UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

Letícia Sousa Carvalho

POSSIBILIDADES E DIFICULDADES DA UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Itajubá – MG

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

Letícia Sousa Carvalho

POSSIBILIDADES E DIFICULDADES DA UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, da Universidade Federal de Itajubá, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Educação em Ciências.

Área de concentração: Educação em Ciências

Orientadora: Mariana Feiteiro Cavalari Silva
Coorientadora: Eliane Matesco Cristovão

Itajubá – MG

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

Letícia Sousa Carvalho

POSSIBILIDADES E DIFICULDADES DA UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Banca Examinadora:

Prof.ª Dr.ª Mariana Feiteiro Cavalari Silva (orientadora)
Prof.ª Dr.ª Eliane Matesco Cristovão (coorientadora)
Prof. Dr. João Ricardo Neves da Silva
Prof.ª Dr.ª Mônica de Cássia Siqueira Martines

Itajubá – MG

2020

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha Família que esteve comigo em todas as etapas e foram os responsáveis por mais essa conquista.

AGRADECIMENTOS

Estes parágrafos, provavelmente, não irão atender de forma justa a todas as pessoas que fizeram parte e contribuíram de alguma forma com o desenvolvimento deste trabalho, mas mesmo assim tentarei expressar meus agradecimentos por terem feito parte da minha jornada até aqui.

Agradeço...

A Deus, pelas bênçãos e momentos felizes concedidos em minha vida.

Aos meus pais e à minha irmã, por estarem sempre presentes, por apoiarem minhas escolhas, pela compreensão e por todos os momentos divididos, a vocês toda minha gratidão, amor e respeito.

À minha orientadora, professora Mariana Feiteiro Cavalari Silva, pela disponibilidade, confiança, compreensão, apoio, dedicação e constante incentivo, indispensáveis à conclusão deste estudo.

À professora Eliane Matesco Cristovão, que aceitou coorientar este trabalho, por toda a sua disponibilidade, dedicação e conhecimentos compartilhados.

Aos pesquisadores(as) e professores(as) da banca examinadora pela atenção, disponibilidade e contribuição destinados a este trabalho.

À escola e à professora regente de aulas por terem concordado com a realização desse estudo, e aos estudantes por aceitarem participar da pesquisa, sem os quais essa investigação não seria viável.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências pelos conhecimentos compartilhados ao longo das disciplinas ministradas.

Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, pelas experiências e conhecimentos compartilhados, de modo especial à Bruna da Silva, pela amizade, parceria e pelos momentos divididos.

Aos integrantes do Grupo de Pesquisas em Educação Matemática e Práticas formativas, pela atenção e contribuições concedidas a este trabalho.

Aos amigos, que tornaram esse período mais alegre, de modo especial à Carina, Franciéllem e Gabriela por todo carinho e apoio.

A todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

(...)
Pra ser feliz
Do que é que o ser humano necessita?
O que é que faz a vida ser bonita?
A resposta, onde é que está escrita?
(...)
Talvez a chave seja a simplicidade
Talvez prestar mais atenção na realidade
Por que não ver como lição
O exemplo de superação de tantas pessoas?
O tudo às vezes se confunde com o nada
No sobe e desce da misteriosa escada
E não tem como calcular
Não é possível planejar, não é estratégico.

(Pra ser Feliz - Elias Muniz)

RESUMO

O conceito de equação do primeiro grau se configura como um importante tópico dentre os conceitos da Álgebra trabalhados no ensino fundamental. Estudos apontam que os(as) estudantes apresentam dificuldades na aprendizagem deste, uma vez que ele, na maioria das vezes, representa uma ruptura na passagem da Aritmética para a Álgebra. Nesse sentido, entendemos a relevância de estudar novas possibilidades para o ensino e aprendizagem deste conceito, e a História da Matemática (HM) pode ser uma aliada nesse processo, pois é possível encontrar, na literatura, justificativas que defendem o uso da HM em aulas de Matemática. Neste contexto, realizamos uma investigação com o intuito de compreender as possibilidades e dificuldades da utilização da História da Matemática para o ensino e aprendizagem de equação do primeiro grau na educação básica. Para tanto, elaboramos um conjunto de atividades para abordar as equações do primeiro grau com um viés histórico, no qual foi destacado o método histórico da "Falsa Posição" e o da "Inversão". Este conjunto de atividades, constituído de cinco etapas, foi implementado com alunos(as) do sétimo ano de uma escola estadual. Nesse momento, realizamos a coleta de dados, utilizando como instrumentos, registros dos(as) alunos(as) produzidos a partir das atividades propostas, gravações em áudio e registros de observações em diário de campo. Os dados coletados foram analisados tendo como referência quatro eixos de análises, elaborados com base na literatura. Os resultados indicam que os elementos relativos à HM contribuíram para a aprendizagem de matemática e sobre matemática, na medida em que trouxe contribuições para: a motivação de alguns estudantes para aprender matemática; a contextualização do conceito estudado; a aprendizagem de procedimentos de resolução de uma equação do primeiro grau e a uma mudança de percepção em relação à Matemática. Destacamos, entretanto, que enfrentamos também algumas dificuldades inerentes à pesquisa em sala de aula e identificamos, em consonância com a literatura, que a abordagem de aspectos da HM não motivou todos(as) os(as) estudantes. A realização da presente investigação evidenciou a possibilidade da utilização de métodos históricos para uma abordagem da equação do primeiro grau de modo a propiciar um maior entendimento do significado contido na resolução de uma equação do primeiro grau.

Palavras-chave: História da Matemática; História da Matemática no Ensino; Equação do primeiro grau; Ensino de Matemática; Método da "Falsa Posição".

ABSTRACT

First Degree Equations, which are often studied in grade school (primary school), are fundamental to conceptually understanding certain aspects of Algebra. Studies show that students frequently have difficulties learning First Degree Equations because, as Algebraic functions, they differ from simple Arithmetic. Given this fact, new ways of teaching these equations should be studied, and the study of the History of Mathematics (HM) may serve as an auxiliary in this process. Many studies in the existing literature point to the effectiveness of studying the History of Mathematics in math classes. We conducted an investigation to better understand the advantages and disadvantages of using the History of Mathematics for teaching First Degree Equations in primary school. We have carried out set of activities that addressed teaching First Degree Equations from within a historical context using the False Position Method and Inversion. These activities, consisting in five stages, were conducted at a State school with 7th graders. Students carried out the activities, and data were collected using audio recordings and observational annotations made in a daily register. The data were analyzed according to four criteria set forth in existing literature. The results indicate that the elements related to HM contributed to the learning of mathematics and about mathematics, as it brought contributions to: the motivation of some students to learn mathematics; the contextualization of the studied concept; the learning of resolution procedures for solving a first degree equation and a change in perception in relation to mathematics. It is worth mentioning that we encountered some of the same difficulties already mentioned in existing literature with respect to the fact that HM does not motivate all students. Nonetheless, this study highlights the effectiveness of using historical methods for teaching First Degree Equations in a way that gives students a greater understanding of what it means the resolution of a First Degree Equation.

Keywords: The History of Mathematics; The History of Mathematics in teaching; First Degree Equations; Teaching Math; The False Position Method.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

PREFÁCIO

Durante a minha graduação em Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), realizei, sob a orientação da professora doutora Mariana Feiteiro Cavalari Silva, um trabalho de iniciação científica sobre uma História da Geometria Analítica. A realização desta investigação possibilitou-me identificar que, embora seja evidente a diferença entre as ideias relativas à Geometria Analítica (GA) de Fermat e Descartes da GA conhecida hoje, seria possível fazer uso de suas ideias para a elaboração de um conjunto de atividades que traria mais significado à GA para alunos(as) em diferentes níveis de ensino.

Embora a possibilidade de usar a História da Matemática (HM) para uma compreensão de conceitos matemáticos seja partilhada por diversos pesquisadores e existam trabalhos que versem sobre essas possibilidades, identifiquei pesquisas que mostram que a HM ainda não é muito utilizada em aulas de Matemática. Neste contexto, realizei a pesquisa de trabalho de conclusão de curso com o objetivo de analisar a concepção dos(as) licenciandos(as) em Matemática sobre a utilização da História da Matemática na educação básica. Entendo que essa pesquisa foi relevante, pois a forma que esses(as) licenciandos(as) "enxergam" a HM e sua relação com o ensino de Matemática pode influenciar a sua futura prática de sala de aula[1].

Um dos resultados da referida pesquisa foi que a maioria dos(as) licenciandos(as) indicou que usaria a HM em sala de aula, apontando algumas formas de utilização. Entretanto, apenas 30% dos(as) licenciandos(as) que responderam ao questionário apresentam a intenção de utilizar a HM para explicar ou construir conceitos, sendo esta, de acordo com a literatura, a forma mais profícua do uso da HM para o ensino de Matemática. Outro ponto relevante apontado pelos(as) licenciandos(as) é a baixa quantidade de materiais de História da Matemática voltados para a sala de aula, que pode se caracterizar como um fator responsável por dificultar o uso da História da Matemática em aulas de Matemática, na percepção destes(as).

Tendo em vista esses resultados e ciente das possibilidades e dificuldades do uso da HM em aulas de Matemática presentes na literatura, entendo ser relevante a identificação, em sala de aula, das contribuições e limites de um conjunto de atividades, elaborado com um viés histórico. Mais especificamente, para conceitos da Álgebra, já que este é um campo da Matemática que marca uma importante ruptura no ensino desta área do conhecimento.

[1] Os principais resultados deste trabalho foram publicados em Carvalho e Cavalari (2019), disponível em http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i4.872.

1. INTRODUÇÃO

Existem várias definições para o conceito de Álgebra. Para Lins e Gimenez (1997, p. 137) a Álgebra "[...] consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade". Neste sentido, a Álgebra é uma área da Matemática que está centrada nas relações matemáticas abstratas, ou seja, nas "[...] equações, inequações ou funções, como podem ser outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos" (PONTE, 2006, p. 7).

Ribeiro, Bezerra e Silva (2016), juntamente com um grupo de pesquisa, elaboraram um "quadro de referência" no qual apresentam suas "compreensões acerca da álgebra". O quadro foi dividido em algumas categorias e suas características, a saber:

> 1) Álgebra inicial – manipulação de somas, produtos e potências aritméticas; resolução de problemas aritméticos como um caminho para a introdução do pensamento algébrico; 2) Generalizações – aritmética generalizada; Estrutura de representação formal do concreto (através da abstração); Atribuição de grau de abstração e generalidade aos símbolos linguísticos; 3) Relação Funcional – ideia de dependência entre duas grandezas (conceito de função, por exemplo); 4) Relação Estrutural – estudo das estruturas e propriedades atribuídas às operações com números reais e polinômios; Linguagem simbólica/variável como símbolo arbitrário; 5) Modelagem – Iluminação ou organização de uma situação como ferramenta; construção da atividade e exercícios de modelagem; Modelagem de situações a partir de situações problemas; 6) Manipulação – conjunto de técnicas ou procedimentos específicos para abordar problemas por métodos algorítmicos; capacidade de efetuar e expressar transformações algébricas primordialmente simbólicas; Atividades que envolvam incógnitas com o objetivo de simplificar ou resolver (RIBEIRO; BEZERRA; SILVA, 2016, p.431).

Dessa forma, entendemos que a Álgebra é um campo da Matemática que abrange diversos conceitos. Ponte (2006) considera que o estudo da Álgebra, tem como objetivo desenvolver o pensamento algébrico dos(as) alunos(as). O pensamento algébrico pode ser caracterizado como: "[...] percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação problema e a presença de um processo de generalização" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 87).

Sendo assim, não existe uma única forma de expressar o pensamento algébrico, já que ele pode ser representado através da “[...] linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 88). Brum (2013, p. 9), ainda destaca que a linguagem algébrica “[...] permite ao aluno representar e resolver situações por meio de expressões e equações, desenvolvendo seu raciocínio para solucionar problemas, dentro e fora da escola”. Sendo assim, podemos evidenciar a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico e da linguagem algébrica para a formação integral dos(as) estudantes.

Em perspectiva semelhante, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), indica que o pensamento algébrico “[...] é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também de situações e estruturas matemáticas fazendo uso de letras e outros símbolos” (BRASIL, 2018, p. 268). Este documento oficial apresenta alguns objetivos para o ensino de Álgebra, como a necessidade dos(as) alunos(as) identificarem

> [...] regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2018, p. 268).

Da mesma forma, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) já apresentavam alguns objetivos em relação ao ensino de Álgebra, como “[...] resolver situações-problema[2], sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos” (BRASIL, 1998, p. 48). Mais especificamente, com relação ao pensamento algébrico, o ensino de matemática nesse ciclo deve visar o desenvolvimento do pensamento algébrico

---

[2] É importante destacar que para Araújo (2008), com o surgimento do Movimento da Matemática Moderna (MMM), a Álgebra passou a ganhar um lugar de destaque, sendo que seu ensino se tornou mais rigoroso e houve uma preocupação com os aspectos lógico-estruturais dos conteúdos e a precisão da linguagem. Entretanto a Álgebra perdeu seu “[...] carácter pragmático, útil para resolver problemas” (p. 333). De acordo com a autora, após o declínio do MMM na segunda metade da década de 1970, o ensino da Álgebra se voltou, novamente, para a resolução de equações e problemas, recuperando, assim seu valor instrumental.

> [...] por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções; traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras; utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico (BRASIL, 1998, p. 64).

Dessa forma, é possível perceber que em ambos os documentos oficiais, há uma preocupação com o ensino de Álgebra e com o desenvolvimento do pensamento algébrico dos(as) alunos(as).

Entendemos que o desenvolvimento do pensamento algébrico é fundamental para o(a) estudante da educação básica, já que para Silva et al. (2015, p. 134), o pensamento algébrico, está presente em diferentes campos da matemática, sendo que uma de suas características é a abstração, pois "[...] abstrair é separar aspectos dos objetos sensoriais para pensar em um nível mais geral, mas é também estabelecer relações entre relações". Corroborando esta ideia, Oliveira e Laudares (2015, p. 6), apontam que "[...] o pensamento algébrico está associado à capacidade de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas". Neste sentido, ressaltamos que a Álgebra "[...] pode ser percebida como uma ferramenta para tornar o pensamento mais eficiente, uma ferramenta para resolver problemas não só no campo da matemática como em outras ciências" (SILVA et al., 2015, p. 135).

Embora a Álgebra e o pensamento algébrico sejam fundamentais, encontramos na literatura de Educação Matemática variados relatos que indicam dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra. Muitas vezes, podendo estar relacionada às "[...] práticas que enfatizam a linguagem em detrimento da construção do pensamento" (SILVA et al., 2015, p. 134).

De modo semelhante, Coelho e Aguiar (2018, p. 171) entendem que essas deficiências verificadas no ensino de Álgebra têm ligação com a "[...] ênfase que se dá a seus aspectos técnicos, deixando de lado, muitas vezes, o desenvolvimento dos conceitos e uma busca por um pensamento mais abstrato". Já para Oliveira e Laudares (2015, p. 2), as abordagens difundidas em torno da Álgebra "[...] tem colocado em foco principalmente a memorização e a mecanização de fórmulas como metodologia para assimilação dos conceitos algébricos". Além disto, Silva et al. (2015, p. 136), apontam que professores tem "[...] empreendido em ensinar a simbologia própria da álgebra, mas o símbolo está vazio de significado e não produz a aprendizagem esperada".

Dessa forma, segundo Araújo (2008, p. 344), a Álgebra, em muitos momentos, não tem significado para muitos(as) estudantes, que em geral se empenham em procurar por estratégias para "[...] memorizar dados e aplicar fórmulas que serão logo esquecidas, sem que cheguem a desenvolver o pensamento algébrico". Esse cenário pode influenciar negativamente no desempenho matemático, sobretudo o algébrico, dos(as) estudantes.

De acordo com Costa et al. (2016, p. 160), estas dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra podem ter suas raízes também "[...] na introdução ao pensamento algébrico, uma vez que tal processo representa uma transição entre o que era manipulado pelo discente como concreto e que passa então para a desconhecida e abstrata incógnita". Sobre essa transição da Aritmética para Álgebra, Ponte (2006), indica algumas dificuldades como:

> [...] Dar sentido a uma expressão algébrica; Não ver a letra como representando um número; Atribuir significado correto às letras; Pensar uma variável com o significado de um número qualquer; Passar informação da linguagem natural para a algébrica; Compreender as mudanças de significado, na Aritmética e na Álgebra dos símbolos + e =; Não distinguir adição aritmética (3+5) da adição algébrica (x+3) (PONTE, 2006, p. 10).

Tendo em vista a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico e as dificuldades encontradas pelos(as) alunos(as), entendemos ser relevante a realização de investigações que versem sobre novas possibilidades para o ensino de Álgebra na educação básica. Uma possibilidade seria a utilização de aspectos da História da Matemática para o ensino e aprendizagem de conceitos algébricos, já que variados estudos na área de Educação Matemática, indicam que a introdução da História da Matemática pode contribuir em seu ensino, havendo disponível na literatura, vários argumentos capazes de justificar essa utilização.

Santos (2017) reuniu argumentos indicados por variados pesquisadores, tais como, Brolezzi (1991), Miguel (1993, 1997), Vianna (1995), Mendes (2006, 2009), Valdés (2006), Nunes (2007, 2010), Fossa (2008), Moreira (2013) e Chaquiam (2015), em quatro argumentos favoráveis a inclusão da HM nas aulas de Matemática, a saber: a HM contribui para a motivação; para trazer significado ao conteúdo matemático; para apresentar motivações e aplicações e, ainda, para apresentar mudança de percepção sobre a Matemática e a promoção de valores no Ensino de Matemática (SANTOS, 2017, p. 24).

Entretanto, mesmo com argumentos favoráveis ao uso da HM em sala aula e ainda a sua recomendação por documentos oficiais relacionados à educação, Souto (2010, p. 534) argumenta que "[...] a produção acadêmico-científica é ainda incipiente no que tange à participação efetiva da História no ensino-aprendizagem da Matemática", fato que pode refletir na utilização da HM em sala de aula. Assim, mesmo com discursos a favor da presença da HM em salas de aula, ainda não há suficiente utilização desta por parte dos professores.

Em que pese o fato de existir justificativas para a pouca utilização da HM no ensino de Matemática, destacamos, na mesma perspectiva de Saito e Dias (2013, p. 91) que a articulação entre a história e o ensino não é uma tarefa simples, já que "[...] ela visa não só uma compreensão mais contextualizada dos objetos matemáticos, mas, também, uma metodologia de abordagem que viabilize uma proposta didático pedagógica", esta articulação deve dar conta "[...] não só do desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação crítica do estudante e do professor, mas também dos conteúdos próprios da área de referência, isto é, da Matemática" (SAITO; DIAS, 2013, p. 96).

Neste sentido, entendemos que é relevante investigar as possibilidades e limitações da utilização da HM para o ensino de Álgebra na Educação básica. Para a realização de uma investigação desta natureza, escolhemos, dentre os conceitos de Álgebra abordados na Educação Básica, o conceito de equação do primeiro grau com uma incógnita. Esta escolha se justifica pelo fato de que, "[...] durante muitas décadas o principal objeto de investigação em Álgebra foi o estudo de equações algébricas" (RIBEIRO, 2009, p. 83), corroborando esta ideia, Ponte (2004), expõe que,

> [...] a aprendizagem das equações, conceito central da Álgebra, representa para os alunos o início de uma nova etapa no seu estudo da Matemática. Ao lado das expressões numéricas, envolvendo números e operações com que contactaram anteriormente, surgem agora outras expressões, envolvendo novos símbolos e novas regras de manipulação, que remetem para outro nível de abstracção (PONTE, 2004, p. 1).

Nesse sentido, as equações do primeiro grau com uma incógnita, marcam uma importante ruptura no ensino de Matemática, sendo "[...] um dos primeiros conteúdos algébricos formalizados que os alunos têm contato" (SPERAFICO; DORNELES;

GOLBERT, 2015, p. 335). Além disto, merece destaque que “resolver equações do 1º grau com uma incógnita” é uma das dificuldades encontradas pelos(as) estudantes, estas identificadas por Ribeiro, Rezende e Silva (2016) ao analisar os resultados publicados pelo Instituto de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP).

Dessa forma, levando em consideração que as equações do 1º grau representam um importante e complexo tópico dentro da Álgebra, além de entendermos que o uso da HM, dependendo da forma trabalhada, pode trazer mais significado e compreensão a determinados conceitos, buscamos na presente investigação, por meio da elaboração e implementação de um conjunto de atividades para o ensino de equações do 1º grau que apresenta um viés histórico, responder a seguinte questão de pesquisa: Quais as contribuições da utilização da História da Matemática para o ensino da equação do primeiro grau na educação básica?

Sendo assim, tal pesquisa tem como objetivo compreender as possibilidades e as dificuldades da utilização da História da Matemática para o ensino e aprendizagem de equação do primeiro grau na educação básica. Para atingir esse objetivo, elaboramos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar e analisar, elementos das contribuições da implementação de um conjunto de atividades para o ensino de Equação do primeiro grau com um viés histórico para a aprendizagem de conceitos matemáticos e sobre a Matemática;
- Identificar e analisar as dificuldade e/ou limitações da implementação do conjunto de atividades.

Para a apresentação dos resultados dessa investigação, dividimos o presente texto em cinco capítulos, sendo o primeiro a “Introdução”, o segundo a “História da Matemática no ensino de Matemática” no qual apresentamos uma revisão bibliográfica sobre as potencialidades do uso da HM em aulas de Matemática, algumas dificuldades quanto à utilização de aspectos relacionados à HM em aulas de Matemática e ainda um estudo histórico sobre o método da “Falsa Posição” que era utilizado para resolver problemas que envolviam a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita.

Já no terceiro capítulo, intitulado “Caminhos percorridos”, indicamos a forma que desenvolvemos essa pesquisa, detalhando os passos dados nesse percurso. No quarto capítulo, intitulado “Possibilidades e dificuldades da HM em sala de aula: um conjunto de atividades para o ensino de equação do primeiro grau”, apresentamos de forma detalhada a implementação do conjunto de atividades com alunos(as) do sétimo ano, bem como nossas análises.

Por fim, no quinto capítulo, “Considerações finais”, retomamos o objetivo desse estudo e apresentamos nossas considerações finais acerca do estudo realizado.

2. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Discussões que envolvem as possíveis ligações entre a História, Pedagogia e a Matemática, de acordo com Miguel e Miorim (2008), têm sido objeto de estudo acadêmico de uma comunidade internacional, que segue trabalhando de forma organizada com o intuito de propiciar, cada vez mais, o esclarecimento e a divulgação acerca de tais ligações.

No cenário nacional, segundo os referidos autores, o movimento em torno da História da Matemática se intensificou com a criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), que ocorreu em março de 1999 no III Seminário Nacional de História da Matemática.

Além disso, a realização dos primeiros doutoramentos por brasileiros na área de HM foi de "[...] fundamental importância para impulsionar o movimento em torno do tema que, especialmente nos últimos quinze anos, vêm se consolidando e apresenta progressos notáveis" (SOUTO, 2010, p. 520). Dessa forma, a autora preconiza que "[...] as práticas, processos, instrumentos e arcabouços teórico metodológicos da História da Matemática, consolidaram-se internamente" (SOUTO, 2010, p. 522), possibilitando assim, o seu reconhecimento como comunidade.

Desta forma, entendemos que a pesquisa relacionada a temas da HM, no Brasil, é ampla e diversificada, visto que pode ser identificados, de acordo com Miguel e Miorim (2008, p. 11), três campos de investigação, a saber: "[...] o da História da Matemática propriamente dita[3], o da História da Educação Matemática[4] e o da História na Educação Matemática".

As discussões referentes ao campo de investigação "História na Educação Matemática" envolvem os estudos que abrangem

[3] De acordo com Souto (2010), o campo de investigação "História da Matemática propriamente dita" agrupa estudos que têm como objetos de investigação "[...] obras literárias relacionadas à Matemática, à vida de matemáticos, à evolução de teorias ou conceitos matemáticos, à história de problemas, ao desenvolvimento de subáreas da Matemática, ao contexto sociocultural da produção de conhecimentos matemáticos, à formação de grupos ou instituições ligados à Matemática, às relações da Matemática com outras áreas do conhecimento, à Matemática produzida em países não europeus, à Matemática dos povos nativos dos países colonizados, ao impacto da Matemática ocidental entre os povos colonizados, à historiografia da Matemática" (p. 523).

[4] Segundo Souto (2010) o campo "História da Educação Matemática" abrange as pesquisas que investigam a história: "[...] da Matemática escolar; do ensino de teorias, noções ou conceitos matemáticos; da formação do professor de Matemática; de pessoas ou instituições significativas para o desenvolvimento da Educação Matemática; da investigação em Educação Matemática; de políticas e propostas educacionais relativas à Matemática. Além disso, consideramos também as pesquisas que investigam o papel da História da Matemática na formação do matemático e do professor e as que tratam da historiografia da Educação Matemática" (p. 523).

> [...] problemas relativos às inserções efetivas da história na formação inicial ou continuada de professores de Matemática; na formação matemática de estudantes de quaisquer níveis; em livros de Matemática destinados ao ensino em qualquer nível e época; em programas ou propostas curriculares oficiais de ensino da Matemática; na investigação em Educação Matemática, etc (MIGUEL e MIORIM, 2008, p. 11).

Souto (2010) aponta que estas discussões em torno do campo "História na Educação Matemática" não são recentes, no cenário nacional ganharam força na década de 1980, devido à acentuação das críticas em torno do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Assim, nos últimos anos temos

> [...] testemunhado o discurso em favor da presença da História na Matemática escolar, nos debates acadêmicos, em textos didáticos, em propostas individuais ou coletivas, e, principalmente nos documentos expedidos pelos gestores da educação em todos os níveis de ensino (SOUTO, 2010, p. 524).

Nesse sentido, alguns autores, dentre os quais destacamos Miguel (1997), Brolezzi (1991), Mendes (2006), Fossa (2008), Balestri (2008), Valdés (2006), Feliciano (2008) e Santos (2017), apontam que a utilização de informações históricas em aulas de Matemática pode contribuir para ensino da Matemática e sobre a Matemática.

Dessa forma, essa seção tem o intuito de apresentar elementos relativos a formas nas quais a HM, segundo a literatura, pode contribuir com o ensino e aprendizagem da Matemática. Para tanto, realizamos uma revisão bibliográfica acerca da utilização da História da Matemática em sala de aula, ressaltando suas potencialidades para o ensino de Matemática e alguns obstáculos que os professores podem encontrar ao inseri-la em aulas de matemática na Educação Básica.

2.1. Potencialidades da História da Matemática para o ensino de Matemática

Na presente subseção, apresentaremos alguns argumentos favoráveis à utilização da História da Matemática em aulas de Matemática. Destacamos que Santos (2017) elaborou quatro argumentos favoráveis à utilização da HM em aulas de Matemática, nos quais são agrupadas ideias de diversos autores, como: Brolezzi (1991), Miguel (1993, 1997), Vianna (1995), Mendes (2006, 2009), Valdés (2006), Fossa (2006, 2008), Miguel e Miorim (2008), Feliciano (2008), Saito e Dias (2013), Berlinghoff e Gouvêa (2010), Balestri (2008), D' Ambrosio (2009), Souto (1997) e Fauvel (1991), sendo eles:

> A História da Matemática para a motivação; A História da Matemática para significado; A História da Matemática para apresentar motivações e aplicações e a História da Matemática para apresentar mudança de percepção sobre a Matemática e a promoção de valores no ensino de Matemática (SANTOS, 2017, p. 24).

Em nosso estudo, baseados nas ideias de Santos (2017)[5] e de seus referenciais, apresentamos que a História da Matemática, quando apresentada nas aulas de Matemática, pode contribuir para: a motivação; aprendizagem de conceitos matemáticos; a contextualização deste conteúdo e para a mudança de percepção com relação à matemática. A seguir apresentamos cada uma destas justificativas.

- **História da Matemática para a Motivação**

Nesse tópico reunimos ideias e justificativas de alguns autores como: Fauvel (1991), Vianna (1995), Miguel (1993, 1997), Souto (1997), Valdés (2006), Mendes (2006), Fossa (2006, 2008), Miguel e Miorim (2008), D'Ambrosio (2009) e Mendes e Chaquiam (2016) que versam sobre a possibilidade da HM propiciar uma motivação aos estudantes no estudo de determinados conceitos da Matemática, no entanto alguns desses autores também observam que é necessário ter cautela ao usar aspectos da HM com o intuito de motivar os(as) alunos(as).

Miguel (1997, p. 75) aponta que alguns matemáticos justificam o uso da História no processo de ensino e aprendizagem da Matemática recorrendo à categoria psicológica da motivação, já que estes acreditam que "[...] o conhecimento histórico dos processos matemáticos despertaria o interesse do aluno pelo conteúdo que está sendo ensinado", e ainda expõe que essa seria uma visão ingênua, já que acaba atribuindo à história o "[...] poder quase mágico de modificar a atitude do aluno em relação à matemática". Esse ponto de vista, tido pelo autor como ingênuo, faz com que o uso da HM ganhe um destaque relativo ao emprego de uma visão lúdica ou recreativa, sendo uma espécie de recompensa, um momento de descontração.

---

[5] Destacamos que mantivemos o agrupamento: HM para motivação, proposto por Santos (2017), mantendo suas ideias; reelaboramos o agrupamento HM para apresentar motivações e aplicações elaboradas por ele, pois entendemos que ao apresentar as motivações que levaram ao desenvolvimento de determinados conceitos e as aplicações que este teve estamos contextualizando historicamente determinado conceito; no agrupamento HM e mudança de percepção sobre a matemática e a promoção de valores no ensino de Matemática proposto por Santos (2017), aprofundamos as ideias relativas somente à mudança de percepção com relação à matemática; e reelaboramos o agrupamento HM para significado elaborado por Santos (2017), para HM para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Dessa forma, entendemos que independente da forma da utilização da HM, assim como de qualquer outra abordagem, não se dará a supressão de todos os obstáculos enfrentados no ensino de Matemática, em especial aqueles relacionados à motivação dos(as) alunos(as). Tendo em vista esta ressalva, apresentamos a seguir as ideias de alguns autores relacionadas à utilização de determinados aspectos da HM, visto que esta pode ser uma aliada, dependendo da forma como utilizada, para motivar os(as) alunos(as) no estudo de determinados conceitos matemáticos.

Para D'Ambrosio (2009, p. 29), "[...] a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importância", em especial pelo fato de que a apresentação de HM poderia se contrapor à ideia de Matemática presente em grande parte dos programas adotados pelas escolas que se refere a "[...] coisas acabadas, mortas e absolutamente fora do contexto moderno", fato que segundo o autor, dificultaria a motivação dos(as) alunos(as).

De forma semelhante, Fauvel (1991) indica que a HM pode contribuir para o aumento da motivação e para manter o interesse no estudo da matemática. Nessa perspectiva, Mendes (2006, p. 84) afirma que o uso da HM pode "[...] imprimir maior motivação e criatividade cognitiva às atividades de sala de aula", ao permitir uma ressignificação de determinados conceitos matemáticos produzidos ao longo do tempo, podendo propiciar uma ruptura na prática tradicional que vem sendo utilizada em salas de aulas.

Esse entendimento acerca do uso de aspectos da HM para propiciar uma maior motivação no estudo da Matemática, também pode ser identificado no documento oficial BNCC, no qual encontramos a indicação da importância de se incluir a HM nas aulas de Matemática, já que esta poderia "[...] despertar o interesse e representar um contexto mais significativo para aprender e ensinar matemática" (BRASIL, 2018, p. 296). Sendo assim, para esses autores, o valor da HM para motivação do(a) aluno(a) está em propiciar um maior interesse pelo conceito matemático que está sendo trabalhado, o que poderia contribuir com a aprendizagem matemática.

Valdés (2006, p. 25), aponta ainda que "[...] o enfoque histórico é uma proposta metodológica que atua como motivação para os alunos", sendo que, por meio desse enfoque seria possível conhecer a gênese de conceitos e métodos matemáticos, que pode vir a motivar o(a) aluno(a). Segundo Mendes e Chaquiam (2016, p. 12), trata-se de uma forma de desafiar a capacidade dos(as) alunos(as), incentivar seus estudos, pesquisas e problematizações, consistindo em "[...] revisitar da melhor forma os momentos históricos que envolvem os personagens que conceberam as noções matemáticas que se pretende ensinar". Sendo assim, na visão destes, o conhecimento de episódios históricos relacionados à origem do desenvolvimento de determinado conceito ou método pode propiciar aos(as) estudantes uma maior motivação para o estudo.

Fossa (2006) aponta que uma forma de apresentar elementos da HM de modo a motivar os(as) alunos(as), seria ao iniciar a discussão de determinado conceito. Para ele, tal apresentação pode ser realizada de duas formas, sendo uma do ponto de vista mais holístico, no qual a HM poderia revelar as ligações da Matemática com outras faces da cultura humana, e outra de um ponto de vista matemático, já que, os matemáticos anteriores tiveram interesse por determinados conceitos e problemas. Dessa forma, segundo o autor, os(as) alunos(as) poderão perceber tais problemas como empolgantes e desafiadores.

Além disso, para Miguel e Miorim (2008), baseados em argumentos expostos por Swetz (1989), indicam que a apresentação de problemas históricos pode se configurar como um componente motivador, pois, estes

> [...] possibilitam o esclarecimento e o reforço de muitos conceitos, propriedades e métodos matemáticos que são ensinados; constituem veículos de informação cultural e sociológica; refletem as preocupações práticas ou teóricas das diferentes culturas em diferentes momentos históricos; constituem meios de aferimento da habilidade matemática de nossos antepassados; permitem mostrar a existência de uma analogia ou continuidade entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 48-49).

Sendo assim, observarmos que os autores supracitados apontam a utilização de problemas que os matemáticos estudavam durante o desenvolvimento de determinado conceito ou método como uma forma de motivação, já que assim os(as) estudantes entrariam em contato com as questões que eram relevantes, ou que tinham a atenção dos matemáticos naquele momento.

Destacamos, entretanto, que Vianna (1995) concorda com o uso da HM com o intuito de motivar o(a) aluno(a), desde que este tenha relação com o que está sendo estudado. A cautela com relação ao caráter motivador da HM é partilhada por outros pesquisadores, como por exemplo, Miguel (1993, p. 70), que entende ser necessário ter prudência com o uso da HM apenas para motivação, pois "[...] a história, podendo motivar, não necessariamente motiva, e não motiva a todos igualmente e da mesma forma".

De forma similar Fossa (2008) ressalta que "[...] a História da Matemática terá alto poder motivador para alguns alunos, mas não para outros" (p. 9). Já Miguel e Miorim (2008, p. 25) alertam baseados em Schubring (1997), que "[...] a motivação histórica estaria associada diretamente à cultura e à sociedade, não podendo ser encarada da mesma forma para todos os países, em todos os momentos históricos". Fato que reforça a importância de se conhecer o contexto no qual estão inseridos os(as) alunos(as), de modo que o uso da HM possa realmente ter um papel motivador e efetivo.

Além destes questionamentos relacionados ao caráter motivador da HM nas aulas de Matemática, destacamos que para Souto (1997, p. 175), incluir a HM nas aulas de Matemática "[...] como instrumento de caráter apenas motivacional é restringir o seu potencial didático", pois com o uso da HM é possível trabalhar com outras abordagens capazes de levar a um resultado mais eficaz para a aprendizagem de determinados conceitos matemáticos.

Com base no exposto, constatamos que a HM pode ser utilizada com o intuito de motivar, podendo atrair o interesse de alguns estudantes para determinado conceito matemático, seja por meio de informações sobre a origem de determinado conceito ou por curiosidades e problemas históricos. No entanto, entendemos que existam outras possibilidades para o uso da HM em aulas de Matemática, no tocante àquilo que se refere à aprendizagem de conceitos matemáticos, capaz de possibilitar uma maior compreensão destes, conforme será exposto no item a seguir.

- **História da Matemática para a aprendizagem de conceitos matemáticos**

Nesse item reunimos argumentos de alguns autores como: Brolezzi (1991); Leite et. al. (2005); Valdés (2006); Mendes (2006, 2009); Fossa (2006, 2008); Santos (2007); Bezerra (2008), Feliciano (2008); Miguel e Miorim (2008); Brito e Carvalho (2009); Roque (2012) e Saito e Dias (2013), acerca do uso da HM em aulas de Matemática com o intuito de propiciar a aprendizagem de determinados conceitos matemáticos.

Inicialmente destacamos a relação entre a motivação dos(as) alunos(as) e a compreensão destes(as) em relação aos conceitos estudados, pois segundo Brolezzi (1991, p. 53) o interesse do(a) aluno(a) pelo conteúdo matemático pode ser despertado de várias formas; entretanto, ressalta que "[...] o significado da matéria é ponto central, pois sem acesso a ele não pode haver interesse nem motivação autênticos" de modo semelhante Leite et. al. (2005, p. 26) apontam que "[...] motivar significa preparar atividades significativas, pois serão elas que determinarão o nível de motivação dos alunos". Dessa forma, a construção do significado se torna relevante, pois a partir deste o(a) aluno(a) pode se sentir mais motivado a estudar e explorar aspectos relacionados a determinado conceito, contudo, ressaltamos, como apontado anteriormente, que essa motivação não vai atingir a todos(as) alunos(as) e da mesma forma.

Sendo assim, Feliciano (2008, p. 36) argumenta que a História da Matemática, poderia permitir ao(a) aluno(a) "[...] ter um entendimento mais apurado de seus conceitos e teoria", destacando desta forma, a possibilidade de utilizar aspectos da HM para uma aprendizagem mais significativa de determinados conceitos matemáticos.

Ressaltamos que a indicação de utilizar a HM com o intuito de proporcionar mais significado a Matemática escolar não é algo recente, pois, já era apresentada na Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 1º grau de São Paulo datada de 1988 – na qual, de acordo com Miguel e Miorim (2008, p. 45), integrava a ideia de que "[...] a história pode ser uma fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino aprendizagem da Matemática escolar na atualidade".

Segundo Miguel e Miorim (2008, p. 46), "[...] subjacente a todo processo de ensino-aprendizagem que visa à compreensão e à significação, estão o levantamento e a discussão dos porquês", os autores apontam que Jones (1969) acredita na existência de três categorias de porquês sendo eles, os porquês cronológicos, os porquês lógicos e os porquês pedagógicos[6] e, para este autor, a História seria o "[...] fio condutor que amarraria as explicações que poderiam ser dadas aos porquês pertencentes a qualquer uma das três categorias" (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 47).

Além disto, Brolezzi (1991, p. 44) argumenta que a utilização da HM poderia agregar mais significado ao conceito que está sendo estudado, já que este autor considera a HM, como um "[...] instrumento para a superação da dicotomia entre a *técnica* e *significado* no ensino elementar da Matemática", pois, para ele o ensino,

[6] Os porquês cronológicos, de acordo com Miguel e Miorim (2008, p. 47) têm como base para sua aceitação razões de "[...] natureza histórica, cultural, casual, convencional", já os porquês lógicos "[...] seriam aquelas explicações cuja aceitação se basearia na decorrência lógica de proposições previamente aceitas ou no desejo de compatibilização lógica de duas ou mais afirmações", e os porquês pedagógicos seriam aqueles relacionados à "[...] procedimentos operacionais que geralmente utilizamos em aula".

geralmente tende a enfatizar a técnica dos cálculos em detrimento da apreensão do significado.

Valdés (2006, p. 18) entende que "[...] a história pode e deve ser utilizada, por exemplo, para entender e fazer compreender uma ideia difícil de modo mais adequado", pois, ao resgatar, o processo histórico dos conceitos da matemática, o(a) estudante poderia, de acordo com Mendes (2006), entender o significado desses conceitos, observar a sua importância para a construção da Matemática e suas conexões com outras áreas do saber.

Assim, uma forma significativa da utilização da História da Matemática, com fins pedagógicos, seria o uso do conhecimento histórico

> [...] associado ao aspecto cotidiano da matemática, buscando conduzir o aluno a matemática escolar até mostrar-lhe o carácter científico desse conhecimento, conseguimos desenvolver uma abordagem de ensino que relaciona o construtivismo com a história da Matemática (MENDES, 2009, p. 112).

O autor ainda expõe que a História a ser utilizada em aulas de Matemática da educação básica, deve ser, de certa forma, "[...] uma "história-significado" ou uma "história-reflexiva", ou seja, uma história cuja finalidade é dar significado ao tópico matemático estudado pelos alunos, levando-os a refletir amplamente sobre tais informações históricas" (MENDES, 2006, p. 97).

Dessa forma, entendemos, assim como Santos (2007, p. 19), que o uso da HM pode contribuir com a aprendizagem de conhecimentos matemáticos "[...] ajudando o aluno a compreender tais métodos e fórmulas usadas hoje na Matemática". De modo semelhante, Feliciano (2008, p. 35) aponta que a História no ensino de Matemática, pode propiciar ao estudante um melhor entendimento de "[...] por que conjecturas e provas, que foram propostas no passado, fornecem ou não, respostas satisfatórias para problemas já existentes", podendo, dessa forma, incentivar os(as) alunos(as) a elaborarem suas próprias questões e conjecturas, descortinando, consequentemente, uma nova face da natureza da Matemática.

Uma forma de utilizar a HM nessa perspectiva seria propor aos(as) alunos(as) a realização de investigações, tendo como base aspectos da HM, pois esta, segundo Fossa (2008, p. 139) "[...] auxilia o desenvolvimento das habilidades matemáticas que queremos que sejam alcançadas por todos os nossos alunos". De forma semelhante, para Mendes (2009), "[...] as atividades apoiadas na investigação histórica apresentam uma série de informações que possibilitam aos estudantes uma ampliação maior do conhecimento aprendido” (p. 130-131).

Nesse mesmo sentido, Bezerra (2008) aponta que a HM

> [...] é um elemento orientador na elaboração de atividades na criação de situações problemas e na busca de referências para melhor compreender os conceitos matemáticos, pois possibilita ao aluno analisar e discutir razões para aceitação de determinados fatos raciocínios e procedimentos. Além disso, a história da matemática é rica em registros de situações práticas do cotidiano que mostram o problema como elemento principal para o ensino de conceitos matemáticos (BEZERRA, 2008, p. 21).

Sendo Assim, no modelo proposto “[...] as atividades devem ser elaboradas a partir de um diálogo conjuntivo entre as informações históricas e a perspectiva investigativa” (MENDES, 2006, p. 106). Segundo o autor, essa combinação pode imprimir maior significado à matemática escolar. No entanto, Mendes (2006) ressalta que o uso dessas atividades pressupõe uma participação mais ativa por parte do(a) aluno(a) na construção do conhecimento, podendo relacionar os saberes construídos com as necessidades históricas sociais e culturais presentes nele.

Dessa forma, com a utilização da HM é possível proporcionar o contato dos(as) estudantes com as “[...] experiências manipulativas resgatadas das informações históricas, com vistas a desenvolver o seu espírito investigativo, sua curiosidade científica e suas habilidades matemáticas, de modo a alcançar sua autonomia intelectual” (MENDES, 2006, p. 87). Nesse sentido, entendemos que uma das possibilidades de se utilizar a HM para a aprendizagem de conceitos matemáticos está na utilização de aspectos desta para elaboração de atividades investigativas.

Outra possibilidade seria buscar na HM problemas, pois para Roque (2012), a matemática se desenvolveu e vem se desenvolvendo a partir de problemas que tiveram naturezas diversas como: cotidiana, descrição dos fenômenos naturais, filosóficos e matemáticos. Nesse contexto, segundo a autora “[...] o papel da história da matemática pode ser justamente exibir esses problemas, muitas vezes ocultos no modo como os resultados se formalizaram” (ROQUE, 2012, p. 19).

Corroborando a ideia de que a HM pode colocar luz nos problemas que auxiliaram o desenvolvimento da Matemática, Fossa (2006, p. 139) aponta que a HM é uma fonte de “[...] problemas interessantes e desafiantes que podem ser incorporados ao ensino da matemática, especialmente na forma de atividades de redescoberta ou de resolução de problemas" que pode, segundo o autor, propiciar ao(a) estudante uma experiência pedagógica mais rica. Em uma perspectiva semelhante, Valdés (2006, p. 62) aponta que, em determinados casos os(as) estudantes "[...] ao dedicar-se a um problema original, se relacionam com a experiência da criação matemática, sem nenhuma interpretação intermediária".

Nesse sentido, a utilização da História pode modificar o processo de ensino-aprendizagem da matemática,

> [...] fazendo o aluno reagir diante de novos fatos, estabelecendo entre ele e o estudo da matemática uma relação mais harmoniosa, pois para compreender os conteúdos dessa disciplina seria interessante retomar os estudos sobre sua criação, seus problemas e as suas soluções através da história (BEZERRA, 2008, p. 22-23).

Nesta perspectiva, Brito e Carvalho (2009) expõem que uma das finalidades do recurso à HM está em criar problemas, sendo que estes podem não ser necessariamente os mesmos problemas que a História nos apresenta, mas recriações destes. Entretanto, merece destaque que, para Fossa (2006, p. 140), o uso da História em sala de aula acontece de forma profícua somente "[...] quando conceitos e problemas históricos são integrados na rotina diária da sala de aula e se tornam parte da experiência matemática do aluno", ou seja, é preciso que aspectos da HM não fiquem restritos somente à abordagem de determinado conceito.

Sendo assim, ao apresentar atividades na perspectiva supracitada, "[...] estaríamos colocando o(a) aluno(a) na posição de um pesquisador de matemática de um período passado, pois o(a) aluno(a) se achará defronte de problemas reais que os matemáticos enfrentaram" (FOSSA, 2008, p. 11). Dessa forma, de acordo com o autor, seria possível proporcionar ao(a) aluno(a) uma experiência de participar na pesquisa sobre a matemática, já que o(a) mesmo(a) estaria participando da sua construção, através da (re)descoberta.

Outra possibilidade seria estudar os documentos históricos, o uso destes é defendido por Saito e Dias (2013, p. 99), como uma iniciativa promissora de aproximar a História e o ensino de Matemática. Os autores apontam que esses documentos oferecem diferentes enfoques de abordagem, pois trazem informações sobre: "[...] o desenvolvimento do conhecimento matemático, os métodos de resolução de diversos tipos de problemas matemáticos, o uso da matemática em diferentes contextos e áreas do conhecimento, e assim por diante", podendo auxiliar uma maior compreensão de determinados conceitos matemáticos.

Sendo assim, foi possível observar, com base nos estudos realizados pelos pesquisadores apresentados, que a HM pode ser utilizada em sala de aula com o objetivo de promover a aprendizagem de determinados conceitos da Matemática; ao possibilitar, dependendo da forma que for apresentada, a compreensão de ideias, conceitos, métodos, fórmulas, teorias matemáticas e a explicação de determinados porquês relacionados à Matemática, seja por meio de atividades apoiadas em informações históricas ou por meio do uso de problemas históricos.

Diante do exposto, destacamos que foi principalmente na perspectiva de utilizar a HM para a aprendizagem que elaboramos algumas atividades do nosso conjunto de atividades. Ao resgatar dois métodos históricos, o método da "Falsa Posição" utilizado pelos antigos egípcios, e o método da "Inversão" utilizado pelos hindus; ambos empregados para resolver problemas que envolviam a resolução daquilo que hoje denominamos equação do primeiro grau com uma incógnita. Entendemos, portanto, estar proporcionando aos(as) estudantes o contato com formas diferenciadas de resolução que podem levar a uma melhor compreensão acerca da resolução de equação do primeiro grau com uma incógnita.

- **História da Matemática para contextualização**

Encontramos argumentos que versam sobre o uso da HM para a contextualização em variados trabalhos, a saber: Brolezzi (1991); Valdés (2006); Fossa (2008); Berlinghoff e Gouvêa (2010); Roque (2012), Lara (2013), Bernardes (2016) e Santos (2017).

Para Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 3) a "[...] matemática é um produto cultural. É criada por pessoas em um momento e lugar dados e frequentemente é afetada por esse contexto". Neste sentido, a HM pode auxiliar na apresentação de um contexto do desenvolvimento de determinados conteúdos, e possibilitar que o(a) aluno(a) investigue e compreenda "[...] como um conceito foi gerado, como os povos pensaram para chegar a determinadas conclusões, que fatores sociais, políticos ou econômicos influenciaram, levando em conta as relações de poder-saber que atravessaram esses povos" (LARA, 2013, p. 55).

De modo semelhante, Valdés (2006, p. 17) expõe que a HM possibilita apresentar aos(as) estudantes uma Matemática inserida em um contexto social e histórico, ao mostrar a Matemática "[...] dependente do momento e das circunstâncias sociais, ambientais, dos prejuízos do momento, assim como dos mútuos e fortes impactos que a cultura em geral, a filosofia, a matemática, a tecnologia, as diversas ciências têm exercido umas sobre as outras".

Nesse segmento, Fossa (2008, p. 13) indica que a HM "[...] contextualiza a própria matemática como acontecendo dentro de uma conjuntura, com certas finalidades e certos propósitos". Sendo assim, a História poderia contribuir para o ensino de Matemática ao "[...] enfatizar a forma peculiar de aparecimento das ideias em matemática; demarcar temporalmente e espacialmente as grandes ideias, problemas, junto com sua motivação, os seus precedentes; assinar os problemas abertos" (VALDÉS, 2006, p. 19).

Para Roque (2012, p. 21), os conteúdos geralmente trabalhados no ensino fundamental até o superior se desenvolveram há muitos séculos, assim a autora sugere que podemos, portanto, "[...] analisar o momento no qual os conceitos foram criados e como os resultados, que hoje consideramos clássicos, foram demonstrados, contrabalanceando a concepção tradicional que se tem da matemática como um saber operacional, técnico e abstrato".

Nessa mesma perspectiva, Lara (2013, p. 52) aponta que a "[...] matemática ensinada em sala de aula é o resultado de práticas desenvolvidas historicamente pela humanidade que originaram técnicas, estratégias e instrumentos para lidar com situações de determinado contexto". Ressalta-se, dessa forma, que a utilização de elementos da HM pode expor aos(as) estudantes um caráter prático da Matemática, ou seja, demonstrar o fato de que muitas vezes determinado conceito começou a ser desenvolvido, tendo como objetivo atender a uma demanda do cotidiano.

Brolezzi (1991) aponta que alguns obstáculos enfrentados pelos(as) alunos(as) para a compreensão de um determinado tópico matemático podem estar ligados à dificuldade de encontrar aplicações para este conceito. Neste sentido, Santos (2017, p. 32) indica que uma abordagem histórica da Matemática poderia contribuir para apresentar aos(as) estudantes "[...] as motivações que levaram vários estudiosos a se interessarem pela Matemática, e várias aplicações que aquele conceito teve ou pode ter".

Sobre isso, Bernardes (2016, p.8) aponta que História poderia ser utilizada "[...] para resgatar o desenvolvimento histórico dos objetos matemáticos, exibindo práticas em que os mesmos objetos não eram essenciais ou eram utilizados de modo distinto do de hoje e com outras finalidades". Sendo assim, segundo esse autor, o recurso a HM pode ser uma forma de resgatar como e para que determinados conceitos foram utilizados, evidenciando que nos dias atuais esses motivos podem ser diferentes.

Sendo assim, entendemos que na História da Matemática seria possível encontrar exemplos práticos e aplicações de determinados conceitos matemáticos. Entretanto Brolezzi (1991, p. 60) argumenta que "[...] a função insubstituível da História surge quando é preciso mostrar a Matemática de certa distância, de modo que se compreenda o fato de que ela não é um conjunto de regras para resolver problemas práticos". Dessa forma, segundo o autor, ao analisarmos o desenvolvimento histórico da Matemática, percebemos que há uma descontinuidade entre a Matemática e as aplicações práticas em determinados períodos históricos sendo possível notar que a Matemática às vezes "[...] se encaminha para uma direção aparentemente distante da prática, e mesmo lá encontra aplicações inesperadas; e outras vezes, um estudo com fins práticos acaba deixando de ser prático com a passagem do tempo" (BROLEZZI, 1991, p. 60). Desse modo, de acordo com esse autor, a "utilidade" de determinada ferramenta da Matemática na atualidade pode ser muito diferente em relação à sua utilidade levando em consideração o momento de seu desenvolvimento.

Neste sentido, para o autor, se por um lado a HM pode contribuir para apresentar ao(a) estudante uma visão do sentido prático do desenvolvimento da Matemática, por outro lado, pode mostrar que nem todos os conceitos foram motivados por questões práticas.

Diante do exposto, entendemos que o uso da HM, ao apresentar motivações e as necessidades que favoreceram o desenvolvimento de determinados conceitos, bem como as suas possibilidades de aplicação, é uma abordagem que pode levar a contextualização de determinados conceitos matemáticos. Ressaltamos que essa contextualização, ao nosso entender, pode contribuir para a aprendizagem de conceitos matemáticos e pode possibilitar que o(a) aluno(a) tenha uma visão mais humana da Matemática, conforme apresentamos a seguir.

- **História da Matemática para mudança de percepção da e sobre a Matemática**

No presente item, apresentamos algumas ideias de pesquisadores como: Brolezzi (1991); Miguel (1993); Mendes (2006); Fossa (2006, 2008); Valdés (2006); Balestri (2008); Feliciano (2008); Berlighoff e Gouvêa (2010); Aramam (2011); Saito e Dias (2013) e Santos (2017), que apontam a utilização da HM para contribuir com uma mudança de percepção da e sobre a Matemática.

Entendemos que uma mudança de percepção com relação à Matemática pode estar relacionada, também, com o reconhecimento da Matemática como uma ciência humana, um produto cultural, e de acordo com alguns pesquisadores, a HM pode ser uma aliada nessa tarefa. Balestri (2008, p. 20), por exemplo, enfatiza que a HM poderia contribuir para apresentar a Matemática como "[...] uma criação humana, uma manifestação cultural", sendo assim, uma abordagem histórica pode mostrar aos(as) alunos(as) que a Matemática é parte da nossa cultura, o que pode "[...] embasar a consciência da significância de conhecimentos matemáticos" (FOSSA, 2008, p. 10), ou seja, pode mostrar aos(as) estudantes a importância de determinado conceito dentro de uma cultura.

Fossa (2006, p. 138) aponta que com a HM seria possível observar "[...] como a matemática faz parte da cultura humana e isto certamente pode aumentar o interesse que o aluno terá pela matemática", ressaltamos, como já apontado, que nem todas as pessoas desenvolverão o mesmo nível de interesse pelas mesmas coisas.

De forma semelhante, Mendes (2006, p. 94) salienta que o uso da História como uma forma de resgate da cultura, pode propiciar o estabelecimento de conexões entre fatos cotidianos, escolares e científicos da Matemática por parte dos(as) estudantes, dessa forma, seria possível "[...] valorizarmos os saberes matemáticos da tradição e a capacidade matemática criativa da sociedade em todos os tempos".

Sendo assim, o uso de aspectos da HM poderia corrigir a impressão de que a Matemática só é usada em si mesma, pois, segundo Feliciano (2008, p. 34), a História nos apresenta que "[...] ao longo dos tempos o desenvolvimento de vários ramos de diversas ciências esteve ligado ao uso da matemática (por exemplo, na Economia, Física e Geografia)", evidenciando assim, possíveis aplicações da Matemática em outros campos do conhecimento. O autor ainda aponta que "[...] a representação da matemática como uma ciência constituída historicamente traz consigo o caráter prático de seu desenvolvimento" (FELICIANO, 2008, p. 32), dessa forma, pode-se evidenciar que determinados conhecimentos matemáticos foram desenvolvidos em resposta a questões de ordem prática, advindos de situações cotidianas.

Por conseguinte, ao expor a Matemática como sendo um "[...] conjunto de conhecimentos em evolução contínua e que nesta evolução desempenha, amiúde, um papel de primeira ordem, sua interpelação com outros conhecimentos e a necessidade de resolver determinados problemas práticos" (VALDÉS, 2006, p. 20), passa a se tornar possível, utilizando uma perspectiva histórica, desenvolver uma visão mais humana da Matemática.

Feliciano (2008, p. 36), aponta ainda que a "[...] História da Matemática forneceria a oportunidade de desenvolver a visão do que é matemática", nesta perspectiva para Saito e Dias (2013, p. 92), dependendo de sua abordagem, a HM pode colaborar com a construção de "[...] uma visão diferenciada da matemática, que passa a ser vista como atividade intelectual e humanizadora, ao invés de um corpo de conhecimento dado ou um conjunto de técnicas de resolução de problemas matemáticos".

De modo semelhante, Valdés (2006) argumenta que um olhar histórico nos

> [...] aproxima da matemática como ciência humana, não-endeusada, às vezes penosamente rastejante e, em ocasiões falíveis, porém, capaz também de corrigir seus erros. Nos aproxima das interessantes pessoalidades dos homens, que têm ajudado a impulsioná-la ao longo de muitos séculos, por motivações distintas" (VALDÉS, 2006, p. 16).

Sendo assim, o uso da HM em sala de aula pode contribuir, segundo Feliciano (2008, p. 31), para que o(a) estudante perceba que o desenvolvimento da matemática, assim como o de outras ciências, se deu e se dá por seres humanos, "[...] sujeitos a erros, a equívocos e que muitas vezes enfrentavam diversos obstáculos que demoravam anos para serem transpostos" e por se tratar de uma atividade intelectual, o autor aponta que, nem sempre resultou em uma forma lógica, como é geralmente apresentado aos(as) estudantes.

Dessa maneira, o uso da história poderia auxiliar na mudança desse panorama, já que, diversos(as) autores(as) entendem que o desenvolvimento histórico da matemática "[...] revela contradições, idas e vindas para o estabelecimento de sua organização lógica atual" (FELICIANO, 2008, p. 31).

Dessa forma dependendo da abordagem na qual a História da Matemática é utilizada, ela poderia levar o(a) aluno(a) a compreender a Matemática como uma construção ao longo do tempo, muitas vezes atendendo a demandas relacionadas ao contexto socioeconômico, ou seja, que determinados conceitos matemáticos tiveram uma razão de existir na época em que foram pensados e que essa razão pode não ser a mesma que temos hoje para estudá-los (FELICIANO, 2008). Sendo assim, pode-se expor aos(as) estudantes que "[...] a matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de matemática, que foi incorporada aos sistemas escolares" (ARAMAN, 2011, p. 79).

Levando em consideração os estudos citados, entendemos que ter conhecimento sobre determinados aspectos da História da Matemática, como o contexto no qual um determinado conceito ou método começou a ser estudado, pode possibilitar a construção de um novo entendimento sobre a Matemática, como por exemplo, o modo no qual ela se relaciona a outras atividades humanas e a influência do contexto, constatando-se, portanto, seu caráter multifacetado.

Sendo assim, entendemos que seja possível, dependendo do uso da HM em aulas de Matemática, revelar aos(as) estudantes uma Matemática menos intimidadora e mais humana. Feliciano (2008, p. 32) entende que, com o uso da HM, seria possível desmistificar a ideia de que a Matemática é reservada apenas a pessoas especiais e que somente esses privilegiados estariam aptos a compreender seus conceitos, já que a HM contribui para desconstruir a ilusória impressão de que os(as) matemáticos(as) "[...] produziriam novos conteúdos de maneira natural, quase espontânea, não deixando escapar as frustações e o longo caminho trilhado para atingir a estrutura considerável que a matemática construiu nesse processo".

Essa impressão é muitas vezes, segundo Brolezzi (1991), reforçada pela forma como a Matemática é frequentemente ensinada nas escolas, afastada de seu desenvolvimento ao longo do tempo, muitas vezes associada a um falso imobilismo, que pode levar os(as) estudantes a considerarem a Matemática uma Ciência Exata por excelência, transmitindo a impressão que a Matemática já está pronta e acabada.

Nesse sentido Feliciano (2008) argumenta que a Matemática

> [...] não é um sistema de verdades absolutas, mas um empenho humano que requer esforço intelectual e é determinado por vários fatores, tanto inerentes a Matemática, quanto externos. Também não é produto acabado por Deus; O valor de persistir com ideias, de tentar

> desenvolver formas criativas de pensamentos; Não se deixar desencorajar por falhas, erros, incertezas ou desentendimentos, apreciando que estes foram os blocos de construção do trabalho da maioria dos matemáticos mais importantes (FELICIANO, 2008, p. 36).

Dessa forma, segundo Berlighoff e Gouvêa (2010, p. 03), com o uso de aspectos da HM, seria possível fornecer aos(as) alunos(as) uma visão mais ampla da Matemática, já que é comum estes(as), pensarem "[...] na matemática da escola como uma coleção arbitrária de pedaços de informação", não percebendo que "[...] as pessoas agem por uma razão, e tipicamente constroem seu trabalho sobre outros anteriores em uma vasta rede de colaboração entre gerações".

Nessa perspectiva, para Mendes (2006, p. 92), o uso da História em aulas de Matemática pode influenciar na desmistificação desse campo do conhecimento, já que, ela pode ser usada para "[...] desvelar outras faces da matemática e, com isso, mostrar que ela é um conhecimento estruturalmente humano", portanto, acessível a todos(as), podendo levar os(as) estudantes a perceberem que a Matemática não é só "fazer conta" e decorar procedimentos e métodos.

Brolezzi (1991, p. 60) aponta que apenas o fato de mostrar aos(as) alunos(as) que a Matemática tem História, já os forneceria uma nova perspectiva sobre ela, pois "[...] dizer que algo tem história significa olhá-lo *em ação ao longo do tempo*". Entretanto, destacamos a importância da escolha da abordagem utilizada pelo professor, pois dependendo da forma que for utilizada a HM, esta pode, inclusive, reforçar aspectos negativos em relação à Matemática.

Por exemplo, ao utilizar a HM para expor informações sobre matemáticos(as) notáveis e seus "grandes feitos" na Matemática, não se contribui para que o(a) aluno(a) conheça as razões, motivações e contexto relativos ao desenvolvimento de um determinado conceito e tampouco agrega para a discussão acerca dos problemas, dificuldades, frustações e o empenho dispendido por estudiosos(as) que contribuíram para o desenvolvimento de tal conceito. Além disto, tal abordagem da HM pode contribuir para que o(a) aluno(a) compreenda a Matemática como um conhecimento "destinado a poucos" podendo propiciar que o(a) estudante internalize a ideia de que é natural ele não entender determinado conceito matemático.

Dessa forma, é preciso cuidado ao preparar atividades que contenham aspectos da HM para que seja possível tornar as atividades matemáticas mais humanas, mostrar que esta é uma ciência viva em constante construção e que seus conceitos e teoremas não foram “descobertos” da noite para o dia por pessoas “iluminadas”, ao contrário, foram exigidos empenho e tempo em seu desenvolvimento. Dessa forma, entende-se que a Matemática está ao alcance de todos. Nesse sentido, compreendemos, assim como Santos (2017, p. 35), “[...] que a HM tem um papel fundamental nessa mudança de percepção sobre a matemática”.

Essa mudança de percepção dos(as) estudantes com relação à matemática, segundo Miguel (1993), pode contribuir para a aprendizagem da Matemática em geral, na medida em que pode propiciar aos(as) estudantes “perderem o medo” da Matemática e se sentirem capazes de aprender conceitos matemáticos, fato que poderia influenciar positivamente no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Diante do exposto entendemos que o uso da História da Matemática pode contribuir para uma mudança de percepção da e sobre a Matemática, ao fornecer elementos que podem levar os(as) alunos(as) a entenderem a Matemática como uma criação humana, um produto cultural, uma ciência em constante desenvolvimento que muitas vezes está relacionada a questões cotidianas. Dessa maneira, torna-se possível mostrar que a Matemática não é uma ciência que foi “criada” por uns poucos em determinado momento.

- **Uma síntese das contribuições da HM**

Para finalizar a apresentação das contribuições da HM para o Ensino de Matemática, apresentamos no quadro 1, a seguir, uma tentativa de sintetizar as principais ideias relativas a cada argumento favorável à utilização de elementos históricos em aulas de Matemática.

Quadro 1- Síntese dos agrupamentos elaborados

Agrupamento	Elementos da HM
HM para motivação	• Conhecimento de personalidades históricas; • Origem de procedimentos matemáticos; • Conhecimento de problemas que motivaram o desenvolvimento de determinado conceito; • Curiosidades históricas;
HM para aprendizagem de conceitos matemáticos	• Resposta a alguns porquês matemáticos; • Explicação de determinados conceitos, teorias, ou procedimentos matemáticos;
HM para contextualização	• Conhecimento do contexto histórico e social; • Conhecimento de aplicações;

HM para mudança de percepção da Matemática	• Matemática como construção humana; • Desmistificação da ideia de que a matemática é reservada a uns poucos;

Fonte – Elaborada pela autora

Desse modo, ressaltamos que a HM pode contribuir para o ensino de Matemática e sobre Matemática de modo geral, podemos inferir que, de modo particular, possa contribuir para o ensino de álgebra, mais especificamente, ao ensino de equação do primeiro grau. Entendemos que ao resgatarmos dois métodos históricos que eram utilizados para resolver problemas que envolviam encontrar quantidades desconhecidas, os quais atualmente podem ser resolvidos através de uma equação do primeiro grau com uma incógnita, seria possível utilizar a HM para a aprendizagem, e foi nesta perspectiva que o presente trabalho se realizou.

Embora tenhamos conhecimento acerca das contribuições que a HM pode trazer para o ensino de Matemática, é necessário ressaltar que a sua utilização em sala de aula, não é uma tarefa simples, de modo que é possível encontrar na literatura algumas adversidades a serem enfrentadas. Sendo assim, no tópico a seguir, expomos algumas dificuldades da utilização da HM no ensino de Matemática.

2.2. Dificuldades em utilizar a HM

Embora, conforme apontado, a HM possa contribuir para o ensino de Matemática, contendo em sua literatura justificativas e formas de inserir aspectos da HM no ensino de Matemática, alguns estudos, dentre os quais destacamos Souto (1997), Feliciano (2008) e Santos (2017), indicam que a História da Matemática ainda tem encontrado obstáculos para estar presente nas aulas de Matemática. De acordo com Souto (2010, p. 524), “[...] na prática efetiva de sala de aula, a História da Matemática tem tido pouca ou nenhuma participação”. Tal resultado, também, foi enfatizado por Santos (2017, p. 66), pois este mostra que a HM “[...] não está sendo utilizada de forma que professores e alunos pudessem aproveitar todo o seu potencial pedagógico”. Esta baixa utilização da HM em sala de aula pode estar relacionada com algumas dificuldades de trabalhar a partir destas abordagens apresentadas pela literatura.

Uma das justificativas para tal situação pode estar relacionada a falta de materiais relativos à História da Matemática, os quais os professores possam utilizar em suas aulas. Embora existam publicações em português, percebe-se

> [...] a quase ausência de literatura adequada sobre a história da Matemática anterior aos dois últimos séculos. Isso impediria a utilização pedagógica da história porque a maior parte daquilo que é usualmente ensinado de Matemática em nossas escolas de 1º e 2º graus pertencem a esse período (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 63).

Um segundo argumento apontado pelos autores Miguel e Miorim (2008, p. 63), é que a "[...] natureza da literatura histórica disponível a torna particularmente imprópria à utilização didática", visto que uma das características das publicações em História da Matemática está em destacar apenas os resultados matemáticos e não a sua forma de produção. Dessa forma, métodos e processos históricos de descobertas, que poderiam ser utilizados em sala de aula, estariam perdidos. Nesta mesma perspectiva, Saito e Dias (2013, p. 91) apontam que a maioria das escritas em HM, "[...] reduzem-se a biografias ou a conteúdos matemáticos dispostos linearmente, dando ênfase ao caráter heurístico dos objetos da matemática", beneficiando, dessa forma, os resultados e não o processo de construção, o que pode reforçar a impressão de que a Matemática é um conhecimento pronto e acabado.

Além disto, para Mendes (2006, p. 97) a "[...] falta de informações sobre o desenvolvimento histórico da matemática e de propostas metodológicas de utilização das mesmas no ensino da matemática escolar", se configuram em importantes dificuldades encontradas pelos professores que desejam utilizar uma abordagem histórica em sala de aula, já que as publicações de HM estão centradas no contexto-científico da Matemática ao invés do contexto escolar.

Em uma perspectiva semelhante, para Vianna (1991) há poucos textos disponíveis sobre a HM que possam ser utilizados pelos professores do primeiro e segundo graus, fato também ressaltado por Balestri (2008), ao indicar que faltam publicações relativas à HM que possam auxiliar o professor a estudá-la e incorporá-la à sua prática pedagógica. Sendo assim, Mendes (2006, p. 131) aponta que é necessário "[...] avançarmos nos estudos em história da Matemática buscando constantemente construir uma história da matemática própria para uso em sala de aula, voltada ao ensino fundamental e médio".

Com base nesses apontamentos, identificamos que muitos dos argumentos encontrados na literatura em relação à dificuldade do professor em utilizar elementos da HM, se referem à falta de materiais ou à natureza imprópria destes para serem utilizados em sala de aula. No entanto, destacamos que esse cenário tem se modificado, sendo possível encontrar cada vez mais trabalhos relacionados a aspectos da HM em geral e em especifico voltados para seu uso em aulas de Matemática.

Um exemplo dessa mudança encontra-se em relação aos trabalhos acadêmicos que estudam aspectos da História da Matemática, os quais foram encontrados ao realizarmos um levantamento bibliográfico de teses e dissertações no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Identificamos, utilizando a palavra-chave História da Matemática, que 377 trabalhos dentro dessa temática foram defendidos no período de 2013 a 2018. Ao compararmos com os resultados do levantamento realizado por Omena (2015) que encontrou, com a mesma palavra-chave, 254 trabalhos defendidos no período de 1987 a 2012, notamos um aumento expressivo na quantidade de trabalhos relacionados à HM nos últimos anos[7].

Encontramos, também, a presença da HM em livros didáticos do sétimo ano do Ensino Fundamental aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2017, em específico, na abordagem do conceito de equação do primeiro grau com uma incógnita[8]. Destacamos que dos onze livros aprovados tivemos acesso a nove, dentre eles, em três não encontramos nenhuma menção[9] relacionada à HM no tópico estudado.

Há, também, iniciativas da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat) para produção e divulgação tanto de materiais sobre a HM, quanto de materiais que auxiliem o docente que deseje ensinar matemática por um viés histórico[10]. Além disso, recentemente, em 2019, foi disponibilizado *on-line* o Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat)[11] que se constitui, por um lado, em um repositório digital, no qual são organizadas e disponibilizadas à comunidade acadêmica um acervo de produções acadêmico-científica sobre a História da Matemática, por outro lado, em um espaço de colaboração com a comunidade, ou

---

[7] É importante ressaltar que neste período houve, também, um aumento da produção científica de modo geral no Brasil.

[8] Ressaltamos que estudamos a presença da HM nos livros didáticos do sétimo ano do Ensino Fundamental, mais especificamente, no capítulo que trata da Equação do Primeiro Grau com uma incógnita, por este ser o conceito explorado no conjunto de atividades elaborado, não sendo objetivo deste trabalho investigar a presença da HM nos livros didáticos de modo geral.

[9] Para identificar as menções a HM, seguimos a definição elaborada por Carlini e Cavalari (2017), a qual comtempla trechos que abordam "[...] origem/surgimento de alguma ideia/noção/conceito relacionado à Matemática; atribuição de autoria; biografias; fatos da vida de estudiosos ou suas realizações no campo da Matemática; cronologias; histórico do desenvolvimento de conceitos matemáticos; conhecimento das antigas civilizações a respeito da Matemática; problemas de origem histórica; utilização de conhecimentos matemáticos de outras áreas ao longo da história" (p. 76-77).

[10] https://www.sbhmat.org/

[11] http://www.crephimat.com/home.

seja um espaço para sugestões didáticas e orientações a alunos(as), professores(as) e pesquisadores(as).

Dessa forma, há evidências que têm sido produzidos e disponibilizados materiais de HM nos quais os docentes possam se inspirar para preparar suas aulas. Neste contexto, cabe questionar por que esse aumento de trabalhos/materiais relativos à HM não se reflete em sua utilização em sala de aula?

Santos (2017, p. 67), em uma pesquisa com professores da rede pública de ensino da cidade de Itajubá/MG, constatou que todos os participantes da pesquisa tiveram algum contato com a História da Matemática, no entanto identificou que muitas vezes esta não tem sido utilizada de forma a explorar seu potencial pedagógico. O autor aponta que essa situação pode estar relacionada com a "[...] falta de conhecimento de materiais específicos de História da Matemática, da grande utilização de informações contidas nos livros didáticos e em materiais de divulgação científica" (SANTOS, 2017, p. 68).

Este autor justifica que essa falta de conhecimento de materiais relacionados à HM está ligada a dificuldade do docente em ter acesso a materiais de HM e/ou materiais voltados à utilização da HM em aulas de Matemática, visto que tais materiais dificilmente estão disponíveis nas bibliotecas das escolas. A problemática dos materiais relativos à HM também foi constatada em uma pesquisa realizada com licenciados(as) em Matemática de uma universidade federal do sul de Minas Gerais, em que os(as) mesmos(as) entendem que "[...] os materiais disponíveis para auxiliar a inserção da História da Matemática em aulas de Matemática ainda não são suficientes" (CARVALHO; CAVALARI, 2019, p. 19).

Dessa forma, é possível conjecturar que essas pesquisas relacionadas à HM não estão chegando ou atendendo as demandas dos(as) professores(as) ou licenciandos(as) em Matemática, para que esses possam estudá-las e incorporá-las em suas aulas. Nesse sentido, ressaltamos a importância da produção e da divulgação de pesquisas voltadas para produção de propostas de atividades que buscam na HM um suporte que pode propiciar ao estudante um entendimento mais profundo de determinado conceito matemático.

Além disto, Feliciano (2008, p. 40) aponta que o principal limite em relação ao uso da HM em aulas de Matemática "[...] remete à formação do professor, bem como a competência para um trabalho envolvendo uma dimensão histórica". Corroborando este ponto de vista, Brito e Mendes (2009, p. 10) citam como uma adversidade na utilização da História no ensino de Matemática "[...] o despreparo dos professores que não tiveram tanto em sua formação inicial ou continuada, oportunidade de estudo da história da Matemática e de análise das possibilidades de inserção desta história em suas práticas pedagógicas".

Entretanto, pode-se dizer que este cenário também tem se modificado, já que Moraes e Cavalari (2019) ao mapear e analisar de que forma os tópicos relativos à HM e à HM no ensino que são contemplados em disciplinas dos cursos de licenciatura em Matemática oferecidos por Universidades Federais localizadas em Minas Gerais, identificaram que todos os cursos presenciais estudados abordam temáticas relativas à HM.

Sendo assim, os futuros professores(as) estão tendo contato com a História da Matemática ainda na sua formação inicial, entretanto, destacamos que o contato com a HM na graduação não garante que o futuro professor utilizará a HM em suas aulas. Em uma pesquisa recentemente realizada com licenciandos(as) em Matemática que tinham em seu curso duas disciplinas[12] relacionadas a HM, Carvalho e Cavalari (2019) constataram que os(as) licenciandos(as)

> [...] mesmo tendo tido contato durante a graduação com ao menos uma disciplina sobre a HM, tendo interesse em utilizar a HM em suas futuras aulas na educação básica e conhecendo formas de utilizá-la, a maioria dos(as) licenciandos(as), ainda não se sente preparada para incluir a História da Matemática em suas futuras aulas na educação Básica (p. 25).

Com isso, as autoras apontam que talvez a abordagem em duas disciplinas ainda não seja suficiente, como acontece com qualquer outra abordagem trabalhada nos cursos de formação de professores, para que o futuro professor possa utilizar a HM em aulas de Matemática, e questionam se talvez não fosse necessário um maior espaço, durante a formação inicial destinado ao trabalho com aspectos relativos à HM.

Nesse sentido, Feliciano (2008, p. 102) aponta que "[...] se há o interesse em utilizar a História da Matemática para fins didáticos, deve-se dar maior relevância a ela na formação dos professores" para que, dessa forma, os futuros professores tenham mais subsídios para fazer uso da HM em aulas de Matemática. De modo semelhante, Araman

---

[12] Essas disciplinas eram de caráter obrigatório, sendo que uma é específica da História da Matemática e a outra apresenta, entre outras temáticas, justificativas, possibilidades e limitações do uso da HM em aulas de matemática.

(2011, p. 226) aponta que "[...] para que a história da matemática seja realmente usada em sala de aula, é imprescindível a preparação adequada do professor".

Com base nas informações apresentadas, destacamos a relevância da inclusão de mais elementos da HM nos cursos de formação de professores e a produção de materiais especificamente voltados para auxiliar o docente a lecionar matemática utilizando a HM. O presente trabalho, dentre outros aspectos, visa contribuir com a produção e divulgação desses materiais, apresentando um conjunto de atividades que foi elaborado para trabalhar com a resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita utilizando uma abordagem histórica.

Destacamos que encontramos cinco trabalhos que apresentavam uma proposta didática para trabalhar com o conceito de equação do primeiro grau com um viés histórico, realizando uma busca em teses e dissertações disponíveis no banco de teses e dissertações da Capes. Ao estudar estes trabalhos, verificamos que em apenas dois a HM foi utilizada com uma estratégia didática, ou seja, tinham o intuito de contribuir com a compreensão do conceito de equação do primeiro grau, para tanto, ressaltamos que ambas as dissertações fizeram a apresentação e discussão do método histórico da "Falsa Posição".

Sendo assim, é possível inferir que há poucos trabalhos voltados para o ensino de equação do primeiro grau com uma abordagem histórica. Dessa forma, este estudo evidenciou a necessidade da produção de mais trabalhos direcionados ao estudo do conceito de equação com uma abordagem histórica e que o método histórico da "Falsa Posição" pode ser uma alternativa para propiciar uma melhor compreensão acerca da resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita.

Cabe ressaltar outra dificuldade em relação ao uso da HM em sala de aula, que se refere ao fato de que "[...] a introdução do elemento histórico no ensino da matemática, em vez de facilitar a aprendizagem, acabaria por complicá-la ainda mais" (MIGUEL e MIORIM, 2008, p. 64), já que, de acordo com estes autores, os(as) alunos(as), ao serem confrontados com problemas originais e suas soluções, gastariam um tempo e esforço muito grande. Entretanto, os mesmos apontam que "[...] o que se perde em energia, ganha-se em significado, sentido e criatividade" (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 64).

Dessa forma, entendemos que os conhecimentos relativos à HM, dependendo de sua abordagem, podem propiciar uma melhor compreensão sobre a Matemática e de determinados tópicos matemáticos na Educação Básica. Embora a utilização de elementos da HM possa levar mais tempo que o modo tradicional, fato que, aliás, é inerente a qualquer atividade diferenciada, ressaltamos a sua relevância, pois entendemos ser pouco produtivo cumprir todo planejamento com os(as) estudantes se estes(as) não têm a oportunidade e o tempo necessário para que consigam entender o porquê matemático por traz dos procedimentos e métodos estudados, contribuindo assim, para que, muitas vezes, estes sejam "decorados" e utilizados pelos(as) alunos(as) de forma mecânica, muitas vezes sem entender o porque de estar resolvendo daquela forma, o que pode levar a uma não interpretação dos resultados encontrados e uma desmotivação para o estudo de determinado tópico.

Sendo assim, elaboramos um conjunto de atividades que se configura como um caminho alternativo para estudo da resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita, sem fazer o uso da regra prática "muda de lado – muda o sinal" na qual o(a) aluno(a) é levado a resolver as equações de forma mecânica. Este conjunto de atividades foi elaborado tendo como referência, um estudo sobre as potencialidades de se utilizar elementos da HM para o ensino de Matemática, no qual procuramos, por meio da apresentação de métodos históricos, levar o(a) aluno(a) a um entendimento do que é resolver uma equação do primeiro grau com uma incógnita. Para a elaboração desta proposta realizamos um estudo sobre aspectos históricos da resolução de equação do primeiro grau com uma incógnita, o qual apresentamos no item subsequente.

Este conjunto de atividades foi implementado e foram analisados elementos referentes às potencialidades e dificuldades de se utilizar aspectos da HM para o estudo do conceito de equação do primeiro grau com uma incógnita. Sendo assim, este trabalho pode contribuir tanto com o ensino em sala de aula, quanto com a área de Educação Matemática, na medida em que apresenta um conjunto de atividades que se utiliza da HM para o ensino de Matemática e as possibilidades e limitações de sua implementação.

2.3. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS SOBRE AS RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU: em específico o método da "Falsa Posição"

Embora tenhamos conhecimento da existência de argumentos favoráveis e de fatores que podem dificultar a utilização da HM em aulas de Matemática, entendemos, tendo como base o estudo apresentado, que a História da Matemática pode contribuir para o ensino de Matemática e que, de modo particular, possa contribuir para o ensino de determinados conceitos da Álgebra.

Visto que, ao olharmos para a História da Álgebra "[...] desde os primórdios quando os objetos de estudo eram as equações algébricas específicas até o estabelecimento de uma área da pesquisa que até hoje é essencialmente abstrata, perceberemos um longo caminho em busca de padrões e sedimentação teórica" (COELHO; AGUIAR, 2018, p. 117).

Os referidos autores indicam, ainda, que ao estudarmos a história da Álgebra é possível observar a importância do

> [...] desenvolvimento de um sistema de numeração posicional, a compreensão do conceito de número, a compreensão, identificação e utilização das propriedades das operações; a capacidade de identificar padrões nas propriedades para diferentes conjuntos numéricos; a generalização dessas propriedades das operações; o desenvolvimento e a utilização de uma linguagem própria e adequada; a busca pelos padrões e a identificação da falta deles em várias relações (COELHO; AGUIAR, 2018, p. 184).

Estas ideias reforçam a importância de se conhecer e entender a forma como os conceitos que conhecemos hoje se desenvolveram ao longo do tempo. Nessa perspectiva, Ribeiro (2009) realizou um estudo epistemológico-histórico sobre as maneiras nas quais a noção de equação foi abordada por estudiosos ao longo do tempo, que apresentamos no quadro a seguir de forma resumida.

Quadro 2 - Noção de equação ao longo da História

	Noção de equação
Babilônios e Egípcios	Caráter pragmático, em que na maioria das vezes a busca pelas soluções estava relacionada a problemas específicos. Os métodos utilizados tinham ligação com ideias aritméticas. Não tinham a preocupação de encontrar soluções gerais.
Gregos	Caráter geométrico e de forma dedutiva, em que as soluções envolviam manipulações geométricas. A busca por soluções estava relacionada a equações particulares e não métodos gerais.
Árabes e Hindus	Caráter mais algébrico, mais generalista, trabalhava tanto com problemas de ordem prática, quanto com situações que envolviam manipulações geométricas.
Europeus	Caráter estrutural, com propriedades e características bem definidas, com a finalidade de encontrar soluções gerais.

Fonte – Ribeiro (2009, p. 82- 83)

Dessa forma, Ribeiro (2009, p. 83) conclui que durante muito tempo as equações algébricas foram o principal objeto de estudo no campo da Álgebra, no entanto, o estudo destas perdeu destaque em função do estudo das estruturas matemáticas. Sendo assim, o autor aponta a existência de dois grandes momentos históricos, "[...] antes dessa mudança tínhamos o que é denominado por Álgebra Clássica ou Elementar e, depois, o que é chamado de Álgebra Moderna ou Abstrata".

Nesse sentido, ressaltamos a importância de o professor ter conhecimento de como se deu o desenvolvimento de certos conceitos. Em específico, do conceito de equação, já que segundo Brandemberg (2017, p. 174), alguns povos antigos "[...] resolviam problema por métodos, que, segundo a concepção moderna, podem ser considerados algébricos. Esses métodos envolviam, direta ou indiretamente, operações com quantidades desconhecidas", sendo assim o professor com o auxílio da HM terá condições de estudar os problemas e os métodos empregados para a resolução de equações e ter oportunidade de integrá-los em seu planejamento. Afinal, estes métodos podem se configurar como uma alternativa às abordagens atuais geralmente apresentadas nos livros didáticos, que prezam por técnicas de resolução em detrimento do desenvolvimento do significado do que é resolver uma equação.

Destacamos que ao realizarmos um estudo nos livros didáticos do sétimo ano do Ensino Fundamental, mais especificamente, no tópico que aborda o conceito de equação do primeiro grau, encontramos 18 menções à História da Matemática, das quais cinco puderam ser classificadas como estratégia didática. Dentre as menções que, em nosso entender, fizeram uso da HM como uma estratégia didática, em quatro os autores propuseram atividades que abordavam métodos históricos, a saber: em uma o método da "Inversão" e em três, o método da "Falsa Posição".

Dessa forma, este estudo nos mostrou que o uso da HM como uma estratégia didática capaz de levar o(a) aluno(a) a uma (re)construção de determinados conceitos, é ainda pouco explorada, sendo encontrada em apenas quatro dos nove livros estudados. Destacamos ainda, que todas as menções que apresentavam um método histórico estavam localizadas na parte final do capítulo, ou seja, apenas como a apresentação de uma forma diferente de resolver equação do primeiro grau com uma incógnita.

Ressaltamos que ao analisar as soluções dadas aos problemas, contidos nos papiros, "[...] envolvendo quantidades desconhecidas, observamos que elas eram em princípio, comparáveis com as nossas equações lineares" (MEDEIROS; MEDEIROS, 2004, p. 550), sendo assim entendemos que o resgate do método da "Falsa Posição", utilizado pelos antigos egípcios, que segundo Ribeiro (2009) tinha ligações com ideias da aritmética, pode ser uma abordagem a ser trabalhada inicialmente na resolução de equações, já que assim os(as) estudantes poderão trabalhar com a resolução de equação, mas continuarão utilizando os conhecimentos da aritmética, fato que pode amenizar os obstáculos que, conforme a literatura, são encontrados na transição da Aritmética para a Álgebra.

Dessa forma, considerando que o intuito do conjunto de atividades elaborado é iniciar o estudo da resolução de equações do primeiro grau utilizando o método da "Falsa Posição" operacionalizado pelos antigos egípcios, julgamos necessário tecermos algumas considerações históricas acerca deste método. Afinal, entendemos, na mesma perspectiva que Mendes (2006, p. 108), que é preciso buscar nos materiais históricos todas as informações que podem auxiliar no planejamento e orientação das atividades, a fim de obter um ensino-aprendizagem significativo em matemática com uso de informações históricas.

Método da Falsa Posição: Algumas considerações sobre o seu percurso histórico

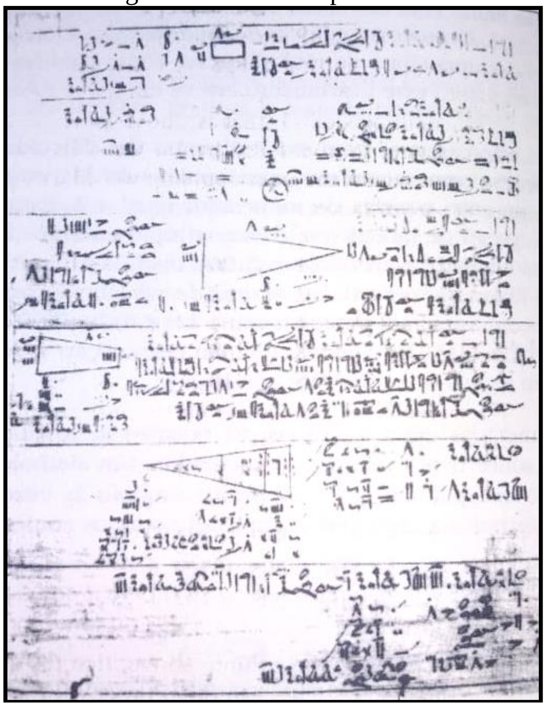
As origens do método da "Falsa Posição", de acordo com Medeiros e Medeiros (2004, p. 546), "[...] remontam ao antigo Egito e aos primórdios da civilização chinesa, tendo sido largamente utilizado, desde então, por matemáticos de várias civilizações". Os registros da Matemática no antigo Egito provêm dos papiros que continham problemas matemáticos e suas soluções, principalmente do Papiro Matemático Rhind e o Papiro Matemático de Moscou (WUSSING, 1998; KATZ, 2010).

O estudo da Matemática egípcia demorou muito tempo para ser realizado, visto que, para Martins (2015), por mais de 3.000 anos, o conhecimento sobre a escrita e o sistema de numeração egípcio manteve-se indecifrável. Segundo Katz (2010, p. 5), Jean Champollion (1790 – 1832), foi o principal responsável pela primeira tradução da escrita desenvolvida pelos egípcios, a escrita hieroglífica, no início do séc. XIX, e seu trabalho só foi possível, "[...] com a ajuda de uma inscrição multilíngue – a pedra de Roseta – em hieróglifos e em grego". Martins (2015, p. 25) destaca a relevância da descoberta da Pedra de Roseta, já que "[...] sua descoberta, tradução e publicação trouxe luz às pesquisas sobre a antiga civilização egípcia, além de contribuir para o fortalecimento da egiptologia moderna".

O Papiro Rhind[13], segundo Medeiros e Medeiros (2004, p. 549), é "[...] um dos documentos mais antigos que faz referência ao método da falsa posição". Este documento é, de acordo com Eves (2004, p. 69), datado de aproximadamente 1650 a.E.C. e se configura como um "[...] texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo".

Dessa forma, o Papiro Rhind pode ser considerado como uma fonte primária rica sobre a Matemática da antiga civilização egípcia, já que, "[...] descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra da falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um e muitas aplicações da matemática e problemas práticos" (EVES, 2004, p. 70).

Figura 1- Parte do Papiro Rhind



Fonte – Eves, 2004, p. 74

Destacamos que, segundo Roque (2012, p. 27), há indicações de que os papiros matemáticos dos egípcios faziam parte de uma tradição pedagógica, sendo que uma das

[13] O Papiro Rhind, também conhecido como Papiro de Ahmes tem, segundo Katz (2010), tem cerca de 18 pés de comprimento e 13 polegadas de altura [aproximadamente 5,5 metros de comprimento e 33 centímetros de altura]. Esse papiro leva o nome do egiptólogo escocês A. H. Rhind (1833 – 1863) que o adquiriu em Luxor no Egito em 1858, depois de sua morte, em 1865, foi comprado pelo Museu Britânico, sendo que sua divulgação oficial só ocorreu em 1898. (KATZ, 2010; EVES, 2004; MARTINS, 2015).

funções dos escribas[14] era propiciar a formação de novos escribas. Dessa forma, os papiros que continham "[...] problemas e soluções preparados por eles para antecipar as situações que os mais jovens poderiam encontrar no futuro". Martins (2015), ao estudar o trabalho de Raja Gabaglia[15] sobre o papiro Rhind, aponta que este apresenta duas opiniões quanto a que se destinava o papiro Rhind, sendo elas

> [...] de acordo com título solene: "Regras para se perscrutar a natureza e se conhecer tudo quanto existe, cada mistério e cada segredo", o texto pode ter sido usado como um manual de professor para ensinar o aluno. Por outro lado, a repetição de exercícios e os pequenos erros em alguns problemas sugerem que o papiro tenha sido um caderno de estudante. (MARTINS, 2015, p. 138).

Dentre os conceitos matemáticos abordados no Papiro Rhind, destacamos o uso do método da "Falsa Posição" para a resolução de determinados problemas. De acordo com Roque (2012), esse método era utilizado na resolução do grupo de "problemas de Ahá", que tinham essa denominação por conta do termo utilizado no título de cada problema representado pelo seguinte símbolo:

Figura 2- Símbolo do Ahá

Fonte: Roque (2012) p. 66.

Para esta autora, a palavra "Ahá" pode ser traduzida por "número" ou "quantidade" e os "problemas de Ahá", buscavam "[...] encontrar uma quantidade desconhecida quando é dada uma relação com o resultado conhecido. A solução seria obtida, atualmente, pela resolução de uma equação linear" (ROQUE, 2012, p. 66).

Esse método, que hoje é conhecido como método da "Falsa Posição", é semelhante a "[...] um procedimento de tentativa e erros" (MEDEIROS; MEDEIROS, 2004, p. 546). Para Roque (2012, p. 67), tal procedimento "[...] se baseia em um "chute"

[14] Os escribas, segundo Wussing (1998, p. 17 – tradução nossa) pertenciam à classe dominante e exploratória, tinham como função recalcular os impostos, dirigiam exércitos de trabalhadores, trabalhos judiciais e manejavam as matemáticas, cuidando de questões relativas à: "[...] medição de terras, especialmente por conta das contínuas e periódicas inundações do rio Nilo, cálculo de impostos e contribuições, cálculo da capacidade dos depósitos de provisões, projeções de obras arquitetônicas, etc".

[15] No Brasi,l Raja Gabaglia elaborou uma obra que estudava o papiro matemático Rhind, intitulada "O mais antigo documento mathematico conhecido (Papyro Rhind)" (1899), segundo Martins (2015, p. 32), o autor apresenta em sua obra "[...] críticas e diferentes opiniões de estudiosos do papiro Rhind, aponta questões e mostra-se entendido do assunto que está discorrendo".

inicial que será corrigido ao longo do processo", dessa forma o método de resolver esse tipo de problema, empregado pelos antigos egípcios, tem como ponto inicial a sugestão de um palpite falso para, em seguida, chegar ao resultado correto.

Para exemplificar, apresentamos a resolução do Problema 26 do papiro Rhind, que pode ser traduzido no seguinte enunciado: "Uma quantidade e seu ¼ somados fazem 15. Qual a quantidade?" (ROQUE, 2012, p. 66).

Para a resolução deste, em um primeiro momento era escolhido um valor para a quantidade desconhecida, como, por exemplo, 4 (chute inicial). Se for atribuído o valor 4 para esta quantidade desconhecida, então teríamos que 4 somados com seu quarto, que é 1, resulta em 5. Mas o problema se refere a um número que somado com o seu quarto resulte em 15, dessa forma o valor escolhido inicialmente é falso. É necessário, então, procurar um número que ao multiplicar 5 resulte em 15, sendo este o número 3. Este número, que no exemplo é o 3, será multiplicado pelo número 4 (chute inicial) resultando em 12, que é a quantidade procurada, assim o "Ahá" é igual a 12 (MEDEIROS; MEDEIROS, 2004; ROQUE, 2012).

De modo geral, neste "método" inicialmente é escolhido um valor falso para o valor desconhecido e em seguida calculamos o valor numérico da expressão tendo como base o valor falso, sendo que o resultado verdadeiro é calculado por meio de uma proporção entre os dados apresentados no problema e o resultado obtido com o valor falso[16].

Roque (2012, p. 67) aponta que a maioria dos relatos históricos que abordam a matemática egípcia indica que se tratava de uma matemática prática, com base em métodos empíricos, no entanto "[...] a busca de generalidade e universalidade que caracteriza a cientificidade das nossas práticas pode ser encontrada na matemática egípcia, mas de um modo distinto". Ao analisar os problemas que os egípcios resolviam pelo método da "Falsa Posição", a autora observou que o "[...] escriba parece ter

---

[16] Merece destaque um artigo recente de Bertato (2018), em que apresenta uma tradução e interpretação que difere das demais até então aceitas com relação ao fato de que os problemas de "Ahá" eram resolvidos pelo método da "Falsa Posição". Para Bertato (2018, p. 13), "[...] não se pode constatar literalmente que para resolver as equações dos problemas (aHá) seja empregada pelo escriba qualquer suposição de valor". Sendo assim, para ele, nas resoluções dos problemas aritméticos e dos problemas de "Ahá", pode-se verificar uma "[...] hábil manipulação de decomposição aritmética dos números, multiplicação por mínimo múltiplo comum (ou apenas múltiplo comum), soma direta de coeficientes da aHá e consecutiva divisão da constante por tal soma" (BERTATO, 2018, p.13). Destacamos que embora estejamos cientes desta nova perspectiva de abordar os problemas de "Ahá", em nosso trabalho optamos, por motivos didáticos, continuar seguindo a perspectiva, em que os problemas são resolvidos pelo método da "Falsa Posição".

desejado indicar, por meio de uma lista de problemas similares, um procedimento geral de resolução" (ROQUE, 2012, p. 68).

É necessário ressaltar que "[...] que nem todos os problemas de "ahá" eram resolvidos pela técnica que chamamos hoje de "falsa posição". No papiro Rhind há diferentes grupos de problemas, cada um com uma estratégia específica de solução" (ROQUE, 2012, p. 68).

Alguns historiadores aceitam a divisão da álgebra em três períodos[17]: o retórico, o sincopado e o simbólico, dessa forma Medeiros e Medeiros (2004, p. 549) afirmam que o método da "Falsa Posição" dos egípcios, "[...] pode ser encarado como um legítimo representante da primeira fase da história da Álgebra: a Álgebra retórica".

No entanto, Martins (2015), em seu estudo, aponta que alguns estudiosos do papiro "[...] consideram esses problemas uma espécie de aproximação à álgebra, contudo pensam que não existia uma simbologia definida no papiro e sim uma designação verbal que indicava o valor desconhecido, a incógnita" (p. 91).

O método da "Falsa posição", conforme já mencionado, não era somente utilizado pelos egípcios. Os chineses, por exemplo, faziam uso do método da "Falsa Posição", por eles denominado método do "excesso e da deficiência" que é o foco do Capítulo 7 da obra intitulada "Nove Capítulos sobre a Arte Matemática", de autoria e data desconhecida (MEDEIROS; MEDEIROS, 2004).

Medeiros e Medeiros (2004) apontam que o método da "Falsa Posição" também pode ser encontrado nos estudos do grego Diofanto de Alexandria. Ressaltamos que, de acordo com Eves (2004), pouco se sabe sobre a nacionalidade e época que Diofanto viveu, sendo que grande parte dos historiadores tende a situá-lo no séc. III.

Segundo Eves (2004), Diofanto teve grande influência no desenvolvimento da Álgebra, escreveu três livros, sendo o mais importante chamado *Aritmética*. Esta obra era composta por 13 livros e, de acordo com o autor, introduziu uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números. São apresentadas, ainda, a resolução de 130 problemas que levam a equações do primeiro e do segundo grau. O autor aponta que Diofanto pode ter sido o "[...] primeiro a dar os primeiros passos rumo a uma notação

[17] Álgebra retórica ou verbal corresponde "[...] à fase em que não se fazia uso de símbolos nem de abreviações para expressar o pensamento algébrico" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 79), ou seja, todos os passos relativos aos processos de resolução eram escritos em uma linguagem corrente, já a álgebra sincopada se refere a uma "[...] forma mais abreviada e concisa para expressar" (idem, p.80) os procedimentos empregados e por fim álgebra simbólica corresponde ao "[...] momento em que as ideias algébricas passam a ser expressas somente através de símbolos, sem recorrer ao uso de palavras" (idem, p. 80).

algébrica" (EVES, 2004, p. 209). Para Katz (2010, p. 224) nesta obra, "[...] no livro IV, Diofanto inicia o uso de uma nova técnica, a técnica reminiscente da 'falsa posição egípcia'".

Posteriormente, o método da "Falsa Posição" foi estudado por importantes nomes da ciência islâmica[18] (MEDEIROS; MEDEIROS, 2004) dos quais destacamos Al-Khwarizmi (c.780-850), que teve, segundo Eves (2004), influência de métodos matemáticos gregos. Al-Khwarizmi (c.780-850) foi o autor de "[...] um dos textos islâmicos de álgebra mais antigos, escrito por volta de 825" (KATZ, 2010, p. 304). Aliás, a palavra "álgebra" deriva da palavra árabe *al-jabr*, sendo que nenhuma tradução para essa palavra foi feita, quando foram realizadas traduções de trabalhos em árabe para o latim, e dessa forma *al-jabr* foi adotada como o nome dessa ciência (KATZ, 2010).

A aritmética de Al-Khwarizmi pode ser considerada como a primeira e depois destas outras se seguiram, sendo que

> [...] essas aritméticas geralmente ensinavam regras para efetuar cálculos modeladas nos algoritmos hindus. Davam também o processo conhecido hoje como *noves fora*, usados para testar cálculos aritméticos e as regras de *falsa posição e falsa posição dupla* mediante as quais podem-se resolver alguns problemas algébricos de maneira não-algébrica. Também explicavam frequentemente raízes quadradas e cúbicas, frações e a *regra de três* (EVES, 2004, p. 263, grifos do autor).

A Álgebra de Al-Khwarizmi, mesmo sendo ainda retórica, se configura como um marco na História da Matemática, a partir do estudo de Al-Khwarizmi, problemas que antes eram resolvidos por falsa posição, mas sem a formulação de uma equação, passaram a "[...] ser efetivamente expressos e resolvidos, ainda que de forma retórica, em termos da ideia de equações lineares" (MEDEIROS; MEDEIROS, 2004, p. 552). Dessa forma, Al-Khwarizmi introduziu as técnicas de "complemento" e de "restauração" (MEDEIROS; MEDEIROS, 2004).

Destacamos que o sucessor de Al-Khwarizmi, Abu Kamil (c. 850-930), segundo Medeiros e Medeiros (2004, p. 552) produziu uma obra apresentando aplicações da álgebra a problemas geométricos, destaca-se que foi "[...] através desse livro que o

---

[18] Nesse texto seguimos a recomendação de Wussing (1998) que aponta ser mais adequado falar em cultura e ciência islâmica ao invés de ciência árabe, já que a árabe era a língua utilizada pela administração e pela ciência, mas existiam diferentes povos e línguas nacionais.

Ocidente veio, muito tempo depois, a tomar conhecimento inicial da Álgebra e em especial do método da falsa posição".

Anteriormente aos europeus terem conhecimento acerca da Álgebra, segundo Medeiros e Medeiros (2004), estudiosos hindus[19] se dedicaram ao seu estudo. Para Eves (2004, p. 155), os hindus "[...] foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra", eles sincoparam sua álgebra,

> [...] como Diofanto, indicavam a adição por justaposição. A subtração era indicada colocando-se um ponto sobre o subtraendo, a multiplicação escrevendo-se *bha* (primeira sílaba da palavra *bhavita*, "produto") depois dos fatores, a divisão escrevendo-se o divisor debaixo do dividendo e a raiz quadrada escrevendo-se *ka* (da palavra *karana*, "irracional") antes da quantidade. (...) as incógnitas adicionais eram indicadas pelas sílabas iniciais de palavras que expressam diferentes cores (EVES, 2004, p. 256).

Bhaskara (1114-1185) foi "[...] o mais famoso entre todos os matemáticos indianos medievais" (KATZ, 2010, p. 278). Ele escreveu sobre Aritmética, Álgebra e Trigonometria esférica (MEDEIROS; MEDEIROS, 2004) e, segundo Eves (2004, p. 251), as obras intituladas *Lilavati* ("bela") e *Viaganita* ("extração de raízes"), que tratam respectivamente Aritmética e Álgebra, são "[...] as duas partes mais importantes do trabalho de Bhaskara". Este estudioso resolvia problemas pelo método da "Falsa Posição" e, sobretudo, pelo método da "Inversão".

Sendo assim, Eves (2004, p. 255) expõe que os antigos hindus, resolviam muitos problemas aritméticos pela "Falsa Posição", e "[...] outro método de resolução preferido era o da *inversão* no qual se trabalha para trás, a partir dos dados". O nome de "Inversão", segundo o autor está relacionado à substituição de cada operação por sua inversa, e "[...] é exatamente o que faríamos se tivéssemos de resolver o problema por métodos modernos" (EVES, 2004, p. 255). Ressaltamos que encontramos o uso desse método ao estudarmos os livros didáticos do sétimo ano e o incorporamos às atividades elaboradas.

A Álgebra foi introduzida na Europa no ano de 1202 com a obra *Liber Abacci* (ou *Livro e cálculo),* de autoria de Leonardo Fibonacci (1175-1250) (MEDEIROS e MEDEIROS, 2004). Este estudioso que, segundo Eves (2004, p. 292) pode ser

---

[19] Nesse texto usamos "Hindus" para denominar as pessoas provenientes da Índia, pois segundo Eves (1955) a utilização deste termo evita a confusão entre indianos ocidentais (índios) e indianos orientais (indianos).

considerado como "[...] o matemático mais talentoso da idade Média", teve contato com procedimentos matemáticos produzidos pelos orientais e árabes, por meio, em especial, de viagens das atividades ligadas a negócios mercantis que seu pai exercia.

A obra *Liber Abacci*, aborda a aritmética e a álgebra elementares, sendo possível encontrar influências das álgebras de Al-Khowarimi e de Abu Kamil (EVES, 2004). Segundo Medeiros e Medeiros (2004, p. 553), a Álgebra na obra de Fibonacci "[...] é, contudo, nitidamente retórica. Ela não incorpora, nesse sentido, os enormes avanços conferidos na segunda metade do século anterior por Bhaskara". Os capítulos da obra

> [...] explicam a leitura e a escrita de novos numerais [indo-arábicos que até então não eram conhecidos na Europa], métodos de cálculo com inteiros e frações, o cálculo de raízes quadradas e cúbicas e a resolução de equações lineares e quadráticas, tanto pelo método da falsa posição como por processos algébricos (EVES, 1995, p. 293).

Fibonacci, de acordo com Katz (2010, p. 380), utilizou vários métodos nas resoluções de problemas e utilizou frequentemente "[...] o velho método egípcio da "falsa posição", no qual uma resposta conveniente, mas falsa, é dada primeiro e, depois, ajustada apropriadamente para se obter o resultado correto". Corroborando a esta informação, Medeiros e Medeiros (2004, p. 552) destacam que o capítulo 13 do *Liber Abacci* é dedicado ao método da falsa posição "[...] à forma como o mesmo havia sido usado desde a Antiguidade bem como à sua extensão da 'dupla falsa posição'".

Após a obra de Fibonacci, de acordo com Medeiros e Medeiros (2004), o método da falsa posição voltou a aparecer na obra *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* produzida em 1494 por Luca Pacioli (c. 1445-1509). Essa obra é uma "[...] compilação livre de muitas fontes, pretendia ser um sumário da aritmética, da álgebra e da geometria da época" (EVES, 2004, p. 298), nela a regra da falsa posição é discutida e aplicada.

A Álgebra presente na obra de Pacioli, de acordo com Eves (2004, p. 298), é sincopada, na qual é possível observar o uso de abreviações para indicar as operações de soma e subtração, para a incógnita e para a igualdade. Após essa obra, "[...] a álgebra, que por dois séculos fora negligenciada, experimentou um crescimento intenso na Itália, progredindo também na Alemanha, na Inglaterra e na França".

Com base nas informações históricas apresentadas, para finalizar, retomamos as ideias de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) que apontam a possibilidade de identificar três momentos na História da Álgebra, a saber: retórico (ou verbal), o sincopado (uso de abreviações de palavras) e o simbólico. Para eles, a álgebra retórica "[...] teria sido a dos egípcios, dos babilônios e dos gregos pré-diofantinos" (p. 80), a sincopada teria surgido com Diofanto de Alexandria, uma forma semelhante "[...] seria mais tarde desenvolvida pelos hindus" (p. 80). Os autores ainda ressaltam que apesar da forma retórica de exprimir a álgebra os "[...] árabes introduziram um novo vocabulário técnico para esse campo do conhecimento" (p. 80), esse estilo ainda foi utilizando pelos algebristas italianos do século XVI. Por fim, a álgebra simbólica, que apesar de utilizar um estilo sincopado tem Viète (1540-1603) como "[...] principal responsável pela introdução de novos símbolos na Álgebra" (p. 80), em seguida, Descartes (1596-1650) "[...] consolidaria o uso da linguagem simbólica" (p.80) com publicação de sua obra em 1637.

Tendo conhecimento de informações relevantes sobre o percurso histórico da resolução de equações do primeiro grau, em especial, do método da "Falsa Posição", conforme já explicitado, elaboramos um conjunto de atividades para trabalharmos com a resolução de equações de primeiro grau por meio de um viés histórico, o qual será descrito a seguir, juntamente com a apresentação dos caminhos percorridos no desenvolvimento desta pesquisa.

3. CAMINHOS PERCORRIDOS

Tendo em vista que o objetivo desta investigação é compreender as contribuições da utilização da História da Matemática para o ensino e aprendizagem de equação do primeiro grau na educação básica, entendemos que ela se configura como uma pesquisa de natureza qualitativa, na qual "[...] a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de organização, de uma instituição, de uma trajetória, etc." (GOLDENBERG, 2004, p.14).

Para Flick (2009, p. 08) a pesquisa qualitativa "[...] visa abordar o mundo "lá fora" (e não em contextos especializados de pesquisa como os laboratórios) e entender, descrever e, às vezes explicar os fenômenos", que pode ser realizada através de análise de experiências, examinando interações e comunicações, ou a investigação de documentos.

Nossa pesquisa ainda apresenta algumas características da pesquisa qualitativa que são apresentadas por Creswell (2007) como: coleta de dados no local onde o problema ou questão a ser investigado acontece; compreensão do pesquisador como sendo instrumento fundamental da pesquisa, que realiza pessoalmente a coleta de dados; utilização de vários instrumentos de coleta de dados; análise de forma indutiva; foco no significado dado pelos participantes; o plano de investigação pode sofrer alterações durante seu desenvolvimento; uso de lentes teóricas para a análise. Enfim, a pesquisa qualitativa é uma forma de investigação interpretativa.

Com vistas a atingir o objetivo proposto, nossa investigação foi dividida em quatro fases, sendo que algumas foram realizadas simultaneamente. Na primeira fase, realizamos um estudo do referencial teórico relativo às potencialidades do uso da HM e dificuldades em utilizar a HM em aulas de Matemática. Utilizamos como principais referenciais diversos trabalhos da área de Educação Matemática e/ou História da Matemática, dentre os quais destacamos: Miguel (1997), Brolezzi (1991), Valdés (2006), Mendes (2006), Miguel e Miorim (2008), Fossa (2008), Balestri (2008), Feliciano (2008), Mendes (2009), Souto (2010) e Santos (2017). As considerações acerca desse estudo foram discutidas no capítulo 2 intitulado: História da Matemática no ensino de Matemática.

Na segunda fase, elaboramos um conjunto de atividades com o intuito de abordar as equações do primeiro grau com uma incógnita. Para subsidiar a elaboração do conjunto de atividades, julgamos ser importante estudarmos a presença e a forma que História da Matemática é apresentada nas atividades propostas para o ensino de equação do primeiro grau, disponíveis em teses e dissertações e em livros didáticos. Para subsidiar estes estudos utilizamos como referência trabalhos semelhantes realizados por Omena (2015) e Carlini e Cavalari (2017).

Para realizar o levantamento bibliográfico em teses e dissertações, utilizamos a listagem de trabalhos elaborada por Omena (2015), no caso dos trabalhos defendidos até 2012, e para os estudos defendidos após 2012 foi realizada uma busca no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, utilizando como palavras-chave "História da Matemática". Dessa forma, localizamos cinco trabalhos que apresentavam de alguma forma um conjunto de atividades para abordar o conceito de equação do primeiro grau com uma incógnita por meio de um viés histórico.

Com relação aos livros didáticos, estudamos nove dos 11 livros aprovados pelo PNLD de 2017, em específico investigamos a presença da História da Matemática no capítulo que apresenta o conceito de equação do primeiro grau com uma incógnita.

Ressaltamos que este estudo nos trabalhos acadêmicos (teses e dissertações) e nos livros didáticos teve o intuito de conhecer e identificar como a História da Matemática está sendo abordada tanto no âmbito da produção de materiais que subsidiam o trabalho do professor quanto no âmbito de pesquisas da área da Educação Matemática. Este estudo, além de mostrar a relevância de realizar este trabalho, subsidiou a elaboração do conjunto de atividades, ou seja, com estes notamos que o método da "Falsa Posição", apesar de pouco explorado nos materiais estudados, pode ser utilizado com o objetivo de propiciar um entendimento da resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita, ou seja, a possibilidade de utilizar aspectos da HM para a abordagem deste conceito matemático.

Além disso, considerando que o método da "Falsa Posição" utilizado pelos antigos egípcios pode ser uma possibilidade para o tratamento inicial da resolução de uma equação do primeiro grau, também realizamos um estudo histórico sobre esse método tomando como referência os trabalhos de Wussing (1998), Eves (2004), Medeiros e Medeiros (2004), Katz (2010), Roque (2012), Martins (2015) e Bertato (2018), com o intuito obter mais informações sobre esse método que pudessem auxiliar na elaboração das atividades.

O conjunto de atividades elaborado para a realização desta pesquisa se constitui em um produto educacional, que foi construído tendo como base o estudo realizado sobre as potencialidades de utilizar a HM em aulas de Matemática. Este conjunto de atividades foi intitulado “Equações do primeiro grau com uma incógnita: uma abordagem com viés histórico e exploratório”, e foi dividido em cinco etapas planejadas para serem realizadas em 28 horas/aula com alunos(as) do sétimo ano do Ensino Fundamental, conforme exposto no quadro 3 a seguir.

Quadro 3 - Etapas do conjunto de atividades

Planejamento das etapas	
Etapa 1 – Expressões algébricas	Nove horas-aula
Etapa 2 – Contextualização histórica e o uso do método da “Falsa Posição” para a resolução de equações do primeiro grau	Oito horas-aula
Etapa 3 – Método da Inversão dos Hindus	Três horas-aula
Etapa 4 – Resolução de equação do primeiro grau pelo princípio do equilíbrio	Três horas-aula
Etapa 5 – Resolução de equação do primeiro grau livremente	Cinco horas-aula

Fonte – Elaborada pela autora

Após a elaboração do conjunto de atividades, na terceira etapa desta investigação, implementamos esse conjunto de atividades com os(as) alunos(as). Neste momento, realizamos a coleta dos dados a serem analisados. As atividades propostas foram desenvolvidas[20] com alunos(as) de duas turmas[21] do sétimo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de Pedralva – MG. No quadro 4, exposto a seguir apresentamos uma breve descrição das atividades realizadas.

Quadro 4 - Descrição das atividades realizadas

Etapa 1- Expressões algébricas	
Assunto abordado	• Letras/símbolos para representar de números desconhecidos; • Expressões algébricas; • Fórmulas; • Valor numérico de uma expressão algébrica;
Objetivos	• Escrever expressões algébricas para representar regularidades e situações em geral; • Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica; • Identificar as variáveis de uma expressão algébrica.

[20] Destacamos que o projeto de pesquisa foi submetido ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), tendo sido apreciado e aprovado no dia 11 de março de 2019 sob o número CAAE: 07714819.8.0000.5559

[21] Por se tratar de uma pesquisa de natureza qualitativa, não realizaremos um cálculo numérico da amostra, sendo suficiente, neste caso, a participação dos(as) estudantes de uma sala de sétimo ano para que o objetivo da pesquisa seja atingido.

<table>
<tr><td>Metodologia</td><td>Momento 1 - (1 hora-aula) → Propor a atividade intitulada “Máquina de números” (APÊNDICE 1), sendo esta inspirada em uma atividade semelhante presente no livro Projeto Teláris – Matemática (DANTE, 2015). Essa atividade tem como objetivo abordar com os(as) alunos(as) o uso de letras e símbolos para representar números desconhecidos, os(as) mesmos(as) serão instigados(as) a definir o que constitui uma expressão algébrica, com base nas expressões encontradas, ao observarem o processo efetuado pela máquina. Essa atividade será realizada em duplas ou trios. Em seguida realizaremos uma socialização.

Momento 2 – (1 hora-aula) → Formalizar a definição de expressão algébrica com o uso de exemplos e exercícios sobre a transformação da linguagem usual para uma linguagem algébrica (APÊNDICE 2).

Momento 3 – (2 horas-aula) → Abordar o conceito de expressões algébricas equivalentes, inicialmente relembrando o conceito de equivalência, apresentando exemplos e exercícios (APÊNDICE 3). Posteriormente, propor uma atividade para investigação de padrões, que será realizada em equipes (APÊNDICE 4).

Momento 4 - (1 hora-aula) → Propor uma situação-problema (APÊNDICE 5) que tem o intuito de contextualizar o conceito de expressão algébrica e iniciar o trabalho com o valor numérico de uma expressão algébrica. Tal atividade será realizada em duplas e em seguida realizaremos uma socialização, na qual definiremos o valor numérico de uma incógnita em uma expressão algébrica.

Momento 5 – (2 horas-aula) → Aplicar o jogo “Roleta da expressão algébrica”, com o intuito fixar o conceito de valor numérico de uma expressão algébrica (APÊNDICE 6).

Momento 6 – (2 horas-aula) → Propor a resolução de exercícios relacionados ao valor numérico de uma expressão algébrica (APÊNDICE 7) e realizar a socialização dos mesmos.</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td>Atividades impressas, lousa, giz, palitos (para o estudo dos padrões), jogo “Roleta da expressão algébrica” (dados de números e de sinais e a roleta com as expressões algébricas).</td></tr>
<tr><td>Avaliação</td><td>• Resolução dos exercícios propostos;
• Participação durante as discussões realizadas;
• Participação no jogo “Roleta das expressões algébricas”, através das observações durante o jogo e dos registros dos(as) estudantes efetuados ao longo do jogo.</td></tr>
<tr><td>Referências</td><td>BRUM, L. D. Análise de erros cometidos por alunos de 8º ano do ensino fundamental em conteúdos de álgebra. 2013. 94 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2013.
DANTE, R. L. Projeto Teláris: Matemática, 2º ed. – São Paulo: Ática, 2015. (7º ano – Ensino Fundamental).
VIANA, L. H. Identificando a equivalência de expressões</td></tr>
</table>

	algébricas. Disponível em <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1638/identificando-a-equivalencia-de-expressoes-algebricas?download=true#>. Acesso em 05 de março de 2019. SOUSA, J. PATARO, P. M. **Vontade de Saber**: Matemática, 3º ed. São Paulo: FTD, 2015. (7º ano – Ensino Fundamental).
Etapa 2 – Contextualização histórica e o uso do método da Falsa Posição para a resolução de equações do primeiro grau	
Tempo estimado	Seis horas-aula
Assunto abordado	• Introdução histórica. • Método da Falsa Posição
Objetivos	• Introduzir e contextualizar historicamente o conceito de equação do primeiro grau. • Apresentar o papiro Rhind • Apresentar o método da “Falsa Posição” • Resolver problemas utilizando o método da “Falsa Posição”
Metodologia	Momento 1 (1 hora-aula) – Realizar uma apresentação de *slides*, com o intuito de introduzir e contextualizar historicamente o conceito de equação do primeiro grau com uma incógnita, na qual serão apresentadas algumas questões e informações com o intuito de conhecer a “visão” inicial dos(as) alunos(as) sobre a Matemática e sua história. (APÊNDICE 8) Momento 2 (2 horas-aula) – Propor a construção de um mapa-*múndi* com informações relativas a HM em diferentes localidades, para isso a turma será dividida em algumas equipes que ficarão responsáveis de pesquisar, trazer informações e imagens que comporão o mapa-*múndi*. (APÊNDICE 8) Momento 3 (1 hora-aula) – Expor, com auxílio de uma apresentação de *slides,* mais informações sobre a civilização egípcia e os papiros. E em seguida apresentar um problema (problema 24 do papiro Rhind), e a partir desse problema trabalhar com a definição de uma equação do primeiro grau. (APÊNDICE 9) Momento 4 (2 horas-aula) – Propor que os(as) alunos(as) tentem resolver o problema 24 da forma que julgarem mais adequada, em seguida realizar uma socialização dessas resoluções. Após a socialização resolver esse problema pelo método da “Falsa Posição”. (APÊNDICE 10) Momento 5 (2 horas-aula) – Propor a resolução de alguns problemas (APÊNDICE 11) e definir o conceito de raiz de uma equação.
Recursos	Slides, atividades impressas, cartaz (para o mapa-*múndi*), lousa, giz.
Avaliação	• Resolução das atividades propostas; • Participação nas discussões; • Construção do mapa-*múndi*.
Referências	GUELLI, O. **Equação:** o idioma da álgebra. Editora: Ática. 2012.

	(Coleção: Contando a História da Matemática) MARCUSSI, H. F. R. **Álgebra no ensino fundamental**. 2013. Dissertação – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), Campos dos Goytacazes – RJ, 2013. ROQUE, T. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
Etapa 3– Método da Inversão dos hindus	
Tempo estimado	Três horas-aula
Assunto abordado	• Método da inversão dos hindus • Resolução de equação do primeiro grau pelas operações inversas
Objetivos	• Apresentar e resolver problemas utilizando o método da "Inversão" dos hindus.
Metodologia	Momento 1 (2 horas-aula) – Apresentar o método da inversão dos hindus utilizando exemplos e problemas e realizamos a socialização desses. Momento 2 (1 hora-aula) – Propor a resolução de alguns problemas utilizando o método da inversão (APÊNDICE 12).
Recursos metodológicos	Atividade impressa, lousa e giz
Avaliação	• Resolução das atividades propostas; • Participação
Referências	ANDRINI, A. VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática.** Editora do Brasil, 4ª ed. 2015. GUELLI, O. **Equação:** o idioma da álgebra. Editora: Ática. 2012. (Coleção: Contando a História da Matemática). EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: UNICAMP, 2004.
Etapa 4 – Resolução de equação do primeiro grau pelo princípio do equilíbrio	
Tempo estimado	Três horas-aula
Assunto abordado	• Resolução de equação do primeiro grau pelo princípio do equilíbrio;
Objetivos	• Resolver uma equação do primeiro grau pelo princípio do equilíbrio; • Trabalhar com as operações inversas
Metodologia	Momento 1 (1 hora-aula) – Apresentar outra forma para resolver equações do primeiro grau com uma incógnita, pelo princípio do equilíbrio, para tanto, resolver um exemplo prático usando uma balança de dois pratos. (APÊNDICE 13) Momento 2 (2 horas-aula) – Propor aos(as) estudantes a resolução

	de alguns problemas envolvendo o princípio do equilíbrio e socializar as resoluções (APÊNDICE 14)
Recursos metodológicos	Balança de dois pratos, atividades impressas, lousa, giz.
Avaliação	• Resolução das atividades propostas • Participação nas discussões
Referências	BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini.** Editora Moderna, 8ª ed. 2015. DELAZERI, G. R. **A competência de resolução de problemas que envolvem o pensamento algébrico:** Um experimento no 9º ano do ensino fundamental. 2017. Dissertação (Mestrado em ensino de ciências e matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2017.
Etapa 5 – Resolução de equação do primeiro grau	
Tempo estimado	5 horas-aula
Assunto abordado	• Resolução de equação do primeiro grau • Linguagem algébrica
Objetivos	• Resolver uma equação do primeiro grau; • Observar as mudanças ocorridas em alguns símbolos matemáticos
Metodologia	Momento 1 – (1 hora-aula) – Apresentar com o auxílio de uma linha do tempo, informações históricas sobre a linguagem matemática e alguns nomes de matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento (APÊNDICE 15). Momento 2 – (3 horas-aula) – Propor a resolução de alguns problemas em duplas (APÊNDICE 16). Momento 3 – (1 hora-aula) – Aplicar o “Bingo das equações” (APÊNDICE 17).
Recursos metodológicos	*Slides* para a apresentação, Material para o jogo “Bingo das equações”, atividades impressas, lousa, giz
Avaliação	• Realização das atividades propostas • Participação nas discussões • Participação no jogo “Bingo das equações”
Referências	BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini.** Editora Moderna, 8ª ed. 2015. DELAZERI, G. R. **A competência de resolução de problemas que envolvem o pensamento algébrico:** Um experimento no 9º ano do ensino fundamental. 2017. Dissertação (Mestrado em ensino de ciências e matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2017.

Fonte – Elaborada pela autora

A coleta de dados foi realizada durante o desenvolvimento deste conjunto de atividades, conforme já exposto. Desse modo nossa pesquisa, quanto ao processo de coleta de dados, pode ser classificada como naturalista ou de campo, pois é uma modalidade de investigação em que a "[...] coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece" (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 106).

Utilizamos como instrumentos de coleta de dados, os registros dos(as) alunos(as) produzidos a partir das atividades propostas, gravações em áudio e registros de observações em diário de campo da pesquisadora. Tanto os registros de observações em diário de campo quanto às gravações em áudio possibilitaram análise dos argumentos expostos pelos(as) alunos(as) no desenvolvimento das atividades.

O diário de campo, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 119), é o instrumento no qual o(a) pesquisador(a) "[...] registra observações de fenômenos, faz descrição de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos". Este instrumento de coleta de dados possui uma dupla perspectiva, sendo uma descritiva e outra interpretativa, e estas duas perspectivas devem estar presentes de forma equilibrada (FIORENTINI; LORENZATO, 2012). Para estes autores,

> [...] a perspectiva descritiva atém-se à descrição de tarefas e atividades, de eventos, de diálogos, de gestos e de atitudes, de procedimentos didáticos, do ambiente e da dinâmica da prática, do próprio comportamento do observador, etc. A perspectiva interpretativa, por sua vez tenta olhar para a escola e a sala de aula como espaços socioculturais produzidos por seres humanos concretos, isto é, por sujeitos que participam da trama social com seus sentimentos, ideias, sonhos, decepções intuições, experiências, reflexões e relações interpessoais (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 119).

Dessa forma, de acordo com as etapas descritas a pesquisa pode ser caracterizada como uma pesquisa participante, que segundo Gil (2008. p. 31), conta com o "[...] envolvimento dos pesquisadores e dos pesquisados no processo de pesquisa", sendo uma das formas de "[...] aproximar o pesquisador do fenômeno a ser investigado e igualmente de construir o conhecimento acerca desse fenômeno" (FAERMAM, 2014, p. 43).

Na quarta etapa, realizamos a análise dos dados coletados. Para iniciar o processo de análise confrontamos os dados obtidos, utilizando elementos da triangulação, que segundo Flick (2009), na pesquisa qualitativa

> [...] implica que os pesquisadores assumam diferentes perspectivas sobre uma questão em estudo ou, de forma mais geral, ao responder a pergunta de pesquisa. Essas perspectivas podem ser substanciadas pelo emprego de vários métodos e/ou várias abordagens teóricas. [...] Além disso, refere-se à combinação de diferentes tipos de dados no contexto das perspectivas teóricas que são aplicadas aos dados (FLICK, 2009, p. 62).

Para compor a triangulação de dados, usamos as diferentes fontes de dados já mencionadas, como os registros dos(as) alunos(as), as observações descritas em diário de campo e a transcrição de alguns episódios gravados em áudio. Flick (2009) aponta o uso "[...] da triangulação para ampliar o conhecimento de um tema ou para avaliar resultados de forma mútua" (p. 91), e complementa defendendo que a triangulação pode

> [...] oferecer um quadro mais completo de uma questão (o que as pessoas pensam de alguma coisa e como agem em relação a ela?), permite comparar os resultados de diferentes abordagens (as pessoas agem como dizem que agem ou como acham que se deveria agir?) e para ampliar os níveis em que uma questão é estudada (conhecimento prática, quadro institucional) (FLICK, 2009, p.99).

Dessa forma, a partir de um panorama mais geral, obtido com a triangulação dos dados, buscamos analisar as possibilidades e dificuldades da utilização de aspectos da HM para o ensino e aprendizagem da equação do primeiro grau na educação básica à luz do referencial teórico elaborado.

Para analisar as contribuições da HM para o ensino e aprendizagem de matemática e sobre matemática, utilizamos quatro eixos de análise elaborados com base na literatura, a saber: HM para motivação; HM para a aprendizagem de conceitos matemáticos; HM para contextualização e HM para mudança de percepção sobre a matemática. Descreveremos melhor estes eixos no capítulo 4, esta escolha se justifica pelo fato de que sua descrição é necessária para a apresentação das análises.

Para análise das dificuldades e limitações relacionadas à implementação do conjunto de atividades que utilizam aspectos da HM, elaboramos dois agrupamentos por semelhança após o contato com os dados obtidos, a saber: dificuldades das atividades elaboradas fazer uso da HM e dificuldades relacionadas ao fato de estar em sala de aula. Pelas mesmas razões apresentadas anteriormente, tais agrupamentos serão descritos no capítulo 4.

4. POSSIBILIDADES E DIFICULDADES DA HM EM SALA DE AULA: UM CONJUNTO DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

Neste capítulo apresentamos uma análise das possibilidades e dificuldades da implementação de um conjunto de atividades com viés histórico para o ensino de equação do primeiro grau. Para tanto, o capítulo foi dividido em dois tópicos, no primeiro, intitulado “Ensinando Equações do Primeiro Grau com uma incógnita: uma abordagem com viés histórico e exploratório” apresentamos dados e os resultados obtidos durante a implementação das atividades. No segundo tópico, intitulado “A HM nas atividades desenvolvidas: contribuições e limitações” expomos, em linhas gerais, as potencialidades e as dificuldades que encontramos ao utilizar a HM para o ensino da equação do primeiro grau com uma incógnita.

4.1. ENSINANDO EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU COM UMA INCÓGNITA: uma abordagem com viés histórico e exploratório

Nesse tópico, apresentaremos uma descrição do processo de implementação das atividades elaboradas. Como mencionado, estas foram implementadas em duas turmas do sétimo ano de uma Escola Estadual do Sul de Minas Gerais, perfazendo um total de 69 alunos(as), sendo 32 em uma turma, que chamamos de turma A e 37 em outra turma que chamamos de turma B. Seguindo o planejamento inicialmente elaborado, desenvolvemos as atividades no horário das aulas de Matemática, com a presença da professora regente, no entanto o número de 28 horas-aula, a princípio estimadas para a realização das atividades, foi alterado, visto que algumas atividades demandaram mais tempo para realização do que o previsto. Sendo assim, para a realização das atividades elaboradas utilizamos um total de 35 horas-aulas.

Destacamos que inicialmente havia a previsão (tendo conhecimento do cronograma da professora regente) de que o desenvolvimento do conjunto de atividades ocorreria entre o final do mês de maio até o mês de junho, mas devido a imprevistos, como a necessidade da professora regente retomar alguns conceitos, houve um atraso no cronograma e a implementação das atividades elaboradas começou a ser realizada em 14 de agosto, sendo finalizada em 10 de outubro de 2019. No quadro a seguir, apresentamos o cronograma das aulas ministradas.

Quadro 5 - Cronograma do desenvolvimento das atividades

Data	Duração	O que foi trabalhado
14-08	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Atividade “máquina de números”; - Definição de expressão algébrica; - Transformação da linguagem usual para uma expressão algébrica; - Exemplos e exercícios.
15-08	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Expressão algébrica equivalente; - Exemplos e exercícios.
16-08	Uma aula (50 mim)[22]	- Atividade sobre estudo de padrões.
21-08	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Atividade em equipe para o estudo de padrões e regularidades; - Atividade do táxi.
22-08	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Valor numérico de uma expressão algébrica; - Atividade sobre valor numérico.
26-08[23]	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Discussão inicial sobre a História da Matemática; - Realização da pesquisa.
28-08	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Continuação das atividades sobre valor numérico de uma expressão algébrica.
29-08	Uma aula (50 mim) [24]	- Jogo “Roleta da expressão algébrica”
04-09	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Continuação do jogo “Roleta da expressão algébrica”
11-09	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Construção e socialização do Mapa-*múndi*
12-09	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Contextualização histórica sobre as equações no antigo Egito; - Definição de uma equação do primeiro grau com uma incógnita; - Diferenciação entre a incógnita e a variável; - Exercícios de identificação de equação e socialização.
18-09	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Apresentação do método da “Falsa Posição” utilizado pelos antigos egípcios; - Problemas e socialização.
19-09	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Atividade método da “Falsa Posição”.
25-09	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Apresentação do método da inversão dos hindus; - Atividade método da inversão.

[22] Na escola, as professoras de matemática que trabalham com turmas de sétimo ano, reservam uma aula da semana para trabalhar conceitos relativos à Geometria, sendo assim, em algumas semanas o conjunto de atividades foi desenvolvido em quatro aulas e outras em cinco aulas dependendo do andamento dos(as) alunos(as) nas aulas de Geometria.

[23] Para a realização dessa parte inicial, conseguimos uma parceria com a professora de História da escola que cedeu suas aulas para a realização da pesquisa proposta.

[24] Ressaltamos que no dia 29 de agosto os(as) alunos(as) têm duas aulas de matemática, e que pretendíamos trabalhar com o jogo nas duas, entretanto houve a necessidade da professora regente aplicar a pedido da supervisora da escola uma avaliação externa, sendo o jogo finalizado na aula subsequente.

26-09	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Apresentação do princípio do equilíbrio com o auxílio da balança de dois pratos; - Exercícios e socialização.
02-10	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Atividades princípio do equilíbrio
03-10	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Apresentação da linha do tempo; - Atividades em equipe.
09-10	Duas aulas (1h e 40 mim)	- Continuação das atividades em equipe.
10-10	Uma aula (50 mim)	- Jogo "Bingo das equações do primeiro grau".

Fonte – Elaborada pela autora

Sendo assim, a seguir apresentaremos uma descrição referente à Etapa 1, que foi elaborada com o intuito de trabalhar aspectos relativos às expressões algébricas.

- **ETAPA 1 –** Expressões algébricas

A Etapa I, conforme exposto, foi desenvolvida no período de 14 de agosto a 04 de setembro, em 14 horas-aulas. Ressaltamos que nosso objetivo, com o conjunto de atividades, foi trabalhar com o conceito de equação do primeiro grau com uma incógnita utilizando aspectos da História da Matemática; entretanto, julgamos pertinente começarmos nosso planejamento pelas expressões algébricas, já que esses conceitos estão relacionados, além de ser um dos primeiros contatos dos(as) alunos(as) do sétimo ano do ensino fundamental com o uso de letras para a representação de valores desconhecidos.

Segundo Araújo (2008), "[...] não se pode utilizar uma nova linguagem, no caso da algébrica, sem que lhe seja dado sentido, sem que não se sinta a necessidade de sua utilização" (p. 338). Dessa forma, destacamos a importância dessa etapa, pois é a partir de seu estudo que os(as) alunos(as) entram em contato com uma nova face da linguagem matemática.

Tendo isso em vista, em nossas atividades fizemos uso de situações-problemas, jogos e investigação, com o intuito de introduzir a Álgebra de uma maneira significativa, pois, segundo Araújo (2008)

> Se não se introduzir a álgebra de maneira significativa, conectando os novos conhecimentos aos conhecimentos prévios que os alunos já possuem, se aos objetos algébricos não se associar nenhum sentido, se a aprendizagem da álgebra for centrada na manipulação de expressões simbólicas a partir de regras que se referem a objetos abstratos, muito cedo os alunos encontrarão dificuldades nos cálculos algébricos e

> passarão a apresentar uma atitude negativa em relação à aprendizagem matemática, que para muitos fica desprovida de significação (ARAÚJO, 2008, p. 336-337).

Destacamos que, com a implementação das atividades elaboradas para a etapa 1, trabalhamos com alguns aspectos das seguintes habilidades presentes na BNCC para o estudo desse tópico da Álgebra, a saber:

> (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas. (EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes. (EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações (BRASIL, 2018, p. 305).

No entanto, mesmo reconhecendo a importância do ensino desse tópico no presente trabalho, cujo objetivo consiste em analisar as possibilidades e dificuldades do uso da HM para o ensino e aprendizagem do conceito de equação do primeiro grau, a implementação da Etapa 1 não fará parte da análise, visto que a HM não foi abordada nas atividades propostas para essa etapa. Sendo assim, descreveremos de forma sucinta apenas a primeira atividade desenvolvida com os(as) alunos(as), intitulada "Máquina de números", pois mesmo esta não contendo aspectos da HM, ao analisamos os dados obtidos notamos uma "resistência" dos(as) alunos(as) em "aceitar" que uma letra ou símbolo pode representar um número qualquer, fato que pode estar ligado ao desenvolvimento da Álgebra, levando em consideração as fases do desenvolvimento da linguagem algébrica, a saber: a retórica, a sincopada e a simbólica.

A atividade "Máquina de números" tinha o objetivo de abordar o uso de letras/símbolos para representar números desconhecidos. Identificamos certa "impaciência" dos(as) alunos(as) ao trabalhar com as expressões algébricas, já que eles(as) esperavam igualar a expressão a algum valor, como era realizado nas expressões numéricas, que ao serem efetuados os cálculos resultava em um único valor. Sendo assim, foi possível observar que os(as) alunos(as) queriam encontrar o valor que resolveria o problema, apresentando dificuldades em aceitar que encontrar a expressão algébrica era a resposta.

Dessa forma, podemos notar que uma das dificuldades que os(as) alunos(as) encontraram, nessa atividade, está relacionada ao uso do sinal da igualdade (=), pois nas expressões numéricas os(as) alunos(as) igualavam a expressão a um único valor, que era o resultado das operações indicadas, mas ao trabalhar com as expressões algébricas só utilizamos o sinal de igualdade para indicar o valor numérico de uma expressão algébrica para determinado valor que a variável assume, ou seja, enquanto uma expressão numérica assume um único valor, as expressões algébricas assumem infinitos valores dependendo do valor atribuído à variável, que pode ser representada por qualquer letra/símbolo.

Ressaltamos que esta é uma das dificuldades indicadas pela literatura em relação à transição da aritmética para a álgebra, já que o(a) aluno(a) "[...] se depara com um cenário totalmente novo e algumas vezes esses procedimentos são contraditórios aos dos procedimentos aritméticos, aos quais estava acostumado" (GIL, 2008, p. 35).

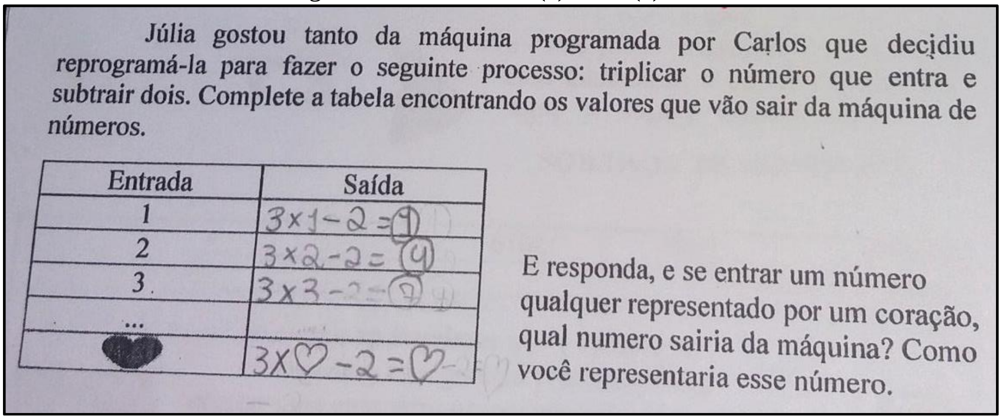
Notamos ainda que, os(as) alunos(as) em diversos momentos queriam saber qual o valor da letra/símbolo que estávamos utilizando para representar um valor desconhecido, isto é, eles estavam com dificuldades em entender que a letra/símbolo podia assumir inúmeros valores na expressão algébrica. Houve ainda questionamento acerca das letras, se esta poderia ser qualquer letra do alfabeto, sendo assim, enfatizamos que podem ser utilizadas qualquer letra ou símbolo que eles escolhessem para representar esta quantidade e que este poderia assumir distintos valores.

Destacamos que essa resistência dos(as) alunos(as) em aceitar que uma letra/símbolo pode representar um número qualquer é uma dificuldade que pode estar associada ao processo de formalização da Álgebra, visto que a mesma, levando em consideração a linguagem algébrica, passou por diferentes fases. Dessa forma, entendemos que os(as) estudantes não vão construir um entendimento imediatamente acerca dos novos símbolos e regras da linguagem algébrica, já que esta é resultado do trabalho empreendido durante séculos.

Isso mostra a importância do conhecimento histórico dos conceitos matemáticos por parte do professor, para que o mesmo possa entender o porquê de algumas dificuldades apresentadas pelos(as) alunos(as). Segundo Baroni, Teixeira e Nobre (2004, p. 167) com a HM "[...] os professores podem identificar que algumas dificuldades que surgem em sala de aula hoje já apareceram no passado, além de constatar que um resultado aparentemente simples pode ser fruto de uma evolução árdua e gradual" e procurar alternativas para amenizar essas dificuldades, já que segundo Araman (2011, p. 94), "[...] o estudo do desenvolvimento histórico dos conteúdos (ou pelo menos de alguns deles) pode dar condições ao professor de exemplificar melhor, promover debates, tornando assim suas aulas mais significativas e contextualizadas".

Dessa forma, ao longo do desenvolvimento das atividades desta etapa, em vários momentos relembramos os procedimentos que os(as) alunos(as) utilizavam para trabalhar com a as expressões numéricas, alertando-os para a diferença, agora, com as expressões algébricas. Foi possível enfatizar, principalmente, a questão da igualdade e da diferença entre termos algébricos e termos numéricos, destacando que, como a variável pode assumir qualquer valor, não podemos somá-la ou subtraí-la da parte numérica. Este foi um dos erros que 26 dos(as) 54 alunos(as) que participaram desta atividade cometeram na primeira atividade, como é possível observar na figura a seguir.

Figura 3 - Atividade do(a) aluno(a) A27



Júlia gostou tanto da máquina programada por Carlos que decidiu reprogramá-la para fazer o seguinte processo: triplicar o número que entra e subtrair dois. Complete a tabela encontrando os valores que vão sair da máquina de números.

Entrada	Saída
1	3x1-2=1
2	3x2-2=4
3	3x3-2=7
...	
♥	3x♡-2=♡

E responda, e se entrar um número qualquer representado por um coração, qual numero sairia da máquina? Como você representaria esse número.

Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

Ao socializar essa atividade enfatizamos com os(as) alunos(as) que não podíamos, ao representar o número indicado pelo símbolo do coração, igualar ao coração, ou a qualquer outro número, porque o símbolo do coração podia assumir qualquer valor e, ao entrar na máquina, esta triplicaria esse valor e subtrairia 2, ou seja, para cada valor escolhido para entrar na máquina encontramos um resultado diferente. Para reforçar, atribuímos mais alguns valores para o símbolo do coração e calculamos que número sairia da Máquina, sendo assim, foi possível discutir com os(as) alunos(as) que o número que sai da máquina vai depender do número que entra.

Ressaltamos ainda, como é possível observar na Figura 3, que os(as) alunos(as) utilizam a letra *x* para indicar operação de multiplicação, e não para indicar um valor desconhecido, que no caso estava sendo indicado pelo símbolo do coração. Sendo assim, até a Etapa 5, não utilizamos as últimas letras do alfabeto para representar uma variável, como é comumente utilizado, para evitarmos uma confusão com os símbolos e seus significados na expressão algébrica. Desta forma, ao logo das atividades fomos apresentando o (.) como o símbolo para representar a multiplicação, e aos poucos os(as) alunos(as) foram se adaptando a este.

Esse episódio em particular, da Etapa 1, evidenciou algumas dificuldades, apontadas pela literatura, encontradas pelos(as) alunos(as) ao começar a estudar as expressões algébricas. Indicou, ainda, a importância do conhecimento de aspectos da HM por parte do professor de Matemática para que ele possa entender e procurar alternativas para amenizar as dificuldades apresentadas pelos(as) alunos(as), estas podem ter raízes históricas, como no caso a linguagem algébrica que passou por diversas transformações ao longo do tempo.

Após encerrarmos as atividades da Etapa 1, iniciamos a Etapa 2, momento no qual apresentamos, inicialmente, uma contextualização histórica sobre a Matemática em geral, mais especificamente, sobre a civilização egípcia e a Matemática. Em seguida abordamos o método da "Falsa Posição" para encontrar a solução de problemas que envolvem a resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita, como será descrito a seguir.

- **ETAPA 2** – Contextualização histórica e o uso do método da Falsa Posição para a resolução de equações do primeiro grau

A Etapa 2 ocorreu no período de 11 a 19 de setembro, com duração de 10 horas-aula. Em um primeiro momento, com o intuito de motivar e contextualizar, propusemos a discussão de duas questões sobre História da Matemática, a realização de uma pesquisa sobre a matemática em algumas civilizações antigas e a construção de um mapa-*múndi.*

Iniciamos solicitando que os(as) alunos(as) respondessem as seguintes questões.

- Em sua opinião, a Matemática tem história?
- Você acha que existe uma data e um lugar no qual a matemática começou a ser estudada? Por quem?

Com essas questões obtivemos informações que nos permitiram conhecer alguns aspectos das percepções iniciais dos(as) alunos(as) sobre a relação entre a Matemática e a História. Participaram dessa discussão inicial 62 estudantes. A maior parte dos(as) alunos(as) respondeu, na primeira questão, que sim, a matemática tem história, sendo que 30 alunos(as) justificaram sua resposta indicando que tudo que conhecemos tem história, logo a Matemática também tem história. Como é possível observar nos excertos a seguir.

Quadro 6 - Respostas dos(as) alunos(as) a questão “Em sua opinião a Matemática tem história?”

Aluno(a)	Excerto
Aluno(a) - A26	1) Sim porque se a matemática não tivesse história não existia matemático
Aluno(a) - A15	1) Sim, porque quanto conta alguma coisa ja tem história.
Aluno(a) - A20	1) SIM PORQUE SENÃO ELA NÃO TERIA EXISTIDO
Aluno(a) - B32	1- Sim, pois já existe a muito tempo e tudo que nós conhecemos tem uma história.
Aluno(a) - A28	1- sim, tudo tem que ter uma historia nada surge por acaso

Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

A partir desse agrupamento de respostas, é possível perceber que para alguns estudantes o fato da Matemática existir já aponta que ela tem uma História, ou então que só temos Matemática hoje porque ela tem uma História, ou seja, teve um passado. Entendemos que essa visão pode estar relacionada à própria História e não a um conhecimento acerca de aspectos da História da Matemática, já que para esses(as) alunos(as) tudo que conhecemos hoje, conhecemos porque possui História.

Quatorze alunos(as) justificaram suas respostas citando o início da contagem, quando o homem começou a associar, por exemplo, animais com pedrinhas ou riscos em pedras e ossos.

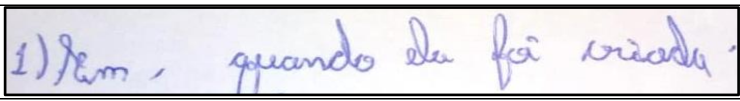
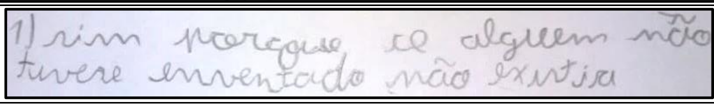
Quadro 7 - Respostas dos(as) alunos(as) a questão “Em sua opinião a Matemática tem história?”

Aluno(a)	Excerto
Aluno(a) - B19	1) Sim. Porque tudo tem historia, a historia da matematica é como surgiu os números e como eles eram usados e foram evoluindo.
Aluno(a) - A16	Sim. Porque começaram contando carneiro e outras coisas até os dias de hoje.
Aluno(a) - A34	1) Sim. A matematica tem história porque na pré história Eles faziam Risquinhos nas pedra para saber a quantidade de ovelhas

Fonte – Registro dos(as) alunos(a)

É possível observar que esses(as) alunos(as) apresentam uma percepção da História da Matemática, pois eles(as) justificam suas respostas utilizando como exemplo o início da contagem, que é um episódio ligado a um percurso histórico da Matemática. Treze alunos(as) justificaram que a Matemática tem História porque ela existiu ou porque alguém a inventou, como expostos nos excertos a seguir.

Quadro 8- Respostas dos(as) alunos(as) a questão “Em sua opinião a Matemática tem história?”

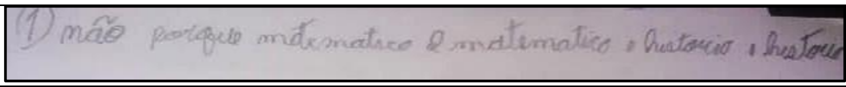
Aluno(a)	Excerto
Aluno(a) - A04	 1) Sim, quando ela foi criada.
Aluno(a) - A02	 1) sim porque se alguem não tivere inventado não existia

Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

A partir desses excertos, pode-se inferir que na visão inicial desses(as) alunos(as) a Matemática está pronta e foi criada ou inventada por alguém. Dessa forma, a utilização da HM nas atividades subsequentes, poderia ter a função de ajudar na mudança dessa imagem da Matemática, ao mostrar que a Matemática não está pronta ou que fora criada por poucos matemáticos, valorizando assim sua face humana e mostrando que esta foi se desenvolvendo ao longo do tempo.

Por fim, cinco alunos(as) responderam que a Matemática não tem história, e um(a) justificou indicando que Matemática e História são diferentes campos do conhecimento, como é possível observar no excerto a seguir.

Quadro 9- Resposta do(a) aluno(a) a questão “Em sua opinião a Matemática tem história?”

Aluno(a)	Excerto
Aluno(a) - A06	 (1) não porque matematica é matematica e historia é historia

Fonte – Registro do(a) aluno(a);

Sendo assim, é possível notar que para alguns estudantes, a matemática é apenas uma disciplina da escola e que esta não tem uma história. Dessa forma, observamos que a maioria dos(as) alunos(as) (48 dos 62 alunos(as) que responderam as questões) têm uma visão da Matemática como sendo um conhecimento que possui história porque tudo tem história, ou que a Matemática tem história porque alguém a inventou. Entretanto, para alguns, a Matemática não tem história, o que representa uma visão equivocada a respeito do desenvolvimento desta ciência, que está em progresso ao longo do tempo, ou seja, tem sido e continua sendo influenciada pelos contextos das diversas civilizações. Sendo assim, podemos inferir que o conhecimento sobre a matemática desses(as) alunos(as) está carente de elementos relacionados à HM.

Com relação à segunda questão, se a matemática teve uma data ou um lugar específico em que começou a ser estudada, onze alunos(as) responderam que não sabiam, indicando que nunca tiveram acesso a esse tipo de informação.

Quadro 10 – Resposta do(a) aluno(a) a questão "Você acha que existe uma data e um lugar onde a Matemática começou a ser estudada? Por quem?"

Aluno(a)	Excerto
Aluno(a) - B18	2) Não. Porque nunca ouvi falar

Fonte- Registro do(a) aluno(a)

Cinco alunos(as) responderam que não existe uma data específica ou lugar específico em que a Matemática começou a ser estudada, justificando que ela sempre existiu, no entanto de uma forma diferente da qual conhecemos hoje, ou que foi por acaso.

Quadro 11- Respostas dos(as) alunos(as) a questão "Você acha que existe uma data e um lugar onde a Matemática começou a ser estudada? Por quem?"

Aluno(a)	Excerto
Aluno(a) - B29	2- A matematica não teve data e nem dia de ter surgido. Quem inventou a matematica, foi investigando até surgir tudo certinho.
Aluno(a) - A23	2-R: Não, isso pode ter acontecido por acaso.
Aluno(a) - B32	2- Não especificamente quando ela foi criada, acho que a matematica sempre existiu só que de maneira diferente.
Aluno(a) - B02	2 Não tem data mais eu acho que foi na epoca dos homens da caverna

Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

Ao refletir sobre esses excertos, podemos levantar a hipótese de que uma minoria dos(as) alunos(as), apenas cinco, talvez entenda que não é possível precisar uma data ou lugar em que a Matemática começou a ser estudada, ou por quem, já que ela surgiu em diferentes civilizações ao longo do tempo e com objetivos diferentes.

Dois estudantes responderam que a Matemática não teria uma data ou um local em que começou a ser estudada, alegando que ela é muito antiga, ou que a matemática é apenas uma disciplina como outra qualquer.

Quadro 12- Respostas dos(as) alunos(as) a questão "Você acha que existe uma data e um lugar onde a Matemática começou a ser estudada? Por quem?"

Aluno(a)	Excerto
Aluno(a) - B18	2) não pq a matemática é como outra matéria qualquer
Aluno(a) - A11	Não porque isso é bem antigo

Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

Quarenta e quatro alunos(as) responderam que sim, existe uma data e um lugar no qual a matemática começou a ser estudada. Destes, 24 alunos(as) não souberam especificar essa data ou lugar, argumentando, por exemplo, que tudo que é inventado tem uma data ou que foi há muito tempo atrás, como é possível observar nos excertos apresentados no quadro a seguir.

Quadro 13 - Respostas dos(as) alunos(as) a questão "Você acha que existe uma data e um lugar onde a Matemática começou a ser estudada? Por quem?"

Aluno(a)	Excerto
Aluno(a) - B21	2- Sim Mas é muitos anos atrás eu não conheço.
Aluno(a) - A06	Acho, mas foi bem anos atrás, é impossível saber.
Aluno(a) - B35	2) Sim, porque todas as coisas tem uma data de quando ela foi inventada ou aparecida.
Aluno(a) - A28	2- Sim, alguém tem que ter criado (descoberto), se não ela não existiria até hoje.

Aluno(a) - B19	2 - Eu acho que sim pois ela tem que ter alguma origem.
Aluno(a) - B12	2) bem acho mais não sei a data e nem o lugar onde ela começou ser estuda.
Aluno(a) - B25	2- Sim existe uma data e um lugar só que atualmente é impossível saber por que todos já morreram. (tudo é criado em cima de uma data) (Isso faz parte da história)

Fonte- Registro dos(as) alunos(as)

Por fim, dos(as) 44 alunos(as) que respondem que há uma data e um lugar em que a Matemática começou a ser estudada, 20 justificaram citando, novamente, o início da contagem, mas não apresentaram uma data ou um local onde se deu esse início.

Quadro 14 - Respostas dos(as) alunos(as) a questão "Você acha que existe uma data e um lugar onde a Matemática começou a ser estudada? Por quem?"

Aluno(a)	Excertos
Aluno(a) – A17	2-R = Sim, tem mas não sei quem é. Mas eu acho que a matematica começou a ser estudada pelas épocas mais antigas quando eles precisava fazer contas e etc.
Aluno(a) – A22	2.) Sim pelos caras que contavam carneiro há muito tempo.
Aluno(a) – A 27	2) Sim. tem uma história que o homem tinha que contar carneirinhos, daí surgiu a matemática e porquem não faço ideia. Mas os números foram se modificando até chegar nos que nós usamos hoje,

Fonte- Registro dos(as) alunos(as)

Com base nessas respostas é possível inferir que a maioria dos(as) alunos(as) tem pouco conhecimento acerca de aspectos relativos à História da Matemática. Alguns, inclusive, têm a visão de que a Matemática foi criada por alguém em determinada data ou lugar, este entendimento pode estar relacionado ao fato da baixa utilização da HM em aulas de matemática. Isso também pode ser observado nas respostas, pois o único episódio relacionado à HM que os(as) alunos(as) citaram foi o princípio da contagem; quando se começa a associar os elementos (rebanho e/ou produção de alimentos) às pedras ou riscos em ossos, episódio esse que muitas vezes é apresentado nos livros didáticos para introduzir esse conceito.

Sendo assim, ressaltamos a relevância da atividade seguinte, que contempla a construção de um Mapa-*múndi* que foi complementado com pesquisas realizadas pelos(as) alunos(as) sobre algumas civilizações antigas e suas contribuições para a Matemática. Com esta atividade os(as) alunos(as) puderam perceber o fato de que o conhecimento que hoje denominamos de Matemática foi sendo desenvolvido em vários locais ao longo do tempo e, muitas vezes, de forma independente.

Dessa forma, em um primeiro momento utilizamos a História da Matemática com o intuito de motivar os(as) alunos(as) e contextualizar a matemática de modo mais geral. A escolha de utilizar a HM como uma forma de introdução pode ser justificada, pois, segundo Fossa (2006, p. 139), muitos(as) alunos(as) "[...] consideram interessantes os tópicos da História da Matemática. Sendo assim, a História pode ser usada como um fator motivador na apresentação de um material novo".

Desse modo, propusemos inicialmente aos(as) estudantes a realização de uma pesquisa sobre algumas civilizações antigas e suas contribuições à Matemática. A princípio, havíamos planejado que essa pesquisa seria realizada fora do horário das aulas, entretanto, seguindo uma orientação da professora regente, decidimos que tal atividade se realizaria na escola. De acordo com a docente, determinados(as) estudantes não possuem o hábito de realizar atividades fora da sala de aula e muitos(as) destes(as) poderiam ter dificuldade de acesso à internet fora da escola, fato que poderia dificultar a construção do mapa-*múndi* que dependia da realização das pesquisas. Dessa forma, contamos com a colaboração da professora da disciplina de História, que cedeu duas aulas em cada turma para a realização desta pesquisa.

Posteriormente, os(as) alunos(as) foram divididos em equipes para a realização da pesquisa, sendo fornecido para cada equipe um pequeno roteiro com algumas questões e sugestões de *sites* para nortear a busca sobre determinada civilização. Foi solicitado, ainda, que com as informações encontradas eles(as) elaborassem um pequeno texto, de no máximo 30 linhas, que seria exposto no Mapa-*múndi* a ser construído. Esse trabalho foi realizado na sala de informática da escola, que conta com aproximadamente 20 computadores com acesso a internet.

No desenvolvimento dessa atividade foi possível perceber que os(as) alunos(as) apresentaram dificuldades em realizar pesquisas bibliográficas, mesmo com todas as orientações fornecidas. Eles(as) acessavam um *site* e copiavam todo o seu conteúdo sem se atentar para as questões do roteiro, fato que nos possibilita conjecturar que os(as) alunos(as) não são orientados, em outros trabalhos, a realizarem pesquisas dessa forma, em que há a requisição de elaboração de respostas tendo como base o material encontrado durante a pesquisa.

Dessa forma, em vários momentos foi necessária a interversão da pesquisadora e da professora regente de História para auxiliar e orientar os(as) alunos(as). Solicitávamos que primeiro eles(as) lessem as informações apresentadas no roteiro e que, posteriormente, estudassem os textos encontrados ao realizarem a pesquisa, só então deveriam formular suas respostas, ou seja, solicitou-se que respondessem com suas próprias palavras. Observamos que, em relação à utilização do computador e acesso aos *sites,* os(as) alunos(as) não encontraram obstáculos, já que atualmente, a grande maioria tem acesso ou sabe buscar informações utilizando algum meio tecnológico, seja em casa ou na escola, mas foi possível notar a dificuldade deles(as) em filtrar as informações encontradas, em ler e compreender tudo que está disponível.

Com base em um relato da professora regente de Matemática, identificamos que esta nunca havia utilizado a sala de informática com os(as) alunos(as) em suas aulas, e que a única docente que costuma utilizar essa sala com esses(as) estudantes é a professora de História.

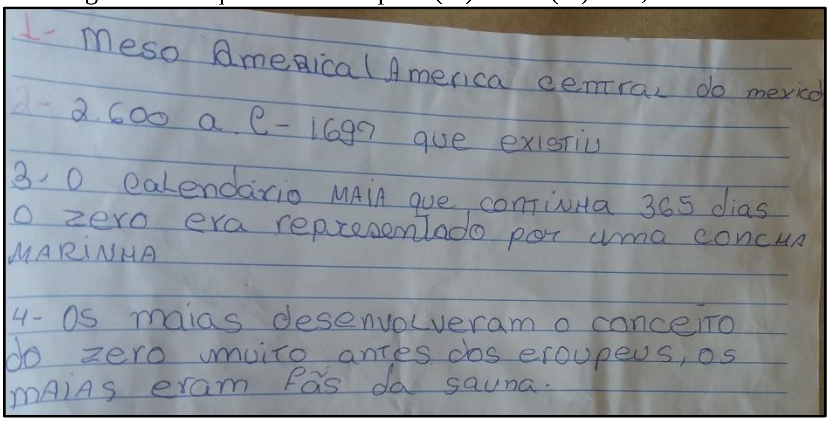
De maneira geral, os professores dessa escola não têm o hábito de utilizar a sala de informática em suas aulas, o que nos leva a conjecturar que os(as) alunos(as) não estão acostumados a realizarem pesquisas, principalmente em aulas de Matemática, e esse pode ter sido o motivo das dificuldades em realizar a pesquisa da forma em que a mesma fora proposta. Sendo assim, podemos ressaltar a importância de propor atividades que envolvam pesquisa, que levem os(as) alunos(as) a lerem, a interpretarem e a partir disso elaborarem suas respostas, em qualquer área do ensino, para que estes(as) possam construir suas próprias considerações e críticas sobre determinado tema.

Com relação à Matemática em específico, ressaltamos a importância de proporcionar uma formação mais ampla, que não fique centrada somente no domínio de definições, regras ou procedimentos, mas capaz de propiciar aos(as) estudantes o exercício de ler e interpretar em Matemática, ou seja, que o(a) aluno(a) ao se deparar com uma situação problema, saiba extrair os elementos necessários para a busca de uma resolução e consiga interpretar essa solução.

Dessa forma, é relevante propor aos(as) estudantes atividades diferentes do “efetue” e/ou “resolva”, nas quais eles devem saber de antemão o que deve ser feito. Esse tipo de atividade pode levar a uma desmotivação para com a Matemática e reforçar a ideia de que a Matemática é unicamente voltada a realizar cálculos, não deixando assim, espaço para que o(a) aluno(a) tenha interesse em procurar por novas informações. Nesse sentido entendemos que a utilização de aspectos da HM, possa recuperar essa curiosidade inerente à Matemática.

Destacamos que, mesmo com as intervenções, as equipes não realizaram a pesquisa da forma proposta, ou seja, elaborando um texto que apresentasse as informações solicitadas. Em sua maioria, as equipes apenas responderam as questões do roteiro de forma enumerada ou cada uma em um parágrafo, como é possível observar na imagem a seguir, em que apresentamos a pesquisa realizada por uma equipe que estudou sobre a civilização Maia.

Figura 4 - Pesquisa realizada pelos(as) alunos(as) B01, B17 e B28



1- Meso America(America central do mexico
2- 2.600 a.C - 1697 que existiu
3- O calendário MAIA que continha 365 dias
O zero era representado por uma concha
MARINHA
4- Os maias desenvolveram o conceito
do zero muito antes dos eroupeus, os
MAIAS eram fãs da sauna.

Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

Finalizada a pesquisa, iniciamos a construção, de forma colaborativa, de um mapa no qual foram destacadas algumas civilizações antigas e suas contribuições à Matemática. Para tanto colamos, em um cartaz, um Mapa-*múndi* e pedimos que os(as) alunos(as), com base na pesquisa realizada, fizessem setas para indicar o local ocupado pela civilização estudada e colassem os resultados de suas pesquisas juntamente com algumas imagens. Foi possível notar empolgação e envolvimento por parte da maioria dos(as) alunos(as) durante essa construção.

Figura 5 - Alunos(as) da turma A durante a construção do Mapa-*múndi*

Fonte – Acervo da pesquisadora

Figura 6- Alunos(as) da turma B durante a construção do Mapa-*múndi*

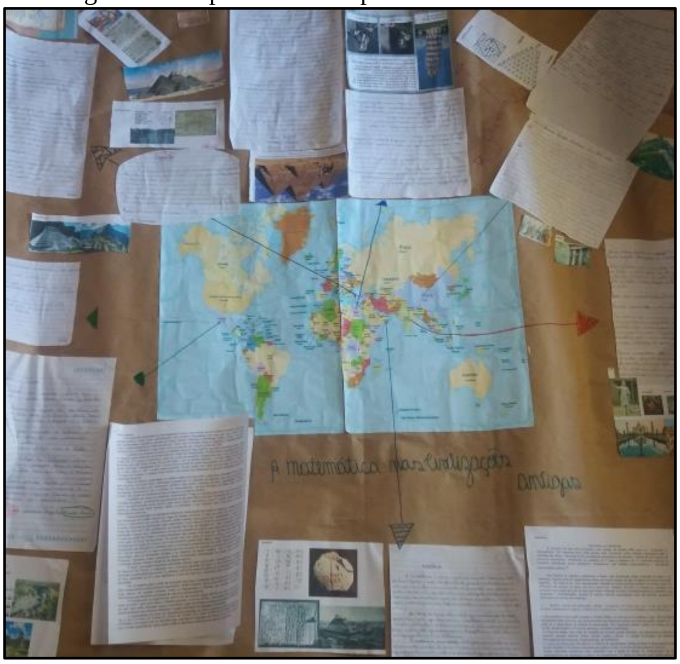
Fonte – Acervo da pesquisadora

Em seguida, realizamos uma socialização dos resultados das pesquisas. Para conduzir esse momento, colamos o mapa construído no quadro e cada equipe apresentou a civilização pesquisada, indicando no mapa onde essa civilização estava localizada e apresentando as suas contribuições ao conhecimento que hoje denominamos como Matemática.

Figura 7 - Mapa construído pelos alunos da turma A

Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

Figura 8 - Mapa construído pelos alunos da turma B



Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

Ressaltamos que a supervisora da escola julgou interessante a ideia da confecção do mapa, por trazer de forma contextualizada informações sobre a Matemática que ela mesma não conhecia. Assim, ela solicitou que os dois mapas construídos fossem expostos no pátio da unidade escolar, para que os(as) demais alunos(as) da escola pudessem prestigiar o trabalho efetuado pelos(as) estudantes e conhecer um pouco as contribuições de algumas civilizações antigas para o desenvolvimento da Matemática.

Sendo assim, foi possível notar que profissionais da educação que não são da área da matemática, e às vezes inclusive esses, desconhecem aspectos relativos à História da Matemática. Este fato pode contribuir para que se reforce a percepção da Matemática como uma ciência pronta e acabada, destinada a poucos, podendo, assim, afetar o interesse dos(as) alunos(as) por aprendê-la.

Destacamos, ainda, que esta atividade permitiu concluir juntamente com os(as) estudantes, a partir da pesquisa por eles(as) realizada e da apresentação da mesma, que a Matemática esteve presente em diversas civilizações, em diferentes momentos, com variados enfoques e, dessa forma, é impossível precisar um local ou uma data específica em que ela começou a ser estudada. Isso possibilitou que os(as) alunos(as) passassem a ver a Matemática "[...] como um empreendimento que se construiu ao logo de séculos, no atendimento de certas demandas em determinados contextos socioeconômicos" (FELICIANO, 2008, p. 31). Este indício do potencial de se utilizar a HM com o intuito contextualizar a própria matemática e mostrar que ela é uma construção humana desenvolvida ao longo do tempo foi confirmado na retomada desta atividade.

Em seguida, com o auxílio de uma apresentação de slides (APÊNDICE 9) que expunha algumas questões e informações sobre a História da Matemática, mais especificamente, sobre a civilização egípcia, iniciamos uma discussão sobre a forma como os antigos egípcios resolviam problemas que envolviam o que hoje chamamos de equação do primeiro grau com uma incógnita.

Com o intuito de retomar a discussão do Mapa-*múndi*, construído na última atividade, os(as) alunos(as) foram indagados sobre onde a Matemática começou a ser estudada. Cada aluno(a), inicialmente, respondeu citando a civilização que sua equipe havia pesquisado, até que um(a) aluno(a) mudou o perfil das respostas, como é possível observar na transcrição a seguir.

Pesquisadora – Onde a matemática começou a ser estudada? Aluno(a) – no Oriente Médio Pesquisadora – só no oriente médio? Aluno(a) – na Índia Pesquisadora – só na Índia? Aluno(a) – no Egito Pesquisadora – Só no Egito? Aluno(a) B19 – no mundo inteiro

Esse diálogo permitiu que os(as) alunos(as) chegassem à conclusão de que a matemática não começou a ser estudada em um lugar específico, mas que foi se desenvolvendo em vários locais, às vezes ao mesmo tempo e com enfoques diferentes.

Dessa forma, com a realização da pesquisa, a construção do Mapa-*múndi* e a apresentação de algumas informações históricas, tornou-se possível fazer uso da HM também com o intuito de mostrar que a matemática não está "pronta e acabada" e ressaltar sua face humana ao apresentar que, em determinados contextos, ela surgiu de necessidades práticas. Além disso, foi possível mostrar que a Matemática não foi desenvolvida em só uma região, e o seu desenvolvimento não ocorreu de forma linear, já que alguns historiadores revelam a existência "[...] de muitas matemáticas distintas acontecendo simultaneamente no mundo" (BROLEZZI, 1991, p. 25).

Em seguida, continuamos com a apresentação de *slides*, mas focamos na civilização egípcia, momento no qual expusemos alguns fatos históricos e informações sobre esta civilização e sobre os papiros utilizados por eles para o registro, principalmente os que apresentavam problemas matemáticos.

Durante a apresentação, os(as) alunos(as) foram questionados sobre o que eles(as) pensavam quando ouviam a palavra Egito e a maioria prontamente respondeu: "pirâmide, esfinge, múmias e faraó". Dessa forma, notamos que os(as) alunos(as) já conheciam algumas informações sobre a civilização egípcia e sua cultura, mesmo os que não haviam feito a pesquisa sobre esta região.

Em seguida, a pesquisadora questionou se os egípcios tinham algum conhecimento sobre a matemática. O(a) aluno(a) B19 respondeu que "(...) eles precisavam de matemática para fazer as pirâmides (...)" e os(as) alunos(as) da equipe que pesquisou sobre a civilização egípcia comentaram que encontraram informações relativas ao método da "Falsa Posição", mas que não sabiam como o método era utilizado. Sendo assim, foi possível concluir juntamente com os(as) alunos(as), a partir das informações apresentadas e da discussão realizada, que os egípcios tinham conhecimento sobre matemática, e provavelmente o usavam na construção das pirâmides e outras áreas, como na medição de terras e cobrança de impostos. Isso mostra que, em alguns casos, como aponta Feliciano (2008), um estudo histórico pode mostrar o caráter prático do desenvolvimento de determinados conceitos matemáticos.

Dando continuidade, apresentamos aos(as) estudantes a localização do Egito, algumas informações sobre a capital Cairo e algumas imagens, como a da esfinge e das pirâmides. Nesse momento os(as) alunos(as) comentaram que essas pirâmides serviam de túmulos para os faraós e que eles guardavam tesouros e outros pertences, já que acreditavam na vida após a morte. Dessa forma, esse momento contou com uma grande participação e contribuição dos(as) alunos(as) que expunham as informações que conheciam.

Apresentamos que as informações sobre a civilização egípcia provêm, principalmente, dos papiros. Nesse momento um(a) aluno(a) comentou que esse era o “papel” usado por eles e ainda explicou aos(as) seus(as) colegas como que este era produzido a partir de uma planta. Complementando sua resposta, foi apresentada aos(as) estudantes uma imagem da planta que eles utilizavam para a fabricação dos papiros, comum nas margens do rio Nilo.

Assim sendo, podemos afirmar que, ao longo de grande parte dessa apresentação, os(as) alunos(as) assumiram o protagonismo, contribuindo com a discussão e comentando sobre as informações que conheciam. Dessa forma, entendemos que a apresentação e a discussão de informações históricas gerais e relacionadas à Matemática pôde fornecer um contexto, ao apresentar, por exemplo, em quais situações os antigos egípcios utilizam a Matemática.

Posteriormente, alertamos que as informações matemáticas do antigo Egito chegaram até os dias de hoje por meio dos papiros, em especial o Papiro Rhind e o Papiro Moscou, que se encontram, respectivamente, no Museu Britânico (Londres) e no Museu de Moscou de Finas Artes. Foi possível, dessa forma, expor que esses documentos ainda existem e estão em museus, podendo ser vistos e consultados. Cabe ressaltar que poderia ter sido dada mais ênfase a questão da localização atual dos Papiros, mostrando assim a importância dos museus para que possamos estudar e compreender como as civilizações antigas se desenvolveram, além de suas contribuições para a ciência atual, mas devido ao tempo, esta não foi enfatizada.

Em seguida, os(as) alunos(as) foram indagados sobre que Matemática eles(as) imaginavam que os egípcios registravam nesses Papiros. A resposta mais frequente foi “contas”. Quando indagados(as) sobre que tipo de conta, as respostas dos(as) alunos(as) se referiam às operações básicas que conhecemos hoje, como adição, subtração, multiplicação e divisão. Surgiu, também como resposta, que se tratavam de áreas e volumes, talvez motivados pela discussão realizada anteriormente sobre a questão das cheias do rio Nilo e da construção das pirâmides.

Destacamos que, com essa abordagem inicial, em nosso entender, trabalhamos com alguns aspectos apresentados na primeira competência específica de Matemática para o ensino fundamental presente na BNCC, que discorre acerca do reconhecimento da Matemática como uma "[...] ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva" (BRASIL, 2018, p. 265).

Aprofundando estas discussões, apresentamos outras informações sobre o Papiro Rhind, tais como o seu autor, suas dimensões e os conceitos matemáticos abordados, caracterizados como problemas que envolviam métodos de multiplicação e divisão, o uso das frações unitárias, o método da Falsa Posição, os problemas de área e a aplicação da Matemática a problemas práticos.

Expusemos também que iríamos estudar alguns desses problemas que os antigos egípcios resolviam. Foi neste momento, que iniciamos o estudo das resoluções de equações, sem especificar tal nomenclatura. Dessa forma em um primeiro momento apresentamos o método da "Falsa Posição" e, posteriormente, trabalhamos com o método da "Inversão" utilizado pelos antigos hindus, para abordarmos as operações inversas que seriam utilizadas quando fossemos apresentar o princípio do equilíbrio, baseado na utilização da balança de dois pratos.

Sendo assim, para apresentar a equação do primeiro grau e sua resolução não nos prendemos à regra "muda de lado – muda o sinal". Araújo (2008), ao estudar o trabalho de Falcão (1996), indicou que essa tem sido a regra que frequentemente é usada nas escolas, sendo inclusive utilizada de forma incorreta. Sendo assim, entendemos que o uso dessa regra sem um trabalho que vise a sua compreensão e o porquê de seu funcionamento, pode propiciar eventuais erros no processamento das equações e uma mecanização na sua resolução, não propiciando ao(a) aluno(a) a interpretação da resposta encontrada e a verificação se esta de fato resolve a equação, ou seja, se a resposta obtida faz sentido no contexto do problema ou exercício.

Como exemplo, foi exposto aos(as) alunos(as) o problema 26 do papiro Rhind: "Uma quantidade e seu ¼ adicionado tornam-se 15. Qual é esta quantidade?" (ROQUE, 2012).

Nesse momento, instigamos os(as) alunos(as) a encontrarem a quantidade procurada. A maioria tentou chutar valores ou dizer que não era possível a resolução, visto que não sabiam resolver esse tipo de problema. Sendo assim, expusemos que esse tipo de problema se reduz ao que conhecemos hoje como uma equação do primeiro grau, e que iriámos estudar algumas formas de resolver esse tipo de equação.

Ao utilizarmos um problema extraído de um documento histórico, ficou evidente que a HM pôde motivar os(as) estudantes, pois foi possível notar o interesse deles(as) em tentar resolver, buscando chutar valores que poderiam ser a solução do problema.

Mesmo que os(as) alunos(as) não tenham conseguido resolver o problema naquele primeiro momento, a sua apresentação possibilitou uma discussão inicial sobre o que seria uma equação. Para tanto, com a ajuda dos(as) alunos(as), traduzimos o problema para uma linguagem algébrica e com esse problema trabalhamos a diferença entre uma expressão algébrica e uma equação. Foi ressaltado que, na expressão algébrica, a letra/símbolo representava um valor que varia, sendo denominada de variável, mas que a partir do momento que usamos o sinal de igual essa letra/símbolo passa a representar um único valor que chamamos de incógnita. Posteriormente, foi proposta a resolução dos dois problemas expostos a seguir, que enfatizavam essa diferença.

1) Em um sítio cria-se porcos e galinhas, contando se os pés temos um total de 54 pés. Qual a quantidade de cada espécie de animal?
2) Em um sítio cria-se porcos e galinhas, contando-se os pés temos um total de 54 pés. Sabendo que nesse sítio tem um total de 8 porcos, qual a quantidade de galinhas?

(Adaptado de Marcussi – 2013)

A inclusão desses problemas nas atividades planejadas foi, no nosso entender, relevante, já que os(as) alunos(as) puderam observar, ao resolver o primeiro problema, que este admitia várias soluções, enquanto que o segundo apenas uma. Com isso tentamos amenizar uma das dificuldades apontada por Araújo (2008) como o "[...] uso incorreto de propriedades, de operações, de definição das incógnitas, até dificuldades advindas da aritmética, como erros em operações, em propriedades ou na prioridade das operações" (p. 335), propiciando, dessa forma, a oportunidade do(a) aluno(a) interpretar o problema e observar a diferença entre a variável e a incógnita.

Destacamos que, dessa forma, trabalhamos também com a habilidade "[...] (EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita" (BRASIL, 2018, p. 305) presente na BNCC.

Em seguida, retomamos o problema 26 do Papiro Rhind e definimos o que seria uma equação do primeiro grau com uma incógnita, evidenciando a necessidade de a mesma possuir uma quantidade desconhecida e uma igualdade. Com o intuito de explorarmos essa definição, propusemos que os(as) alunos(as) identificassem se algumas sentenças matemáticas eram ou não equações.

a) $3+6=9$ – Resolução esperada: apresenta o sinal da igualdade, mas não é uma equação, pois não possui um elemento desconhecido.
b) ♥$+2$ – Resolução esperada: apresenta um valor desconhecido, mas não apresenta um sinal de igualdade, logo não é uma equação.
c) $h+3=5$ – Resolução esperada: é uma equação, pois apresenta um valor desconhecido (h) e apresenta o sinal da igualdade.

Posteriormente, retomamos novamente o problema 26 do Papiro Rhind e solicitamos que os(as) alunos(as) tentassem resolver, ou seja, tentassem encontrar o valor que somado com seu quarto resultava em 15.

Foi possível observar que os(as) alunos(as) novamente foram "chutando" valores aleatórios, mas quando questionados acerca do porquê de tal valor não sabiam justificar. Sendo assim eles(as) foram instigados a testar esses valores na equação, ou seja, a verificar se estes valores, quando substituídos no lugar da incógnita, resolviam a equação, tornando a igualdade verdadeira. Na maioria das vezes eles(as) constataram, ao substituir o "ahá" pelo valor inicialmente pensado, que o resultado não era o esperado, ou seja, que igualdade não se tornava verdadeira.

A maioria dos(as) alunos(as) estava empolgada em tentar encontrar o valor procurado, sempre compartilhando com os colegas os valores que tinham testado, mas que não eram corretos. A atitude dos(as) alunos(as) em chutar valores, corrobora com as conclusões de Medeiros e Medeiros (2004, p. 546), já que para esses autores os(as) alunos(as) que ainda não estudaram os conceitos da álgebra, quando confrontados com problemas relacionados a equações do primeiro grau, nem sempre conseguem obter o resultado esperado, "[...] entretanto, quando o fazem de forma bem sucedida, agem, quase sempre, por tentativa e erros, seguidos de correções apropriadas e, portanto, de um certo modo semelhante ao método da falsa posição".

Dessa forma, podemos afirmar que o método da "Falsa Posição" tem uma característica intuitiva, visto que envolve um procedimento similar ao da tentativa e erro, o que pode contribuir significativamente para um primeiro contato dos(as) alunos(as) com o conceito e resolução da equação do primeiro grau.

Cabe destacar que alguns estudantes tiveram dúvida sobre o que seria o "quarto da quantidade", sendo necessário relembrar alguns conceitos de frações, como por exemplo, que uma fração pode representar uma parte do todo, assim "o quarto" seria o mesmo que dividir o todo em quatro partes e dessas “pegar” uma. Fizemos associação com chocolate e desenhos no quadro a fim de facilitar a visualização.

Após tentativas, alguns estudantes chegaram à solução correta e souberam argumentar o porquê, como é possível observar na discussão transcrita a seguir.

Aluno(a) A22 – Dona já sei, dona é 12 né?
Pesquisadora – Por quê?
Aluno(a) A22 – Porque doze mais doze dividido por três dá quinze.
Pesquisadora – Mas como você chegou nisso?
Aluno(a) A22 – Fazendo conta ué
Pesquisadora – Chutando valor?
Aluno(a) A22 – é fui fazendo conta.
[um(a) aluno(a) que estava perto, entrou na discussão]
Aluno(a) A26 – Doze com doze vai dar 24.
Aluno(a) A22 – Não, não, tem que fazer primeiro o doze dividido por quatro, que vai dar três, e três mais doze vai dar 15.

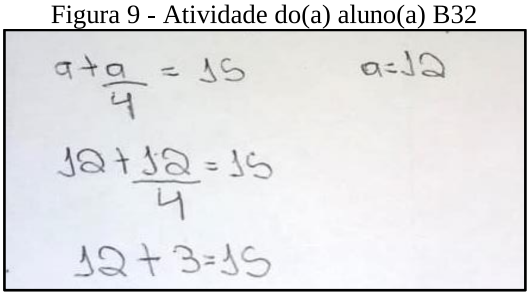
É possível notar que o(a) aluno(a) foi testando valores e chegou à conclusão de que 12 era a quantidade procurada, e ainda quando percebeu que o(a) colega estava realizando a “conta” de forma equivocada, somando 12 mais 12 ao invés de fazer primeiro a divisão de 12 por 4, tomou a iniciativa de corrigi-lo(a) dizendo que primeiro tinha que fazer a “conta” da divisão.

Da mesma forma um(a) outro(a) aluno(a) chegou a conclusão de que o valor procurado era 12, como é possível observar da discussão transcrita a seguir.

Aluno(a) B19 – acho que é 12.
Pesquisadora – Porque que 12?
Aluno(a) B19 – Dona é porque um quarto de 12 é 3 e 12 mais 3 é 15.

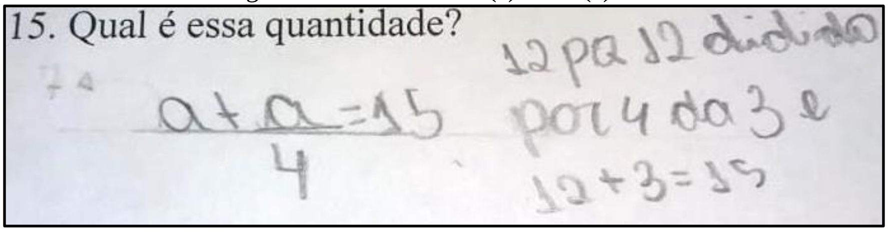
A seguir apresentamos alguns registros que os(as) alunos(as) fizeram ao tentar resolver o problema. Cabe ressaltar que grande parte deles(as) foi testando os números e fazendo os cálculos mentalmente, ou utilizando a carteira e apagando. Assim, apenas quando identificaram que o número procurado era doze, registraram o cálculo. Dessa forma, não temos registro de suas tentativas com outros números.

Figura 9 - Atividade do(a) aluno(a) B32



Fonte – Registro do(a) aluno(a)

Figura 10 - Atividade do(a) aluno(a) A17



Fonte – Registro do(a) aluno(a)

Posteriormente, realizamos uma socialização das soluções efetuadas pelos(as) alunos(as) e foi possível notar que todas se encontravam em torno da ideia de resolver por tentativa e erro. Este fato reforça a possibilidade de se utilizar o método da "Falsa Posição" para uma abordagem inicial da resolução de equação do primeiro grau com uma incógnita, já que segundo Medeiros e Medeiros (2004), esse método empregado pelos antigos egípcios surgiu também em diferentes locais e de forma independente, corroborando com a ideia de que esta pode ser uma abordagem "convidativa ao pensamento" (p. 546).

Em seguida, resolvemos esse problema na lousa, expondo que os antigos egípcios resolviam esse tipo de problema de forma semelhante a que eles(as) empregaram, ou seja, testando valores. Sendo assim, apresentamos uma interpretação dos passos do método da "Falsa Posição" empregado pelos antigos egípcios para resolver o que hoje chamamos de equação do primeiro grau, ou seja, a escolha de um valor falso, que tinha o intuito de facilitar os cálculos eliminando a fração, em seguida, realizando os ajustes necessários para assim encontrar o valor procurado.

Dessa forma, ao trabalhar inicialmente com esse problema e a partir dele explorar significados e definições, entendemos que pode ter desencadeado a motivação de determinados(as) alunos(as), já que, Santos (2007, p. 19) aponta que o uso da HM "[...] pode motivar o aluno a se aprofundar no assunto, tendo uma visão de como esses tipos de problemas são resolvidos antes de existir o que hoje nos é familiar". Dessa forma, na visão do autor, estudar os problemas, juntamente com as formas como eles inicialmente foram resolvidos, pode motivar o(a) aluno(a) a estudar a Matemática.

Com o uso do método da "Falsa Posição", desenvolvido em outras épocas, entendemos também estar utilizando a HM em aulas de Matemática para a aprendizagem de conceitos matemáticos, já que buscamos na "[...] História não somente o relato episódico, mas informações que definam estratégias de abordagem do conteúdo de forma a revelar o significado do que está se pretendendo ensinar" (BROLEZZI, 1991, p. 57).

Estivemos atentos para apresentar aos(as) alunos(as) que essa é uma interpretação dos registros encontrados no Papiro Rhind, e que não é possível termos certeza se os antigos egípcios procediam dessa forma para resolver esse tipo de problema. Além disso, apresentamos ainda que atualmente uma nova interpretação está sendo divulgada[25], mas que não a estudaríamos. Sendo assim, pudemos reforçar com os(as) alunos(as) que a História da Matemática, como qualquer outra história, é uma interpretação dos fatos, logo pode ser interpretada de formas diferentes em diferentes épocas. Assim, até um método matemático é passível de diferentes interpretações ao longo do tempo, conforme avançam os estudos históricos.

A maioria dos(as) alunos(as) conseguiu compreender como funcionava o método da "Falsa Posição", notando que era semelhante ao procedimento que eles(as) estavam utilizando, ou seja, testar valores, e ainda aplicaram este método em outros três problemas que foram propostos para serem resolvidos no caderno. Posteriormente, socializamos as soluções, momento no qual reforçamos as etapas da aplicação desse método, isto é, concluímos com os(as) alunos(as), a partir dos problemas resolvidos, um procedimento que pode ser utilizado para resolver problemas deste tipo, ou seja, testamos um valor, o falso "Ahá" (geralmente um valor que "tira" a fração), se não resultar no valor esperado, multiplicamos a falsa posição pela razão entre o valor esperado e o valor procurado, para obtermos um novo valor que resolve o problema. Em seguida tiramos a prova, ou seja, verificamos se os valores encontrados de fato resolviam a equação, tornando a igualdade verdadeira.

Após essa socialização, definimos com os(as) alunos(as) o conceito de raiz de uma equação do primeiro grau, ou seja, enfatizamos que os valores encontrados, nos problemas resolvidos, são chamados de raiz da equação, pois ao substituirmos esse valor pela incógnita na equação esse valor torna a sentença matemática verdadeira.

Em seguida propusemos uma atividade contendo mais quatro problemas semelhantes aos trabalhados durante os exercícios, que foi realizada por 51 alunos(as).

No primeiro problema, 45 alunos(as) encontraram o valor procurado, destes, 33 aplicaram corretamente o método da "Falsa Posição" e 12 fizeram direto, ou seja, apenas apresentaram o valor que resolvia a equação, não deixando registrados os

[25] Esta pode ser encontrada em Bertato (2018)

procedimentos utilizados. Os(as) outros(as) seis alunos(as), apenas traduziram o problema para uma linguagem matemática, mas não encontraram o valor procurado. No segundo problema, 39 alunos(as) resolveram corretamente a questão proposta, sendo que 36 aplicaram o método estudado e três fizeram direto, oito alunos(as) apenas transformaram o problema para a linguagem algébrica, mas não encontraram o valor procurado, quatro alunos(as) aplicaram o método, porém erraram nos cálculos ao ajustarem o valor.

Já o terceiro problema (problema 24 do Papiro Rhind), inicialmente gerou muitas dúvidas, pois não estava claro para os(as) alunos(as) por qual valor eles teriam de multiplicar o falso "ahá" para encontrarem o valor procurado. No caso, seria multiplicar o falso "ahá" pela razão entre o valor esperado e o valor encontrado, como foi explicado e reforçado durante a socialização das atividades propostas anteriormente. Destacamos que diferentemente dos problemas trabalhados anteriormente, no referido problema, a razão entre o valor esperado e o valor procurado não era um número inteiro. Este fato pode ter sido um dos motivos da dificuldade dos(as) alunos(as) especificamente nessa questão, ressaltando a dificuldade que eles(as) já tinham apresentado em operar com frações.

Por esse motivo, resolvermos modificar o enunciado para evitar esse obstáculo. Após essa mudança, 33 alunos(as) utilizaram o método da "Falsa Posição", sendo que somente um(a) aluno(a) errou ao ajustar os valores; cinco alunos(as) encontraram o resultado de forma direta e 13 alunos(as) traduziram o problema para uma linguagem matemática, mas não o resolveu. Após o término da atividade, retomamos o problema sem a alteração no enunciado e o resolvemos expondo que o procedimento seria igual ao utilizado nos demais, só que trabalhando com a razão na forma de uma fração que não é inteira.

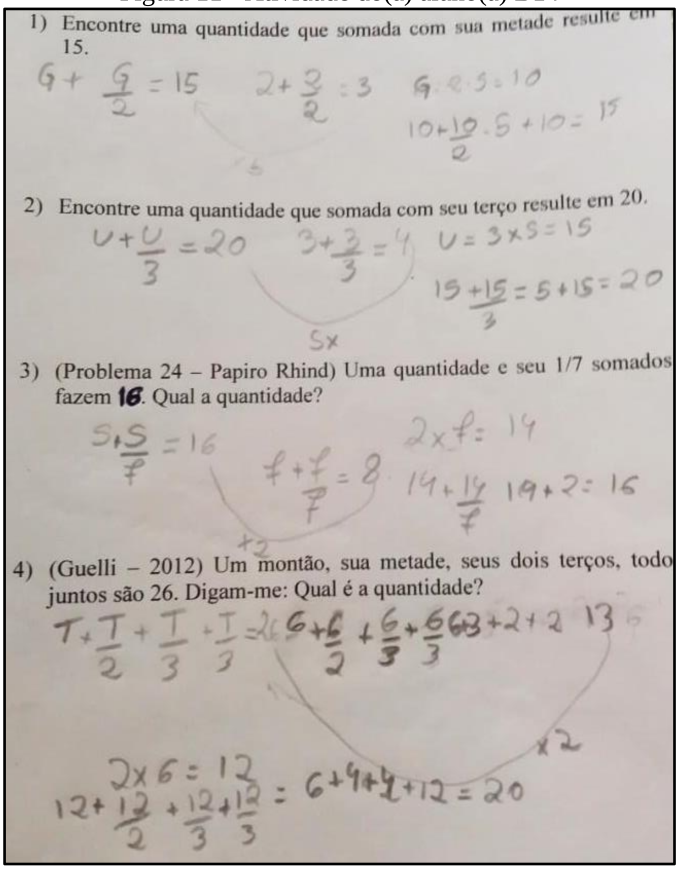
O último problema era um pouco diferente dos demais, por possuir mais informações. Sendo assim, foi possível notar que os(as) alunos(as) requisitaram mais ajuda para resolvê-lo. Sendo que 32 alunos(as) aplicaram o método da "Falsa posição" corretamente e encontraram o valor procurado, 14 alunos(as) apenas transformaram para a linguagem algébrica não resolvendo e quatro alunos(as) erraram cálculos.

Cabe destacar que todos(as) os(as) alunos(as) conseguiram traduzir todos os problemas escritos na linguagem corrente para a linguagem algébrica, fato que pode estar relacionado ao desenvolvimento das atividades da Etapa 1, nas quais enfatizamos, por meio de exemplos, atividades de investigação, situações problema e exercícios essa passagem para linguagem algébrica.

Segundo Gil (2008), essa passagem pode causar dificuldades no estudo algébrico, dessa forma priorizamos, na Etapa 1, atividades que levavam os(as) estudantes a interpretarem as informações e traduzi-las utilizando os símbolos matemáticos, sempre realizando a socialização das mesmas, pois durante essas discussões foi possível ressaltar essa tradução para símbolos matemáticos e relembrar conceitos como: dobro de um número, o quarto de um número, etc.

Nas duas imagens a seguir expomos as atividades (uma de cada turma) em que os(as) alunos(as) aplicaram o método da "Falsa Posição" de forma correta em todos os problemas e, inclusive, tirando a prova para verificar se o valor encontrado tornava a igualdade verdadeira, como tínhamos feito na socialização dos primeiros exercícios.

Figura 11 - Atividade do(a) aluno(a) B14


1) Encontre uma quantidade que somada com sua metade resulte em 15.

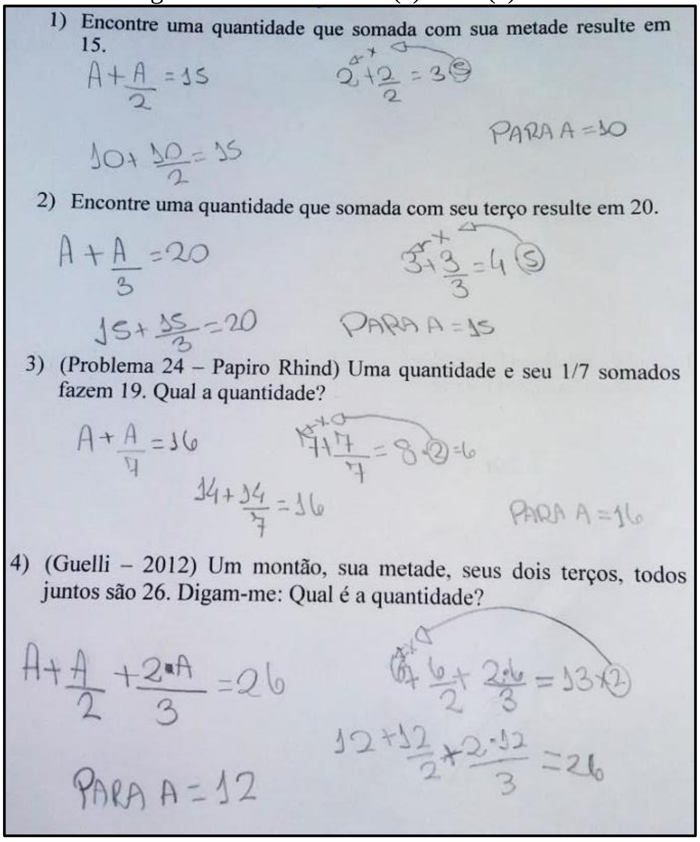
2) Encontre uma quantidade que somada com seu terço resulte em 20.

3) (Problema 24 – Papiro Rhind) Uma quantidade e seu 1/7 somados fazem **16**. Qual a quantidade?

4) (Guelli – 2012) Um montão, sua metade, seus dois terços, todo juntos são 26. Digam-me: Qual é a quantidade?

Fonte – Registro do(a) aluno(a)

Figura 12 - Atividade do(a) aluno(a) A22



1) Encontre uma quantidade que somada com sua metade resulte em 15.

$A+\frac{A}{2}=15$ $2+\frac{2}{2}=3$ (5)

PARA A = 10

$10+\frac{10}{2}=15$

2) Encontre uma quantidade que somada com seu terço resulte em 20.

$A+\frac{A}{3}=20$ $3+\frac{3}{3}=4$ (5)

$15+\frac{15}{3}=20$ PARA A = 15

3) (Problema 24 – Papiro Rhind) Uma quantidade e seu 1/7 somados fazem 19. Qual a quantidade?

$A+\frac{A}{7}=16$ $7+\frac{7}{7}=8$ (2) = 16

$14+\frac{14}{7}=16$ PARA A = 16

4) (Guelli – 2012) Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Digam-me: Qual é a quantidade?

$A+\frac{A}{2}+\frac{2\cdot A}{3}=26$ $6+\frac{6}{2}+\frac{2\cdot 6}{3}=13\times(2)$

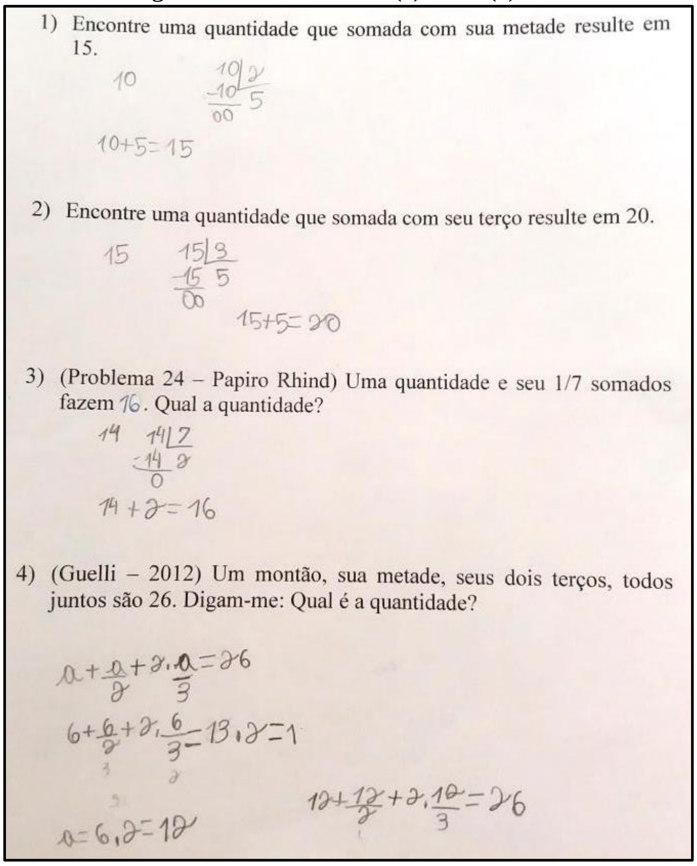
$12+\frac{12}{2}+\frac{2\cdot 12}{3}=26$

PARA A = 12

Fonte- Registro do(a) aluno(a)

Na atividade apresentada na imagem a seguir, notamos que o(a) aluno(a) resolveu os três primeiros problemas de forma correta, mas sem aplicar o método da "Falsa Posição". Ele(a) resolveu apenas por tentativa, entretanto, no último problema este(a) aluno(a) aplicou o método da "Falsa Posição" de forma correta e encontrou o valor procurado. Dessa forma, é possível levantar a hipótese de que, nos três primeiros problemas, esse(a) aluno(a) não sentiu a necessidade de utilizar o método estudado, mas no último sim, o que pode indicar tanto a utilidade desse método para resolver determinados problemas, quanto a proximidade desse modo de resolução com formas associadas ao cálculo mental. Por isso, ainda que o(a) aluno(a) possua conhecimento de um método, isso não o impede de continuar resolvendo mentalmente, pois o método foi apresentado como outra forma de resolver um problema que se reduza a resolução de uma equação do primeiro grau.

Figura 13 - Atividade do(a) aluno(a) B19


1) Encontre uma quantidade que somada com sua metade resulte em 15.

10

$10 + 5 = 15$

2) Encontre uma quantidade que somada com seu terço resulte em 20.

15

$15 + 5 = 20$

3) (Problema 24 – Papiro Rhind) Uma quantidade e seu 1/7 somados fazem 16. Qual a quantidade?

14

$14 + 2 = 16$

4) (Guelli – 2012) Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Digam-me: Qual é a quantidade?

$a + \frac{a}{2} + 2 \cdot \frac{a}{3} = 26$

$6 + \frac{6}{2} + 2 \cdot \frac{6}{3} = 13 \cdot 2 = 1$

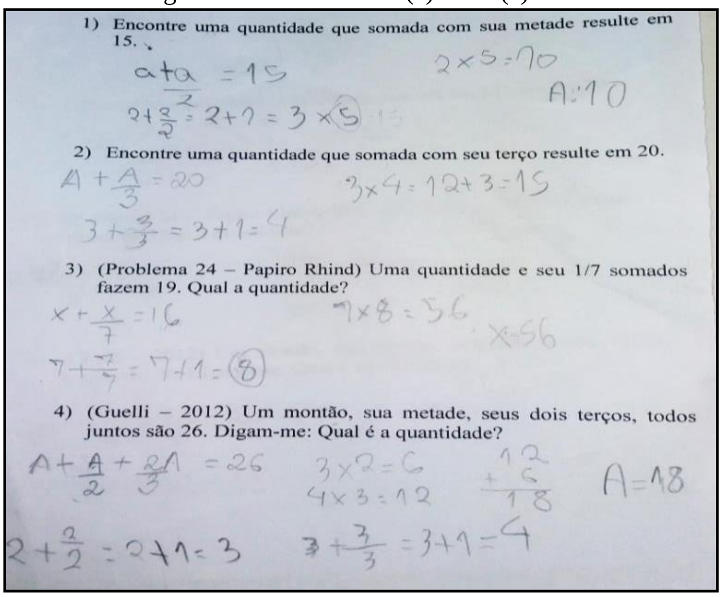
$a = 6 \cdot 2 = 12$

$12 + \frac{12}{2} + 2 \cdot \frac{12}{3} = 26$

Fonte – Registro do(a) aluno(a)

Na imagem a seguir apresentamos a atividade de um(a) aluno que aplicou o método da "Falsa posição" mas errou ao fazer as contas para ajustar o valor e encontrar o valor procurado.

Figura 14 - Atividade do(a) aluno(a) A26


1) Encontre uma quantidade que somada com sua metade resulte em 15.

$a + \frac{a}{2} = 15$

$2 + \frac{2}{2} = 2 + 1 = 3 \times 5$

$2 \times 5 = 10$

A: 10

2) Encontre uma quantidade que somada com seu terço resulte em 20.

$A + \frac{A}{3} = 20$

$3 + \frac{3}{3} = 3 + 1 = 4$

$3 \times 4 = 12 + 3 = 15$

3) (Problema 24 – Papiro Rhind) Uma quantidade e seu 1/7 somados fazem 19. Qual a quantidade?

$x + \frac{x}{7} = 16$

$7 + \frac{7}{7} = 7 + 1 = 8$

$7 \times 8 = 56$

$x: 56$

4) (Guelli – 2012) Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Digam-me: Qual é a quantidade?

$A + \frac{A}{2} + \frac{2A}{3} = 26$

$2 + \frac{2}{2} = 2 + 1 = 3$

$3 + \frac{3}{3} = 3 + 1 = 4$

$3 \times 2 = 6$

$4 \times 3 = 12$

$12 + 6 = 18$

A = 18

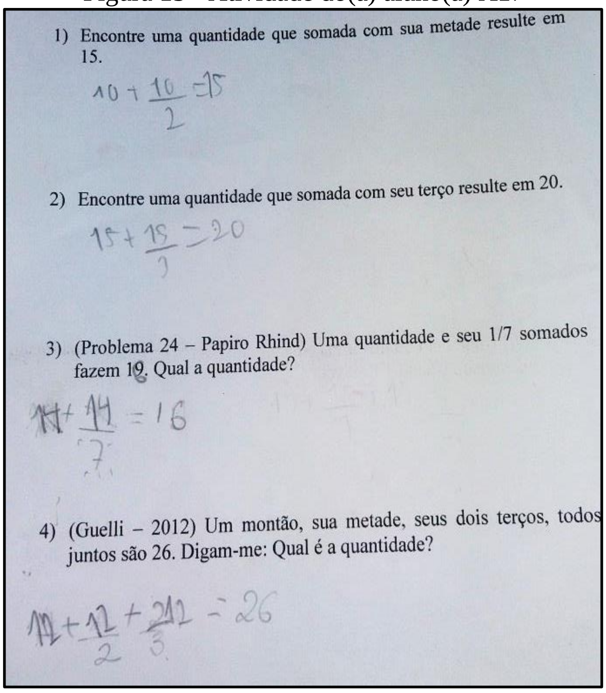
Fonte – Registro do(a) aluno(a)

Nesta produção, é possível observar que o(a) aluno(a) resolveu corretamente os problemas 1 e 2, mas no terceiro ele(a), ao invés de multiplicar a falsa posição 7 pela razão 2 (entre o resultado esperado e o resultado encontrado), multiplicou a falsa posição 7 pelo resultado encontrado 8. Este(a) aluno(a) poderia ter verificado que resposta encontrada, 56, estava incorreta, ao substituir esse valor na equação e verificar que este não tornava a igualdade verdadeira, porém ainda não percebeu esta necessidade.

Na resolução do último problema proposto, notamos que o(a) aluno(a) soube transformar para uma linguagem algébrica de forma correta, mas pelo fato do problema contar com duas frações, esse(a) aluno(a) aplicou o método da “Falsa Posição” duas vezes, ou seja, uma para cada denominador, ao invés de tomar como falsa posição um valor que fosse divisível por ambos, para assim poder encontrar o valor procurado, ocasionando o erro, já que ao proceder assim este(a) não conseguiu aplicar a proporção entre o valor encontrado, no caso deste(a) aluno(a) 3 e 4, com o valor esperado que era 26.

Na imagem a seguir apresentamos a atividade de um(a) aluno(a) que apenas expôs o valor que resolvia o problema, sem deixar os calculos que o(a) levaram a chegar em tal valor.

Figura 15 - Atividade do(a) aluno(a) A17


1) Encontre uma quantidade que somada com sua metade resulte em 15.

$10 + \frac{10}{2} = 15$

2) Encontre uma quantidade que somada com seu terço resulte em 20.

$15 + \frac{15}{3} = 20$

3) (Problema 24 – Papiro Rhind) Uma quantidade e seu 1/7 somados fazem 19. Qual a quantidade?

$14 + \frac{14}{7} = 16$

4) (Guelli – 2012) Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Digam-me: Qual é a quantidade?

$12 + \frac{12}{2} + \frac{212}{3} = 26$

Fonte – Registro do(a) aluno(a)

De modo geral, ao analisar as atividades realizadas pelos(as) alunos(as), observamos que a maioria soube aplicar o método da Falsa Posição para encontrar o valor desconhecido, resolvendo assim a equação. Dessa forma, é possível inferir que o resgate desse método histórico foi capaz de propiciar aos(as) estudantes uma forma diferente de pensar a resolução de uma equação do primeiro grau, proporcionando uma compreensão acerca do significado da resolução deste tipo de equação, ou seja, encontrar um valor que torna a igualdade verdadeira. Ao testar um valor, o(a) aluno(a) primeiro era levado(a) a verificar se aquele valor resolvia ou não a equação, caso a resposta fosse negativa, este(a) ajustava esse valor, com o objetivo de obter outro valor que quando substituído na equação tornasse a igualdade verdadeira.

Sendo assim, entendemos que a utilização dessa interpretação do método histórico da “Falsa Posição”, ou seja, testar um valor não aleatório, já que se acredita que a escolha desse número tenha o intuito de facilitar os cálculos, e em seguida, se não resultar no valor esperado, fazer alguns ajustes de modo a encontrar o valor procurado, pode propiciar um maior significado quanto ao que seria resolver uma equação. Isso ressalta a importância de se fazer uso da HM para a aprendizagem de conceitos matemáticos, visto que este método histórico permite aos alunos(as) compreender os processos algébricos, se aproximando de seu próprio modo de pensar aritmeticamente.

Assim, o trabalho com os problemas históricos e com o método da “Falsa Posição” possibilitou uma transição da aritmética para álgebra sem muitas turbulências, já que os(as) alunos(as), ao verificarem os valores escolhidos, voltavam a trabalhar com expressões numéricas que já haviam estudado, possibilitando uma interação das novas ideias com as ideias já existentes. Esse movimento permitiu aos(as) alunos(as) construir significados sobre a resolução de uma equação do primeiro grau.

Gonçalves (2011, p. 191) identificou, ao apresentar o método da “Falsa Posição” para resolver equações do primeiro grau com uma incógnita, que os(as) alunos(as) “[...] que não entenderam a resolução de equações pelo método algébrico, acharam esse método [falsa posição] um “máximo”, pois era uma alternativa a um método que lhes parecia muito difícil” e ainda constatou, ao analisar as opiniões dos(as) estudantes com relação a esse novo modo de resolver equações, que os(as) alunos(as)

> [...] que costumavam revelar mais dificuldades na resolução algébrica das equações foram os que opinaram mais favoravelmente. Este facto é compreensível uma vez que os alunos que já sabiam resolver pelo método actual acharam que esta nova regra só vinha complicar e,

> como já tinham compreendido a resolução das equações, não se mostraram tão receptivos para a aprendizagem desta nova regra. Por outro lado, os alunos que revelavam mais dificuldades para resolver uma equação pelo método ensinado actualmente acharam que este método vinha resolver o seu problema pois representava uma alternativa a um método que lhes parecia muito complicado (GONÇALVES, 2011, p. 192).

Dessa forma, levando em consideração os resultados obtidos por Gonçalves (2011), ressaltamos a possibilidade do uso do método da "Falsa Posição" para uma abordagem inicial da resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita, pois assim todos(as) alunos(as) terão a oportunidade de conhecer esse método que pode se configurar como alternativo, além de entendermos que esse método auxilia o(a) aluno(a) a compreender o que é resolver uma equação e interpretar a solução obtida.

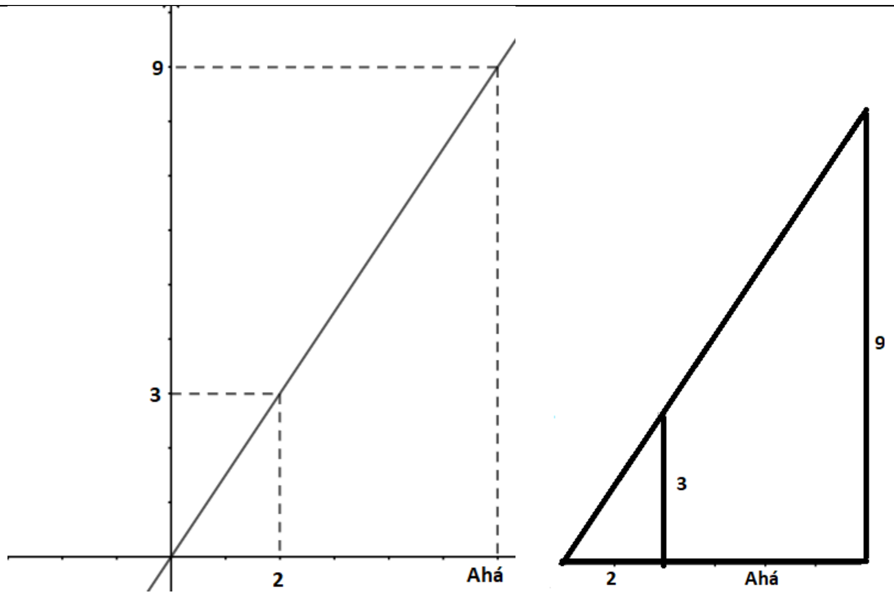
Dando continuidade às atividades elaboradas, propusemos a resolução do problema "Metade de uma quantidade mais seis resulta em oito. Qual é a quantidade?". Notamos que os(as) alunos(as) não tiveram dificuldade em resolver por tentativa e erro, encontrando como resposta a quantidade 4, entretanto solicitamos que tentassem resolver aplicando os passos do método da "Falsa Posição", ou seja, que testassem um valor que tirasse a fração, no caso o dois, e em seguida ajustassem-no, para encontrar a quantidade procurada.

Ao tentarem resolver pelo método da "Falsa Posição" alguns alunos(as) exclamavam não ser possível. Sendo assim, ao socializarmos, aplicando o método passo a passo, discutimos com os(as) alunos(as) que realmente esse problema não poderia ser resolvido, da forma como estava, utilizando o método da "Falsa Posição", pois ao testarmos a quantidade dois, que "tirava" a fração, o resultado seria 7, para o ajustarmos teríamos que multiplicar a falsa posição 2 por $\frac{8}{7}$, o novo valor seria $\frac{16}{7}$, mas esse não resolve a equação, pois, $\frac{\frac{16}{7}}{2} + 6 = \frac{8}{7} + 6 = \frac{50}{7}$ que não é o valor esperado, a saber 8.

Dessa forma, concluímos com os(as) alunos(as) que o método da "Falsa Posição" não pode ser utilizado de forma "direta" para todo tipo de equação. Sabemos que o método poderia ser utilizado se algumas modificações fossem realizadas para deixar a equação no padrão ($ax = b$), mas não achamos viável discutir isso com os(as) alunos(as), visto que seria exigido um aprofundamento além das suas necessidades para aquele momento.

Destacamos, como já apresentado, que o método da "Falsa Posição" consiste em adotar uma solução provisória, que em seguida será modificada através de um raciocínio envolvendo proporções, o que mostra a possibilidade de retomar esse método em outros momentos, segundo Medeiros e Medeiros (2004) esta característica do método apresenta algumas semelhanças com "[...] certas soluções adotadas em alguns problemas geométricos envolvendo relações de semelhança" (p. 553), os autores ainda apontam que é possível observar aspectos desse método nos processos iterativos utilizados no cálculo numérico, já que é baseado em "[...] uma repetição de várias tentativas, no qual adotamos uma sequência de operações em que o objeto de cada uma é o resultado da que a precede" (p. 555).

Apresentamos a seguir a possibilidade de utilizar aspectos desse método para explorar a ideia de linearidade da função do primeiro grau, já que os(as) alunos(as) poderiam perceber que para cada valor assumido como solução provisória (valores no eixo x) irá resultar em um valor distinto (valores no eixo y), e que com esses é possível construir o gráfico de uma função linear, que é uma reta. Como exemplo, tomemos o problema "Uma quantidade e sua metade somadas fazem 9. Qual a quantidade?" que pode ser visto como a função $y = x + \frac{x}{2}$, ao assumirmos um valor para x encontramos um valor em y relacionado com o mesmo, seja $x = 2 => y = 2 + 1 = 3$. A seguir apresentamos essa representação nos eixos cartesianos e na geometria plana, mostrando, dessa forma, a ideia de usar uma proporção para resolver o problema.



$$\frac{2}{Ahá} = \frac{3}{9} => 3.Ahá = 2.9 => 3.Ahá = 18 => Ahá = \frac{18}{3} => Ahá = 6$$

Dessa forma, ressaltamos a importância e a possibilidade de utilizar esse método em outros momentos do ensino. A seguir, expomos como o método da “Inversão” dos hindus foi inserido no conjunto de atividades elaboradas e como se deu a sua implementação com os(as) alunos(as).

- **ETAPA 3** – Método da Inversão utilizado pelos hindus

Com o intuito de auxiliar a compreensão das operações inversas, as quais seriam utilizadas ao trabalharmos com o princípio do equilíbrio, utilizando como recurso visual a balança de dois pratos, apresentamos aos(as) estudantes o método da “Inversão” empregado pelos antigos hindus. Ressaltamos que a ideia de incluir este método em nosso conjunto de atividades surgiu após o estudo relacionado ao uso da História da Matemática na apresentação do tópico reservado à resolução de equações do primeiro grau nos livros didáticos. De modo especial, destacamos o livro intitulado *Praticando Matemática* dos autores Andrini e Vasconcelos (2015), que ao final do capítulo que apresentava o conceito de resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita, abordava esse método em um tópico intitulado “Seção Livre”. Essa seção é exposta após a apresentação do princípio do equilíbrio com o auxílio da balança de dois pratos.

Diferentemente da ordem exposta no livro, que apresenta inicialmente a resolução dessas equações utilizando o princípio do equilíbrio com o auxílio da balança de dois pratos e, após a proposta de vários exercícios, apresenta em uma seção a parte o método da “Inversão”; fizemos uso deste método antes da apresentação da resolução de equação do primeiro grau com uma incógnita pelo princípio do equilíbrio da balança.

O desenvolvimento das atividades elaboradas na Etapa 3 ocorreu no dia 25 de setembro com duração de duas horas-aula. Inicialmente, comentamos com os(as) alunos(as) que iriamos estudar outro método histórico, utilizado pelos hindus, que tinham a prática de escrever os problemas matemáticos em uma linguagem poética e os resolviam utilizando tanto o método da “Falsa Posição”, já estudado, como o método da “Inversão”, no qual se trabalha de traz para frente invertendo as operações.

Em seguida iniciamos a discussão sobre como tal método funciona a partir do problema apresentado a seguir.

“Oh bela donzela com olhos radiantes! Diz-me, uma vez que compreendes o método da inversão, qual é o número que multiplicado por 3, aumentado em 21, dividido por 7, diminuído de 5 dá o resultado final 10?” (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015, p. 221)

Inicialmente, relembramos as operações inversas, ou seja, que a subtração é o inverso da adição e que a multiplicação é o inverso da divisão e vice-versa. Dessa forma, expusemos que o método funciona a partir do valor final dado nos problemas, e que a partir dele, iríamos fazendo as operações indicadas, mas ao contrário, ou seja, trabalhando de trás para frente, invertendo as operações.

De modo geral, observamos que os(as) alunos(as) conseguiram entender a ideia por trás de tal método, pois resolveram as atividades propostas com certa facilidade. Sendo assim, entendemos que ao utilizar esse método histórico foi possível propiciar aos(as) estudantes, como afirma Mendes (2006), o desenvolvimento de suas habilidades matemáticas, já que a partir dessa experiência resgatada da história os(as) alunos(as) puderam explorar as operações inversas.

Após a socialização, na qual os(as) estudantes foram à lousa para apresentar e explicar o raciocínio utilizado para resolver os problemas propostos, foi sugerida a resolução de mais dois problemas que também exploravam as operações inversas e poderiam ser resolvidos pelo método da inversão.

Do total de 43 alunos(as)[26] que resolveram estes problemas, 40 alunos(as), chegaram a resposta correta no primeiro problema, destes, 35 empregaram o método realizando todas as operações. Os(as) demais (cinco alunos(as)) apresentaram apenas a resposta, não deixando os cálculos na atividade entregue. Sendo assim, não foi possível analisar a forma como esses(as) resolveram o problema, e somente três alunos(as) erraram cálculos ao empregar o método.

No segundo problema, 37 alunos(as) encontraram o número procurado, destes, 33 empregaram o método de forma correta e os(as) demais (quatro alunos(as)) não registraram de que forma resolveram o problema, e, por fim, seis alunos(as) erraram.

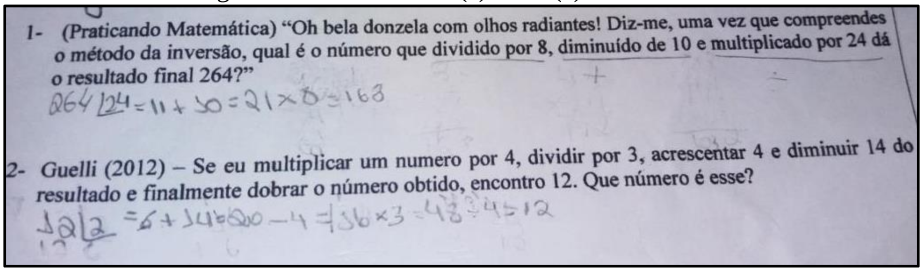
Na imagem a seguir, apresentamos o registro de um(a) aluno(a) que organizou os cálculos de maneira linear, esta utilizada também na socialização das resoluções dos problemas com os(as) discentes. Ressaltamos que a solução da forma linear, foi, em nosso entender, uma maneira de propiciar aos(as) estudantes uma melhor visualização de como o método funcionava, ou seja, que a partir do resultado de cada operação indicada iriámos realizar a outra operação.

Devido ao fato do raciocínio matemático estar correto, não nos atentamos ao fato de que essa forma de explicitar os cálculos não está representada de forma

[26] Nesse dia faltaram 26 alunos(as), ressaltamos que era um dia chuvoso, o que pode ter sido o motivo das faltas.

matematicamente correta, já que, o sinal da igualdade está sendo utilizado de forma inadequada, pois relaciona expressões que não são equivalentes. Dessa forma, entendemos a necessidade de em um trabalho futuro discutir com os(as) alunos(as) formas de representação que são matematicamente corretas.

Figura 16 - Atividade do(a) aluno(a) A17


1- (Praticando Matemática) "Oh bela donzela com olhos radiantes! Diz-me, uma vez que compreendes o método da inversão, qual é o número que dividido por 8, diminuído de 10 e multiplicado por 24 dá o resultado final 264?"

264|24 = 11 + 10 = 21 × 8 = 168

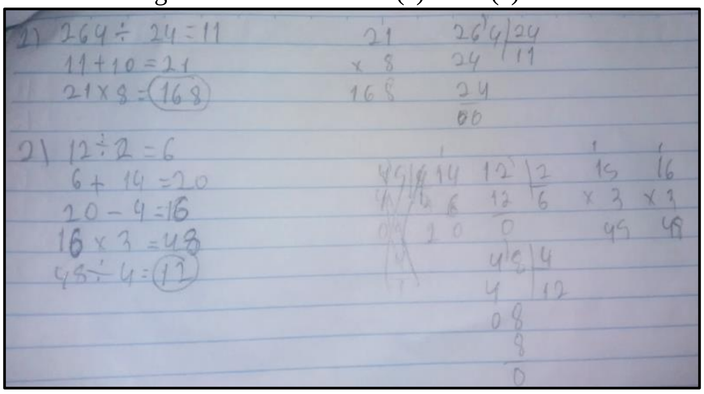
2- Guelli (2012) – Se eu multiplicar um numero por 4, dividir por 3, acrescentar 4 e diminuir 14 do resultado e finalmente dobrar o número obtido, encontro 12. Que número é esse?

12|2 = 6 + 14 = 20 − 4 = 16 × 3 = 48 ÷ 4 = 12

Fonte – Registro do(a) aluno(a)

Nas duas imagens a seguir, expomos os registros de alunos(as) que empregaram o método de forma correta, mas que realizaram todos os cálculos de forma separada.

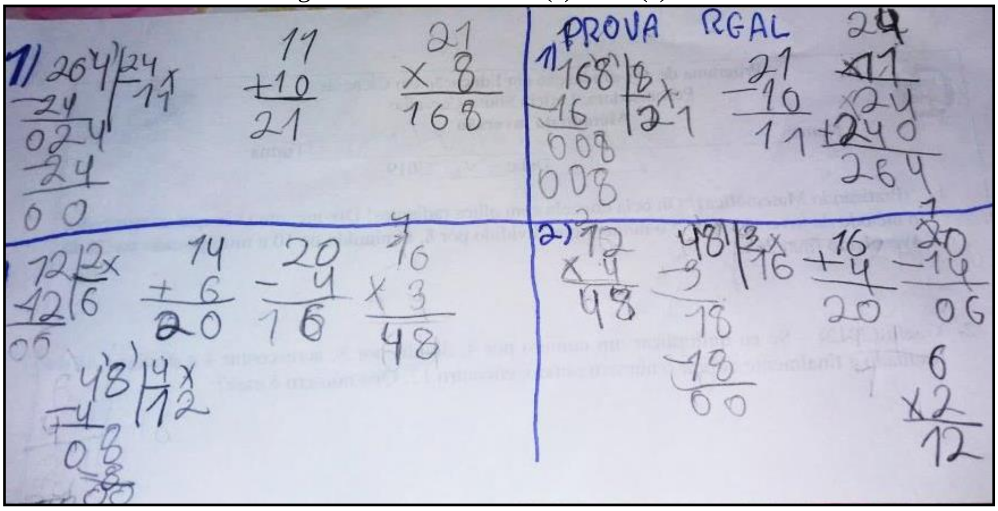
Figura 17 - Atividade do(a) aluno(a) B34



Fonte: Registro do(a) aluno(a)

A seguir, expomos os registro de um(a) aluno(a) que realizou todos os cálculos de forma separada, assim como exposto na imagem anterior, mas que os organizou de forma diferente; encontrando o valor procurado e posteriormente fez o caminho inverso para "tirar a prova", ou seja, realizar a verificação se aquele valor encontrado realmente poderia resolver o problema. Ressaltamos que, durante a socialização dos problemas, os(as) alunos(as) foram instigados a fazer esse procedimento para conferir se realmente o valor encontrado resolvia o problema.

Figura 18 – Atividade do(a) aluno(a) A20



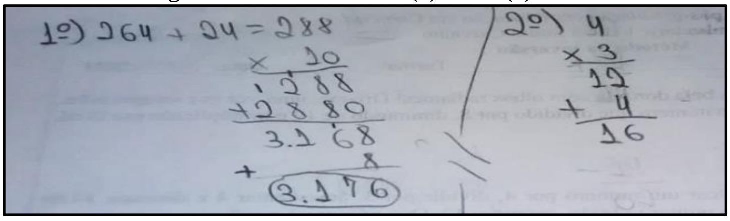
Fonte: Registro do(a) aluno(a)

Dessa forma, ressaltamos a importância de promover a autonomia do(a) aluno(a) no momento de organizar os seus registros, já que estes(as) podem se sentir mais confiantes ao resolver o problema da forma como entendem ser mais fácil, ao invés de por meio de uma forma de resolução imposta.

Como é possível observar nas atividades, os(as) alunos(as) resolveram os problemas utilizando as operações inversas, mas de formas diferentes. Alguns fizeram os cálculos separadamente e outros(as) preferiram montar as operações em linha reta. Ressaltamos que a forma na qual os(as) alunos(as) organizaram as operações não interfere na aplicação do método, já que o objetivo dessa atividade era trabalhar com as operações inversas.

Na imagem a seguir expomos a atividade de um(a) aluno(a) que não conseguiu empregar o método de forma correta. Na primeira questão, ao invés de dividir 264 por 24 esse(a) aluno(a) somou, depois quando era preciso somar 10 ele(a) multiplicou por 10 (realizando esse cálculo de forma errada), e por fim ao invés de multiplicar por 8 ele(a) somou 8. O caminho adotado nos permite conjecturar que esse(a) aluno(a) ainda não domina o conceito de operação inversa, apesar de todo trabalho realizado ao relembrar esses conceitos. Assim, podemos inferir que não há método perfeito, pois diferentes alunos(as) terão diferentes dificuldades, mas a variação de abordagens pode auxiliar no processo de compreensão.

Figura 19 - Atividade do(a) aluno(a) A10



Fonte – Registro do(a) aluno(a)

Para a realização dessa etapa do conjunto de atividades, havíamos planejado o uso de três horas-aula, mas como os(as) alunos(as), em sua maioria, resolveram as atividades propostas em um tempo menor do que o previsto, foram utilizadas apenas duas aulas.

Enfatizamos a relevância da utilização dos métodos históricos abordados para o ensino da resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita, pois, segundo Araújo (2008, p. 342), a História, de modo geral, "[...] nos mostra que o pensamento algébrico manifestou-se antes mesmo de qualquer formalização", fato que diferentemente de muitas abordagens presentes nos livros didáticos e do ensino tradicional que geralmente "[...] privilegiam a técnica de cálculo com letras que, quase sempre, são desprovidas de significado" (ARAÚJO, 2008, p. 342).

Nessa mesma perspectiva, Roque (2012) aponta que um dos fatores que contribuem para que a matemática seja considerada abstrata

> [...] reside na forma como a disciplina é ensinada, fazendo-se uso muitas vezes da mesma ordem de exposição presente nos textos matemáticos. Ou seja, em vez de partimos do modo como um conceito matemático foi desenvolvido, mostrando as perguntas às quais ele responde, tomamos esse conceito como algo pronto (ROQUE, 2012p. 19).

Destacamos que, segundo Brolezzi, (1991) "[...] os estudos históricos deixam muito clara a distinção entre a forma lógica inicial, presentes nas origens da Matemática, e sua posterior paulatina sistematização" (p. 66). Desse modo, ao apresentar os métodos históricos na resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita, estamos, de alguma forma, tentando explicitar a lógica inicial na qual estes eram utilizados, as questões e como estas eram respondidas, expondo, assim, que a maioria dos tópicos abordados hoje na escola passou por um processo de sistematização até tomar a forma que tem atualmente.

De modo geral, a maior parte dos(as) alunos(as) conseguiu aplicar esse método e resolver os problemas propostos. Trabalhamos com as operações inversas, que seriam utilizadas nas atividades da Etapa 4, além de reforçar o que é resolver uma equação do primeiro grau com uma incógnita, ou seja, encontrar um valor que, substituído no lugar da incógnita torna a sentença matemática verdadeira. Sendo assim, entendemos que esse método auxiliou na etapa seguinte, momento no qual abordamos o método de resolução pelo princípio do equilíbrio, utilizando como recurso visual a balança de dois pratos, pois esse método utilizará, de forma implícita, as operações inversas no processo de isolar a incógnita de um lado da igualdade para encontrar o seu valor.

- **ETAPA 4 –** Resolução de equação do primeiro grau com uma incógnita pelo princípio do equilíbrio

Destacamos que nesta etapa não previmos a realização de atividades que utilizam a HM. Esta ideia de que nem todas as atividades de um conjunto de atividades precisam tratar de questões relativas à HM para ser considerada uma proposta que se utiliza da HM, está em consonância com as propostas didáticas analisadas por Omena (2015), que ao estudar teses e dissertações que apresentam propostas didáticas que se utilizam da HM para o ensino de matemática no nível médio identificou que cerca de 30% das atividades destas propostas não abordavam a HM.

Dessa forma, concordamos com Chaquiam (2017) que a utilização de aspectos da História da Matemática, combinados com outros recursos e abordagens, pode contribuir com a melhoria do ensino e da aprendizagem da matemática, pois [...] emerge como uma possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada às outras disciplinas, mais agradável, mais humanizada (CHAQUIAM, 2017, p. 14).

Sendo assim, levando em consideração a ponderação de Chaquiam (2017) e o fato de que nas propostas didáticas encontradas em dissertações e teses, nem todas as atividades continham aspectos relacionados à HM. Entendemos que para uma melhor aprendizagem da resolução de equação do primeiro grau, seria relevante utilizar mais de uma abordagem. Neste caso, ao trabalhar com o princípio do equilíbrio, utilizando como recurso para visualização uma balança de dois pratos, as atividades elaboradas não possuíam uma abordagem histórica, mas houve uma preocupação em apresentar aos(as) estudantes uma ligação entre os métodos históricos trabalhados e o princípio da equivalência.

Dessa forma, as atividades desta etapa, assim com as atividades da Etapa 1, não fizeram parte da análise. Apresentamos apenas uma breve descrição de como foram abordadas as ligações entre os métodos históricos estudados e o princípio do equilíbrio utilizando a balança de dois pratos como um recurso para facilitar a visualização.

O desenvolvimento das atividades elaboradas para a Etapa 4 ocorreu nos dias 26 de setembro e 02 de outubro, com duração de 4 horas-aula. Em um primeiro momento, resolvemos o problema: "Uma quantidade mais a sua metade equivale a 6. Qual é a quantidade?" de duas formas distintas e simultâneas, a saber: utilizando o método da "Falsa Posição" e o método do equilíbrio da balança, registrando os dados na lousa para que os(as) alunos(as) pudessem acompanhar o que estava sendo realizado.

Juntamente com os(as) alunos(as) escolhemos, com base nos conhecimentos do método da falsa posição, o valor 2 para o "falso Ahá", e ao mesmo tempo, colocamos em um lado da balança um peso de 6 e, do outro lado, os pesos de um e dois que constituíam resposta para a falsa posição, sendo assim os(as) alunos(as) puderam perceber que a balança não estava equilibrada.

Retornando ao método da "Falsa Posição", tínhamos que com o "falso Ahá" obtínhamos o valor 3, para chegarmos no 6 solicitado no problema, era preciso multiplicá-lo por dois. Dessa forma, precisaríamos multiplicar o "falso Ahá" por dois, obtendo um novo valor o 4. Com isso, trocamos os pesos de um lado da balança por um peso de quatro e outro de dois, resultados do novo "Ahá"; dessa forma, os(as) alunos(as) observaram que a balança ficou em equilíbrio.

Sendo assim, utilizamos a balança de dois pratos para ilustrar o método da "Falsa Posição", e trabalhar com a questão do equilíbrio, ou seja, quando escolhemos a falsa posição igual a dois, notamos que a balança ficou em desequilíbrio, logo essa não seria a solução, tornando-se necessário o ajuste dos valores, colocando na balança os pesos correspondentes. Dessa forma os(as) alunos(as) puderam constatar que o valor quatro era a resposta correta, uma vez que com esse valor a balança se manteve em equilíbrio.

Barbeiro (2012, p. 7), ao estudar os métodos utilizados pelos(as) alunos(as) na resolução de equações do primeiro grau identificados por Kieran (1992), aponta que, segundo esta autora, os(as) estudantes que utilizam substituições por tentativa e erro para a resolução dessas equações "[...] têm mais desenvolvida a noção de equilíbrio entre os lados, direito e esquerdo, da equação e do papel da equivalência do sinal de igual, do que os alunos que não adotaram esse método".

De modo semelhante, Fernandes (2011, p. 15) argumenta que os(as) alunos(as) "[...] que são incentivados a usar inicialmente o método de tentativa e erro desenvolvem uma melhor noção de equivalência entre os dois lados da equação e são mais tarde bem sucedidos na aplicação de métodos mais formais". Dessa forma podemos inferir que o fato de trabalharmos inicialmente com o método da "Falsa Posição" pode ter tornado mais fácil para os(as) alunos(as) o entendimento da questão da equivalência entre os dois membros da equação.

Em seguida, propusemos mais alguns exemplos e exercícios para trabalhar com a questão do equilíbrio e, durante a socialização destes, relembramos as operações inversas que haviam sido anteriormente exploradas ao trabalharmos com o método da "Inversão" dos antigos hindus. Sendo assim, entendemos que tanto o método da "Falsa Posição" quanto o método da "Inversão", puderam fornecer uma compreensão de determinados conceitos que geralmente são trabalhados tendo como base apenas o princípio do equilíbrio, como as operações inversas e o significado de resolver uma equação do primeiro grau com uma incógnita.

Ao utilizarmos a balança de dois pratos, entendemos que trabalhamos com a habilidade (EF06MA14) que expõe a necessidade de "[...] Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas" (BRASIL, 2018, p. 301), pois os(as) alunos(as) puderam visualizar que modificando da mesma forma ambos os lados da balança, esta permanece em equilíbrio, e o mesmo acontece com a equação, sendo que se modificarmos da mesma forma ambos os lados da igualdade, esta permanece verdadeira.

Ressaltamos que segundo Ponte, Branco e Matos (2009), a utilização da balança de dois pratos pode facilitar a compressão da operação de eliminar termos de ambos os lados da igualdade ou multiplicar ambos, mas esses autores destacam que é preciso tomar cuidado com a forma como esse material é utilizado, já que muitos(as) alunos(as) nunca viram uma balança desse tipo. Foi nessa perspectiva que resolvemos confeccionar uma balança, apresentada na figura a seguir, e levar para sala de aula. Assim os(as) alunos(as) teriam a possibilidade de observar como ela funciona, fazer experiências e discutir os resultados.

Figura 20 - Balança utilizada nas atividades da Etapa 4

Fonte – Produzida pela pesquisadora

Após o término das atividades elaboradas para o desenvolvimento desta etapa, retomamos o método da “Falsa Posição” e apresentamos a modificação necessária na equação para que seja possível resolver qualquer equação do primeiro grau pelo método, ou seja, deixar a equação da forma $ax = b$. Dessa forma, foi possível analisar com os(as) alunos(as) que esse método pode ser utilizado para resolver qualquer tipo de problema que se reduza à resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita[27]. Como enfatizado por Medeiros e Medeiros (2004), expusemos para eles que esse “[...] método é sempre valido para equações lineares na forma $ax = b$. Entretanto se tivermos: $ax + d = c$, poderemos subtrair d de ambos os lados da igualdade, tal que: $ax = c - d$ e fazendo $c - d = b$, teremos: $ax = b$" (p. 549).

Sobre essa possibilidade de generalização do método da “Falsa Posição”, Panossian (2014), ao estudar o movimento histórico e lógico das equações, identifica que tal movimento vai desde a

[27] As equações do primeiro grau com uma incógnita podem como $ax = b$. Ao aplicarmos o método da Falsa Posição, seguimos alguns passos. Suponhamos que a falsa posição escolhida x_0, não funcione, então teremos que $ax_0 = c$. Sendo assim temos que ajustar os valores, multiplicando a falsa posição x_0 pela razão $\frac{b}{c}$ para encontramos o valor que resolve a equação. De fato o novo valor $x_0\left(\frac{b}{c}\right)$ resolve a equação, pois, ao multiplicarmos a equação pela razão temos: $ax_0\left(\frac{b}{c}\right) = \left(\frac{b}{c}\right)c$, ou seja, $ax_0\left(\frac{b}{c}\right) = b$, portanto $x = x_0\left(\frac{b}{c}\right)$ é a raiz da equação (MEDEIROS; MEDEIROS, 2004, p. 549).

> [...] necessidade de resolver problemas específicos do cotidiano e encontrar soluções até ser tratada como um objeto matemático para o qual se desenvolvem métodos gerais. Observa-se então que as equações são instrumentos da matemática, constantemente aperfeiçoados e desenvolvidos na experiência histórica humana (PANOSSIAN, 2014, p. 140).

Sendo assim, expusemos que o método da “Falsa Posição” pode ser utilizado para resolver qualquer tipo de equação do primeiro grau com uma incógnita e ressaltamos que não há indícios que relevem se os antigos egípcios conheciam essa possibilidade de generalização.

Posteriormente, retomamos alguns problemas resolvidos pelo método da “Inversão” e mostramos que estes, assim como os problemas que resolvemos pelo método da “Falsa Posição” (ao traduzirmos para uma linguagem algébrica) podem ser resolvidos utilizando o princípio do equilíbrio, ou seja, isolando a incógnita em um dos lados da igualdade.

Para a realização das atividades dessa etapa, havíamos planejado utilizar três horas/aula, no entanto, fez-se necessário utilizar mais uma aula a fim de terminar o desenvolvimento das atividades elaboradas para esta etapa. Isso ocorreu porque nesta etapa, embora não estivesse previsto, aproveitamos a oportunidade para deixar que os(as) alunos(as) explorassem fisicamente a balança de dois pratos, além de retomar os métodos históricos da “Falsa Posição” e o da “Inversão” por meio de alguns problemas resolvidos anteriormente. Isso permitiu estabelecer uma ligação entre os métodos, mostrando que os mesmos problemas podem ser resolvidos também pelo princípio do equilíbrio.

Outro ponto que reforçou a necessidade de utilizar mais uma aula foi o fato de que alguns alunos(as) ainda apresentavam algumas dificuldades em resolver as equações, sendo preciso trabalhar com mais alguns problemas com o intuito de sanar essas dificuldades, relacionadas principalmente com a necessidade de dividir ou multiplicar ambos os membros da equação no processo de isolar a incógnita em um dos lados da igualdade.

Em seguida, iniciamos realização da última etapa do conjunto de atividades, a qual será descrita a seguir.

- **ETAPA 5** – Resolução de equação do primeiro grau livremente

Na Etapa 5 apresentamos aos(as) estudantes uma "linha do tempo" com informações históricas referentes à algumas mudanças ocorridas no simbolismo algébrico e foi proposta a resolução de mais alguns problemas, que envolviam a resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita.

Ao longo das atividades nas etapas anteriores, tentamos evitar o uso das últimas letras do alfabeto para representar as incógnitas ou variáveis, que são comumente utilizadas na abordagem do conceito de equação. Assim, julgamos relevante, nesta etapa, apresentar uma "linha do tempo" com as principais mudanças e personalidades relacionadas ao desenvolvimento do simbolismo matemático, em específico da linguagem algébrica, com o intuito de expor aos(as) estudantes que

> [...] foi necessário muito tempo para que mudanças ocorressem. Com a nova visão de mundo que imperou no Renascimento, o movimento passou a fazer parte da vida das pessoas; tornava-se necessário criar algo que expressasse a fluência, algo que, mesmo sendo numérico, não indicasse um número particular. Como os numerais indicavam números particulares, a variação não poderia ser expressa por um número (ARAÚJO, 2008, p. 340).

Moura e Sousa (2005) argumentam que a lógica formal da álgebra foi construída a partir da necessidade dos estudiosos, já que,

> [...] em nenhum momento, os historiadores nos dizem que os estudiosos se fechavam em seus aposentos para pensar uma síntese de uma escrita. A síntese da escrita foi feita a partir das necessidades presentes nas diversas civilizações, nos diversos momentos, sem desconsiderar os estudos relacionados a Teoria dos Números e com a Geometria. (MOURA; SOUSA, 2005, p. 33).

Sendo assim, entendemos que ao apresentar algumas informações históricas referentes à linguagem matemática, foi possível mostrar aos(as) estudantes que a linguagem matemática simbólica que conhecemos atualmente teve seu desenvolvimento gradual, nem sempre de forma linear, ou por um grupo determinado de pesquisadores em determinada época, ou que foi aceita por todos ao mesmo tempo.

As atividades da Etapa 5 ocorreram no período de 03 a 10 de outubro com duração de seis horas-aula. Iniciamos essa etapa utilizando uma apresentação em *slides*, na qual expusemos algumas informações históricas relacionadas ao desenvolvimento da linguagem simbólica.

Em um primeiro momento, discutimos com os(as) alunos(as) sobre os tipos de linguagem que eles(as) conheciam e apresentamos algumas como linguagem corporal, artística, musical, entre outras. Em seguida, citamos algumas linguagens da Matemática como a linguagem geométrica, gráfica, aritmética e algébrica, realizando o enfoque na linguagem algébrica, por meio da apresentação de alguns exemplos de linguagem que já haviam sido utilizados para representar uma quantidade desconhecida, como o "Ahá" usado pelos antigos egípcios, ou a palavra "coisa" utilizada pelos antigos europeus e árabes.

Posteriormente, apresentamos que a linguagem algébrica pode ser separada em três fases: a retórica, a sincopada e a simbólica, expondo, posteriormente, exemplos de como as expressões matemáticas eram escritas nessas fases. Em seguida, iniciamos a exposição de uma "linha do tempo", na qual apresentamos alguns pontos históricos relacionados a alguns símbolos que usamos hoje. Destacamos que, ao apresentar alguns fatos históricos obedecendo a sua ordem cronológica não implica que defendemos o uso da HM com uma visão linear e sem crítica, mas que esta foi uma forma que encontramos para explicitar essas informações durante o tempo de uma aula, de forma mais compreensível para estudantes do 7º ano do ensino fundamental.

Durante essa discussão, foi possível notar que os(as) alunos(as) se "assustaram" ao perceber que nem sempre os símbolos eram utilizados na matemática, que os números, sinais das operações (+,-,.,/), potências, expressões entre outros eram escritos por extenso e, depois, foram sendo abreviados até chegarmos aos símbolos que hoje usamos de forma inquestionável. Sendo assim, os(as) alunos(as) puderam observar as principais mudanças que ocorreram com alguns símbolos que usamos hoje e conseguiram notar que nem sempre estes se apresentaram assim, ou seja, que esses símbolos foram passando por abreviações e modificações realizadas por diversos matemáticos a fim de facilitar seus estudos.

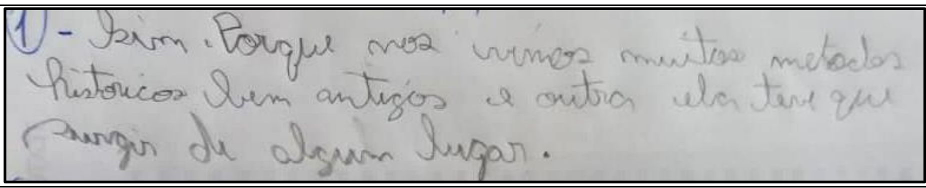
Dessa forma, tornamos possível que os(as) alunos(as) percebessem que, em relação à Álgebra, "[...] a humanidade foi construindo diferentes significados e diferentes linguagens, que foram sendo partilhados e desenvolvidos histórica e socialmente" (SILVA; REZENDE, 2016, p. 394). Na mesma perspectiva, Brolezzi (1991, p. 66), aponta que um dos obstáculos à compreensão da linguagem simbólica da matemática pode estar na sua aparência, por vezes abstrata, podendo ser "[...] a causa frequente de aversão pelo aprendizado da Matemática, chegando inclusive a gerar uma espécie de analfabetismo matemático".

Deste modo, propiciar que os(as) alunos(as) percebam que a Matemática "[...] nem sempre utilizou uma simbologia tão formal, pode contribuir para o entendimento de que houve uma necessidade para que isso acontecesse, pois, como uma linguagem universal, deve estar livre de interpretações" (GIL, 2008, p. 31). Assim, entendemos que a apresentação de aspectos da HM pôde contribuir para mostrar como o "[...] formalismo surge naturalmente em resposta ao refinamento e precisão das ideias e, portanto, capacita o aluno para a compreensão do formalismo por fazer ele pensar e repensar conceitos matemáticos" (FOSSA, 2008, p.13).

Sendo assim, entendemos que a apresentação de algumas informações de cunho histórico a respeito da linguagem matemática possibilitou aos(as) estudantes observar a Matemática ao longo do tempo, como uma construção em resposta a determinadas demandas. Cabe ressaltar que essa "linha do tempo" contava apenas com as contribuições de matemáticos, sendo assim, poderíamos ter explorado o fato de ter somente homens nesta, abordando questões relacionadas ao gênero na Matemática.

Após essas discussões, pedimos aos(as) alunos(as) que respondessem novamente a questão: "A Matemática tem História?". Neste momento, esta questão foi respondida por 49 alunos(as), dos quais 46 afirmaram que sim, a matemática tem história. Muitos reproduziram as mesmas justificativas apresentadas anteriormente, como a Matemática tem História porque é antiga, apresentada por 14 alunos(as), ou alegando que se a Matemática não tivesse História ela não existiria hoje, como apontado por seis alunos(as). 18 alunos(as) apenas disseram que sim, a Matemática tem História, mas não apresentaram uma justificativa para tal asserção, por fim, oito alunos(as) justificaram que a matemática tem história citando os métodos históricos estudados, ou que ela existe há muito tempo e está se "aperfeiçoando", ou que passou por vários períodos, como é possível observar nos excertos apresentados a seguir.

Quadro 15 - Respostas dos(as) alunos(as) a questão "A Matemática tem história?"

Aluno(a)	Excerto
Aluno(a) A27	 1 - Sim. Porque nos vimos muitos metodos historicos bem antigos e outra ela tem que surgir de algum lugar.

Aluno(a) B31	1- Sim, porque a matematica surgiu milhões de anos atrás e ela foi aperfeiçoando mais ainda.
Aluno(a) B14	- Sim, porque ela passou por varios passados.

Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

A justificativa de alguns alunos(as) de que a Matemática está se "aperfeiçoando" pode estar relacionada ao fato de que, em alguns momentos, destacamos as mudanças sofridas pela Matemática, mais especificamente, referentes à sua linguagem, o que pode ter passado a falsa impressão de que a Matemática foi evoluindo de forma natural até chegar ao que conhecemos hoje. Dessa forma, entendemos que a abordagem utilizada foi interessante no sentido de auxiliar os(as) estudantes a perceberem que a matemática é uma construção humana gradual, mas pode não ter sido suficiente para mudar a percepção dos(as) alunos(as) de que a Matemática atual é mais desenvolvida que a Matemática de outras épocas ou que ela se desenvolveu de forma linear.

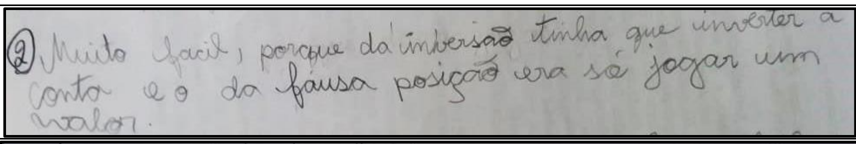
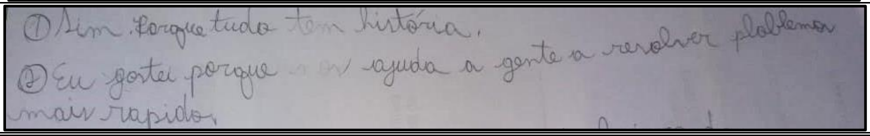
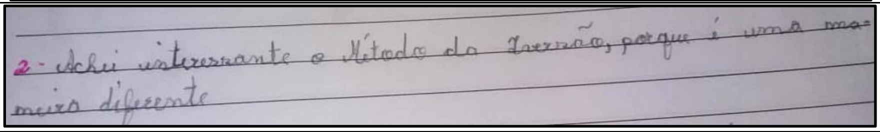
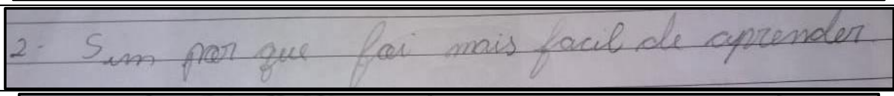
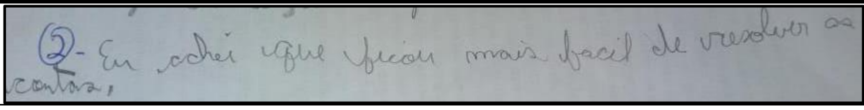
Tal situação possibilitou a conclusão de que para conseguir alterar tais percepções, faz-se necessário que práticas como estas sejam mais frequentes no ensino de matemática. Nossas atividades foram desenvolvidas em um curto espaço de tempo, ao passo que os(as) alunos(as), como já apontado, praticamente não tiveram contatos anteriores com aspectos da HM, sendo assim é possível conjecturarmos que apenas uma intervenção, de forma isolada, no âmbito de determinado conceito, não seja capaz de provocar uma mudança radical de percepção dos(as) alunos(as), estes acostumados a "ver" a Matemática, na maioria das vezes, apenas como uma disciplina constituída por números, contas e problemas para resolver. Na maioria das vezes, eles não têm a possibilidade de observar a Matemática como uma construção humana ao longo do tempo, sem oportunidades para refletir sobre o fato de que ela teve e tem uma razão de existir, e que esta razão, em determinados casos, está relacionada a questões de necessidade cotidiana.

Dessa forma, ressaltamos a relevância de um trabalho contínuo com os aspectos da História da Matemática, de forma que esta perpasse os diversos conceitos da Matemática, de modo a proporcionar aos alunos(as) uma visão mais ampla, histórica e socialmente construída, com relação a Matemática.

Visando captar a opinião dos(as) alunos(as) sobre os métodos históricos utilizados, solicitamos que eles escrevessem sobre os métodos da "Falsa Posição" e da

"Inversão" estudados. Trinta e três alunos(as) apontaram que, com os métodos, tornou-se mais fácil resolver a equação do primeiro grau, ou que tiveram mais conhecimento sobre a Matemática.

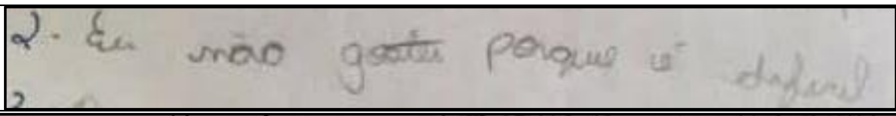
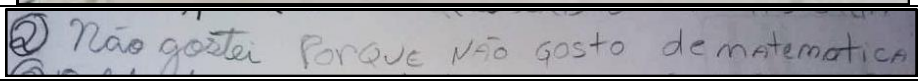
Quadro 16 - Opinião dos(as) alunos(as) sobre os métodos históricos estudados

Aluno(a)	Excerto
Aluno(a) A26	 2 Muito fácil, porque da inbersão tinha que inverter a conta e o da fausa posição era só jogar um valor.
Aluno(a) B19	 1 Sim porque tudo tem história. 2 Eu gostei porque ajuda a gente a resolver plablemas mais rapido.
Aluno(a) A23	 2- Achei interessante o Método da Inversão, porque é uma maneira diferente
Aluno(a) A10	 2- Sim por que foi mais facil de aprender
Aluno(a) A27	 2- Eu achei que ficou mais facil de resolver as contas,

Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

Os(as) demais, 16 alunos(as) apontaram que não gostaram, alegando que acharam mais difícil ou que não gostam de Matemática.

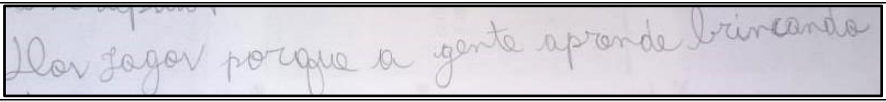
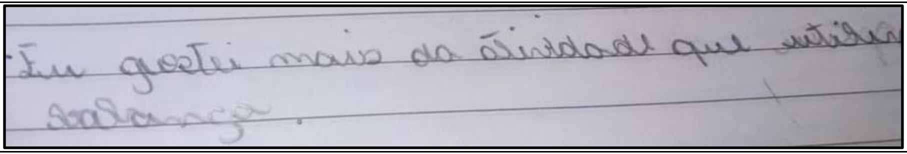
Quadro 17 - Opinião dos(as) alunos(as) sobre os métodos históricos estudados

Aluno(a)	Excerto
Aluno(a) A04	 2- Eu não gostei porque é dificil
Aluno(a) B14	 2 Não gostei porque não gosto de matematica

Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

Sendo assim, podemos observar que nem todos(as) os(as) alunos(as) gostaram de utilizar os métodos históricos para resolver equação do primeiro grau, o que nos leva a refletir que nem sempre a história cumpre o papel de motivar a todos(as) os(as) alunos(as), como já apontado pela literatura. Destacamos que os(as) alunos(as) que alegaram não gostar de matemática, em sua maioria, são os(as) que apresentam dificuldades em Matemática em geral. Assim, cabe ressaltar que nenhuma atividade vai atingir a todos(as) alunos(as) da mesma forma, por isso é tão importante variar as abordagens. Pudemos verificar isso também, pois alguns estudantes apontaram que gostaram mais dos jogos ou das atividades com a balança, que possuem um cunho mais lúdico e prático.

Quadro 18 - Opinião dos(as) alunos(as) sobre os métodos históricos estudados

Aluno(a)	Excerto
Aluno(a) B19	
Aluno(a) B26	

Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

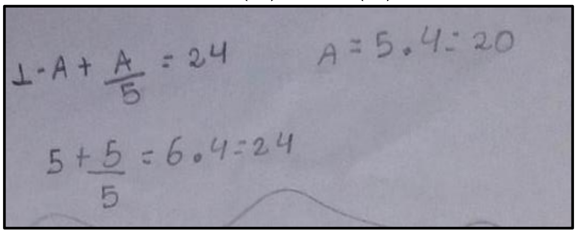
Dessa forma, mais uma vez, ressaltamos a importância de utilizar atividades diferenciadas, ou seja, com variadas abordagens, com o intuito de atender os(as) diferentes alunos(as) e suas diferentes formas de aprender.

Em seguida propusemos uma lista de problemas para que os(as) alunos(as) resolvessem em equipe, deixando que eles(as) próprios(as) escolhessem a forma de resolver, ou seja, optar por quais métodos empregariam para encontrar a solução. Embora todos os problemas devessem ser resolvidos por meio de uma equação do primeiro grau com uma incógnita, alguns eram resolutos mais facilmente por determinado método do que por outro. O intuito de propor essa variedade de problemas foi observar quais as opções de método os(as) alunos(as) tomariam para resolver determinado problema.

Participaram dessa atividade 57 alunos(as) que foram divididos em 24 equipes, formadas por um, dois ou três alunos(as). No primeiro problema, 20 equipes empregaram o método da "Falsa Posição" de forma correta e encontraram o valor procurado, três equipes conseguiram transformar o problema para a linguagem algébrica, mas não resolveram por nenhum método e uma equipe apenas colocou um valor incorreto como resposta, não registrando a forma que chegaram a tal resultado, sendo assim não foi possível verificar como procederam.

Na imagem a seguir, expomos a forma como uma equipe resolveu, aplicando de forma correta o método da "Falsa Posição". Cabe destacar que o enunciado desse problema era semelhante aos problemas trabalhados pelo método da "Falsa Posição", o que pode ter influenciado a opção pelo seu uso para a resolução deste problema em específico. No entanto, para utilizar esse método, em um primeiro momento era necessário transformar o problema para uma linguagem algébrica e, observando o problema na linguagem algébrica, os(as) alunos(as) poderiam ter resolvido de outra forma. Sendo assim, podemos inferir que, para esse problema em particular, a maioria dos(as) alunos(as) preferiu usar o método histórico trabalhado.

Figura 21 - Atividade dos(as) alunos(as) A23 e A25

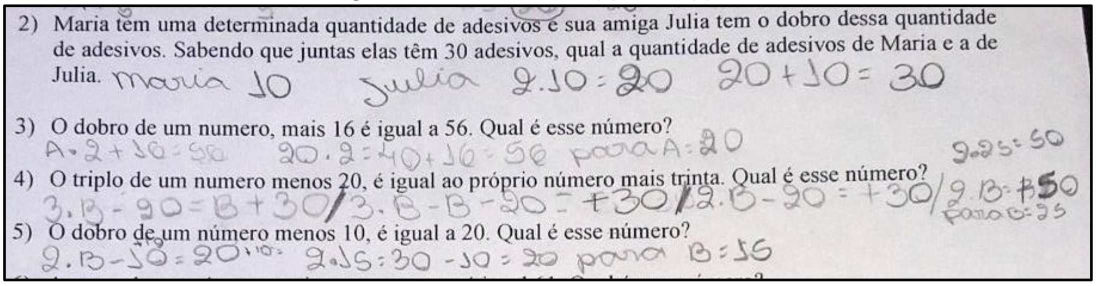


Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

Nos problemas de 2 a 8, pelo menos 20 equipes resolveram de forma correta os problemas, sendo que desses ao menos 14 equipes resolveram os problemas sem recorrer a nenhum método algébrico, ou seja, eles identificaram um valor que resolvia o problema, consistindo em um pensamento semelhante ao trabalhado no método da “Falsa Posição”.

Na imagem 22, é possível notar que o(a) aluno(a) traduziu os problemas 2 e 5 para a linguagem algébrica, contudo, não utilizou um método específico para resolvê-los, pois, em seguida, ele(a) testa um valor que vai resolver a equação, no entanto, na questão número 4, esse(a) aluno(a) utiliza, em um primeiro momento, o princípio do equilíbrio para reduzir o problema e, em seguida, testa um valor que resolve o problema.

Figura 22 - Atividade do(a) aluno(a) A26


2) Maria tem uma determinada quantidade de adesivos e sua amiga Julia tem o dobro dessa quantidade de adesivos. Sabendo que juntas elas têm 30 adesivos, qual a quantidade de adesivos de Maria e a de Julia. Maria 10 Julia 2.10=20 20+10=30

3) O dobro de um numero, mais 16 é igual a 56. Qual é esse número?

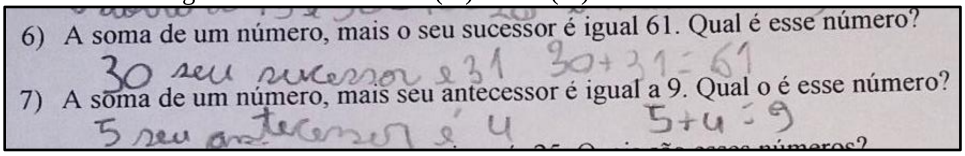
4) O triplo de um numero menos 20, é igual ao próprio número mais trinta. Qual é esse número?

5) O dobro de um número menos 10, é igual a 20. Qual é esse número?

Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

Na imagem 23, a equipe resolve as questões 6 e 7 de forma intuitiva, observando por exemplo, que o sucessor de 30 é 31 e 30+31=61, ou seja, os valores 30 e 31 resolvem o problema. Ressaltamos que durante a realização dessa atividade várias equipes tiveram dúvida com relação aos termos antecessor, sucessor e consecutivo, sendo necessário relembrar com o uso de exemplos o que seria cada um deles.

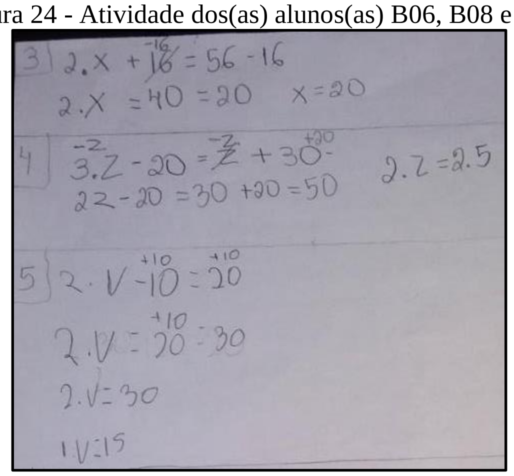
Figura 23 - Atividade dos(as) alunos(as) B25 e B08



Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

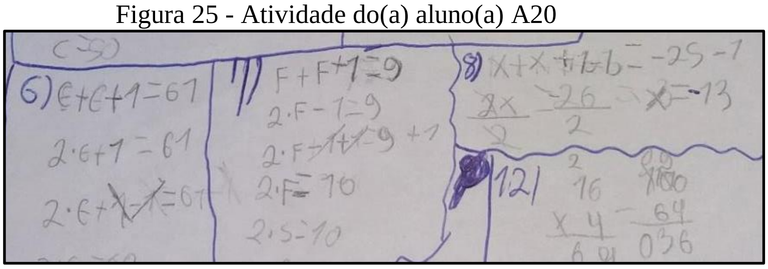
A seguir, expomos a resolução de duas equipes que preferiram resolver as questões utilizando o princípio do equilíbrio.

Figura 24 - Atividade dos(as) alunos(as) B06, B08 e B21



Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

Figura 25 - Atividade do(a) aluno(a) A20

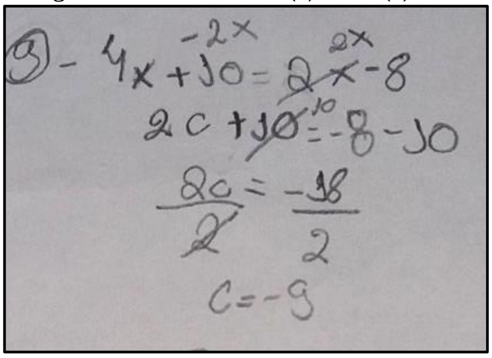


Fonte- Registro dos(as) alunos(as)

Sendo assim, podemos perceber que as equipes escolheram formas diferentes de resolver, aquelas que fizeram a resolução de forma incorreta conseguiram ao menos transformar o problema para a linguagem algébrica. Isso mostra que o trabalho com diferentes métodos possibilita aos(as) alunos(as) desenvolver sua autonomia, resolvendo os problemas por meio da compreensão, e não apenas de forma mecânica, por meio de regra meramente decorada.

A questão 9 foi resolvida corretamente por 16 equipes que, em sua maioria, utilizaram o princípio do equilíbrio. As demais equipes conseguiram transformar para a linguagem algébrica, mas não deram continuidade na resolução.

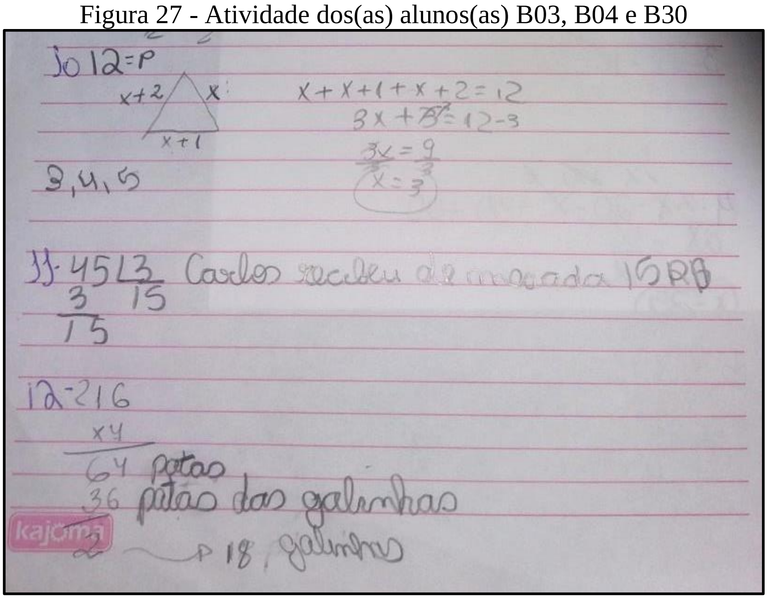
Figura 26- Atividade do(a) aluno(a) B05



Fonte – Registro do(a) aluno(a)

As questões de 10 a 15 não foram resolvidas por sete equipes, devido à falta de tempo[28]. Já as outras 17 equipes resolveram as questões de 10 a 13, ora de forma intuitiva e ora pelo princípio do equilíbrio, como é possível observar na imagem a seguir.

Figura 27 - Atividade dos(as) alunos(as) B03, B04 e B30

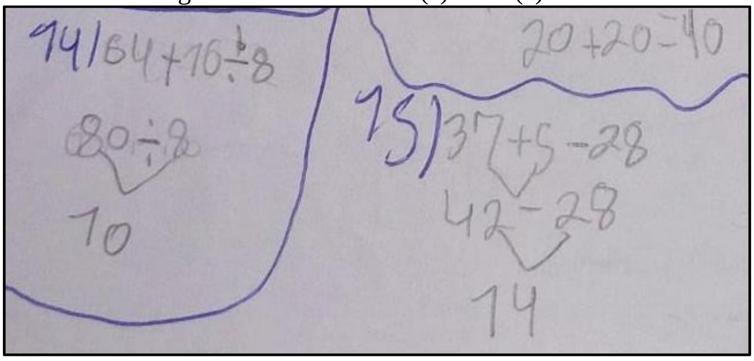


Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

[28] Ressaltamos que por conta de estarmos com o cronograma atrasado não foi possível disponibilizar mais tempo para a finalização desta atividade, no entanto, como a maioria das equipes já havia resolvido grande parte dos problemas, julgamos que não houve prejuízo.

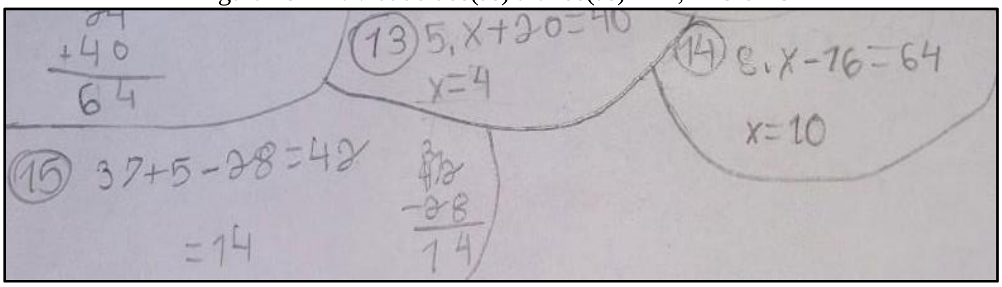
Com relação às duas últimas questões, as nove equipes que as resolveram utilizaram as operações inversas, da forma como foram trabalhadas pelo método da “Inversão” dos antigos hindus, como é possível observar nas imagens a seguir.

Figura 28 - Atividade do(a) aluno(a) A20



Fonte – Registro do(a) aluno(a)

Figura 29 - Atividade dos(as) alunos(as) B14, B19 e B31



Fonte – Registro dos(as) alunos(as)

Ao analisarmos a lista de problemas, foi possível notar que a maioria dos(as) alunos(as) conseguiu compreender o que é a resolução de uma equação do primeiro do grau com uma incógnita, ou seja, encontrar um valor que torne a igualdade verdadeira. Com os métodos estudados, da “Falsa Posição”, da “Inversão” e o princípio do equilíbrio, os discentes resolveram a maioria das atividades propostas, alguns por tentativa e erro, pensando em um valor que resolvia a equação, outros pelo método da “Falsa Posição” e outros ainda aplicando as operações inversas ao trabalhar com o princípio do equilíbrio, como observado nas imagens apresentadas.

Para finalizar o desenvolvimento deste conjunto de atividades, propusemos a realização de um jogo (APÊNDICE 17), já que os(as) alunos(as) afirmaram que a aula com jogo, realizada anteriormente, fora muito produtiva e prazerosa. Destacamos que esse jogo, a pedido da professora regente, não foi realizado na sequência das atividades, tendo um intervalo de uma aula.

A professora queria utilizar essa aula para mostrar aos estudantes a “regra prática”[29] para resolver as equações, pois na sua visão, após terem conhecimento de tal regra, o jogo seria desenvolvido de forma mais fácil. Sobre esse aspecto Ponte, Branco e Matos (2009, p. 95) apontam que a apresentação dessas regras práticas relacionadas à equivalência “[...] é uma abordagem que facilita o processo de resolução de equações. No entanto, tende a deixar em segundo plano a justificação dessas regras, o que pode reforçar uma perspectiva da Matemática como um conjunto de regras arbitrárias”.

Dessa forma, ressaltamos que, durante a implementação das atividades, em nenhum momento abordamos com os(as) alunos(as) essas “regras práticas” como: “muda de lado, muda o sinal” ou se “está multiplicando passa dividindo” e vice-versa, pois entendemos que, ao trabalhar com os métodos históricos e, posteriormente, com o princípio do equilíbrio, todas as operações realizadas em um membro da igualdade devem ser realizadas também do outro. Foi possível construir uma aprendizagem com significado, um entendimento do que significa resolver uma equação do primeiro grau com uma incógnita, sem a necessidade de decorar regras práticas.

Destacamos, ainda, que os(as) alunos(as) já estavam utilizando os procedimentos envolvidos nessas regras, pois subtrair “coisas iguais” de ambos os lados da igualdade, pelo princípio do equilíbrio, equivale a usar a regra “muda de lado, muda o sinal”, por essa razão não vimos a necessidade de apresentar essas regras práticas para os(as) alunos(as). No entanto, como os(as) alunos(as) já tinham estudado e resolvido vários problemas utilizando os métodos e procedimentos estudados, de forma intuitiva já estavam utilizando tais regras, entendemos que a apresentação dessa regra prática feita pela professora regente não descaracterizou o trabalho realizado.

No tópico a seguir apresentamos uma discussão sobre as contribuições e limitações da utilização da História da Matemática nas atividades desenvolvidas.

4.2. A HM nas atividades desenvolvidas: contribuições e limitações

Nesse tópico, apresentaremos uma síntese dos resultados obtidos com a implementação do conjunto de atividades elaborado, no qual identificamos elementos acerca das potencialidades e das dificuldades da utilização da HM para o ensino de equações do primeiro grau. Para a análise das potencialidades nos baseamos, conforme

[29] Por “regra prática” a professora regente estava se referindo a mudar o termo de um membro da equação para outro trocando o sinal, ou se um número está multiplicando ou dividindo à incógnita ele “passa” para o outro membro da equação dividindo ou multiplicando respectivamente.

apontado, nos eixos de análise elaborados com base na literatura, a saber: HM para motivação; HM para a aprendizagem de conceitos matemáticos; HM para contextualização e HM para mudança de percepção da e sobre a Matemática. Já para a análise das limitações realizamos agrupamentos por semelhança.

- **História da Matemática para motivação**

Entendemos, em consonância com alguns autores apresentados no capítulo 2, que o uso de aspectos da HM pode motivar os(as) estudantes a estudar Matemática. A motivação pode ser entendida como um conjunto de "[...] variáveis que ativam a conduta e a orientam em determinado sentido para poder alcançar um objetivo" (FITA, 2015, p. 77), ou seja, como um processo que sustenta determinada atividade.

Segundo Tapia (2015, p. 38), uma "[...] condição necessária para motivar seus alunos a aprender, é atrair sua atenção despertando sua curiosidade e interesse", sendo que a curiosidade, de acordo com o autor, pode ser entendida como uma conduta que visa à exploração, que é despertada por informações que possuem caráter inesperado ou possuem características de "[...] novidade, complexidade, [...], ambiguidade e variabilidade" (TAPIA, 2015, p. 39).

Sendo assim, compreendemos que a HM poderia despertar o interesse do(a) aluno(a) para o estudo de determinados conceitos da Matemática, o interesse segundo Tapia (2015, p. 40) implica "[...] dirigir a atenção para um fenômeno novo, incerto, surpreendente ou incongruente, seguido de uma atividade orientada para a exploração".

Neste sentido, entendemos que a História da Matemática pode ser incluída em aulas de Matemática com vistas a motivar os(as) estudantes, ao apresentar elementos como: informações sobre personalidades históricas e como estas resolviam problemas, sobre a origem dos procedimentos e métodos matemáticos, sobre os problemas que motivaram o desenvolvimento de determinado conceito e curiosidades. Nestes casos, o conhecimento acerca de elementos da HM poderia ser um incentivo para a aprendizagem, propiciando uma motivação capaz de levar a um melhor desempenho nas atividades propostas.

Destacamos a relevância da motivação no processo de ensino-aprendizagem, pois para Leite e colaboradores (2005, p. 24) a motivação será "[...] sempre válida no processo de ensino-aprendizagem como incentivo para desencadear impulsos no interior da criança a fim de predispô-la a querer participar das atividades escolares". Assim, entendemos que a motivação no contexto escolar pode ser caracterizada como um motivo para aprendizagem, ou seja, um estímulo, um incentivo para aprender.

Considerando a relevância da motivação no processo de ensino-aprendizagem e o potencial da HM para motivar os(as) estudantes, buscamos em nosso conjunto de atividades, bem como nos dados obtidos na implementação deste, elementos que nos permitam identificar que as atividades, as quais envolviam HM, contribuíram para instigar a curiosidade e interesse dos(as) alunos(as).

Em nosso entender, a HM foi utilizada com o intuito de motivar em alguns momentos da Etapa 2 e da Etapa 5. Na etapa 2, o objetivo era trabalhar com o método da "Falsa Posição" utilizado pelos antigos egípcios para resolver problemas que hoje envolvem a resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita, para tanto, apresentamos informações sobre a civilização egípcia relativas à Matemática presentes nos papiros, assim, os(as) alunos(as) puderam conhecer aspectos da origem do desenvolvimento de tal conceito, ou seja, quais problemas envolvem a gênese da utilização da equação do primeiro grau com uma incógnita, ressaltando que estes problemas já eram resolvidos pelos antigos egípcios a mais de 3.000 anos.

De acordo com a professora regente, essa apresentação inicial de informações relativas à civilização egípcia foi de grande valia, pois ensejou engajamento por parte dos(as) alunos(as), como é possível observar no seguinte trecho, extraído do diário de campo da pesquisadora.

(11-09) – A discussão sobre a civilização egípcia contou com a participação dos estudantes que contribuíram com as informações que sabiam e, conversando com a professora (regente), ela disse que eles "ficaram bem interessados e participaram e tiraram dúvidas".

A apresentação dos problemas que antigos egípcios resolviam pelo método da "Falsa Posição", também pode ser considerada como uso da HM para motivação, pois os(as) alunos(as) puderam conhecer os problemas que motivaram, ou seja, que desencadearam o uso desse método. Constatamos que os(as) alunos(as), ao conhecerem esse problema, se interessaram por encontrar a sua solução, como é possível observar no diálogo transcrito a seguir, em que a pesquisadora inicialmente lê com os(as) alunos(as) o problema exposto no *slide.*

Pesquisadora - Um dos problemas que eles (os egípcios) resolviam é esse "Uma quantidade e seu quarto adicionado tornam-se quinze. Qual é essa quantidade?".
Alunos – não sei.
Pesquisadora – Como que eu vou transformar essa linguagem aqui (a do problema) para a linguagem algébrica? Como que vai ficar? Uma quantidade, que quantidade?

Alunos(as) – não sei.
Pesquisadora – Os egípcios utilizavam o símbolo do Ahá (exposto no *slide*), mais um quarto dela, o que seria o quarto?
Aluno(a) A26 – quatro vezes.
Pesquisadora – quatro vezes?
Aluna(a) A26 – Não! Quatro dividido.
Pesquisadora – Isso, então fica Ahá mais Ahá dividido por quatro (escrito na lousa) igual a quanto?
Alunos(as) – quinze
Aluno(a) A22 – Então Ahá é três.
Pesquisadora – Porque Ahá é três?
Pesquisadora – Qual o valor de Ahá?
Aluno(a) A06 – sessenta.
Pesquisadora – Por quê?
Aluno(a) – Porque, sessenta dividido por quatro dá quinze.
Pesquisadora – Mas eu tenho que somar aqui (aponta no quadro a sentença, em que é preciso somar $ahá + \frac{ahá}{4}$).
Aluno(a) A20 – O dona, é trinta.
Pesquisadora – Por que trinta?
Aluno(a) A20 – Porque trinta mais trinta é sessenta e sessenta divido por 4 dá quinze.
Pesquisadora – [relembra o conceito de fração, ressaltando que não pode somar igual eles(as) estavam fazendo]

Dando continuidade, os(as) alunos(as) seguiram "chutando" valores para o "Ahá", intrigados por não conseguirem resolver, nesse momento expusemos que iríamos estudar como resolver esse problema e outros desse tipo. Sendo assim, entendemos que o uso, após uma contextualização sobre a civilização egípcia, da tradução de um problema que os egípcios resolviam, motivou os(as) alunos(as), já que propiciou que estes(as) procurassem por uma forma de resolução, mesmo que a princípio incorreta, ou seja, instigou a curiosidades deles(as).

Nesse sentido, Balestri (2008, p. 19) expõe que a "[...] História da Matemática satisfaz a curiosidade do aluno e o motiva", pois, dessa forma, os(as) alunos(as) poderiam entrar em contato com o trabalho de matemáticos e a origem de seus estudos. Destacamos ainda que Mendes (2006, p. 91) considera a história "[...] imprescindível para que as atividades de sala de aula se tornem atraentes e despertem o interesse dos estudantes para a matemática". Dessa forma, entendemos que determinadas informações relativas à HM foram utilizadas com o intuito de despertar o interesse e a curiosidade dos(as) alunos(as).

Na Etapa 5, apresentamos as contribuições de algumas personalidades históricas para o desenvolvimento do simbolismo matemático, essas informações despertaram o interesse dos(as) alunos(as), pois eles se "assustaram" quando perceberam que nem sempre existiram os símbolos que hoje usamos de forma quase natural. Como é possível observar no trecho do diário de campo elaborado pela pesquisadora, referente à discussão que ocorreu durante a apresentação de informações históricas sobre alguns símbolos matemáticos.

(03-10) Durante a apresentação das informações históricas sobre os símbolos matemáticos, notei que alguns alunos (nas duas turmas) começaram a se interessar pelo que estava sendo discutido, ao observaram que os símbolos que usamos hoje, começaram a aparecer há algum tempo e que para eles 500 anos atrás já é um tempo muito grande, mas comentei que para a Matemática isso era recente já que temos registro da matemática de 2000 a.E.C. como a da antiga civilização egípcia.

Destacamos, como já apontado, que há particularidades em relação ao interesse dos alunos(as), logo, o uso de informações relacionadas à História da Matemática não serviu de motivação para todos(as), como pode ser observado no Quadro 18, no qual são expostas as opiniões dos(as) alunos(as), sendo possível notar que alguns preferiram outras atividades como as que envolveram a balança ou os jogos.

Sendo assim, entendemos que HM pôde ser utilizada para motivação dos(as) alunos(as) da forma que foi proposta, possibilitando o engajamento e participação destes(as). No entanto, não descartamos a possibilidade de realizar algumas modificações no conjunto de atividades elaborado, como a possiblidade de, ao invés de apresentar uma linha do tempo com a contribuição de determinados estudiosos para se chegar aos símbolos que hoje utilizamos, propor que os(as) alunos(as) divididos em equipes, pesquisem sobre percurso histórico de determinados símbolos ou sinais, e apresentem aos(as) seus(as) colegas(as). Dessa forma, eles(as) poderão se envolver com as informações históricas referentes a tais percursos. Essa possibilidade pode evitar a dispersão de alguns alunos(as), notada no momento da apresentação realizada, além de motivá-los(as) a pesquisarem e se interessaram pelo desenvolvimento de tais símbolos, possibilitando ainda um trabalho com a seleção de informações disponíveis na *internet* que foi uma dificuldade percebida anteriormente.

- **História da Matemática para contextualização**

O conceito de contextualização pode assumir diferentes significados. Maioli (2012, p. 104) reúne em seu trabalho várias ideias sobre a contextualização[30] e identifica

[30] Para Maioli (2012), com base nas pesquisas estudadas, o papel que o professor atribui à contextualização é o de “[...] proporcionar aprendizagem de forma significativa. Mas alguns, também a veem como elemento de motivação, ou então como elemento facilitador no processo de ensino-aprendizagem, seja pelo fato de permitir a aplicação de conhecimentos, seja pelo fato de alcançar

que estas sofrem certa variação, já que "[...] ora é o conhecimento que é contextualizado, ora é o ensino, ora são as atividades". Entretanto, para ela, na maioria das pesquisas que apresentam ou tratam de atividades contextualizadas, as ideias em relação à contextualização, orbitam em torno do "[...] uso de situações envolvendo o cotidiano, aplicações concretas ou atividades manipulativas" (MAIOLI, 2012, p. 104).

Macedo e Silva (2014) apontam que, a contextualização é apresentada e justificada em documentos oficiais a partir de quatro grandes enfoques, sendo eles:

> [...] 1) contextualização como aproximação do conteúdo com o cotidiano do aluno em um sentido amplo, sendo o cotidiano representado por atividades do seu dia a dia, bem como tarefas laborais; **2) contextualização como aproximação e relação entre conhecimentos de diversas áreas científicas de modo que possibilitem o trabalho interdisciplinar; 3) contextualização como meio de relacionar aspectos sócio-culturais e históricos a fim de se alcançar a Alfabetização Científica e Tecnológica**; 4) contextualização como possível caminho a fim de minimizar os danos causados no processo de transposição didática (MACEDO e SILVA, 2014, p.60, grifo nosso).

De modo particular, na Matemática, Vieira (2004, p. 97) expõe a contextualização histórica como sendo a que envolve a História da Matemática, "[...] destacando o como, o porquê ou por quem um determinado conteúdo matemático foi criado ou, ainda, a evolução e as mudanças dos conceitos e procedimentos matemáticos de acordo com as necessidades dos povos".

Nesse sentido, Saito e Dias (2013, p. 97) apontam que "[...] contextualizar historicamente não implica apenas descrever e explicitar sobre o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, mas também, relacioná-los à própria natureza da matemática do passado", ou seja, é preciso compreender de que forma o conhecimento matemático se desenvolveu e se deu em diferentes épocas.

Neste contexto, entendemos que a História da Matemática para contextualização está relacionada ao uso de seus elementos para fornecer um contexto, ou seja, relacionar o conceito estudado com aspectos históricos que o circundam, além da apresentação de aplicações que esse conceito tem ou teve ao longo do tempo.

Desta forma, buscamos nas atividades e diálogos com os(as) alunos(as) elementos que nos permitam identificar que a HM foi utilizada para a apresentação de

---

estreitamento de situações que envolvem diversas áreas do conhecimento ou ainda partir de informações já conhecidas pelos alunos" (MAIOLI, 2012, p. 106).

informações referentes aos contextos histórico e social do conceito trabalhado, ou seja, como se deu esse desenvolvimento, quais necessidades ele atendia e suas aplicações.

No conjunto de atividades elaborado, entendemos que esse eixo pôde ser encontrado na Etapa 2, já que nesta estudamos as contribuições das diferentes civilizações antigas à Matemática, a partir do auxílio de uma apresentação de *slides* aprofundamos a discussão acerca de uma das civilizações pesquisadas, a egípcia. Dessa forma, expusemos informações gerais sobre sua localização e cultura, também sobre os Papiros Matemáticos e os conhecimentos que podemos relacionar a Matemática que eles provavelmente utilizavam. Identificamos que houve grande participação dos(as) estudantes, que contribuíram expondo as informações que conheciam sobre a civilização egípcia, como no episódio em que um(a) aluno(a) apresentou aos(as) seus(as) colegas o que seria o papiro, descrito a seguir:

Pesquisadora – Como que a gente conhece a Matemática que foi produzida a mais de 3.000 anos? Aluno(a) B18 - (integrante da equipe que pesquisou sobre a civilização egípcia) – Eles escreviam no papiro lá. Pesquisadora – Mas o que é o papiro? Vocês sabem? Aluno(a) B32 – É uma plantinha, que aí eles prensam. Pesquisadora (espantada) – Como vocês sabem disso? Aluno(a) B32 – porque eu assisti no “você sabia?” Pesquisadora – Que legal, vocês já sabem, então (apontando para o *slide*) é uma foto da planta que “dava” nas margens do rio Nilo, e eles faziam igual o(a) aluno(a) B32 falou, eles prensavam a planta até eles obterem o papel, na época. Aluno(a) B18 – ano passado “nois” estudou isso também.

Ressaltamos que, dessa forma, os(as) alunos(as) usaram conhecimentos adquiridos na aula de História para uma discussão em uma aula de Matemática. Assim, entendemos que a HM possibilitou fornecer aos(as) estudantes um contexto para o conceito que seria trabalhado, pois os(as) alunos(as) puderam conhecer informações relativas à cultura dessa civilização e em que situações eles utilizavam a matemática em geral.

No entanto, entendemos que com a participação dos professores de História, Geografia e Ciências, essa contextualização poderia ser mais ainda completa, pois dessa forma seria possível propiciar aos(as) alunos(as) estudar mais aspectos relacionados à civilização egípcia, como: sua cultura, costumes, sua localização, clima entre outros, possibilitando assim, que os(as) alunos(as) tenham um maior contato com informações referentes à civilização que utilizava o método da “Falsa Posição” para resolver determinados tipos de problemas que envolvem a resolução de uma equação do primeiro grau, o que pode vir a motivar os(as) alunos(as) e ainda possibilitar a construção de uma nova visão da Matemática, como algo inserido em uma determinada conjuntura.

- **História da Matemática para a aprendizagem de conceitos matemáticos**

Para Miguel (1997, p. 90), "[...] a História é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da matemática" (p. 90), de maneira semelhante, para Mendes (2009, p. 111), o conhecimento histórico "[...] poderá oportunizar aos estudantes uma compreensão mais ampla das propriedades, teoremas e aplicações da Matemática", contribuindo assim, para uma aprendizagem mais completa e rica da matemática escolar.

Tavares (2004) indica que existem três requisitos para uma aprendizagem significativa, sendo eles:

> [...] a oferta de um novo conhecimento estruturado de maneira lógica; a existência de conhecimentos na estrutura cognitiva que possibilite a sua conexão com um novo conhecimento; a atitude explícita de aprender e conectar o seu conhecimento com aquele que pretende absorver (TAVARES, 2004, p. 56).

Dessa forma, a construção do significado é uma tarefa complexa, já que implica "[...] atribuição pessoal de significado para as ideias que são percebidas, processadas e representadas mentalmente" (LEMOS, 2011, p. 28), ou seja, depende da possibilidade do(a) aluno(a) incorporar os novos conhecimentos aos conhecimentos prévios, ou seja, aos conhecimentos já adquiridos. No ensino de matemática, muitas vezes os conceitos são apresentados com suas formalizações e abstrações, Roratto, Nogueira e Kato (2011), apontam que estes não são imediatamente apreendidos pelos(as) alunos(as), já que eles(as)

> [...] encontram dificuldades em relacionar esse novo conhecimento com algum conhecimento prévio existente em sua estrutura cognitiva, visto que, epistemologicamente, existe um longo caminho entre a intuição de um matemático sobre uma possível teoria, até sua exposição final, formal e abstrata (RORATTO; NOGUEIRA; KATO, 2011, p. 118).

Sendo assim, entendemos que o uso da História da Matemática para a aprendizagem de conceitos matemáticos pode estar relacionado ao uso de informações relativas ao resgate histórico de métodos e procedimentos que foram usados no passado para resolver determinados tipos de problemas.

Dessa forma, buscamos nas atividades, direcionadas aos(as) alunos(as), elementos que possibilitaram a identificação do estabelecimento de relações entre o conhecimento novo, a resolução de equações do primeiro grau e conhecimentos já adquiridos da aritmética. Além disso, buscamos dados que nos permitiram identificar quais habilidades do ensino de equação do primeiro grau, indicadas por documentos oficiais, foram adquiridas pelos(as) estudantes.

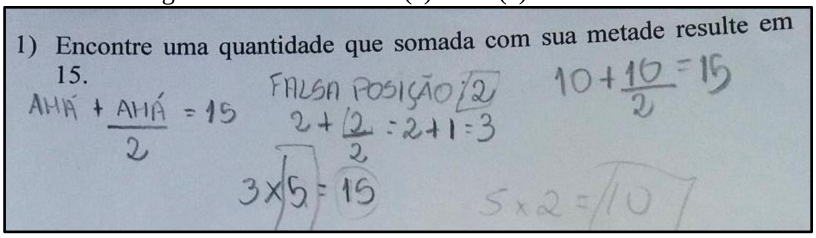
No conjunto de atividades elaborado, entendemos que a HM foi utilizada nessa perspectiva em alguns momentos da Etapa 2 e na Etapa 3, já que em ambas utilizamos métodos históricos, com o intuito de trabalhar com a resolução de problemas que envolviam encontrar um valor desconhecido.

Na Etapa 2, ao apresentarmos um problema do Papiro Rhind, pedimos aos(as) alunos(as) que tentassem resolvê-lo da forma que achassem mais conveniente, e a grande maioria que procedeu com a resolução por tentativa e erro, que é um método, em alguns aspectos, semelhante ao método da "Falsa Posição" empregado pelos antigos egípcios. Sendo assim, entendemos que a apresentação do método da "Falsa Posição", possibilitou um entendimento do que seria resolver uma equação do primeiro grau com uma incógnita, ou seja, a identificação de um valor capaz de tornar a igualdade verdadeira. Ressaltamos ainda que, na etapa 5, quando foi deixada livre a forma de resolver o problema, alguns estudantes escolheram esta forma de resolução, indicando que este método se configurou para eles com uma possibilidade de resolução.

Destacamos que a utilização desse método possibilitou um trabalho com conceitos da Álgebra, como a equação, utilizando conhecimentos já construídos acerca da aritmética, já que ao testar um falso "ahá", os(as) alunos(as) reduziam o problema à resolução de uma expressão numérica, caso fosse necessário ajustar o valor encontrado para chegar ao valor procurado, os(as) alunos(as) trabalhavam com o conceito de razão, também já trabalhado. Sendo assim, os(as) alunos(as), com a utilização desse método, resolveram problemas relacionados à resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita, mobilizando conhecimentos já adquiridos.

Um exemplo pode ser observado na resolução apresentada a seguir, na qual o(a) aluno(a) A01, assume como falsa posição o valor 2 e, utilizando conhecimentos da aritmética como soma e divisão de números inteiros, encontra o valor 3 que não é o valor esperado, sendo necessário multiplicá-lo por 5 para chegar ao valor esperado 15. Assim, é também necessário, multiplicar a falsa posição 2 por 5 para encontrar o valor procurado, dessa forma, esse(a) aluno(a) faz o uso do método da "Falsa Posição" e dos procedimentos da aritmética para resolver o problema proposto.

Figura 30 - Atividade do(a) aluno(a) A01



Fonte – Registro do(a) aluno(a)

Na Etapa 3, tivemos o objetivo de trabalhar com as operações inversas, para tanto, apresentamos aos(as) estudantes o método da "Inversão", o qual era utilizado pelos hindus. Sendo assim, em um primeiro momento, apresentamos, com o auxílio de um problema escrito na linguagem poética utilizada pelos hindus, como se dava o funcionamento desse método, resolvendo com os(as) alunos(as) as operações de traz para frente até chegarmos ao valor procurado.

Notamos que grande parte dos(as) discentes conseguiu resolver os problemas propostos e, consequentemente, explorar as operações inversas. Dessa forma, entendemos que a utilização deste método histórico propiciou aos(as) estudantes a possibilidade de relembrar e compreender as operações inversas.

Verificamos ainda que a utilização dos métodos históricos da "Falsa Posição" e do método da "Inversão" contribuíram para a compreensão da resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita. Visto que, ao iniciar a abordagem do conceito de equação do primeiro grau com a utilização do método da "Falsa Posição" utilizado pelos antigos egípcios, o qual é semelhante à forma com a qual os(as) alunos(as) tentaram resolver o problema proposto por tentativa e erro, entendemos que houve a possibilidade dos(as) estudantes trabalharem com a equação, um conceito novo para eles(as), utilizando uma estratégia capaz de "transformá-lo" em um problema que eles souberam resolver utilizando cálculos aritméticos, ou seja, ao pensarem um valor que poderia resolver a equação, para testarem tal valor, eles(as) trabalhavam com uma expressão numérica.

Dessa forma, podemos inferir com base nos resultados obtidos nas atividades, que os(as) alunos(as), com a utilização o método da “Falsa Posição”, puderam compreender o que significa resolver uma equação do primeiro grau com uma incógnita, ou seja, encontrar um valor que torne a igualdade verdadeira.

Já o método da “Inversão” utilizado pelos antigos hindus, possibilitou aos(as) estudantes relembrar e trabalhar com as operações inversas que foram utilizadas quando trabalhamos com o princípio da equivalência utilizando a balança de dois pratos como um recurso visual. Sendo assim, entendemos que a utilização desses métodos possibilitou a resolução da equação do primeiro grau de forma mais significativa.

Ressaltamos que durante o desenvolvimento das atividades elaboradas, abordamos aspectos presentes em algumas habilidades expostas na BNCC que foram apresentadas ao longo do texto, a saber, as habilidades: (EF06MA14); (EF07MA13); (EF07MA15); (EF07MA16); (EF08MA06); em específico a habilidade (EF07AM18) que contem aspectos relacionados ao objetivo deste trabalho, sendo que ela expõe a necessidade de se elaborar atividades que levem os(as) alunos(as) a “[...] Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis a $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade” (BRASIL, 2018, p. 305), que foi explorada, no nosso entender, ao discutirmos as diferentes forma de resolver uma equação do primeiro grau com uma incógnita.

- **História da Matemática para mudança de percepção da e sobre a Matemática**

A percepção, segundo Alves e Brito (2007, p. 208), pode ser caracterizada como um conjunto de “[...] processos psicológicos, pelos quais as pessoas reconhecem, organizam, sintetizam e fornecem significação, em nível cognitivo, às sensações recebidas dos estímulos ambientais, através dos órgãos dos sentidos”, ou seja, a percepção está relacionada à compreensão através dos sentidos. Sendo assim, entendemos que a percepção dos(as) alunos(as) está vinculada aos estímulos que estes(as) recebem. Dessa forma, o uso de aspectos da HM pode ser uma forma de levar os(as) estudantes a perceberem a Matemática como uma ciência viva e humana.

Nesse sentido, Feliciano (2008) aponta a importância de

> [...] mostrar aos alunos o modo como se estruturou o conhecimento matemático, é um caminho que pode levar à elucidação da

> Matemática como fruto das necessidades de um povo, de uma cultura, de um tempo ou de um contexto determinado, isto é, como fruto das necessidades dos seres humanos (FELICIANO, 2008, p. 92).

Dessa forma, segundo Miguel e Miorim (2008), muitos autores defendem o uso da "[...] história no processo de ensino-aprendizado da matemática por considerar que isso possibilitaria a desmistificação da Matemática e o estímulo à não-alienação do seu ensino" (p. 52). Sendo assim, entendemos que a História da Matemática para mudança de percepção da e sobre a Matemática pode estar relacionada ao uso de aspectos da HM para propiciar aos(as) alunos(as) estímulos que os(as) possam levar a perceber a Matemática de forma diferente, como por exemplo, a partir do uso de informações que relacionem a Matemática como uma ciência em construção, e que faz parte da cultura humana.

Buscamos nas atividades e diálogos com os(as) alunos(as) elementos que nos permitiam identificar o uso da História da Matemática para uma mudança de percepção com relação à Matemática, ou seja, um entendimento da Matemática como uma construção humana ao longo do tempo. Entendemos que na Etapa 2 e Etapa 5 é possível observar o uso da HM para uma mudança de percepção da e sobre a Matemática.

Na Etapa 2, ao discutimos com os(as) estudantes, por meio do auxílio do Mapa-*múndi* confeccionado, o qual apresenta as contribuições de algumas civilizações antigas pesquisadas pelos(as) alunos(as), concluiu-se ser possível demonstrar que a Matemática esteve presente em várias civilizações antigas e com diferentes enfoques e motivos, ou seja, que não é possível precisar uma data ou local onde a Matemática começou a ser estudada, já que a mesma é fruto de um empreendimento humano ao longo do tempo. Sendo assim, nesse momento entendemos estar utilizando aspectos da HM capazes de levar os(as) alunos(as) a mudar a percepção sobre a Matemática, passando a "enxergá-la" como parte da cultura humana, que se desenvolveu em diferentes lugares e com formas diferentes.

Dessa forma, entendemos que a construção do Mapa-*múndi* com as pesquisas das civilizações antigas e suas contribuições à HM, permitiu, de modo geral, expor aos(as) estudantes um panorama da Matemática antiga, demonstrando a contribuição de vários povos a essa ciência em diferentes momentos, fato que pôde ser constatado, ao indagarmos os(as) alunos(as) acerca do local no qual a Matemática começou a ser estudada, a conclusão a que chegaram foi "no mundo todo", expondo dessa forma a natureza humana do conhecimento matemático.

Na Etapa 5, ao apresentar uma “linha do tempo” e discutir alguns tópicos relacionados ao desenvolvimento da linguagem algébrica, entendemos que utilizamos aspectos da História da Matemática que possibilitaram aos(as) estudantes desenvolverem uma visão mais humana da Matemática, pois estes(as) puderam observar que a linguagem a qual usamos, foi passando por inúmeras mudanças e contribuições de estudiosos para chegar ao nível sincopado que conhecemos atualmente, como é possível observar no diálogo transcrito a seguir.

> Pesquisadora –Vocês acham que esses símbolos aqui (apontando para o quadro) sempre estiveram presentes na Matemática?
> [alguns alunos(as) respondem que sim e outros(as) que não]
> Pesquisadora – Sim ou não?
> Alunos(as) – Não
> Pesquisadora – Por que nem sempre teve eles (os símbolos)?
> Aluno(a) B25 – porque foi mudando.
> Pesquisadora – Exatamente, como tudo na Matemática, os símbolos também foram passando por transformações.

Dessa forma, identificamos a importância da utilização de elementos da HM para expor como foram se desenvolvendo alguns símbolos que hoje usamos de forma quase natural. Assim, os(as) alunos(as) puderam observar que a forma com a qual escrevemos a matemática nem sempre foi assim, e ficaram “impressionados” ao observar, por exemplo, o uso da letra x para representar uma quantidade desconhecida não constituindo uma regra fixa e imutável. Muito tempo (2000 a.E.C) transcorreu desde que os egípcios utilizavam “Ahá” ou que os europeus escrivam “coisa”, até por volta do século XVII, quando Descartes passou a fazer uso das últimas letras do alfabeto para designar quantidades desconhecidas.

Sendo assim, entendemos ter proporcionado aos(as) estudantes a possibilidade de “ver” a Matemática se desenvolvendo ao longo do tempo, com avanços e retrocessos, recebendo contribuições de vários matemáticos de diferentes lugares, ou seja, a Matemática não constitui um conhecimento pronto, que foi desenvolvido por uma única pessoa, mas um conhecimento que se desenvolveu e continua a se desenvolver.

Ressaltamos, como já apontado, que foi possível observar indícios de mudança de percepção sobre a Matemática, como o apontado acima, mas cabe ressaltar que entendemos que, para haver uma mudança de percepção efetiva, talvez seja necessário um trabalho mais completo com a História da Matemática, com ela perpassando das diferentes formas os diversos conceitos matemáticos. Já que, após a implementação da proposta, quando novamente questionamos os(as) alunos(as) se a Matemática tem

História, muitos ainda recorreram as mesmas justificativas apresentadas anteriormente, ou seja, que “tudo tem história”. Sendo assim, é possível inferir que apenas uma proposta com abordagem histórica para o estudo de determinado conceito não foi suficiente para mudar a percepção dos(as) alunos(as) em relação à Matemática, a qual configura uma construção ao longo do tempo, um empreendimento humano.

Dessa forma, entendemos a necessidade da HM estar mais presente em aulas de Matemática da Educação Básica para o tratamento de diferentes tópicos, para que, assim, o(a) aluno(a) possa ter uma visão mais global da Matemática e compreender a natureza humana desse pensamento.

Para finalizar, apresentamos no quadro a seguir uma síntese da relação entre as características dos eixos e como a História da Matemática pode ser utilizada para se trabalhar em determinado eixo de acordo com a literatura, bem como a forma na qual a HM foi utilizada em cada etapa do conjunto de atividades elaborado.

Quadro 19 - Síntese dos eixos, características, uso da HM e HM no conjunto de atividades

Eixo	Característica	Uso da HM	HM no conjunto de atividades
HM para motivação	-Despertar a curiosidade; -Despertar o interesse; -Um incentivo para aprender.	-Estudo e apresentação de personalidades históricas; -Estudo e apresentação da origem dos procedimentos matemáticos; -Conhecimento de problemas que motivaram o desenvolvimento de determinado conceito; -Apresentação de curiosidades históricas.	**Etapa 2** - Apresentação dos problemas que os antigos egípcios resolviam pelo método da Falsa Posição; **Etapa 5** - Apresentação de contribuições de personalidades históricas para linguagem matemática.
HM para contextualização	-Situações relacionadas ao cotidiano; - Relações com outras áreas do conhecimento; - Relações com aspectos sócio históricos.	-Estudo e apresentação do contexto histórico e social; -Estudo e apresentação de aplicações.	**Etapa 2** - Construção do Mapa-*múndi*; - Apresentação de informações sobre a civilização egípcia e com quais questões se preocupavam.
HM para a aprendizagem de conceitos matemáticos	-Estabelecimento de relações entre o conhecimento novo e conhecimentos já adquiridos;	-Resposta a alguns porquês matemáticos; -Explicação de determinados conceitos, teorias, ou procedimentos matemáticos;	**Etapa 2** - Apresentação, discussão e utilização do método da “Falsa Posição” para resolver uma equação do primeiro grau com uma incógnita; **Etapa 3** - Apresentação,

			discussão e utilização do método da Inversão para a resolução de determinados tipos de problemas.
HM para mudança de percepção da e sobre a Matemática	-Uso de estímulos que levem o(a) aluno(a) compreender determinada ideia.	-Matemática como construção humana; -Desmistificação da ideia de que a matemática é reservada a uns poucos.	**Etapa 2** - Discussão do Mapa-*múndi*; **Etapa 5** - Apresentação da "linha do tempo" com informações sobre o desenvolvimento de alguns aspectos da linguagem algébrica.

Fonte: Elaborada pela autora

Destacamos que, nas Etapas 1 e 4, as atividades elaboradas não continham aspectos relacionados à História da Matemática. Na Etapa 1, conforme exposto, abordamos tópicos relacionados às expressões algébricas, sendo que as atividades elaboradas não continham aspectos ligados a História da Matemática, por isso, estas não foram analisadas nesse trabalho. No entanto, notamos algumas dificuldades apresentadas pelos(as) alunos(as) durante o desenvolvimento das atividades, estas muitas vezes relacionadas à utilização de letras/símbolos para representar números, ressaltamos que essa dificuldade, apresentada também pela literatura, pode estar ligada à linguagem simbólica que a Álgebra utiliza, sendo que esta demorou um longo tempo para tomar a forma a qual conhecemos hoje.

Dessa forma, entendemos a importância do professor possuir conhecimento acerca do desenvolvimento histórico da simbologia algébrica para que possa entender algumas dificuldades apresentadas pelos(as) alunos(as), pois a linguagem algébrica simbólica, que usamos hoje de forma quase natural, passou por muitas mudanças e demorou para ser sistematizada, utilizada e aceita por todos, por conseguinte, é compreensível que os(as) alunos(as) encontrem obstáculos ao trabalhar com esses novos símbolos e/ou novas regras.

Nesse sentido, o professor, tendo conhecimento deste longo desenvolvimento histórico da simbologia algébrica, pode planejar uma abordagem diferenciada, por exemplo, com atividades de investigação, promovendo debates que levem os(as) alunos(as) a sentirem a necessidade de se utilizarem de uma nova forma para a representação dos números.

Por fim, na Etapa 4, trabalhamos com o princípio da equivalência, utilizando uma balança de dois pratos para facilitar a visualização do equilíbrio e poder relacioná-lo com a igualdade entre os dois membros da equação, portanto, as atividades elaboradas não continham aspectos relacionados à HM.

No entanto, ao apresentarmos as relações dos métodos históricos estudados com o princípio da equivalência, foi possível notar que estes métodos possibilitaram melhor assimilação do princípio da equivalência por parte dos(as) alunos(as), afinal, estes(as) já sabiam resolver equação do primeiro grau com o método da “Falsa posição”, já o método da “Inversão” possibilitou um trabalho com as operações inversas que são utilizadas no processo de isolar a incógnita de um lado da igualdade.

No item a seguir, apresentamos as dificuldades encontradas na proposição do conjunto de atividades com alunos(as) do sétimo ano do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual.

- **Dificuldades em utilizar a HM em sala de aula**

Agrupamos as dificuldades em dois tópicos, no primeiro as limitações decorrentes do conjunto de atividades explorar aspectos da HM e o segundo as dificuldades decorrentes do processo de estar em sala de aula.

Foi possível notar, como apontado pela literatura, que não foram todos(as) os(as) alunos(as) que se sentiram motivados(as) com as atividades que envolveram a HM, preferindo as atividades que envolveram jogos ou o recurso visual da balança de dois pratos, como apresentado no quadro a seguir.

Quadro 20 - Opinião dos(as) alunos(as) sobre os métodos históricos estudados

Aluno(a) B31	O jogos que eu gostei mais porque tem mais desempenho
Aluno(a) A08	3 - Os jogos porque brincando é a melhor forma de aprender
Aluno(a) A13	A da Balança, porque eu levei jeito e foi divertido.

Fonte: Registro dos(as) alunos(as)

Observamos ainda que, na Etapa 2, alguns estudantes, a princípio, não entenderam a relação entre a História e a Matemática, como apresentado no trecho a seguir extraído do diário de campo da pesquisadora, no qual fica evidente que para eles(as) a Matemática e a História são duas disciplinas isoladas.

(26-08) – Quando cheguei na sala junto com a professora de História, muitos alunos perguntaram se eu iria dar aula de História também.

Dessa forma, entendemos que as dificuldades relacionadas ao uso da HM no conjunto de atividades elaborado estiveram relacionadas à dificuldade que os(as) estudantes encontraram em "ver" a Matemática como uma construção ao longo do tempo, ou seja, que esta possui uma História. Cabe destacar que, durante a apresentação dos métodos históricos da "Falsa Posição" e da "Inversão", de modo geral, os(as) alunos(as) não apresentaram dificuldades em compreender a matemática que está por traz desses métodos, já que a grande maioria conseguiu aplicar os métodos e resolver os problemas propostos.

Ressaltamos, deste modo, a importância de trabalhos que visem propiciar aos(as) estudantes a oportunidade de conhecer outros aspectos da Matemática, capazes de elucidar que esta não é somente uma disciplina ou um corpo de conhecimentos que envolve contas e resolução de problemas, ou seja, é preciso propor atividades que apresentem a Matemática como uma construção que esteve e está relacionada a outros campos do saber. Entendemos que a utilização da HM pode ser uma forma, mas não a única, de expor a Matemática sobre uma nova ótica.

Encontramos também algumas dificuldades relacionadas ao processo de estar em sala de aula. O tempo foi uma delas, devido a um atraso no planejamento da professora regente, que ocasionou, consequentemente, um atraso na implementação do conjunto de atividades, desencadeando um atraso no cronograma da pesquisa. Ressaltamos ainda que algumas atividades não puderam ser finalizadas por todos(as) os(as) alunos(as) devido a falta de tempo, pois, como já apresentado o planejamento da professora regente estava atrasado.

Destacamos que a pesquisadora não era a professora das turmas em que o conjunto de atividades foi implementado, fato que pode ter modificado a dinâmica da sala de aula e possivelmente interferido no comportamento de alguns estudantes. No entanto, ressaltamos que as dificuldades relacionadas ao processo de estar em sala de aula são inerentes a qualquer pesquisa de campo, e entendemos, também, que estas dificuldades não causaram grande prejuízo à implementação das atividades.

A seguir retomamos o objetivo deste estudo e apresentamos nossas considerações finais.

5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta investigação foi realizada com o intuito de analisar as possibilidades da utilização da História da Matemática para o ensino de equação do primeiro grau com uma incógnita na educação básica. Sendo assim, procuramos identificar, no decorrer da implementação do conjunto de atividades elaborado, indícios que evidenciassem as contribuições da utilização de elementos da HM para o ensino e aprendizagem de Matemática, ou seja, para a motivação dos discentes; a aprendizagem de conceitos matemáticos; contextualização do conceito e para mudança de percepção sobre a Matemática.

Para tanto, elaboramos um conjunto de atividades para discutir o conceito de equação do primeiro grau com uma incógnita, no qual exploramos essas potencialidades. Com a implementação dessa proposta, procuramos identificar indícios dessas contribuições para o ensino do conceito abordado.

Ao analisar os dados coletados, foi possível identificar que os elementos da HM apresentados nas Etapas 2 e 5, puderam contribuir para que os(as) alunos(as) se mostrassem interessados frente à aprendizagem matemática. Neste sentido, pudemos identificar a contribuição da HM para a motivação de muitos(as) alunos(as) ao estudarem equação de primeiro grau.

Identificamos, também, que a abordagem dos métodos históricos, tanto da "Falsa Posição" (utilizado pelos antigos egípcios para resolver problemas que hoje podem ser reduzidos à resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita), quanto do método da "Inversão" (que resolvem determinados tipos de problemas, abordando as operações inversas), contribuíram para a aprendizagem de resolução de equação do primeiro grau.

Entendemos que o uso de tais métodos possibilitou uma aprendizagem significativa da resolução de uma equação do primeiro grau, pois, ao utilizar o método da "Falsa Posição", os(as) alunos(as) puderam resolver um problema, que hoje pode ser considerado algébrico, utilizando procedimentos aritméticos que já haviam sido estudados, possibilitando, assim, uma transição da Aritmética para a Álgebra sem uma ruptura muito grande, o que, de acordo com a literatura, constitui a causa de muitos obstáculos enfrentados pelos(as) alunos(as). Com o método da inversão, pudemos trabalhar com as operações inversas, que foram exploradas posteriormente ao abordarmos o princípio do equilíbrio (utilizando o recurso visual da balança de dois pratos), possibilitando que os(as) alunos(as) relembrassem tais operações. Nesse sentido, podemos inferir que a História da Matemática contribuiu para aprendizagem deste conceito.

Os elementos da HM, na Etapa 2, contribuíram para o fornecimento de um contexto sócio histórico da civilização egípcia, permitindo aos(as) estudantes conhecerem mais informações sobre a civilização que utilizava o método que eles(as) iriam estudar, tais como as informações relacionadas à sua cultura e aos problemas os quais se preocupavam em responder, o que pode ter contribuído para a aprendizagem do conceito ao fornecer um panorama da civilização egípcia, mostrando a Matemática em relação a outras áreas do conhecimento e expondo o contexto sociocultural no qual o método era utilizado.

Por fim, destacamos que nas Etapas 2 e 5, nas quais, com a construção do mapa-*múndi* e a sua apresentação foi possível discutir aspectos da Matemática como uma construção humana ao longo do tempo e que esta esteve presente em diversas civilizações. Já com a linha do tempo, mostramos que determinados símbolos contaram com as contribuições de vários estudiosos(as) até adquirirem os contornos de hoje, ressaltando que a Matemática não é conhecimento pronto e acabado, descoberto ou criado por uma ou determinado grupo de pessoas em determinado lugar e tempo, mas um conhecimento que foi e continua sendo desenvolvido com a colaboração de matemáticos(as) ao redor do mundo.

Neste contexto, foi identificada uma mudança na percepção dos(as) estudantes com relação à Matemática, já que, inicialmente muitos(as) não estabeleciam uma relação da Matemática com a sua História. Após trabalharmos o conceito de equação do primeiro grau com uma abordagem histórica, entendemos que houve uma mudança de percepção, ao menos relacionada a este conceito, pois alguns alunos(as) quando questionados se a Matemática tem História citaram como justificativa os métodos históricos estudados.

Destacamos que encontramos algumas dificuldades durante a implementação do conjunto de atividades, algumas decorrentes do conjunto de atividades explorar aspectos da HM e outras do processo de estar em sala de aula. Com relação às dificuldades decorrentes do processo de estar em sala de aula, destacamos a questão do tempo, já que algumas atividades não puderam ser finalizadas, devido ao planejamento da professora regente já estar atrasado. Destacamos ainda que a pesquisadora não era a professora das turmas, nas quais, o conjunto de atividades fora implementado, fato que pode ter causado certa mudança no cenário no qual os(as) alunos(as) já estavam acostumados(as), o que pode ter interferido no comportamento de determinados(as) alunos(as).

Com relação à proposta didática elaborada, notamos que não foram todos(as) os(as) alunos(as) que se sentiram motivados(as) e interessados em relação aos aspectos relacionados à HM, situação que pode ocorrer com qualquer outra abordagem, visto que não é possível atingir todos(as) os(as) alunos(as) na mesma medida e da mesma forma. Além disto, durante a implementação do conjunto de atividades, pudemos perceber que determinadas mudanças podem ser realizadas, conforme indicadas ao longo do texto, com o intuito de explorar melhor determinados aspectos.

Diante do exposto, enfatizamos que, em nosso entender, a utilização da HM quando organizada juntamente com outras abordagens, tais como a resolução de problemas e a utilização de jogos no conjunto de atividades elaborado, pode auxiliar no ensino da equação do primeiro grau e nos métodos de resolvê-la. Ressaltamos que não estamos defendendo a utilização da HM em detrimento de outras abordagens, pois estas têm suas potencialidades, podendo auxiliar na compreensão dos conceitos matemáticos, defendemos, assim como autores que estudam as potencialidades da HM no ensino, uma maior utilização desta e que esta quando organizada em conjunto com outras abordagens possui a capacidade de colaborar com a aprendizagem de determinados conceitos.

Desse modo, a presente investigação evidencia a possibilidade da utilização de métodos históricos para uma abordagem de equação do primeiro grau que se difere da tradicional regra “muda de lado, muda o sinal”, podendo propiciar um maior entendimento do que significa resolver uma equação do primeiro grau.

REFERÊNCIAS

ALVES, E. V.; BRITO. M. R. F. Relações entre a percepção da estrutura de um problema, a memória e a memória matemática. **Temas em Psicologia.** Ribeirão Preto, v. 15, n. 2, p. 207-215, dezembro, 2007. Disponível em: < http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=513751431006> Acesso em: 28 de agosto de 2019.

ANDRINI, A.; VASCONCELOS, M. J. **Praticando Matemática**. 4º ed. – Editora do Brasil. 2015. (7º ano – ensino fundamental).

ARAMAN, E. M. O. **Contribuições da História da Matemática para a Construção dos Saberes do Professor de Matemática.** 2011. 240 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina. Londrina/PR, 2011.

ARAUJO, E. A. Ensino de álgebra e formação de professores. **Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo, v.10, n.2, p. 331-346, nov. 2008. Disponível em: < https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/1740>. Acesso em: 25 de maio de 2019.

BALESTRI, R. D. **A participação da história da matemática na formação inicial de professores de matemática na ótica de professores e pesquisadores**. 2008. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina/PR, 2008.

BARBEIRO, E. C. C. **A aprendizagem das equações do 1º grau a uma incógnita:** Uma análise dos erros e das dificuldades de alunos do 7º ano de escolaridade. 2012. 109 f. Relatório (Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e Secundário) – Universidade de Lisboa, 2012.

BARONI, R. L. S.; TEIXEIRA, M. V.; NOBRE, S. R. A Investigação Científica em História da Matemática e suas Relações com o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, p. 164-185, 2004.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A Matemática Através dos Tempos:** um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2 ed. São Paulo: Editora Blucher, 2010. (Tradução: Elza Gomide e Helena Castro)

BERNARDES, A. C. S. **História e Ensino de Matrizes: Promovendo reflexões sobre o Discurso Matemático.** 2016. 286 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

BERTATO, F. M. A Falsa (Su-)Posição? Tradução dos Problemas 24, 25, 26 e 27 do Papiro de Rhind. **RBHM**, v. 18, n. 36, p. 11-29, março, 2018.

BEZERRA, O. **Investigação histórica nas aulas de matemática**: avaliação de duas experiências. 2008. 124 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2008.

BRANDEMBERG, J. C. Sobre o uso da História da Matemática no Ensino de Equações Algébricas. Revista **COCAR**, Edição Especial, n. 3, p. 167-186, jan./jul. 2017. Disponível em: <http://páginas.uepa.br/seer/index.php/cocar> Acesso em: 13 de março de 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Ensino de quinta a oitava séries: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRITO, A. J.; CARVALHO, D. L. Utilizando a História no ensino de Geometria. In: MIGUEL, A.; BRITO, A. J.; CARVALHO, D. L.; MENDES, I. A. (Org.) **História da Matemática em atividades didáticas**. São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 13- 103.

______. ; MENDES, I. A. Apresentação. In: MIGUEL, A.; BRITO, A. J.; CARVALHO, D. L.; MENDES, I. A. (Org.) **História da Matemática em atividades didáticas**. São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 9-11.

BROLEZZI, A. C. **A arte de contar**: uma introdução ao estudo do valor didático da História da Matemática. 1991. 78 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991.

BRUM, L. D. **Análise de erros cometidos por alunos de 8º ano do ensino fundamental em conteúdos de álgebra.** 2013. 94 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2013.

CARLINI, E. M. P.; CAVALARI, M. F. As funções didáticas da História da Matemática nos livros didáticos de Matemática do ensino médio. **Hipátia**. v. 2, n.2, p. 73-88, dez. 2017.

CARVALHO, L. S.; CAVALARI, M. F. A História da Matemática na Educação Básica: Concepções de licenciandos(as) em Matemática. **Res. Soc. Dev.** v. 8, n. 4, fevereiro, 2019. Disponível em: < http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i4.872 > Acesso em: 03 de maio de 2019.

CHAQUIAM, M. **Ensaios temáticos História e Matemática em sala de aula.** Belém/PA: SBEM/SBEM-PA, 2017.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados.** v. 32, n. 94, p. 171-187, dezembro, 2018. Disponível em: < https://doi.org/10.1590/s0103-40142018.3294.0013>. Acesso em: 18 de dezembro de 2019.

COSTA, A. S.; AZEVEDO, J. M.; RODRIGUES, M. P.; HAUSCHILD, C. A.; DULLIUS, M. M. Investigando as dificuldades apresentadas em álgebra por alunos do oitavo ano do ensino fundamental. **Destaques Acadêmicos**. Lajeado, v.8, n.4, p. 159-176, 2016. Disponível em:

<http://univates.br/revistas/index.php/destaques/article/view/1224 > Acesso em: 18 de agosto de 2018.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: Métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução de Luciana de Oliveira da Rocha. 2º ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática:** da teoria à prática. 17 ed. Campinas/SP: Editora, 2009. (coleção Perspectivas em Educação Matemática)

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: UNICAMP, 2004.

FAERMAM, L. A. A pesquisa participante: suas contribuições no âmbito das ciências sociais. **Revista Ciências Humanas**. Taubaté/SP (UNITAU), v. 7, n. 1, junho, 2014. Disponível em: < https://doi.org/10.32813/2179-1120.2014.v7.n1.a121> Acesso em: 03 de maio de 2019.

FAUVEL, J. Using history in mathematics education. **For the Learning of Mathematics**. v. 11, n. 2, p. 3-6, 1991.

FELICIANO, L. F. **O uso da História da Matemática em sala de aula**: o que pensam alguns professores do ensino básico. 2008. 171 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

FERNANDES, C. F. **Equações de 1º grau estratégias e erros na resolução e simplificação de equações do 1º grau**. 2011. 134 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática), Universidade de Lisboa, Lisboa, 2011.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2012. (Coleção formação de professores)

______; MIORIM. M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar a educação algébrica elementar. **Pró-Posições**. v.1, n. 4, p. 78-91, março, 1993.

FITA, E. C. O professor e a Motivação dos alunos. In: FITA, E. C.; TAPIA, J. A (Org.) – Tradução Sandra Garcia. **A motivação em sala de aula:** o que é, como se faz. 11 ed. São Paulo: Edições Loyola, 2015. p. 65-133.

FLICK, U. **Qualidade na pesquisa qualitativa.** Tradução Roberto Cataldo Costa; Porto Alegre: Artmed, 2009. (Coleção Pesquisa Qualitativa)

FOSSA, J. A. Recursos pedagógicos para o ensino da matemática a partir das obras de dois matemáticos da Antiguidade. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N.(Org.) **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006. p. 137-182.

______. Matemática, história e compreensão. **Revista Cocar.** Belém, v. 2, n. 4, p. 7-16, novembro, 2008. Disponível em <http://paginas.uepa.br/seer/index.php/cocar/article/

view/77>. Acesso em: 11 de setembro de 2017.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. 2008. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/RS, 2008.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. 5ª. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GONÇALVES, I. M. F. L. **Os Problemas da Matemática:** O seu papel na Matemática e nas aulas de Matemática. 2011. 491 f. Tese (Doutoramento em Matemática – Ensino da Matemática). Universidade da Madeira, 2011.

LARA, I. C. M. O ensino de Matemática por meio da História da Matemática: Possíveis articulações com a Etnomatemática. **VIDYA.** Santa Maria, v. 33, n. 2, p. 51-62, jul./dez., 2013. Disponível em: < https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/254> Acesso em: 15 de setembro de 2019.

LEITE, E. C. R.; RUIZ, J. B.; RUIZ, A. M. C.; AGUIAR, T. F.; OLIVEIRA, M. R. C. Influência da Motivação no processo de ensino-aprendizagem. **Akrópolis**. Umuarama, v. 13, n. 1, p. 23-29, jan./mar. 2005. Disponível em: < https://doi.org/10.25110/akrópolis.v13i1.450> Acesso em: 20 de novembro de 2019.

LEMOS, E. S. A aprendizagem significativa: estratégias facilitadoras e avaliação. **Aprendizagem Significativa em Revista.** v. 1, n. 1, 2011. Disponível em: < https://www.arca.fiocruz.br/handle/icict/16653> Acesso em: 5 de setembro de 2019.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectiva em aritmética a álgebra para século XXI**. Campinas: Editora Papirus, 1997.

KATZ, V. **História da Matemática**. Tradução: Ana Sampaio/Felipe Duarte. Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

MAIOLI, M. **A contextualização na matemática do Ensino Médio**. 2012. 211 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2012.

MACEDO, C. C.; SILVA, L. F. Os processos de contextualização e a formação inicial de professores de física. **Investigações em Ensino de Ciências.** v. 19, n. 1, p. 55-75, novembro, 2014.

MARTINS, J. **O livro que divulgou o papiro Rhind no Brasil**. 2015. 232 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquista Filho”, Rio Claro, São Paulo, 2015.

MEDEIROS, C. F.; MEDEIROS, A. O método da Falsa Posição na História e na Educação Matemática. **Ciência & Educação**, v. 10, n. 3, p. 545-557, 2004.

MENDES, I. A. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. (Or.) **A História como**

um agente de cognição na Educação Matemática. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006. p. 79-136.

______. Atividades históricas para o ensino da trigonometria. In: MIGUEL, A.; BRITO, A. J.; CARVALHO, D. L.; MENDES, I. A. (Org.) **História da Matemática em atividades didáticas**. São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 105- 178.

______.; CHAQUIAM, M. **Histórias nas aulas de Matemática:** fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: Editora SBHMat, 2016, 124p.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre história e educação matemática.** 1993. 346 f. Tese (Doutorado em Educação) -Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

______. As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**. Campinas, v. 5, n. 8, p. 73-105, jul./dez. 1997.

______. MIORIM M.A. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2008. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

MORAES, S. R. A.; CAVALARI, M. F. A História da Matemática nos cursos de licenciatura em Matemática de Universidades Federais localizadas no estado de Minas Gerais. **RPEM** (revista Paranaense de Educação Matemática). Campo Mourão, v. 8, n. 17, p. 121-148, jul.,/dez. 2019. Disponível em: < https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/254 > Acesso em: 14 de julho de 2019.

MOURA, A. R. L.; SOUSA, M. C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetiké.** Cempem-FE-Unicamp, v. 13, n. 24, p. 11-46, jul./dez. 2005.

OLIVEIRA, S. C.; LADAURES, J. B. Pensamento algébrico: uma relação entre álgebra, aritmética e geometria. In: ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2015, São João del-Rei- MG. *Anais* ... São João del-Rei: SBEM-MG, 2015. Disponível em: < http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/PENSAMENTO-ALGÉBRICO-UMA-RELAÇÃO-ENTRE-ÁLGEBRA-ARITMÉTICA-E-GEOMETRIA.pdf> Acesso em: 20 de maio de 2018.

OMENA, B. S. S. **A História da Matemática em propostas didáticas presentes em teses e dissertações brasileiras**. 2015. 75 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências), Universidade Federal de Itajubá, Itajubá - MG, 2015.

PANOSSIAN, M. L. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra**. 2014. 318 f. Tese (Doutorado), Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

PONTE, J. P. As equações nos manuais escolares. **RBHM** (Revista Brasileira de História da Matemática). v. 4, n. 8. p. 149-170, outubro, 2004. Disponível em: < http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3990/1/04-

Ponte%20%28equacoes%29%20RBHM.pdf> Acesso em: 27 de março de 2018.

______. Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores – Anais do XIV EIEM (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE. 2006. Disponível em: < http://repositorio.ul.pt/handle/10451/4525 > Acesso em: 27 de março de 2018.

______.; BRANCO, N; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico.** Lisboa: ME-DGIDC, 2009. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10400.15/1994>. Acesso em: 25 de junho de 2019.

RIBEIRO, A. J. A noção de equação e suas diferentes concepções: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos. **RBECT** (Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia). v. 2, n. 1, p. 70-86, jan./ abr. 2009. Disponível em: < https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/312 > Acesso em: 27 de junho de 2018.

______.; BEZERRA, F. J. B; SILVA, L. R. Mapeamento de concepções de Álgebra: uma alternativa para compreender seus diversos significados. **Acta Scientiae** (Revista de Ensino de Ciências e Matemática). Canoas, v. 18, n. 2, p. 419-434, maio/ago. 2016. Disponível em: < http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/2081>. Acesso em: 27 de maio de 2019.

ROQUE, T. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

RORATTO, C.; NOGUEIRA, C. M. I.; KATO. L. A. Ensino de Matemática, História da Matemática e aprendizagem significativa: uma combinação possível. **Investigações em Ensino de Ciências.** v. 16, n. 1, p. 117-142, 2011. Disponível em: < https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/250/175> , Acesso em: 25 de maio de 2019.

SAITO, F.; DIAS, M. S. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação.** Bauru, v. 19, n.1, p. 89-111, 2013. Disponível em: < http://dx.doi.org/10.1590/S1516-73132013000100007 > Acesso em: 16 de novembro de 2018.

SANTOS, C. A. **A história da matemática como ferramenta no processo de ensino-aprendizagem da Matemática**. 2007. 94 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

SANTOS, M. R. **Compreensões de professores do ensino médio acerca da utilização da História da Matemática no ensino de Matemática**. 2017. 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá/MG, 2017.

SILVA, J. T.; RESENDE, M. R.; IBHAHIM, S. A.; FERNANDES, F. As concepções de álgebra e de educação algébrica – uma análise de livros didáticos do 8º ano. **Revista Profissão Docente Online**. Uberaba, v. 15, n.33, p. 127-145, ago.-dez, 2015.

Disponível em: < http://revistas.uniube.br/index.php/rpd/article/view/1014 > Acesso em: 16 de abril de 2018

SILVA, J. T.; RESENDE, M. R. Livro Didático e Apropriação de Conceitos Algébricos: uma análise na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural. **Perspectivas da Educação Matemática,** Mato Grosso do Sul, v. 9, n. 20, p. 388-408, 2016. Disponível em: < http://seer.ufms.br/ojs/index.php/pedmat/article/view/2147/3102 >. Acesso em: 22 de maio de 2019.

SOUTO, R. M. A. **História e Ensino da Matemática**: um estudo sobre as concepções do professor do ensino fundamental. 1997. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1997.

______. História na Educação Matemática: um estudo sobre trabalhos publicados no Brasil nos últimos cinco anos. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 23, n 35B, p. 515-536, abril, 2010. Disponível em <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/3765>. Acesso em: 14 de novembro de 2017.

SPERAFICO, I. L. S.; DORNELES, B. V.; GOLBERT, C. S. Competência Cognitiva e resolução de Problemas com Equações Algébricas do 1º grau. **BOLEMA**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 333-348, abr. 2015. Disponível em: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/8545 > Acesso em: 05 de julho de 2018.

TAPIA, J. A. Contexto, Motivação e Aprendizagem. In: FITA, E. C.; TAPIA, J. A (Org.) – Tradução Sandra Garcia. **A motivação em sala de aula:** o que é, como se faz. 11 ed. São Paulo: Edições Loyola, 2015. p. 13-59.

TAVARES, R. Aprendizagem Significativa. **Revista Conceitos.** v. 10, p. 55-60, junho, 2004. Disponível em: < http://www.fisica.ufpb.br/~Romero/objetosaprendizagem/Rived/Artigos/2004-RevistaConceitos.pdf> Acesso em: 27 de outubro de 2019.

VALDÉS, J. E. N. A história como elemento unificador na educação matemática. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. (Org.) **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006. p. 15-78.

VIANNA, C. R. **Matemática e História**: algumas relações e implicações pedagógicas. 1995. 228f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

VIEIRA, G. M. **Estratégias de "Contextualização" nos livros didáticos de Matemática dos ciclos iniciais do ensino fundamental.** 2004. 139f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Belo Horizonte, 2004.

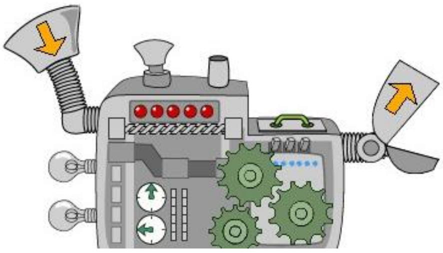
WUSSING, H. **Leciones de historia de las matemáticas**. Siglo XXI de España Editores. 1998

APÊNDICES

Apêndice 1 – Atividade da Máquina de números

A MÁQUINA DE NÚMEROS

Os amigos Carlos e Julia, estavam brincando e inventaram uma máquina de números, conforme a apresentada a seguir:



Carlos programou a máquina para dobrar números, assim cada número que entrava a máquina fornecia o seu dobro, com isso eles montaram a seguinte tabela.

Entrada	Saída
1	2
2	4
3	6
...	
★	?

Eles se perguntaram, e se entrar um número qualquer representado por uma estrela, qual o número sairia da máquina? Como você representaria esse número?

Júlia gostou tanto da máquina programada por Carlos que decidiu reprogramá-la para fazer o seguinte processo: triplicar o número que entra e subtrair dois. Complete a tabela encontrando os valores que vão sair da máquina de números. E responda, e se entrar um número qualquer representado por um coração, qual número sairia da máquina? Como você representaria esse número.

Entrada	Saída
1	
2	
3	
...	
♥	

Apêndice 2 – Definições, exemplos e exercícios que utilizamos para abordar as expressões algébricas, em específico a transformação para a linguagem algébrica

Definição - Expressão algébrica é uma expressão que contém números e letras. Na Expressão algébrica as letras são chamadas de variáveis e podem assumir qualquer valor real.

Exemplos:

Linguagem usual	Expressão algébrica
O dobro de um número	$2c$
Um terço de um número	$\frac{1}{3}a \; ou \; \frac{a}{3}$
Um número mais seis	$d + 6$
O triplo de um número menos três	$3v - 3$
O quadrado de um número mais 2	$b^2 + 2$
O cubo de um número menos 5	$k^3 - 5$

- Todas as expressões possuem um **termo algébrico** que é um elemento da expressão com um coeficiente (parte numérica) e uma parte literal (parte com letras).

Ex. a) O dobro de um número: expressão algébrica $2k$, o termo algébrico dessa expressão é $2k$, com coeficiente 2 e parte literal k

b) O quádruplo de um número menos 5: expressão algébrica $4p - 5$, termo algébrico dessa expressão é $4p$, com coeficiente 2 e parte literal p

c) A metade de um número mais 4: Expressão algébrica $\frac{m}{2} + 4$, o termo algébrico dessa expressão é $\frac{m}{2}$, com coeficiente ½ e parte literal m.

Exercício

1) Passe da linguagem usual para a linguagem algébrica as seguintes expressões algébricas.

a) Um número mais três quartos desse número
b) O triplo de um número menos 15
c) Um quarto de um número menos o dobro desse número
d) O quádruplo de um número mais a sua terça parte.
e) O triplo de um número mais a quinta parte desse número
f) A metade de um número menos 8
g) Um terço de um número mais 17
h) O perímetro e a área de um quadrado

Apêndice 3 – Definições, exemplos e exercícios que utilizamos para abordar as expressões algébricas equivalentes

Expressão algébrica equivalente

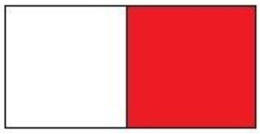
Questões iniciais:

- O que vocês entendem por equivalência?

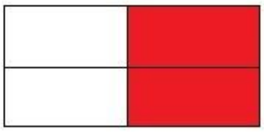
(Características das grandezas que possuem o mesmo valor, ou seja, algo que não é igual, mas que representa a mesma coisa).

Ex. Uma moeda de 50 centavos e duas moedas de 25 centavos, representam o mesmo valor, mas não são iguais.

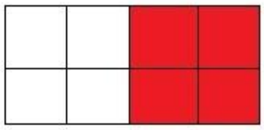
- Existe algo de comum entre as frações abaixo?



$\frac{1}{2}$



$\frac{2}{4}$



$\frac{4}{8}$

(As frações são equivalentes já que representam a mesma parte do todo)

- Observando as expressões algébricas $3(a+2)+5\ e\ 3a+11$, o que elas têm em comum? São equivalentes?

(As expressões são equivalentes, pois ao atribuirmos valores para *a* em ambas as expressões, vamos obter os mesmos resultados).

Definição: Duas expressões algébricas são equivalentes quando ao atribuirmos o mesmo valor as suas variáveis, elas resultam no mesmo valor.

Exemplo: Representar o perímetro de um retângulo onde o comprimento é o triplo da largura.

Supondo que a largura seja *g* o comprimento seja *3.g* então o perímetro é *g+3g+g+3g* como *g* é uma medida, podemos colocá-la em evidencia *g.(1+3+1+3)=8g*.

Exercícios

1) Represente, utilizando uma expressão algébrica, o perímetro de:
   a) Um quadrado de lado q.
   b) Um triângulo equilátero de lado *t*.
   c) Um retângulo, em que, a largura é a metade do comprimento *c*.

2) Para cada um dos casos a seguir escreva uma expressão algébrica equivalente.
   a) $2b + 4b$
   b) $9m - 6m$
   c) $5a + 6a - 2a$
   d) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x$
   e) $2c + 5y - 3c + y$

3) (Adaptada de Brum – 2013) Carlos montou foguetes usando palitos. Conforme imagem a seguir:

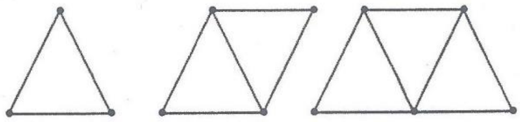
Observando os palitos e a sequência formada, responda:

a) Quantos palitos foram usados na figura 1?
b) Quantos palitos foram usados na figura 2 e na 3?
c) Para construir a quarta figura quantos palitos serão utilizados? E na quinta?
d) Escreva uma regra para calcular a quantidade de palitos para construir qualquer figura?
e) Utilizando essa regra, calcule a quantidade de palitos que serão utilizados para construir a 15º figura da sequência.

Apêndice 4 – Atividade em equipe para a investigação de padrões

Investigando padrões

1) Observem a sequência de figuras e a quantidade de palitos utilizados para construí-las.



Em seguida,

a) Completem a seguinte tabela com o número de palitos necessários para formar os triângulos:

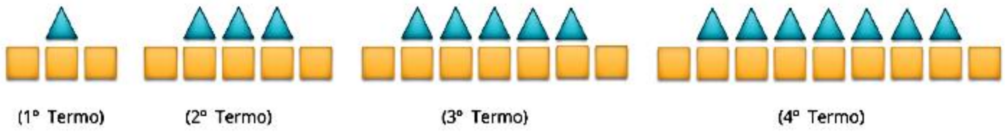
Quantidade de triângulos	Quantidade de palitos
1	3
2	5
3	
4	
5	
...	...

b) Ao completar a tabela vocês notaram alguma relação, entre a quantidade de triângulos e quantidade de palitos gastos? Qual?
c) Escreva uma expressão numérica para cada linha da tabela, relacionando a quantidade de palitos gastos e a quantidade de triângulos construídos.
d) Observando as expressões numéricas, escreva uma expressão algébrica para representar essa relação.
e) A partir da expressão algébrica encontrada, determine a quantidade de palitos necessária para formar:

- 20 triângulos
- 77 triângulos

e) Quantos triângulos é possível formar com 41 palitos? E com 101?

2) Observe as seguintes figuras:



A quantidade de triângulos em cada posição pode ser representada por 1, 3, 5, 7 ...
Já a quantidade de quadrados pode ser representada por 3, 5,7, 9

Com base, nessas informações, responda:

a) Qual a quantidade de quadrados e de triângulos no 5º termo?
b) Essas sequências são iguais? Por quê?
c) É possível representá-las utilizando expressões algébricas? Quais?

Apêndice 5 – Problema do Táxi, definição de valor numérico de uma expressão algébrica e exercícios

Problema do Táxi

Táxi é um veículo comumente utilizado no mundo todo para o transporte de passageiros. Cada táxi possui um taxímetro, um aparelho cuja função é calcular o preço da “corrida” ou “viajem”. Esse cálculo é feito considerando uma taxa inicial, chamada de bandeirada, mais uma taxa em relação à quantidade de quilômetros percorridos.

Vamos supor que o taxista Marcelo, para uma corrida de táxi, cobra de bandeirada R$ 5,50 mais R$ 2,50 por cada quilômetro percorrido. Dessa forma quanto custaria as seguintes corridas:

a) Maria precisa chegar para sua aula de dança que fica a três quilômetros de sua casa, quanto pagaria ao taxista Marcelo pela corrida?
b) João quer comprar um tênis novo, e sua casa fica a quatro quilômetros e meio do centro comercial de sua cidade, quanto custaria à corrida de João?
c) Três irmãs decidem sair para fazer compras em uma loja que inaugurou recentemente em sua cidade, sabendo que a distância de casa a loja é de quatro quilômetros, e que elas foram e voltaram no mesmo taxi, e ainda receberam do taxista Marcelo um desconto de R$1,00, quantos reais cada irmã gastou com as corridas de taxi?
d) Represente, utilizando uma expressão algébrica, o cálculo realizado pelo taxista Marcelo para saber quantos reais deve cobrar de cada passageiro.

(Após a socialização da atividade do Táxi, retomamos a atividade da máquina de números, com o intuito de definir com os(as) alunos(as) que os números que saem da máquina de números e o preço da corrida de taxi, são valores numéricos de uma expressão algébrica)

Exemplo- João reprogramou a máquina de números inventada por Carlos e Júlia, para que ela triplicasse os números que entrasse e somasse 2 ao resultado. Dessa forma,

a) Se entrar o número 2, qual número que sai?
b) Se entrar o número 5, qual número que sai?
c) Se entrar o número 1/3, qual número que sai?
d) Se entrar um número qualquer, que número sairia?

DEFINIÇÃO - Valor numérico de uma expressão algébrica é o valor que ela assume quando substituímos cada letra por um número e efetuamos as operações indicadas.

Exercício – Calcule o valor numérico para cada expressão algébrica a seguir.

a) $3.f + 4$ para $f = 2$
b) $2g - 6$ para $g = 4$
c) $\frac{1}{2}.d + 5$ para $d = 10$
d) a^2 -2.a para $a = 3$
e) $5.m + \frac{n}{2}$ para $m = 2\ e\ n = 4$
f) $7.x + \frac{x}{3}$ para $x = 6$

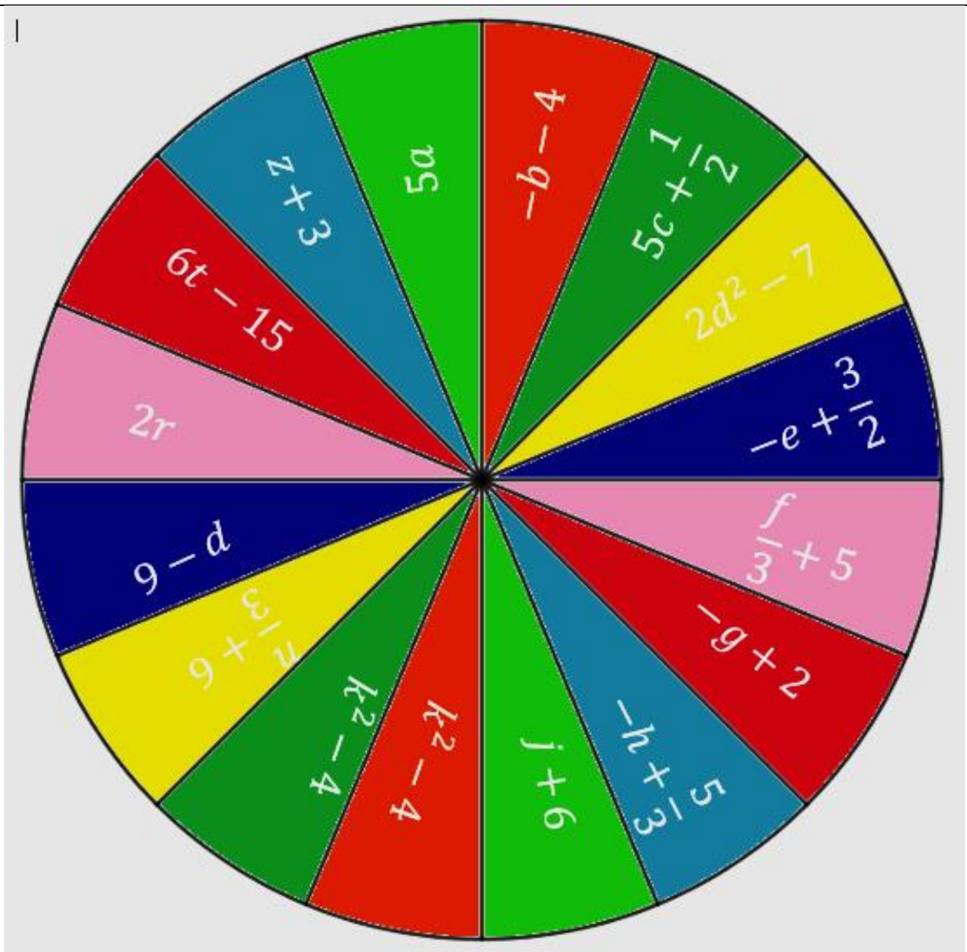
Apêndice 6 – Jogo "Roleta da expressão algébrica"

Roleta da expressão algébrica

O jogo que consiste em uma roleta com 16 expressões algébricas e dois dados, um enumerado de 1 a 6 e o outro com três sinais de + e três sinais de -. Sendo assim, o jogo apresenta 12 possibilidades de números, sendo seis positivos e seis negativos. Os(as) alunos(as) giram a roleta que vai parar em uma expressão algébrica, em seguida eles(as) jogam os dois dados (o de número e o do sinal) ao mesmo tempo, e com o valor obtido ao jogar os dados, os(as) alunos(as) vão encontrar o valor numérico da expressão algébrica indicada.

Estrutura da competição

1º - Separar os(as) alunos(as) em grupos de 4 integrantes e dentro dos grupos separar duas duplas;
2º - Dentro de cada grupo, as duplas decidem por ímpar ou par qual vai começar o jogo;
2º - Cada dupla joga uma vez, iniciando com a que ganhou no ímpar ou par, até cada dupla ter jogado cinco vezes;
3º- Depois de cinco jogadas para cada dupla, cada dupla soma os valores numéricos encontrados.
4º - A dupla com a maior soma dos valores numéricos ganha.
5º- As duplas vencedoras de cada grupo formam novos grupos até restar uma dupla vencedora.



Apêndice 7 – Exercícios sobre expressão algébrica e valor numérico de uma expressão algébrica

Exercícios:

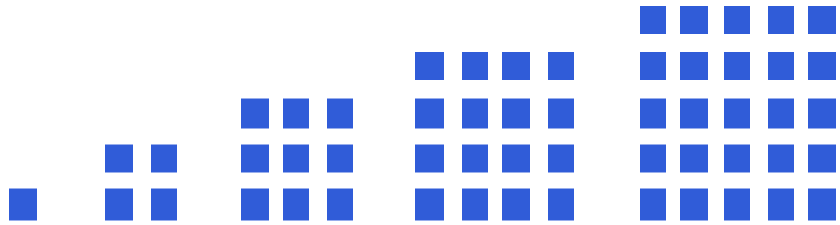
1 - Escreva a expressão algébrica que representa a quantia de dinheiro que cada criança tem, sabendo que João tem uma quantidade j de reais.

a) Maria tem o triplo de João.
b) André tem a metade de João
c) Lucas tem um terço de João
d) Patrícia tem o dobro de João.
e) Supondo que a quantia de dinheiro de João seja, $j = 6$ reais, qual a quantia de Maria, André, Lucas e Patrícia.

2 - Sendo ▲ e ♥ dois números racionais, represente em linguagem matemática simbólica:

a) A soma desses números
b) A diferença desses números
c) O dobro de ▲ menos o quádruplo do ♥
d) O produto desses números
e) A razão desses números
f) Supondo que ▲= 2 e ♥ =3 calcule o valor numérico das expressões anteriores.

3 - Observe a sequência de figura a seguir



a) Qual a quantidade de quadradinhos tem no sexto termo?
b) Escreva uma expressão algébrica que relacione o número de quadradinhos para um termo qualquer.
c) Qual a quantidade de quadradinhos que encontramos no 12º termo?

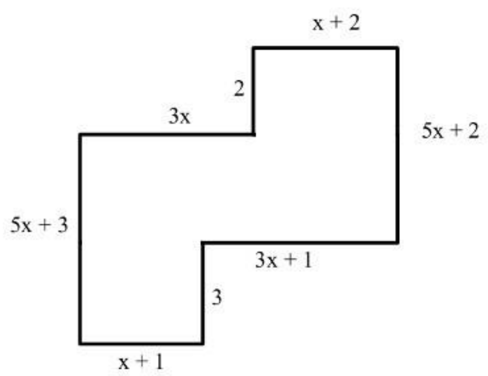
4 - Calcule o valor numérico das expressões algébricas abaixo, sabendo que as variáveis *a, b* e *c* assumem os seguintes valores $a = 3, b = ½\ e\ c = -4$

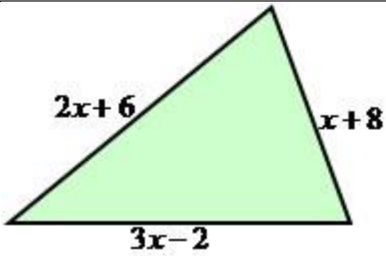
a) $a + b$
b) $2a - c$
c) $3b + \frac{1}{3}c$
d) $\frac{5}{4}a - 5b$

6 - (Inspirada no livro Matemática BIANCHINI) - Uma empresa de confecção assume o custo mensal fixo de R$10.000,00 para o pagamento de algumas despesas com funcionários e impostos, além do custo de R$ 2,50 para cada camiseta produzida. Assim, o custo mensal para essa empresa pode ser dado pela expressão algébrica $10{,}000 + 2{,}5.C$, onde C é a quantidade de camisetas fabricadas pela empresa em determinado mês. Sabendo disso, responda:

a) Determine o custo para a empresa no mês em que eles fabricaram 1.000 camisetas.
b) Supondo que todas as 1.000 camisetas foram vendidas por R$25,00, a empresa vai ter lucro ou prejuízo? De quantos reais?

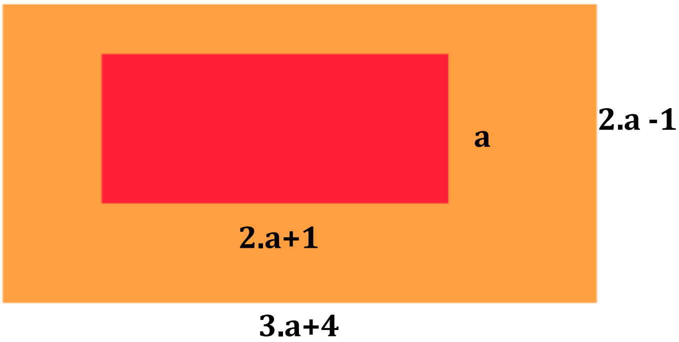
7 – Considerem os polígonos a seguir e responda as questões



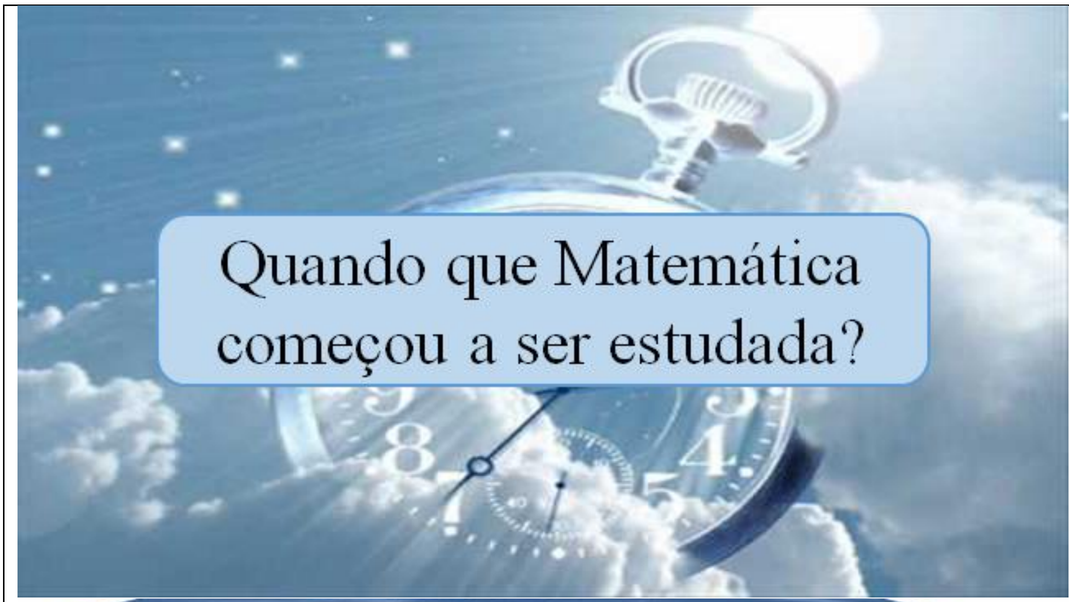


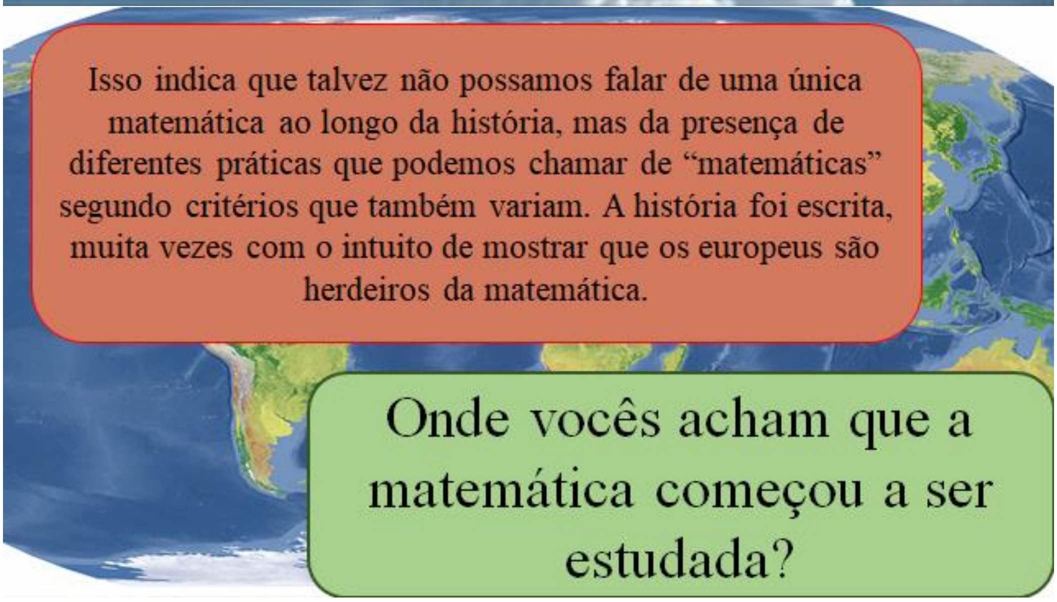
a) Determine a expressão algébrica que representa o perímetro de cada polígono.
b) Se $x = 2$, qual o perímetro de cada polígono.

8) (Adaptada de BRUM - 2013) Encontre a área da região colorida de vermelho.



Apêndice 8 – Slides e roteiros utilizados para a pesquisa sobre algumas civilizações antigas e suas contribuições a Matemática





(Com essa questão temos o intuito de motivar uma discussão inicial para a realização da pesquisa sobre algumas civilizações antigas (Babilônia, Maia, Egito, Grego, China, Índia, Ocidente Europeu) e suas contribuições a Matemática.)

Roteiro para o desenvolvimento da pesquisa:

Civilização Babilônica

- Qual região essa civilização ocupava?
- Época que existiu?
- Quais conceitos matemáticos eles tinham conhecimento?
- Curiosidades sobre a civilização.

Site principal para referência - http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/babilonia2.htm

Outros Sites, que podem ser utilizados para a pesquisa:
https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/historiageral/babilonios.htm
https://www.historiadomundo.com.br/babilonia/civilizacao-babilonica.htm
http://www.matematica.br/historia/babilonia.html
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm28/babilonios.htm

http://plato.if.usp.br/1-2003/fmt0405d/apostila/antig3/node3.html
Obs.: fica a critério da equipe a utilização ou não desses sites, são apenas algumas sugestões, sendo possível a realização dessa pesquisa em outros sites e em livros.

Civilização Grega

- Qual região essa civilização ocupava?
- Época que existiu?
- Quais conceitos matemáticos eles tinham conhecimento?
- Curiosidades sobre a civilização.

Site principal para referência - http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/grecia%20.htm
Alguns Sites, que podem ser utilizados para a pesquisa:
https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/historiageral/civilizacao-grega.htm
https://www.historiadomundo.com.br/grega/civilizacao-grega.htm
https://escolaeducacao.com.br/civilizacao-grega/
https://estudandomatematicasite.wordpress.com/2016/04/13/a-matematica-dos-antigos-gregos/
https://www.infoescola.com/historia/matematica-na-grecia-antiga/
Obs.: fica a critério da equipe a utilização ou não desses sites, são apenas algumas sugestões, sendo possível a realização dessa pesquisa em outros sites e em livros.

Civilização Maia

- Qual região essa civilização ocupava?
- Época que existiu?
- Quais conceitos matemáticos eles tinham conhecimento?
- Curiosidades sobre a civilização.

Site principal para referência - http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/imperiomaia2.htm
Alguns Sites, que podem ser utilizados para a pesquisa:
https://www.historiadomundo.com.br/maia
https://brasilescola.uol.com.br/historia-da-america/maias.htm
https://imaginariopuro.wordpress.com/2019/01/23/matematica-maia-contando-com-os-dedos-das-maos-e-dos-pes/
http://meioambiente.culturamix.com/recursos-naturais/a-ciencia-dos-maias-matematica-e-astronomia
Obs.: fica a critério da equipe a utilização ou não desses sites, são apenas algumas sugestões, sendo possível a realização dessa pesquisa em outros sites e em livros.

Civilização Egípcia

- Qual região essa civilização ocupava?
- Época que existiu?
- Quais conceitos matemáticos eles tinham conhecimento?
- Curiosidades sobre a civilização.

Site principal para referência - http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm
Alguns Sites, que podem ser utilizados para a pesquisa:

https://brasilescola.uol.com.br/historiag/egipcio.htm
https://www.sohistoria.com.br/ef2/egito/p2.php
https://www.suapesquisa.com/egito/
http://www.matematica.br/historia/egito.html
Obs.: fica a critério da equipe a utilização ou não desses sites, são apenas algumas sugestões, sendo possível a realização dessa pesquisa em outros sites e em livros.

Civilização Chinesa

- Qual região essa civilização ocupava?
- Época que existiu?
- Quais conceitos matemáticos eles tinham conhecimento?
- Curiosidades sobre a civilização.

Site principal para referência - http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/China2.htm
Alguns Sites, que podem ser utilizados para a pesquisa:
https://www.sohistoria.com.br/ef2/china/
https://www.historiadomundo.com.br/chinesa/civilizacao-chinesa.htm
https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/china/origens-civilizacao-chinesa.htm
https://www.somatematica.com.br/historia/oriental3.php
Obs.: fica a critério da equipe a utilização ou não desses sites, são apenas algumas sugestões, sendo possível a realização dessa pesquisa em outros sites e em livros.

Civilização Islâmica

- Qual região essa civilização ocupava?
- Época que existiu?
- Quais conceitos matemáticos eles tinham conhecimento?
- Curiosidades sobre a civilização.

Site principal para referência - http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/india2.htm
Alguns Sites, que podem ser utilizados para a pesquisa:
http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/islamica2.htm
https://www.estudopratico.com.br/civilizacao-islamica/
https://www.islamreligion.com/pt/articles/4761/um-breve-olhar-sobre-contribuicao-do-isla-para-matematica/
https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/influencia-civilizacao-islamica-no-brasil.htm
https://www.somatematica.com.br/historia/oriental2.php
https://www.historiadomundo.com.br/indiana/civilizacao-indiana.htm
https://www.infoescola.com/matematica/a-matematica-indiana-e-suas-contribuicoes/
http://evertonmatematicadia.blogspot.com/2015/12/matematica-hindu.html
Obs.: fica a critério da equipe a utilização ou não desses sites, são apenas algumas sugestões, sendo possível a realização dessa pesquisa em outros sites e em livros.

Astecas e incas

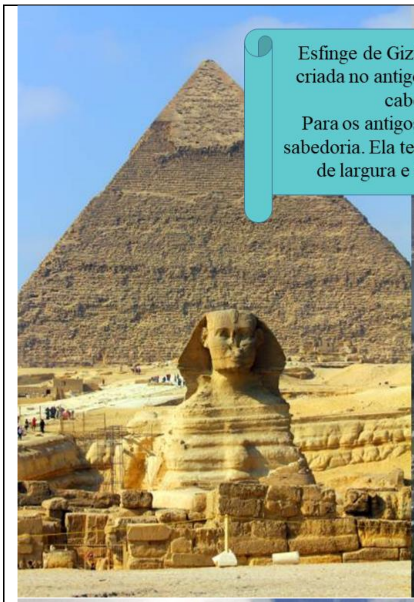
- Qual região essas civilizações ocupavam?
- Época que existiriam?

- Quais conceitos matemáticos eles tinham conhecimento?
- Curiosidades sobre essas civilizações.

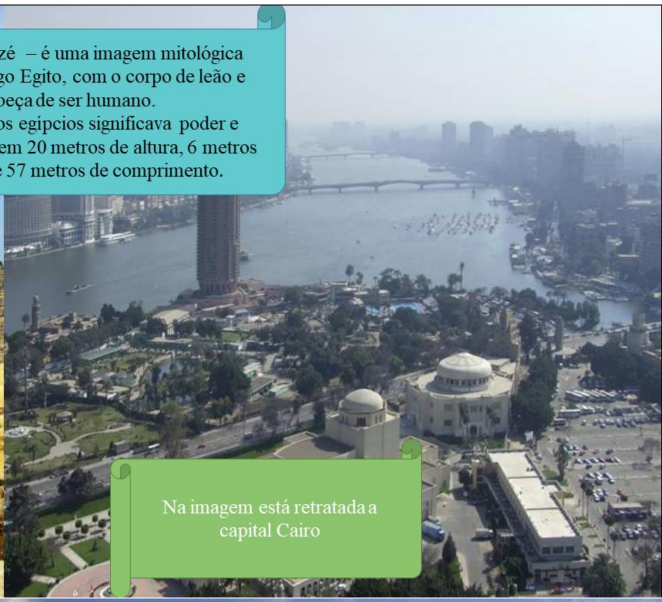
Alguns Sites, que podem ser utilizados para a pesquisa:
https://www.sohistoria.com.br/ef2/astecas/
https://www.historiadomundo.com.br/asteca
http://www.colegiofriburgo.com.br/projetos_2010/fund1/4_ano/povos/mateus/mateus2.htm
https://super.abril.com.br/historia/matematica-sem-numeros/
https://www.historiadomundo.com.br/inca
http://www.colegiofriburgo.com.br/projetos_2010/fund1/4_ano/povos/ricardo/ricardo.htm

Obs.: fica a critério da equipe a utilização ou não desses sites, são apenas algumas sugestões, sendo possível a realização dessa pesquisa em outros sites e em livros.

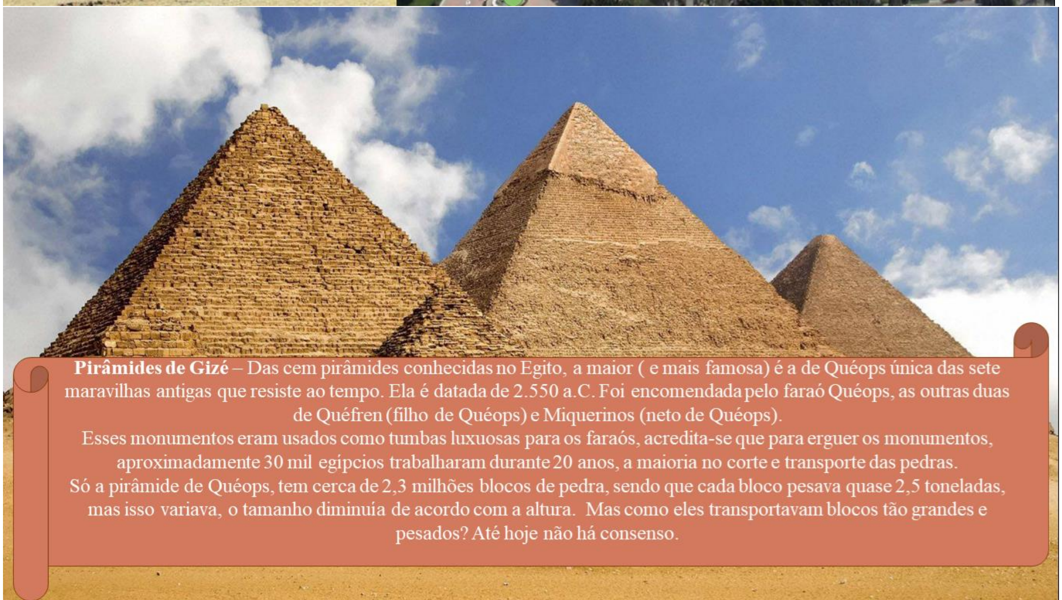
Apêndice 9 – Slides utilizados para contextualizar historicamente a resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita, exemplos e definições.



Esfinge de Gizé – é uma imagem mitológica criada no antigo Egito, com o corpo de leão e cabeça de ser humano.
Para os antigos egípcios significava poder e sabedoria. Ela tem 20 metros de altura, 6 metros de largura e 57 metros de comprimento.



Na imagem está retratada a capital Cairo

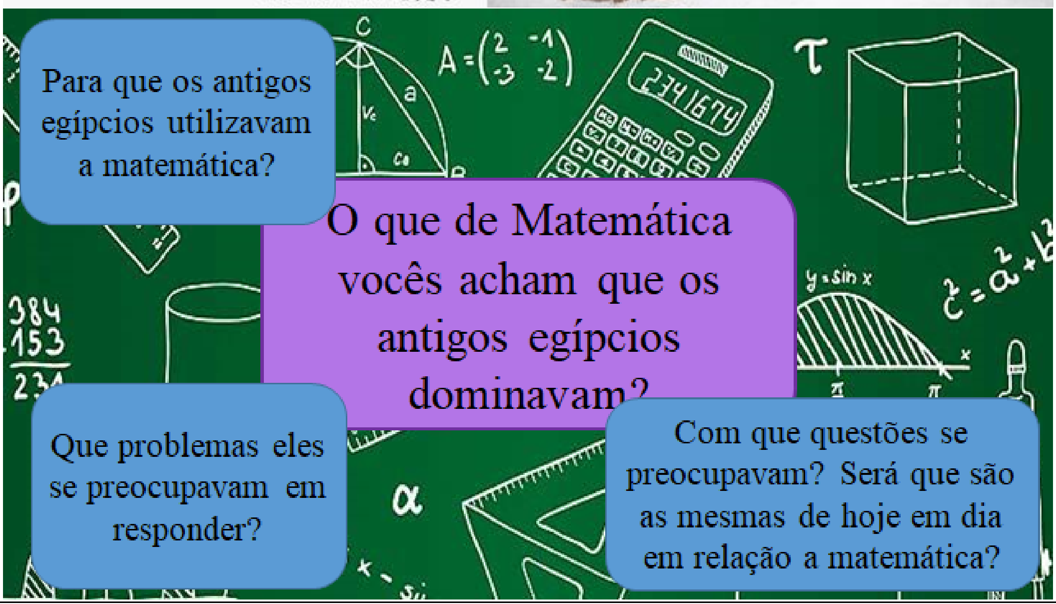


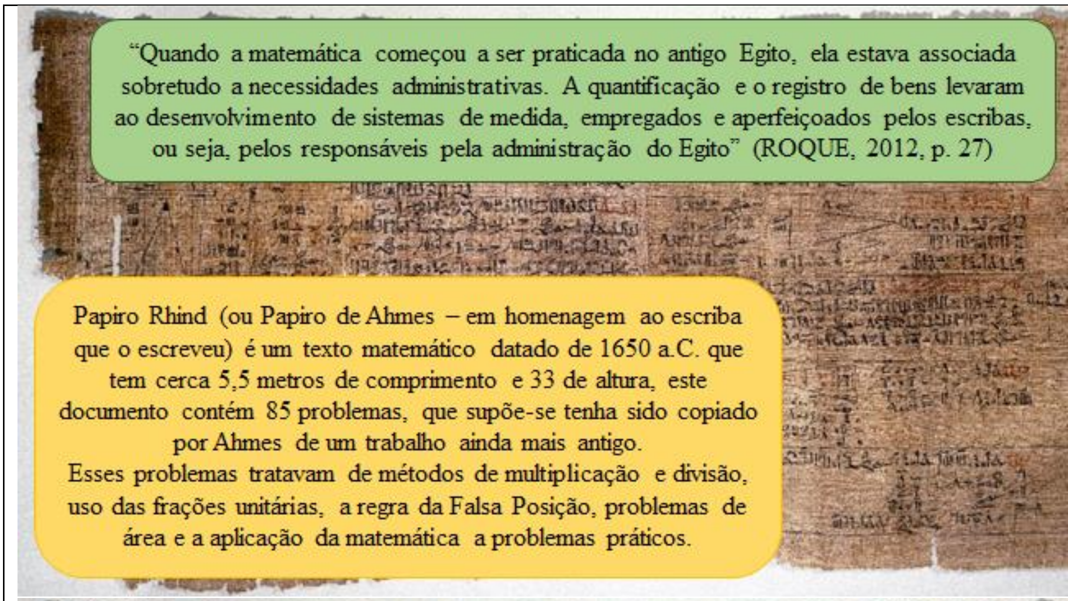
Pirâmides de Gizé – Das cem pirâmides conhecidas no Egito, a maior (e mais famosa) é a de Quéops única das sete maravilhas antigas que resiste ao tempo. Ela é datada de 2.550 a.C. Foi encomendada pelo faraó Quéops, as outras duas de Quéfren (filho de Quéops) e Miquerinos (neto de Quéops).
Esses monumentos eram usados como tumbas luxuosas para os faraós, acredita-se que para erguer os monumentos, aproximadamente 30 mil egípcios trabalharam durante 20 anos, a maioria no corte e transporte das pedras.
Só a pirâmide de Quéops, tem cerca de 2,3 milhões blocos de pedra, sendo que cada bloco pesava quase 2,5 toneladas, mas isso variava, o tamanho diminuía de acordo com a altura. Mas como eles transportavam blocos tão grandes e pesados? Até hoje não há consenso.

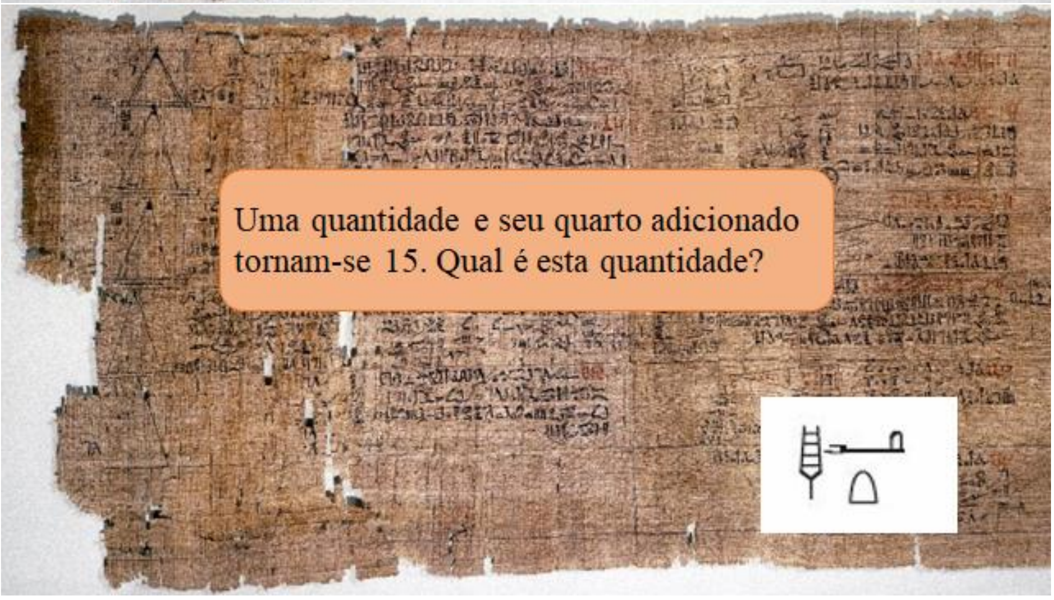
O conhecimento que temos dos antigos egípcios provem dos papiros.


Papiro é uma planta da família das Cyperaceas é comum nas margens de rios da África. No Egito antigo, foi muito utilizado pelos egípcios para diversos propósitos.
O papel utilizado pelos egípcios, eram produzidos a partir desta planta.


A Matemática que conhecemos dos antigos egípcios provem principalmente do Papiro Rhind e do Papiro Moscou


Para que os antigos egípcios utilizavam a matemática?
O que de Matemática vocês acham que os antigos egípcios dominavam?
Que problemas eles se preocupavam em responder?
Com que questões se preocupavam? Será que são as mesmas de hoje em dia em relação a matemática?





(Os egípcios chamavam essa quantidade desconhecida de "Ahá", e juntamente com os(as) alunos(as) transformar esse problema para uma linguagem algébrica.
Isso nos daria

$$Ahá + \frac{Ahá}{4} = 15$$

Com essa sentença matemática, comentar com os(as) alunos(as) que, se tirarmos a parte da igualdade temos $Ahá + \frac{Ahá}{4}$ e estamos trabalhando com a expressão algébrica que já foi estudada, e o $Ahá$ nessa expressão algébrica é uma variável que pode assumir qualquer valor, mas quando colocamos essa expressão algébrica igual à alguma coisa, estamos trabalhando com uma equação, e o $Ahá$ nesse caso é um valor desconhecido (uma incógnita) que assume um único valor que torna a sentença verdadeira.

Exemplo para trabalhar a diferença entre incógnita e variável (adaptado de Marcussi - 2013) - Em um sítio cria-se porcos e galinhas, contando-se os pés temos um total de 54

pés. Qual a quantidade de cada espécie de animal?
Resolução: $4p + 2g = 54$ Existem várias possibilidades para quantidade de galinhas e de porcos, como por exemplo um porco e 25 galinhas, nesse caso as letras p e g são variáveis.

Mas se mudarmos um pouco o enunciado, da seguinte forma: Em um sítio cria-se porcos e galinhas, contando-se os pés temos um total de 54 pés. Sabendo que nesse sítio tem um total de 8 porcos, qual a quantidade de galinhas?
A quantidade de porcos está determinada e determina também a quantidade de galinhas, logo uma incógnita.

Em seguida, retomando o problema do papiro Rhind, comentar com os(as) alunos(as) que uma sentença matemática, dessa forma, é conhecida hoje como uma equação, ou seja, toda sentença que possui uma igualdade e um valor desconhecido é chamada de equação.
Def. Equação é toda sentença matemática expressa por uma igualdade que apresenta letras representando números.

Para um melhor entendimento da definição, apresentar alguns exemplos para os(as) alunos(as) identificarem a equação:

- ➔ $3 + 6 = 9$ Resolução esperada: tem uma igualdade, mas não é uma equação pois não possui um elemento desconhecido.
- ➔ $x+2$ Resolução esperada: tem um valor desconhecido, mas não possui uma igualdade logo não é uma equação.
- ➔ $x + 3 = 5$ Resolução esperada: é uma equação sendo que $x + 3$ é o primeiro termo e o 5 é o segundo termo e nesse caso minha incógnita, minha quantidade desconhecida, é 2 que o único valor que x pode assumir para que a minha sentença matemática seja verdadeira.

Apêndice 10 – Resolução do problema 26 do Papiro Rhind pelo método da "Falsa Posição"

Passo 1 – Transformar o problema da linguagem usual para uma linguagem algébrica;

$$Ahá + \frac{Ahá}{4} = 15$$

Passo 2 - Escolher um valor (Falso Ahá) que facilite os cálculos, ou seja, que "tire a fração";
(Nesse problema esse valor poderia ser qualquer múltiplo de 4)
Falso $Ahá = 4$
Passo 3 - Substituir o "Ahá" pelo valor que for escolhido e calcular o valor.

$$4 + \frac{4}{4} = 5$$

Passo 4 – Verificar se o resultado obtido é o esperado, se for o problema já tem solução e a primeira tentativa já é a resposta, mas se não for é necessário fazer alguns ajustes.

(Nesse problema é possível verificar que a primeira tentativa não resolve o problema, pois o valor encontrado é 5 e o valor esperado é 15)
Passo 5 – Fazer os ajustes a fim de obter o valor esperado, ou seja, observar o que é necessário fazer para transformar o valor encontrado no valor esperado.
(Nesse problema é possível observar que para transformar 5 (valor encontrado) em 15 (valor esperado) é preciso multiplicar 5 por 3. Sendo assim é necessário multiplicar o falso Ahá 4 por 3, para encontrar o valor da quantidade desconhecida.)
$Ahá = 4.3 = 12$
Passo 6 – Substituir o novo *Ahá* na sentença e verificar se o mesmo resolve o problema, ou seja, resulta no valor esperado.

$$12 + \frac{12}{4} = 15$$

Apêndice 11 – Problemas e definição da raiz de uma equação

Problemas:

1) Uma quantidade mais a sua metade resultam em 21. Qual é a quantidade?
2) Em uma feira vendeu-se de manhã uma determinada quantidade de laranjas, e de tarde a metade do que foi vendido de manhã. Sabendo que o feirante vendeu um total de 75 laranjas, quantas laranjas ele vendeu na parte da manhã?
3) Em uma brincadeira, João conseguiu uma determinada quantidade de balas, e seu irmão conseguiu a terça parte da quantidade de balas de João. Quando chagaram em casa resolveram juntar as balas para dividi-las igualmente, ao juntarem perceberam que tinham um total de 12 balas. Qual a quantidade de balas de João? E a de seu Irmão?

Socializar as respostas e comentar que os valores encontrados para as quantidades desconhecidas são chamados de raiz de uma equação.
Definição: Raiz de uma equação, é um valor que ao substituir a incógnita por ele, obtemos uma sentença matemática verdadeira.

Atividade

1) Encontre uma quantidade que somada com seu ½ resulte em 15.
2) Encontre uma quantidade que somada com seu 1/3 resulta em 20.
3) (Problema 24 – Papiro Rhind) Uma quantidade e seu 1/7 somados fazem 16. Qual a quantidade?
4) (Guelli – 2012) Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Digam-me: Qual é a quantidade?

Apêndice 12 – Método da inversão utilizado pelos hindus e problemas

Propor que os(as) alunos(as) tentem resolver o seguinte problema, pelo método da falsa posição.

Metade de uma quantidade mais seis resulta em oito. Qual é a quantidade?

Esse problema não é possível de ser resolvido pelo método da "Falsa Posição" da forma estudada pelos(as) alunos(as). Dessa forma, apresentar o método da "Inversão" utilizado pelos antigos hindus.

A seguir apresentamos como funciona o método da inversão usado pelos hindus. Considere, por exemplo, o seguinte problema:

"Oh bela donzela com olhos radiantes! Diz-me, uma vez que compreendes o método da inversão, qual é o número que multiplicado por 3, aumentado em 21, dividido por 7, diminuído de 5 dá o resultado final 10?" (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015, p. 221)

Em linguagem matemática teríamos $\frac{x.3+21}{7} - 5 = 10$

O método consiste em inverter as operações, começando pelo resultado. Assim começamos com 10 e em seguida efetuaremos as operações inversas daquelas indicadas no problema.
Diminuído de 5 → acrescido de 5:

$$10 + 5 = 15$$

Dividido por 7 → multiplicado por 7:

$$15.7 = 105$$

Aumentado em 21 → diminuído em 21:

$$105 - 21 = 84$$

Multiplicado por 3 → dividido por 3:

$$\frac{84}{3} = 28$$

Logo para encontrar o número fazemos

$$\frac{\left(\left((10+5).7\right) - 21\right)}{3} = \frac{\left(\left((15).7\right) - 21\right)}{3} = \frac{(105-21)}{3} = \frac{84}{3} = 28$$

Dessa forma encontramos que o número procurado é 28.
Para termos certeza que esse é número basta fazer as contas que o problema pede com o resultado encontrado.

$$\frac{((28\,x\,3) + 21)}{7} - 5 = \frac{(84+21)}{7} - 5 = \frac{105}{7} - 5 = 15 - 5 = 10$$

Assim confirmamos que 28 é o número procurado.

Problemas

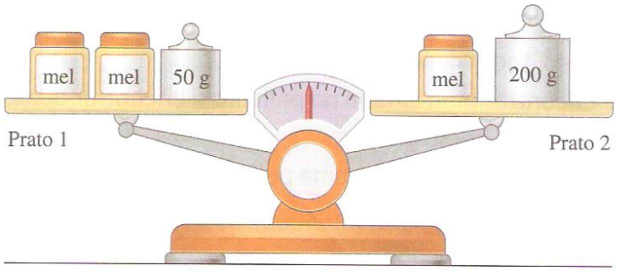
1) Pensei em um número, multipliquei por 2, subtraí 3, em seguida dividi por 7 e obtive o número 3. Em qual número pensei?
2) João utilizou um número para fazer os seguintes cálculos, dividiu por 3, adicionou 5, multiplicou por 2 e subtraiu 4, e obteve 10. Qual número João utilizou?

Atividades

1) Andrini e Vasconcellos (2015) - "Oh bela donzela com olhos radiantes! Diz-me, uma vez que compreendes o método da inversão, qual é o número que dividido por 8, diminuído de 10 e multiplicado por 24 dá o resultado final 264?"
2) Guelli (2012) – Se eu multiplicar um número por 4, dividir por 3, acrescentar 4 e diminuir 14 do resultado e finalmente dobrar o número obtido, encontro 12. Que número é esse?

Apêndice 13 – Princípio do equilíbrio utilizando a balança de dois pratos

Sabendo que a balança está em equilíbrio, e que cada pote de mel tem o mesmo peso, qual o peso de cada pote de mel?



Escrever com os(as) alunos(as) a equação que está representada na balança.

$$M + M + 50 = M + 200$$

Como os potes de mel tem o mesmo peso então eu posso juntá-los

$$2.M + 50 = M + 200$$

Pedir que os(as) alunos(as), "chutem" um valor para o peso do pote de mel, por exemplo, 100g (relembrando o método de tentativa e erro abordado no método da "Falsa Posição")

$$2.100 + 50 = 100 + 200$$
$$200 + 50 = 300$$
$$250 \neq 300$$

Como $250 \neq 300$ então a balança ficaria em desequilíbrio, logo o peso 100g. para o pote de mel não é a raiz da minha equação pois não tornou a minha sentença verdadeira.

Tentar outro valor, por 150g.

$$2.150 + 50 = 150 + 200$$
$$300 + 50 = 350$$
$$350 = 350$$

Assim, concluir que o peso do pote de mel é 150g, já que a balança ficou em equilíbrio.

Resolver o problema de outra forma.

$$M + M + 50 = M + 200$$

Vamos tentar deixar os potes de mel de um lado da balança e os pesos do outro, mas manter a balança em equilíbrio.

Se eu tirar um pote de mel dos dois lados, como eu tirei a mesma quantidade de um lado e mesma do outro minha balança vai continuar em equilíbrio.

$$M + M + 50 - M = M + 200 - M$$

$$M + 50 = 200$$

Lembre-se que queremos deixar os potes de mel de um lado e os pesos do outro, agora vamos tirar um peso de 50 g de cada lado, a balança continuará em equilíbrio.

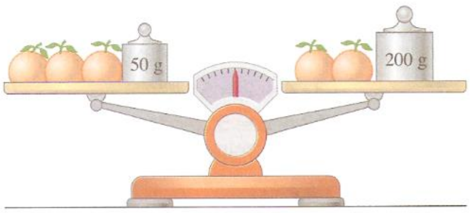
$$M + 50 - 50 = 200 - 50$$

$$M = 150$$

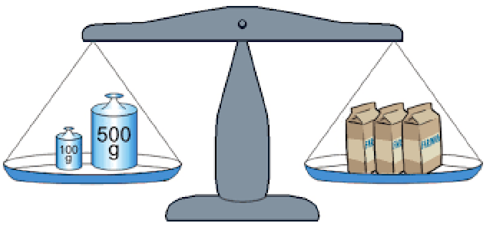
Da mesma forma encontramos 150g para o peso do pote de mel.

Apêndice 14 – Exercícios e problemas

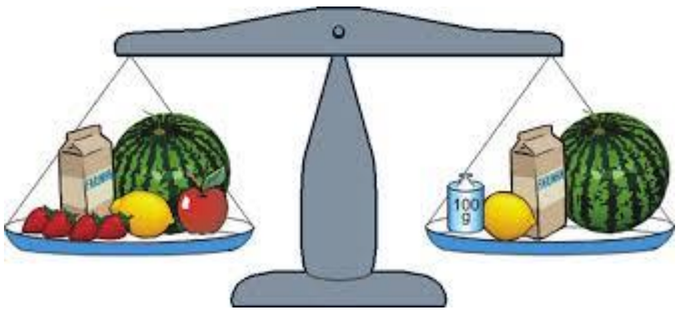
1) Dada a balança a seguir que está em equilíbrio, vamos supor que cada laranja pese o mesmo peso, então qual é o peso de cada laranja



2) Dada a balança a seguir, qual o peso de cada pacote de cereal, supondo que eles tenham peso iguais.

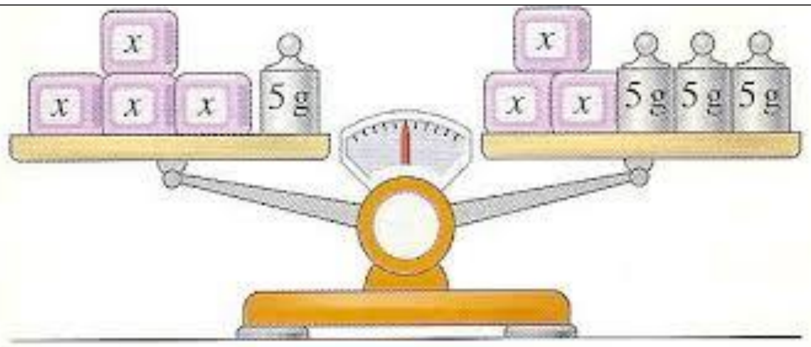


3) Dada a balança a seguir, qual o peso de cada morango, considerando que eles sejam iguais.

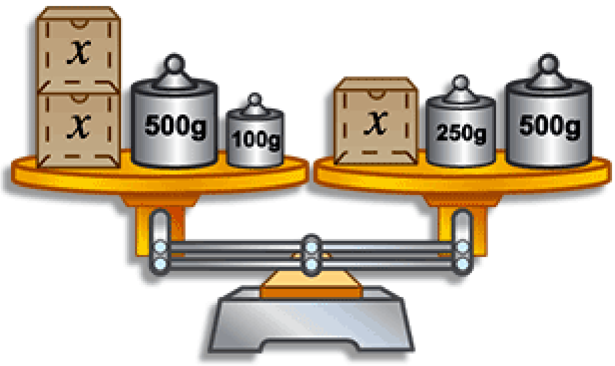


4) Dadas as balanças a seguir, qual o peso do quadradinho representado por x em cada caso

a)



b)



5) Obtenha a solução das seguintes equações:

a) $2x = 10$

b) $y + 6 = 11$

c) $2z - 18 = 20$

d) $2a + 3 = a - 4$

e) $4b - 11 = 6 - 2b$

6) Maria tem R$ 45,00 com essa quantia ela consegue ir ao cinema três vezes e ainda lhe sobram R$9,00. Qual o valor do ingresso do cinema?

7) Marcos ganhou de presente de aniversário de seus avós uma determinada quantia em dinheiro, com esse dinheiro ele foi a uma biblioteca e gastou a metade dessa quantia em um livro, em seguida passou em uma loja de jogos e gastou a metade que havia sobrado em um jogo e ainda ficou com R$ 25,00. Qual é a quantia que Marcos ganhou?

8) Em uma fábrica de peças automotivas, um terço dos empregados são estrangeiros e 72 empregados são brasileiros. Sabendo disso, qual a quantidade de empregados que trabalha nessa fábrica?

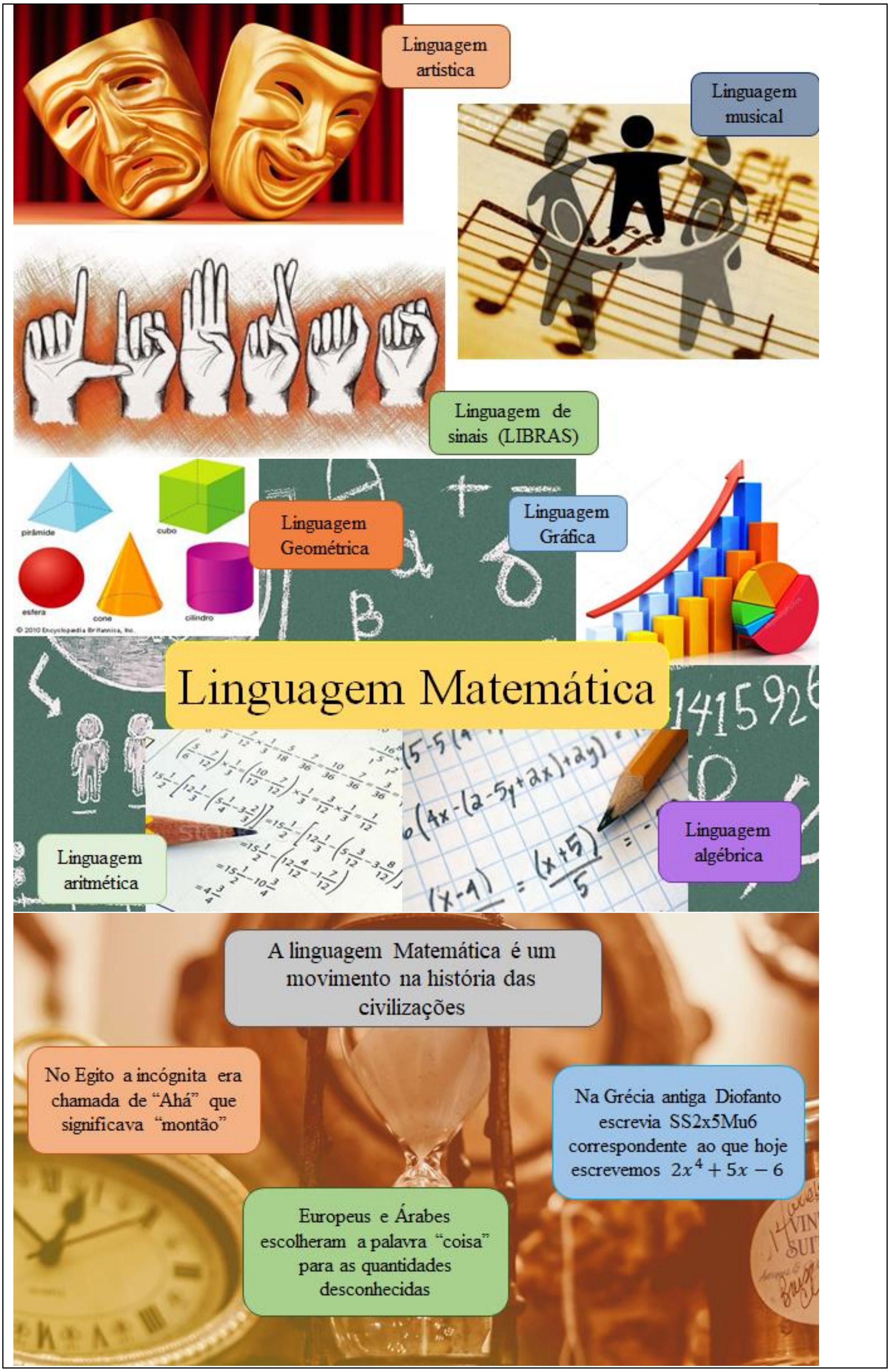
Relembrar com os(as) alunos(as) o problema do táxi e propor novas situações para serem trabalhadas.

Situação 1 - Carlos vai fazer uma entrevista de emprego, segundo seus cálculos vai pagar a quantia de R$ 30,00 para o taxista, quantos quilômetros ele vai percorrer?

Situação 2 - Fernanda foi visitar sua avó, e pagou pela corrida de taxi a quantia de R$20,50, quantos quilômetros ela percorreu?

Situação 3 - João e mais dois amigos foram a um parque de diversões e pagaram a quantia de R$ 43,00 ao taxista Marcelo. Qual a distância percorrida até o parque?

Apêndice 15 – Informações históricas sobre a linguagem Matemática



Linguagem artística
Linguagem musical
Linguagem de sinais (LIBRAS)
pirâmide
cubo
esfera
cone
cilindro
© 2010 Encyclopaedia Britannica, Inc.
Linguagem Geométrica
Linguagem Gráfica
Linguagem Matemática
Linguagem aritmética
Linguagem algébrica
A linguagem Matemática é um movimento na história das civilizações
No Egito a incógnita era chamada de "Ahá" que significava "montão"
Na Grécia antiga Diofanto escrevia SS2x5Mu6 correspondente ao que hoje escrevemos $2x^4 + 5x - 6$
Europeus e Árabes escolheram a palavra "coisa" para as quantidades desconhecidas

De acordo com alguns autores é possível distinguir três momentos da Álgebra em função das fases evolutivas da linguagem algébrica: a retórica, a sincopada e a simbólica

Fase retórica - não se fazia uso de símbolos nem de abreviações, por exemplo 2+3 era escrito como dois plus três.

Fase sincopada – uma forma mais abreviada de expressar matematicamente. O que hoje escrevemos como $6 + \sqrt{10}$ era escrito como 6.p.R.10, onde p vem de plus e R de raiz

Fase simbólica – as ideias algébricas passam a ser expressas somente através de símbolos

Aritmética babilônica já tinha evoluído para uma álgebra retórica

A álgebra dos antigos egípcios era retórica, entretanto há um certo simbolismo, no papiro Rhind encontra-se símbolos para mais e menos, empregavam-se também símbolos ou ideogramas, para igual e para incógnita.

Por volta de 2000 a. C

Por volta de 300 d. C

Uma das principais contribuições de Diofanto à matemática foi a sincopação da álgebra grega, ele tinha abreviações para a incógnita, potências de incógnitas até a de expoente seis, subtração, igualdade e inversos.

Os hindus sincoparam sua álgebra, indicavam uma adição por justaposição, a subtração colocando-se um ponto sobre o subtraendo, tinham ainda abreviações para a multiplicação, raiz quadrada e incógnita.

Jordanus, talvez tenha sido o primeiro a usar letras para designar números

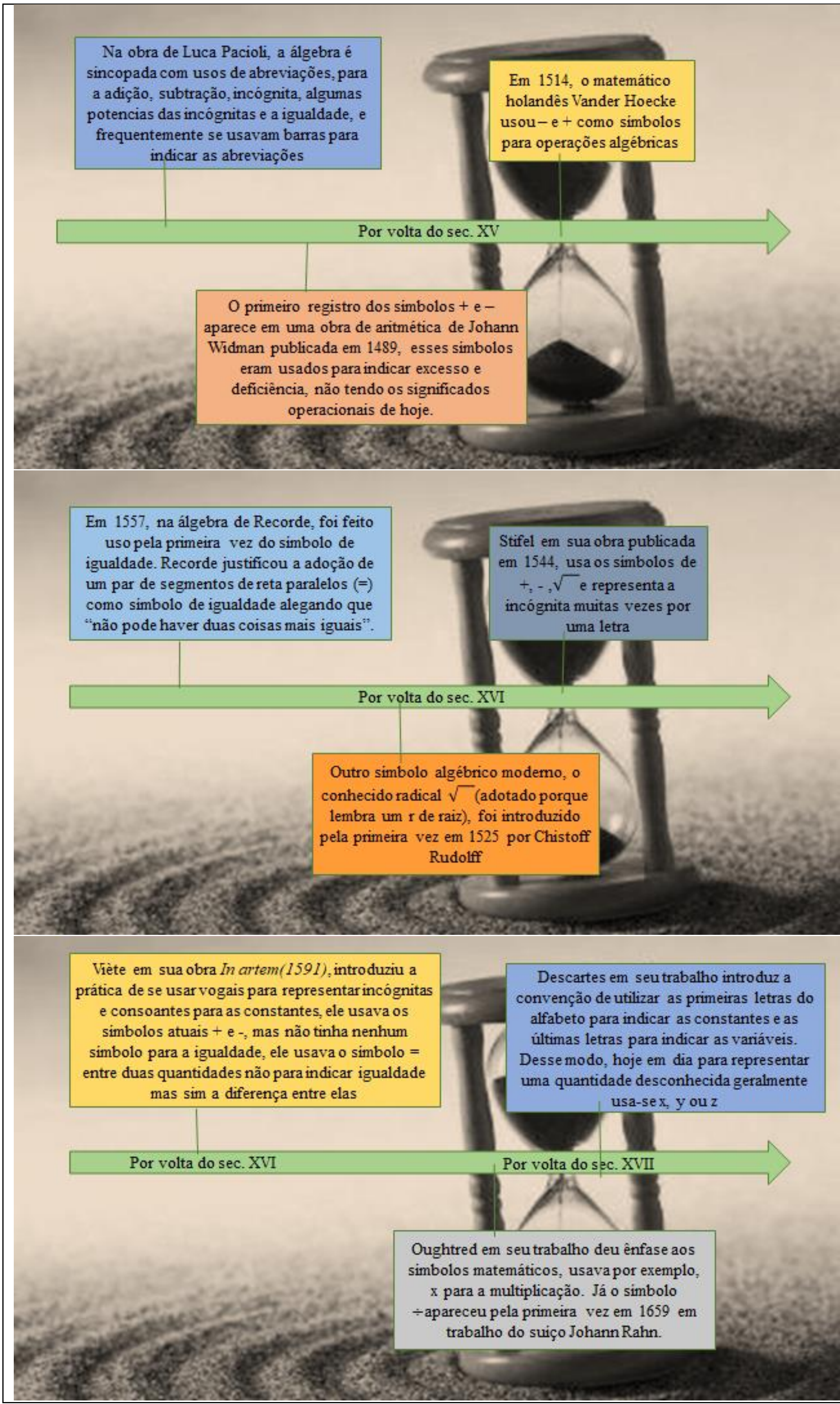
Por volta de 450 d. C

Por volta do sec. XIII

Por volta do sec. XV

A álgebra de Fibonacci é retórica

No trabalho de Regiomontanus a álgebra é retórica


Na obra de Luca Pacioli, a álgebra é sincopada com usos de abreviações, para a adição, subtração, incógnita, algumas potencias das incógnitas e a igualdade, e frequentemente se usavam barras para indicar as abreviações
Em 1514, o matemático holandês Vander Hoecke usou – e + como símbolos para operações algébricas
Por volta do sec. XV
O primeiro registro dos símbolos + e – aparece em uma obra de aritmética de Johann Widman publicada em 1489, esses símbolos eram usados para indicar excesso e deficiência, não tendo os significados operacionais de hoje.
Em 1557, na álgebra de Recorde, foi feito uso pela primeira vez do símbolo de igualdade. Recorde justificou a adoção de um par de segmentos de reta paralelos (=) como símbolo de igualdade alegando que "não pode haver duas coisas mais iguais".
Stifel em sua obra publicada em 1544, usa os símbolos de +, - ,√ e representa a incógnita muitas vezes por uma letra
Por volta do sec. XVI
Outro símbolo algébrico moderno, o conhecido radical √ (adotado porque lembra um r de raiz), foi introduzido pela primeira vez em 1525 por Chistoff Rudolff
Viète em sua obra In artem(1591), introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para as constantes, ele usava os símbolos atuais + e -, mas não tinha nenhum símbolo para a igualdade, ele usava o símbolo = entre duas quantidades não para indicar igualdade mas sim a diferença entre elas
Descartes em seu trabalho introduz a convenção de utilizar as primeiras letras do alfabeto para indicar as constantes e as últimas letras para indicar as variáveis. Desse modo, hoje em dia para representar uma quantidade desconhecida geralmente usa-se x, y ou z
Por volta do sec. XVI
Por volta do sec. XVII
Oughtred em seu trabalho deu ênfase aos símbolos matemáticos, usava por exemplo, x para a multiplicação. Já o símbolo ÷ apareceu pela primeira vez em 1659 em trabalho do suíço Johann Rahn.

Apêndice 16 – Problemas a serem resolvidos em equipes, pelo método que os(as) alunos(as) julgarem melhor

1) Uma quantidade mais sua quinta parte resultam em 24. Qual a quantidade?

2) Maria tem uma determinada quantidade de adesivos e sua amiga Julia tem o dobro dessa quantidade de adesivos. Sabendo que juntas elas têm 30 adesivos, qual a quantidade de adesivos de Maria e a de Julia?

3) O dobro de um número, mais 16 é igual a 56. Qual é esse número?

4) O triplo de um número menos 20, é igual ao próprio número mais trinta. Qual é esse número?

5) O dobro de um número menos 10 é igual a 20. Qual é esse número?

6) A soma de um número mais o seu sucessor é igual 61. Qual é esse número?

7) A soma de um número mais o seu antecessor é igual a 9. Qual é esse número?

8) A soma de dois números consecutivos é -25. Quais são esses números?

9) O quádruplo de um número mais 10 é igual ao dobro desse número menos 8. Qual é esse número?

10) O perímetro de um triângulo é 12 cm e as medidas dos lados são números consecutivos. Qual a medida dos lados desse triângulo?

11) Carlos juntou sua mesada por três meses para comprar um brinquedo que custava R$ 45,00. Quantos Carlos recebe de mesada?

12) Uma fazenda tem vacas e galinhas. Sabendo que existem 16 vacas e que o número de patas é igual a 100. Determine a quantidade de galinhas.

13) Somando 20 anos ao quíntuplo da idade de Arthur, obtemos 40 anos. Qual a idade de Arthur?

14) Pensei em um número que multiplicado por 8 e subtraído 16, resulta em 64. Qual é esse número?

15) Pensei em um número que adicionado com 28 subtraído 5, resulta em 37. Qual é esse número?

Apêndice 17 – Jogo bingo das equações

O jogo em um "bingo" comum, mas na cartela em vez de números existem equações ou expressões numéricas, que os(as) alunos(as) devem resolver e anotar os resultados e a medida que os valores forem sendo sorteados os(as) alunos(as) que o tiverem devem "marcar" e quando completarem a tabela eles(as) ganham.

O quadro a seguir contém todas as equações ou expressões numéricas distribuídas nas 19 cartelas.

$a+3=5\ \ (a=2)$	$4.j=24\ (j=6)$	$x-3=21\ (x=24)$
$2.b=14\ \ (b=7)$	$2.k+2=20\ \ (k=9)$	$\frac{y}{5}=5\ \ (y=25)$
$2.c-1=5\ \ (c=3)$	$l+5=13\ \ (l=8)$	$\frac{w}{2}=20\ \ (w=40)$
$d-5=10\ \ (d=15)$	$2.m=22\ \ (m=11)$	$\frac{a}{3}=15\ \ (a=45)$
$e+2=3\ \ (e=1)$	$2.n=28\ (n=14)$	$\frac{b}{2}=25\ \ (b=50)$
$f-12=1\ \ (f=13)$	$\frac{p}{2}=6\ (p=12)$	$\frac{w}{2}=26\ \ (w=52)$
$2.g=20\ \ (g=10)$	$\frac{r}{3}=6\ \ (r=18)$	$2.x=58\ \ (x=29)$
$2.h-2=6\ \ (h=4)$	$s+2=34\ \ (s=32)$	$x+30=51\ \ (x=21)$
$3.i-1=14\ \ (i=15)$	$\frac{t}{2}=7\ (t=14)$	$a+12=39\ \ (a=27)$

BINGO		
$a+3=5$	$2.b=14$	$2.c-1=5$
$d-5=10$	$2.4=?$	$\frac{b}{2}=25$
$2.g=20$	$2.h-2=6$	$\frac{w}{2}=20$

BINGO		
$e+2=3$	$f-12=1$	$\frac{a}{3}=15$
$\frac{y}{5}=5$	$2.3=?$	$3.i-1=14$
$s+2=34$	$\frac{r}{3}=6$	$2.n=28$

BINGO		
$2.k+2=20$	$2.x=58$	$l+5=13$
$2.m=22$	$3.5=?$	$\frac{p}{2}=6$
$\frac{w}{2}=26$	$\frac{t}{2}=17$	$a+12=39$

BINGO		
$f-12=1$	$2.m=22$	$x-3=21$
$2.g=20$	4.13=?	$\frac{b}{2}=25$
$3.i-1=14$	$\frac{p}{2}=6$	$\frac{y}{5}=5$

BINGO		
$4.j=24$	$x-3=21$	$x+30=51$
$\frac{w}{2}=20$	3.7=?	$\frac{r}{3}=6$
$2.c-1=5$	$2.k+2=20$	$2.b=14$

BINGO		
$d-5=10$	$2.b=14$	$4.j=24$
$e+2=3$	5.4 =?	$l+5=13$
$\frac{a}{3}=15$	$2.h-2=6$	$\frac{t}{2}=17$

BINGO		
$2.n=28$	$s+2=34$	$\frac{w}{2}=26$
$2.x=58$	3.6 =?	$x+30=51$
$a+12=39$	$2.h-2=6$	$\frac{b}{2}=25$

BINGO		
$a+3=5$	$2.n=28$	$\frac{w}{2}=20$
$2.c-1=5$	3.3 =?	$2.x=58$
$\frac{p}{2}=6$	$f-12=1$	$s+2=34$

BINGO		
$2.b=14$	$d-5=10$	$\frac{y}{5}=5$
$3.i-1=14$	5.9 =?	$e+2=3$
$2.g=20$	$2.k+2=20$	$\frac{a}{3}=15$

BINGO		
$4.j = 24$	$l + 5 = 13$	$\frac{w}{2} = 26$
$2.m = 22$	2.11 =?	$\frac{t}{2} = 7$
$x - 3 = 21$	$\frac{r}{3} = 6$	$a + 12 = 39$

BINGO		
$x + 30 = 51$	$2.m = 22$	$3.i - 1 = 14$
$\frac{w}{2} = 20$	3.4=?	$a + 12 = 39$
$2.g = 20$	$\frac{p}{2} = 6$	$x - 3 = 21$

BINGO		
$a + 3 = 5$	$4.j = 24$	$2.k + 2 = 20$
$\frac{y}{5} = 5$	3.9=?	$d - 5 = 10$
$2.b = 14$	$\frac{a}{3} = 15$	$2.c - 1 = 5$

BINGO		
$e + 2 = 3$	$\frac{t}{2} = 17$	$2.x = 58$
$2.h - 2 = 6$	4.8=?	$x + 30 = 51$
$\frac{y}{5} = 5$	$l + 5 = 13$	$2.n = 28$

BINGO		
$\frac{r}{3} = 6$	$s + 2 = 34$	$\frac{b}{2} = 25$
$3.i - 1 = 14$	3.6=?	$x - 3 = 21$
$\frac{w}{2} = 26$	$2.m = 22$	$f - 12 = 1$

BINGO		
$l + 5 = 13$	$2.k + 2 = 20$	$4.j = 24$
$\frac{b}{2} = 25$	5.10=?	$\frac{p}{2} = 6$
$s + 2 = 34$	$2.x = 58$	$2.h - 2 = 6$

BINGO		
$a+3=5$	$2.n=28$	$\frac{y}{5}=5$
$2.c-1=5$	2.3=?	$d-5=10$
$2.b=14$	$e+2=3$	$\frac{w}{2}=20$

BINGO		
$f-12=1$	$2.g=20$	$\frac{t}{2}=7$
$\frac{r}{3}=6$	3.3=?	$\frac{w}{2}=26$
$a+12=39$	$\frac{a}{3}=15$	$x+30=51$

BINGO		
$d-5=10$	$2.g=20$	$\frac{y}{5}=5$
$2.c-1=5$	4.5=20	$x+30=51$
$3.i-1=14$	$\frac{w}{2}=20$	$4.j=24$

BINGO		
$a+3=5$	$2.b=14$	$2.k+2=20$
$\frac{a}{3}=15$	3.8=?	$e+2=3$
$2.h-2=6$	$\frac{b}{2}=25$	$2.m=22$

O quadro a seguir contém os números a serem sorteados.

2	**6**	**24**
7	**9**	**25**
3	**8**	**40**
15	**11**	**45**
1	**14**	**50**
13	**12**	**52**
10	**34**	**29**
4	**18**	**21**
5	**32**	**27**