


Figura 4.11: Plotagem dos valores mínimos da força F_{MIN} para diversos valores da posição em função do fator de transparência μ .

Outro fato que ocorre é aproximação da posição a dos extremos da força à medida que o fator de transparência cresce. Esse efeito pode ser melhor visualizado no gráfico que relaciona a posição dos extremos com o respectivo valor para o extremo da força. À medida que o mínimo se torna menor, a sua posição também diminui. Isso indica que, em uma interação carga-espelho, a posição do ponto extremo depende do quão permissivo o espelho é à interação, e quanto mais próximo do espelho, maior o valor do extremo da força. Para demonstrar esse fenômeno, foi feito o gráfico 4.13.

A relação existente entre os mínimos da força e a sua posição permite estabelecer uma terceira relação entre a posição de cada extremo e o fator de transparência equivalente. Nessa plotagem, surgiu novamente um comportamento assintótico da dispersão. Para crescentes valores de μ , a posição se torna praticamente invariável. Esse padrão já era esperado, uma vez que de acordo com 4.11, há uma linha de tendência para os valores mínimos F_{MIN} e, portanto, parece haver um valor limítrofe para a distância a partir da qual não vamos mais encontrar extremos da força. Assim, a partir de acréscimos em μ , não houve extremo tal que sua posição coincidissem com a placa, isto é, a_{MIN} tal que $a_{MIN} = 0$.

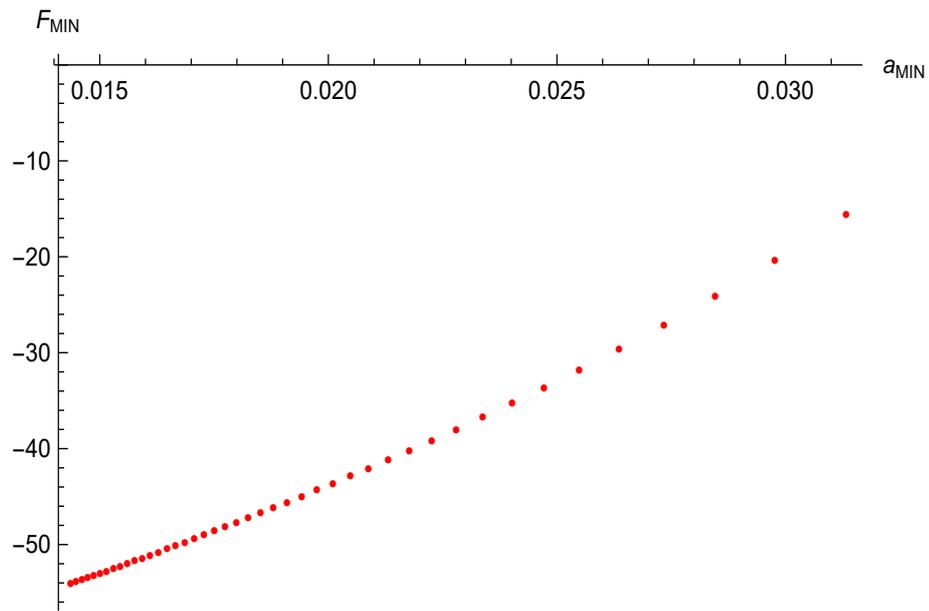


Figura 4.12: Plotagem dos valores mínimos da força F_{MIN} em função dos valores da posição a_{MIN} .

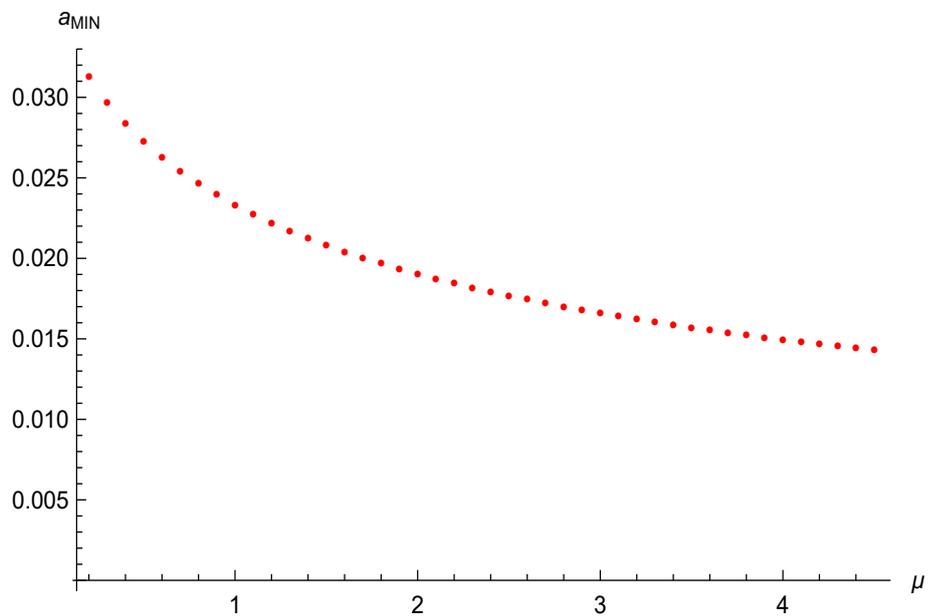


Figura 4.13: Plotagem dos valores das posições dos valores mínimos da força em função dos valores do fator de transparência a_{MIN} .

Capítulo 5

Conclusões

Trabalhos recentes [23] indicam que em campos do tipo Lee-Wick, quando uma fonte pontual interage com uma placa condutora perfeita, o propagador não pode ser trivialmente obtido. Quando não se encontra presente a placa condutora, o propagador (que se trata somente da parte livre) pode ser obtido a partir de uma soma entre os propagadores para o campo de Maxwell e o de Proca. Esse procedimento não pode ser repetido para o caso em que há a presença de uma placa condutora perfeita. Fato esse demonstrado por Barone e Nogueira (2015) e revisitado no primeiro capítulo deste estudo, demonstrando a importância da obtenção do propagador, energia e força para esse campo neste tipo de interação.

Com o intuito de analisar um novo caso de grande interesse nesse tema, desenvolveu-se o estudo do campo de Lee-Wick sob a presença de um espelho condutor não perfeito. Esse tipo de sistema nunca antes estudado nesse contexto gerou expressões para a energia e para a força que não puderam ser calculadas analiticamente. Com uma análise numérica, demonstrou-se que tanto a energia quanto a força eram finitas, inclusive para valores nulos da distância entre a carga e a placa. A força, nula para distância nula, apresentava um valor máximo para determinado valor de distância, dependente dos parâmetros de acoplamento da Lagrangiana. A força tende então a assumir valores nulos para distâncias infinitamente grandes.

Inicialmente no campo de Lee-Wick escalar, para o caso em que a massa de Podolsky é tomada como infinitamente grande, o campo escalar com derivadas de ordem superior se transforma no caso já estudado por Camilo *et al.* (2013)^[22]. Trata-se de um campo de Klein-Gordon, na presença de uma fonte pontual e uma placa semicondutora. Com a massa de Podolsky infinita, à medida que a carga se aproxima da placa, a energia cresce, indo a infinito para um caso em que a carga se encontra infinitamente próxima.

Quando as condições são impostas sobre a massa de Klein-Gordon, é necessário respeitar os limites superior e inferior afim de evitar modos taquiônicos. Esses extremos definem valores máximos e mínimos que a força e a energia podem assumir. Quando a massa M assume esses valores, as expressões se tornam mais simples, ainda sem a possibilidade de serem analiticamente calculadas. Para o caso em que, além disso, a massa de Podolsky é tomada como infinita, as integrais para a força e energia podem ser calculadas. Esse resultado já foi previamente encontrado por Camilo *et al.* (2013)^[22] e aqui é demonstrado como um caso especial do campo escalar com derivadas de ordens superiores. Esse fato demonstra a consistência da teoria.

Quando as considerações foram feitas a respeito do fator de transparência, novos efeitos puderam ser observados. Dentre eles, destaca-se o fato de a força e a energia não crescerem indefinidamente com o crescimento de μ . O ponto máximo da força se desloca com o crescimento no fator de transparência, assumindo posições cada vez mais próximos da placa, até que o pico desaparece. Esse desaparecimento do pico pode ser entendido como o posicionamento do pico sobre a placa, isso é na posição nula, ocorrendo para $\mu \rightarrow \infty$. Quando condições foram simultaneamente impostas ao fator de transparência ($\mu \rightarrow \infty$ e $m = \infty$), a força, analiticamente calculada, era equivalente à força de Yukawa com massa M . Isso nos diz que essa força pode ser compreendida como um caso particular na teoria de Lee-Wick.

No caso vetorial do campo de Lee-Wick, uma análise na massa de Podolsky demonstrou que valores maiores de massa levam a valores mais negativos de energia. Além disso, para valores maiores da massa, o extremo da força se tornava mais negativo. Para o caso extremo em que a massa tende a infinito, a energia permanece finita enquanto a distância entre a carga e a placa permanecer finita e não nula. Quando essa distância diminui, a força começa a crescer, indo a infinito quando a distância vai a zero. Com $m \rightarrow \infty$ a energia e a força podem ser analiticamente calculadas. Tomando agora o fator de transparência no caso vetorial, quando o fator μ foi adotado como infinito, a energia permanece finita, crescendo com o parâmetro até um valor limítrofe, a partir do qual se torna insensível à mudanças. Esse comportamento que também ocorreu para a força, foi demonstrado graficamente.

Desse modo, o presente trabalho traz um comportamento nunca antes encontrado para a força em teorias do tipo Lee-Wick, a existência de pontos extremos na força, tanto para o caso escalar quanto para o caso vetorial. Esses extremos na força mostram que a função da força pela distância não é monotônico. Esses resultados demonstram que a descrição de Lee-Wick apresentam particularidades na interação placa-carga que até o presente momento eram desconhecidos. Além disso, esse tipo de montagem (placa sujeita a potencial em interação com uma carga pontual) para o campo vetorial pode ser moldada por sistemas físicos reais, portanto sua descrição é passível de investigação experimental. Apesar do comportamento não usual para a força, quando restrições são impostas ao sistema, todos os resultados se reduzem à resultados já previamente obtidos, o que mostra uma teoria consistente.

Diante da novidade das descobertas, esperamos redigir dois trabalhos científicos com os resultados obtidos nessa dissertação. Nestes trabalhos pretendemos discutir para a parte vetorial e escalar a obtenção e o significado físico dos comportamentos das forças. Espera-se ser possível publicar ambos os trabalhos.

Bibliografia

- [1] Boris Podolsky. A generalized electrodynamics part i—non-quantum. *Phys. Rev.*, 62:68–71, Jul 1942.
- [2] Boris Podolsky and Chihiro Kikuchi. A generalized electrodynamics part ii—quantum. *Phys. Rev.*, 65:228–235, Apr 1944.
- [3] T. D. Lee and G. C. Wick. Negative Metric and the Unitarity of the S Matrix. *Nucl. Phys.*, B9:209–243, 1969. [,83(1969)].
- [4] T. D. Lee and G. C. Wick. Finite Theory of Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev.*, D2:1033–1048, 1970. [,129(1970)].
- [5] Damiano Anselmi.
- [6] Damiano Anselmi and Marco Piva. Perturbative unitarity of lee-wick quantum field theory. *Phys. Rev. D*, 96:045009, Aug 2017.
- [7] Benjamín Grinstein, Donal O’Connell, and Mark B. Wise. The lee-wick standard model. *Phys. Rev. D*, 77:025012, Jan 2008.
- [8] Jose Espinosa, Benjamin Grinstein, Donal O’Connell, and Mark Wise. Neutrino masses in the lee-wick standard model. *Physical Review D*, 77, 06 2007.
- [9] Alexei E. Zayats. Self-interaction in the Bopp-Podolsky electrodynamics: Can the observable mass of a charged particle depend on its acceleration? *Annals Phys.*, 342:11–20, 2014.
- [10] Johanna Karouby, Taotao Qiu, and Robert Brandenberger. Instability of the lee-wick bounce. *Phys. Rev. D*, 84:043505, Aug 2011.
- [11] Yi-Fu Cai, Taotao Qiu, Robert Brandenberger, and Xinmin Zhang. Nonsingular cosmology with a scale-invariant spectrum of cosmological perturbations from lee-wick theory. *Phys. Rev. D*, 80:023511, Jul 2009.
- [12] Taotao Qiu and Kwei-Chou Yang. Perturbations in matter bounce with non-minimal coupling. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(11):012–012, nov 2010.

-
- [13] F. A. Barone, G. Flores-Hidalgo, and A. A. Nogueira. External sources in lee-wick theories. *Phys. Rev. D*, 88:105031, Nov 2013.
- [14] A. A. Nogueira. *Aspects of Lee-Wick abelian model*. PhD thesis, Federal University of Itajubá, 2012.
- [15] M. Bordag, U. Mohideen, and V.M. Mostepanenko. New developments in the casimir effect. *Physics Reports*, 353(1):1 – 205, 2001.
- [16] Michael Bordag, K. Kirsten, and D. Vassilevich. On the ground state energy for a penetrable sphere and for a dielectric ball. *Phys. Rev.*, D59:085011, 1999.
- [17] Kimball A. Milton. *The casimir effect: Physical manifestations of zero point energy*, 1999.
- [18] Kimball A. Milton. Casimir energies and pressures for delta function potentials. *J. Phys.*, A37:6391–6406, 2004.
- [19] C. D. Fosco and E. L. Losada. Functional approach to the fermionic casimir effect. *Phys. Rev. D*, 78:025017, Jul 2008.
- [20] C. Ccapa Ttira, C. D. Fosco, and E. Losada. Vacuum polarization from confined fermions in $3 + 1$ dimensions. *Phys. Rev.*, D82:085008, 2010.
- [21] F. A. Barone and G. Flores-Hidalgo. Vacuum energies due to deltalike currents: Simulating classical objects along branes with arbitrary codimensions. *Phys. Rev. D*, 78:125003, Dec 2008.
- [22] G. T. Camilo, F. A. Barone, and F. E. Barone. Interactions between delta-like sources and potentials. *Phys. Rev. D*, 87:025011, Jan 2013.
- [23] F. A. Barone and A. A. Nogueira. A conducting surface in lee-wick electrodynamics. *The European Physical Journal C*, 75(7):339, Jul 2015.
- [24] L. H. C. Borges and F. A. Barone. A perfectly conducting surface in electrodynamics with lorentz symmetry breaking. *The European Physical Journal C*, 77(10):693, Oct 2017.
- [25] F. A. Barone and F. E. Barone. Field theoretic description of partially reflective surfaces. *Phys. Rev. D*, 89:065020, Mar 2014.
- [26] *The Calculus of Variations*, chapter 4, pages 164–274. John Wiley Sons, Ltd, 2007.
- [27] Eugene Butkov. *Física matemática*. Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- [28] G. Feinberg. Possibility of faster-than-light particles. *Phys. Rev.*, 159:1089–1105, Jul 1967.
- [29] W. Greiner, J. Reinhardt, and D.A. Bromley. *Field Quantization*. Springer, 1996.

- [30] A. A. Nogueira and B. M. Pimentel. Brst symmetry and fictitious parameters. *Phys. Rev. D*, 95:065034, Mar 2017.
- [31] F. A. Barone and F. E. Barone. Field theoretic description of electromagnetic boundaries. *The European Physical Journal C*, 74(10):3113, Oct 2014.
- [32] L. H. C. Borges, A. F. Ferrari, and F. A. Barone. Mirrors and field sources in a lorentz-violating scalar field theory, 2018.