

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Comportamento Assintótico na Dinâmica Cosmológica de um Universo com Anisotropia

Gabriel Augusto de Souza Silva

Orientador: Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da  
CAPES.

ITAJUBÁ, 9 DE MARÇO DE 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Comportamento assintótico na dinâmica cosmológica de um universo com anisotropia

Gabriel Augusto de Souza Silva

Orientador: Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Topologia / Geometria

ITAJUBÁ - MG

9 DE MARÇO DE 2021

*À Virgem Mãe, que dando-nos Jesus tudo nos deu e que por Jesus nos conduz a Deus é  
consagrada essa dissertação, em penhor de filial devoção.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Senhor pela oportunidade de crescimento profissional e santificação pessoal, e à Virgem para quem este trabalho é consagrado. À minha namorada Jaqueline pelo companheirismo. À minha família pelo apoio e paciência ininterruptos (em especial durante a quarentena). Ao meu orientador Leandro Gomes pela amizade, dedicação e por me experienciar como pesquisador. Aos professores Jacson Simsen, Fernando Micena, Renato Klippert, Rick Richter, Fabio Scalco , Denis Braga, Luís Fernando e todos os demais professores do PMAT pelo conhecimento e inspiração fornecidos. Aos colegas Bruno, Willian, João, Alice, José Carlos, Diego e demais companheiros de estudos.

*"Pois que a verdade é serva de quem a serve". A. G. Sertillanges.*

# Resumo

A cosmologia é uma ciência que agrupa ferramental de várias áreas das ciências exatas, na busca de compreender bem o evento físico chamado de universo. Em sua nuance mais fundamental, a matemática se faz de grande importância, permitindo, por exemplo, a construção de modelos cosmológicos e a compreensão de sua evolução temporal. Neste trabalho abordamos os modelos com anisotropia espacial do tipo Bianchi I, tendo como objetivo analisar o comportamento assintótico da projeção das soluções das equações de Einstein no disco de Kasner em sua forma polar. Encontramos uma grande variedade de comportamentos assintóticos possíveis, para as mais variadas formas de matéria presentes nos modelos para o universo.

**Palavras-chave:** Bianchi-I, Anisotropia, Comportamento Assintótico.

# Abstract

Cosmology is a science that brings together different tools from various areas of the exact sciences, in the search to understand better the physical event called "universe". In its most fundamental nuance, mathematics is of great importance, allowing, for example, the construction of cosmological models and the understanding of their temporal evolution. In this work we approach the models with Bianchi-type I spatial anisotropy, aiming to analyze the asymptotic behavior of the projection of the solutions of Einstein's equations on Kasner's disk in its polar form. We found a wide variety of possible asymptotic behaviors, for the most varied forms of matter present in the universe models.

**Keywords:** Bianchi-type I, Anisotropy, Asymptotical Behavior.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Índice</b>	<b>vi</b>
<b>1 Fundamentos Matemáticos</b>	<b>3</b>
1.1 Variedades diferenciáveis . . . . .	3
1.2 Derivadas de Lie . . . . .	4
1.3 Simetrias: Grupos e Álgebras de Lie . . . . .	5
1.3.1 Vetores de Killing . . . . .	5
1.3.2 Grupos e Álgebras de Lie . . . . .	6
1.3.3 Classificações de Bianchi das álgebras de Lie de dimensão 3 . . . . .	9
1.3.4 Espaços Homogêneos . . . . .	10
1.4 Espaços-tempo espacialmente homogêneos . . . . .	11
1.5 Universo Homogêneo e Isotrópico: Modelo de FLRW . . . . .	12
1.6 O universo vazio e anisotrópico: Soluções de Kasner . . . . .	13
<b>2 Revisitando a dinâmica em Bianchi-I na representação polar do disco de Kasner</b>	<b>14</b>
2.1 Variáveis dinâmicas . . . . .	14
2.2 Equações de Einstein . . . . .	15

2.3	Disco de Kasner em coordenadas polares . . . . .	19
2.4	Comportamento assintótico das soluções . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Modelos fenomenológicos</b>	<b>31</b>
3.1	A solução geral para o fluido perfeito barotrópico . . . . .	32
3.2	Modelos Kasner estendidos: soluções com $\Sigma$ constante . . . . .	35
3.3	Conteúdo de matéria linear e não-oscilatória . . . . .	36
3.4	Parâmetro de viscosidade como função da magnitude da anisotropia . . . . .	38
3.5	Um zoológico de retratos de fase . . . . .	44
3.5.1	Poeira ( $\gamma = 1$ ) . . . . .	46
3.5.2	Radiação ( $\gamma = 4/3$ ) . . . . .	48
3.5.3	Matéria intermediária ( $\gamma = 1.5$ ) . . . . .	50
3.5.4	Energia escura ( $\gamma = 0$ ) . . . . .	52
	<b>Conclusões</b>	<b>54</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>55</b>
	<b>Anexo I</b>	<b>57</b>

# Introdução

Uma das aplicações mais frutuosas da matemática se dá na cosmologia, ciência destinada à melhor compreensão do evento físico, ou ente matemático, denominado universo. Em especial, a cosmologia se dedica a entender a evolução temporal do universo, de seus componentes de matéria e como estes se distribuem por sua extensão durante o passar das eras. Perguntas interessantes à cosmologia são feitas com relação ao passado e ao futuro do universo, ou seja, como era o universo próximo de seu início e como ele será no futuro. Há diversas maneiras de se abordar estas questões, seja por métodos observacionais (onde a humanidade olha para o passado do universo através de telescópios), por métodos teóricos ou pela conjunção de ambos. Nestes últimos a matemática se faz de grande importância.

A matemática nos permite, através da teoria da geometria diferencial, desenvolver modelos de universo (variedades diferenciais chamados de “espaços-tempo”) que, confrontados com experimentos físicos, lançam luz à esta área da ciência. É atualmente aceito no meio científico, com evidências observacionais, que o melhor modelo para nosso universo (ao menos em larga escala) é o modelo homogêneo e isotrópico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [7]. No entanto, ainda hoje há discussão sobre o comportamento do universo em períodos de sua evolução muito próximos ou muito distantes de sua origem no tempo (chamada de “singularidade inicial” ou “Big Bang”). Sabe-se que o comportamento do nosso universo próximo à sua origem é bem descrita pelos modelos homogêneos [2], de modo que é de grande interesse realizar estudos do comportamento assintótico desses modelos tais que admitam anisotropia. A nossa motivação é lançar um olhar mais aprofundado a alguns modelos que apresentam anisotropia. Este texto

trata deste tipo de estudo, utilizando como ferramental básico as soluções das equações de Einstein da Relatividade Geral, estas em modelos matemáticos do universo do tipo Bianchi I diagonal. Objetivamos entender o comportamento assintótico (i.e., para tempos no passado e no futuro do universo) destas soluções.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 1 apresentamos um resumo do ferramental matemático básico para se estudar Relatividade Geral, a teoria moderna da gravitação responsável pelos modelos cosmológicos, servindo como uma referência ao estudante de matemática iniciante no assunto. Nos capítulos 2 e 3, estudamos a dinâmica das equações no modelo de Bianchi-I, representando sua dinâmica em uma nova perspectiva (representação polar do disco de Kasner), encontrando novas soluções exatas e mostrando novos comportamento assintóticos e hipóteses suficientes para suas ocorrências. A maior parte do conteúdo a partir do capítulo 2 é novo na literatura e está contido no preprint “The asymptotic oscillatory behavior in Bianchi type I models” [4].

# Capítulo 1

## Fundamentos Matemáticos

Este capítulo visa fornecer ao leitor uma revisão dos fundamentos teóricos necessários à leitura e boa compreensão deste trabalho. São assumidos conhecimentos comuns a um curso de bacharelado em matemática.

### 1.1 Variedades diferenciáveis

Este trabalho se propõe a estudar o comportamento assintótico de modelos de universo anisotrópicos. Estes modelos são descritos matematicamente através de estruturas chamadas *variedades*, que são definidas como segue:

**Definição 1.1.1.** *Uma variedade real  $M$ ,  $n$ -dimensional,  $C^\infty$ , é um par formado por um conjunto  $M$  e uma família de subconjuntos abertos  $\{\mathcal{O}_\alpha\} \subset M$  ( $\alpha \in I$ ,  $I$  um conjunto de índices) tais que*

- i)  $\{\mathcal{O}_\alpha\}$  é uma cobertura aberta para  $M$ ;*
- ii)  $\forall \alpha \in I$  existe um difeomorfismo  $\psi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \subset M \rightarrow \mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{U}_\alpha$  aberto;*
- iii) Dados  $\alpha, \beta \in I$ , se  $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$ , então está bem definido o difeomorfismo (mudança de coordenadas)  $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta) \subset \mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi_\beta(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta) \subset \mathcal{U}_\beta \subset \mathbb{R}^n$ .*

Uma boa intuição sobre uma *variedade diferenciável*  $M$  é: um conjunto que possui localmente (isto é, nas vizinhanças  $\mathcal{O}_\alpha$  de cada elemento) as propriedades diferenciáveis

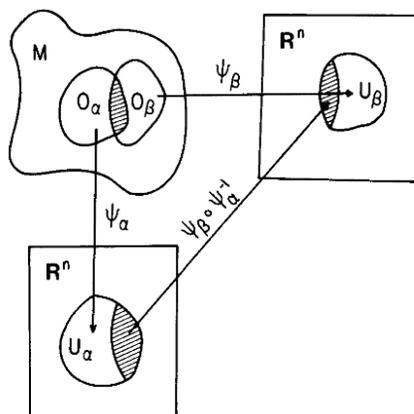


Figura 1.1: Variedade diferenciável: Cartas sobrepostas. Imagem utilizada de [17].

do  $\mathbb{R}^n$ , sem que globalmente isso seja sempre verdadeiro. Cada difeomorfismo  $\psi_\alpha$  constitui um sistema de coordenadas em  $M$ .

Sobre uma variedade  $M$  também exigiremos a condição topológica de ser Hausdorff. Neste contexto é possível falar de funções diferenciáveis, campos vetoriais e campos tensoriais, assim como os teoremas básicos que nos permitem integrá-los e diferenciá-los ao longo desses espaços, nos permitindo portanto fazer “cálculos” (veja [17]).

A conexão entre os estudos das variedades e a física se dá pela constatação experimental de que o espaço-tempo pode ser descrito continuamente por 4 parâmetros, de modo a se utilizar uma relação entre o espaço-tempo e uma variedade de dimensão 4. No entanto, a Teoria da Relatividade trás em si a geometria de espaços curvos, donde surge a necessidade de se considerar o espaço-tempo de maneira mais específica, que é a presença de uma métrica de assinatura Lorentziana  $((-1, 1, 1, 1))$  [14].

## 1.2 Derivadas de Lie

Seja  $M$  uma variedade,  $\mathbf{X} = X^\mu e_\mu$  um campo vetorial e  $\mathbf{T}$  um campo tensorial, ambos definidos em  $M$ . Sabemos que  $\mathbf{X}$  induz um fluxo  $\phi_t$  que é um difeomorfismo local de  $M$ . Para valores do parâmetro  $t$  “pequenos”, é possível escrever  $\phi_t$  em sua expansão de Taylor

até a primeira ordem, isto é, se  $x' = \phi_t(x)$ ,

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + tX^{\mu}. \quad (1.1)$$

Sejam agora  $\mathbf{T}_x$  e  $\mathbf{T}'_{x'}$ , respectivamente, os elementos do campo tensorial  $\mathbf{T}$  avaliados em  $x$  e  $x'$  de  $M$ , respectivamente. Como comparar a variação deste campo tensorial após esta variação infinitesimal do parâmetro  $t$  do campo  $\mathbf{X}$ ? À este processo de comparação chamamos *derivada de Lie* e escrevemos

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}'_{x'} - \mathbf{T}_x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* \mathbf{T}_{\phi_t(x)} - \mathbf{T}_x}{t}. \quad (1.2)$$

Note que o tensor  $\mathbf{T}'_{x'}$  só pode ser comparado ao tensor  $\mathbf{T}_x$  quando avaliados no mesmo ponto, de modo que, sendo  $x' = \phi_t(x)$  por (1.1), o pull-back  $\phi_t^*$  consiste em avaliar  $\mathbf{T}'$  em  $x$ .

No caso particular em que  $\mathbf{T}$  é o campo vetorial  $\mathbf{Y}$ , a derivada de Lie de  $\mathbf{Y}$  ao longo de um campo  $\mathbf{X}$  será:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_{-t*} \mathbf{Y}_{\phi_t(x)} - \mathbf{Y}_x}{t} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \quad (1.3)$$

onde  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  consiste no colchete de Lie destes campos. Para mais informações, veja [14].

## 1.3 Simetrias: Grupos e Álgebras de Lie

### 1.3.1 Vetores de Killing

Os vetores de Killing fornecem uma maneira de representar as simetrias de um espaço sem depender de sistemas de coordenadas específicos. Para apresentar este conceito, seja uma variedade descrita localmente por um sistema de coordenadas  $x_{\mu}$  com uma métrica

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} \mathbf{d}x^{\mu} \otimes \mathbf{d}x^{\nu}. \quad (1.4)$$

Considere agora o novo sistema de coordenadas induzido pelo fluxo  $\phi_t(x) = x'^{\mu}$ . Através do pull-back  $\phi_t^*$  considere  $\hat{\mathbf{g}}$  a métrica avaliada no ponto  $x'^{\mu}$  mas “arrastada” até o ponto  $x^{\mu}$ :

$$\hat{\mathbf{g}} = (\phi_t^* \mathbf{g})(x) = \mathbf{g}(\phi_t(x)) = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \mathbf{d}x^{\mu} \otimes \mathbf{d}x^{\nu}. \quad (1.5)$$

Dizemos que  $\phi_t$  irá constituir uma isometria se  $\mathbf{g} = \hat{\mathbf{g}}$ .

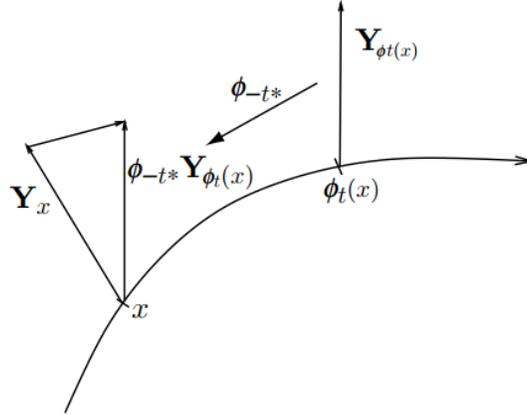


Figura 1.2: Derivada de Lie de campo vetorial: Para comparar  $\mathbf{Y}_x$  e  $\mathbf{Y}_{\phi_t(x)}$  é necessário que estejam sobre o mesmo ponto, donde se faz uso do pull-back  $\phi_{-t*}$ . Imagem utilizada de [10]

**Definição 1.3.1.** *Um campo de Killing é um campo vetorial  $\xi$  cujo fluxo deixa a métrica invariante, i.e.,  $\mathcal{L}_\xi g = 0$ .*

Um campo de Killing é um campo vetorial  $\xi$  cujo grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos (fluxo) é formado por isometrias locais.

**Teorema 1.3.1.** *Se  $\xi$  é um campo de Killing então suas componentes satisfazem:*

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0, \quad (1.6)$$

onde o “;” a denota derivada covariante da métrica em questão [17].

### 1.3.2 Grupos e Álgebras de Lie

Quando se fala em transformações contínuas que preservem alguma quantidade matemática, ou seja, estabelecem alguma *simetria contínua*, serão úteis os conceitos desenvolvidos por Sophus Lie em seus estudos de quantidades conservadas em equações diferenciais ordinárias e parciais, que deram as bases da teoria hoje conhecida como Grupos de Lie. É possível, ainda, estabelecer uma relação entre Grupos de Lie e Álgebras de Lie.

**Definição 1.3.2.** Um **grupo topológico** é um par  $(G, f)$  formado por um conjunto  $G$  e uma operação de grupo  $f : G \times G \rightarrow G$  que é um homeomorfismo satisfazendo as propriedades de grupo: Dados  $x, y, z, e \in G$ , valem a

i) associatividade:

$$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)), \quad \forall x, y, z \in G;$$

ii) existência do elemento neutro: Deve existir um  $e \in G$  tal que

$$f(e, x) = x = f(x, e), \quad \forall x \in G;$$

iii) existência do elemento inverso: Dados  $x, e \in G$ , e como em ii), deve existir um  $x^{-1} \in G$  tal que

$$f(x, x^{-1}) = e = f(x^{-1}, x).$$

Para tratar de simetrias contínuas utilizaremos os grupos de Lie.

**Definição 1.3.3.** Um **grupo de Lie**  $G$  é um espaço topológico tal que:

- i)  $G$  é uma variedade;
- ii) A multiplicação de grupo  $f : G \times G \rightarrow G$  é  $C^\infty$ ;
- iii) A inversão de grupo  $^{-1} : G \rightarrow G$  é  $C^\infty$ .

Como visto anteriormente, campos de Killing geram isometrias locais. Estas, em muitas ocasiões, são difeomorfismos. Na verdade, temos [14]:

**Proposição 1.3.1.** As isometrias de um espaço-tempo formam um grupo de Lie, denominado **grupo de isometrias de  $M$**  ( $Isom(M)$ ).

**Definição 1.3.4.** Uma **Álgebra de Lie**  $\mathfrak{g}$  é um espaço vetorial real (ou complexo), de dimensão finita, munido de uma operação bilinear  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , denominada **Colchete de Lie**, que satisfaz:

- i) **Anti-simetria:**  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}] \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{g}$ ;
- ii) **A identidade de Jacobi:**  $[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] = 0, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{g}$ .

Um resultado fundamental que conecta os conceitos de grupos de Lie (variedades) e álgebras de Lie (espaços vetoriais) é dado pelo teorema abaixo, que pode ser encontrado em [14]:

**Teorema 1.3.2.** *Se  $\mathbf{G}$  é um Grupo de Lie, então o espaço tangente de  $\mathbf{G}$  na identidade  $e$ ,  $\mathbf{T}_e \mathbf{G}$ , é uma álgebra de Lie:  $\mathbf{T}_e \mathbf{G} = \mathfrak{g}$ .*

Para visualizarmos esta conexão entre grupos e álgebras de Lie, suponha que  $\mathbf{G}$  seja um grupo matricial, i.e., formado por matrizes  $n \times n$  com um produto matricial usual. Cada elemento de sua álgebra,  $\mathbf{T}_e \mathbf{G}$ , é um vetor tangente a uma curva em  $\mathbf{G}$  que passa pelo elemento identidade. Utilizando a noção de fluxo de um campo vetorial, pode-se então tomar a partir da identidade  $I \in \mathbf{G}$ , que é a matriz identidade, o campo vetorial  $\mathbf{X}$  em  $\mathbf{G}$ , definido matricialmente por  $X(A) := AX$ . Seu fluxo a partir da identidade,  $\phi_t(I) \in \mathbf{G}$ , está definido pelo PVI

$$\begin{aligned}\phi_t^{-1} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} &= \mathbf{X} \\ \phi_0(I) &= I.\end{aligned}$$

Ele é conhecido como a exponencial de  $\mathbf{X}$ ,  $\phi_t(I) = \exp(t\mathbf{X})$ , que é a exponencial de matrizes. Ela relaciona elementos da Álgebra de Lie com elementos do Grupo de Lie na forma de um difeomorfismo (local) [14]:

$$\begin{aligned}\exp : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbf{G} \\ \mathbf{X} &\mapsto \exp(\mathbf{X}) = \phi_0(I).\end{aligned}$$

Uma Álgebra de Lie é costumeiramente representada por suas constantes de estrutura, que nada mais são do que constantes que caracterizam seu colchete de Lie em uma base  $\mathbf{X}_i$ . Elas são denotadas por  $C_{ij}^k$ , onde

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = C_{ij}^k \mathbf{X}_k.$$

Conclui-se que as constantes de estrutura são anti-simétricas nos índices inferiores, isto é,  $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ . Ainda, a Identidade de Jacobi se escreve na forma

$$C_{ij}^\ell C_{\ell k}^m + C_{jk}^\ell C_{\ell i}^m + C_{ki}^\ell C_{\ell j}^m = 0. \quad (1.7)$$

### 1.3.3 Classificações de Bianchi das álgebras de Lie de dimensão 3

Para uma álgebra de Lie de dimensão 3, é possível mostrar que suas constantes de estrutura, e portanto seu colchete de Lie, são completamente definidas por  $n^{ij}$ , que representa um tensor simétrico, e  $a_j$ , representando um vetor, segundo as relações [10]

$$C_{ij}^k = \epsilon_{ijm} n^{mk} + \delta_j^k a_i - \delta_i^k a_j, \quad (1.8)$$

onde  $\epsilon_{ijk}$  é o tensor totalmente anti-simétrico em três dimensões. Da Identidade de Jacob se obtém que  $n^{ij} a_j = 0$ . Colocando o tensor simétrico  $n^{ij}$  na sua forma diagonal com suas entradas sendo 1,  $-1$  ou 0, podemos sem perda de generalidade tomar  $(a_i) = (a, 0, 0)$  e  $a n^{(1)} = 0$ . Neste caso as relações de comutação assumem a forma

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = a\mathbf{X}_2 + n^{(3)}\mathbf{X}_3, \quad (1.9)$$

$$[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = n^{(1)}\mathbf{X}_1, \quad (1.10)$$

$$[\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_1] = n^{(2)}\mathbf{X}_2 - a\mathbf{X}_3. \quad (1.11)$$

Com isto, concluímos que existem 9 classes distintas dessas álgebras, chamadas **álgebras de Bianchi**.

Tipo	a	$n^{(1)}$	$n^{(2)}$	$n^{(3)}$
I	0	0	0	0
II	0	1	0	0
VII <sub>0</sub>	0	1	1	0
VI <sub>0</sub>	0	1	-1	0
IX	0	1	1	1
VIII	0	1	1	-1
V	1	0	0	0
IV	1	0	0	1
VII <sub>a</sub>	a	0	1	1
III ( $a = 1$ )	a	0	1	-1
VI <sub>a</sub> ( $a \neq 1$ )	a	1	-1	0

Tabela 1.1: Classificação de Bianchi para as álgebras de Lie de dimensão 3.

### 1.3.4 Espaços Homogêneos

A noção de espaço homogêneo se faz em uma variedade munida de uma métrica com assinatura qualquer. Porém, para nossas aplicações, nos interessa somente os espaços homogêneos riemannianos, definidos a seguir:

**Definição 1.3.5.** *Uma variedade riemanniana  $M$  é dita ser um **espaço homogêneo** quando, para todo par de pontos  $p, q \in M$ , existe uma isometria  $\phi \in Isom(M)$  tal que  $\phi(p) = q$ .*

Uma noção importante em espaços homogêneos é a seguinte:

**Definição 1.3.6.** *Dada um espaço homogêneo  $M$  com métrica  $\mathbf{g}$ , podemos definir o **subgrupo de isotropia** de  $p \in M$  por*

$$\mathcal{I}_p(M) = \{\varphi \in Isom(M) \quad \text{tal que} \quad \varphi(p) = p\}.$$

Ou seja:  $\mathcal{I}_p(M)$  é um subgrupo de  $Isom(M)$  composto pelas isometrias de  $M$  que fixam  $p \in M$ .

Pode-se mostrar [14] que um espaço homogêneo de dimensão  $m$  tem um grupo de simetrias de dimensão pelo menos  $m$ . Cada vetor  $\xi$  de sua álgebra de Lie pode ser identificado com um campo de Killing, também visto como um gerador de isometrias, segundo a relação

$$\xi(p) := \left. \frac{d}{dt} \varphi_{t\xi}(p) \right|_{t=0}, \quad (1.12)$$

onde  $\varphi_{t\xi}$  é a isometria associada ao elemento  $t\xi$  pela função exponencial.

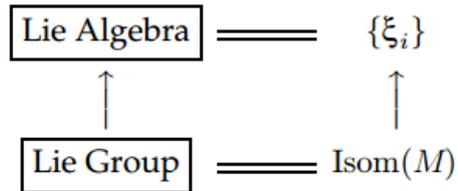


Figura 1.3: Associação entre os grupos de isometria e os campos de Killing mediante a relação entre os grupos de Lie e álgebras de Lie. Diagrama utilizado de [10].

Os espaços homogêneos de dimensão 3 com grupo de isotropia de dimensão 0 são chamados de **espaços de Bianchi**. Pela relação vista acima entre a álgebra de Lie do grupo de isometrias e o espaço homogêneo, pode-se mostrar que, localmente, esses últimos são determinados pela primeira. Assim, a classificação de Bianchi para as álgebras de Lie de dimensão 3 determina os possíveis comportamentos locais para os espaços de Bianchi. Globalmente, a história é mais complicada, e esta classificação está aberta até os dias atuais.

## 1.4 Espaços-tempo espacialmente homogêneos

A partir de agora, nossa variedade é um espaços-tempo  $(M, g)$ , que em coordenadas locais é representado por uma coordenada temporal  $t$  e outras três espaciais  $x^i$ . O referencial adotado é tal que este  $t$  é o mesmo para todo ponto do “espaço”, i.e.,  $M$  é folheado por hiper-superfícies tipo-espaço que são caracterizados pela mesma coordenada  $t$  [7].

**Definição 1.4.1.** *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é dito **espacialmente homogêneo** quando existir uma folheação em hiper-superfícies tipo-espaço que são invariantes pelo grupo de*

*isometrias de  $g$  e tal que cada uma dessas folhas se torna um espaço homogêneo com a métrica induzida.*

Os espaços-tempo espacialmente homogêneos têm uma relação direta com a cosmologia, pois eles caracterizam modelos que têm a mesma propriedade ao longo do espaço, variando tão somente com o tempo. A classificação de Bianchi para as álgebras de Lie de dimensão 3 nos diz que temos exatamente apenas 9 classes desses espaços-tempo de dimensão  $\dim(M) = 4$ . Os modelos que vamos analisar neste trabalho são do tipo Bianchi I, ou seja, espaços-tempo espacialmente homogêneos, quadridimensionais, com seções espaciais planas, que correspondem à álgebra de Lie comutativa.

## 1.5 Universo Homogêneo e Isotrópico: Modelo de FLRW

A cosmologia é uma ciência que se dedica a estudar o universo, suas propriedades e estruturas em larga escala, mediante ferramental teórico e observacional. O modelo de universo que apresentaremos agora tem grande importância para a cosmologia, englobando o chamado *princípio cosmológico* (“em larga escala, o universo é *homogêneo e isotrópico*”) e permite tratamento matemático simples.

Para se construir um universo homogêneo e isotrópico, devemos exigir como simetria, além da existência de um grupo de isometrias, um grupo de isotropias de dimensão três sobre a parte “espacial” da variedade que modela o universo em questão.

O modelo de universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (que denotaremos como FLRW) tem como característica seções espaciais que são espaços homogêneos de curvatura constante. Neste trabalho, nos interessa o caso em que a curvatura é nula (veja mais em [7]). Sua métrica é expressa na forma [13]:

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{ab} dx^a dx^b \quad \text{com} \quad \text{diag}(\gamma_{ab}) = \{a^2(t), a^2(t), a^2(t)\}. \quad (1.13)$$

Como modelo cosmológico, a função  $a(t)$  que determina a métrica é determinada pelo parâmetro de Hubble  $H = \dot{a}/a$ , que por sua vez se relaciona com outras quantidades físicas, como a densidade de energia  $\rho$  e a pressão  $p$ , através das Equações de Einstein,

que se resumem às equações de Friedmann [7]):

$$3H^2 = \rho \quad (1.14)$$

e da continuidade

$$\dot{\rho} = 3H(\rho + p). \quad (1.15)$$

## 1.6 O universo vazio e anisotrópico: Soluções de Kasner

A métrica da solução de vácuo de Kasner é expressa, em seu elemento de linha, na forma

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1} dx^2 + t^{2p_2} dy^2 + t^{2p_3} dz^2 \quad (1.16)$$

onde os expoentes  $p_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , satisfazem os seguintes vínculos:

$$\sum_{i=1}^3 p_i = \sum_{i=1}^3 p_i^2 = 1, \quad (1.17)$$

de modo que os valores possíveis para os coeficientes  $p_i$  estão restritos à circunferência de expressão algébrica  $\sum_{i=1}^3 p_i^2 = 1$ , chamado de círculo de Kasner. Eles podem ser colocados na forma [7]

$$p_k = \frac{1}{3}(1 + 2\text{sen}(\varphi_k)), \quad \varphi_k = \frac{2(k-1)\pi}{3}. \quad (1.18)$$

(para conferir basta utilizar (1.18) em (1.17)). É direto verificar que esta métrica é Ricci-flat, isto é, seu tensor de curvatura de Ricci é nulo. Na Relatividade Geral, isto é o mesmo que dizer que ela é uma solução de vácuo. Essa classe de métricas de Kasner representa as únicas possibilidades de soluções de vácuo para o contexto de Bianchi I.

# Capítulo 2

## Revisitando a dinâmica em Bianchi-I na representação polar do disco de Kasner

### 2.1 Variáveis dinâmicas

Para se desenvolver um modelo cosmológico através dos métodos da Relatividade Geral é necessário ter em vista o fluido cosmológico adotado como modificador da geometria [7]. Esta fonte de gravitação é descrita por variáveis análogas à fluidodinâmica, e dentre elas se faz notar o campo fundamental de velocidades do fluido  $u = u^a e_a$ , onde  $\{e_a\}$  é uma tétrada (referencial móvel) no espaço-tempo. Adotaremos a abordagem co-móvel, isto é, a direção  $dx_0$  é paralela ao campo de velocidades do fluido: Na notação em coordenadas isto significa  $u^a = \delta_0^a$  [7], que na teoria das EDO's se traduz na utilização do Teorema do Fluxo Tubular [1]. Neste capítulo, vamos tratar dos espaços-tempo tipo Bianchi I, que são caracterizados pela existência de 3 campos de Killing, que comutam entre si, e que são ortogonais a  $u^a$ . De forma mais específica, consideraremos apenas a sua versão diagonal (vide [3] e a Seção 1.3.4).

Definindo o tempo canônico  $t$  para os observadores em queda livre em relação ao fluido, que tem a 4-velocidade  $u = (1, 0, 0, 0) = \partial/\partial t^1$ , As variáveis geométricas podem

---

<sup>1</sup>De fato,  $u$  é geodésico, i.e,  $\nabla_u u = 0$ , implicando que seu fluxo é formado por partículas em queda livre.

ser escolhidas [3] como o parâmetro de Hubble  $H_i$ , e o tensor diagonal de cisalhamento

$$\sigma_{ij} = 2 H \Sigma \text{diag}\{\text{sen}(\alpha), \text{sen}(\alpha + 2\pi/3), \text{sen}(\alpha - 2\pi/3)\}, \quad (2.1)$$

onde

$$\Sigma = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{\sigma_{ij}\sigma^{ij}}{6}} \quad (2.2)$$

e  $\alpha$  são a **magnitude relativa da anisotropia**<sup>2</sup> e o **ângulo polar para a anisotropia** do espaço-tempo, respectivamente. Estes parâmetros detêm importância notável: Possuem interpretação física direta e, a princípio, são passíveis de observação, pois podem ser definidos em termos dos **parâmetros de Hubble**  $H_i$

$$H_k := \frac{\dot{\ell}_k}{\ell_k}, \quad H = \frac{H_1 + H_2 + H_3}{3}. \quad (2.3)$$

onde  $\ell_k(t)$  é o fator de escala na direção  $k$ , que na métrica é expresso como

$$g_{ij} dx^i dx^j = -dt^2 + \ell(t)_k^2 (dx^k)^2 \quad (2.4)$$

onde [4]

$$\ell_k = \ell_k(t_0) e^{b_k(t)/2}, \quad b_k(t) := 2 \int_{t_0}^t H (1 + 2 \Sigma \text{sen}(\alpha + \varphi_k)) dt. \quad (2.5)$$

Definimos o fator de escala isotrópicos da forma usual encontrada na literatura:

$$a = (\ell_1 \ell_2 \ell_3)^{1/3}, \quad \text{ou seja,} \quad H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.6)$$

Dessa forma, temos

$$\Sigma \text{sen}(\alpha + \varphi_i) = \frac{1}{2} \frac{H_i - H}{H}, \quad (2.7)$$

onde  $\varphi_i = 2(i - 1)\pi/3$ .

## 2.2 Equações de Einstein

O **tensor energia-momento** será apresentado em termos das variáveis fluidodinâmicas, que para o observador adotado admite a seguinte decomposição:

$$T_{ij} = \rho u_i u_j - p h_{ij} + \pi_{ij}, \quad (2.8)$$

---

<sup>2</sup>Na literatura também é chamado de “cisalhamento cósmico” ou “parâmetro de cisalhamento”

onde  $h_{ij} = g_{ij} - u_i u_j$  é o tensor de projeção no fibrado tangente da foliação  $\Sigma$ ,  $\rho$  é densidade de energia (massa inercial dividida pelo volume próprio),  $p$  é a pressão relativística e o tensor sem traço de pressão anisotrópica [3] é dado por

$$\pi_{ij} = \eta \rho \text{diag}\{\text{sen}(\alpha + \beta), \text{sen}(\alpha + \beta + 2\pi/3), \text{sen}(\alpha + \beta - 2\pi/3)\}, \quad (2.9)$$

onde

$$\eta = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{2\pi_{ij}\pi^{ij}}{3}} \quad (2.10)$$

e  $\beta$  são a **magnitude relativa da anisotropia** e a **fase da anisotropia** do fluido, respectivamente.

A dinâmica do espaço-tempo é dada através das equações de campo de Einstein, expressas na forma tensorial

$$G_j^i = R_j^i + \frac{1}{2} R g_j^i = T_j^i, \quad (2.11)$$

onde  $R_j^i$  é o tensor de curvatura Ricci, que é expresso em termos do tensor de Riemann na forma

$$R_j^i = R_{jl}^{il} = g^{kl} R_{jkl}^i = g^{kl} (\Gamma_{jl,k}^i - \Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{km}^i \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{jk}^m), \quad (2.12)$$

com

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{ij} (g_{jk,l} + g_{jl,i} - g_{kl,j}) \quad (2.13)$$

o símbolo de Cristofell e  $R = R_i^i$  o escalar de curvatura de Ricci.

Através destas equações se estabelece uma dependência entre as variáveis isotrópicas,  $H$ ,  $\rho$  e  $p$ , e as variáveis anisotrópicas (adimensionais),  $\alpha$ ,  $\eta$  e  $\beta$ . A primeira delas é obtida utilizando-se as equações (2.4) e (2.8), conhecida como Equação de Friedmann Generalizada [7]:

$$3H^2 (1 - \Sigma^2) = \rho. \quad (2.14)$$

Uma condição importante exigida sobre o tensor energia-momento  $T_{ij}$  do fluido cosmológico é a divergência nula, que é expressa pela Equação de Conservação de Energia do fluido, que decorre das equações de Einstein:

$$T^{ij}; j = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = -3H\rho (\gamma + \Sigma\eta \cos\beta), \quad (2.15)$$

$\gamma$  sendo o parâmetro barotrópico usual definido por  $p = (\gamma - 1)\rho$ , que não necessariamente é constante.

As últimas duas das Equações de Einstein fornecem fórmulas explícitas para  $\dot{\Sigma}$  e  $\dot{\alpha}$ , e foram obtidas de maneira direta nas referências [3, 8] (em [8], utilizou-se a equação de conservação (2.15) para reescrever a métrica com  $\rho$  como coordenada temporal e calculou-se novamente as componentes do tensor de Einstein). Uma modificação será feita, a fim de tornar o sistema de equações diferenciais composto por  $\dot{\Sigma}$  e  $\dot{\alpha}$  mais simples: a variável  $\rho$  será substituída por

$$s = \ln \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right), \quad (2.16)$$

que é possível sempre que  $\dot{\rho} \neq 0$ . Detalhe que esta variável apresenta interpretação física direta ao fornecer uma representação logarítmica para a densidade de energia. Assim, em termos deste novo parâmetro de evolução  $s$ , temos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{d\Sigma}{ds} = -\frac{(1 - \Sigma^2)}{2} \left( \frac{(2 - \gamma)\Sigma - \eta \cos \beta}{\gamma + \Sigma \eta \cos \beta} \right) \quad (2.17)$$

e

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{(1 - \Sigma^2)}{2\Sigma} \left( \frac{\eta \sin \beta}{\gamma + \Sigma \eta \cos \beta} \right). \quad (2.18)$$

Essas duas equações são responsáveis por descrever a dinâmica da anisotropia do espaço-tempo, e é em torno delas que boa parte deste trabalho foi realizado. Note que as equações de Einstein não fornecem, a priori, nenhuma informação sobre as derivadas das componentes da matéria, algo que só ocorre quando introduzimos as “equações de estado” complementares. No entanto, utilizando a equação de conservação, pudemos trocar a equação de  $\dot{H}$  pela de  $\dot{\rho}$ , da mesma maneira que se faz no modelo isotrópico. Porém, nenhuma informação extra é possível ser tirada somente das equações de Einstein para o comportamento de  $\dot{\beta}$  e  $\dot{\eta}$ .

Este trabalho tem por motivação analisar as nuances matemáticas do comportamento assintótico das soluções nos modelos Bianchi-I, tendo em vista possíveis aplicações à cosmologia. Precisamos então impor algumas restrições aos parâmetros de modo que os resultados tenham sentido físico. A primeira restrição que estabeleceremos para o tipo de fluido cosmológico é que este esteja em um regime de densidade de energia não negativa

( $\rho \geq 0$ ), e esta restrição é feita exigindo-se que  $-1 \leq \Sigma \leq 1$ . Desta forma  $|\Sigma|$  estabelece uma medida do grau da anisotropia do espaço-tempo, em uma escala normalizada de 0 a 1: Se  $\Sigma = 0$  então o espaço-tempo está em um regime isotrópico (este é o limite onde se recupera o espaço-tempo plano de Robertson-Walker [7]:  $3H^2 = \rho$ ), e se  $|\Sigma| = 1$  então a anisotropia atinge seu máximo no intervalo, limite representado pelas soluções de vácuo de Kasner (veja [15, 12], sendo o último o artigo onde Kasner apresenta seu modelo, que completa 100 anos em setembro deste ano de 2021). Fixando o sinal de  $\rho \geq 0$ , temos da equação (2.2) que o sinal de  $\Sigma$  acompanha o sinal de  $H$  (i.e.,  $\pm H \Rightarrow \pm \Sigma$ ), sendo então que  $0 < \Sigma \leq 1$  para um universo em expansão e  $-1 \leq \Sigma < 0$  para o caso da contração.

Esta equação permite analisar as condições de energia necessárias para que se tenha significado físico e, assim, observações possam testar a teoria: Por definição, a constante de Hubble é positiva quando há expansão e negativa quando há contração, e da conservação da energia, é de se esperar que em uma fase de expansão a densidade de energia decresça, enquanto que em uma fase de contração, a densidade de energia aumente. Logo deve valer que  $\dot{\rho}H \leq 0$ . Assim, as condições de energia são estabelecidas na forma

$$\rho \geq 0 \quad \text{e} \quad \gamma + \Sigma \eta \cos \beta \geq 0. \quad (2.19)$$

Uma outra relação importante é a de que, se  $\gamma, \eta$  e  $\beta$  são contínuas em  $\Sigma = 1$ , então podemos isolar  $H$  na equação de conservação (2.15), utilizar (2.6) e integrar para obtermos

$$\ln \left( \frac{a(t)}{a_0} \right) = - \frac{1}{3\xi_1} \int_{\rho_0}^{\rho(t)} \frac{\xi_1}{\gamma + \Sigma \eta \cos \beta} \frac{d\rho}{\rho}. \quad (2.20)$$

onde assumimos

$$\xi_1 = \lim_{\Sigma \rightarrow 1} (\gamma + \eta \cos \beta) > 0. \quad (2.21)$$

Se tomarmos  $\rho_0$  em um instante  $t_0$  em que  $\Sigma(t_0)$  está arbitrariamente próximo de 1, podemos observar que vale

$$a \rightarrow C_0 \rho^{\frac{1}{3\xi_1}} \quad \text{se} \quad \Sigma \rightarrow 1, \quad (2.22)$$

onde  $C_0$  é uma constante. Neste sentido, a desigualdade (2.19) nos garante que, em um universo primordial de Kasner,  $a \rightarrow 0$  se, e somente se,  $\rho \rightarrow \infty$ , o que é intuitivamente esperado.

Se desejamos recuperar resultados fisicamente plausíveis, os parâmetros  $\gamma$  e  $\eta$  devem possuir limites superiores e inferiores. Sob o mesmo objetivo devemos ter que o tensor energia-momento deve ser limitado comparativamente a densidade de energia, isto é,  $\rho \rightarrow 0$  deve ser seguido de  $T_{\mu\nu} \rightarrow 0$ , anulando resultados sem significado físico quando  $\rho = 0$ . Dessas restrições, segue-se que a única possibilidade para  $\Sigma = 1$  é uma solução de vácuo de Kasner. De fato, não se espera (excetuando-se possíveis situações pouco gerais, que estão fora do escopo deste trabalho) que o sistema tenha alguma relevância física fora do domínio  $0 \leq \sup\{\eta, \gamma\} \leq 2$ .

No decorrer deste trabalho, será frequente nos referirmos à representação “cartesiana” do disco de Kasner, que é dada pelas variáveis

$$x = \Sigma \cos \alpha \quad y = \Sigma \operatorname{sen} \alpha . \quad (2.23)$$

Neste caso, as equações (2.17) e (2.18) são escritas como

$$\frac{dx}{ds} = \frac{(1 - x^2 - y^2) \left[ \eta \operatorname{sen}(\beta) y + \left( \eta \cos \beta + (2 - \gamma) \sqrt{x^2 + y^2} \right) x \right]}{2 \left( \gamma \sqrt{x^2 + y^2} + \eta \cos \beta (x^2 + y^2) \right)} \quad (2.24)$$

e

$$\frac{dy}{ds} = \frac{(1 - x^2 - y^2) \left[ \eta \operatorname{sen}(\beta) x + \left( \eta \cos \beta + (2 - \gamma) \sqrt{x^2 + y^2} \right) y \right]}{2 \left( \gamma \sqrt{x^2 + y^2} + \eta \cos \beta (x^2 + y^2) \right)} . \quad (2.25)$$

Estas equações serão importantes na construção dos retratos de fase que apresentaremos ao longo deste texto, construídos através de linhas de comando no software Mathematica (apresentadas em 3.5.4).

## 2.3 Disco de Kasner em coordenadas polares

Em se tratando da aplicação dos métodos de sistemas dinâmicos na construção de modelos cosmológicos [16], uma importante ferramenta é o disco de Kasner. Neste trabalho, após introduzir novas variáveis dinâmicas, utilizamos uma nova representação do disco de Kasner, agora em forma polar [4].

Para definirmos o disco de Kasner, vamos rever como os espaços-tempo tipo Bianchi-I são usualmente tratados na literatura [5, 16]. Definindo como  $\kappa$  a segunda forma fundamental da geometria do espaço-tempo e  $g_{ij}$  ( $i, j \in 1, 2, 3$ ) as componentes espaciais de sua métrica, introduzimos as seguintes variáveis geométricas (sem notação de soma):

$$H = -\frac{tr\kappa}{3}, \quad \bar{x} = g^{11} + g^{22} + g^{33}, \quad \bar{\Sigma}_i = -\frac{\kappa_i^i}{H} - 1 \quad \text{e} \quad s_i = \frac{g^{ii}}{\bar{x}} \quad (2.26)$$

onde  $\bar{\Sigma}_i$  e  $\bar{s}_i$  satisfazem ao seguinte vínculo:

$$\bar{\Sigma}_1 + \bar{\Sigma}_2 + \bar{\Sigma}_3 = 0, \quad \bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \bar{s}_3 = 1. \quad (2.27)$$

As variáveis que descrevem o fluido cosmológico são definidos como:

$$\Omega = \frac{\rho}{3H^2}, \quad \bar{\omega}_i = \frac{p_i}{\rho}, \quad \bar{\omega} = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3}{3} = \frac{p}{\rho}, \quad (2.28)$$

onde os  $\bar{\omega}_i$ 's são chamadas de pressões principais reescaloadas (medem o grau de anisotropia da matéria, de modo que no caso isotrópico vale que  $\bar{\omega}_i = \bar{\omega}$ ,  $\forall i \in 1, 2, 3$ ). Nestas variáveis, representando a derivada em  $t$  pelo “prime”, as equações de Einstein podem ser expressas nas quatro seguintes (compare com as equações (2.14)-(2.18), que estão sendo utilizadas neste trabalho):

$$H' = -3H \left( 1 - \frac{\Omega(1 - \bar{\omega})}{2} \right), \quad (2.29)$$

$$\bar{x}' = -2\bar{x} \left( 1 + \sum_k \bar{s}_k \bar{\Sigma}_k \right), \quad (2.30)$$

$$\bar{\Sigma}_i' = -3\Omega \left( \frac{(1 - \bar{\omega})\bar{\Sigma}_i}{2} - (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}) \right), \quad (2.31)$$

$$\bar{s}_i' = -2\bar{s}_i \left( \bar{\Sigma}_i - \sum_k \bar{s}_k \bar{\Sigma}_k \right). \quad (2.32)$$

Pode-se mostrar que

$$\Omega = 1 - \sum_i^3 \frac{\bar{\Sigma}_i^2}{6} \Rightarrow 0 \leq \Omega \leq 1. \quad (2.33)$$

O espaço de estados do sistema de equações diferenciais formado pelas equações (2.31) e (2.32) é um conjunto aberto limitado e conexo do espaço-tempo quadridimensional

definido pelo produto cartesiano  $\mathcal{X} = \mathcal{K} \times \mathcal{T}$ , onde:

$$\mathcal{K} = \left\{ (\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2, \bar{\Sigma}_3) \mid (\bar{\Sigma}^2 < 1) \wedge \left( \sum_k \bar{\Sigma}_k = 0 \right) \right\}, \quad (2.34)$$

$$\mathcal{T} = \left\{ (\bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \bar{s}_3) \mid (0 < \bar{s}_i < 1, \forall i) \wedge \left( \sum_k \bar{s}_k = 1 \right) \right\}. \quad (2.35)$$

O fecho do conjunto  $\mathcal{K}$  é conhecido como **disco de Kasner** e está representado na Figura 2.3.1. O seu bordo, dado por

$$\partial\mathcal{K} = \{(\bar{\Sigma}^2 = 1) \wedge (\bar{\Sigma}_1 + \bar{\Sigma}_2 + \bar{\Sigma}_3 = 0)\}, \quad (2.36)$$

é conhecido como círculo de Kasner (Seção 1.6) e contém seis pontos importantes chamados de pontos LRS (abreviação de “Locally Rotationally Symmetric”, designando um tipo especial de simetria apresentada pela geometria deste espaço-tempo). Este conjunto de seis pontos ( $\{T_1, T_2, T_3, Q_1, Q_2, Q_3\} \subset \partial\mathcal{K}$ ) é composto por três pontos de chamados pontos de Taub  $T_1, T_2, T_3$  (dados por  $(\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2, \bar{\Sigma}_3) = (2, -1, -1)$  e permutações) e três pontos chamados de LRS não-planos  $Q_1, Q_2, Q_3$  (dados por  $(\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2, \bar{\Sigma}_3) = (-2, 1, 1)$  e permutações). Estes pontos dividem  $\mathcal{K}$  em seis regiões, que denotaremos pelas permutações de  $\langle 123 \rangle$ .

De uma forma muito mais simples, e envolvendo variáveis com apelo observacional, do ponto de vista cosmológico, podemos expressar esse formalismo da seguinte maneira:

$$\Omega = 1 - \Sigma^2, \quad (2.37)$$

de (2.7) podemos escrever

$$\bar{\Sigma}_k = \frac{H_k - H}{H} = 2\Sigma \sin(\alpha + \varphi_k) \quad (2.38)$$

e o disco de Kasner pode ser representado simplesmente por

$$\bar{\mathcal{K}} \cong \{(\Sigma, \alpha) \mid |\bar{\Sigma}| \leq 1\}. \quad (2.39)$$

No entanto a dinâmica da anisotropia é descrita de forma conveniente através de sua “projeção” na representação polar do disco de Kasner [4], onde  $\Sigma$  passa a representar a

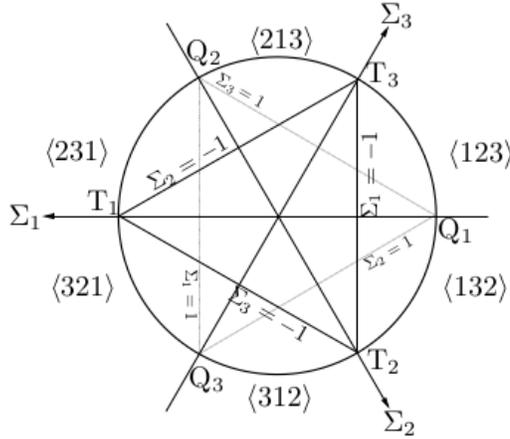


Figura 2.1: Disco de Kasner com os pontos LRS e as regiões que delimitam (figura utilizada de [5]).

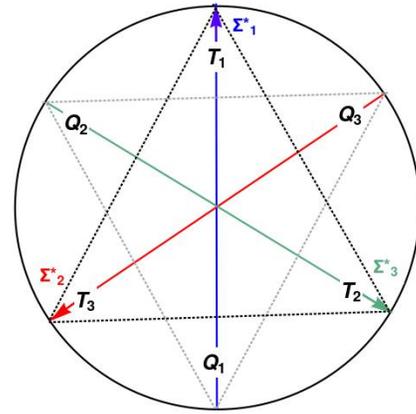


Figura 2.2: Os pontos LRS na representação polar do disco de Kasner.

coordenada “radial” (que nessa nova descrição será tal que  $0 \leq \Sigma \leq 1$ ) e  $\alpha$  o ângulo polar. Esta nova representação é posta, em comparação com o modelo usual, na Figura 2.3.2.

Nesta representação, o centro do disco ( $\Sigma = 0$ ) caracteriza o ponto isotrópico, onde a variedade é modelada pelo espaço-tempo plano de FLRW<sup>3</sup>, enquanto que nos pontos do círculo de Kasner (caracterizado por  $\Sigma = 1$ ) o espaço-tempo será modelado pelas soluções de vácuo de Kasner [7, 12] (Seção 1.6) (cada ponto representa uma solução de vácuo de Kasner). Como fica claro da Figura 2.2, os pontos LRS não-planos ficam no círculo de Kasner com  $\alpha = \pi/6, 5\pi/6$  e  $3\pi/2$ , e os pontos de Taub com  $\alpha = \pi/2, 7\pi/6$  e  $11\pi/6$ .

A nossa abordagem neste trabalho será a análise da parte descrita pelos parâmetros  $\Sigma$  e  $\alpha$  da dinâmica global da anisotropia, na representação polar do disco de Kasner<sup>4</sup> (Figura 2.3.3). Uma atenção especial será dada ao comportamento da frequência angular  $\omega$ , que

<sup>3</sup>Existem soluções com  $\Sigma = 1$ ,  $p \neq 0$  e  $\rho = 0$ . Elas se anulam quando, por exemplo, tomamos  $\gamma$  e  $\eta$  limitados. Também é possível obter soluções com anisotropia e que passam por  $\Sigma = 0$  mas não se acumulam neste ponto. O comportamento excepcional em  $\Sigma = 1$  e  $\Sigma = 0$  simultaneamente é improvável e, em geral, sem significado físico.

<sup>4</sup>Ao qual vamos nos referir simplesmente por “disco de Kasner”, sempre que não houver possibilidade de ambiguidade.

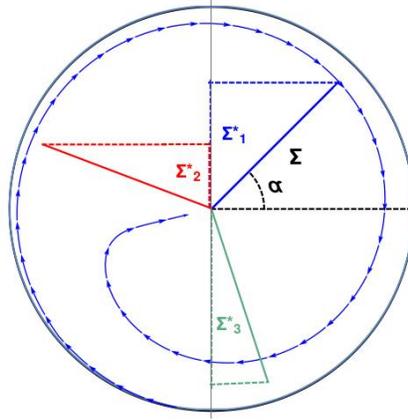


Figura 2.3: A dinâmica no disco de Kasner polar ( $\Sigma_k = 2 \Sigma_k^*$ ).

de acordo com as equações (2.15) e (2.18), é dado por

$$\omega := \dot{\alpha} = \frac{3}{2} \eta H (1 - \Sigma^2) \frac{\text{sen} \beta}{\Sigma}. \quad (2.40)$$

É interessante observar que se  $\omega$  está afastado do zero<sup>5</sup> significa que a razão  $\ell_k/\ell_m$  não cresce de forma acentuada para nenhuma escolha de  $k$  e  $m$ , mas ao invés disso ele oscila com períodos onde  $\dot{\ell}_k > \dot{\ell}_m$  ou  $\dot{\ell}_m > \dot{\ell}_k$ , de modo que não é possível distinguir direções preferenciais ou comportamentos descritos na literatura como “panqueca” ou “cigarro” [7].

## 2.4 Comportamento assintótico das soluções

Nesta seção apresentaremos uma discussão sobre dinâmica da anisotropia no disco de Kasner, tendo como ferramenta principal a nova representação do disco. Vamos examinar as condições gerais do conteúdo de matéria sob as quais se produz um comportamento oscilatório assintótico. Por assintótico estamos nos referindo ao chamados “ $\alpha$ -limite” e “ $\omega$ -limite” na teoria das EDO’s, i.e., a  $t \rightarrow t_-$  e  $t \rightarrow t_+$ , respectivamente, onde  $(t_-, t_+)$  é o intervalo maximal das soluções das Equações de Einstein. Temos dois comportamentos característicos: O tipo “mixmaster” (Figura 2.4.1), onde o universo oscila próximo de diferentes modelos tipo Kasner ( $|\Sigma| = 1$ ), e do tipo pulsação (Figura 2.4.2), onde as soluções apresentam comportamento oscilatório nas vizinhanças do ponto isotrópico ( $\Sigma =$

---

<sup>5</sup>Vide Definição 2.4.2

0). Analisaremos também os casos intermediários.

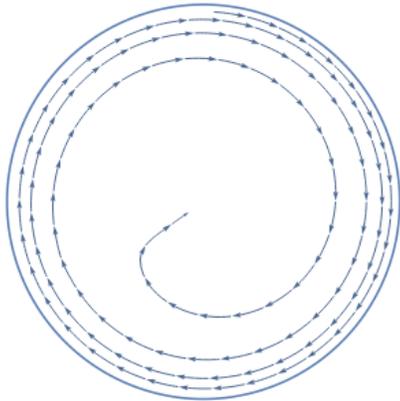


Figura 2.4: Representação do comportamento mixmaster no passado e isotrópico no futuro.

As setas indicam o sentido positivo de  $t$ .

Notamos que a Figura 2.4 apresenta a representação desejada para o caso mixmaster, mas a Figura 2.5 pode estar também representando o caso mixmaster.

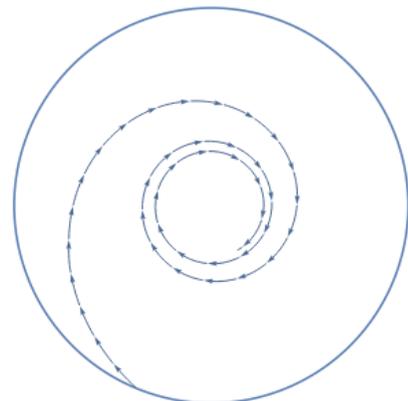


Figura 4.5: Representação do comportamento Kasner no passado e pulsante no futuro.

Nesta seção estaremos interessados em estabelecer os aspectos matemáticos da teoria. Considere, então, a projeção de uma solução das Equações de Einstein no disco de Kasner,  $(\Sigma, \alpha) : (t_-, t_+) \rightarrow \Sigma$ ,  $t \mapsto (\Sigma(t), \alpha(t))$ , composto pelas equações (2.17) e (2.18), em seu intervalo maximal  $(t_-, t_+) \subset \mathbb{R}$ , com frequência angular  $\omega : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $t \mapsto \omega(t) = d\alpha(t)/dt$ .

**Definição 2.4.1.** *Uma solução do sistema descrito acima será dita:*

- (a) **Isotrópica** no passado (futuro) se  $\Sigma \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow t_-$  ( $t \rightarrow t_+$ ).
- (b) **Kasner** no passado (futuro) se  $\Sigma \rightarrow 1$  quando  $t \rightarrow t_-$  ( $t \rightarrow t_+$ ).
- (c) **Oscilatória** no passado (futuro) se existem uma constante  $\Omega > 0$  real e uma sequência estritamente decrescente (crescente)  $\{t_n\} \rightarrow t_-$  ( $t_+$ ) tal que  $|\omega(t_n)| \geq \Omega$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .  
Este comportamento é dividido em duas classes:

- i) **Fortemente<sup>6</sup> mixmaster** no passado (futuro) se é Kasner e oscilatória no passado (futuro).
- ii) **Pulsante** no passado (futuro) se é isotrópica e oscilatória no passado (futuro).

Esta definição permite analisar o comportamento assintótico das soluções sob dois pontos de vista: O modelo cosmológico para o qual as soluções se aproximam e o comportamento oscilatório assintótico destas soluções.

A primeira coisa a se observar é a relação entre  $\omega$  e a definição de comportamento oscilatório: Se uma solução não apresenta comportamento oscilatório no passado (futuro) assintótico, então  $\omega(t_n) \rightarrow 0 \forall t_n \rightarrow t_- (t_n \rightarrow t_+)$ . No entanto, haverá comportamento oscilatório quando existir uma constante  $\Omega \neq 0$  tal que  $\omega(t) \rightarrow \Omega$  ou quando o limite não estiver bem definido.

Vamos agora estabelecer o primeiro resultado geral, que apresenta o comportamento oscilatório das soluções das Equações de Einstein no passado assintótico, para o universo em expansão, com hipóteses de conteúdo físico satisfazendo boas condições de energia. Para isso relembremos um conceito geral sobre funções:

**Definição 2.4.2.** *Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **estar afastada** (“bounded away”) de um  $y_0 \in \mathbb{R}$  se existir um  $\delta \geq 0$  tal que  $|f(x) - y_0| > \delta \forall x \in D$ .*

**Teorema 2.4.1.** *Considere  $(\Sigma, \alpha) : (t_-, t_+) \rightarrow \overline{\mathcal{K}}$  como descrito anteriormente, em seu intervalo maximal, e tome  $T > t_-$ , real, tal que no intervalo  $(t_-, T)$ :*

- i)  $H > 0$  (universo em expansão);
- ii)  $0 < \Sigma < 1$ ;
- iii)  $\gamma$  e  $\eta$  são limitadas.

Segue que:

(a) *Se a solução é tipo Kasner no passado, com  $\xi_+$  uma constante real tal que*

$$\gamma + \eta \cos \beta \leq \xi_+ < 1 \tag{2.41}$$

---

<sup>6</sup>Aqui vamos estabelecer uma distinção do comportamento mixmaster geral. Por simplicidade vamos nos referir a este caso apenas como mixmaster.

no intervalo  $(t_-, T)$  e se  $\lim_{t \rightarrow t_-} a(t) = 0$ , então a solução é não oscilatória no passado.

(b) Se a solução é tipo Kasner no passado, com  $\xi_-$  uma constante real tal que

$$1 < \xi_- \leq \gamma + \eta \cos \beta \quad (2.42)$$

ao longo do intervalo  $(t_-, T)$  e se  $\lim_{t \rightarrow t_-} \eta \sin \beta \neq 0$ , então a solução é do tipo mixmaster no passado. No regime  $t \rightarrow t_-$ , se  $\eta \sin \beta$  está afastada do zero quando  $a \rightarrow 0$  então  $|\omega| \rightarrow \infty$ .

(c) Assuma  $\gamma \geq 0$ . Se a solução não é do tipo Kasner no passado, de modo que  $\Sigma$  está afastada de 1 no intervalo  $(t_-, T)$ , e se o limite para  $\eta \sin \beta$ , caso exista, é não nulo, então a solução é do tipo oscilatória no passado. Neste caso, se a solução for isotrópica no passado com  $\eta \sin \beta$  afastado de zero, então  $|\omega| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow t_-$  (pulsante).

*Demonstração.* Defina  $u : (t_-, T) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\dot{u} = -3uH(\gamma + \eta \cos \beta) \quad (2.43)$$

Das hipóteses  $H > 0$  e  $\gamma + \eta \cos \beta$  ser limitado, podemos dividir a equação (2.43) por  $3uH$ , donde temos que

$$3H\xi_- \leq -\frac{\dot{u}}{u} \leq 3H\xi_+. \quad (2.44)$$

Integrando esta inequação de  $t \in (t_-, T)$  até  $T$ , pelas definições da função de Hubble e  $u(t)$ , temos que

$$\left(\frac{a(T)}{a(t)}\right)^{3\xi_-} \leq \frac{u(t)}{u(T)} \leq \left(\frac{a(T)}{a(t)}\right)^{3\xi_+}. \quad (2.45)$$

Defina agora a aplicação  $z : (t_-, T) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$\rho = u a^3 H e^z. \quad (2.46)$$

Das Equações de Einstein (2.14)-(2.18) temos:

$$\dot{\Sigma} = -\frac{3}{2}H(1 - \Sigma^2) \left( (2 - \gamma)\Sigma - \eta \cos \beta \right), \quad (2.47)$$

$$\dot{H} = -\frac{3}{2} H^2 \left( (1 - \Sigma^2) \gamma + 2\Sigma^2 \right) \quad (2.48)$$

e

$$\dot{z} = -\frac{3}{2} H (1 - \Sigma) \left( (2 - \gamma) (1 + \Sigma) - 2\eta \cos \beta \right). \quad (2.49)$$

Observando as quantidades limitadas superior e inferiormente, existem constantes  $c_3, c_4$  tais que

$$2c_3 \leq (1 - \Sigma) \left( (2 - \gamma) (1 + \Sigma) - 2\eta \cos \beta \right) \leq 2c_4. \quad (2.50)$$

Multiplicando por  $3H/2$ ,

$$3Hc_3 \leq -\dot{z} \leq 3Hc_4. \quad (2.51)$$

Integrando-se de  $t$  a  $T$ , temos,

$$\left( \frac{a(T)}{a(t)} \right)^{3c_3} \leq e^{z(t)-z(T)} \leq \left( \frac{a(T)}{a(t)} \right)^{3c_4}. \quad (2.52)$$

Utilizando agora as equações (2.45), (2.52) em (2.46), obtemos

$$\left( \frac{a(t)}{a(T)} \right)^{3(1-\xi_- - c_3)} \leq \frac{\rho(t)}{H(t)} \frac{H(T)}{\rho(T)} \leq \left( \frac{a(t)}{a(T)} \right)^{3(1-\xi_+ - c_4)}. \quad (2.53)$$

Em outras palavras, existem constantes positivas  $A_0$  e  $B_0$  tais que, multiplicando-se a desigualdade acima por  $|\eta \operatorname{sen} \beta / 2\Sigma|$ :

$$A_0 \left| \frac{\eta \operatorname{sen} \beta}{2\Sigma} \right| a^{3(1-\xi_- - c_3)} \leq \frac{\rho}{H} \left| \frac{\eta \operatorname{sen} \beta}{2\Sigma} \right| \leq B_0 \left| \frac{\eta \operatorname{sen} \beta}{2\Sigma} \right| a^{3(1-\xi_+ - c_4)}. \quad (2.54)$$

Mas de acordo com a definição da velocidade angular em (2.40) e a equação de Friedmann em (2.14), o termo ao centro desta desigualdade pode ser escrito simplesmente como  $|\omega|$ , provando que, para  $t_- < t < T$ ,

$$A_0 \left| \frac{\eta \operatorname{sen} \beta}{\Sigma} \right| a^{3(1-\xi_- - c_3)} \leq |\omega| \leq B_0 \left| \frac{\eta \operatorname{sen} \beta}{\Sigma} \right| a^{3(1-\xi_+ - c_4)}. \quad (2.55)$$

Se a solução de Kasner está no passado (o retrato de fase se afasta da borda do disco de Kasner no sentido positivo do tempo), pela equação (2.50) podemos tornar  $c_3$  e  $c_4$  tão pequenos quanto necessário tomando  $T$  tal que  $(1 - \Sigma)$  se torne pequeno o suficiente (a coordenada radial não se afasta muito do bordo do disco de Kasner), de modo que  $c_3$  e  $c_4$  não afetarão os sinais de  $1 - \xi_-$  ou  $1 - \xi_+$ . Portanto, quando  $t \rightarrow t_-$ , se  $\xi_+ < 1$  e  $a \rightarrow 0$ , então  $\omega \rightarrow 0$ . Fica provada então o item *a)* do Teorema.

O segundo item do Teorema é demonstrado de maneira análoga ao notar-se que, no caso em que  $1 < \xi_-$ , a condição de que  $\eta \text{sen} \beta$  não converge para 0 implica a existência de uma sequência de tempos  $t_n \rightarrow t_-$  tal que existem

$$\Omega_n = A_0 \left| \frac{\eta(t_n) \text{sen} \beta(t_n)}{\Sigma(t_n) a(t_n)^{3(\xi_- + c_3 - 1)}} \right| \leq |\omega(t_n)|$$

afastados do zero. Aqui estamos usando que  $H > 0$  implica  $a(t)$  limitado em  $(t_-, T)$ , pois  $a > 0$  é contínua em  $(t_-, T]$  e  $\dot{a} > 0$  em  $(t_-, T)$ . Isto demonstra que a solução é oscilatória no passado e que, se  $\eta(t) \text{sen} \beta(t)$  está afastada do zero, a fórmula acima para  $\Omega_n$  vale para todo  $t < T$ , demonstrando a última afirmação do segundo item do Teorema.

Ainda, se existe  $\Sigma_-$  constante tal que  $0 \leq \Sigma \leq \Sigma_- < 1$  ao longo de  $(t_-, T)$ , da velocidade angular (equação (2.40)), a condição  $\eta \text{sen} \beta$  não converge para 0 implica que existe uma sequência  $t_n \rightarrow t_-$  tal que

$$\omega(t_n) = \frac{3}{2} H(t_n) (1 - \Sigma(t_n)^2) \frac{\eta(t_n) \text{sen} \beta(t_n)}{\Sigma(t_n)}$$

está afastada do zero (aqui usamos que, da equação (2.48),  $\gamma \geq 0$  implica que  $\dot{H} \leq 0$ , ou seja,  $H \geq H(T) > 0$  em  $(t_-, T)$ ). Veja agora que se  $\eta \text{sen} \beta$  é esta afastada do zero e  $\Sigma \rightarrow 0$  então  $|\omega| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow t_-$ . Isto completa a prova do Teorema.  $\square$

De maneira análoga vamos estabelecer um teorema geral para o comportamento assintótico das soluções no futuro:

**Teorema 2.4.2.** *Considere a projeção  $(\Sigma, \alpha) : (t_-, t_+) \rightarrow \bar{\mathcal{K}}$  de uma solução das Equações de Einstein, em seu intervalo maximal e tome  $T < t_+$  real tal que, no intervalo  $(T, t_+)$ :*

- i)  $H > 0$  (universo em expansão);*
- ii)  $0 < \Sigma < 1$ ;*
- iii)  $\gamma$  e  $\eta$  são limitadas.*

*Segue que:*

*(a) Suponha que a solução seja isotrópica no futuro e  $\eta$  esteja afastada do zero. Se*

$$\cos \beta \leq \cos \beta_- < 0 \tag{2.56}$$

*em  $(T, t_+)$  para algum  $\beta_-$  fixo e se  $\lim_{t \rightarrow t_+} \text{sen} \beta \neq 0$  então a solução é pulsante no futuro.*

(b) Se a solução é isotrópica no futuro,  $\eta$  está afastada do zero,  $t_+ = \infty$ <sup>7</sup> e

$$\cos \beta \geq \cos \beta_+ > 0 \quad (2.57)$$

em  $(T, \infty)$  para algum  $\beta_+$  fixado, então a solução é do tipo não-oscilatória no futuro.

(c) Assumindo que  $t_+ = \infty$ , se  $\Sigma$  está afastada do zero com  $\gamma \geq 0 \forall t > T$ , então a solução é do tipo não-oscilatória no futuro.

*Demonstração.* Assuma que  $\Sigma \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow t_+$ . Definindo a função  $v : (T, t_+) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$v(t) = \frac{\Sigma(t)}{H(t)},$$

e a função limitada  $A : (T, t_+) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$A(t) = 3(\gamma - 1) - \frac{3}{2}(\eta \cos \beta) \Sigma + 3(2 - \gamma) \Sigma^2 \quad (2.58)$$

temos, das equações (2.47) e (2.48), que

$$\omega = \frac{3}{2}(1 - \Sigma^2) \frac{\eta \text{sen} \beta}{v} \quad \text{com} \quad \dot{v} = \frac{3}{2} \eta \cos \beta + \Sigma A. \quad (2.59)$$

Assuma que  $\eta \geq \eta_{min} > 0$  para alguma constante  $\eta_{min}$ . Se  $\cos \beta \leq \cos \beta_- < 0$ , então  $v(t)$  decresce até uma vizinhança do ponto isotrópico. Como  $\text{sen} \beta$  não converge para 0 no limite em que  $t \rightarrow t_+$ , deve existir uma sequência  $\{t_n\}$  tal que  $\omega(t_n)$  é está afastada de zero. Isto prova o primeiro item do teorema.

Por outro lado, se  $\cos \beta \geq \cos \beta_+ > 0$ , do Teorema do Valor Médio, concluímos que  $v(t) - v(T) \geq B(t^*)(t - T)$  qualquer que seja  $t > T$ , para algum  $T < t^* < t$ , onde  $B(t) = \eta_{min} \cos \beta_+ + \Sigma(t) A(t)$ . Como  $A$  é limitada, podemos tomar  $T$  tal que  $B(t) > \epsilon > 0$  para todo  $t > T$ ,  $\epsilon$  constante. Portanto, como  $t \rightarrow \infty$ , temos que  $\omega \rightarrow 0$ . Isto prova o segundo item do Teorema.

Assuma agora que  $0 < \epsilon < \Sigma$  e  $\gamma \geq 0$  em  $(T, t_+)$ , com  $\epsilon$  constante. Com isso deve existir um  $\epsilon_-$  constante tal que, da equação (2.48),

$$0 < \epsilon_- \leq -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2}((1 - \Sigma^2) \gamma + 2\Sigma^2).$$

---

<sup>7</sup>Em geral a condição  $t_+ = \infty$  é válida pois as variáveis dinâmicas, como  $\rho$  e  $H$ , por exemplo, vão, em geral, estar bem definidas em um compacto para  $t > T$ .

Definindo  $c = 1/H(T)$  e integrando de  $T$  a  $t$ , com  $t > T$ , temos que

$$0 < H(t) \leq \frac{1}{\epsilon_-(t-T) + c} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 0.$$

Como, por hipótese,  $\Sigma(t) > \epsilon$ , concluímos que  $\omega \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Isto prova o último item do Teorema e conclui a demonstração.  $\square$

# Capítulo 3

## Modelos fenomenológicos

Neste capítulo vamos recuperar, de maneira geral, alguns modelos de universo com fonte de matéria apresentando características distintas, especificando a fonte de matéria na forma de equações de estado descritas fenomenologicamente. Este método é justificado pela diferença entre a quantidade de equações, 4, e variáveis, 7, nas Equações de Einstein, de modo que vamos precisar de mais 3 equações independentes nas mesmas variáveis, a saber,

$$p = p(\rho, H_1, H_2, H_3) \quad \text{e} \quad \pi_{ij} = \pi_{ij}(\rho, H_1, H_2, H_3). \quad (3.1)$$

Estas equações apresentam a forma funcional da pressão (isotrópica e anisotrópica) em termos da densidade de energia e dos parâmetros de Hubble, consistindo então na forma fenomenológica mais geral em que essas quantidades possam ser expressas. De acordo com as relações (2.7), o vínculo (2.14) e a definição dada para a variável  $s$  na equação (2.16), existe uma equivalência entre aquelas equações anteriores e assumir as equações de estado algebricamente dadas na forma

$$\gamma = \gamma(s, \Sigma, \alpha), \quad \eta = \eta(s, \Sigma, \alpha) \quad \text{e} \quad \beta = \beta(s, \Sigma, \alpha). \quad (3.2)$$

Esta escolha particular tem motivações físicas e por isto será adotada nas análises subsequentes.

Do ponto de vista matemático, a dinâmica é bem representada no disco de Kasner na forma reduzida a um sistema de equações diferenciais no plano dado por (2.17) , (2.18)

e (3.2). As condições de existência, unicidade e de dependência contínua nas condições iniciais são obtidas de forma razoavelmente fácil dos resultados canônicos da Teoria das Equações Diferenciais [1]. Deste modo as variáveis utilizadas no disco de Kasner em sua forma polar descrevem toda a dinâmica do sistema. Veja que, se  $(\Sigma(s), \alpha(s))$  é uma solução maximal para o sistema de equações diferenciais, então após mudarmos de “ $s$ ” para “ $\ln(\rho_0/\rho)$ ” como definido na equação (2.16), podemos recuperar a variável temporal canônica  $t$  pela integração em  $\rho$  da equação de conservação (2.15)<sup>1</sup>,

$$t = t_0 \pm \int_{\rho_0}^{\rho(t)} \sqrt{\frac{1 - \Sigma^2}{3\rho^3}} \frac{d\rho}{\gamma + \Sigma\eta \cos \beta}, \quad (3.3)$$

onde  $\pm$  denota o sinal de  $-H$ , e esta equação também tem a importância de apresentar, ainda que de forma implícita, a solução para  $\rho(t)$ , ou seja, a distribuição da densidade de energia do universo ao longo do tempo. Por fim, a solução das Equações de Einstein é dada pela métrica (2.4) onde

$$b_{k+1}(t) := -\frac{2}{3} \int_{\rho_0}^{\rho(t)} \left( \frac{1 + 2\Sigma \sin(\alpha + 2k\pi/3)}{\gamma + \Sigma\eta \cos \beta} \right) \frac{d\rho}{\rho}. \quad (3.4)$$

Este é um esquema poderoso de derivar soluções exatas para os espaço-tempo de Bianchi-I (vide [9]), que envolve apenas parâmetros físicos e observacionais. Alcançados estes resultados, vamos agora abordar alguns casos da literatura.

### 3.1 A solução geral para o fluido perfeito barotrópico

A classe de exemplos mais simples, e por isso a primeira a que costuma-se lidar na literatura [15], é o caso geral do fluido perfeito barotrópico. Este caso se exprime por condições específicas no conteúdo de matéria:  $\pi_{ij} = 0$  ( $\eta = 0$ ), de modo que  $T_j^i = \text{diag}\{\rho, p, p, p\}$ , e  $p = p(\rho)$ . Da equação (2.40) temos  $\omega = \dot{\alpha} = 0$ , de modo que o retrato de fase para o fluido perfeito barotrópico é representada no disco de Kasner por retas radiais passando pela origem (Figura 1.2). Da equação (3.3), usando que  $\gamma(\rho) = 1 + p(\rho)/\rho$  em  $\Sigma(\rho)$ , a

---

<sup>1</sup>Veja que cada termo na integral apresenta dependência funcional na variável  $\rho$ , logo dada  $(\Sigma(\rho), \alpha(\rho))$  recuperamos  $\gamma(\rho)$ ,  $\eta(\rho)$  e  $\beta(\rho)$  nas equações em (3.2).

solução para o tempo cósmico assume a forma ([9], tomando  $\lambda = 2\Sigma$ ):

$$t = t_0 \pm \int_{\rho_0}^{\rho(t)} \sqrt{\frac{1 - \Sigma(\rho)^2}{3\rho}} \frac{d\rho}{\rho + p(\rho)}, \quad (3.5)$$

onde,

$$\Sigma(\rho) = \frac{\Sigma_0}{\sqrt{\Sigma_0^2 + (1 - \Sigma_0^2) e^{-G(\rho)}}} \quad \text{e} \quad G(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho' - p(\rho')}{\rho' + p(\rho')} \frac{d\rho'}{\rho'}. \quad (3.6)$$

Ainda, a métrica será determinada por (3.4) utilizando  $\eta = 0$ ,  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\gamma(\rho) = 1 + p(\rho)/\rho$  e  $\Sigma$  como em (3.6).

**Exemplo 1.** *No caso em que  $\gamma = \gamma_0 \neq 2$  e é constante, integrando a equação (2.17) na variável  $s$  e então mudando para a variável  $\rho$  através de (2.16), obtemos  $\rho(\Sigma)$  na forma*

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{\Sigma^2 (1 - \Sigma_0^2)}{\Sigma_0^2 (1 - \Sigma^2)} \right)^{\kappa_1}, \quad (3.7)$$

onde  $\kappa_1 = \frac{\gamma_0}{(2-\gamma_0)}$ . Como  $\eta = 0$ , este caso não está sob as hipóteses dos Teoremas 2.4.1, 2.4.2. Para analisar o comportamento assintótico das soluções neste caso vamos realizar o processo de limite na variável  $\Sigma$  da equação (3.7): Se  $0 < \gamma < 2$ , no limite para as épocas tipo Kasner ( $\Sigma \rightarrow 1$ ) a densidade de energia torna-se arbitrariamente grande, ao passo que no limite para a época tipo isotrópica ( $\Sigma \rightarrow 0$ ) a densidade de energia tende à zero (vide Figuras 3.1 e 3.2). Este comportamento assintótico é comumente associado ao contexto dos modelos tipo Bianchi-I [16]. Como o caso  $\gamma \in \mathbb{R} - (0, 2)$  viola condições de energia, não vamos abordar este caso. Mais detalhes (incluindo checagem de consistência com casos da literatura [11, 15]), são apresentados em [4].

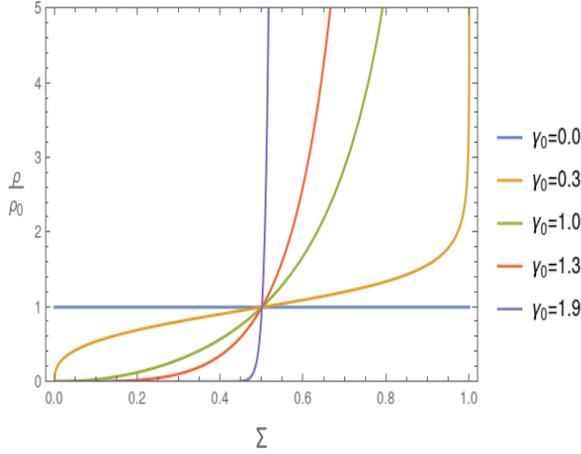


Figura 3.1:  $\rho(\Sigma)$  com  $\gamma$  constante  
( $\Sigma_0 = 0.5$ ).

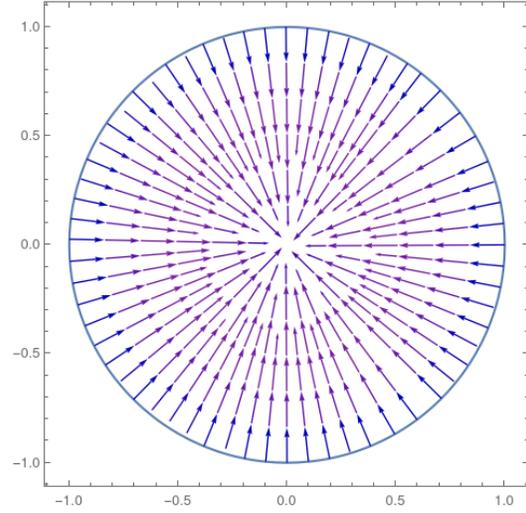


Figura 3.2: Disco de Kasner  
para  $\gamma = 1.3$ .

**Exemplo 2.** Vamos agora abordar um exemplo com a seguinte propriedade: Quando a solução se aproxima de períodos próximos ao início do universo, o conteúdo de matéria vai se tornando tipo mais densa (conhecida como “stiff matter”, ou “matéria dura”),  $\rho \rightarrow \infty$  e  $\gamma \rightarrow 2$ , ao passo que quando a solução se aproxima do  $t \rightarrow \infty$ , o conteúdo de matéria vai se tornando tão pouco densa que não há mais colisão entre as partículas que a compõe,  $\rho \rightarrow 0$  e  $\gamma \rightarrow 1$ <sup>2</sup> (Figura 3.3). Este modelo é de interesse, pois representa um dos comportamentos creditados como mais prováveis em um universo em expansão [7]: O fluido cosmológico estava todo concentrado em uma pequena região no início e terminará completamente esparsado no futuro, com o mínimo de interação entre as componentes da matéria. Uma maneira direta de estabelecer este “toy model” é escolhendo

$$p = \frac{\rho^2}{\rho + \rho_0} \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{2\rho + \rho_0}{\rho + \rho_0}. \quad (3.8)$$

Assim, a equação (3.6) é expressa na forma

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{(1 - \Sigma_0^2)\Sigma^2}{(2 + \Sigma_0^2)(\Sigma_M^2 - \Sigma^2)}, \quad \text{onde} \quad \Sigma_M = \Sigma_0 \sqrt{\frac{3}{2 + \Sigma_0^2}}, \quad (3.9)$$

<sup>2</sup>Uma descrição mais detalhada destes e de outros casos clássicos de fluidos perfeitos pode ser consultada em [15]

na região  $0 \leq \Sigma < \Sigma_M$  (Figura 3.4). Na região  $\Sigma_M \leq \Sigma < 1$ , pela equação (3.9), constata-se que há uma inversão no sinal de  $\Sigma$ , mas na equação de Friedmann (equação 2.14) isto implica que  $H^2 < 0$ , o que foge do escopo deste trabalho onde  $H$  é real.

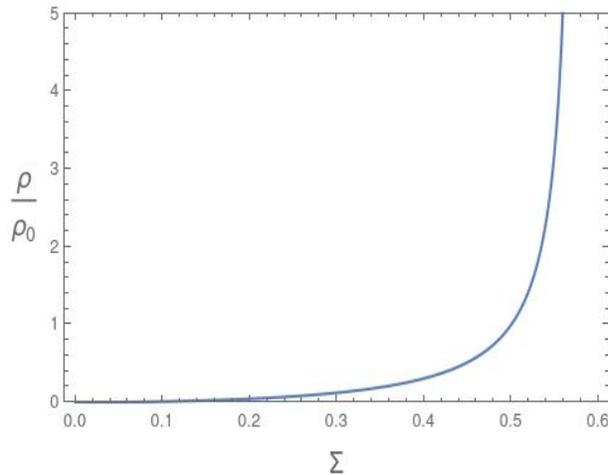


Figura 3.3: Densidade de energia para o “toy model” com  $\Sigma_0 = 0.50$  e  $\Sigma_M \cong 0.58$ .

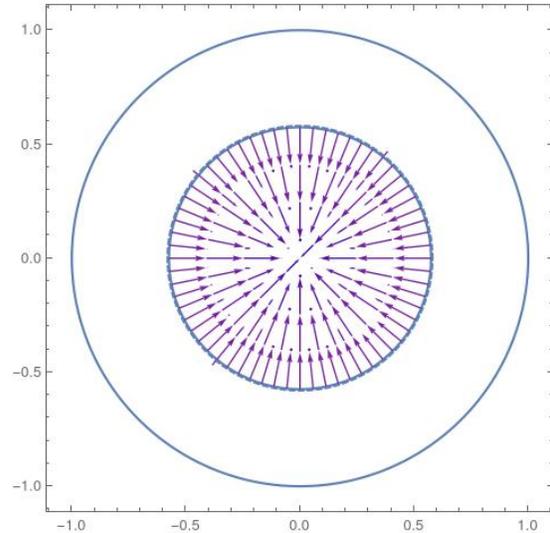


Figura 3.4: Disco de Kasner para este modelo ( $\Sigma = \Sigma_M$  é a curva tracejada).

## 3.2 Modelos Kasner estendidos: soluções com $\Sigma$ constante

Vamos agora estudar um caso onde há uma generalização das soluções do tipo Kasner, assumindo que  $\Sigma \neq 0$ ,  $\gamma$  e  $\eta$  são constantes. Como  $\frac{d\Sigma}{ds} = 0$ , da equação (2.17) para  $0 < \Sigma < 1$ , temos que

$$\eta \cos \beta = (2 - \gamma) \Sigma. \quad (3.10)$$

A primeira consequência é que  $\beta$  também será constante ao longo das soluções. Utilizando então a equação de Friedmann (2.14) e integrando a equação (2.48), tomando  $t_- = 0$ , obtemos que

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{H}{H_0} \right)^2 = \left( \frac{t_0}{t} \right)^2. \quad (3.11)$$

Aplicando a equação (3.11) em (2.40), obtemos uma expressão para a dependência temporal do ângulo de anisotropia:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \left( \frac{3(1-\Sigma^2)\eta \operatorname{sen}\beta}{2\Sigma\lambda(\Sigma)} \right) \ln\left(\frac{t}{t_0}\right). \quad (3.12)$$

onde definimos a função  $\lambda(\Sigma) = \frac{1}{H_0 t_0} = \frac{3}{2}((1-\Sigma^2)\gamma + 2\Sigma^2)$ .

Este caso permite que analisemos o comportamento assintótico sob o olhar dos Teoremas da Seção 2.4. No passado assintótico (i.e., onde  $t \rightarrow 0$  com  $0 < \Sigma < 1$ ) a solução está afastada de  $\Sigma = 1$  (pois  $\Sigma$  é constante), de modo que a existência de um comportamento oscilatório quando  $\gamma \geq 0$  e  $\eta \operatorname{sen}\beta \neq 0$  é predito pelo Teorema 2.4.1 no item (c). Por outro lado, no futuro assintótico ( $t \rightarrow \infty$ ) com  $0 < \Sigma < 1$ , a solução claramente está afastada de  $\Sigma = 0$ , de modo que a ausência de um comportamento oscilatório quando  $\gamma \geq 0$  é predito pelo Teorema 2.4.2, no item (c). Veja ainda que a fórmula (3.12) nos mostra que isso não garante um limite definitivo para o  $\alpha$  (Figura 3.6).

Da fórmula geral para a métrica em (2.4), podemos expressar a solução para as Equações de Einstein, com  $\ell_k(t_0) = t_0^{p_k}$  e  $\eta \operatorname{sen}\beta \neq 0$ , na forma da métrica de Kasner (Seção 1.6) onde, denotando  $\varphi_{k+1}(t) = \frac{2k\pi}{3} + \alpha(t)$ , os coeficientes de Kasner assumem a forma

$$p_k(t) = \frac{1}{\lambda} - \frac{4\Sigma^2}{3(1-\Sigma^2)\eta \operatorname{sen}\beta} \left( \frac{\cos(\varphi_k(t)) - \cos(\varphi_k(t_0))}{\ln(t) - \ln(t_0)} \right) \quad (3.13)$$

(vide na Figura 3.5 o comportamento de  $p_1(t)$  ao longo do tempo). Ainda,  $p_k(t) \rightarrow \frac{1}{3}(1 + 2\operatorname{sen}(\varphi_k(t_0)))$  quando  $\Sigma_0 \rightarrow 1$ , recuperando a fórmula (1.18).

### 3.3 Conteúdo de matéria linear e não-oscilatória

Vamos considerar agora  $p/\rho$ ,  $\pi_k/\rho$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$  e  $\phi = \alpha + \beta$ , todos constantes. Este tem uma relevância nos modelos de Bianchi por englobar o fluido magnético como caso particular. Aqui as Equações de Einstein para  $\Sigma$  e  $\alpha$  são trabalhadas de forma mais clara quando utilizamos  $\Sigma$  e  $\beta = \phi - \alpha$  como variáveis independentes [4].

A primeira coisa a se observar em relação ao parâmetro  $\beta$  é que há três situações onde as soluções possuem comportamento distinto e, pelo Teorema de Existência e Unicidade das Soluções, haverá exatamente três classes de soluções, a saber: Para  $\beta = 0$ , para  $\beta = \pi$

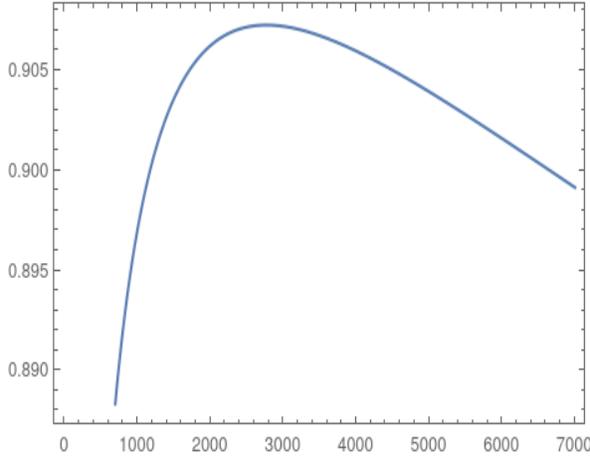


Figura 3.5:  $p_1(t)$  para  $\gamma = 1.8$ ,  
 $\eta = 0.2$ ,  $\Sigma_0 = \cos(\pi/3)$ .

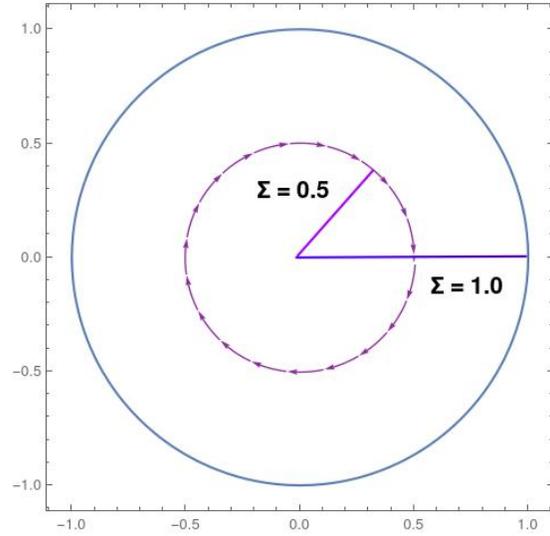


Figura 3.6: Representação de  
 uma solução no disco de Kasner.

ou para  $0 < |\beta| < \pi$ . Ainda, é possível observar que há um ponto de equilíbrio sobre a circunferência centrada na origem e de raio

$$\Sigma_c = \frac{\eta}{2 - \gamma}, \quad (3.14)$$

sendo que isto ocorre se, e somente se,  $0 < \eta \leq |2 - \gamma|$ . Veja sua representação na Figura 3.3.

Se escolhermos  $\beta(0) = \beta_0$  tal que  $\sin \beta_0 \neq 0$ , as Equações de Einstein poderão ser resolvidas em termos de  $\beta(t)$ , resultando em:

$$\Sigma(t) = \frac{\Sigma_c \cos \psi_0}{\cos(\psi_0 - \beta(t))}, \quad \text{onde } \psi_0 = \tan^{-1} \left( \frac{\Sigma_c - \Sigma_0 \cos \beta_0}{\Sigma_0 \sin \beta_0} \right). \quad (3.15)$$

Note que esta equação se traduz em uma equação afim nas coordenadas “cartesianas”  $x = \Sigma \cos \alpha$  e  $y = \Sigma \sin \alpha$ , implicando que o fluxo do sistema no disco de Kasner será representado sempre por retas.

As equações para o tempo cosmológico e as componentes da métrica são obtidas utilizando-se (3.15) em (2.18) e fazendo a mudança de coordenadas  $\rho \rightarrow \beta$  em (3.3) e (3.4):

$$t - t_0 = \frac{2}{\eta} \int_{\beta_0}^{\beta(t)} \frac{1}{\sqrt{3\rho(\beta)(C_0^2 \cos^2(\psi_0 - \beta) - 1)}} \frac{d\beta}{\sin \beta} \quad (3.16)$$

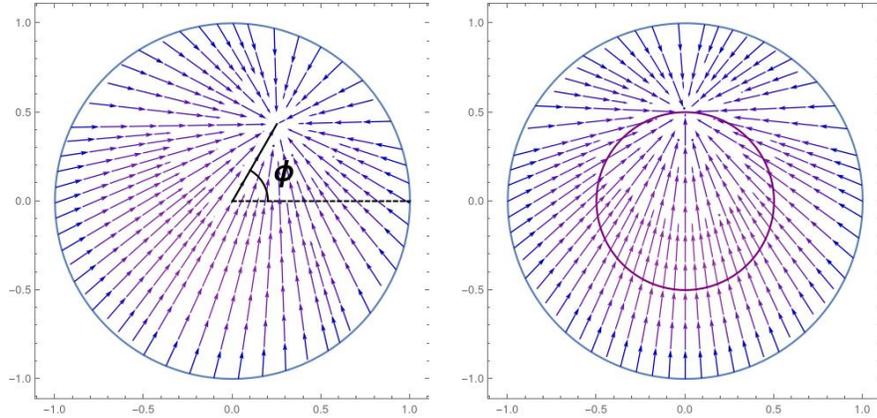


Figura 3.7: Retratos de fase para este tipo de matéria, onde  $\phi = \frac{\pi}{3}$  para a figura a esquerda,  $\phi = \frac{\pi}{2}$  para a figura a direita e  $\gamma = 1.5$  e  $\eta = 0.25$  para ambas. Os pontos de equilíbrio transladam, para diferentes valores de  $\phi = \alpha + \beta$ , em uma circunferência centrada na origem com raio dado por (3.14).

e

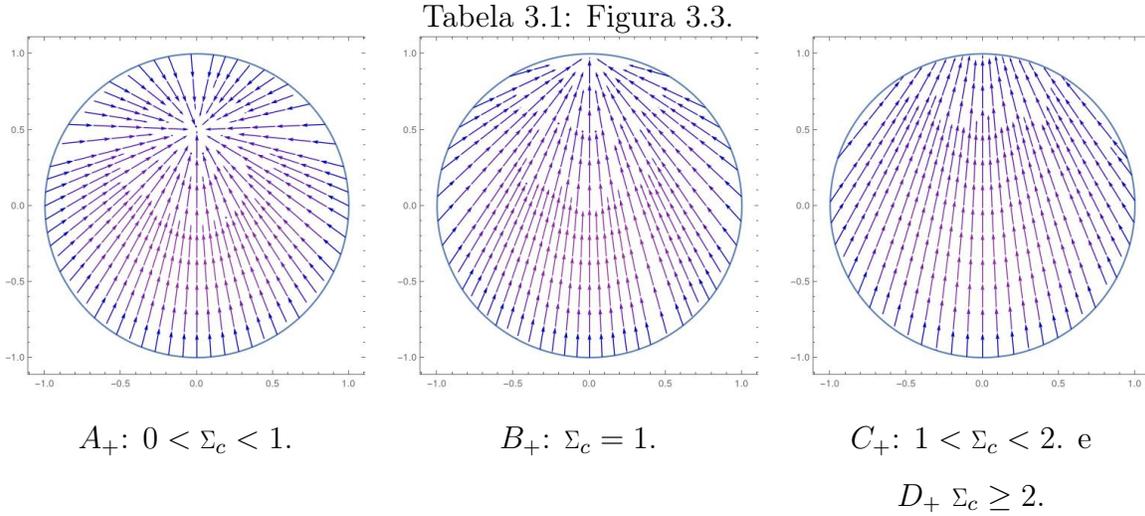
$$b_{k+1}(t) := -\frac{4}{3\eta} \int_{\beta_0}^{\beta(t)} \frac{C_0 \cos(\psi_0 - \beta) - 2\text{sen}(\beta - \phi - \frac{2k\pi}{3})}{C_0^2 \cos^2(\psi_0 - \beta) - 1} \frac{d\beta}{\text{sen}\beta}, \quad (3.17)$$

onde nomeamos a constante  $C_0 = 1/\Sigma_c \cos \psi_0$ .

Um caso muito importante de fluido cosmológico é conhecido por *fluido magnético*, onde  $\gamma = 4/3$ ,  $\eta = \frac{1}{3}$  e  $\alpha + \beta = \pi/6$ . Este caso é largamente analisado em [4], onde uma comparação é estabelecida com [5] e constata-se que o caso estudado nesta seção é uma generalização daquele trabalho, onde apresentam-se análises dos casos onde  $\phi = \pm \pi/6, \pm \pi/2$  e  $\pm 5\pi/6$ . Naquele trabalho aparece uma classificação dos pontos de equilíbrio em  $A_{\pm}$ ,  $B_{\pm}$ ,  $C_{\pm}$  e  $D_{\pm}$ , que na nossa representação é expressa como  $|\Sigma_c| < 1$ ,  $|\Sigma_c| = 1$ ,  $1 < |\Sigma_c| < 2$  e  $|\Sigma_c| \geq 2$ , respectivamente. O sinal  $\pm$  corresponde ao sinal de  $\text{sen}\alpha$  (Figura (3.3)).

### 3.4 Parâmetro de viscosidade como função da magnitude da anisotropia

O último caso que abordaremos, ao qual daremos uma atenção especial neste trabalho, se traduz nas generalizações do termo de magnitude de anisotropia,  $\eta$ . Nossa abordagem



se dará mediante uma equação de estado com os seguintes parâmetros:

$$\gamma = \gamma_0 \quad , \quad \eta = \eta(\Sigma) \quad \text{e} \quad \beta = \beta_0, \quad (3.18)$$

com  $\gamma_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$  constantes. Se reescrevermos a função  $\eta(\Sigma)$  na forma  $\eta(\Sigma) = \nu(\Sigma)\Sigma$ , onde  $\nu(\Sigma)$  denota um coeficiente de viscosidade do fluido, é possível recuperar o limite da termodinâmica newtoniana [4, 7] fazendo  $\beta_0 = \pi$ .

O sistema de equações diferenciais formado pelas equações (2.17) e (2.18) tem pontos distintos determinados pelas raízes  $\Sigma_r$  da equação

$$\eta(\Sigma_r) \cos \beta = (2 - \gamma)\Sigma_r \quad (3.19)$$

pois, assim como em  $\Sigma^2 = 1$ , nestes pontos (2.17) se anula. As soluções com  $\Sigma = \Sigma_r$  satisfazendo a equação (3.19) são todas com magnitudes de anisotropia constantes (pois  $d\Sigma/ds = 0$ ), como na Seção 3.2, formando em geral um ciclo limite. Nos casos em que simultaneamente temos  $\Sigma$  constante e  $\sin\beta = 0$  (de modo que (2.17) e (2.18) se anulam), as soluções são pontos de equilíbrio, que por sua vez formam uma circunferência invariante. Nota-se também, pela representação “cartesiana” do disco de Kasner dada nas equações (2.23)-(2.25), sendo  $\gamma$  e  $\eta$  limitados, que a origem é sempre ponto de equilíbrio. Assim, resumindo:

$$\text{Pontos de equilíbrio: } \Sigma = 0 \quad \text{e} \quad \Sigma = \Sigma_r \leq 1 \quad (\sin\beta = 0). \quad (3.20)$$

$$\text{Ciclo limite: } \Sigma = \Sigma_r < 1 (\text{sen}\beta \neq 0, \text{ raiz isolada}). \quad (3.21)$$

As soluções onde  $\Sigma$  não satisfaz (3.19) permitem integração direta da equação

$$\frac{d\Sigma}{d\alpha} = \frac{-\Sigma((2-\gamma)\Sigma - \eta \cos \beta)}{\eta \text{sen}\beta}. \quad (3.22)$$

Ela nos dá a equação polar da solução no disco de Kasner:

$$\alpha - \alpha_0 = - \int_{\Sigma_0}^{\Sigma} \left( \frac{\eta(u) \text{sen}\beta}{(2-\gamma)u - \eta(u) \cos \beta} \right) \frac{du}{u}. \quad (3.23)$$

Usando que a equação (2.17) é separável, podemos obter uma expressão para a densidade de energia em termos da magnitude anisotrópica:

$$\ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) = 2 \int_{\Sigma_0}^{\Sigma} \left( \frac{\gamma + u \eta(u) \cos \beta}{(2-\gamma)u - \eta(u) \cos \beta} \right) \frac{du}{(1-u^2)}. \quad (3.24)$$

A solução geral, em termos da magnitude de anisotropia  $\Sigma$ , será expressa através de (3.3) como

$$t - t_0 = - \int_{\Sigma_0}^{\Sigma(t)} \frac{2 d\Sigma}{((2-\gamma)\Sigma - \eta(\Sigma) \cos \beta) \sqrt{3 \rho(\Sigma) (1-\Sigma^2)}}, \quad (3.25)$$

escolhendo o sinal para o caso da expansão ( $H > 0$ ), onde  $\rho(\Sigma)$  é dado em (3.24), e pelas componentes  $b_{k+1}$  em (3.4), dadas por

$$b_{k+1}(t) = -\frac{4}{3} \int_{\Sigma_0}^{\Sigma(t)} \frac{1 + 2 \Sigma \text{sen} \left( \alpha(\Sigma) + \frac{2k\pi}{3} \right)}{(1-\Sigma^2) [(2-\gamma)\Sigma - \eta(\Sigma) \cos \beta]} d\Sigma. \quad (3.26)$$

Observa-se diretamente da equação (2.18) que as soluções com  $\text{sen}(\beta) = 0$  são retas radiais no disco de Kasner, como na Seção 3.1. Em particular, pelos itens *c*) do Teorema 2.4.1 e *a*) do Teorema 2.4.2, neste caso as soluções não apresentam comportamento oscilatório, respectivamente, nem no passado nem no futuro assintótico.

Um caso onde a dinâmica é menos trivial acontece quando  $\text{sen}(\beta) \neq 0$ . Assumindo, razoavelmente, que  $\eta(\Sigma)$  seja  $\mathcal{C}^1$  em  $(0, 1)$  com  $\text{sen}\beta \neq 0$ ,  $\gamma \geq 0$  e  $\lim_{t \rightarrow t_{\pm}} \Sigma = \Sigma_1$ , distinguem-se três comportamentos possíveis no passado assintótico e dois casos no futuro assintótico:

(I<sup>-</sup>)  $\Sigma_1 = 1$ : Aqui, o parâmetro principal é o mesmo definido em (2.21)

$$\xi_1 = \gamma + \eta(1) \cos \beta. \quad (3.27)$$

Assumindo que  $\eta(\Sigma)$  é contínuo em  $\Sigma = 1$  então  $\xi - 1$  e  $\gamma - 1 + \eta(\Sigma) \cos \beta$  terão o mesmo sinal próximo deste ponto. Ainda, pelo fato apresentado na relação (2.22),

$$\lim_{\Sigma \rightarrow 1} a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Sigma \rightarrow 1} \rho = \infty. \quad (3.28)$$

Logo, de acordo com o Teorema 2.4.1, para qualquer solução com  $\lim_{t \rightarrow t_-} \Sigma = 1$ , se:

- a)  $0 < \xi_1 < 1$  e  $\rho \rightarrow \infty$  então o comportamento assintótico é não oscilatório no passado.
- b)  $\xi_1 > 1$ ,  $\rho \rightarrow \infty$  e  $\eta(1) \neq 0$  então o comportamento assintótico é mixmaster no passado.

Se  $\eta \rightarrow \infty$  quando  $\Sigma \rightarrow 1$ , então  $\eta$  não é limitado, violando as hipóteses do teorema.

(II<sup>-</sup>)  $0 < \Sigma_1 < 1$ : Dada a hipótese de  $\gamma \geq 0$ , o item *c*) do Teorema 2.4.1 implica que o comportamento assintótico no passado de qualquer solução com  $\lim_{t \rightarrow t_-} \Sigma = \Sigma_1$  é tal que, se  $\eta(\Sigma_1) \neq 0$  então o comportamento assintótico é do tipo oscilatório no passado.

(III<sup>-</sup>)  $\Sigma_1 = 0$ : Neste caso basta verificar o limite

$$\xi = \lim_{\Sigma \rightarrow 0} \eta(\Sigma). \quad (3.29)$$

O comportamento assintótico no passado de qualquer solução onde  $\lim_{t \rightarrow t_-} \Sigma = 0$  (i.e.,  $\xi$  está afastado do zero) é tal que, se  $\xi \neq 0$  ou  $\nexists \xi$  então o comportamento assintótico é oscilatório no passado. Neste é possível utilizarmos o item *c*) do Teorema 2.4.1 pois torna-se aplicável mesmo quando  $\eta$  não é limitado.

(I<sup>+</sup>)  $0 < \Sigma_1 \leq 1$ : De acordo com o item *c*) do Teorema 2.4.2, para qualquer solução onde  $\lim_{t \rightarrow t_+} \Sigma = \Sigma_1$ , se  $t_+ = \infty$ , então o comportamento assintótico será não oscilatório.

(II<sup>+</sup>)  $\underline{\Sigma_1 = 0}$ : De acordo com os itens a) e b) do Teorema 2.4.2, qualquer solução isotrópica no futuro é tal que, se

a)  $\eta(\Sigma) \geq C > 0$  na vizinhança de  $\Sigma = 0$  com  $\cos \beta > 0$  então o comportamento assintótico será não-oscilatório no futuro.

b)  $\eta(\Sigma) \geq C > 0$  na vizinhança de  $\Sigma = 0$  com  $\cos \beta < 0$  então o comportamento assintótico será pulsante no futuro.

onde  $C$  é uma constante real.

**Exemplo 3.** Consideremos o caso onde  $\eta = \eta_0$  constante. A partir destas condições, as equações (3.23), (3.24), (3.25) e (3.26) podem ser reescritas, respectivamente, como

$$\alpha(\Sigma) - \alpha_0 = - \ln \left( \frac{\Sigma (\Sigma - \Sigma_r)}{\Sigma_0 (\Sigma_0 - \Sigma_r)} \right) \tan \beta \quad (3.30)$$

e

$$\frac{\rho(\Sigma)}{\rho_0} = \left( \frac{1 - \Sigma}{1 - \Sigma_0} \right)^{-\frac{\xi}{2-\xi}} \left( \frac{1 + \Sigma}{1 + \Sigma_0} \right)^{\frac{\xi-2\gamma}{\xi+2(1-\gamma)}} \left( \frac{\Sigma - \Sigma_r}{\Sigma_0 - \Sigma_r} \right)^{-2 \frac{(\xi-\gamma)^2 + \gamma(2-\gamma)}{(\xi-\gamma)^2 - (2-\gamma)^2}}, \quad (3.31)$$

onde

$$\Sigma_r = \frac{\eta \cos \beta}{2 - \gamma} \quad e \quad \xi = \gamma + \eta \cos \beta > 0. \quad (3.32)$$

Note que, das relações (2.21) e (2.22),

$$\lim_{\Sigma \rightarrow 1} \rho = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Sigma \rightarrow 1} a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \xi < 2. \quad (3.33)$$

Por outro lado,

$$\lim_{\Sigma \rightarrow 1} \rho = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Sigma \rightarrow 1} a = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \xi > 2. \quad (3.34)$$

Das equações (2.40), (2.14) e (3.31), obtemos que

$$\frac{\omega(\Sigma)}{\omega_0} = \frac{\Sigma_0}{\Sigma} \left( \frac{1 - \Sigma}{1 - \Sigma_0} \right)^{\frac{1-\xi}{2-\xi}} \left( \frac{1 + \Sigma}{1 + \Sigma_0} \right)^{\frac{\xi+1-2\gamma}{\xi+2(1-\gamma)}} \left( \frac{\Sigma - \Sigma_r}{\Sigma_0 - \Sigma_r} \right)^{-\frac{(\xi-\gamma)^2 + \gamma(2-\gamma)}{(\xi-\gamma)^2 - (2-\gamma)^2}} \quad (3.35)$$

com

$$\omega_0 = C_0 \eta \sin \beta \quad C_0 \neq 0. \quad (3.36)$$

Já a função  $\Sigma(t)$  é definida implicitamente por

$$t - t_0 = -C_1 \int_{\Sigma_0}^{\Sigma(t)} (1 - \Sigma)^{\frac{1-\xi}{2-\xi}} (1 + \Sigma)^{\frac{\xi+1-\gamma}{\xi+2(1-\gamma)}} (\Sigma - \Sigma_r)^{\frac{4(2-\gamma)}{(\xi-\gamma)^2 - (2-\gamma)^2}} d\Sigma. \quad (3.37)$$

Do ponto de vista qualitativo, essas soluções representadas no disco de Kasner possuem um ponto de equilíbrio isolado na origem e um ciclo limite de raio  $\Sigma_r = \eta \cos \beta / (2 - \gamma)$ , dado pela equação (3.19), se este satisfizer  $0 < \Sigma_r < 1$ . Seguem tabelas com os retratos de fase no disco de Kasner polar, para diversos valores de  $\eta$  e  $\beta$ .

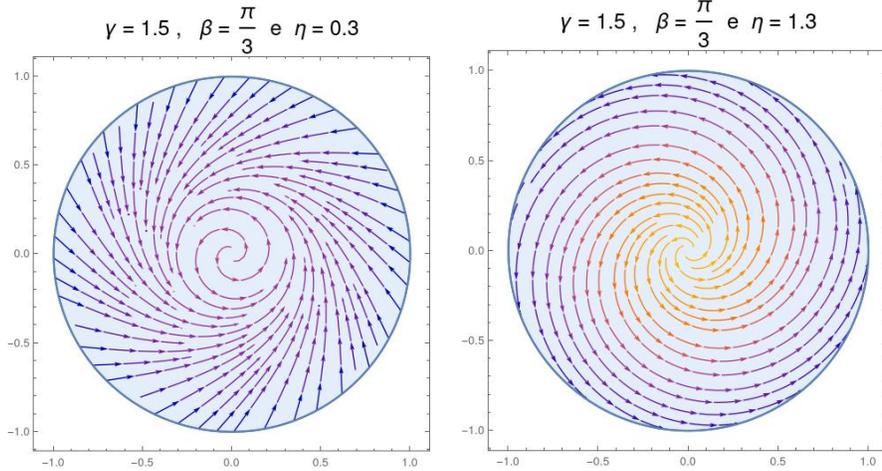


Figura 3.8.

Figura 3.9.

Para  $\gamma = 1.5$ ,  $\beta = \frac{\pi}{3}$  e  $\eta = 0.3$  (Figura 3.8), temos  $\Sigma_r = 0.3$  e  $\xi = 1.65$ . Se  $0 \leq \Sigma_0 < 0.3$ , então a solução é pulsante no passado ( $III^-$ ) e oscilatória no futuro com  $\Sigma \rightarrow 0.3$  ( $I^+$ ). Se  $\Sigma_0 = 0.3$ , temos um ciclo limite que é uma solução do tipo analisada na Seção 3.2. Se  $0.3 < \Sigma_0 < 1.0$ , a solução é tipo Kasner não oscilatória no passado ( $I^-$ ) e oscilatória no futuro ( $I^+$ ).

Para  $\gamma = 1.5$ ,  $\beta = \frac{\pi}{3}$  e  $\eta = 1.3$  (Figura 3.9), temos  $\Sigma_r = 1.3$  e  $\xi = 2.15$ . Neste caso não há ciclo limite, pois  $\Sigma_r \geq 1$ . A solução é pulsante no passado ( $III^-$ ) e mixmaster no futuro ( $I^+$ ). Note que neste caso, como  $\xi > 2$ ,  $\rho \rightarrow 0$  nas proximidades do disco de Kasner, ou seja, o universo começa denso e isotrópico e termina rarefeito e altamente anisotrópico.

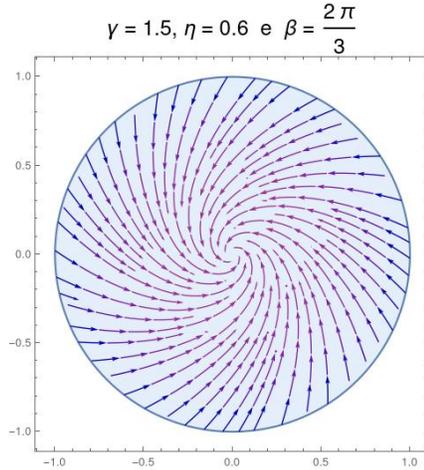


Figura 3.10.

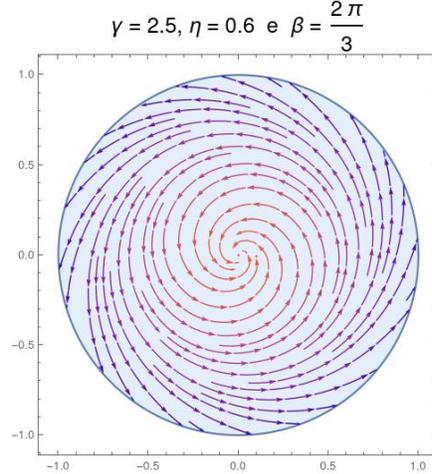


Figura 3.11.

Para  $\gamma = 1.5$ ,  $\eta = 0.6$  e  $\beta = \frac{2\pi}{3}$  (Figura 3.10), temos  $\Sigma_r = -0.6$  e  $\xi = 1.2$ . Neste caso não há ciclo limite, pois  $\Sigma_r \geq 1$ . A solução é mixmaster no passado ( $I^-$ ) e pulsante no futuro ( $II^+$ ). Note que o comportamento mixmaster não fica aparente nesta figura, porém uma simples análise da equação (3.35) nos mostra que  $\omega \rightarrow \infty$  quando  $\Sigma \rightarrow 1$ .

Para  $\gamma = 2.5$ ,  $\beta = \frac{2\pi}{3}$  e  $\eta = 0.6$  (Figura 3.11), temos  $\Sigma_r = 0.6$  e  $\xi = 2.2$ . Se  $0 \leq \Sigma_0 < 0.6$ , então a solução é oscilatória no passado ( $II^-$ ) e pulsante no futuro com  $\Sigma \rightarrow 0.3$  ( $II^+$ ). Se  $\Sigma_0 = 0.6$ , temos um ciclo limite que é uma solução do tipo analisada na Seção 3.2. Se  $0.6 < \Sigma_0 < 1.0$ , a solução é oscilatória no passado ( $II^-$ ) e Kasner não oscilatória no futuro ( $I^+$ ).

### 3.5 Um zoológico de retratos de fase

Nesta seção vamos apresentar uma série de retratos de fase levando em consideração a parte isotrópica do fluido como sendo representada por energia escura ( $\gamma = 0$ ), poeira ( $\gamma = 1$ ), radiação ( $\gamma = 4/3$ ) e matéria dura ( $\gamma = 2$ ). O intuito aqui é fixar uma ideia intuitiva de quais são os principais parâmetros que determinam o comportamento qualitativo das soluções. Um parâmetro central para esta análise é o  $\xi$ , que por comodidade colocamos novamente aqui:

$$\xi = \gamma + \eta \cos \beta. \quad (3.38)$$

Na tabela a seguir, assumamos sempre  $\gamma$  e  $\eta$  limitados.

Comportamento	Condições Suficientes	Referência
Kasner no passado (Sem Oscilações)	$\Sigma \rightarrow 1$ , $\xi \leq \xi_+ < 1$ , $\rho \rightarrow \infty$ .	Eq. (2.22), Teo. 2.4.1.
Mixmaster no passado (Kasner + Oscilações)	$\Sigma \rightarrow 1$ , $1 < \xi_- \leq \xi$ , $\rho \rightarrow \infty$ .	Eq. (2.22), Teo. 2.4.1.
$\Sigma \neq 1$ no passado (Com Oscilações)	$\eta \text{sen}\beta \neq 0$ , $\Sigma \leq \Sigma_1 < 1$ .	Teo. 2.4.1.
Isotrópica no futuro (Sem Oscilações)	$\cos \beta > \cos \beta_+ > 0$ , $t \rightarrow \infty$ .	Eq. (2.22), Teo. 2.4.2.
Pulsante no futuro (Isotrópica + Oscilações)	$\cos \beta < \cos \beta_- < 0$ , $\eta \text{sen}\beta \neq 0$ .	Teo. 2.4.2.
$\Sigma \neq 0$ no futuro (Sem Oscilações)	$\Sigma \geq \Sigma_1 > 0$ , $\gamma \geq 0$ , $t \rightarrow \infty$ .	Teo. 2.4.2.

Podemos agora redigir uma análise do comportamento assintótico das soluções, no disco de Kasner, de forma muito precisa. Ficará evidente a aplicabilidade da nossa definição de “mixmaster” e “pulsating”. Iremos realizar análises em termos dos tipos de matéria, caracterizando-as por  $\gamma$  (1 para poeira,  $\frac{4}{3}$  para radiação, 0 para energia escura e 1.5 para matéria que chamaremos de intermediária), dispoñdo os retratos de fase em tabelas onde as linhas fixam  $\eta$ . A fim de que este texto não fique repetitivo ou cansativo, faremos uma análise mais minuciosa apenas em alguns casos, salientando as diversas características encontradas.

### 3.5.1 Poeira ( $\gamma = 1$ )

Para os casos desta seção,

$$\xi > 0 \iff \eta \cos \beta > -1. \quad (3.39)$$

Logo de início será possível notar uma dificuldade de identificação do comportamento assintótico das soluções segundo nossa definição, de modo que esta identificação será feita através do retrato de fase unida de uma análise dos parâmetros das equações de estado.

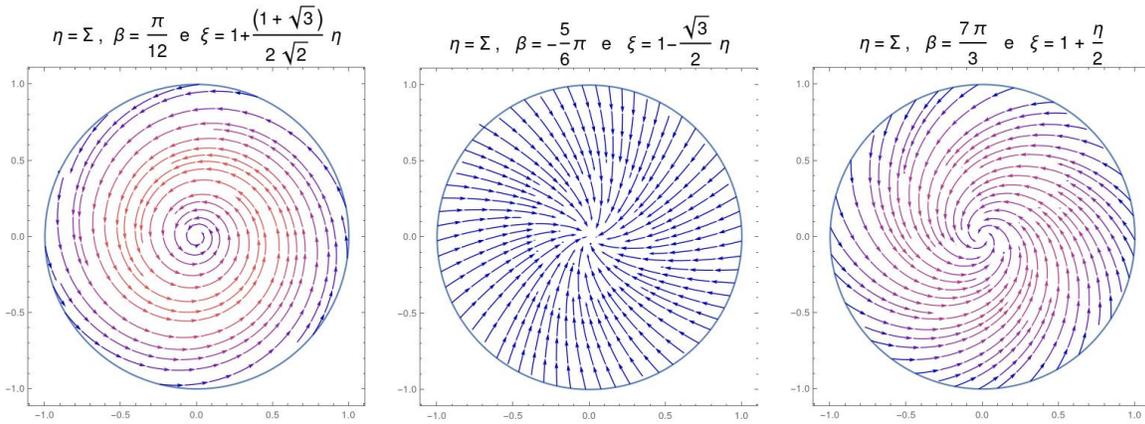


Figura 3.12.

Figura 3.13.

Figura 3.14.

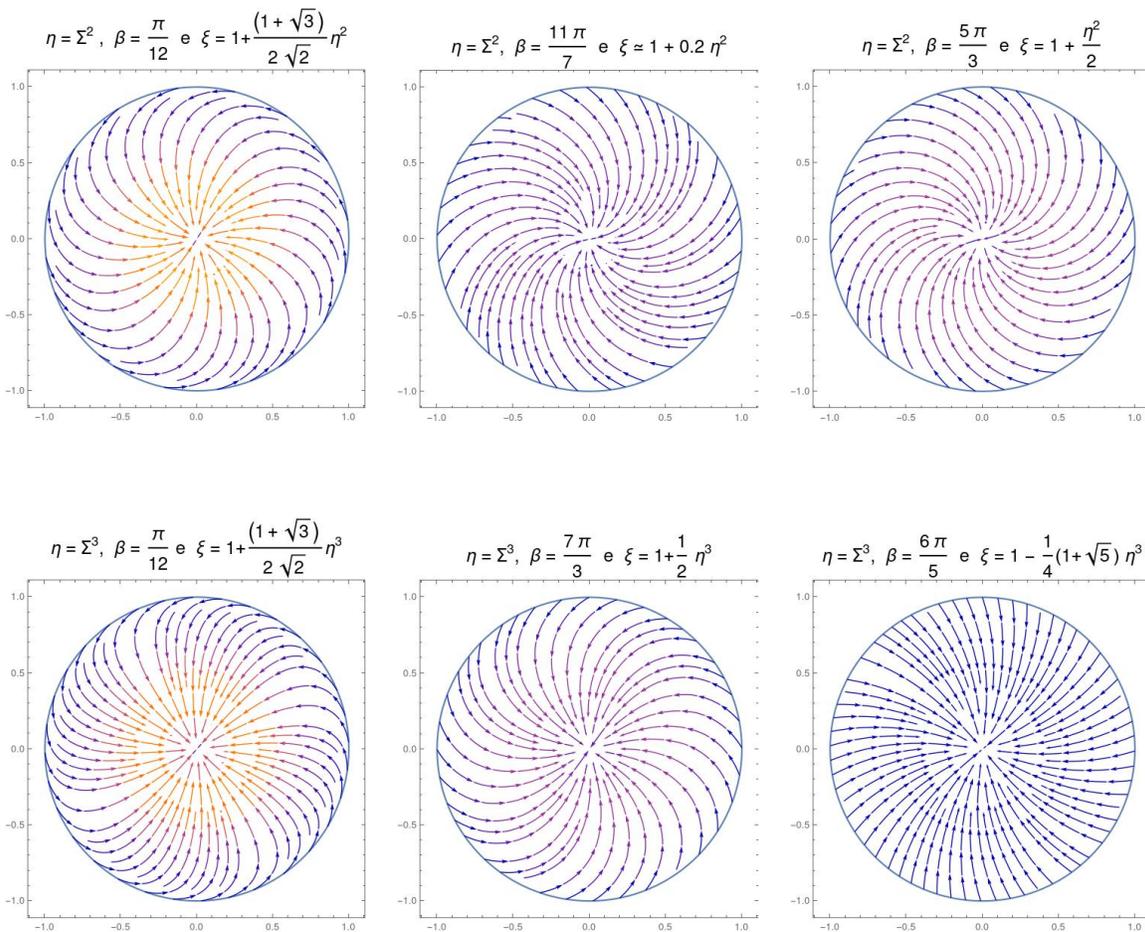
Para o primeiro retrato de fase temos que, no limite onde  $\Sigma \rightarrow 1$ ,  $\xi \rightarrow 1.9$  e  $\rho \rightarrow \infty$ , de modo que (pelo item *b*) do *Teorema 2.4.1*) o comportamento das soluções é do tipo mixmaster no passado. O limite  $\rho \rightarrow \infty$  é interessante pois indica que a densidade de energia era grande próximo do conjunto  $\alpha$ -limite, isto é, no limite inferior do intervalo maximal de definição das soluções. Já no limite onde  $\Sigma \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow 1$  e como  $\cos(\beta) > 0$ , concluímos que se trata de um caso isotrópico no futuro. É interessante notar que, visualmente, o comportamento próximo do conjunto  $\omega$ -limite parece pulsante, apesar de ser isotrópico.

O segundo retrato de fase (Figura 3.13) é tal que se  $\Sigma \rightarrow 1$  então as soluções apresentam comportamento tipo mixmaster no passado, enquanto que se  $\Sigma \rightarrow 0$  então apresentam comportamento isotrópico no futuro. É interessante que neste caso, visualmente, o comportamento que gostaríamos que representasse o caso isotrópico é recuperado. O mesmo

não ocorre com o limite assintótico no passado, que aparenta ser tipo Kasner mas, analisando  $\xi$  e  $\rho$  no limite onde  $\Sigma \rightarrow 1$ , descobrimos ser na verdade um comportamento mixmaster.

O terceiro retrato de fase (Figura 3.14) é tal que se  $\Sigma \rightarrow 1$  então as soluções apresentam comportamento tipo mixmaster no passado, enquanto que se  $\Sigma \rightarrow 0$  então apresentam comportamento isotrópico no futuro. Novamente o comportamento mixmaster aparenta ser tipo Kasner e o comportamento isotrópico aparenta ser pulsante.

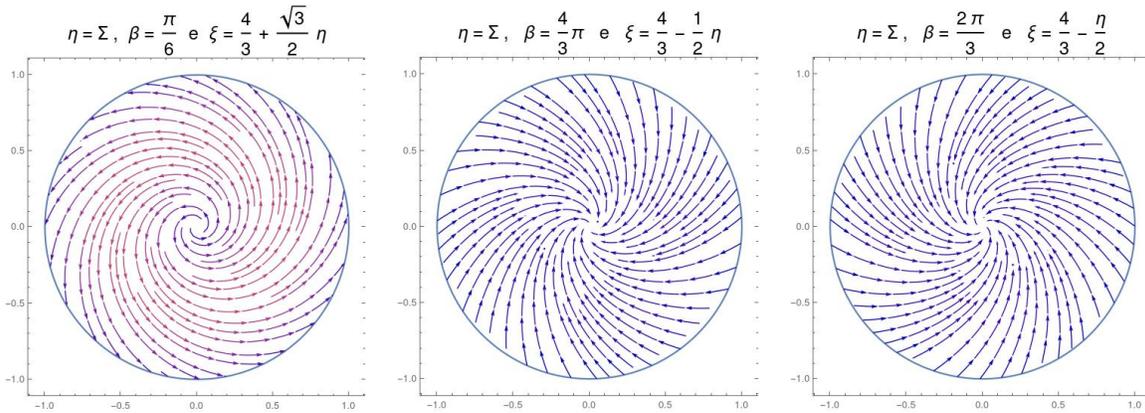
Para os retratos a seguir cabe uma análise análoga.



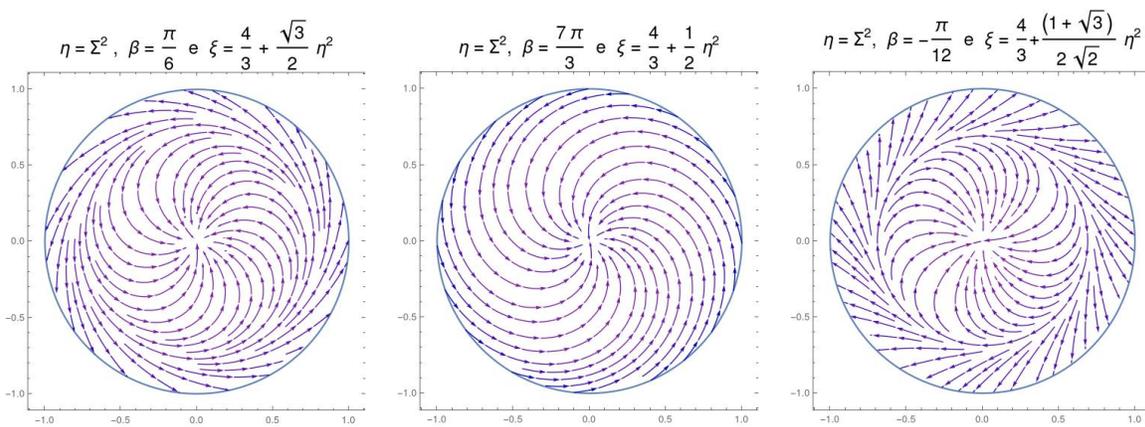
### 3.5.2 Radiação ( $\gamma = 4/3$ )

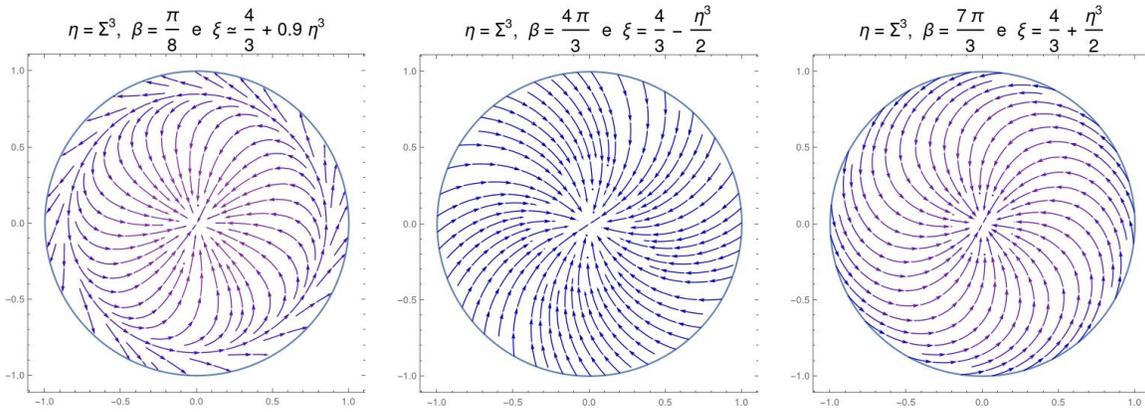
Para os casos desta seção,

$$\xi > 0 \iff \eta \cos \beta > -\frac{4}{3}. \quad (3.40)$$



Para o primeiro retrato de fase na linha acima, percebe-se que no futuro  $\Sigma \rightarrow 1$  enquanto que no passado  $\Sigma \rightarrow 0$ . Para  $\Sigma \rightarrow 1$ ,  $\xi \rightarrow 2.19$ , donde  $\rho \rightarrow 0$  e o comportamento é tipo Kasner, enquanto que, para  $\Sigma \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow \frac{4}{3}$  e  $\eta \cos(\beta) = 0$ , de modo que o comportamento é isotrópico no passado. É interessante que estas soluções apresentam um universo isotrópico no passado e anisotrópico no futuro.





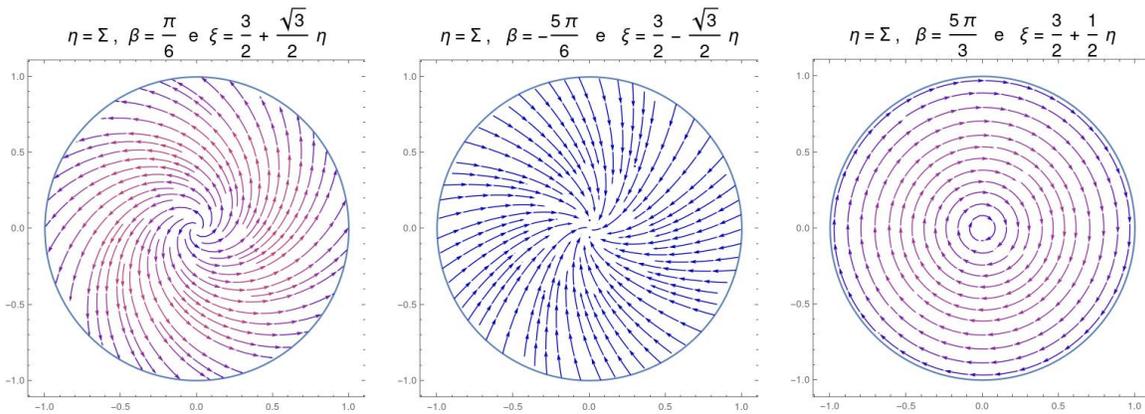
Para o primeiro retrato de fase da linha acima temos que, quando  $\Sigma \rightarrow 1$ ,  $\xi \rightarrow 2.3$  de modo que  $\rho \rightarrow 0$  se, e somente se,  $a \rightarrow \infty$  e a solução é tipo Kasner no futuro. Para  $\Sigma \rightarrow \Sigma_c = 0.84$ , como  $\eta \neq 0$ , o comportamento da solução é oscilatória no passado. Por fim, quando  $\Sigma \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow 1.4$  e  $\cos(\beta) > 1$ , de modo que o comportamento assintótico das soluções se aproxima de um universo isotrópico.

### 3.5.3 Matéria intermediária ( $\gamma = 1.5$ )

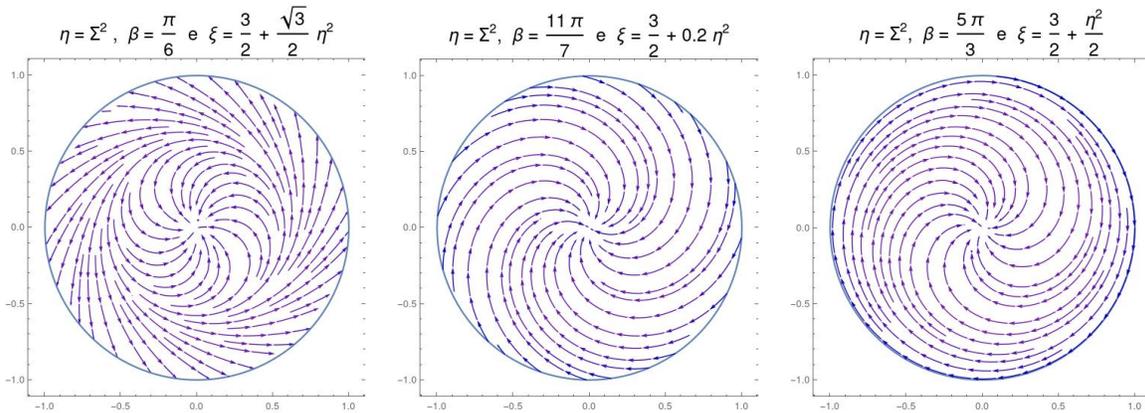
Neste caso,

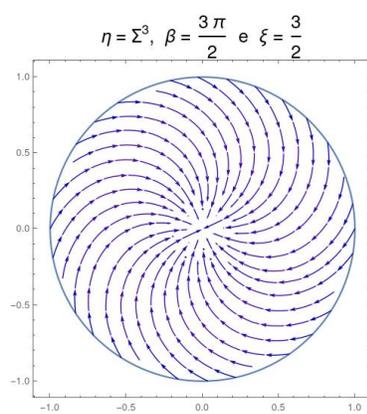
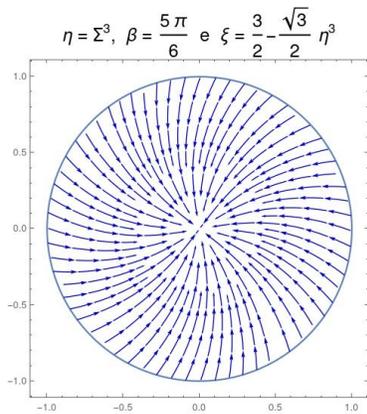
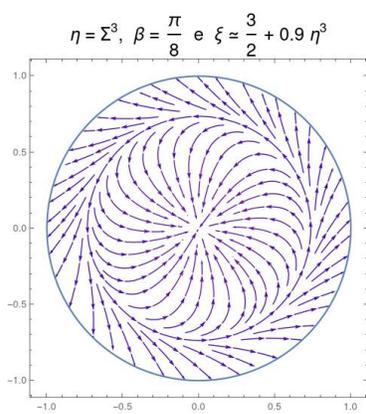
$$\xi > 0 \iff \eta \cos \beta > -\frac{3}{2}. \quad (3.41)$$

Dentre os casos considerados, a matéria intermediária apresenta maior variedade de comportamentos oscilatórios assintóticos. Uma análise análoga às anteriores cabe a estes retratos de fase.



Perceba que, no último retrato da linha acima, o valor de  $\beta$  é tal que o comportamento qualitativo é o mesmo do tipo Kasner generalizado (Seção 3.2).



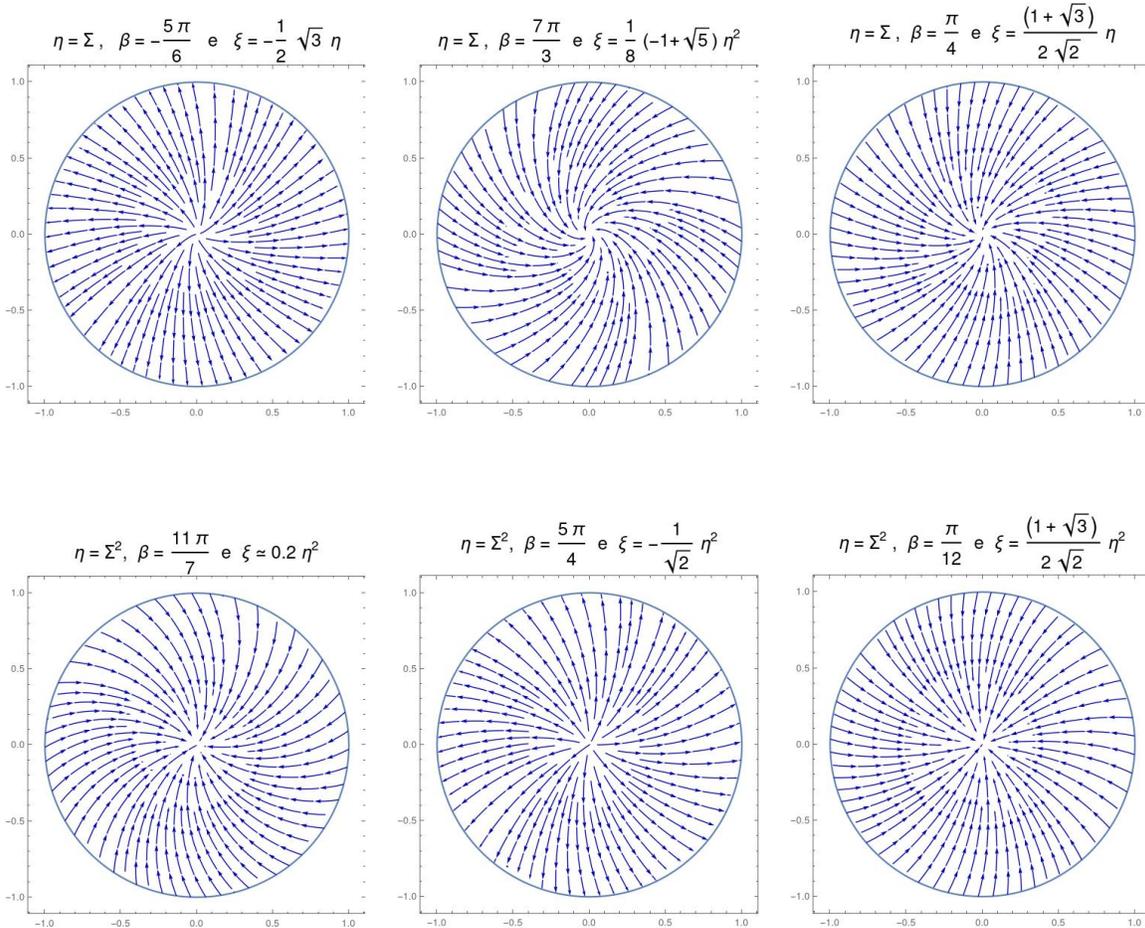


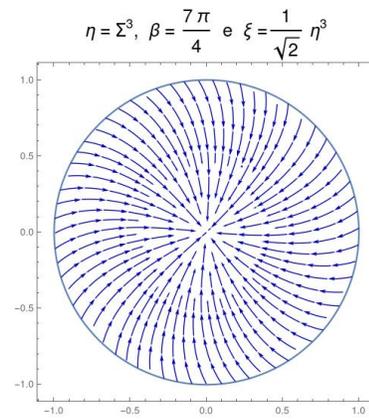
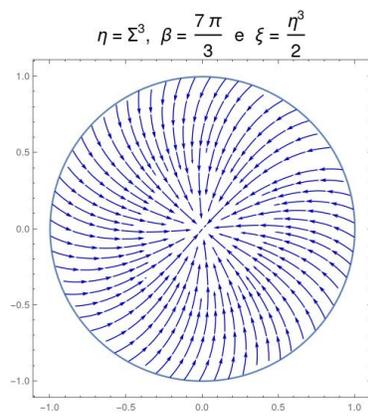
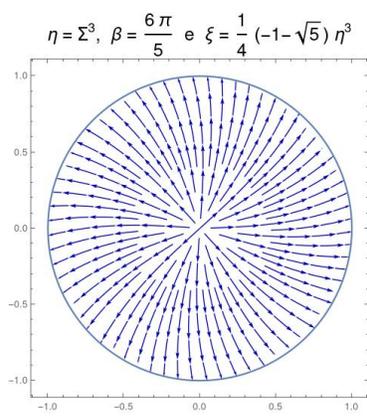
### 3.5.4 Energia escura ( $\gamma = 0$ )

Para este caso,

$$\xi > 0 \iff \eta \cos \beta > 0. \quad (3.42)$$

Este é o caso de matéria com menor variedade de comportamentos assintóticos. Para cada um destes retratos de fase, cabe uma análise análoga às anteriores.





# Conclusões

Neste trabalho estudamos a dinâmica das equações no modelo de Bianchi-I na nova perspectiva da representação polar do disco de Kasner (Seção 2.3), encontrando novas soluções exatas para as equações de Einstein (seções 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4) e mostrando novos comportamento assintóticos e hipóteses suficientes para suas ocorrências (Seção 2.4). A maior parte do conteúdo a partir do capítulo 2 é nova na literatura e aparecerá em um artigo científico intitulado “The asymptotic oscillatory behavior in Bianchi type I models” [4].

# Referências Bibliográficas

- [1] Barreira, L., e Valls, C., *Ordinary Differential Equations: Qualitative Theory*. American Mathematical Soc. (2012).
- [2] Belinskii, V. A., Khalatnikov, I. M., Lifshitz, E.M., *Oscillatory Approach to a Singular Point in the Relativistic Cosmology*. *Advances in Physics*. 19 (80) 525–573 (1970).
- [3] Bittencourt, E., Gomes, L. G., Klippert, R., *Bianchi-I cosmology from causal thermodynamics*, *Class. Quantum Grav.* **34** (2017) 045010 [gr-qc/1610.00020v2].
- [4] Bizarria, B. B., Souza Silva, G. A., Gomes, L. G., Esquivel, W. O. C., *The asymptotic oscillatory behavior in Bianchitype I models*, arXiv (2021).
- [5] Calogero S., e Heinzle, J. M., *Dynamics of Bianchi Type I Solutions of the Einstein Equations with Anisotropic Matter*, *Ann. Henri Poincaré* **10** 225-274 (2009).
- [6] Do Carmo, M. P., *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated*, *Courier Dover Publications* (2016).
- [7] Ellis, G. F. R., Maartens, R. e MacCallum, M.A.H., *Relativistic Cosmology*, Cambridge University Press (2012).
- [8] Esquivel, W. O. C., *Considerações sobre espaços-tempos LRS Bianchi-I*, PMAT-UNIFEI, Dissertação de Mestrado em Matemática (2020).
- [9] Gomes, L.G., *New formulas constraining static anisotropy in late time cosmology*, arXiv preprint arXiv:2005.11250 (2020).

- [10] Grøn, Ø., Hervik, S., *Einstein's General Theory of Relativity, With Modern Applications in Cosmology*, Springer (2004).
- [11] Jacobs, K. C., *Spatially homogeneous and euclidean cosmological models with shear*, The Astrophysical Journal 153 (661), (1968).
- [12] Kasner, E., *Solutions of the Einstein Equations involving functions of only one variable*, Trans. AMS **27** 155-162 (1925).
- [13] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. , *The classical theory of fields*, Pergamon, 1971.
- [14] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry With Applications To Relativity. Department of Mathematics University of California*. Academic Press (1983).
- [15] Stephani, H., Kramer, D., Maccallum, M., Hoenselaers, C. e Herlt, E., *Exact Solutions to Einstein's Field Equations*, 2<sup>nd</sup> ed. , Cambridge University Press, Cambridge, England, (2003).
- [16] Wainwright, J., Ellis, G. F. R., (Eds.), *Dynamical Systems in Cosmology*, Cambridge University Press, online version (2009).
- [17] Wald, R. M., *General Relativity*. University of Chicago press. (2010).

# Anexo 1: Código em linguagem

## Mathematica para os retratos de fase

Para a construção das imagens e dos retratos de fase no plano de Kasner, em sua versão polar, utilizamos o software Mathematica. Seguem as linhas de código, na referida linguagem, para a construção dos retratos de fase utilizados. Neste, as equações de estado fenomenológicas são expressas por  $\gamma$ ,  $\beta$  (fixas de início) e  $\eta$  (implementadas no código de plotagem).

$$\gamma = 1.5;$$

$$\beta = \frac{\pi}{3};$$

(\* Campos de vetores, na direção x (xp) e y (yp). \*)

$$xp = -\frac{(x^2+y^2-1)(x(\eta \cos(\beta)+(\gamma-2)\sqrt{x^2+y^2})-\eta y \sin(\beta))}{2\eta \cos(\beta)(x^2+y^2)+2\gamma\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$yp = -\frac{(x^2+y^2-1)(y(\eta \cos(\beta)+(\gamma-2)\sqrt{x^2+y^2})+\eta x \sin(\beta))}{2\eta \cos(\beta)(x^2+y^2)+2\gamma\sqrt{x^2+y^2}};$$

(\* Comando para realizar a plotagem dos campos de vetores. \*)

StreamPlot[{xp/.eta -> 1.3, yp/.eta -> 1.3}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1},

RegionFunction -> Function[{x, y}, x^2 + y^2 < 1],

PlotLabel -> Style["\gamma = 1.5 , \beta = \frac{\pi}{3} e \eta = 1.3", 18, Black]]

(\* Este código produz a seguinte imagem. \*)

$$\gamma = 1.5, \quad \beta = \frac{\pi}{3} \text{ e } \eta = 1.3$$

