

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Configurações centrais empilhadas no problema de N-corpos

João Henrique Lório da Silva

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da  
FAPEMIG

ITAJUBÁ, 8 DE OUTUBRO DE 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Configurações centrais empilhadas no problema de N-corpos

**João Henrique Lírio da Silva**

**Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática.

**Área de Concentração: Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais**

ITAJUBÁ – MG

8 DE OUTUBRO DE 2020

*Aos meus avós Rosa e João.*

# Agradecimentos

Primeiramente ao professor Antonio pela oportunidade, orientação e paciência. Aos professores que tive contato durante minha vida acadêmica, amigos e familiares que ajudaram direta ou indiretamente e a FAPEMIG pelo apoio financeiro.

*Provamos através da lógica, mas descobrimos a partir da intuição.*

*Henri Poincaré*

# Resumo

Neste trabalho apresentam-se algumas abordagens de configurações centrais do problema de cinco corpos no plano com um triângulo equilátero na disposição dos corpos. Ressaltam-se aspectos importantes como uma caracterização geométrica geral, convexidade, famílias simétricas e uma prova numérica da existência de configurações centrais não simétricas.

**Palavras-chave:** Configurações centrais, Problema de cinco-corpos com triângulo equilátero, Caracterização geométrica.

# Abstract

This work presents some approaches to the central configurations of the problem of five bodies in the plane with an equilateral triangle in the arrangement of the bodies. Important aspects such as a general geometric characterization, convexity, symmetrical families and a numerical proof of the existence of non-symmetric central configurations are highlighting.

**Keywords:** Central Configurations, Five-bodies problem with equilateral triangle, Geometric characterization.

# Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	viii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Configuração central Lagrange mais dois com dois corpos simétricos ao bissetor perpendicular do triângulo</b>	<b>10</b>
2.1 Configuração central Lagrange mais dois com dois corpos no interior do triângulo . . . . .	10
2.2 Configuração central Lagrange mais dois com dois corpos no exterior do triângulo . . . . .	16
<b>3 Configuração central Lagrange mais dois com dois corpos no bissetor perpendicular do triângulo</b>	<b>25</b>
3.1 Configuração central Lagrange mais Euler em um . . . . .	35
<b>4 Caracterização geométrica, simetria e convexidade na configuração central Lagrange mais dois</b>	<b>39</b>

4.1	Convexidade . . . . .	52
4.2	Simetria . . . . .	56
4.3	Problemas futuros . . . . .	57
	<b>Bibliografia</b>	<b>61</b>
	<b>Anexo I</b>	<b>65</b>

# Lista de Figuras

1.1	Caso da esquerda não pode ser configuração central, caso da direita pode ser configuração central. . . . .	6
1.2	Configurações de quatro corpos convexa e côncava. . . . .	8
2.1	Configuração de cinco corpos analisada por Hampton[14]. . . . .	11
2.2	Regiões que temos as massas $m_1$ e $m_3$ positivas no interior do triângulo. . .	13
2.3	Regiões que temos as massas $m_1$ e $m_3$ positivas no interior do triângulo, curva $L = 0$ , retas que passam sobre os lados do triângulo e os bissetores do triângulo. . . . .	14
2.4	Regiões que temos as massas $m_1$ e $m_3$ positivas no interior do triângulo, curva $L = 0$ e hipérbolas $R_{24} = R_{45}$ (Verde) e $R_{14} = R_{45}$ (Roxo). . . . .	15
2.5	Partes das regiões $S_1$ (Rosa), $S_2$ (Verde) e $S_3$ (Amarelo) e a curva $L = 0$ . . . . .	18
2.6	Alguns pontos, retas e curvas para calcular o sinal de $L$ . . . . .	19
2.7	Alguns pontos, retas e curvas para calcular a interseção da curva com as regiões. . . . .	20
3.1	Configuração de cinco corpos no plano. . . . .	26
3.2	Configuração de cinco corpos no plano com pontos importantes. . . . .	26
3.3	Curvas $T_1 = 0$ (Vermelho), $T_2 = 0$ (Azul) e $T_3 = 0$ (Verde) para região 1. . .	32
3.4	Região 1 representada em amarelo. . . . .	33
3.5	Curvas $T_2 = 0$ (Azul) e $T_3 = 0$ (Verde) para região 2. . . . .	33
3.6	Região 2 representada em amarelo. . . . .	34
3.7	Curvas $T_2 = 0$ e $T_3 = 0$ para região 3. . . . .	34

3.8	Região 3 representada em amarelo. . . . .	35
3.9	Configuração central empilhada Lagrange mais Euler em um. . . . .	36
3.10	Região 3 limitada pelas duas curvas(Azul e verde). A curvar pontilhada representa a configuração apresentada em [8]. . . . .	37
3.11	Ajuste polinomial com os valores de configurações centrais de massas po- sitivas. . . . .	38
4.1	Notação utilizada, onde $l_{ij}$ é pontilhada e $c_{ij}$ é sólida. Pela Proposição do Bissetor Perpendicular aplicado com respeito a $r_i$ e $r_j$ a configuração acima não pode ser central. . . . .	40
4.2	Configuração de cinco corpos com três corpos alinhados. . . . .	41
4.3	Configuração Lagrange mais dois onde $r_4 \in c_{12}$ . . . . .	43
4.4	Regiões $T_i$ , $i = 1, 2, 3$ dadas na Definição 4.0.1 quando $r_1$ , $r_2$ e $r_3$ são ordenados no sentido anti-horário. . . . .	49
4.5	Regiões $S_j$ , $j = 1, 2, 3, 4$ dadas na Definição 4.0.1 quando $r_1$ , $r_2$ e $r_3$ são ordenados no sentido anti-horário. . . . .	50
4.6	Regiões definidas por $F_{125} < 0$ , $F_{135} > 0$ e $F_{235} > 0$ . . . . .	51
4.7	Região $S$ definida pelas linhas com origem em $r_4$ e que passam através de $r_3$ e $r_5$ . . . . .	54
4.8	Aplicação da Proposição do Bissetor Perpendicular na configuração analisada. . . . .	54
4.9	Regiões onde $r_3$ e $r_5$ não podem se localizar. . . . .	55
4.10	Configurações estudada por Gidea e Llibre [11]. . . . .	59
4.11	Configuração estudada por Lino Cornelio, Ramírez, e Cors [9]. . . . .	60

# Capítulo 1

## Introdução

A dinâmica de objetos sempre interessou os seres humanos, principalmente os corpos celestes. Desde a antiguidade os corpos celestes são objetos de estudo em diversas áreas de pesquisa. Várias civilizações antigas tinham a necessidade de descrever os movimentos dos astros, tendo como o objetivo principal a elaboração de calendários. Porém, o maior desenvolvimento na compreensão dos movimentos celestes ocorreu por volta dos séculos XVI e XVII com grandes nomes como, Nicolau Copérnico, Galileu Galilei, Johannes Kepler e Isaac Newton.

Em 1666 Newton formulou a chamada Lei da Gravitação Universal e publicou em 1687 no famoso *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [27] que determina como se dá a relação entre o Sol e os planetas, e muito além disso trata da relação entre quaisquer corpos massivos. Temos com isso o início do estudo da Mecânica Celeste.

Os problemas desafiadores da Mecânica Celeste sempre atraíram o interesse e esforços dos maiores matemáticos, físicos e astrônomos da história. Uma lista incompleta inclui Newton, Leibniz, Halley, Euler, Clairaut, D'Alembert, Delaunay, Lambert, Cauchy, Lagrange, Laplace, Liouville, Legendre, Clairaut, Poisson, Gauss, Jacobi, Weierstrass, Dirichlet, Hamilton, Hermite, Poincaré, Painlevé, Birkhoff, Lyapunov, Gylden, Chazy, Tisserand, Hill e Sundman, veja [33]. Os conceitos expostos por Newton interessaram muitas pessoas a estudar a dinâmica dos corpos, com isso surgiu o seguinte problema de  $n$  corpos:

Considere um sistema isolado no espaço, formado por  $n$  corpos pontuais com massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  interagindo de acordo com a lei de Gravitação Universal. Com tais hipótese deve-se descrever qual é a dinâmica das posições desses corpos.

Matematicamente temos  $n$  partículas com massas  $m_i > 0$  interagindo de acordo com a lei de Gravitação Universal, com posições  $r_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Geralmente trabalhamos com  $d = 2$  ou  $d = 3$ , deste modo as equações diferenciais que regem o problema de  $n$  corpos são dadas por

$$m_j \ddot{r}_j = \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{m_i m_j (r_i - r_j)}{r_{ij}^3}, \quad 1 \leq j \leq n \quad (1.1)$$

onde  $r_{ij} = |r_i - r_j|$  é a distância Euclidiana entre  $r_i$  e  $r_j$ . Consideramos a constante gravitacional universal  $G = 1$ , isso pode ser realizado utilizando uma reparametrização do tempo onde  $t \rightarrow \sqrt{G}t$ . Estamos adotando o referencial inercial baricêntrico, no qual o centro de massa do sistema, que é dado por  $\sum_{j=1}^n m_j r_j / M_0$ , onde  $M_0 = m_1 + \dots + m_n$  é a massa total, está na origem do referencial.

O vetor que representa a configuração é definido por  $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^{dn}$  e temos

$$U(r) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (1.2)$$

como o potencial Newtoniano. Assim a expressão (1.1) pode ser representada por

$$m_j \ddot{r}_j = \nabla_j U(r), \quad 1 \leq j \leq n \quad (1.3)$$

onde  $\nabla_j$  é o gradiente com respeito a  $r_j$ . Utilizando uma notação compacta temos

$$M \ddot{r} = \nabla U(r), \quad (1.4)$$

onde  $\nabla$  é o gradiente e  $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$  é a matriz com as massas na diagonal, fixando  $d = 3$  teremos que a matriz  $M$  é  $3n \times 3n$ . Seja  $v_j = \dot{r}_j \in \mathbb{R}^d$ , o vetor velocidade

será representado por  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{dn}$ , então a expressão (1.4) é equivalente ao sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{v} = M^{-1}\nabla U(r). \end{cases} \quad (1.5)$$

Como nossa expressão (1.1) não está bem definida no caso de colisões vamos restringir o espaços das configurações em  $\mathbb{R}^{nd} \setminus \Delta$ , onde  $\Delta = \{r : r_i = r_j \text{ para algum } i \neq j\}$  é o conjunto das colisões. Observa-se que o espaço de fase de (1.5) é  $(\mathbb{R}^{nd} \setminus \Delta) \times (\mathbb{R}^{nd})$ , para mais detalhes veja [17] e suas referências. Atacar o problema de  $n$  corpos de forma mais geral tem uma grande complexidade envolvida, desta forma analisamos o problema com menos corpos a seguir para ressaltar alguns aspectos importantes.

Para  $n = 2$  recaímos no problema de Kepler em que nosso sistema (1.5) tem doze graus de liberdade, e para encontrar soluções utiliza-se o método das quadraturas, ou seja, encontrando integrais primeiras para o problema. As integrais primeiras clássicas estão associadas às simetrias do problema, isto é, são as leis de conservação que se traduzem em equações algébricas dependentes das variáveis envolvidas no sistema (1.5). Desta forma as variáveis do sistema não são todas independentes entre si, o que permite eliminar equações do sistema. Temos seis componentes que vem do movimento retilíneo e uniforme do centro de massa, três componentes do momento angular e uma da conservação de energia. Dispomos de dez integrais primeiras e assim reduzimos o problema de Kepler a dimensão dois, podendo ser resolvido analiticamente.

Para  $n = 3$  temos um problema em  $\mathbb{R}^{18}$ , e durante um tempo buscou-se tentar encontrar novas integrais primeiras para obter soluções via quadraturas. Em 1887 Ernst Heinrich Bruns provou que nenhum método analítico envolvendo integrais primeiras algébricas pode resolver o problema de 3-corpos. Desta forma o problema de  $n$  corpos não é integrável, via quadraturas, para  $n \geq 3$ , veja [4]. Com isso as soluções particulares possuem grande importância.

Um tipo de solução particular do problema de  $n$  corpos são as soluções homográficas. As soluções homográficas, consistem na dinâmica dos corpos em que a forma permanece a mesma ao longo do tempo, evoluindo apenas por rotações e homotetias. As primeiras

soluções homográficas foram encontradas por Euler [10] no caso de  $n = 3$ , onde as massas são colineares a cada instante de movimento. Posteriormente Lagrange [16] encontrou para  $n = 3$  soluções que as massas permanecem nos vértices de um triângulo equilátero a cada instante de movimento. Pelo teorema de Laplace [3] temos que a cada instante numa solução homográfica a configuração dos corpos é uma configuração central, isto é, uma configuração onde a aceleração de cada corpo é proporcional à sua posição em cada instante, para uma introdução ao assunto veja Wintner [35], Xia [34] e Moeckel [25] [26].

Relacionando matematicamente a ideia de configuração central com os conceitos de equações de movimento, temos que para massas  $m_1, \dots, m_n$  uma configuração é central se existe um  $\lambda$  real tal que satisfaz a seguinte relação

$$\lambda M r = -\nabla U(r). \quad (1.6)$$

Assim, se conhecemos as configurações centrais todas as soluções homográficas ficam determinadas. Além das configurações centrais nos levarem a soluções homográficas elas também estão relacionadas com algumas modificações topológicas dos conjuntos de nível da energia e momento angular do problema de  $n$  corpos, vide [31].

Ao direcionarmos o estudo para configurações centrais várias questões surgem, uma que gera interesse de muitos matemáticos é determinar quantas configurações centrais existem para um dado conjunto de massas. Temos que rotações e homotetias centradas no centro de massa formam uma relação de equivalência no conjunto  $\{\mathbb{R}^{nd} \setminus \Delta\}$ , assim analisamos apenas as classes de configurações centrais. A questão proposta por Chazy [6], Wintner [35] e posteriormente reformulada por Smale [31] em uma lista de problemas matemáticos do século 21 está relacionada à finitude das classes de configurações centrais no problema de  $n$  massas positivas no plano.

Para  $n = 2$  temos apenas uma classe de configurações centrais, em  $n = 3$  temos cinco classes de configurações centrais, sendo três de Euler e duas de Lagrange. Quando consideramos  $n > 3$  poucas respostas foram expostas. Para  $n = 4$  Hampton e Moeckel responderam em [15] que o número de configurações centrais planares não equivalentes está entre 32 e 8472. Essa questão ainda está em aberto para  $n > 4$ , sendo que para  $n = 5$  uma resposta parcial foi dada por Albouy e Kaloshin em [1].

Como o estudo qualitativo das equações de movimento pode ter certas complexidades, devido aos altos graus de liberdade, buscam-se outras ferramentas para analisar configurações centrais. Para iniciar o estudo de configurações centrais no plano,  $d = 2$ , vamos definir  $n(n - 1)/2$  equações de "Laura-Andoyer". Aqui por simplicidade vamos chamar de equações de Andoyer, que são dadas por

$$f_{ij} = \sum_{k \neq i, j} m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = 0 \quad (1.7)$$

para  $1 \leq i < j \leq n$ , onde  $R_{ij} = 1/r_{ij}^3$  e  $\Delta_{ijk} = (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k)$  que é duas vezes a área orientada do triângulo formado por  $r_i$ ,  $r_j$  e  $r_k$ , veja [13]. A importância de tais equações vem do fato de serem equivalentes a (1.6) e geralmente simplificam o estudo de problemas com certas simetrias. As equações acima possuem uma versão espacial,  $d = 3$ , que pode ser encontrada em [5], mas como as configurações centrais com  $d = 3$  levam somente a soluções homotéticas vamos focar a atenção nas planares.

**Lema 1.0.1.** *Considere  $n$  massas  $m_1, \dots, m_n$  num mesmo plano e não-colineares, localizadas, respectivamente, em  $r_1, \dots, r_n$ . Então o sistema*

$$\lambda M r = -\nabla U(r) \quad (1.8)$$

para  $1 \leq i < j \leq n$ , é equivalente ao sistema

$$f_{ij} = \sum_{k \neq i, j} m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = 0 \quad (1.9)$$

para  $1 \leq i < j \leq n$ , onde  $R_{ij} = 1/r_{ij}^3$  e  $\Delta_{ijk} = (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k)$ .

*Demonstração.* Veja [13], [20] ou [21].

□

Um resultado importante e prático é o Bissetor Perpendicular que permite verificar a não-existência de configurações centrais, e sua demonstração fica simples se utilizarmos as equações de Andoyer.

**Proposição 1.0.1. (*Bissetor Perpendicular*):** *Considere uma configuração central planar, formada por  $n$  corpos de massas positivas  $m_1, \dots, m_n$ . Escolha dois corpos de*

massas  $m_i$  e  $m_j$  com posições  $r_i$  e  $r_j$ , respectivamente. Trace a reta que contém estes dois corpos e a mediatriz do segmento  $\overline{r_i r_j}$ . Estas duas retas definem dois cones abertos no plano. Então, se existem corpos num dos cones abertos, devemos ter corpos no outro cone. Ou seja, se os outros  $n - 2$  corpos pertencem a apenas um cone aberto não temos configuração central. Veja a figura 1.1.

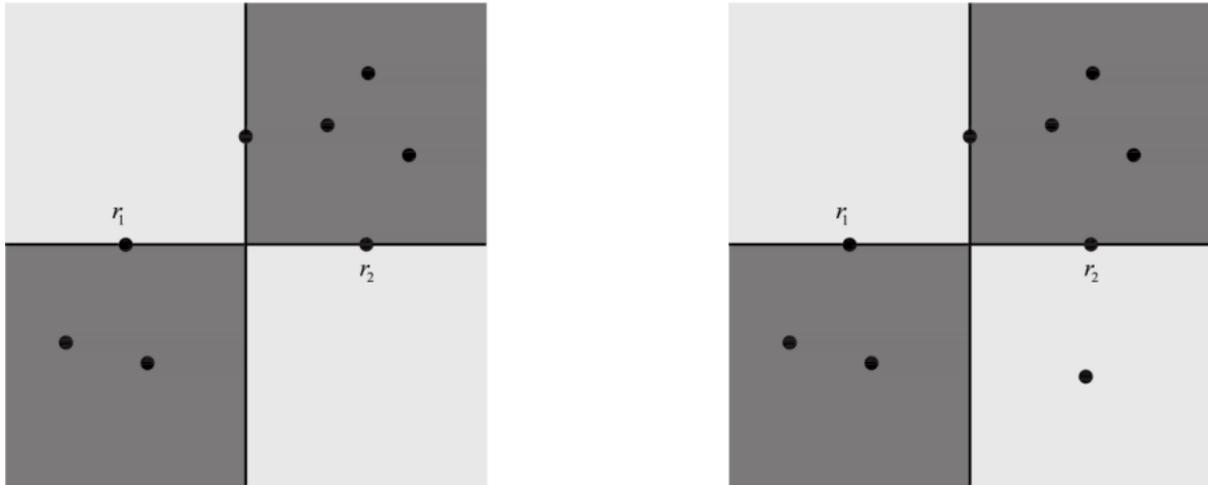


Figura 1.1: Caso da esquerda não pode ser configuração central, caso da direita pode ser configuração central.

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos renomear os índices  $i$  e  $j$  por 1 e 2. Suponha, por contradição, que corpos de massas  $m_3, \dots, m_n$  estão em um só cone aberto ou sobre o eixo bissetor, mas não todos sobre o eixo. Como, por hipótese, temos a configuração central planar, então as  $\frac{n(n-1)}{2}$  equações de Andoyer são satisfeitas, em particular

$$f_{12} = \sum_{k=1}^n m_k (R_{1k} - R_{2k}) \Delta_{12k} = 0.$$

Podemos olhar para a reta passando pelos corpos e a reta que a bissecta como os eixos tradicionais que dividem o plano em 4 quadrantes ordenados ciclicamente, como usual. Assim, um cone aberto é formado pela união do primeiro e terceiro quadrantes abertos, e o outro cone aberto é formado pela união do segundo e quarto quadrantes abertos. Vamos supor que existem corpos no primeiro e terceiro quadrantes, e possivelmente, sobre

os eixos. Vamos tomar a soma acima em três parcelas, da seguinte forma, o índice  $l$  denotará os termos no primeiro quadrante,  $k$  no terceiro e  $i$  são termos sobre a mediatriz ou colineares com 1 e 2. Se tivermos corpos sobre a reta que contém os corpos 1 e 2, então  $\Delta_{12k} = 0$ . Assim,

$$f_{12} = \sum_l m_l(R_{1l} - R_{2l})\Delta_{12l} + \sum_k m_k(R_{1k} - R_{2k})\Delta_{12k} + \sum_i m_i(R_{1i} - R_{2i})\Delta_{12i} = 0.$$

Primeiro, os termos da terceira soma são todos nulos, pois sobre a bissetriz  $R_{1i} = R_{2i}$ . Desta forma, nos resta

$$f_{12} = \sum_l m_l(R_{1l} - R_{2l})\Delta_{12l} + \sum_k m_k(R_{1k} - R_{2k})\Delta_{12k} = 0.$$

Agora, estudemos o sinal da primeira soma,  $\Delta_{12l} > 0$ , para todo  $l$  e

$$r_{1l} > r_{2l} \Rightarrow R_{1l} < R_{2l},$$

logo, todos os coeficientes das massas, na primeira soma, são negativos. Para os termos da segunda soma temos,  $\Delta_{12k} < 0$  para todo  $k$  e

$$r_{1k} < r_{2k} \Rightarrow R_{1k} > R_{2k},$$

assim, todos os coeficientes das massas na segunda soma são negativos, e as massas são positivas, então a soma analisada não pode ser zero, contradição. Logo se existem massas em um dos cones abertos, existem massas no outro cone aberto.

□

Uma aplicação da proposição anterior é mostrar que três corpos localizados nos vértices de um triângulo equilátero independem das massas. Tal resultado é uma propriedade importante ao analisar novas configurações.

Um conceito interessante relacionado as configurações centrais foi introduzido por Hampton em [14] e denotado por *configurações centrais empilhadas*. Configurações centrais empilhadas são configurações centrais que possuem um subconjunto próprio das massas que também está em configuração central. Utilizaremos a notação introduzida

por Fernandes e Mello em [22] para configurações centrais empilhadas que é dada por  $(n, k)$ , com  $n$  representando o total de corpos da configuração e  $k$ , com  $k = 1, \dots, n - 3$ , representando a quantidade de corpos que podem ser removidos e permanecer uma configuração central. Hampton mostrou a existência de uma configuração central empilhada  $(5, 2)$ , onde os três corpos restantes estejam nos vértices de um triângulo equilátero.

Outra propriedade importante que motivou parte do estudo deste trabalho é a convexidade. Entendemos aqui que uma configuração planar é convexa se o polígono que define a configuração possui ângulos internos menores ou iguais a  $180^\circ$ , e estritamente convexa se os ângulos internos do polígono são menores que  $180^\circ$ . De outra forma temos uma configuração côncava. Veja a figura 1.2.

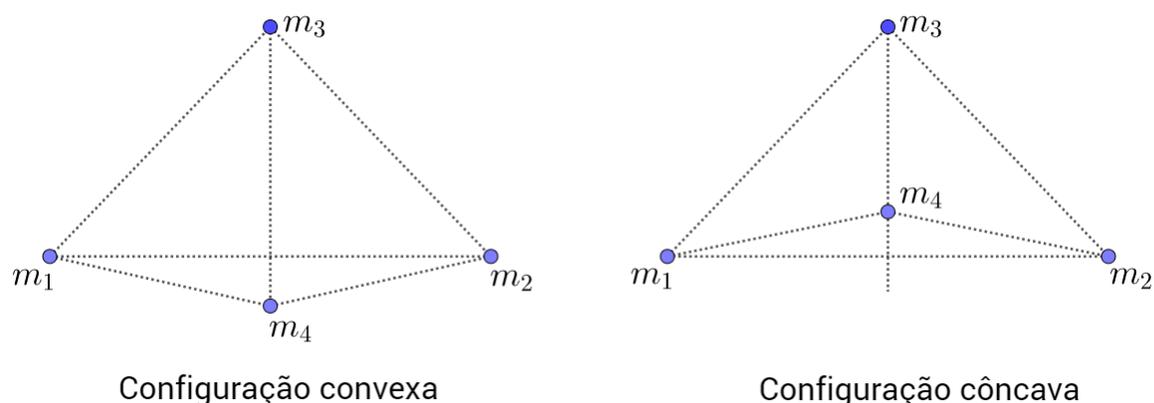


Figura 1.2: Configurações de quatro corpos convexa e côncava.

Nota-se que a configuração central empilhada  $(5, 2)$  contendo um triângulo equilátero apresentada por Hampton consiste em uma família de configurações centrais côncavas. Com o passar do tempo, vários autores se interessaram pelo estudo de configurações centrais empilhadas como pode ser visto em [24], [29], [9], [11], [19] e outros abordados no decorrer deste trabalho.

Naturalmente algumas perguntas surgem relacionadas com as configurações centrais empilhadas, como exposto por Cornelio, Ramírez e Cors em [8]:

1. Dada uma configuração central do problema de  $n$  corpos, quantos subconjuntos diferentes de corpos,  $A$ , existem com cardinalidade  $|A| = k$ ,  $k = 1, \dots, n - 3$ , tal que

os  $n - k$  corpos formem uma configuração central do problema de  $(n - k)$  corpos?

2. Qual o número de configurações centrais empilhadas  $(n, k)$ , para todo  $k = 1, \dots, n-3$ ?

A segunda questão acima, no caso não colinear  $(n, 1)$ , foi respondida por Fernandes e Mello em [19], provando que são apenas configurações co-circulares de  $(n - 1)$  corpos com um corpo no centro do círculo.

Para esta dissertação o objetivo principal foi uma abordagem sobre configurações centrais empilhadas de cinco corpos que contém um triângulo equilátero, tal configuração será chamada aqui de *Lagrange mais dois*. Buscamos detalhar caracterizações geométricas, questões de simetria e convexidade. Os trabalhos abordados posteriormente não estão dispostos de forma cronológica, mas sim buscando uma estrutura que facilite a leitura e a relação de conceitos abordados.

## Capítulo 2

# Configuração central Lagrange mais dois com dois corpos simétricos ao bissetor perpendicular do triângulo

### 2.1 Configuração central Lagrange mais dois com dois corpos no interior do triângulo

Vamos começar a abordagem do problema de Lagrange mais dois analisando a configuração proposta por Hampton em [14], onde é considerado uma configuração de cinco corpos com algumas simetrias. Considerando uma configuração central de cinco corpos  $r = (r_1, r_2, \dots, r_5)$  com massas  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$  de modo que  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  estejam nos vértices de um triângulo equilátero de lado igual a dois. Os corpos restantes  $r_4$  e  $r_5$  estão localizados no interior do triângulo equilátero como na figura 2.1. Com tais hipóteses Hampton expôs o seguinte resultado.

**Proposição 2.1.1.** *Dada uma configuração de cinco corpos com  $r_{12} = r_{23} = r_{13} = 2$ ,  $r_{14} = r_{25}$ ,  $r_{15} = r_{24}$ ,  $r_{35} = r_{34}$  e  $2 > r_{14} > r_{34} > r_{15}$  que satisfazem a relação  $L = 0$  onde  $L := (R_{24} - R_{34})\Delta_{234} + (R_{25} - R_{35})\Delta_{235} = 0$  com  $\Delta_{ijk}$  representando o dobro da área do triângulo de vértices  $r_i, r_j, r_k$ . Então existem massas positivas para que essa configuração*

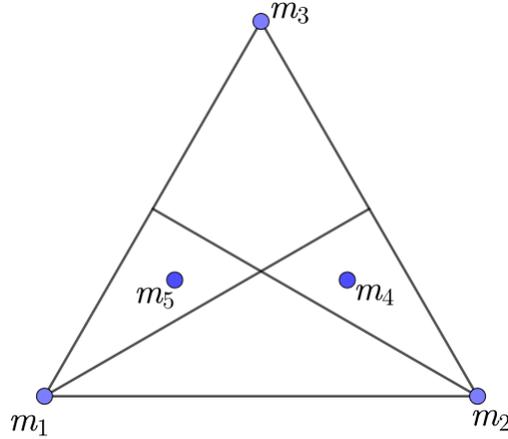


Figura 2.1: Configuração de cinco corpos analisada por Hampton[14].

*seja uma configuração central.*

A prova da Proposição 2.1.1 não será realizada aqui, mas a seguir apresentamos uma análise utilizando as equações de Andoyer para identificar alguns pontos de dificuldade do problema. Temos de (1.7) que

$$f_{12} = m_4(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} + m_5(R_{15} - R_{25})\Delta_{125} = 0,$$

$$f_{45} = m_1(R_{41} - R_{51})\Delta_{451} + m_2(R_{42} - R_{52})\Delta_{452} = 0.$$

E das duas equações acima obtemos  $m_4 = m_5$  e  $m_1 = m_2$ , respectivamente. Ainda podemos obter que

$$f_{23} = m_5[(R_{24} - R_{34})\Delta_{234} + (R_{25} - R_{35})\Delta_{235}] = 0$$

e para  $m_5 \neq 0$  teremos uma condição geométrica dada por

$$L = (R_{24} - R_{34})\Delta_{234} + (R_{25} - R_{35})\Delta_{235}. \quad (2.1)$$

Com as hipóteses da Proposição 2.1.1 teremos  $f_{14} = f_{25}$ ,  $f_{15} = f_{24}$  e  $f_{34} = f_{35}$ , que representam equações lineares e homogêneas nas massas  $m_1$ ,  $m_3$  e  $m_4$ . Para existir uma solução não trivial  $(m_1, m_3, m_4)$  o determinante da matriz de coeficientes deve ser zero, sendo

$$B = \begin{pmatrix} (1 - R_{15})\Delta_{251} & (1 - R_{34})\Delta_{253} & (R_{15} - R_{45})\Delta_{254} \\ (1 - R_{14})\Delta_{241} & (1 - R_{43})\Delta_{243} & (R_{25} - R_{45})\Delta_{245} \\ (1 - R_{14})\Delta_{352} + (1 - R_{15})\Delta_{351} & 0 & (R_{34} - R_{45})\Delta_{354} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= \Lambda[\Delta_{134}(R_{53} - 1)\Delta_{145}(R_{15} - R_{45}) - \Delta_{135}(R_{34} - 1)\Delta_{145}(R_{45} - R_{15})] + \\ &\quad \Delta_{124}(1 - R_{15})\Delta_{135}(R_{43} - 1)\Delta_{354}(R_{34} - R_{45}) - \\ &\quad \Delta_{354}(R_{34} - R_{45})\Delta_{124}(1 - R_{14})\Delta_{134}(R_{53} - 1) \end{aligned}$$

com  $\Lambda = [(1 - R_{14})\Delta_{352} + (1 - R_{15})\Delta_{351}]$ . Após alguns cálculos podemos chegar na seguinte expressão

$$\begin{aligned} \det(B) &= [\Delta_{134}(1 - R_{14}) + \Delta_{135}(R_{15} - 1)](1 - R_{34})[-\Delta_{134}\Delta_{145}R_{14} + \Delta_{134}\Delta_{145}R_{45} - \\ &\quad \Delta_{135}\Delta_{145}R_{15} + \Delta_{135}\Delta_{143}R_{45} + \Delta_{124}\Delta_{345}R_{34} - \Delta_{124}\Delta_{345}R_{45}]. \end{aligned}$$

Utilizando a condição de  $L = 0$  podemos substituir  $R_{24}\Delta_{234} = R_{34}\Delta_{234} + (R_{35} - R_{25})\Delta_{125}$  na expressão acima e utilizando o software *Mathematica* temos  $\det(B) = 0$ , logo nosso sistema possui solução não trivial. Agora é necessário verificar o sinal das massas. Podemos utilizar a eliminação de Gauss-Jordan na matriz  $B$ , e em seguida encontrar o núcleo da matriz, com  $m_4 = 1$ ,

$$m_1 = \frac{(\Delta_{134} - \Delta_{135})(R_{14}\Delta_{134} + R_{15}\Delta_{135} - R_{45}(\Delta_{134} + \Delta_{135}))}{(\Delta_{124} - \Delta_{134} - \Delta_{135})(-R_{14}\Delta_{134} + R_{12}(\Delta_{134} - \Delta_{135}) + R_{15}\Delta_{135})}, \quad (2.2)$$

$$m_3 = -\frac{(R_{12}(R_{14} + R_{15} - 2R_{45}) + R_{15}R_{45} + R_{14}(-2R_{15} + R_{45}))\gamma}{(\Delta_{124} - \Delta_{134} - \Delta_{135})(-R_{14}\Delta_{134} + R_{12}(\Delta_{134} - \Delta_{135}) + R_{15}\Delta_{135})\Gamma}, \quad (2.3)$$

onde  $\gamma = \Delta_{124}(\Delta_{134} - \Delta_{135})(\Delta_{134} + \Delta_{135})$  e  $\Gamma = -R_{14}\Delta_{134} - R_{15}\Delta_{135} + R_{12}(\Delta_{134} + \Delta_{135})$ .

Como estamos interessados em massas positivas utilizamos as restrições  $m_1 > 0$  e  $m_3 > 0$

nas expressões (2.2) e (2.3), respectivamente. Com auxílio do software *Mathematica* plotamos as regiões no interior do triângulo referente as inequações  $m_1 > 0$  e  $m_3 > 0$ , veja a figura 2.2.

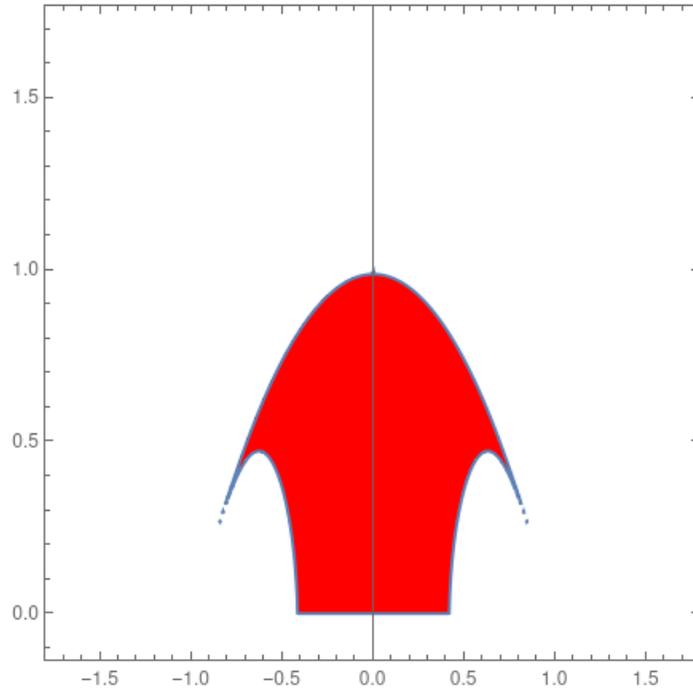


Figura 2.2: Regiões que temos as massas  $m_1$  e  $m_3$  positivas no interior do triângulo.

Mas para concluir nossa análise, temos que identificar as regiões que ocorrem simultaneamente  $L = 0$  e as massas são positivas, em outras palavras, verificar onde a curva  $L = 0$  tem intersecção não vazia com as regiões da figura 2.2, como plotamos na figura 2.3.

Vamos voltar a matriz  $B$  para analisar os sinais dos coeficientes. Começando pelo caso onde as massas  $m_4$  e  $m_5$  estão sobre os pontos  $P_1$  e  $P'_1$ , respectivamente. Os pontos  $P_1$  e  $P'_1$  estão localizados na intersecção da curva  $L = 0$  com as hipérboles  $R_{24} = R_{45}$  e  $R_{14} = R_{45}$ , no interior do triângulo, veja a figura 2.4. Nesse caso a matriz de coeficientes tem os seguintes sinais.

$$A|_{P_1 \cup P'_1} = \begin{pmatrix} - & + & 0 \\ - & + & - \\ a_{31} & 0 & - \end{pmatrix}.$$

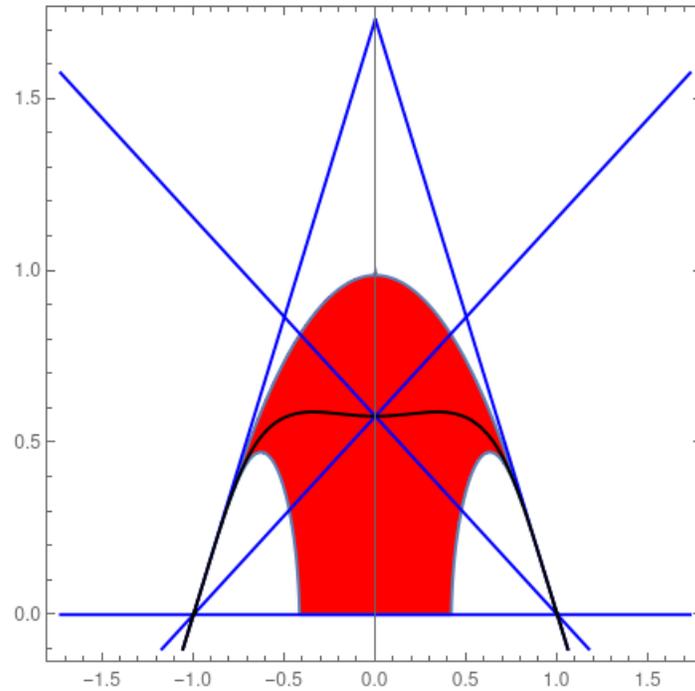


Figura 2.3: Regiões que temos as massas  $m_1$  e  $m_3$  positivas no interior do triângulo, curva  $L = 0$ , retas que passam sobre os lados do triângulo e os bissetores do triângulo.

A partir do estudo, notou-se que analisar o sinal de  $a_{31}$  pode ser mais complicado quando  $m_4$  e  $m_5$  estão nas outras regiões possíveis, isto é, quando ocorre  $R_{24} < R_{45}$  ou  $R_{45} < R_{24}$ . Os coeficientes  $a_{31}$ ,  $a_{13}$  devem ser analisados com mais cautela do que mencionado por Hampton, pois dependem das distâncias  $r_{14}$ ,  $r_{15}$  e  $r_{45}$ . Vamos supor dois casos agora, quando  $r_{15} > r_{45}$ , isto é, os corpos  $r_4$  e  $r_5$  estejam entre as hipérboles que passam pelo interior do triângulo, e  $r_{15} < r_{45}$ . No primeiro caso temos que a matriz de coeficientes tem os seguintes sinais

$$A_1 = \begin{pmatrix} - & + & + \\ - & + & - \\ a_{31} & 0 & - \end{pmatrix}$$

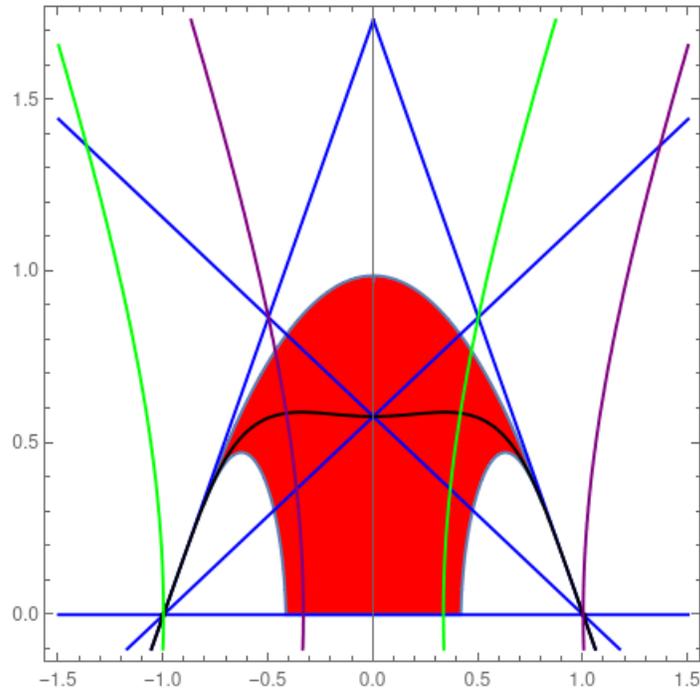


Figura 2.4: Regiões que temos as massas  $m_1$  e  $m_3$  positivas no interior do triângulo, curva  $L = 0$  e hipérboles  $R_{24} = R_{45}$  (Verde) e  $R_{14} = R_{45}$  (Roxo).

e para o segundo caso temos que a matriz de coeficientes tem os seguintes sinais

$$A_2 = \begin{pmatrix} - & + & - \\ - & + & - \\ a_{31} & 0 & - \end{pmatrix}.$$

Porém se tivermos  $a_{31} < 0$  não é possível ter  $a_{13} < 0$ . Provar a afirmação anterior analiticamente recairia na prova da intersecção da curva  $L = 0$  e das regiões onde  $a_{31} < 0$  e  $a_{13} < 0$ , assim percebemos que a análise da matriz de coeficientes de Hampton não é tão simples como exposta no artigo [14]. Na próxima secção analisamos como um problema similar foi solucionado pelos autores.

## 2.2 Configuração central Lagrange mais dois com dois corpos no exterior do triângulo

Posteriormente Mello, Llibre e Perez-Chavela em [23] encontraram outras regiões que as massas seriam positivas e a curva  $L = 0$  intersecta. O resultado parece com o de Hampton [14], mas tem características qualitativas exploradas que requer uma análise mais complexa.

Novamente consideramos uma configuração de cinco corpos  $r = (r_1, r_2, \dots, r_5)$  onde teremos que (1.7) resulta em um conjunto de dez equações. Desconsideramos o conjunto de colisões e por hipótese temos

$$r_{12} = r_{23} = r_{13} = 1, \quad r_{14} = r_{25}, \quad r_{15} = r_{24}, \quad r_{34} = r_{35}, \quad r_{24} < r_{14},$$

$$\Delta_{124} = \Delta_{125}, \quad \Delta_{143} = \Delta_{235}, \quad \Delta_{145} = \Delta_{245}, \quad \Delta_{135} = \Delta_{243}.$$

Ainda assumiu-se que  $\Delta_{145} \neq 0$ , ou seja, os corpos  $m_1, m_4$  e  $m_5$  não estão no mesmo segmento de reta. Com as hipóteses acima aplicadas em (1.7), concluímos de  $f_{45} = 0$  e  $f_{12} = 0$  que  $m_1 = m_2$  e  $m_4 = m_5$ , respectivamente. As outras oito equações de (1.7) são equivalentes, disto teremos as seguintes relações.

$$L = (R_{14} - R_{34})\Delta_{134} + (R_{15} - R_{34})\Delta_{135} = 0, \quad (2.4)$$

$$(R_{12} - R_{15})\Delta_{142}m_1 + (R_{12} - R_{34})\Delta_{143}m_3 + (R_{15} - R_{45})\Delta_{145}m_4 = 0, \quad (2.5)$$

$$(R_{12} - R_{14})\Delta_{142}m_1 + (R_{12} - R_{34})\Delta_{153}m_3 + (R_{14} - R_{45})\Delta_{154}m_4 = 0, \quad (2.6)$$

$$[(R_{12} - R_{14})\Delta_{134} + (R_{12} - R_{15})\Delta_{153}]m_1 + (R_{34} - R_{45})\Delta_{345}m_4 = 0. \quad (2.7)$$

Desta forma os coeficientes do sistema de equações formado por (2.5), (2.6) e (2.7) resulta na seguinte matriz  $A = [a_{ij}]$  dada por,

$$A = \begin{pmatrix} (R_{12} - R_{15})\Delta_{142} & (R_{12} - R_{34})\Delta_{143} & (R_{15} - R_{45})\Delta_{145} \\ (R_{12} - R_{14})\Delta_{142} & (R_{12} - R_{34})\Delta_{153} & (R_{14} - R_{45})\Delta_{154} \\ (R_{12} - R_{14})\Delta_{134} + (R_{12} - R_{15})\Delta_{153} & 0 & (R_{34} - R_{45})\Delta_{345} \end{pmatrix}.$$

Esse sistema é linear e homogêneo nas variáveis  $m_1, m_3$  e  $m_4$ , e possui solução não trivial quando o determinante da matriz  $A$  é igual a zero. Depois de alguns cálculos obtemos que  $\det(A) = 0$  assumindo que (2.4) é válida. Desta forma  $L = 0$  é uma condição geométrica para a disposição dos corpos da configuração.

Um dos obstáculos para resolver o problema é verificar em quais partes da curva  $L = 0$  temos massas positivas. Porém as condições que determinam regiões onde temos massas positivas e a condição que determina a curva  $L = 0$  são ambas condições implícitas e provar a intersecção das duas de forma analítica pode exigir ferramentas específicas. Desta forma temos o seguinte lema.

**Lema 2.2.1.** *Considere as regiões  $S_1 = \{R_{45} > R_{34} > R_{14} > 1\}$ ,  $S_2 = \{R_{45} < R_{34} < R_{14} < 1\}$ ,  $S_3 = \{\Delta_{345} > 0, \Delta_{134} < 0, R_{34} > R_{24}\}$ , veja figura 2.5, e  $S'_1, S'_2, S'_3$  são as regiões simétricas com relação a mediatriz do segmentos ligando  $r_1$  e  $r_2$ . As curvas*

$$L_i = \{L = 0\} \cap S_i, \quad L'_i = \{L = 0\} \cap S'_i,$$

*$i=1, 2, 3$ , estão bem definidas e são não vazias. Veja figura 2.7.*

*Demonstração.* Veja em [23]. □

Temos dois pontos  $Q_2 = \{R_{24} = 1\} \cap \{R_{24} = R_{45}\} \cap S_3$  e  $Q_3 = \{R_{24} = 1\} \cap \{R_{14} = R_{45}\} \cap S_3$  que estão sobre o círculo  $R_{24} = 1$ , veja figura 2.6. Podemos calcular  $L(Q_2) < 0$  e  $L(Q_3) > 0$ , logo por continuidade existe pelo menos um ponto da curva  $L_3$  que intersecta o círculo  $R_{24} = 1$ . Denotaremos tal ponto por  $P_2$  e  $P'_2$  seu simétrico com relação a mediatriz do segmento ligando as massas  $m_1$  e  $m_2$ . A seguir temos a proposição que garante a existência de configurações centrais empilhadas quando os corpos de massas  $m_4$  e  $m_5$  estão em um pequeno arco de  $L_3$ , suficientemente próximos dos pontos  $P_2$  e  $P'_2$ , respectivamente.

**Proposição 2.2.1.** *Assuma que três pontos  $r_1, r_2$  e  $r_3$  (com massas positivas  $m_1, m_2$  e  $m_3$ ) nos vértices de um triângulo equilátero cujo lado é um, e dois pontos  $r_4$  e  $r_5$  (com massas  $m_4, m_5$ ) que estão localizados simetricamente em relação a mediatriz referente ao segmento que liga os pontos  $r_1$  e  $r_2$ . Então existe uma configuração central empilhada de*

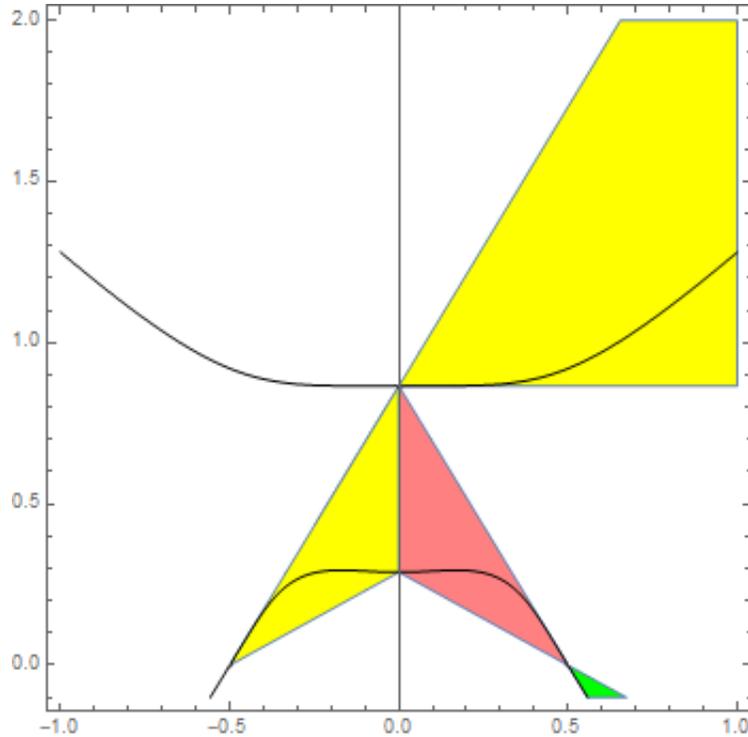


Figura 2.5: Partes das regiões  $S_1$  (Rosa),  $S_2$  (Verde) e  $S_3$  (Amarelo) e a curva  $L = 0$ .

*modo que os corpos de massas  $m_4$  e  $m_5$  estão em um pequeno arco de  $L_3$  próximos dos pontos  $P_2$  e  $P'_2$  respectivamente.*

*Demonstração.* Quando os corpos de massas  $m_4$  e  $m_5$  estão nos pontos  $P_2$  e  $P'_2$  respectivamente, temos  $R_{15} = R_{24} = 1$ , desta forma da matriz de coeficientes temos  $a_{31} = (1 - R_{14})\Delta_{134} < 0$ . Com isso os sinais da matriz de coeficientes  $A$  são dados por

$$A|_{P_2 \cup P'_2} = \begin{pmatrix} 0 & - & + \\ - & + & + \\ - & 0 & + \end{pmatrix}.$$

Da primeira linha da matriz acima podemos concluir que  $m_3$  e  $m_4$  têm o mesmo sinal e da última linha da matriz temos que  $m_1$  e  $m_4$  também possuem o mesmo sinal, assim  $m_1$ ,  $m_3$  e  $m_4$  possuem o mesmo sinal. Desta forma quando os corpos de massas  $m_4$  e  $m_5$  estão localizados em  $P_2$  e  $P'_2$  respectivamente, existem massas  $m_1$ ,  $m_3$  e  $m_4$  formando uma configuração central empilhada.

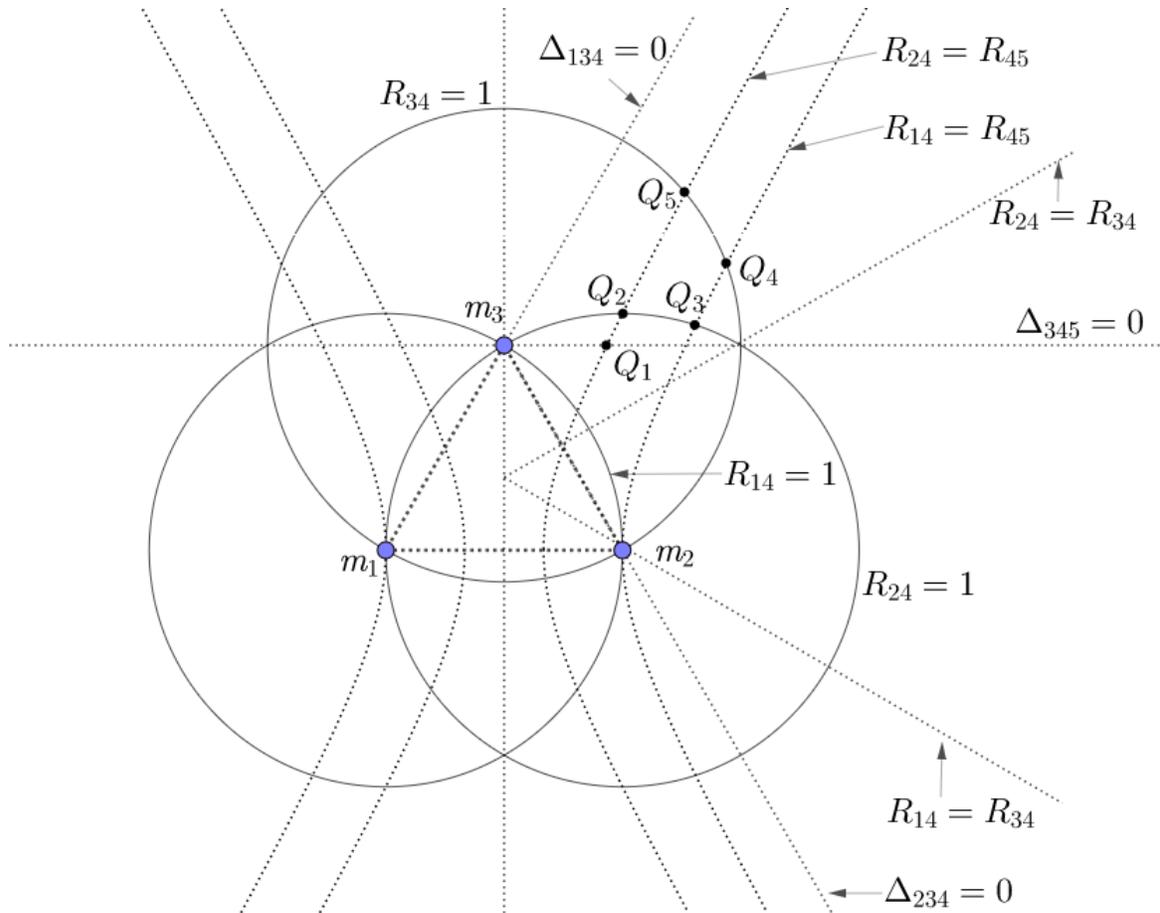


Figura 2.6: Alguns pontos, retas e curvas para calcular o sinal de  $L$ .

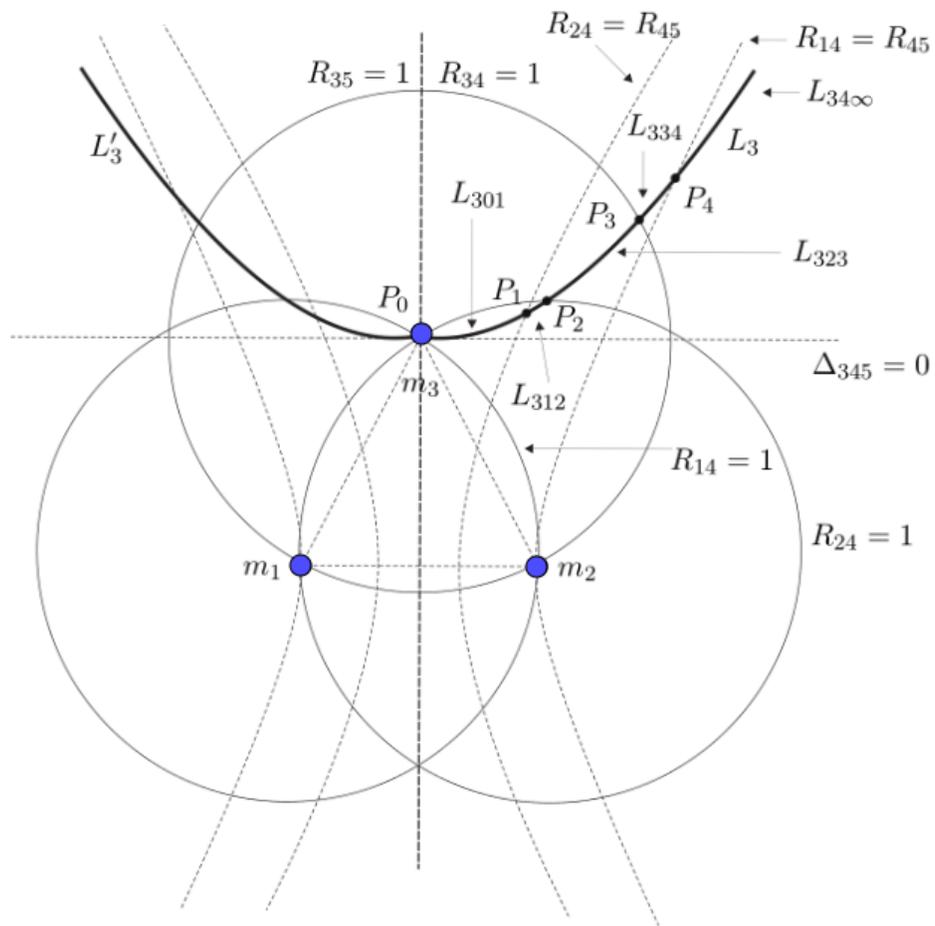


Figura 2.7: Alguns pontos, retas e curvas para calcular a interseção da curva com as regiões.

Se  $a_{31}$  depende continuamente das distâncias mutuas, podemos afirmar que  $a_{31} < 0$  quando os corpos de massas  $m_4$  e  $m_5$  estão numa vizinhança dos pontos  $P_2$  e  $P'_2$  respectivamente. O mesmo é válido para os outros coeficientes  $a_{ij}$ , que preservam o sinal em pequenas vizinhanças de  $P_2$  e  $P'_2$ . Utilizando a restrição  $L = 0$  obtemos o pequeno arco citado na proposição.

□

Com auxílio do próximo lema podemos generalizar o controle do coeficiente  $a_{31}$  e conseguir um resultado um pouco mais geral que o anterior.

**Lema 2.2.2.** *A função  $a_{31} = (R_{12} - R_{14})\Delta_{134} + (R_{12} - R_{15})\Delta_{153}$  é negativa no conjunto  $\{L = 0\} \cap \{R_{24} < 1\}$ .*

*Demonstração.* Para nossa classe de configuração central temos  $R_{14} < R_{24}$ . Relembrando que  $a_{31} = (R_{14} - 1)\Delta_{143} + (R_{24} - 1)\Delta_{135}$  e considerando  $r_{24} > 1$  podemos concluir que  $a_{31} = (R_{14} - 1)\Delta_{143} + (R_{24} - 1)\Delta_{135} < (\Delta_{143} + \Delta_{135})(R_{24} - 1)$ . Como  $(\Delta_{143} + \Delta_{135}) > 0$  e  $(R_{24} - 1) < 0$  temos  $a_{31} < 0$ , desta forma o lema é válido para a componente  $L_3$  no exterior do círculo  $\{R_{24} = 1\}$ .

□

Seja  $P_0$  o vértice do triângulo em  $r_3$ . Se os corpos de massas  $m_4$  e  $m_5$  estão na curva  $L = 0$  e suficientemente próximos de  $P_0$ , então não existe configuração central, tal resultado pode ser visto na próxima proposição.

**Proposição 2.2.2.** *Assuma que três massas positivas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  estão nos vértices de um triângulo equilátero cujo lado é um, e as massas  $m_4$ ,  $m_5$  estejam localizadas em  $L_3 = 0$  e  $L'_3$  respectivamente, simetricamente com respeito ao bissetor perpendicular. Se  $r_4$  e  $r_5$  estão suficientemente próximos de  $P_0$ , então não existem massas positivas  $m_1 = m_2$ ,  $m_4 = m_5$  e  $m_3$  tal que os cinco corpos formem uma configuração central empilhada.*

*Demonstração.* Com as hipóteses temos que  $\Delta_{142} < 0$ , por outro lado  $r_4$  está no interior do círculo  $R_{24} = 1$  que corresponde a região  $R_{24} > 1$ , que é  $R_{24} = R_{15} > 1$ . Voltando a nossa matriz de coeficientes obtemos que  $a_{11} = (R_{12} - R_{15})\Delta_{142} < 0$  nesta região. Os sinais da matriz de coeficientes  $A$  são dados por

$$A = \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & + & + \\ a_{31} & 0 & + \end{pmatrix}.$$

E da primeira linha da matriz acima temos que  $m_1 = m_2$ ,  $m_4 = m_5$  e  $m_3$  não possuem o mesmo sinal.

□

Desta forma conseguimos analisar nossa curva  $L_3$  suficientemente próximo ao vértice, a questão a ser resolvida agora é determinar em quais outras partes da curva  $L = 0$  não teremos configurações centrais empilhadas. Podemos expor as evidências numéricas que  $L_3$  intersecta a hipérbole  $R_{14} = R_{45}$  em um único ponto  $P_4$ . O ponto  $P_4$  será o último ponto da componente conexa ilimitada de  $L_3$  que será denotada por  $L_{34\infty}$  e  $L'_{34\infty}$  seu simétrico com relação ao bissetor perpendicular.

**Lema 2.2.3.** *Não existem configurações centrais empilhadas quando  $r_4$  e  $r_5$  estão em  $L_{34\infty}$  e  $L'_{34\infty}$  respectivamente.*

*Demonstração.* Veja em [23].

□

Também temos evidências numéricas que  $L_3$  intersecta a hipérbole  $R_{24} = R_{45}$  em um único ponto denotado por  $P_1$ , e intersecta a circunferência dada por  $R_{34} = 1$  em um único ponto denotado por  $P_3$ . Podemos definir  $L_{312}$ ,  $L_{323}$  e  $L_{334}$  como arcos abertos  $L_{3ij}$  de  $L_3$  delimitados pelos pontos  $P_i$  e  $P_j$ , para  $i, j = 1, 3, 4$ . De forma mais precisa

$$L_{312} = L_3 \cap \{\Delta_{345} > 0, R_{24} > 1, R_{24} > R_{45}, R_{14} < R_{45}\},$$

$$L_{323} = L_3 \cap \{R_{24} < 1, R_{24} > R_{45}, R_{14} < R_{45}, R_{34} > 1\},$$

$$L_{334} = L_3 \cap \{R_{34} < 1, R_{24} > R_{45}, R_{14} < R_{45}\}.$$

E dessa forma podemos terminar de verificar em quais partes de  $L_3$  teremos configurações centrais empilhadas.

**Lema 2.2.4.** *Não existe configuração central quando  $r_4$  e  $r_5$  estão nas componentes  $L_{334}$  e  $L'_{334}$  respectivamente.*

*Demonstração.* Para  $r_4 \in L_{334}$  e  $r_5 \in L'_{334}$  os sinais da matriz de coeficientes  $A$  são dados por

$$A = \begin{pmatrix} - & + & + \\ - & - & + \\ - & 0 & + \end{pmatrix}.$$

Usando a última linha da matriz acima concluímos que as massas  $m_1$  e  $m_4$  possuem o mesmo sinal. Infelizmente não podemos obter mais informações sobre o sinal de  $m_3$ . Por outro lado, temos que as equações (2.5) e (2.7) determinam dois planos através da origem no espaço das massas  $(m_1, m_3, m_4)$ . Temos que os vetores normais dos planos são, respectivamente,  $n_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$  e  $n_3 = (a_{31}, 0, a_{33})$ . Seja  $T = (T_1, T_2, T_3) = n_1 \wedge n_3$  o vetor paralelo a reta determinada pela intersecção dos dois planos. Assim existem massas positivas  $m_1$ ,  $m_3$  e  $m_4$  que são soluções de (2.5) e (2.7), se e somente se, as componentes do vetor  $T$  têm o mesmo sinal. Com cálculos diretos temos  $T_1 > 0$ ,  $T_3 > 0$  e  $T_2 < 0$ . Como podemos calcular as coordenadas dos pontos  $P_3$  e  $P_4$  podemos verificar numericamente que os valores de  $T_2$  sobre a curva  $L = 0$  entre os pontos  $P_3$  e  $P_4$  estão no intervalo  $(-0.376045, -0.368863)$ . Com isso nem todas as componentes têm o mesmo sinal, assim segue o resultado do lema.

□

**Lema 2.2.5.** *Quando  $r_4$  e  $r_5$  estão em  $P_3$  e  $P'_3$  respectivamente, não existe configurações centrais empilhadas.*

*Demonstração.* Veja em [23]

□

**Proposição 2.2.3.** *Assuma três massas positivas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , nos vértices de um triângulo equilátero de lado um, e duas massas positivas  $m_4$  e  $m_5$  localizadas simetricamente em relação ao bissetor perpendicular, tal que  $r_4 \in L_{323}$  e  $r_5 \in L'_{323}$ , veja figura 2.7. Então existem massas positivas  $m_1 = m_2$ ,  $m_4 = m_5$  e  $m_3$ , tal que os cinco corpos com essas massas formam uma configuração central empilhada.*

*Demonstração.* Para  $r_4 \in L_{323}$  e  $r_5 \in L'_{323}$  os sinais dos coeficientes da matriz  $A$  são dados por

$$A|_{L_{323} \cup L'_{323}} = \begin{pmatrix} - & - & + \\ - & + & + \\ - & 0 & + \end{pmatrix}.$$

Usando a última linha da matriz acima concluímos que  $m_1$  e  $m_4$  têm o mesmo sinal. Infelizmente não podemos obter mais informações sobre o sinal da massa  $m_3$  da matriz acima. Além disso as equações (2.5) e (2.6) definem dois planos através da origem no espaço das massas  $(m_1, m_3, m_4)$ . Os vetores normais dos planos são, respectivamente,  $n_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$  e  $n_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ . Novamente vamos analisar o vetor paralelo a reta de intersecção dos dois planos dado por  $T = (T_1, T_2, T_3) = n_1 \wedge n_2$ . Portanto existem massas positivas  $m_1$ ,  $m_3$  e  $m_4$  que são soluções das equações (2.5) e (2.6), se e somente se, as componentes do vetor  $T$  têm o mesmo sinal.

Com cálculos diretos temos que  $T_1 = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} < 0$ ,  $T_3 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$  e que  $T_2 = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} < 0$ . Podemos verificar numericamente que os valores de  $T_2$  sobre a curva  $L = 0$  entre os pontos  $P_2$  e  $P_3$  estão no intervalo  $(-0.716137, -0.44343)$ , assim segue o resultado. □

Os dois casos abordados neste capítulo apoiaram seu desenvolvimento nas simetrias encontradas nos problemas. Vários trabalhos com a configuração Lagrange mais dois possuem certas simetrias nos dois corpos fora do triângulo equilátero e são côncavas, isso instigou Barrabés, Cors, Fernandes e Vidal a estudar em [2] a simetria e a convexidade no problema de Lagrange mais dois. Mas antes de abordarmos os resultados de [2], vamos expor no capítulo seguinte mais três famílias de configurações Lagrange mais dois.

## Capítulo 3

# Configuração central Lagrange mais dois com dois corpos no bissetor perpendicular do triângulo

Agora voltamos a atenção para os resultados expostos por Llibre e Mello em [18]. Llibre e Mello consideraram no estudo as configurações de cinco corpos com três corpos nos vértices de um triângulo equilátero e os dois corpos restantes localizados em segmentos de uma das retas bissetoras do triângulo.

Considerando uma configuração de cinco corpos  $r = (r_1, r_2, \dots, r_5)$  com massas  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$  de modo que  $r_1, r_2$  e  $r_3$  estão nos vértices de um triângulo equilátero de lado igual a um e os corpos restantes,  $r_4$  e  $r_5$ , estão localizados numa reta bissetora como a figura 3.1.

Considera-se os pontos  $A, B, C, D, E$  e  $F$  sobre a reta bissetora que passa entre  $r_1$  e  $r_2$ , onde  $A$  é o baricentro do triângulo equilátero,  $B$  é o vértice contendo a posição  $r_3$ ,  $C$  é o ponto simétrico de  $B$  com relação ao segmento  $\overline{r_1 r_2}$ ,  $D$  e  $F$  são pontos no círculo de centro  $B$  e raio um e  $E$  é o ponto médio do segmento  $\overline{r_1 r_2}$  como na figura 3.2, assim temos o seguinte resultado.

**Proposição 3.0.1.** *Assumimos que as posições  $r_1, r_2$  e  $r_3$ , com massas  $m_1, m_2$  e  $m_3$  respectivamente, estão nos vértices de um triângulo equilátero de lado um e as posições  $r_4$*

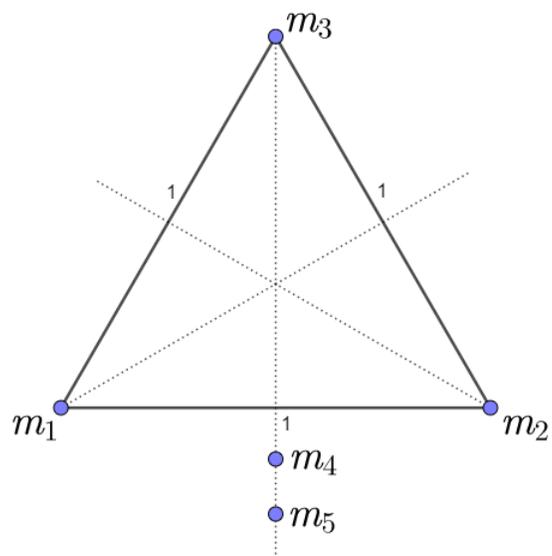


Figura 3.1: Configuração de cinco corpos no plano.

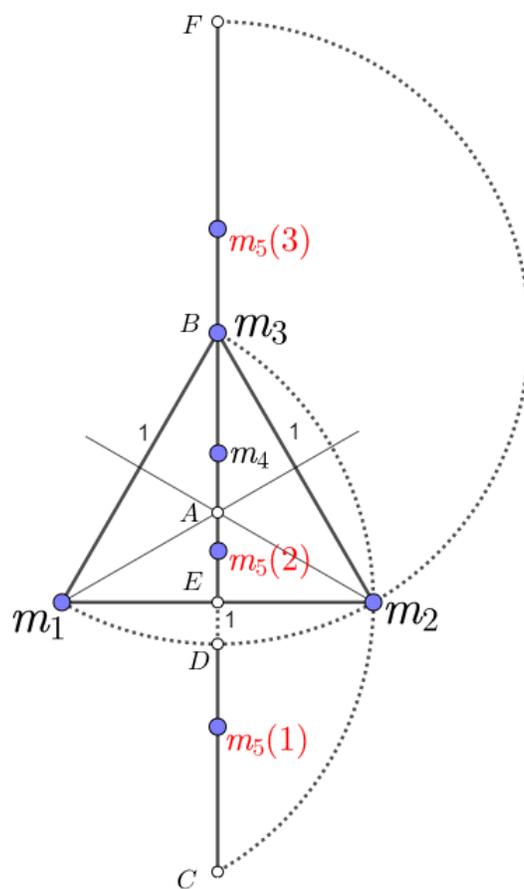


Figura 3.2: Configuração de cinco corpos no plano com pontos importantes.

e  $r_5$ , com massas  $m_4$  e  $m_5$  respectivamente, estão sobre o bissetor perpendicular como na figura 3.1. Para que as cinco massas estejam em uma configuração central as seguintes afirmações devem ser válidas.

(a) As duas massas  $m_1$  e  $m_2$  são iguais.

(b) Uma das massas, e apenas uma, ou  $m_4$  ou  $m_5$ , deve pertencer ao segmento  $AB$ . Veja a figura 3.2.

Sem perda de generalidade podemos assumir que  $m_4 \in AB$ . Então existe uma posição  $G \in AB$ , segmentos não vazios onde  $I^1(G) \subset CD$ ,  $I^2(G) \subset EA$ ,  $I^3(G) \subset BF$  e massas positivas  $m_1 = m_2$ ,  $m_3$ ,  $m_4$  e  $m_5(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , tal que  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  são os vértices do triângulo,  $m_4$  esta em  $G$  e  $m_5(1) \in I^1(G)$ , ou  $m_5(2) \in I^2(G)$ , ou  $m_5(3) \in I^3(G)$ , formam três configurações centrais. Veja a figura 3.2.

*Demonstração.* Utilizamos aqui as equações de Andoyer, junto com as relações

$$r_{12} = r_{23} = r_{13} = 1, r_{14} = r_{24}, r_{15} = r_{25}, r_{34} \neq 0, r_{35} \neq 0, r_{45} \neq 0,$$

$$\Delta_{345} = 0, \Delta_{153} = \Delta_{235}, \Delta_{143} = \Delta_{234}, \Delta_{154} = \Delta_{245}.$$

Sem perda de generalidade podemos utilizar um sistema de coordenadas de forma que as massas,  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  estão em  $(-1/2, 0)$ ,  $(1/2, 0)$  e  $(0, \sqrt{3}/2)$  respectivamente. Portanto  $A = (0, \sqrt{3}/6)$ ,  $B = (0, \sqrt{3}/2)$ ,  $C = (0, -\sqrt{3}/2)$ ,  $D = (0, -1 + \sqrt{3}/2)$ ,  $E = (0, 0)$  e  $F = (0, 1 + \sqrt{3}/2)$ .

Suponhamos que  $r_{14} = r_{12}$ , fixadas as coordenadas sabemos que  $r_{12} = 1$ . Como desconsideramos o conjunto das colisões  $m_4$  deve estar em  $(0, -\sqrt{3}/2)$ , assim obtemos as seguintes equações com tal configuração

$$f_{13} = m_4(1 - R_{34})\Delta_{134} + m_5(R_{15} - R_{35})\Delta_{135} = 0,$$

$$f_{14} = m_3(1 - R_{34})\Delta_{143} + m_5(R_{15} - R_{45})\Delta_{145} = 0.$$

Observe que  $r_{34} > 1$  logo  $(1 - R_{34}) > 0$  e como  $\Delta_{134} < 0$  temos  $(1 - R_{34})\Delta_{134} < 0$  e de forma análoga  $(1 - R_{34})\Delta_{143} > 0$ . Como estamos interessados em massas positivas, para o sistema acima possuir solução devemos ter  $(R_{15} - R_{35})\Delta_{135} > 0$  e  $(R_{15} - R_{45})\Delta_{145} < 0$ .

Observa-se que se  $m_5$  estiver acima de  $m_3$  ou abaixo de  $m_4$  os sinais de  $\Delta_{135}$  e  $\Delta_{145}$  são iguais e se  $m_5$  estiver localizada entre  $m_3$  e  $m_4$ , então  $\Delta_{135}$  e  $\Delta_{145}$  possuem sinais opostos. No caso de  $m_5$  estar acima de  $m_3$  teríamos  $r_{35} < r_{15} < r_{45}$ , logo  $(R_{15} - R_{35}) < 0$  e  $(R_{15} - R_{45}) > 0$  que não satisfazem as inequações necessárias. Analisando as outras possibilidades de localização de  $m_5$  nota-se que não existe posição que satisfaz as inequações, com isso  $m_4$  não pode estar em  $(0, -\sqrt{3}/2)$ . O mesmo argumento pode ser utilizado para  $r_{15} = r_{12} = 1$ .

Como  $r_{14} \neq r_{12}$  e  $r_{15} \neq r_{12}$ , das equações (1.7) temos

$$f_{34} = (1 - R_{14})\Delta_{134}(m_1 - m_2) = 0,$$

$$f_{35} = (1 - R_{15})\Delta_{135}(m_1 - m_2) = 0,$$

e como  $(1 - R_{14})\Delta_{134}$  e  $(1 - R_{15})\Delta_{135}$  são ambos não nulos temos que  $m_1 = m_2$  e fica provado o item (a) da proposição.

Agora tomando  $m_1 = m_2$  nas outras oito equações de (1.7) teremos

$$(R_{14} - R_{34})\Delta_{134}m_4 + (R_{15} - R_{35})\Delta_{135}m_5 = 0, \quad (3.1)$$

$$(R_{12} - R_{14})\Delta_{124}m_1 + (R_{12} - R_{34})\Delta_{134}m_3 + (R_{15} - R_{45})\Delta_{154}m_5 = 0, \quad (3.2)$$

$$(R_{12} - R_{15})\Delta_{125}m_1 + (R_{12} - R_{35})\Delta_{135}m_3 + (R_{14} - R_{45})\Delta_{145}m_4 = 0. \quad (3.3)$$

Se temos  $r_{14} = r_{34}$ , ou seja,  $m_4$  se localiza no baricentro do triângulo equilátero, pela equação (3.1) e com a massa  $m_5$  positiva temos  $r_{15} = r_{35}$ . Mas isso resultaria em  $r_{45} = 0$ , que não pode ocorrer, pois não estamos considerando o conjunto de colisões, logo  $r_{14} \neq r_{34}$ . De forma análoga concluímos que  $r_{15} \neq r_{35}$ .

Resulta da equação (3.1) que  $(R_{14} - R_{34})\Delta_{134}$  e  $(R_{35} - R_{15})\Delta_{135}$  devem ter o mesmo sinal, isso nos leva ao estudo de dois casos.

*Caso 1.* Considere  $(R_{14} - R_{34})\Delta_{134} > 0$  e  $(R_{35} - R_{15})\Delta_{135} > 0$ . Se  $\Delta_{134} > 0$  então  $m_4$  esta acima de  $m_3$  logo  $r_{14} > r_{34}$  e isso implica  $R_{14} < R_{34}$ , deste modo  $(R_{14} - R_{34})\Delta_{134} < 0$  o que contradiz as hipóteses iniciais, com isso nosso caso de interesse é  $\Delta_{134} < 0$ . Considerando quando  $R_{14} < R_{34}$  teremos que  $(R_{14} - R_{34})\Delta_{134} > 0$ , mas essas condições implicam na massa  $m_4$  estar no segmento  $AB$ . De forma análoga para  $(R_{35} - R_{15})\Delta_{135} > 0$  temos

duas possibilidades, onde  $\Delta_{135} > 0$  então  $r_{35} < r_{15}$  e  $\Delta_{135} < 0$  então  $r_{35} > r_{15}$ .

*Caso 2.* Considere  $(R_{14} - R_{34})\Delta_{134} < 0$  e  $(R_{35} - R_{15})\Delta_{135} < 0$ , e utilizando os mesmos procedimentos do caso anterior concluímos que  $m_5$  deve estar localizada no segmento  $AB$ , sendo que com  $(R_{14} - R_{34})\Delta_{134} < 0$  temos duas possibilidades, onde  $\Delta_{134} > 0$  implica  $r_{34} < r_{14}$  e se  $\Delta_{134} < 0$  então  $r_{34} > r_{14}$ .

Dos dois casos anteriores podemos notar que apenas uma das massas  $m_4$  ou  $m_5$  podem estar no segmento  $AB$ , logo fica provada a afirmação (b) da proposição.

Assim sem perda de generalidade podemos assumir  $m_4$  está localizada em um ponto  $(x, 0) \in AB$  e  $m_5$  um ponto  $(0, y)$  satisfazendo tanto  $y < \sqrt{3}/6$  ou  $y > \sqrt{3}/2$ . Portanto de (3.1) as massas  $m_4$  e  $m_5$  são relacionadas por

$$m_4 = \frac{(R_{35} - R_{15})\Delta_{135}}{(R_{14} - R_{34})\Delta_{134}} m_5, \quad (3.4)$$

e substituindo (3.4) em (3.3) temos

$$(R_{12} - R_{15})\Delta_{125}m_1 + (R_{12} - R_{35})\Delta_{135}m_3 + \frac{(R_{14} - R_{45})(R_{35} - R_{15})\Delta_{145}\Delta_{135}}{(R_{14} - R_{34})\Delta_{134}} m_5 = 0. \quad (3.5)$$

Com isso podemos analisar os dois casos possíveis de posição para  $m_5$ .

*Caso 1.* Considerando  $y < \sqrt{3}/6$ , teremos três casos para se analisar:  $\Delta_{125} = 0$  ou  $\Delta_{125} < 0$  ou  $\Delta_{125} > 0$ .

Se  $\Delta_{125} = 0$ , teríamos  $y = 0$ , desta forma o primeiro coeficiente do lado esquerdo da equação (3.5) desaparece, enquanto que o segundo coeficiente é positivo, pois  $(R_{12} - R_{35}) < 0$  e  $\Delta_{135} < 0$ . Também teremos que  $(R_{35} - R_{15}) < 0$ ,  $(R_{14} - R_{45}) < 0$ ,  $(R_{14} - R_{34}) < 0$ ,  $\Delta_{145} < 0$  e  $\Delta_{134} < 0$ , desta forma o terceiro coeficiente do lado esquerdo de (3.5) também é positivos. Disto temos que não existem valores positivos das massas  $m_3$  e  $m_5$  que satisfazem a equação e concluímos que  $m_5$  não pode estar localizado no ponto  $E$ .

Consideramos agora  $\Delta_{125} < 0$  e assim  $y < 0$ , desta forma teremos que analisar as possibilidades de posição de  $m_5$  onde  $-1 + \sqrt{3}/2 \leq y < 0$  ou  $y \leq -\sqrt{3}/2$  serão descartadas,

pois não existem massas positivas  $m_1, m_3$  e  $m_5$  que satisfazem a (3.5) nestes casos. Assim a única possibilidade de solução da equação (3.5) neste caso é com  $-\sqrt{3}/2 < y < -1 + \sqrt{3}/2$ , ou seja,  $(0, y) \in CD$ .

De forma análoga se  $\Delta_{125} > 0$  então  $0 < y < \sqrt{3}/6$ , ou seja,  $(0, y) \in EA$ .

*Caso 2.* Considerando  $y > \sqrt{3}/2$ . Neste caso teremos  $r_{12} < r_{15}$  logo  $R_{12} - R_{15} > 0$ ,  $\Delta_{125} > 0$ ,  $\Delta_{135} > 0$ ,  $r_{35} < r_{15}$  logo  $R_{35} - R_{15} > 0$ ,  $\Delta_{145} > 0$ ,  $r_{34} < r_{14}$  logo  $R_{14} - R_{34} < 0$  e  $\Delta_{134} < 0$ . Se  $y > 1 + \sqrt{3}/2$  então  $r_{14} < r_{45}$ , isto é,  $R_{14} - R_{45} > 0$  e com isso o primeiro e o terceiro dos coeficientes do lado esquerdo de (3.5) são positivos. Desse modo para cumprir a igualdade o segundo dos coeficientes de (3.5) deve ser negativo, isto é,  $R_{12} - R_{35} < 0$ . Mas isso implica em  $r_{35} < r_{12}$  que contradiz nossa hipótese inicial.

Se  $y = 1 + \sqrt{3}/2$  então  $r_{12} = r_{35}$  e  $R_{14} - R_{45} \geq 0$ . Assim o segundo dos três coeficientes do lado esquerdo de (3.5) desaparece, o terceiro é maior ou igual que zero e o primeiro é maior que zero. Com isso não existem massas positivas  $m_1$  e  $m_5$  que satisfazem a equação. Concluimos que  $(0, y) \in BF$ .

Dos dois casos abordados acima as únicas possibilidades de massas positivas  $m_1, m_3$  e  $m_5$  para solução do sistema dado por (3.2), (3.4) e (3.5) são  $(0, x) \in AB$  e  $(0, y) \in CD$  ou  $(0, y) \in EA$  ou  $(0, y) \in BF$ .

Podemos notar que as equações (3.2) e (3.5) definem dois planos que intersectam-se na origem do espaço das massas  $(m_1, m_3, m_5)$ . Os vetores normais desses planos são, respectivamente,  $n_1 = (n_{11}, n_{12}, n_{13})$ ,  $n_2 = (n_{21}, n_{22}, n_{23})$ . Podemos calcular as coordenadas desses vetores utilizando as hipóteses construídas anteriormente.

$$\begin{aligned} n_{11} &= (R_{12} - R_{14})\Delta_{124} = \left[1 - \frac{1}{r_{14}^3}\right] \Delta_{124} = \left[1 - \frac{1}{|r_1 - r_4|^3}\right] x \\ &= \left[1 - \frac{1}{|(-1/2, 0) - (0, x)|^3}\right] x = \left[1 - \frac{1}{(1/4 + x^2)^{3/2}}\right] x \\ &= x \left[1 - \frac{8}{(1 + 4x^2)^{3/2}}\right] \end{aligned}$$

e de forma análoga podemos calcular os outros,

$$\begin{aligned}
n_{12} &= \frac{2x - \sqrt{3}}{4} \left[ 1 - \frac{8}{(\sqrt{3} - 2x)^3} \right], \\
n_{13} &= \frac{x - y}{2} \left[ \frac{8}{(1 + 4y^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x - y)^2)^{3/2}} \right], \\
n_{21} &= y \left[ 1 - \frac{8}{(1 + 4y^2)^{3/2}} \right], \\
n_{22} &= \frac{2y - \sqrt{3}}{4} \left[ 1 - \frac{8}{((2y - \sqrt{3})^2)^{3/2}} \right], \\
n_{23} &= \frac{(y - x)(2y - \sqrt{3})}{2(2x - \sqrt{3})} \left[ \frac{8}{(1 + 4x^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x - y)^2)^{3/2}} \right] \frac{\left[ \frac{1}{((2y - \sqrt{3})^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1 + 4y^2)^{3/2}} \right]}{\left[ \frac{1}{(1 + 4x^2)^{3/2}} - \frac{1}{(\sqrt{3} - 2x)^3} \right]}.
\end{aligned}$$

Seja  $T = (T_1, T_2, T_3) = n_1 \wedge n_2 = (n_{12}n_{23} - n_{13}n_{22}, n_{13}n_{21} - n_{11}n_{23}, n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})$  o vetor paralelo a reta que define a intersecção dos dois planos. Desta forma teremos soluções com massas positivas das equações (3.2) e (3.5), se e somente se, as componentes do vetor  $T$  têm o mesmo sinal.

Seja  $G = (0, 2/5) \in AB$ ,  $H_1 = (0, -2/5) \in CD$ ,  $H_2 = (0, 1/5) \in EA$  e  $H_3 = (0, 6/5) \in BF$ . De  $G$  e  $H_1$  definimos o ponto  $(x_0, y_0) = (2/5, 0 - 2/5)$ , de  $G$  e  $H_2$  definimos o ponto  $(x_0, y_1) = (2/5, 1/5)$  e de  $G$  e  $H_3$  temos o ponto  $(x_0, y_2) = (2/5, 6/5)$ . Com um cálculo direto utilizando o software *Mathematica* temos  $T_1(x_0, y_0) < 0$ ,  $T_2(x_0, y_0) < 0$ ,  $T_3(x_0, y_0) < 0$ , e também  $T_1(x_0, y_1) > 0$ ,  $T_2(x_0, y_1) > 0$ ,  $T_3(x_0, y_1) > 0$  e por fim  $T_1(x_0, y_2) > 0$ ,  $T_2(x_0, y_2) > 0$ ,  $T_3(x_0, y_2) > 0$ . Com isso, por continuidade, nas vizinhanças de  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_0, y_1)$  e  $(x_0, y_2)$  temos que os sinais das funções  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  se mantêm os mesmos que acima.

A existência dos segmentos  $I^1(G) \subset CD$ ,  $I^2(G) \subset EA$  e  $I^3(G) \subset BF$  segue da intersecção das vizinhanças acima com a reta  $x = x_0$ . E com isso concluímos a prova da proposição.

□

A seguir temos uma evidência numérica da parte melhorada da Proposição 3.0.1 enunciada como: *Sem perda de generalidade podemos assumir que  $m_4 \in AB$ . Então para toda posição  $G \in AB$ , existem segmentos não vazios onde  $I^1(G) \subset CD$ ,  $I^2(G) \subset EA$ ,*

$I^3(G) \subset BF$  e massas positivas  $m_1 = m_2, m_3, m_4$  e  $m_5(i), i = 1, 2, 3$ , tal que  $m_1, m_2$  e  $m_3$  são os vértices do triângulo,  $m_4$  esta em  $G$  e  $m_5(1) \in I^1(G)$ , ou  $m_5(2) \in I^2(G)$ , ou  $m_5(3) \in I^3(G)$ , formam três configurações centrais.

Podemos encontrar as regiões onde as massas são positivas, com auxílio das curvas  $T_1(x, y) = 0, T_2(x, y) = 0$  e  $T_3(x, y) = 0$  mostradas na figura 3.3 para  $\sqrt{3}/6 < x < \sqrt{3}/2$  e  $-\sqrt{3}/2 < y < -\sqrt{3}/6$ . Deste modo se escrevermos a forma explicita de  $y_i(x)$  como a curva implícita  $T_i(x, y_i) = 0$  na região 1 teremos  $y_3(x) < y_2(x) < y_1(x) < 0$ . Desta forma as componentes  $T_1, T_2$  e  $T_3$  do vetor  $T$  são negativas em algum subconjunto da região 1, veja figura 3.4, definida por  $\{(x, y) : \sqrt{3}/6 < x < \sqrt{3}/2 \text{ e } y_3(x) < y < y_2(x)\}$ . Esse subconjunto contém  $(x_0, y_0)$ .

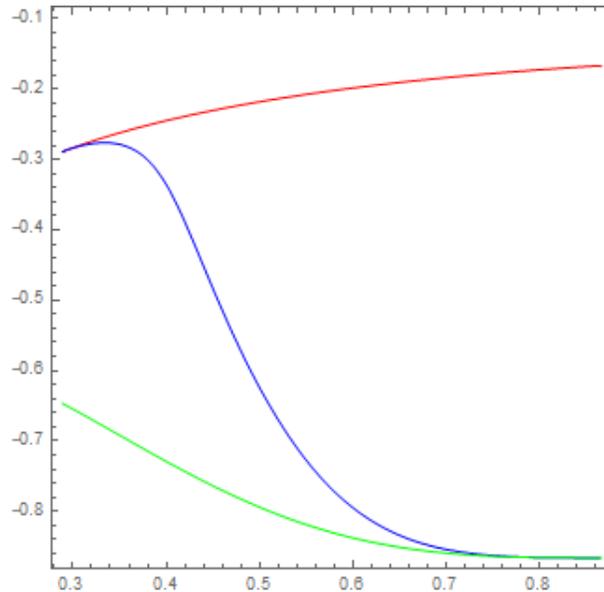


Figura 3.3: Curvas  $T_1 = 0$  (Vermelho),  $T_2 = 0$  (Azul) e  $T_3 = 0$  (Verde) para região 1.

As curvas  $T_2(x, y) = 0$  e  $T_3(x, y) = 0$  são dadas na figura 3.5, para  $\sqrt{3}/6 < x < \sqrt{3}/2$  e  $0 < y < \sqrt{3}/6$  e nos fornece a região 2, veja a figura 3.6. Notemos que a curva  $T_1(x, y) = 0$  não possui pontos na região 2.

Desta forma as coordenadas do vetor  $T$  são positivas no subconjunto da região 2 limitada pelas quatro curvas  $\{x = \sqrt{3}/6\}, \{y = \sqrt{3}/6\}, \{(x, y_2(x))\}$  e  $\{(x, y_3(x))\}$ . Pode-se notar, utilizando a regra da reta vertical, que  $T_2 = 0$  não é um gráfico com respeito ao eixo  $x$ , desta forma devemos o decompor em dois gráficos da forma  $\{x, y_2(x)\}$ . O

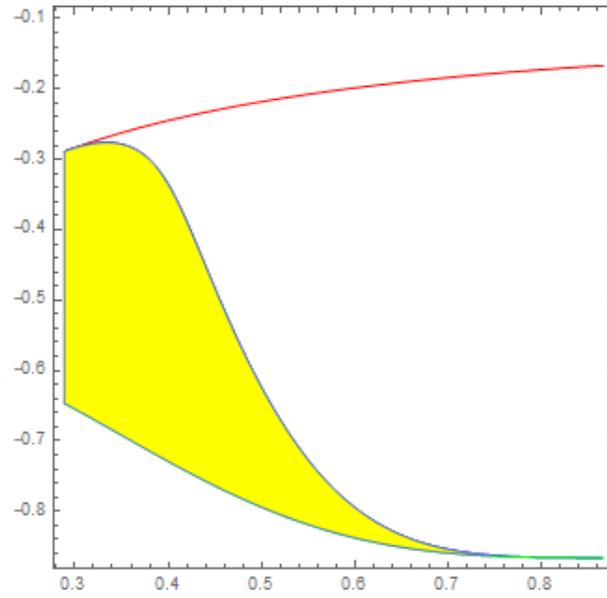


Figura 3.4: Região 1 representada em amarelo.

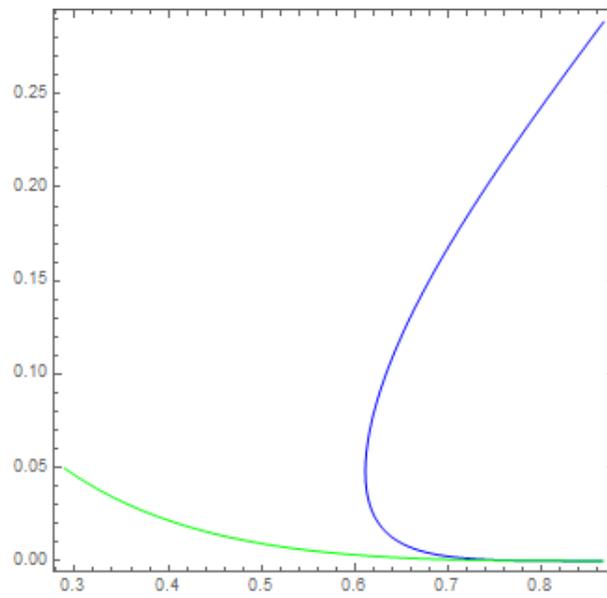


Figura 3.5: Curvas  $T_2 = 0$  (Azul) e  $T_3 = 0$  (Verde) para região 2.

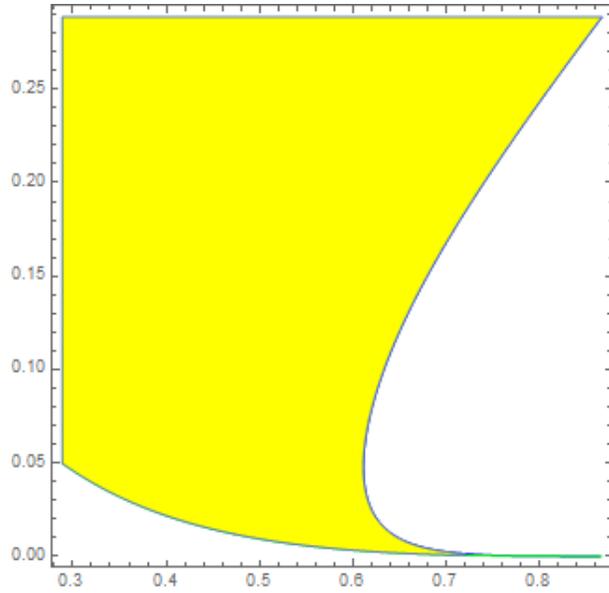


Figura 3.6: Região 2 representada em amarelo.

subconjunto citado acima contém o ponto  $(x_0, y_1)$ .

As curvas  $T_2(x, y) = 0$  e  $T_3(x, y) = 0$  são dadas na figura 3.7, para  $\sqrt{3}/6 < x < \sqrt{3}/2$  e  $\sqrt{3}/2 < y < 1 + \sqrt{3}/2$ , nos fornece a região 3, veja a figura 3.8. Notemos que a curva  $T_1(x, y) = 0$  não possui pontos na região 3.

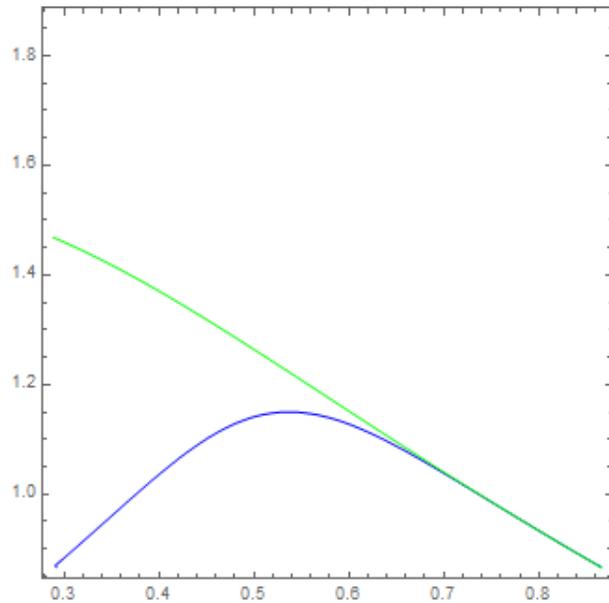


Figura 3.7: Curvas  $T_2 = 0$  e  $T_3 = 0$  para região 3.

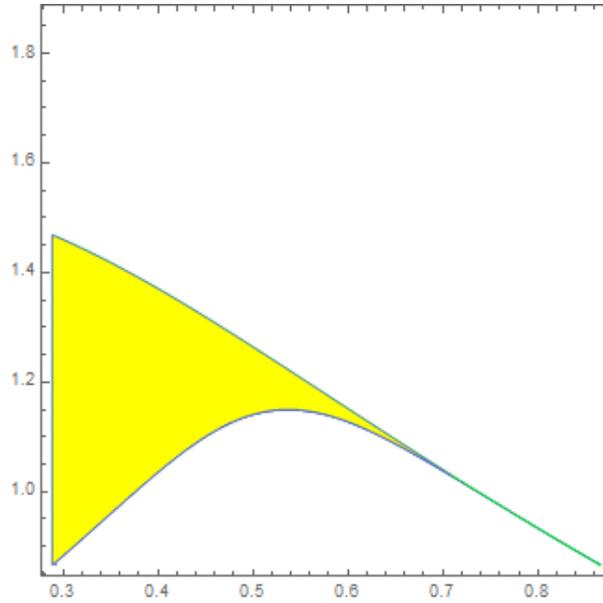


Figura 3.8: Região 3 representada em amarelo.

Novamente as coordenadas do vetor  $T$  são positivas no subconjunto da região 3 definido por  $\{(x, y) : \sqrt{3}/6 < x < \sqrt{3}/2 \text{ e } y_2(x) < y < y_3(x)\}$ . O subconjunto contém o ponto  $(x_0, y_2)$ .

Na secção seguinte vamos analisar um caso especial de uma das famílias de Lagrange mais dois expostas anteriormente.

### 3.1 Configuração central Lagrange mais Euler em um

Um interessante caso particular dessas configurações centrais empilhadas foi abordado por Cornelio, Ramírez e Cors [8] chamado de *Lagrange mais Euler em um*. Esse nome foi escolhido porque teríamos duas formas de retirar duas massas, porém em uma obtemos a configuração de Lagrange e na outra obtemos a configuração de Euler, veja figura 3.9. Como temos três corpos colineares utilizamos a expressão (1.6) e consideramos que os corpos  $m_5$ ,  $m_3$  e  $m_4$  estão na ordem  $r_5 < r_3 < r_4$  em  $\mathbb{R}$ , obtemos as seguintes expressões

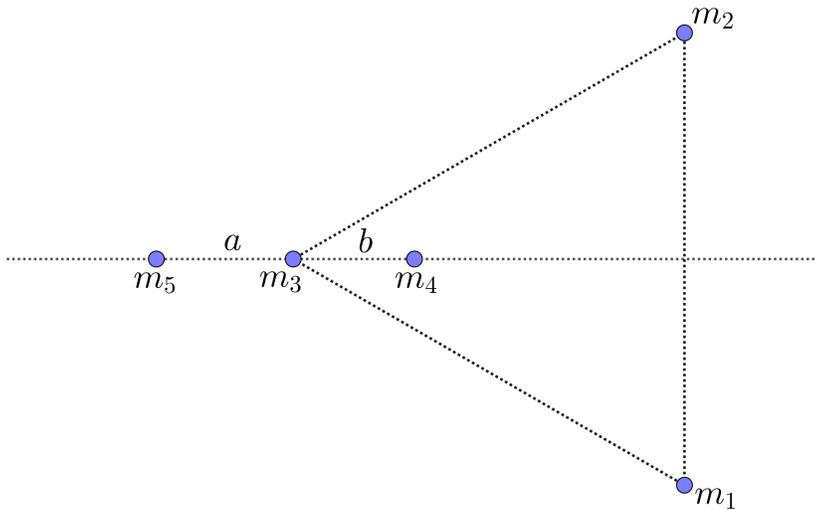


Figura 3.9: Configuração central empilhada Lagrange mais Euler em um.

$$\begin{aligned}\lambda r_5 &= \frac{m_3}{r_{53}^3}(r_5 - r_3) + \frac{m_4}{r_{54}^3}(r_5 - r_4), \\ \lambda r_3 &= \frac{m_5}{r_{35}^3}(r_3 - r_5) + \frac{m_4}{r_{34}^3}(r_3 - r_4), \\ \lambda r_4 &= \frac{m_5}{r_{45}^3}(r_4 - r_5) + \frac{m_3}{r_{43}^3}(r_4 - r_3).\end{aligned}$$

Fazendo  $\lambda r_3 - \lambda r_5$  e  $\lambda r_4 - \lambda r_3$  e considerando  $r_{35} = a$  e  $r_{43} = b$  temos

$$\begin{aligned}\lambda a &= \frac{m_3 + m_5}{a^2} + \frac{m_4}{(a+b)^2} - \frac{m_4}{b^2}, \\ \lambda b &= \frac{m_3 + m_4}{b^2} + \frac{m_5}{(a+b)^2} - \frac{m_5}{a^2}.\end{aligned}$$

Eliminando  $\lambda$  obtemos uma única equação homogênea para  $(a, b)$  e fazendo  $\alpha = b/a$  temos o polinômio quântico de Euler dado por

$$\begin{aligned}E(a, b) &= -(m_3 + m_4) - (2m_3 + 3m_4)\alpha - (m_3 + 3m_4)\alpha^2 + \\ &+ (3m_5 + m_3)\alpha^3 + (2m_3 + 3m_5)\alpha^4 + (m_5 + m_3)\alpha^5.\end{aligned}$$

Desta forma como as massas  $m_5$ ,  $m_3$  e  $m_4$  formam uma configuração central de Euler devem satisfazer  $E(a, b) = 0$ . Esse caso particular é uma curva dentro de uma das regiões mostradas por Llibre e Mello anteriormente, veja figura 3.10.

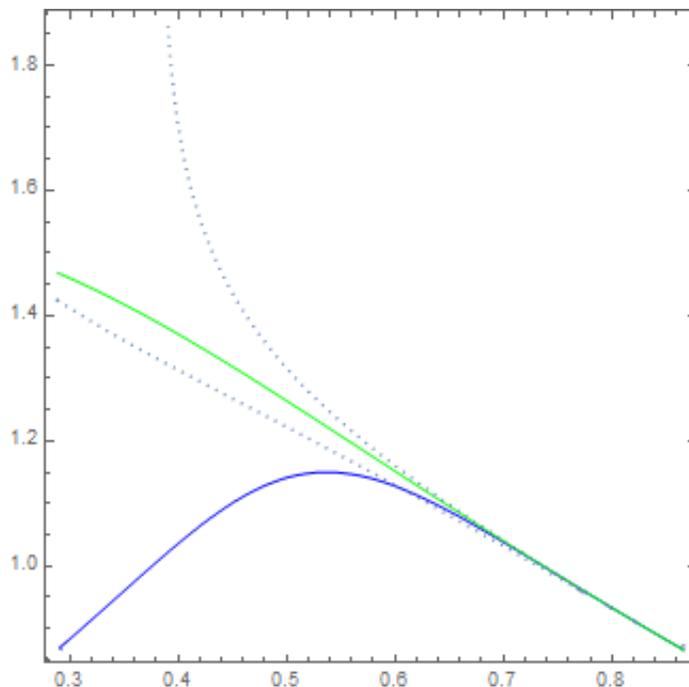


Figura 3.10: Região 3 limitada pelas duas curvas (Azul e verde). A curva pontilhada representa a configuração apresentada em [8].

Realizando um ajuste polinomial encontramos o polinômio  $-3.026 + 1.7x + 1.78y$  que pode ser visto na figura 3.11. Podemos exibir um exemplo numérico de Lagrange mais Euler em um com massas  $m_1 = 0.295389$ ,  $m_2 = 0.191006$ ,  $m_3 = 0.353659$ ,  $m_4 = 1$ ,  $m_5 = 1$ , com valores de  $x = 0.5$  e  $y = 1.2229$  para o polinômio acima. Como efetuamos os cálculos no software *Mathematica*, que atua com o truncamento de casas decimais, nossos valores são aproximados, com precisão de  $10^{-7}$ .

No próximo capítulo faremos um estudo dos resultados apresentados em [2], tendo como intuito esgotar todos os casos de configurações de Lagrange mais dois.

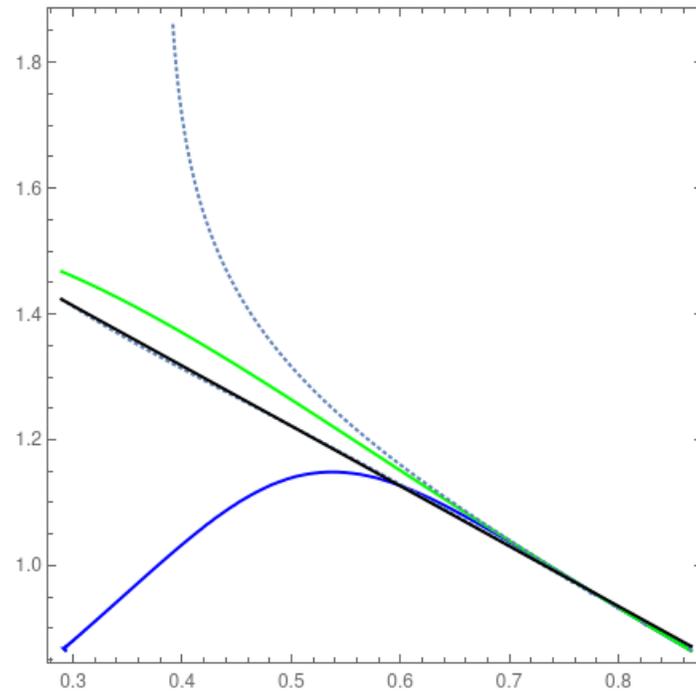


Figura 3.11: Ajuste polinomial com os valores de configurações centrais de massas positivas.

## Capítulo 4

# Caracterização geométrica, simetria e convexidade na configuração central Lagrange mais dois

Nos temas abordados anteriormente, configurações centrais empilhadas, observam-se duas propriedades interessantes, simetria e concavidade, presentes nas configurações centrais de cinco corpos. Isso chamou a atenção de Barrabés, Cors, Fernandes e Vidal em [2] que realizaram o estudo destas propriedades na configuração central empilhada de cinco corpos com um triângulo equilátero, que designamos aqui como Lagrange mais dois. Além do estudo de simetrias e concavidade buscou-se encontrar uma caracterização geométrica para a configuração central de Lagrange mais dois. No desenvolvimento desse capítulo vamos analisar tais resultados.

Agora também utilizamos uma notação para as retas bissetoras, isto é,  $l_{ij}$  representa a reta bissetora referente ao segmento que liga os pontos  $r_i$  e  $r_j$ . Também denotou-se por  $c_{ij}$  a reta que passa através de  $r_i$  e  $r_j$  como mostra a figura 4.1.

Em seguida enunciamos um lema técnico que auxilia na manipulação das equações (1.7), pois exhibe relações entre as áreas dos triângulos  $\Delta_{ijk}$ .

**Lema 4.0.1.** *Considere cinco pontos no plano  $r_i, i = 1, 2, \dots, 5$ , e  $\Delta_{ijk} = (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k)$  que representa duas vezes a área definida pelo triângulo com vértices  $r_i, r_j$  e  $r_k$ . Então as*

seguintes equações são válidas:

$$\Delta_{345}\Delta_{123} - \Delta_{235}\Delta_{134} + \Delta_{234}\Delta_{135} = 0,$$

$$\Delta_{345}\Delta_{124} - \Delta_{245}\Delta_{134} + \Delta_{234}\Delta_{145} = 0,$$

$$\Delta_{345}\Delta_{125} - \Delta_{245}\Delta_{135} + \Delta_{235}\Delta_{145} = 0,$$

$$\Delta_{145}\Delta_{123} - \Delta_{135}\Delta_{124} + \Delta_{134}\Delta_{125} = 0,$$

$$\Delta_{245}\Delta_{123} - \Delta_{235}\Delta_{124} + \Delta_{234}\Delta_{125} = 0,$$

$$\Delta_{123} - \Delta_{124} + \Delta_{134} - \Delta_{234} = 0,$$

$$\Delta_{123} - \Delta_{125} + \Delta_{135} - \Delta_{235} = 0,$$

$$\Delta_{124} - \Delta_{125} + \Delta_{145} - \Delta_{245} = 0,$$

$$\Delta_{134} - \Delta_{135} + \Delta_{145} - \Delta_{345} = 0,$$

$$\Delta_{234} - \Delta_{235} + \Delta_{245} - \Delta_{345} = 0.$$

*Demonstração.* É um cálculo direto da definição de  $\Delta_{ijk}$ .

□

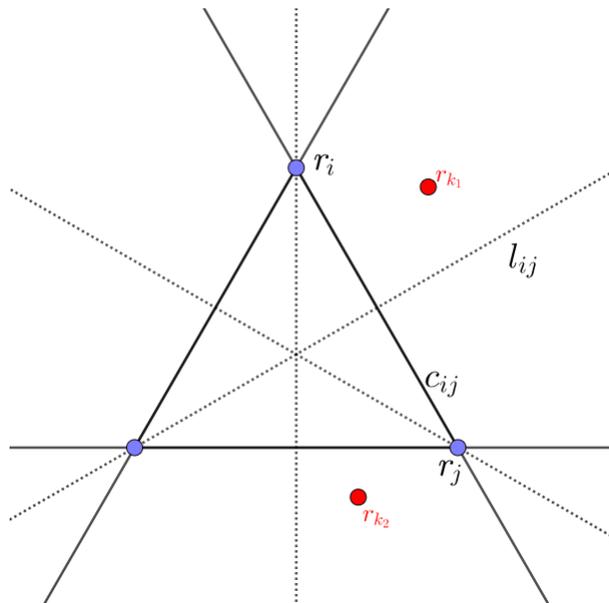


Figura 4.1: Notação utilizada, onde  $l_{ij}$  é pontilhada e  $c_{ij}$  é sólida. Pela Proposição do Bissetor Perpendicular aplicado com respeito a  $r_i$  e  $r_j$  a configuração acima não pode ser central.

Agora provaremos que na configuração central, Lagrange mais dois, teremos três corpos

alinhados apenas quando os dois corpos fora do triângulo equilátero estão numa reta bissetora.

**Proposição 4.0.1.** *Considere uma configuração central de cinco corpos  $r = (r_1, r_2, \dots, r_5)$ , de modo que três deles estão nos vértices de um triângulo equilátero. Se os dois corpos restantes estão alinhados com um dos vértices do triângulo, então eles devem estar na reta bissetora dos outros dois vértices.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos supor que  $r_1, r_2$  e  $r_3$  estão nos vértices do triângulo equilátero orientado no sentido anti-horário, e que  $r_4$  e  $r_5$  estão alinhados com  $r_3$  como na figura 4.2. Considere as equações de Andoyer de (1.7) correspondentes a  $f_{12}, f_{13}$  e  $f_{23}$ , e usando o fato que  $R_{12} = R_{23} = R_{13}$  temos

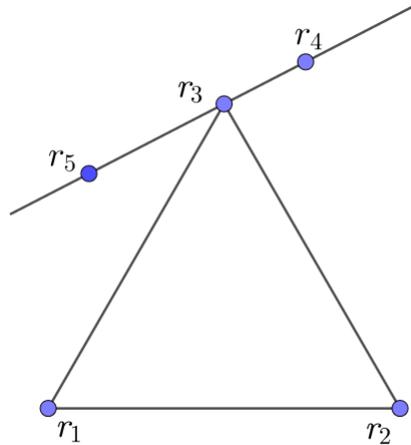


Figura 4.2: Configuração de cinco corpos com três corpos alinhados.

$$f_{12} = m_4(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} + m_5(R_{15} - R_{25})\Delta_{125} = 0,$$

$$f_{13} = m_4(R_{14} - R_{34})\Delta_{134} + m_5(R_{15} - R_{35})\Delta_{135} = 0,$$

$$f_{23} = m_4(R_{24} - R_{34})\Delta_{234} + m_5(R_{25} - R_{35})\Delta_{235} = 0.$$

Da primeira equação do Lema 4.0.1 e o fato que  $\Delta_{345} = 0$ , temos  $\Delta_{234}\Delta_{135} = \Delta_{235}\Delta_{134}$ , usando essas relações obtemos

$$\Delta_{124}(\Delta_{234}f_{13} - \Delta_{134}f_{23}) - \Delta_{234}\Delta_{134}f_{12} = m_5(R_{15} - R_{25})\Delta_{234}(\Delta_{124}\Delta_{135} - \Delta_{134}\Delta_{125}) = 0.$$

E novamente utilizando o Lema 4.0.1, a quarta equação, a expressão  $\Delta_{124}\Delta_{135} - \Delta_{134}\Delta_{125} = \Delta_{145}\Delta_{123}$ . Como  $r_1, r_2$  e  $r_3$  são vértices do triângulo então  $\Delta_{123} \neq 0$ . Por outro lado se  $\Delta_{145} = 0$  ou  $\Delta_{234} = 0$  significa que temos quatro corpos colineares. Mas isso contradiz a Proposição do Bissetor Perpendicular, que afirma não ser possível estender uma configuração central de  $n$  corpos colineares para uma configuração central de  $n + 1$  corpos não colineares. Desta feita,  $R_{15} = R_{25}$  só ocorre se  $r_4$  e  $r_5$  estão no bissetor perpendicular de  $r_1$  e  $r_2$ , e assim segue o resultado. □

Agora vamos analisar a possibilidade dos dois corpos fora do triângulo estarem alinhados com dois dos vértices.

**Proposição 4.0.2.** *Considere uma configuração central de cinco corpos  $r = (r_1, r_2, \dots, r_5)$ , de modo que três deles estão nos vértices de um triângulo equilátero. Então nenhum dos dois corpos restantes podem estar alinhados com dois dos vértices do triângulo.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos supor que  $r_1, r_2$  e  $r_3$  estão nos vértices do triângulo equilátero orientado no sentido anti-horário, e que  $r_4 \in c_{12}$ . Aplicando a Proposição do Bissetor Perpendicular com respeito a  $r_1$  e  $r_2$ , temos que  $r_5 \in c_{12}$  ou  $r_5 \in l_{12}$ . O primeiro caso não ocorre, pois pela Proposição do Bissetor Perpendicular não é possível estender uma configuração central colinear de  $n$  corpos para uma configuração central não colineares de  $n + 1$  corpos. Portanto  $r_5 \in l_{12}$ . Em seguida usamos duas vezes a Proposição do Bissetor Perpendicular, uma vez com respeito a  $r_1$  e  $r_4$ , assim  $r_5$  não pode estar no mesmo plano que  $r_3$  com relação a  $c_{12}$ . Depois com respeito a  $r_1$  e  $r_3$ , e com isso  $r_4$  não pode estar localizado entre  $r_1$  e  $r_2$ . Assim analisamos uma configuração como na figura 4.3.

Utilizamos as relações  $\Delta_{124} = 0$ ,  $R_{15} = R_{25}$  e  $\Delta_{235} = -\Delta_{135}$  sobre as equações  $f_{13}$  e  $f_{23}$ , obtemos

$$f_{13} + f_{23} = m_4((R_{14} - R_{34})\Delta_{134} + (R_{24} - R_{34})\Delta_{234}) = 0. \quad (4.1)$$

Com  $m_4 \neq 0$  temos que o segundo fator de (4.1), que depende de  $r_4$ , deve se anular.

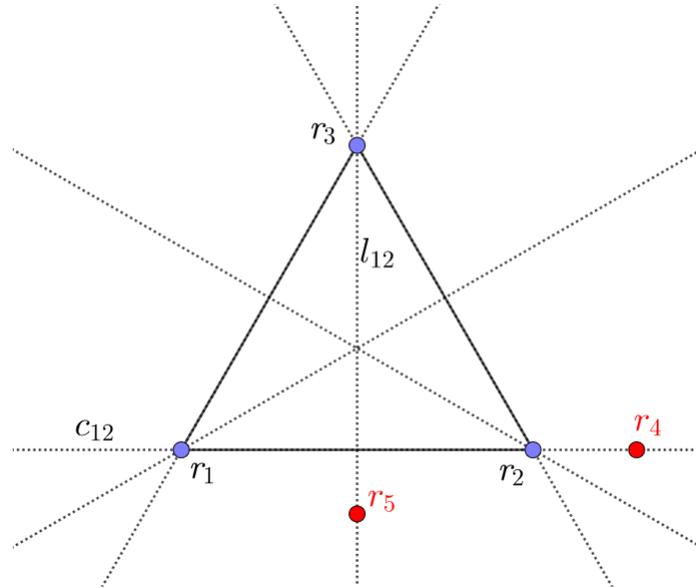


Figura 4.3: Configuração Lagrange mais dois onde  $r_4 \in c_{12}$

Sem perda de generalidade, consideramos que o lado do triângulo é igual a um e que  $r_4$  está ao lado direito de  $r_2$  a uma distância  $a > 0$ . Com isso,

$$R_{14} = \frac{1}{(1+a)^3}, \quad R_{24} = \frac{1}{a^3}, \quad R_{34} = \frac{1}{(1+a^2+a)^{3/2}},$$

$\Delta_{134} = -\sqrt{3}(1+a)/4$  e  $\Delta_{234} = -\sqrt{3}a/4$ . Substituindo estas relações em (4.1) obtemos

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1+2a}{(1+a^2+a)^{3/2}}. \quad (4.2)$$

Fatorando (4.2) é possível encontrar o seguinte polinômio

$$\frac{1 + 5a + 13a^2 + 21a^3 + 27a^4 + 27a^5 + 19a^6 + 8a^7 + 2a^8}{a^2(1+a)^2(1+a+a^2)^3} = 0.$$

Agora precisamos saber quando o numerador se anula, porém pela regra dos sinais de Descartes [30], como não temos permutações dos sinais no numerador podemos afirmar que não existem raízes reais positivas, logo não acontece  $a > 0$ , e com isso fica provado a proposição.

□

Para completar a abordagem dos casos de Lagrange mais dois com três corpos alinhados a seguinte proposição junto com a Proposição 4.0.1 afirmam que as únicas configurações de Lagrange mais dois que possuem três corpos alinhados são as três famílias expostas em [18].

**Proposição 4.0.3.** *Considere uma configuração central de cinco corpos  $r = (r_1, r_2, \dots, r_5)$ , de modo que três deles estão nos vértices de um triângulo equilátero. Se um dos dois corpos restantes está em uma reta bissetora do triângulo, então o outro deve estar na mesma reta.*

*Demonstração.* A prova é realizada utilizando a Proposição do Bissetor Perpendicular com respeito a reta bissetora que contém os dois corpos.

□

Agora enunciamos o resultado principal deste trabalho que foi exposto em [2]. Consiste em uma caracterização geométrica das configurações de Lagrange mais dois que permite encontrar uma solução não trivial do sistema de equações de Andoyer.

**Teorema 4.0.1.** *Considere uma configuração de cinco corpos  $r = (r_1, r_2, \dots, r_5)$  de modo que  $r_1, r_2$  e  $r_3$  estejam nos vértices de um triângulo equilátero. Não temos três corpos alinhados e nenhum dos dois corpos restantes,  $r_4$  e  $r_5$ , estão em alguma reta bissetora do triângulo. Então o sistema de Andoyer (1.7) possui solução não trivial para  $m_i, i = 1, 2, \dots, 5$ , se e somente se, o sistema*

$$\begin{cases} (R_{14} - R_{24})(R_{15} - R_{35})\Delta_{124}\Delta_{135} - (R_{15} - R_{25})(R_{14} - R_{34})\Delta_{125}\Delta_{134} = 0, \\ (R_{14} - R_{24})(R_{25} - R_{35})\Delta_{124}\Delta_{235} - (R_{15} - R_{25})(R_{24} - R_{34})\Delta_{125}\Delta_{234} = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

*é satisfeito.*

*Demonstração.* Considerando o sistema de equações de Andoyer, como um sistema linear nas massas

$$A \cdot M = 0$$

onde  $A \in \mathcal{M}_{10 \times 5}$  e  $M = (m_1, \dots, m_5)^t$ . Pelas hipóteses temos que todo  $\Delta_{ijk} \neq 0$ , para todo  $i, j, k$ . Consideramos que as distâncias entre  $r_1, r_2$  e  $r_3$  são iguais, as equações correspondentes a  $f_{12}, f_{13}$  e  $f_{23}$  são dadas pelo subsistema

$$\begin{cases} m_4(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} + m_5(R_{15} - R_{25})\Delta_{125} = 0, \\ m_4(R_{14} - R_{24})\Delta_{134} + m_5(R_{15} - R_{35})\Delta_{135} = 0, \\ m_4(R_{24} - R_{34})\Delta_{234} + m_5(R_{25} - R_{35})\Delta_{235} = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Para uma configuração fixada, o sistema (4.4) possui solução não trivial para  $m_4$  e  $m_5$  se o sistema possui pelo menos posto um. Nota-se que todos os coeficientes de  $m_4$  e  $m_5$  em (4.4) não podem desaparecer, pois  $r_4$  e  $r_5$  não pertencem a  $l_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Desta forma se os determinantes dos postos forem iguais a zero, temos solução não trivial de (4.4), que é equivalente a

$$F_1(r_4, r_5) = 0, \quad F_2(r_4, r_5) = 0 \quad (4.5)$$

onde

$$F_1(r_4, r_5) = (R_{14} - R_{24})(R_{15} - R_{35})\Delta_{124}\Delta_{135} - (R_{15} - R_{25})(R_{14} - R_{34})\Delta_{125}\Delta_{134},$$

$$F_2(r_4, r_5) = (R_{14} - R_{24})(R_{25} - R_{35})\Delta_{124}\Delta_{235} - (R_{15} - R_{25})(R_{24} - R_{34})\Delta_{125}\Delta_{234}.$$

Notamos que (4.5) é uma condição necessária para o sistema de Andoyer possuir uma solução não trivial. Para mostrar que também é suficiente, vamos provar que para qualquer configuração  $(r_1, r_2, \dots, r_5)$ , tal que  $R_{12} = R_{13} = R_{23}$  e a equação (4.5) é válida teremos que o sistema linear das equações de Andoyer possui núcleo de dimensão pelo menos um. Utilizando o Lema 4.0.1, podemos escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \Delta_{234} &= \Delta_{123} - \Delta_{124} + \Delta_{134}, \\ \Delta_{235} &= \Delta_{123} - \Delta_{125} + \Delta_{135}, \\ \Delta_{145} &= \frac{\Delta_{124}\Delta_{135} - \Delta_{125}\Delta_{134}}{\Delta_{123}}, \\ \Delta_{245} &= \frac{\Delta_{123}\Delta_{124} + \Delta_{135}\Delta_{124} - \Delta_{123}\Delta_{125} - \Delta_{125}\Delta_{134}}{\Delta_{123}}, \\ \Delta_{345} &= \frac{\Delta_{123}\Delta_{134} - \Delta_{125}\Delta_{134} - \Delta_{123}\Delta_{135} + \Delta_{124}\Delta_{135}}{\Delta_{123}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Em seguida introduzimos as restrições  $F_1 = 0$  e  $F_2 = 0$  nas equações de Andoyer. Para fazer isso, resolvemos o sistema (4.5) com respeito  $R_{14}$  e  $R_{15}$ . Usando a terceira relação de (4.6), o sistema pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\Delta_{145}\Delta_{123}R_{14}R_{15} + a_1R_{14} + b_1R_{15} + c_1 &= 0, \\ a_2R_{14} + b_2R_{15} + c_2 &= 0,\end{aligned}$$

para certos coeficientes  $a_i, b_i$ , dependendo dos outros  $R_{ij}$  e  $\Delta_{ijk}$ . O sistema acima possui duas soluções

$$R_{14} = R_{24}, \quad R_{15} = R_{25}, \quad (4.7)$$

e

$$R_{14} = \frac{1}{\Delta_{235}\Delta_{145}\Delta_{123}}(\Delta_{135}\Theta_2R_{24} + \Delta_{125}\Theta_3R_{34}), \quad (4.8)$$

$$R_{15} = \frac{1}{\Delta_{234}\Delta_{145}\Delta_{123}}(\Delta_{134}\Theta_2R_{25} + \Delta_{124}\Theta_3R_{35}),$$

onde  $\Delta_{234}$ ,  $\Delta_{235}$  e  $\Delta_{145}$  são as expressões dadas em (4.6) e

$$\begin{aligned}\Theta_2 &= \Delta_{124}(\Delta_{135} + \Delta_{123}) - \Delta_{125}(\Delta_{134} + \Delta_{123}), \\ \Theta_3 &= \Delta_{134}(\Delta_{125} - \Delta_{123}) - \Delta_{135}(\Delta_{124} - \Delta_{123}).\end{aligned}$$

Mas como  $r_4, r_5$  não pertencem a  $l_{12}$  a solução (4.7) não é possível. Com isso,  $R_{14}$  e  $R_{15}$  são dados por (4.8).

Finalmente substituímos (4.6) e (4.8) nas equações de Andoyer, onde as duas linhas correspondentes a  $f_{13}$  e  $f_{23}$  são removidas. Temos então um sistema linear nas massas  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , com oito equações e cinco variáveis. Utilizando o software *Mathematica* obtemos um gerador de núcleos exposto no seguinte vetor

$$\left( \frac{K_1}{K(R_{24} - R_{34})\Delta_{123}}, \frac{K_2}{K(R_{24} - R_{34})\Delta_{123}\Delta_{234}}, \frac{K_3}{K(R_{24} - R_{34})\Delta_{123}\Delta_{234}}, \frac{-(R_{25} - R_{35})\Delta_{235}}{(R_{24} - R_{34})\Delta_{234}}, 1 \right) \quad (4.9)$$

onde  $K_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são expressões dependentes de  $R_{ij}$  e  $\Delta_{ijk}$ , e

$$K = \Delta_{125}\Delta_{134}(R_{12} - R_{25})(R_{12} - R_{34}) - \Delta_{124}\Delta_{135}(R_{12} - R_{24})(R_{12} - R_{35}). \quad (4.10)$$

Passemos agora para a análise dos denominadores que aparecem nas componentes do núcleo (4.9), para saber qual a dimensão.

1. Se  $K \neq 0$ , o sistema de Andoyer possui núcleo de dimensão um, com gerador dado em (4.9).
2. Se  $K = 0$  não conseguimos saber qual é a dimensão do núcleo, então realiza-se o seguinte procedimento: isolamos um dos  $R_{ij}$  da equação (4.10), substituindo a expressão obtida no sistema de Andoyer e calculamos o núcleo.
3. Em cada passo se algum dos denominadores for nulo, consideramos como caso particular e colocamos uma restrição no sistema de Andoyer, em seguida calculamos novamente o núcleo.

Vamos analisar algumas das configurações obtidas quando nosso  $K = 0$ . Temos as seguintes possibilidades para quando  $K = 0$ :

$$R_{35} = \frac{[R_{12}^2 - R_{12}R_{25} - R_{12}R_{34} + R_{25}R_{34}]\Delta_{125}\Delta_{134} + [R_{12}R_{24} - R_{12}^2]\Delta_{124}\Delta_{135}}{(R_{24} - R_{12})\Delta_{124}\Delta_{135}},$$

$$R_{24} = R_{12} \text{ e } R_{25} = R_{12} \text{ ou } R_{24} = R_{12} \text{ e } R_{34} = R_{12},$$

$$R_{25} = R_{12} \text{ e } \Delta_{124} = 0 \text{ ou } R_{34} = R_{12} \text{ e } \Delta_{124} = 0,$$

$$R_{24} = R_{12} \text{ e } \Delta_{134} = 0 \text{ ou } R_{25} = R_{12} \text{ e } \Delta_{135} = 0,$$

$$R_{34} = R_{12} \text{ e } \Delta_{135} = 0 \text{ ou } \Delta_{134} = 0 \text{ e } \Delta_{135} = 0,$$

$$R_{24} = R_{12} \text{ e } \Delta_{125} = 0 \text{ ou } \Delta_{124} = 0 \text{ e } \Delta_{134} = 0,$$

$$\Delta_{124} = 0 \text{ e } \Delta_{125} = 0 \text{ ou } \Delta_{125} = 0 \text{ e } \Delta_{135} = 0.$$

Suponhamos que utiliza-se a primeira expressão acima para realizar o procedimento descrito no item 2. Vamos supor que  $(R_{24} - R_{12})\Delta_{124}\Delta_{135} \neq 0$ , e assim substituímos a

expressão encontrada de  $R_{35}$  no sistema de Andoyer, em seguida calculamos novamente o núcleo

$$\left( \frac{(R_{12} - R_{34})(\Delta_{123} - \Delta_{124} + \Delta_{134})}{\Delta_{124}(R_{12} - \Omega_{ijk})}, \frac{(R_{12} - R_{34})\Delta_{134}}{(R_{12} - R_{24})\Delta_{124}}, 1, 0, 0 \right),$$

onde  $\Omega_{ijk}$  é um termo dependendo de  $R_{24}$ ,  $R_{34}$  e  $\Delta_{ijk}$ . E novamente recaímos na análise dos denominadores das componentes do núcleo para descobrir a dimensão.

Mas se tivéssemos  $(R_{24} - R_{12})\Delta_{124}\Delta_{135} = 0$  teríamos três casos para analisar, quando  $R_{12} = R_{24}$  ou  $\Delta_{124} = 0$  ou  $\Delta_{135} = 0$ . Se temos  $R_{12} = R_{24}$  então nosso  $K = (R_{12} - R_{25})(R_{12} - R_{34})\Delta_{125}\Delta_{134}$ , e para esse novo  $K$  ser igual a zero deve ocorrer um dos seguintes casos:  $R_{25} = R_{12}$ ,  $R_{34} = R_{12}$ ,  $\Delta_{125} = 0$  e  $\Delta_{134} = 0$ . Mas nesses casos teríamos configurações que não interessam em nosso problema, pois se tivermos  $R_{24} = R_{12}$  e  $\Delta_{125} = 0$  então o núcleo da nossa matriz fica

$$\left( \frac{(R_{12} - R_{25})(\Delta_{123} + \Delta_{135})}{\Delta_{135}(R_{12} - \Omega_{ijk})}, 1, 0, 0, 0 \right),$$

onde  $\Omega_{ijk}$  nesse caso depende de  $R_{35}$ ,  $R_{25}$  e  $\Delta_{ijk}$ . Pode-se notar que algumas das massas são nulas, assim essa configuração é desconsiderada, pois esse caso não pode ser uma configuração central que estamos interessados. Podemos fazer um estudo análogo dos outros casos que são desconsiderados.

□

Nos casos simétricos que estudamos nos capítulos anteriores obtemos algumas regiões onde as massas positivas poderiam estar localizadas para satisfazer nosso problema. Agora buscamos expor quais regiões teríamos para o caso geral que satisfaz a caracterização geométrica do Teorema 4.0.1.

**Definição 4.0.1.** *Considere uma configuração de cinco corpos  $r = (r_1, r_2, \dots, r_5)$  de modo que  $r_1, r_2$  e  $r_3$  estejam nos vértices de um triângulo equilátero. Seja  $r = r_{12} = r_{13} = r_{23}$  os lados do triângulo,  $c_{ij}$  a reta que passa através de  $r_i, r_j$ , e  $l_{ij}$  a reta bissetora do segmento definido pelos pontos  $r_i, r_j$ . Definimos em seguida as seguintes regiões abertas:*

- $T_1$  é o triângulo limitado por  $l_{13}$ ,  $l_{23}$  e  $c_{23}$ ;
- $T_2$  é a região ilimitada, limitada em algumas partes por  $l_{23}$ ,  $c_{23}$  e  $c_{13}$ ;
- $T_3$  é a região ilimitada, limitada em algumas partes por  $c_{13}$ ,  $l_{12}$ ;
- $S_1$  é o triângulo limitado por  $l_{13}$ ,  $l_{23}$  e  $c_{13}$ ;
- $S_2$  é a região ilimitada, limitada em algumas partes por  $c_{23}$ ,  $l_{13}$  e  $c_{13}$ ;
- $S_3$  é a região ilimitada, limitada em algumas partes por  $c_{23}$ ,  $l_{13}$ ;
- $S_4$  é a região ilimitada, limitada em algumas partes por  $c_{12}$ ,  $l_{13}$ .

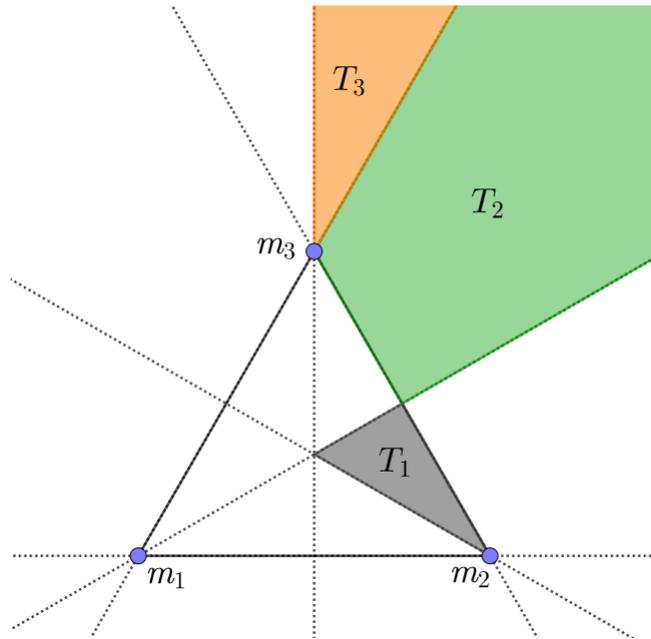


Figura 4.4: Regiões  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  dadas na Definição 4.0.1 quando  $r_1, r_2$  e  $r_3$  são ordenados no sentido anti-horário.

**Proposição 4.0.4.** *Considere uma configuração central de cinco corpos  $r = (r_1, r_2, \dots, r_5)$  de modo que  $r_1, r_2$  e  $r_3$  estejam nos vértices de um triângulo equilátero. Considere-se que  $r_4$  e  $r_5$  não estão sobre as retas  $l_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  e  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$  são as regiões dadas na Definição 4.0.1.*

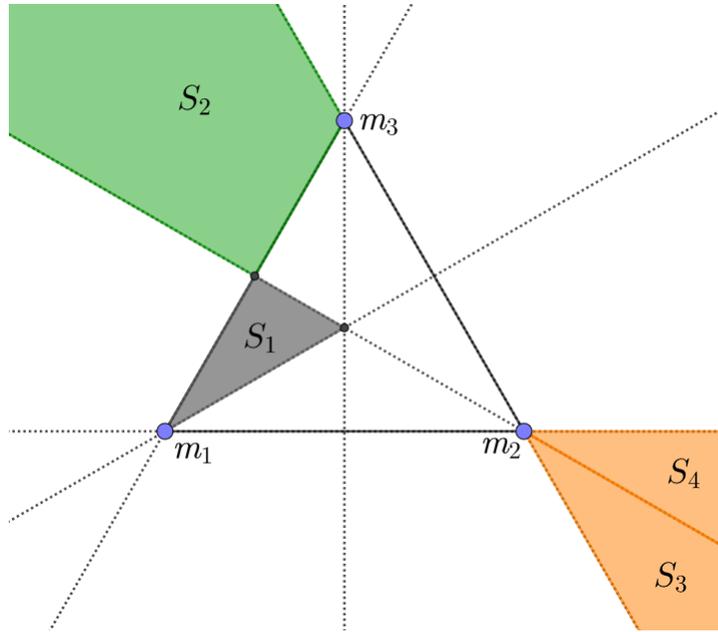


Figura 4.5: Regiões  $S_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  dadas na Definição 4.0.1 quando  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  são ordenados no sentido anti-horário.

1. Existe uma configuração central  $\bar{r}$  que pode ser obtida de  $r$  aplicando uma rotação de ângulo  $\pm 2\pi/3$  e reflexões através de qualquer reta bissetora  $l_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , tal que  $\bar{r}_1$ ,  $\bar{r}_2$  e  $\bar{r}_3$  ainda estão nos vértices do triângulo equilátero e  $\bar{r}_4 \in T_1 \cup T_2 \cup T_3$ .
2. Se  $r_4 \in T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , então um dos seguintes ocorre:
  - a. Se  $r_4 \in T_1 \cup T_2$ , então  $r_5 \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$
  - b. Se  $r_4 \in T_3$ , então  $r_5 \in S_4$

*Demonstração.* Sabemos que configurações centrais são preservadas com rotações, logo a parte da rotação de  $\pm 2\pi/3$  está garantida. Os bissetores são coincidentes e dessa forma quando realizamos as reflexões com relação aos bissetores  $l_{ij}$  conseguimos voltar na configuração central inicial com  $r_4 \in T_1 \cup T_2 \cup T_3$ . Como não temos corpos alinhados com os vértices a primeira afirmação fica provada.

Para provar a segunda afirmação vamos utilizar a condição geométrica do Teorema 4.0.1. Reescrevemos as equações de (4.3) da seguinte forma:

$$F_1 = F_{124}F_{135} - F_{134}F_{125} = 0, \quad e \quad F_2 = F_{124}F_{235} - F_{234}F_{125} = 0, \quad (4.11)$$

onde  $F_{klm} = (R_{km} - R_{lm})\Delta_{klm}$ . Quando  $r_4 \in T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , temos  $r_{24} < r_{14}$  e assim  $R_{14} < R_{24}$ . Como estamos trabalhando com orientação anti-horário temos que  $\Delta_{124} > 0$  e assim  $F_{124} < 0$ , de forma análoga  $F_{234} > 0$ . Além disso, quando  $r_4 \in T_1 \cup T_2$  teremos  $F_{134} > 0$  e se  $r_4 \in T_3$  então  $F_{134} < 0$ .

Primeiro vamos supor que  $r_4 \in T_1 \cup T_2$ . Se  $F_{125} < 0$ , então a equação (4.11) possui solução somente se  $F_{135} > 0$  e  $F_{235} > 0$ . Essas três inequações definem as três regiões da figura 4.6, que estão no mesmo cone aberto formado pelas retas  $c_{23}$  e  $l_{23}$ , este cone contém as regiões  $T_1$  e  $T_2$ . Pela Proposição do Bissetor Perpendicular isso não pode acontecer. Realizando o mesmo procedimento para  $F_{125} > 0$  a equação de (4.11) possui solução somente se  $F_{135} < 0$  e  $F_{235} < 0$ , que correspondem as regiões  $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ . Quando  $r_4 \in T_3$  realizamos um procedimento análogo ao anterior.

□

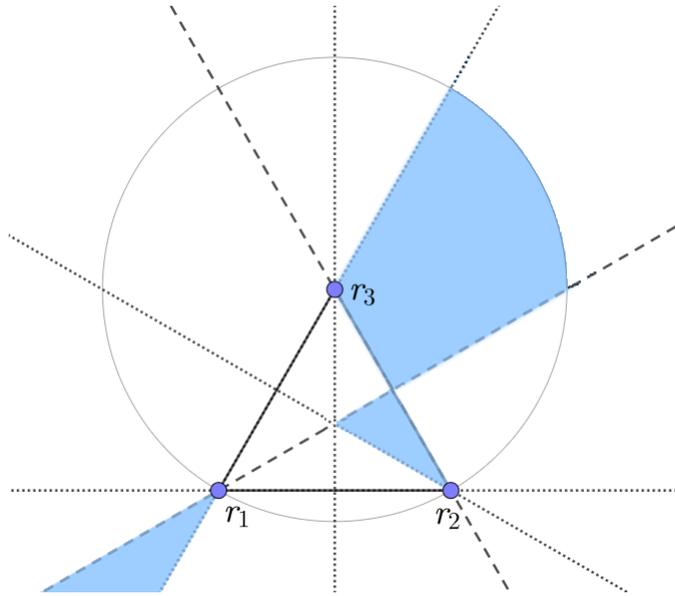


Figura 4.6: Regiões definidas por  $F_{125} < 0$ ,  $F_{135} > 0$  e  $F_{235} > 0$ .

## 4.1 Convexidade

Agora vamos abordar a prova de que não existe configuração central convexa no problema de Lagrange mais dois. A seguir dividiremos a análise em dois casos: configuração estritamente convexa, isto é, todos os ângulos internos do polígono são estritamente menores que 180 graus, e convexa que chamaremos de não estritamente convexa. Podemos abordar o primeiro caso com um resultado de Cheng e Hsiao [7], mas primeiro vamos definir algumas terminologias usadas.

**Definição 4.1.1.** *Arestas são segmentos de retas que conectam dois vértices diferentes do polígono. Para um pentágono convexo com vértices  $(r_1, r_2, \dots, r_5)$  ordenados sentido anti-horário, arestas formadas a partir de vértices  $r_i$  e  $r_{i+1}$  são chamadas de arestas exteriores e arestas formadas por vértices  $r_i$  e  $r_j$  são diagonais ou arestas interiores, onde  $|i - j| \geq 2$ .*

Considerando uma configuração central estritamente convexa no plano de cinco corpos, com os vértices  $(r_1, r_2, \dots, r_5)$  ordenados de forma cíclica, Cheng e Hsiao encontraram os seguintes resultados importantes:

1. Se  $S_{ij} = \frac{1}{r_{ij}} - \frac{1}{r_0}$ , onde  $r_0 = (M_0/\lambda)^{1/3}$ , então  $S_{12}S_{34} > S_{13}S_{24} > S_{14}S_{23}$ .
2. Toda aresta exterior é menor que  $r_0$ .
3. Temos no máximo duas arestas interiores menores ou iguais que  $r_0$ .
4. Se duas arestas interiores são menores ou iguais que  $r_0$ , então elas se cruzam uma com a outra.
5. Um subconjunto de quatro massas não pode ser configuração central.

**Proposição 4.1.1.** *Para qualquer configuração central de cinco corpos estritamente convexa, toda aresta exterior é menor que  $r_0 = (M_0/\lambda)^{1/3}$ , onde  $\lambda$  é o múltiplo da expressão (1.6) e  $M_0$  é a massa total. O número de arestas interiores maiores que  $r_0$  é 5, 4 ou 3. Se existem precisamente três arestas interiores maiores que  $r_0$ , então as outras duas arestas interiores devem se cruzar em um ponto que não é o vértice.*

*Demonstração.* Veja em [7]

□

Com o auxílio da Proposição 4.1.1 provamos o seguinte teorema.

**Teorema 4.1.1.** *Seja  $r = (r_1, r_2, \dots, r_5)$  uma configuração central planar convexa do problema de cinco corpos. Então não existem três vértices do pentágono formando um triângulo equilátero.*

*Demonstração.* Supomos primeiro que temos uma configuração de cinco corpos estritamente convexa que possui três corpos nos vértices de um triângulo equilátero. Sem perda de generalidade consideramos que  $r_1, r_2, \dots, r_5$  estão orientados sentido anti-horário. Temos duas possibilidades para analisar, que os três corpos no triângulo equilátero são correlativos ou não. Sem perda de generalidade vamos abordar os seguintes dois casos:

1. Os vetores posição  $r_3, r_4$  e  $r_5$  estão nos vértices de um triângulo equilátero (Correlativo, veja a figura 4.7).
2. Os vetores posição  $r_1, r_2$  e  $r_4$  estão nos vértices de um triângulo equilátero (Não correlativo, veja a figura 4.9).

No caso 1 temos  $r_{34} = r_{35} = r_{45}$ . Seja  $S$  a metade de um cone aberto definido pelas linhas com origem no ponto  $r_4$  e que passam através dos pontos  $r_3$  e  $r_5$ . Como estamos considerando configurações estritamente convexas temos que  $r_1$  e  $r_2$  devem pertencer a  $S$  e ao exterior do triângulo como mostra a figura 4.7. Além disso, esse tipo de configuração não é permitido pela Proposição do Bissetor Perpendicular com relação aos vértices  $r_4$  e  $r_5$  como mostra a figura 4.8. Desta forma não existe configuração central estritamente convexa do tipo 1.

Agora vamos analisar o caso 2 onde  $r_{12} = r_{14} = r_{24}$ , e  $r_{14}$  e  $r_{24}$  são arestas interiores. Da Proposição 4.1.1 nossas duas diagonais  $r_{14}$  e  $r_{24}$ , que são iguais a  $r_{12}$ , implicam que as outras três arestas interiores  $r_{13}, r_{25}$  e  $r_{35}$  devem ser maiores que  $r_{12}$ . Assim podemos ver as regiões onde  $r_3$  e  $r_5$  não podem se localizar, vide figura 4.9. Mas esse tipo de configuração contradiz a Proposição 4.1.1, pois as diagonais  $r_{14}$  e  $r_{24}$  não se cruzam no

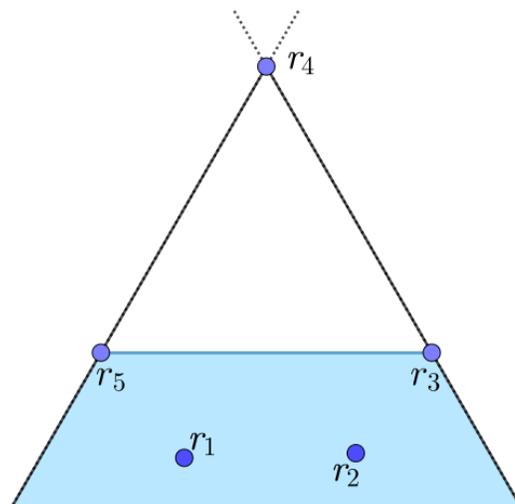


Figura 4.7: Região  $S$  definida pelas linhas com origem em  $r_4$  e que passam através de  $r_3$  e  $r_5$ .

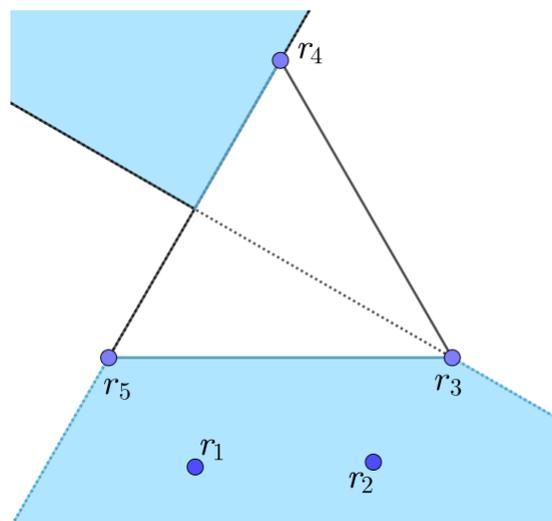


Figura 4.8: Aplicação da Proposição do Bissetor Perpendicular na configuração analisada.

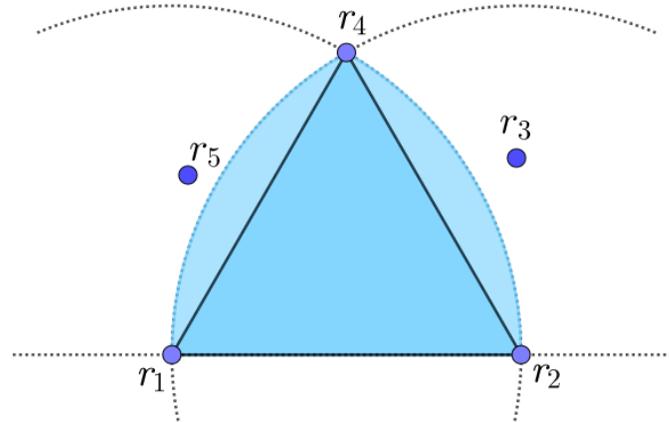


Figura 4.9: Regiões onde  $r_3$  e  $r_5$  não podem se localizar.

interior do pentágono. Então não existem configurações centrais estritamente convexas do tipo 2.

Agora para finalizar a prova, vamos analisar o caso em que temos uma configuração não estritamente convexa que contém um triângulo equilátero. Novamente vamos supor que  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  são vértices do triângulo e estão orientados sentido anti-horário. Mas uma vez pela Proposição do Bissetor Perpendicular não podemos ter quatro corpos alinhados, pois não seria possível estender para uma configuração central não colinear de cinco corpos. Além disso como estamos interessados nas configurações não estritamente convexas, três dos corpos deveriam estar na mesma reta. Porém teríamos os casos dos corpos alinhados conterem dois vértices do triângulo ou apenas um, mas esses casos são excluídos do nosso estudo pelas Proposições 4.0.2 e 4.0.3.

□

**Corolário 4.1.1.** *Considere uma configuração central do problema de cinco corpos. Se a configuração é estritamente convexa, então a configuração não é empilhada.*

*Demonstração.* De acordo com Cornelio, Ramírez e Cors em [8] para o caso de cinco corpos, excluindo as configurações colineares, temos configurações centrais empilhadas

apenas nos casos (5,1) e (5,2), utilizando a notação de [22]. Porém no caso (5,1) estritamente no plano a única configuração central empilhada é o quadrado com quatro massas iguais nos vértices e uma massa arbitrária na intersecção das diagonais. No caso de (5,2) no plano, como estamos interessados em configurações estritamente convexas sempre trabalharemos com algum pentágono, retirando dois corpos teríamos um triângulo, mas pelo Teorema 4.1.1 esse triângulo não é equilátero, e assim não temos uma configuração central para massas arbitrárias como foi provado por Lagrange em [16].

□

## 4.2 Simetria

Agora vamos mostrar numericamente a existência de configurações centrais de Lagrange mais dois que não são simétricas. Mas uma vez vamos considerar que  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  estão nos vértices do triângulo equilátero orientados no sentido anti-horário. Pelo Teorema 4.0.1, as configurações admissíveis para termos configurações centrais devem satisfazer a condição (4.3), de modo que as soluções das equações de Andoyer tenham todas as  $m_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ . Pela Proposição 4.0.4, estudamos as localizações de  $r_4$  e  $r_5$  nas regiões  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  e  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , respectivamente.

Vamos assumir um sistema de coordenadas onde  $c_{12}$  é o eixo  $x$  e  $l_{12}$  é o eixo  $y$  em que  $r_1 = (-1, 0)$ ,  $r_2 = (1, 0)$ ,  $r_3 = (0, \sqrt{3})$ ,  $r_4 = (x, y)$  e  $r_5 = (u, v)$ . Para cada uma das regiões  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , fazemos uma grade de valores  $(x, y)$  dentro de uma bola, veremos que para valores de  $(x, y)$  longe não encontramos soluções para as equações. Então para qualquer  $(x, y)$  fixados, resolvemos o sistema (4.3) para as variáveis  $(u, v)$  através de um esquema iterativo. Para cada solução substituímos os valores  $(u, v, x, y)$  no sistema de equações de Andoyer inicial dado por (1.7), onde as equações  $f_{13}$  e  $f_{23}$  são removidas. O sistema linear nas massas é resolvido pelo método de decomposição de valores singulares (SVD), veja [12] e [28], e determinamos o núcleo da matriz, com uma precisão de  $10^{-7}$ . Com a mesma ideia do vetor normal dos planos gerados pelas equações lineares nas massas utilizadas nos capítulos anteriores, aqui buscamos valores para que o gerador do núcleo possua todas as componentes com mesmo sinal.

Em seguida através de algumas explorações realizadas em [2], obteve-se que existem configurações centrais somente quando  $(r_4, r_5) \in T_1 \times S_1$  e  $(r_4, r_5) \in T_2 \times S_2$ , ou seja, existem configurações centrais numa vizinhança próxima das duas famílias de configurações centrais encontradas por Hampton [14] e por Llibre, Mello e Perez-Chavela [23]. Em seguida vamos expor exemplos particulares do método abordado anteriormente.

**Exemplo 4.2.1.** *Aqui vamos pegar um ponto na região  $T_2$ , para tal escolha, utilizou-se o ponto  $P_2 = (0.63217335448833913, 0.9912266160486711)$  encontrado por Llibre, Mello e Perez-Chavela em [23], pois em sua vizinhança existem pontos que satisfazem a condição (4.3). Tomando  $(x, y) = (0.58, 0.9)$  e executando o algoritmo no Software Mathematica obtemos  $(u, v) = (-0.6806200759885006, 1.0940401690529549)$ , e para as massas  $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (1.39292, 0.473623, 0.246162, 0.602671, 1)$  temos um exemplo numérico de uma configuração central de Lagrange mais dois não simétrica.*

**Exemplo 4.2.2.** *Agora realizando o mesmo raciocínio para a região  $T_1$ , tomou-se como ponto de referência o ponto de intersecção da curva utilizada em [14] e [23] com a hipérbole  $R_{24} = R_{45}$  usada em [23]. Assim obtemos o ponto  $P_k = (0.20726510404992263, 0.29349884858445063)$ , pois em sua vizinhança existem pontos que satisfazem a condição (4.3). Tomando  $(x, y) = (0.20, 0.27)$  e executando um algoritmo mais direto no Software Mathematica, que o utilizado no exemplo anterior, obtemos  $(u, v) = (-0.20141668864782505, 0.31737290996170653)$ . Utilizando essas posições obtemos que o núcleo da nossa matriz do sistema de Andoyer geral é  $(0.423538, 0.322302, 0.828736, 0.116142, 0.128235)$ , o que nos mostra que temos massas positivas. Desta forma temos um exemplo numérico de uma configuração central de Lagrange mais dois não simétrica. No Anexo 1 temos o algoritmo utilizado nesse exemplo aplicado a ambos os exemplos anteriores.*

### 4.3 Problemas futuros

Por fim, como o estudo das configurações centrais empilhadas (5, 2) chamou a atenção de muitos autores, e para o problema de três corpos só existem as configurações centrais de Euler e Lagrange, outra questão surge: existe uma caracterização geral para uma

configuração de *Euler mais dois*?

Gidea e Llibre [11] estudaram algumas famílias desse tipo de configurações centrais e provaram o seguinte resultado.

**Proposição 4.3.1.** *Considere uma configuração de cinco corpos  $r = (r_1, r_2, \dots, r_5)$  de massas  $m_1, m_2, m_3, m_4$  e  $m_5$  respectivamente. Três dos corpos,  $r_1, r_2$  e  $r_3$ , estão em uma configuração central colinear, com  $m_1 = m_3$  e  $r_2$  no ponto médio do segmento ligando  $r_1$  e  $r_3$ . Os dois outros corpos,  $r_4$  e  $r_5$ , estão localizados com respeito a configuração central colinear nos seguintes quatro casos. Em cada caso concluímos se existe uma configuração central do tipo específico.*

- (a) *Assuma que  $r_4$  e  $r_5$  estão localizados simetricamente com respeito a reta que passa através de  $r_1, r_2$  e  $r_3$ , e  $m_4 = m_5$ . Então existe uma família continua de configurações centrais com o segmento  $r_{45}$  passando por  $r_2$ , isto é, os corpos  $r_1, r_3, r_4$  e  $r_5$  estão nos vértices de um losango e  $r_2$  em seu centro. Quando o losango for também um quadrado teremos  $m_1 = m_3 = m_4 = m_5$  e a massa  $m_2$  é indeterminada, caso contrário as massas  $m_1, m_2, m_3, m_4$  e  $m_5$  são unicamente determinadas para cada configuração central possível.*
- (b) *Assuma que  $r_4$  e  $r_5$  estão localizados simetricamente com respeito a  $r_2$  sem simetrias adicionais ( $r_4$  e  $r_5$  não são simétricos com respeito ao segmento que ligar  $r_1$  e  $r_3$  ou ao seu bissetor perpendicular). Não assumimos que  $m_4 = m_5$ . Então não existe configuração central desse tipo.*
- (c) *Assuma que  $r_4$  e  $r_5$  estão localizados simetricamente com respeito ao bissetor perpendicular do segmento que liga  $r_1$  e  $r_3$ . Ambos,  $r_4$  e  $r_5$ , estão de um lado da reta que passa por  $r_1$  e  $r_3$ , e  $m_4 = m_5$ . Então existe uma família continua de configurações centrais desse tipo, que consiste em um trapézio com os lados  $r_{13}$  e  $r_{45}$  paralelos, e  $m_2$  o ponto médio de  $r_{13}$ . As massas  $m_1, m_2, m_3, m_4$  e  $m_5$  são unicamente determinadas para cada configuração central possível.*
- (d) *Assuma que  $r_4$  e  $r_5$  estão localizados no bissetor perpendicular do segmento que liga*

$r_1$  e  $r_3$ . Não assumimos que  $m_4 = m_5$ . Então não existe configuração central deste tipo (exceto a encontrada em (a)).

*Demonstração.* Veja Gidea e Llibre [11].

□

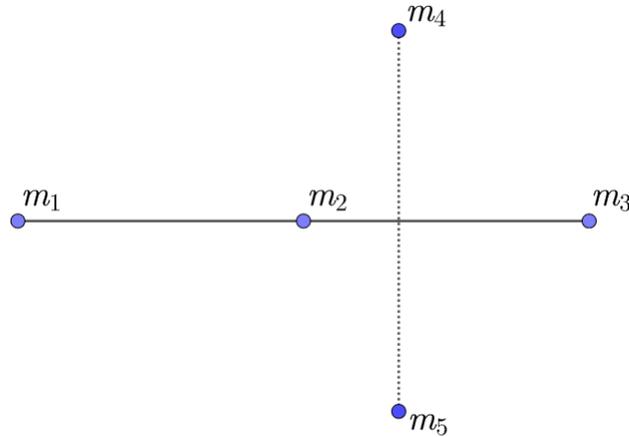


Figura 4.10: Configurações estudada por Gidea e Llibre [11].

Posteriormente Lino Cornelio, Ramírez, e Cors [9] mostraram a existência de uma nova família esquecida por Gidea e Llibre no caso (a) da proposição anterior, completando o resultado.

Um trabalho futuro é investigar configurações centrais empilhadas do caso Euler mais dois sem afirmar simetrias, e para auxiliar na busca desses resultados pode-se tentar responder a seguinte pergunta: seria possível encontrar uma caracterização geral similar a exposta no Teorema 4.0.1 para o caso de Euler mais dois?

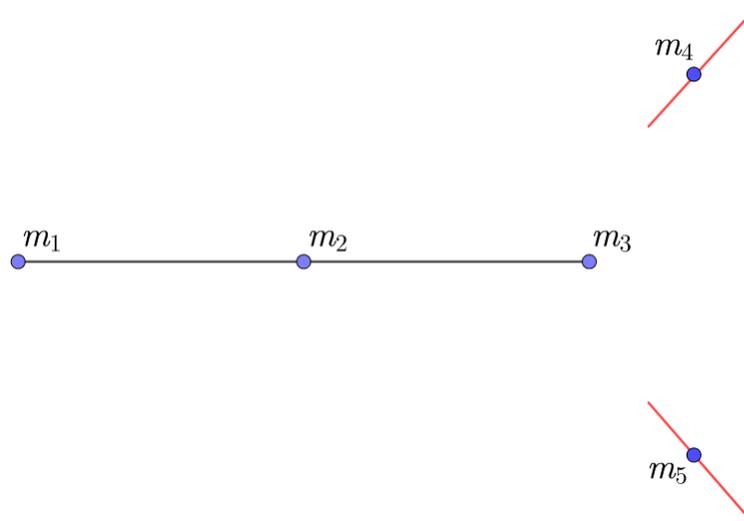


Figura 4.11: Configuração estudada por Lino Cornelio, Ramírez, e Cors [9].

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Albouy, V. Kaloshin, *Finiteness of central configurations of five body in the plane*, Annals of mathematics, 176(1):535-588, (2012).
- [2] E. Barrabés, J. M. Cors, A. C. Fernandes, C. Vidal. *Convexity and symmetry of central configurations in the five-body problem: Lagrange plus two*, aceito para publicação.
- [3] D. Boccaletti, G. Pucacco, *Theory of Orbits, vol.1. Integrable systems and non-perturbative methods*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer-Verlag, Berlin (1996).
- [4] H. Bruns, *Über des integrales der Vielkörperproblem*, Acta Mathematica, vol. 11, (1887).
- [5] F. E. Chaves, *Configurações Centrais no Problema de  $n$  Corpos*. 2009. 39p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, (2009).
- [6] J. Chazy, *Sur certaines trajectoires du problème des  $n$  corps*. Bull. Astron., 35:321-389, (1918).
- [7] K. C. Chen, J. S. Hsiao, *Strictly convex central configurations of the planar five-body problem*. Transactions of the American Mathematical Society, 310:1907-1924, (2018).
- [8] J. L. Cornelio, M. Álvarez-Ramírez, J. M. Cors, *A Special Family of Stacked Central Configurations: Lagrange Plus Euler in One*. Journal of Dynamics Differential Equations, 31(2)711-718, jun. (2019). URL: <https://doi.org/10.1007/s10884-018-9647-1>.

- [9] J. L. Cornelio, M. Álvarez-Ramírez, J. M. Cors, *A family of stacked central configurations in the planar five-body problem*. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 129(2):321-328, Jun. (2017).
- [10] L. Euler, *De motu retilíneo trium corporum se mutuo attahentium*, *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.* **11**, 144-151, (1767).
- [11] M. Gidea, J. Llibre, *Symmetric planar central configurations of five bodies: Euler plus two*. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 106:89-107, (2010).
- [12] G. Strang, *Álgebra linear e suas aplicações*. Editora CENGAGE Learning, São Paulo, tradução da 4ª edição norte-americana, (2012).
- [13] Y. Hagihara, *Celestial Mechanics*, vol. **1**, MIT Press, Massachusetts, (1970).
- [14] M. Hampton, *Stacked central configurations: new examples in the planar five-body problem*, *Nonlinearity* **18**, 2299-2304, (2005).
- [15] M. Hampton, R. Moeckel, *Finiteness of relative equilibria of the four-body problem*, *Invent. Math.*, vol. **163**, 289-312, (2006).
- [16] J. L. Lagrange, *Essai sur le problème de trois corps*, *Ouvres*, vol. **6**, Gauthier-Villars, Paris, (1873).
- [17] J. Llibre, R. Moeckel, C. Simó, *Central Configurations, Periodic Orbits, and Hamiltonian Systems. Advanced Courses in Mathematics*. Birkhäuser, (2015).
- [18] L. F. Mello, J. Llibre. *New central configurations for the planar 5-body problem*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. **100**, 141-149, (2008).
- [19] L. F. Mello, A. C. Fernandes, *On stacked central configurations with  $n$  bodies when one body is removed*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 405(1):320-325, (2013).
- [20] L. F. Mello, A. C. Fernandes, F. E. Chaves. *Configurações centrais planares do tipo pipa*. *Revista Brasileira de Ensino em Física*, vol. **31**, 1302-1-1302-7, (2009).

- [21] L. F. Mello, A. C. Fernandes, *Andoyer equations for non - collinear planar central configurations*. Turkish Journal of Mathematics, 41: 515 - 523, (2017).
- [22] L. F. Mello, A. C. Fernandes, *On stacked planar central configurations with five bodies when one body is removed*. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 12(2):293-303, (2013).
- [23] L. F. Mello, J. Llibre, E. Perez-Chavela, *New stacked central configurations for the planar 5-body problem*, Celestial Mech. Dyn. Astr., vol. **110**, 43-52, (2011).
- [24] L. F. Mello e A. C. Fernandes, *Configurações centrais planares encaixantes*. Rev. Brasileira de Ensino de Física, vol. **29**, 385, (2007).
- [25] R. Moeckel, *On central configurations*, Math. Z., vol. **205**, 499-517, (1990).
- [26] R. Moeckel, *Lectures on central configurations*. **Site:** <http://www-users.math.umn.edu/~rmoeckel/notes/CentralConfigurations.pdf>.
- [27] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Royal Society, London, (1687).
- [28] S. J. Oliveira. *A decomposição em valores singulares: Teoria e aplicações*. 2016. 10p. Monografia (Especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, (2016).
- [29] A. Oliveira, H. Cabral, *On stacked central configurations of the planar coorbital satellites problem*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 32(10):3715-3732, 2012.
- [30] E. G. Santos. *A regra dos sinais de Descartes*. Revista RPM, N° **83**: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/83/10.html>.
- [31] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, Mathematical Intelligencer **20**, p.7-15, (1998).
- [32] Software **Mathematica 11.3**: <https://www.wolfram.com/mathematica/>.

- [33] S. Volchan, *Uma introdução à Mecânica Celeste*, P. matemáticas - IMPAR, (2007).
- [34] Z. Xia, *Central configurations with many small masses*, Journal Differential Equations **91**, N° **1**, 168-179, (1991).
- [35] A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press, (1941).

# Anexo 1

Neste Anexo, apresentamos os cálculos feitos para obter os exemplos numéricos das configurações centrais de Lagrange mais dois não simétricos. Essa estrutura de código pode auxiliar no início do estudo do problema de  $n$ -corpos e se estender para outras interações realizadas neste trabalho. Esses cálculos foram realizados no software *Mathematica* [32].

```

In[ ]:= (*Programa para gerar exemplos de Configurações
centrais de Lagrange mais dois não simétricos.*)
Quit
|encerra a sessão do núcleo

In[1]:= ClearAll
|apaga tudo

Out[1]:= ClearAll

(*Colocar as condições dos corpos nos
vértices de um triângulo equilátero de lado um.*)

In[2]:= r[1] = {-1/2, 0, 0};
r[2] = {1/2, 0, 0};
r[3] = {0,  $\sqrt{3}/2$ , 0};
r[4] = {x, y, 0};
r[5] = {u, v, 0};

(*Definir os termos utilizados nas equações de Andoyer.*)

In[3]:= Ri,j = If[i ≠ j, ((r[i]-r[j]).(r[i]-r[j]))-3/2, 0];
|se

In[4]:= Δi,j,k = If[i ≠ j && i ≠ k && k ≠ j, Det[{r[i]-r[j], r[i]-r[k], {0, 0, 1}}], 0];
|se |determinante

In[5]:= Term[i_, j_, k_] = mk (Ri,k - Rj,k) * Δi,j,k;
fi,j = Sum[Term[i, j, k], {k, 1, 5}];
|soma

(*Calculando as equações de Andoyer em coordenadas.*)

In[7]:= Do[If[i < j, Print[Fi,j → Factor[fi,j]], {j, 1, 5}, {i, 1, 5}]
|... |se |apresenta o r... |fatoriza

F1,2 → -((8 (- (1 - 4 u + 4 u2 + 4 v2)3/2 (1 + 4 u + 4 u2 + 4 v2)3/2 y (1 - 4 x + 4 x2 + 4 y2)3/2 m4 +
(1 - 4 u + 4 u2 + 4 v2)3/2 (1 + 4 u + 4 u2 + 4 v2)3/2 y (1 + 4 x + 4 x2 + 4 y2)3/2 m4 -
v (1 - 4 u + 4 u2 + 4 v2)3/2 (1 - 4 x + 4 x2 + 4 y2)3/2 (1 + 4 x + 4 x2 + 4 y2)3/2 m5 +
v (1 + 4 u + 4 u2 + 4 v2)3/2 (1 - 4 x + 4 x2 + 4 y2)3/2 (1 + 4 x + 4 x2 + 4 y2)3/2 m5)) /
((1 - 4 u + 4 u2 + 4 v2)3/2 (1 + 4 u + 4 u2 + 4 v2)3/2 (1 - 4 x + 4 x2 + 4 y2)3/2 (1 + 4 x + 4 x2 + 4 y2)3/2))

```

$$\begin{aligned}
F_{1,3} \rightarrow & - \left( 2 \left( -\sqrt{3} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} (1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2} m_4 - \right. \right. \\
& 2\sqrt{3} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} x (1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2} m_4 + \\
& 2(1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} y (1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2} m_4 + \\
& \sqrt{3} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_4 + \\
& 2\sqrt{3} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} x (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_4 - \\
& 2(1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} y (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_4 - \\
& \sqrt{3} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_5 - \\
& 2\sqrt{3} u (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_5 + \\
& 2v (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_5 + \\
& \sqrt{3} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} (1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_5 + \\
& 2\sqrt{3} u (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} (1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_5 - \\
& \left. \left. 2v (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} (1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_5 \right) \right) / \\
& \left( (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} (1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} \right) \\
F_{2,3} \rightarrow & - \left( 2 \left( \sqrt{3} (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} m_4 - \right. \right. \\
& 2\sqrt{3} (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} x (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} m_4 - \\
& 2(1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} y (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} m_4 - \\
& \sqrt{3} (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_4 + \\
& 2\sqrt{3} (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} x (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_4 + \\
& 2(1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} y (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_4 + \\
& \sqrt{3} (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_5 - \\
& 2\sqrt{3} u (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_5 - \\
& 2v (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_5 - \\
& \sqrt{3} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_5 + \\
& 2\sqrt{3} u (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_5 + \\
& \left. \left. 2v (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_5 \right) \right) / \\
& \left( (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} \right)
\end{aligned}$$

$F_{1,4} \rightarrow$

$$\begin{aligned}
& -\left( (-32(1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2}y(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_2 + 4(1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} \right. \\
& \quad y(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_2 + \\
& \quad 8\sqrt{3}(1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2}(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_3 + \\
& \quad 16\sqrt{3}(1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2}x(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_3 - \\
& \quad 16(1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2}y(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_3 - \\
& \quad \sqrt{3}(1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2}(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_3 - \\
& \quad 2\sqrt{3}(1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2}x(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2} \\
& \quad \quad m_3 + 2(1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2}y(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2} \\
& \quad \quad m_3 + 2v(1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2}(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}m_5 + \\
& \quad 4v(1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2}x(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}m_5 - \\
& \quad 2(1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2}y(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}m_5 - \\
& \quad 4u(1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2}y(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}m_5 - \\
& \quad 16v(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_5 - \\
& \quad 32vx(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_5 + \\
& \quad 16y(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_5 + \\
& \quad 32uy(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_5) / \\
& \quad \left( 4(1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2}(1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2} \right)
\end{aligned}$$

$F_{2,4} \rightarrow$

$$\begin{aligned}
& (-32(1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2}y(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_1 + \\
& \quad 4(1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2}y(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_1 + \\
& \quad 8\sqrt{3}(1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2}(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_3 - \\
& \quad 16\sqrt{3}(1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2}x(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_3 - \\
& \quad 16(1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2}y(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_3 - \\
& \quad \sqrt{3}(1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2}(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_3 + \\
& \quad 2\sqrt{3}(1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2}x(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_3 + \\
& \quad 2(1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2}y(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_3 + \\
& \quad 2v(1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2}(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}m_5 - \\
& \quad 4v(1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2}x(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}m_5 - \\
& \quad 2(1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2}y(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}m_5 + \\
& \quad 4u(1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2}y(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}m_5 - \\
& \quad 16v(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_5 + \\
& \quad 32vx(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_5 + \\
& \quad 16y(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_5 - \\
& \quad 32uy(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2}m_5) / \\
& \quad \left( 4(1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2}(1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2}(3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2}((-u+x)^2+(-v+y)^2)^{3/2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{3,4} \rightarrow & -\left( -8 \sqrt{3} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} m_1 - \right. \\
& 16 \sqrt{3} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} x (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} m_1 + \\
& 16 (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} y (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} m_1 + \\
& \sqrt{3} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} m_1 + \\
& 2 \sqrt{3} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} x (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} \\
& m_1 - 2 (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} y (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} \\
& m_1 + 8 \sqrt{3} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} m_2 - \\
& 16 \sqrt{3} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} x (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} m_2 - \\
& 16 (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} y (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} m_2 - \\
& \sqrt{3} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} m_2 + \\
& 2 \sqrt{3} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} x (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} \\
& (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} m_2 + \\
& 2 (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} y (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} m_2 + \\
& 2 \sqrt{3} u (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} m_5 - \\
& 2 \sqrt{3} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} x (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} m_5 + \\
& 4v (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} x (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} m_5 - \\
& 4u (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} y (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} m_5 - \\
& 16 \sqrt{3} u (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} m_5 + \\
& 16 \sqrt{3} x (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} m_5 - \\
& 32v x (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} m_5 + \\
& 32u y (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} m_5 \Big/ \\
& \left. \left( 4 (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} ((-u+x)^2 + (-v+y)^2)^{3/2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$F_{1,5} \rightarrow$

$$\begin{aligned}
 & - \left( (-32 v (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 + 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_2 + 4 v (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} \right. \\
 & \quad (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 + 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_2 + \\
 & \quad 8 \sqrt{3} (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 + 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_3 + \\
 & \quad 16 \sqrt{3} u (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 + 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_3 - \\
 & \quad 16 v (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 + 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_3 - \\
 & \quad \sqrt{3} (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 + 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_3 - \\
 & \quad 2 \sqrt{3} u (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 + 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_3 + \\
 & \quad 2 v (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 + 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_3 + \\
 & \quad 16 v (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} m_4 + \\
 & \quad 32 v (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} x ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} m_4 - \\
 & \quad 16 (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} y m_4 - \\
 & \quad 32 u (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} y m_4 - \\
 & \quad 2 v (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} (1 + 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_4 - \\
 & \quad 4 v (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} x (1 + 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_4 + \\
 & \quad 2 (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} y (1 + 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_4 + \\
 & \quad 4 u (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} y (1 + 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_4) / \\
 & \quad \left( 4 (1 - 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 + 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} \right)
 \end{aligned}$$

$F_{2,5} \rightarrow$

$$\begin{aligned}
 & (-32 v (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 - 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_1 + \\
 & \quad 4 v (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 - 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_1 + \\
 & \quad 8 \sqrt{3} (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 - 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_3 - \\
 & \quad 16 \sqrt{3} u (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 - 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_3 - \\
 & \quad 16 v (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 - 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_3 - \\
 & \quad \sqrt{3} (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 - 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_3 + \\
 & \quad 2 \sqrt{3} u (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 - 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_3 + \\
 & \quad 2 v (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 - 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_3 + \\
 & \quad 16 v (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} m_4 - \\
 & \quad 32 v (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} x ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} m_4 - \\
 & \quad 16 (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} y m_4 + \\
 & \quad 32 u (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} y m_4 - \\
 & \quad 2 v (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} (1 - 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_4 + \\
 & \quad 4 v (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} x (1 - 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_4 + \\
 & \quad 2 (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} y (1 - 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_4 - \\
 & \quad 4 u (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} y (1 - 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} m_4) / \\
 & \quad \left( 4 (1 + 4 u + 4 u^2 + 4 v^2)^{3/2} (3 + 4 u^2 - 4 \sqrt{3} v + 4 v^2)^{3/2} ((u-x)^2 + (v-y)^2)^{3/2} (1 - 4 x + 4 x^2 + 4 y^2)^{3/2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{3,5} \rightarrow & -\left( -8 \sqrt{3} (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_1 - \right. \\
& 16 \sqrt{3} u (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_1 + \\
& 16 v (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_1 + \\
& \sqrt{3} (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_1 + \\
& 2 \sqrt{3} u (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_1 - \\
& 2 v (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_1 + \\
& 8 \sqrt{3} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_2 - \\
& 16 \sqrt{3} u (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_2 - \\
& 16 v (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_2 - \\
& \sqrt{3} (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_2 + \\
& 2 \sqrt{3} u (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_2 + \\
& 2 v (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_2 + \\
& 16 \sqrt{3} u (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} m_4 - \\
& 16 \sqrt{3} (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} x ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} m_4 + \\
& 32 v (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} x ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} m_4 - \\
& 32 u (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} y m_4 - \\
& 2 \sqrt{3} u (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_4 + \\
& 2 \sqrt{3} (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} x (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_4 - \\
& 4 v (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} x (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_4 + \\
& 4 u (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} y (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_4 \Big/ \\
& \left. \left( 4 (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} ((u-x)^2+(v-y)^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} \right) \right) \\
F_{4,5} \rightarrow & \left( 4 \left( v (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} \right. \right. \\
& \left. \left( 3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2 \right)^{3/2} m_1 + 2 v (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} \right. \\
& \left. \left( 3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2 \right)^{3/2} x (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_1 - \right. \\
& \left. (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} y (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} \right. \\
& \left. \left( 3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2 \right)^{3/2} m_1 - 2 u (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} \right. \\
& \left. \left( 3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2 \right)^{3/2} y (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_1 - \right. \\
& \left. v (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2} \right. \\
& \left. \left( 3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2 \right)^{3/2} m_1 - 2 v (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} \right. \\
& \left. x (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_1 + \right. \\
& \left. (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} y (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2} \right. \\
& \left. \left( 3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2 \right)^{3/2} m_1 + 2 u (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} \right. \\
& \left. y (1-4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2} (3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2)^{3/2} m_1 - \right. \\
& \left. v (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (3+4u^2-4\sqrt{3}v+4v^2)^{3/2} (1+4x+4x^2+4y^2)^{3/2} \right. \\
& \left. \left( 3+4x^2-4\sqrt{3}y+4y^2 \right)^{3/2} m_2 + 2 v (1-4u+4u^2+4v^2)^{3/2} (1+4u+4u^2+4v^2)^{3/2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} x (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (3 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y + 4y^2)^{3/2} m_2 + \\
& (1 - 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (1 + 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} y (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} \\
& (3 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y + 4y^2)^{3/2} m_2 - 2u(1 - 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (1 + 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} \\
& (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} y (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (3 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y + 4y^2)^{3/2} m_2 + \\
& v(1 + 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} \\
& (3 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y + 4y^2)^{3/2} m_2 - 2v(1 + 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} \\
& x(1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (3 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y + 4y^2)^{3/2} m_2 - \\
& (1 + 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} y(1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} \\
& (3 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y + 4y^2)^{3/2} m_2 + 2u(1 + 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} \\
& y(1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (3 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y + 4y^2)^{3/2} m_2 + \\
& \sqrt{3}u(1 - 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (1 + 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} \\
& (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} m_3 - \sqrt{3}(1 - 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (1 + 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} \\
& (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} x(1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} m_3 + \\
& 2v(1 - 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (1 + 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} x \\
& (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} m_3 - 2u(1 - 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (1 + 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} \\
& (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} y(1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} m_3 - \\
& \sqrt{3}u(1 - 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (1 + 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} \\
& (3 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y + 4y^2)^{3/2} m_3 + \sqrt{3}(1 - 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (1 + 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} \\
& x(1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (3 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y + 4y^2)^{3/2} m_3 - \\
& 2v(1 - 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (1 + 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} x(1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} \\
& (3 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y + 4y^2)^{3/2} m_3 + 2u(1 - 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (1 + 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} \\
& y(1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (3 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y + 4y^2)^{3/2} m_3) / \\
& ((1 - 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (1 + 4u + 4u^2 + 4v^2)^{3/2} (3 + 4u^2 - 4\sqrt{3}v + 4v^2)^{3/2} \\
& (1 - 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} (1 + 4x + 4x^2 + 4y^2)^{3/2} \\
& (3 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y + 4y^2)^{3/2})
\end{aligned}$$

(\*Estruturando o sistema acima na forma matricial.\*)

In[8]:= **FF**[i\_, j\_] := **If**[i < j, **Coefficient**[f<sub>i,j</sub>, {m<sub>1</sub>, m<sub>2</sub>, m<sub>3</sub>, m<sub>4</sub>, m<sub>5</sub>}], 0]

In[9]:= **H** = {**FF**[1, 2], **FF**[1, 3], **FF**[1, 4], **FF**[1, 5],  
**FF**[2, 3], **FF**[2, 4], **FF**[2, 5], **FF**[3, 4], **FF**[3, 5], **FF**[4, 5]}

Out[9]:=  $\left\{ \left\{ 0, 0, 0, y \left( \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} - x\right)^2 + y^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + y^2} \right), v \left( \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} - u\right)^2 + v^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - u\right)^2 + v^2} \right) \right\}, \right.$   
 $\left. \left\{ 0, 0, 0, \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} \right) \left( -\frac{1}{\left(x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} - x\right)^2 + y^2} \right)^{3/2} \right\} \right\}$

$$\left( -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}u}{2} + \frac{v}{2} \right) \left( -\frac{1}{\left(u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - v\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} - u\right)^2 + v^2} \right)^{3/2} \Bigg\},$$

$$\left\{ 0, -y \left( 1 - \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} + x\right)^2 + y^2} \right)^{3/2}, \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{y}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\left(x^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + y\right)^2\right)^{3/2}} \right), \right.$$

$$\left. 0, \left( \frac{v}{2} + vx - \frac{y}{2} - uy \right) \left( \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} - u\right)^2 + v^2} - \frac{1}{\left(-u + x\right)^2 + \left(-v + y\right)^2} \right)^{3/2} \right\},$$

$$\left\{ 0, -v \left( 1 - \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} + u\right)^2 + v^2} \right)^{3/2}, \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}u}{2} - \frac{v}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\left(u^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + v\right)^2\right)^{3/2}} \right), \right.$$

$$\left. \left( -\frac{v}{2} - vx + \frac{y}{2} + uy \right) \left( -\frac{1}{\left(u - x\right)^2 + \left(v - y\right)^2} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} - x\right)^2 + y^2} \right)^{3/2}, 0 \right\},$$

$$\left\{ 0, 0, 0, \left( \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{y}{2} \right) \left( -\frac{1}{\left(x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + y^2} \right)^{3/2}, \right.$$

$$\left. \left( \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}u}{2} - \frac{v}{2} \right) \left( -\frac{1}{\left(u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - v\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - u\right)^2 + v^2} \right)^{3/2} \right\},$$

$$\left\{ y \left( 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 + y^2} \right)^{3/2}, 0, \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\left(x^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + y\right)^2\right)^{3/2}} \right), \right.$$

$$\left. 0, \left( -\frac{v}{2} + vx + \frac{y}{2} - uy \right) \left( \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - u\right)^2 + v^2} - \frac{1}{\left(-u + x\right)^2 + \left(-v + y\right)^2} \right)^{3/2} \right\},$$

$$\left\{ v \left( 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + u\right)^2 + v^2} \right)^{3/2}, 0, \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}u}{2} + \frac{v}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\left(u^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + v\right)^2\right)^{3/2}} \right), \right.$$

$$\left. \left( \frac{v}{2} - vx - \frac{y}{2} + uy \right) \left( -\frac{1}{\left(u - x\right)^2 + \left(v - y\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + y^2} \right)^{3/2}, 0 \right\},$$

$$\left\{ \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\left( \left( \frac{1}{2} + x \right)^2 + y^2 \right)^{3/2}} \right), \left( \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{y}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\left( \left( -\frac{1}{2} + x \right)^2 + y^2 \right)^{3/2}} \right), \right.$$

$$\left. 0, 0, \left( \frac{\sqrt{3}u}{2} - \frac{\sqrt{3}x}{2} + vx - uy \right) \left( \frac{1}{\left( u^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - v \right)^2 \right)^{3/2}} - \frac{1}{\left( (-u+x)^2 + (-v+y)^2 \right)^{3/2}} \right) \right\},$$

$$\left\{ \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}u}{2} + \frac{v}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\left( \left( \frac{1}{2} + u \right)^2 + v^2 \right)^{3/2}} \right), \left( \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}u}{2} - \frac{v}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\left( \left( -\frac{1}{2} + u \right)^2 + v^2 \right)^{3/2}} \right), \right.$$

$$\left. 0, \left( \frac{1}{\left( x^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - y \right)^2 \right)^{3/2}} - \frac{1}{\left( (u-x)^2 + (v-y)^2 \right)^{3/2}} \right) \left( -\frac{\sqrt{3}u}{2} + \frac{\sqrt{3}x}{2} - vx + uy \right), 0 \right\},$$

$$\left\{ \left( \frac{v}{2} + vx - \frac{y}{2} - uy \right) \left( -\frac{1}{\left( \left( \frac{1}{2} + u \right)^2 + v^2 \right)^{3/2}} + \frac{1}{\left( \left( \frac{1}{2} + x \right)^2 + y^2 \right)^{3/2}} \right), \right.$$

$$\left( -\frac{v}{2} + vx + \frac{y}{2} - uy \right) \left( -\frac{1}{\left( \left( -\frac{1}{2} + u \right)^2 + v^2 \right)^{3/2}} + \frac{1}{\left( \left( -\frac{1}{2} + x \right)^2 + y^2 \right)^{3/2}} \right),$$

$$\left. \left( \frac{\sqrt{3}u}{2} - \frac{\sqrt{3}x}{2} + vx - uy \right) \left( -\frac{1}{\left( u^2 + \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + v \right)^2 \right)^{3/2}} + \frac{1}{\left( x^2 + \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + y \right)^2 \right)^{3/2}} \right), 0, 0 \right\}$$

(\*Aqui vamos ter nossa matriz geral que vem das equações de Andoyer.\*)

```
In[10]:= H // MatrixForm ;
          |forma de matriz
```

(\*Subsistema que ajuda a encontrar a  
condição geométrica para solucionar o sistema maior.\*)

```
In[11]:= H1 = {FF[1, 2], FF[1, 3], FF[2, 3]};
```

In[12]:= **H1 // MatrixForm**

forma de matriz

Out[12]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & y \left( \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-x\right)^2+y^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+y^2} \right) & v \left( \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-u\right)^2+v^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-u\right)^2+v^2} \right) \\ 0 & 0 & 0 & \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} \right) \left( -\frac{1}{\left(x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-y\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-x\right)^2+y^2} \right) & \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}u}{2} + \frac{v}{2} \right) \left( -\frac{1}{\left(u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-v\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-u\right)^2+v^2} \right) \\ 0 & 0 & 0 & \left( \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{y}{2} \right) \left( -\frac{1}{\left(x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-y\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+y^2} \right) & \left( \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}u}{2} - \frac{v}{2} \right) \left( -\frac{1}{\left(u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-v\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-u\right)^2+v^2} \right) \end{pmatrix}$$

In[13]:= **MM3 = Flatten[Minors[**  
 achatar [menores  $\begin{pmatrix} (R_{1,4} - R_{2,4}) \Delta_{1,2,4} & (R_{1,5} - R_{2,5}) \Delta_{1,2,5} \\ (R_{1,4} - R_{3,4}) \Delta_{1,3,4} & (R_{1,5} - R_{3,5}) \Delta_{1,3,5} \\ (R_{2,4} - R_{3,4}) \Delta_{2,3,4} & (R_{2,5} - R_{3,5}) \Delta_{2,3,5} \end{pmatrix}$ , 2]]];

In[14]:= **MM = {-(R<sub>1,5</sub> - R<sub>2,5</sub>)(R<sub>1,4</sub> - R<sub>3,4</sub>) Δ<sub>1,2,5</sub> Δ<sub>1,3,4</sub> + (R<sub>1,4</sub> - R<sub>2,4</sub>)(R<sub>1,5</sub> - R<sub>3,5</sub>) Δ<sub>1,2,4</sub> Δ<sub>1,3,5</sub>,**  
**-(R<sub>1,5</sub> - R<sub>2,5</sub>)(R<sub>2,4</sub> - R<sub>3,4</sub>) Δ<sub>1,2,5</sub> Δ<sub>2,3,4</sub> + (R<sub>1,4</sub> - R<sub>2,4</sub>)(R<sub>2,5</sub> - R<sub>3,5</sub>) Δ<sub>1,2,4</sub> Δ<sub>2,3,5}}</sub>**

Out[14]=

$$\left\{ v \left( -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-u\right)^2+v^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-u\right)^2+v^2} \right) \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} \right) \right.$$

$$\left. \left( -\frac{1}{\left(x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-y\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-x\right)^2+y^2} \right) + \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}u}{2} + \frac{v}{2} \right) \right.$$

$$\left. \left( -\frac{1}{\left(u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-v\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-u\right)^2+v^2} \right) y \left( \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-x\right)^2+y^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+y^2} \right), \right.$$

$$\left. \left( \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}u}{2} - \frac{v}{2} \right) \left( -\frac{1}{\left(u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-v\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-u\right)^2+v^2} \right) y \left( \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-x\right)^2+y^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+y^2} \right) + \right.$$

$$\left. v \left( -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-u\right)^2+v^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-u\right)^2+v^2} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{y}{2} \right) \left( -\frac{1}{\left(x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-y\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+y^2} \right) \right\}$$

(\*Fixando um ponto na região T<sub>2</sub> do artigo\*)

(\*Aqui fixamos um ponto (x,y) próximo do ponto conhecido P2= (0.63217335448833913 ,0.9912266160486711 ) do artigo do Llibre e Mello abordado no capítulo 2, pois sei que em suas vizinhanças existem configurações centrais, nem que seja as sobre a curva L=0\*)

In[15]:= MM1 = MM /. {x → 0.58, y → 0.9}

$$\begin{aligned} \text{Out[15]} = & \left\{ -0.896165 \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}u}{2} + \frac{v}{2} \right) \left( -\frac{1}{\left(u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - v\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(\left(-\frac{1}{2} - u\right)^2 + v^2\right)^{3/2}} \right) + \right. \\ & 2.29992 v \left( -\frac{1}{\left(\left(-\frac{1}{2} - u\right)^2 + v^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{2} - u\right)^2 + v^2\right)^{3/2}} \right), \\ & -0.896165 \left( \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}u}{2} - \frac{v}{2} \right) \left( -\frac{1}{\left(u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - v\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{2} - u\right)^2 + v^2\right)^{3/2}} \right) + \\ & \left. 1.94386 v \left( -\frac{1}{\left(\left(-\frac{1}{2} - u\right)^2 + v^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{2} - u\right)^2 + v^2\right)^{3/2}} \right) \right\} \end{aligned}$$

(\*Gerando valores de (u,v) que solucionam a expressão acima para MM1==0\*)

In[16]:= NSolve[MM1 == {0, 0}, {u, v}, Reals] // FullSimplify  
| solução numérica | números... | simplifica completamente

Out[16]:= {{u → -0.68062, v → 1.09404}, {u → -0.68062, v → 1.09404}, {u → 0.58, v → 0.9},  
 {u → 0.58, v → 0.9}, {u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675},  
 {u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675},  
 {u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675},  
 {u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675}}

In[17]:= NullSpace[H /. {x → 0.58, y → 0.9, u → -0.6806200759885006, v → 1.0940401690529549}]  
| núcleo

Out[17]:= {{0.735324, 0.250026, 0.129949, 0.31815, 0.5279}}

(\*Fixando um ponto na região T\_1 do artigo\*)

(\*Aqui fixamos um ponto (x,y) próximo do ponto conhecido da intersecção da curva L=0 e da hipérbole  $R_{4,5}=R_{2,4}$  {x→0.20726510404992263, y→0.29349884858445063}, pois sei que em suas vizinhanças existem configurações centrais, nem que seja as sobre a curva L=0\*)

In[18]:= **TMM1 = MM /. {x → 0.20, y → 0.27}**

$$\text{Out[18]= } \left\{ -3.46728 \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3} u}{2} + \frac{v}{2} \right) \left( -\frac{1}{\left( u^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - v \right)^2 \right)^{3/2}} + \frac{1}{\left( \left( -\frac{1}{2} - u \right)^2 + v^2 \right)^{3/2}} \right) + \right. \\ \left. 0.780586 v \left( -\frac{1}{\left( \left( -\frac{1}{2} - u \right)^2 + v^2 \right)^{3/2}} + \frac{1}{\left( \left( \frac{1}{2} - u \right)^2 + v^2 \right)^{3/2}} \right), \right. \\ \left. -3.46728 \left( \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3} u}{2} - \frac{v}{2} \right) \left( -\frac{1}{\left( u^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - v \right)^2 \right)^{3/2}} + \frac{1}{\left( \left( \frac{1}{2} - u \right)^2 + v^2 \right)^{3/2}} \right) + \right. \\ \left. 1.396 v \left( -\frac{1}{\left( \left( -\frac{1}{2} - u \right)^2 + v^2 \right)^{3/2}} + \frac{1}{\left( \left( \frac{1}{2} - u \right)^2 + v^2 \right)^{3/2}} \right) \right\}$$

(\*Gerando valores de (u,v) que solucionam a expressão acima para TMM1==0\*)

In[19]:= **NSolve[TMM1 == {0, 0}, {u, v}, Reals] // FullSimplify**

[solução numérica](#) [números...](#) [simplifica completamente](#)

Out[19]= {{u → -2.76656, v → -2.89998}, {u → -2.76656, v → -2.89998}, {u → 2.18901, v → -1.70219},  
{u → 2.18901, v → -1.70219}, {u → 0.2, v → 0.27}, {u → 0.2, v → 0.27},  
{u → -0.201417, v → 0.317373}, {u → -0.201417, v → 0.317373}, {u → 0, v → 0.288675},  
{u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675},  
{u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675}, {u → 0, v → 0.288675}}

In[20]:= **NullSpace[H /. {x → 0.20, y → 0.27, u → -0.20141668864782505, v → 0.31737290996170653} ]**

[núcleo](#)

Out[20]= {{0.423538, 0.322302, 0.828736, 0.116142, 0.128235}}