

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Defeitos Secantes de Variedades de Segre-Veronese via
Projeções Osculadoras**

Saulo Alves de Araújo
Orientador: Rick Rischter

Itajubá - MG
24 de janeiro de 2021

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Defeitos Secantes de Variedades de Segre-Veronese via
Projeções Osculadoras**

**Saulo Alves de Araújo
Orientador: Rick Rischter**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências em Matemática.

Área de Concentração: Topologia e Geometria

Itajubá - MG
24 de janeiro de 2021

Dedico este trabalho a minha mãe Maria Romilda a qual sempre me incentivou e apoiou a prosseguir nos meus estudos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por esta realização. Agradeço à minha família por todo apoio que me deram ao longo desses dois anos, agradeço ao meu orientador Rick Rischter por toda paciência e dedicação em me orientar, agradeço aos meus amigos de faculdade pelos bons momentos, aos meus professores e a todos aqueles que me ajudaram a chegar até aqui.

Agradeço também à Capes por ter me proporcionado a bolsa de estudo que me permitiu ter dedicação exclusiva ao mestrado.

Resumo

O problema do defeito secante consiste em estudar a dimensão da variedade h -secante de uma variedade algébrica. Dizemos que a variedade é h -defeituosa quando sua h -secante não possui a dimensão esperada. Nesse trabalho estudaremos os defeitos secantes das variedades de Segre-Veronese utilizando os espaços osculadores para determinar o defeito das variedades h -secantes.

Palavras-Chaves: Variedades de Segre-Veronese, Defeitos Secantes, Espaços Osculadores, Geometria Algébrica.

Abstract

The problem of secant defectivity consists in studying the dimension of the h -secant variety of an algebraic variety. We say that an algebraic variety is h -defective when its h -secant variety does not have the expected dimension. In this work we will study the secant defectivity of the Segre-Veronese varieties using the osculating spaces to determine the defect of the h -secant varieties.

Keywords: Segre-Veronese Varieties, Secant Defectivity, Osculating Spaces, Algebraic Geometry.

Sumário

1	Introdução	2
2	Conceitos Preliminares e Exemplos	4
2.1	Álgebra Comutativa	4
2.2	Variedades Afins	8
2.3	Exemplos Complementares	14
3	Variedades Projetivas	20
3.1	Espaço Projetivo	20
3.2	Morfismos	25
3.3	Aplicações Racionais	31
3.4	Variedades de Veronese e Segre-Veronese	33
4	Espaços e Projeções Osculadoras	37
4.1	Espaços Osculadores	37
4.2	Projeções Osculadoras	47
5	Defeitos Secantes	59
5.1	Defeitos Secantes em Variedade de Veronese	59
5.2	Degeneração de Espaços Osculadores	64
5.3	Defeitos Secantes da Segre-Veronese	69

1 Introdução

Um dos principais objetos de estudo da Geometria Algébrica são as variedades algébricas projetivas. Essas estruturas consistem no lugar geométrico dos zeros de uma família de polinômios em um espaço projetivo \mathbb{P}^N . Essa caracterização das variedades projetivas nos permite uma série de estudos sobre estas estruturas.

Um dos focos no estudo de variedades projetivas é a análise dos defeitos secantes destas variedades. Dada uma variedade $X \subset \mathbb{P}^N$ temos que uma secante h -linear de X é o espaço linear gerado por h pontos de X , entendemos por variedade h -secante de X o fecho projetivo da união de todas as secantes h -lineares, denotamos a variedade h -secante de X por $Sec_h X$. Se X tem dimensão n prova-se que a dimensão de $Sec_h X$ é no máximo $\min\{N, (n+1)h - 1\}$, esta é chamada a dimensão esperada de $Sec_h X$. Dizemos que X é h -defeituosa quando sua variedade h -secante não possui a dimensão esperada e dizemos que X é defeituosa quando X é h -defeituosa para algum h . O estudo de defeitos secantes consiste em determinar se uma variedade é ou não h -defeituosa.

As classes de variedades para as quais estudaremos os defeitos secantes serão as variedades de Veronese e Segre-Veronese. Uma variedade de Veronese é um mergulho de \mathbb{P}^n com um certo grau d . Assim, a variedade de Veronese é dada por dois parâmetros n e d onde n é a dimensão do espaço projetivo e d é o grau do mergulho. Já uma variedade de Segre-Veronese é dada por parâmetros n_1, \dots, n_r e d_1, \dots, d_r e consiste no mergulho do produto de r espaços projetivos \mathbb{P}^{n_i} cada um deles com grau d_i .

O problema do defeito secante para variedades de Veronese foi completamente resolvido em [5]. Nesse artigo Alexander and Hirshowitz mostraram que exceto para a Veronese mergulhada com grau 2 a qual é sempre defeituosa, a Veronese de dimensão n e grau d é não h -defeituosa exceto para os seguintes casos

$$(d, n, h) \in \{(4, 2, 5), (4, 3, 9), (3, 4, 7), (4, 4, 14)\}.$$

Já o problema de defeitos secantes para variedades de Segre-Veronese foi resolvido para alguns casos especiais. Alguns desses casos são abordados em [1], [2], [4] e [12].

Para o entendimento dos resultados sobre variedades algébricas é necessário primeiro uma revisão dos principais conceitos e resultados de Geometria Algébrica. Dessa maneira, o Capítulo 2 deste trabalho é dedicado a introduzir os conceitos básicos da Geometria Algébrica e Álgebra Comutativa que envolvem o espaço afim.

Posteriormente, no Capítulo 3 revisaremos os mesmos conceitos vistos no Capítulo 2 porém agora com foco no espaço projetivo. Adentraremos em uma parte mais específica da Geometria Algébrica, a qual nos focaremos no estudo das variedades algébricas com foco nas variedades de Veronese e Segre-Veronese.

Para a obtenção dos resultados principais envolvendo defeitos secantes será necessário o uso de ferramentas auxiliares. Dessa maneira, no Capítulo 4 apresentaremos as definições e principais resultados sobre espaços osculadores e as projeções com centro nesses espaços, as quais chamamos de projeções osculadoras. Essas projeções nos auxiliarão no estudo de defeitos secantes das variedades de Veronese e Segre-Veronese.

Por fim, no Capítulo 5 faremos o estudo dos defeitos secantes por meio das projeções osculadoras. Apresentaremos um teorema que estabelece uma cota h que garante que uma variedade de Segre-Veronese é não k -defeituosa para $k \leq h$. Este resultado exige

que a variedade tenha regularidade m -osculadora e 2-osculadora forte e que a projeção osculadora desse espaço é finitamente gerado, então essa variedade não é h -defeituosa para um h específico.

Os resultados abordados nesse trabalho apesar de serem feitos para as variedades de Veronese e Segre-Veronese também podem ser feitos de maneira bastante similar para outras classes de variedades, como por exemplo para as variedades Grassmanianas.

2 Conceitos Preliminares e Exemplos

2.1 Álgebra Comutativa

Nessa seção revisaremos e formalizaremos os conceitos de álgebra que serão necessários ao longo do desenvolvimento do trabalho. Para o embasamento dessa seção utilizaremos o livro texto [7].

Durante todo o desenvolvimento do estudo vamos considerar A sendo um anel comutativo com unidade e k sendo um corpo de característica 0.

Definição 1 Um anel A é um conjunto com duas operações binárias (adição e multiplicação) tais que

1. A é um grupo abeliano com respeito à adição.
2. A multiplicação é associativa e distributiva sobre a adição.
3. $xy = yx$ para todo $x, y \in A$.
4. Existe elemento identidade 1 tal que $1 \cdot x = x$ para todo $x \in A$.

Dizemos que A é um corpo se $A - 0$ é um grupo com relação à multiplicação.

Definição 2 Um ideal \mathfrak{a} de um anel A é um subconjunto de A o qual é um subgrupo aditivo e para todo $x \in A$ temos

$$x\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}.$$

Dizemos que um ideal \mathfrak{p} de A é primo se para todo $a, b \in A$ tal que $ab \in \mathfrak{p}$ temos que $a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$.

Dizemos que um ideal \mathfrak{m} de A é maximal, quando dado um ideal $I \subset A$ tal que $\mathfrak{m} \subset I$ temos que, $I = A$ ou $I = \mathfrak{m}$.

Dizemos que um anel A é local quando A possui um único ideal maximal.

Exemplo 1 Considere A o anel dos números inteiros, então o ideal $\mathfrak{p} = (6)$ não é primo pois $2 \cdot 3 = 6 \in \mathfrak{p}$ mas $2, 3 \notin \mathfrak{p}$.

Exemplo 2 No anel dos números inteiros $A = \mathbb{Z}$ todo ideal primo é um ideal gerado por um número primo, a recíproca também é válida.

Além disso, todo ideal primo de \mathbb{Z} é um ideal maximal. De fato seja $(p) \in \mathbb{Z}$ um ideal primo, suponha que exista um ideal $\mathfrak{m} \subset \mathbb{Z}$ tal que $(p) \subsetneq \mathfrak{m}$. Portanto, existe um $q \in \mathbb{Z}$ tal que $q \notin (p)$ e q é um gerador de \mathfrak{m} . Como p é primo temos que $\text{mdc}(p, q) = 1$ isso implica que existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que

$$1 = ap + bq.$$

Como $p, q \in \mathfrak{m}$ segue que $1 \in \mathfrak{m}$ e portanto $\mathfrak{m} = \mathbb{Z}$. Isso mostra que (p) é maximal.

Exemplo 3 No anel de polinômios $A = k[x]$ um ideal é primo se e somente se ele é gerado por um elemento irredutível.

O ideal gerado por $\mathfrak{p} = (x^2 - 4)$ não é primo pois

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2),$$

assim $x + 2, x - 2 \notin \mathfrak{p}$, mas o produto deles pertence ao ideal.

Proposição 1 Seja A um anel, então todo ideal maximal de A é um ideal primo.

Prova: Seja M um ideal maximal de A . Sejam $a, b \in A$ tais que $ab \in M$, suponha sem perda de generalidade que $a \notin M$. Portanto $\langle a, M \rangle = A$, pois

$$M \subset \langle a, M \rangle \subset A,$$

como M é maximal segue que $\langle a, M \rangle = A$. Temos então que existem $x \in A$ e $m \in M$ tais que

$$1 = ax + m.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por b temos

$$b = abx + bm.$$

Como $ab \in M$ e $b \in M$ concluímos que $b = abx + bm \in M$. Portanto M é um ideal primo. ■

Proposição 2 Todo anel $A \neq 0$ possui ao menos um ideal maximal.

Prova: [7] Teorema 1.3.

Definição 3 Um ideal \mathfrak{p} de A é dito principal se ele é gerado por um único elemento irredutível, ou seja, existe $p \in A$ irredutível tal que

$$(p) = \mathfrak{p}.$$

Dizemos que A é um anel principal se todo ideal de A é principal.

Exemplo 4 O anel de polinômios em uma variável $A = k[x]$ é um anel principal.

De fato, como k é algebricamente fechado os únicos elementos irredutíveis de $k[x]$ são os polinômios de grau 1. Portanto, considere um ideal $\mathfrak{a} \in k[x]$ gerado por dois elementos irredutíveis $f = a_0 + a_1x$ e $g = b_0 + b_1x$, então temos que a soma

$$\begin{aligned} b_1f - a_1g &= b_1a_0 + b_1a_1x - a_1b_0 - a_1b_1x \\ &= b_1a_0 - a_1b_0. \end{aligned}$$

está em \mathfrak{a} , porém $b_1f - a_1g$ é uma constante, como k é um corpo existe $c \in k$ tal que $(b_1f - a_1g)c = 1$ como $f, g \in \mathfrak{a}$ então $1 \in \mathfrak{a}$. Isso implica que $\mathfrak{a} = (1)$ logo \mathfrak{a} é principal. Portanto $k[x]$ é um anel principal.

Exemplo 5 Considere o anel de polinômios em duas variáveis $k[x, y]$, então o ideal $(x + 1, y - 1)$ não é principal, pois não pode ser gerado por um único elemento irredutível.

Definição 4 Seja A um anel, dizemos que $x \in A$ é um divisor de zero se existe $y \in A$ com $y \neq 0$ tal que

$$x \cdot y = 0.$$

Se A não possui divisores de zero, dizemos que A é um domínio de integridade.

Exemplo 6 Nem todo anel comutativo é um domínio. Considere o anel $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ então \mathbb{Z}_4 não é um domínio pois $\bar{2}$ é divisor de zero pois

$$\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}.$$

Exemplo 7 Nem todo domínio é um corpo. Por exemplo considere o anel dos inteiros, então \mathbb{Z} é um domínio pois é um anel comutativo sem divisores de zero, porém \mathbb{Z} não é um corpo pois nem todo elemento possui inverso multiplicativo, no caso $2 \in \mathbb{Z}$ mas não existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que

$$2 \cdot a = 1.$$

Definição 5 Seja A um anel comutativo, um elemento $x \in A$ é dito nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x^n = 0.$$

Observação 1 Todo elemento nilpotente é um divisor de zero.

Definição 6 Em um anel A o conjunto de todos os elementos nilpotentes é chamado de nilradical de A e denotamos por \mathfrak{N} .

A interseção de todos os ideais maximais de A é chamado de radical de Jacobson de A e denotamos por \mathfrak{R}' .

Proposição 3 Seja A um anel, então o nilradical de A é a interseção de todos os ideais primos de A .

Prova:[7] Proposição 1.8.

Definição 7 Um homomorfismo de anéis é uma aplicação f de um anel A para um anel B tal que

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. $f(xy) = f(x)f(y)$.
3. $f(1) = 1$.

Proposição 4 Seja A um anel, então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é um corpo.
2. Os únicos ideais em A são 0 e (1) .
3. Todo homomorfismo de A para um anel B é injetivo.

Prova: (1 \Rightarrow 2) Seja $\mathfrak{a} \neq 0$ um ideal de A . Seja $a \in \mathfrak{a}$ então como A é um corpo segue que existe $b \in A$ tal que $ab = 1$. Portanto $1 = ab \in \mathfrak{a}$, como $1 \in \mathfrak{a}$ temos que $\mathfrak{a} = A$.

(2 \Rightarrow 3) Seja $\phi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis, então temos que $0 \notin \text{Ker}(\phi)$. Como $\text{Ker}(\phi)$ é um ideal segue que $\text{Ker}(\phi) = 0$, portanto ϕ é injetivo.

(3 \Rightarrow 1) Suponha $x \in A$ não sendo uma unidade de A , ou seja, $(x) \neq (1)$. Tomando $B = A/(x)$, temos que B não é o anel zero. Seja um homomorfismo $\phi : A \rightarrow B$, então $\text{Ker}(\phi) = (x)$ mas por hipótese $\text{Ker}(\phi) = 0$, logo $(x) = (0)$. ■

Proposição 5 $x \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow 1 - xy$ é uma unidade em A para todo $y \in A$.

Prova: [7] Proposição 1.9.

Definição 8 Seja A um anel, dizemos que A é um anel Noetheriano se satisfaz as seguintes condições equivalentes:

1. Todo conjunto não vazio de ideais tem elemento maximal.
2. Toda cadeia ascendente de ideais em A é estacionária.
3. Todo ideal em A é finitamente gerado.

Definição 9 Em um anel comutativo A chamamos de um A -módulo um grupo abeliano M o qual é linear em relação a A . Ou seja, um A -módulo é um par (M, ϕ) em que ϕ é uma aplicação de $A \times M$ para M dada por

$$\begin{aligned} \phi : A \times M &\rightarrow M \\ (a, x) &\mapsto ax. \end{aligned}$$

Essa aplicação satisfaz as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} a(x + y) &= ax + ay \\ (a + b)x &= ax + bx \\ (ab)x &= a(bx) \\ 1x &= x, \end{aligned}$$

Para todo $a, b \in A$ e $x, y \in M$.

Exemplo 8 1. Todo ideal de A é um A -módulo. Em particular A é um A -módulo sobre ele mesmo.

2. Se A é um corpo k , então todo A -módulo é um k -espaço vetorial.
3. Se $A = \mathbb{Z}$ então um A é um grupo abeliano.

Sejam M e N A -módulos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é um homomorfismo de A -módulos se

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(ax) &= a \cdot f(x), \end{aligned}$$

para todo $a \in A$ e $x, y \in M$.

Definição 10 Um anel A é dito anel graduado com uma família $(A_n)_{n \geq 0}$ de subgrupos aditivos de A se $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ e $A_m A_n \subset A_{m+n}$ para todo $m, n \geq 0$.

Definição 11 Sejam A e B anéis comutativos. Considere $f : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis e defina o produto

$$ab = f(a)b.$$

Então este produto caracteriza B como um A -módulo. Dizemos que B munido com esse produto é uma A -álgebra.

2.2 Variedades Afins

Nesta seção revisaremos os conceitos básicos da Geometria Algébrica que serão necessários para o desenvolvimento do estudo. Serão revisados os conceitos fundamentais da geometria afim, bem como os principais resultados. Será usado como base para este capítulo os livros texto [15] e [20].

Definição 12 Considere um corpo k algebricamente fechado, chamamos o espaço afim plano \mathbb{A}_k^2 ou \mathbb{A}^2 o espaço formado pelas 2-uplas de k .

$$\mathbb{A}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in k\}.$$

Definição 13 Considere agora $A = k[x, y]$ o anel de polinômios de 2 variáveis sobre k . Dado um polinômio $f \in A$, uma curva algébrica sobre o espaço afim \mathbb{A}^2 induzida por este polinômio é dada pelo conjunto de pontos em \mathbb{A}^2 que anulam f , ou seja, são os pontos no conjunto

$$Z(f) = \{P \in \mathbb{A}^2 \mid f(P) = 0\}.$$

Chamaremos este conjunto de conjunto de zeros de f , esse conjunto define a variedade algébrica afim induzida pelo polinômio f .

Definição 14 Em $A = k[x, y]$ seja $T \subset A$ um ideal de A . Então definimos como sendo o conjunto de zeros de T o conjunto dado por

$$Z(T) = \{P \in \mathbb{A}^2 \mid f(P) = 0 \text{ para todo } f \in T\}.$$

Definição 15 Um subconjunto $Y \in \mathbb{A}^2$ é chamado de conjunto algébrico se existe um subconjunto $T \subset k[x, y]$ tal que $Y = Z(T)$.

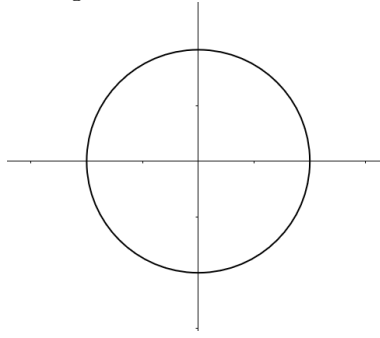
Exemplo 9 Seja $f \in A[x]$ um polinômio irredutível e $T = (f)$ o ideal gerado por f , então o conjunto algébrico gerado por T é a curva algébrica associada ao polinômio f .

De fato a curva algébrica associada a um polinômio f é o conjunto de pontos onde $f = 0$ ou seja $Z(f)$, mas como $f \in T$ então $Z(T) \subset Z(f)$ e se $g \in T$ então $g = fh$ e portanto $g(x) = 0$ para todo $x \in Z(f)$, portanto $Z(f) \subset Z(T)$, logo $Z(T) = Z(f)$.

Portanto qualquer função polinomial determina um conjunto algébrico em \mathbb{A}^2 e além disso podemos ver sua representação gráfica.

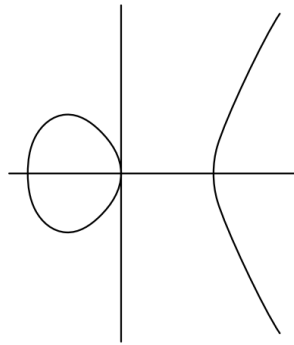
Exemplo 10 Em \mathbb{C}^2 , o círculo de raio r dado pela equação $f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$ é um conjunto algébrico, e sua representação gráfica

Figura 2.1: Exemplo 10



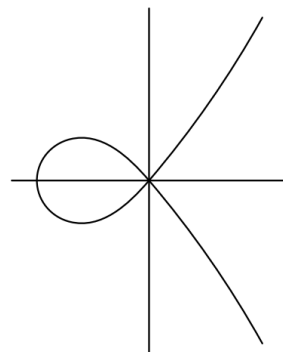
Exemplo 11 [13] Se $f(x, y) = y^2 + x(x^2 - 1)$ então $Z(f)$ possui a seguinte representação gráfica:

Figura 2.2: Exemplo 11



Exemplo 12 [13] Se $f(x, y) = y^2 + x^2(x - 1)$ então $Z(f)$ possui a seguinte representação gráfica:

Figura 2.3: Exemplo 12



Exemplo 13 O conjunto $X = \{(x, \cos(x)) : x \in \mathbb{C}\}$ não é algébrico em \mathbb{C}^2 .

De fato, suponha que $X = Z(S)$ para algum ideal $S \subset \mathbb{C}[x, y]$. Como $X \neq \mathbb{R}^2$, então $S \neq \emptyset$, e podemos tomar $P \in S$ não nulo tal que $P(x, \cos(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$. Perceba que P é periódica na coordenada y , como P é um polinômio temos que P é de classe C^∞ , então podemos escrever $P(x, y) = Q(x, y)y + p(x)$. Considere agora a sequência

$\theta_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{N}$, então

$$p(\theta_k) = P(\theta_k, 0) = P(\theta_k, \cos(\theta_k)) = 0.$$

Portanto, $p(x)$ possui infinitas raízes, mas $p(x)$ é um polinômio pois $S \subset \mathbb{C}[x, y]$, logo $p(x) = 0$. Portanto $P(x, y) = Q(x, y)$, ou seja, qualquer ponto da forma $(x, 0)$ anula $P(x, y)$, logo $(x, 0) \in Z(S) = X$ para todo $x \in \mathbb{C}$. Em particular $(1, 0) \in X$, absurdo pois pela definição de X temos que $(1, 0) \notin X$. Concluímos que X não pode ser algébrico.

Exemplo 14 Dois ideais distintos podem ter o mesmo conjunto algébrico, se $f \in A[x]$, então os ideais $I = (f)$ e $J = (f^2)$ são distintos, mas os conjuntos algébricos $Z(I)$ e $Z(J)$ são iguais pois $Z(I) = Z(f) = Z(f^2) = Z(J)$.

Proposição 6 Sejam f e g polinômios em $k[x, y]$, temos que se f e g não possui componentes em comum então $Z(f) \cap Z(g)$ é um conjunto finito de pontos.

Prova: O resultado segue do Teorema de Bezout [21][Capítulo 5]. ■

Podemos generalizar as definições anteriores para um espaço afim de dimensão n . Considere um corpo k algebricamente fechado, chamamos o espaço afim n -linear \mathbb{A}_k^n ou \mathbb{A}^n o espaço formado pelas n -uplas de k .

$$\mathbb{A}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in k\}.$$

Definição 16 Considere agora $A = k[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios de n variáveis sobre k , então dado um polinômio $f \in A$, uma hipersuperfície sobre o espaço afim \mathbb{A}^n induzida por este polinômio é dada pelo conjunto de pontos em \mathbb{A}^n que zeram f , ou seja, são os pontos do conjunto

$$Z(f) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0\}.$$

Chamaremos este conjunto de conjunto zeros de f , o qual define a variedade algébrica afim induzida pelo polinômio f .

Definição 17 Em $A = k[x_1, \dots, x_n]$ seja $T \subset A$ um subconjunto de A . Então definimos como sendo o conjunto de zeros de T o conjunto dado por

$$Z(T) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0 \text{ para todo } f \in T\}.$$

Um subconjunto $Y \in \mathbb{A}^n$ é chamado de conjunto algébrico se existe um conjunto $T \subset A$ tal que $Y = Z(T)$.

Observação 2 Note que $Z(T) = Z(\langle T \rangle)$, dessa maneira podemos considerar o conjunto algébrico sendo o conjunto de zeros de um ideal de A .

Proposição 7 A união de dois conjuntos algébricos é um conjunto algébrico. A interseção de uma família de conjuntos algébricos é um conjunto algébrico.

Prova: Sejam $Y_1 = Z(T_1)$ e $Y_2 = Z(T_2)$ dois conjuntos algébricos de \mathbb{A}^n , mostraremos que $Y_1 \cup Y_2 = Z(T_1 T_2)$ onde $T_1 T_2$ é o conjunto dos produtos entre um elemento de T_1 e um elemento de T_2 .

Se $P \in Y_1 \cup Y_2$ então ou $P \in Y_1$ ou $P \in Y_2$, dado $f \in T_1 T_2$ temos que $f = gh$ com $g \in T_1$ e $h \in T_2$, suponha sem perda de generalidade que $P \in Y_1$, portanto $g(P) = 0$ e portanto temos que

$$f(P) = g(P)h(P) = 0.$$

Assim $P \in Z(T_1 T_2)$ logo $Y_1 \cup Y_2 \subset Z(T_1 T_2)$.

Reciprocamente, tome $P \in Z(T_1 T_2)$. Suponha sem perda de generalidade que $P \notin Y_1$, então existe um $f \in T_1$ tal que $f(P) \neq 0$. Como para qualquer $g \in T_2$, $fg(P) = 0$ implica que $g(P) = 0$, e portanto $P \in Y_2$, oque implica $P \in Y_1 \cup Y_2$. Portanto $Y_1 \cup Y_2 \supset Z(T_1 T_2)$.

Seja $Y_\alpha = Z(T_\alpha)$ é uma família de conjuntos algébricos, suponha $P \in \bigcap Y_\alpha$, então $P \in Z(T_\alpha)$ para todo α , assim temos que $P \in Z(\bigcup T_\alpha)$. Portanto $Y_\alpha \subset Z(\bigcup T_\alpha)$.

Agora considere $P \in Z(\bigcup T_\alpha)$, ou seja, para todo $f \in \bigcup T_\alpha$ temos que $f(P) = 0$, portanto $P \in Z(T_\alpha)$, ou seja, $P \in \bigcap Y_\alpha$. Isto implica que $Y_\alpha \supset Z(\bigcup T_\alpha)$. Portanto

$$\bigcap Y_\alpha = Z(\bigcup T_\alpha),$$

então $\bigcap Y_\alpha$ é um conjunto algébrico. ■

Exemplo 15 Sejam $\mathfrak{a} \subset S$ um ideal homogêneo e $f \in S$ um polinômio homogêneo de grau maior que 0, tal que $f(P) = 0$ para todo $P \in Z(\mathfrak{a})$ em \mathbb{P}^n , então $f^q \in \mathfrak{a}$ para algum $q > 0$.

Temos que $f \in I(Z(\mathfrak{a}))$ e além disso $Z(\mathfrak{a}) \subset Z(f)$.

Definição 18 Definimos a topologia de Zariski em \mathbb{A}^n com os abertos sendo os complementares de um conjunto algébrico. De fato é uma topologia, pois a Proposição 7 garante as propriedades de união de dois abertos, interseção de uma família de abertos e que os conjuntos vazios e \mathbb{A}^n são abertos.

Exemplo 16 Considere o espaço afim \mathbb{A}^1 com a topologia de Zariski, como todo ideal de $A = k[x]$ é principal, então todo conjunto algébrico é um conjunto de zeros de um único polinômio. Portanto, sendo k algebricamente fechado temos que qualquer $f \in A$ pode ser escrito como $f = c(x - a_1) \dots (x - a_n)$ com $c, a_1, \dots, a_n \in k$, logo $Z(f) = \{a_1, \dots, a_n\}$. Portanto qualquer conjunto algébrico de \mathbb{A}^1 é um conjunto finito.

Definição 19 Um conjunto não vazio Y de um espaço topológico X é dito irredutível se não existem Y_1 e Y_2 subconjuntos próprios tais que $Y = Y_1 \cup Y_2$ em que cada um é fechado em Y . O conjunto vazio não é considerado irredutível.

Exemplo 17 \mathbb{A}^1 é um espaço topológico irredutível.

Com a topologia de Zariski temos que todos os subconjuntos fechados próprios são finitos, e como \mathbb{A}^1 é infinito segue que não existem fechados A_1 e A_2 tais que $\mathbb{A}^1 = A_1 \cup A_2$.

Outra definição equivalente para caracterizar um conjunto irredutível X é se dado quaisquer dois abertos A_1 e A_2 em X a interseção entre eles é não vazia, de fato caso se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ teremos que o complementar da interseção é o X e então

$$\begin{aligned} X &= (A_1 \cap A_2)^c \\ &= (A_1)^c \cup (A_2)^c. \end{aligned}$$

Note que $(A_1)^c$ e $(A_2)^c$ são fechados, isso contraria o fato de X ser irredutível, logo X é irredutível se, e só se, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ para quaisquer $A_1, A_2 \subset X$ abertos.

Analogamente, se X é um conjunto tal que para quaisquer dois abertos A_1 e A_2 temos $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, então X será irredutível, de fato se X não for irredutível existem fechado próprios B_1, B_2 tais que $X = B_1 \cup B_2$, então temos que B_1^c e B_2^c são complementares e também temos

$$B_1^c \cap B_2^c = (B_1 \cup B_2)^c = \emptyset.$$

pois $B_1 \cup B_2 = X$, ou seja $B_1^c \cap B_2^c = \emptyset$, o que contradiz a hipótese, logo X é irredutível.

Exemplo 18 Se Y é um subconjunto aberto de um espaço irredutível X então, Y é irredutível e denso em X .

De fato, pela equivalência se X é um conjunto irredutível e Y é um subconjunto aberto então dado qualquer $a \in X$ e qualquer vizinhança U_a temos $Y \cap U_a \neq \emptyset$, pois X é irredutível, logo todo $a \in X$ é um ponto limite de Y portanto $\bar{Y} = X$ como queríamos.

Definição 20 Uma variedade algébrica afim (ou variedade afim) é um subconjunto irredutível fechado de \mathbb{A}^n com a topologia induzida. Um subconjunto aberto de uma variedade afim é chamado de variedade quase afim.

Teorema 1 (Hilbert's Nullstellensatz) Seja k um corpo algebricamente fechado, seja \mathfrak{a} um ideal em $A = k[x_1, \dots, x_n]$ e seja $f \in A$ um polinômio qual se anula em todos os pontos de $Z(\mathfrak{a})$. Então $f^r \in \mathfrak{a}$ para algum inteiro $r > 0$.

Definição 21 Seja $Y \subset \mathbb{A}^n$ subconjunto qualquer, definimos o ideal de Y em A o conjunto $I(Y)$ dado por

$$I(Y) = \{f \in A \mid f(P) = 0 \text{ para todo } P \in Y\}.$$

Proposição 8 (a) Se $T_1 \subseteq T_2$ são subconjuntos de A , então $Z(T_1) \supseteq Z(T_2)$.

(b) Se $Y_1 \subseteq Y_2$ são subconjuntos de \mathbb{A}^n então $I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$.

(c) Para quaisquer dois subconjuntos Y_1, Y_2 de \mathbb{A}^n temos $I(Y_1) \cup I(Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

(d) Para qualquer ideal $\mathfrak{a} \subset A$, $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ o radical de \mathfrak{a} .

(e) Para qualquer subconjunto $Y \subseteq \mathbb{A}^n$, $Z(I(Y)) = \bar{Y}$, o fecho de Y .

Prova: **(a)**, **(b)**, e **(c)** são diretos, o item **(d)** é consequência do Hilbert's Nullstellensatz.

Para a prova do item **(e)**, note que $Y \subseteq Z(I(Y))$ o qual é fechado, portanto $\bar{Y} \subseteq Z(I(Y))$. Por outro lado, seja W um fechado qualquer contendo Y , então $W = Z(\mathfrak{a})$ para algum ideal \mathfrak{a} . Então $Z(\mathfrak{a}) \supseteq Y$ pelo item (b), $I(Z(\mathfrak{a})) \subseteq I(Y)$, mas certamente $\mathfrak{a} \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$, então pelo item (a) segue que $W = Z(\mathfrak{a}) \supseteq Z(I(Y))$. Portanto $Z(I(Y)) = \bar{Y}$. ■

Corolário 1 Existe uma bijeção entre os conjuntos algébricos de \mathbb{A}^n e os ideais radicais em \mathbb{A}^n (isto é, os ideais que são iguais aos seu próprio radical) dada por $Y \mapsto I(Y)$ e $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$ que inverte a inclusão de conjuntos. Portanto, um conjunto algébrico é irredutível, se e somente se, ele é um ideal primo.

Prova: Pelos itens **(d)** e **(e)** da Proposição 8 temos que essa aplicação é bijetora e pelos itens **(a)** e **(b)** temos que essa aplicação inverte a inclusão.

(\Rightarrow) Seja $fg \in I(Y)$, então $Y \subseteq Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$. Portanto

$$Y = (Y \cap Z(f)) \cup (Y \cap Z(g)),$$

em que ambos são conjuntos fechados de Y , como Y é irredutível, segue que $Y = Y \cap Z(f)$, ou $Y = Y \cap Z(g)$, ou seja $f \in I(Y)$ ou $g \in I(Y)$ portanto $I(Y)$ é primo.

(\Leftarrow) Seja \mathfrak{p} um ideal primo, e suponha que $Z(\mathfrak{p}) = Y_1 \cup Y_2$. Então $\mathfrak{p} = I(Y_1) \cap I(Y_2)$, logo ou $\mathfrak{p} = I(Y_1)$ ou $\mathfrak{p} = I(Y_2)$. Portanto $Z(\mathfrak{p}) = Y_1$ ou $Z(\mathfrak{p}) = Y_2$, de todo modo $Z(\mathfrak{p})$ é irredutível. ■

Exemplo 19 \mathbb{A}^n é irredutível pois corresponde ao ideal zero em $A[x_0, \dots, x_n]$ o qual é primo.

Note que o conjunto de zeros do ideal zero $\mathfrak{p} = \{0\}$ é $Z(\mathfrak{p}) = \mathbb{A}^n$ como é \mathfrak{p} é primo segue pelo Corolário 1 que $Z(\mathfrak{p}) = \mathbb{A}^n$ é irredutível.

Proposição 9 Seja X um espaço topológico Noetheriano, então todo subconjunto fechado não vazio Y pode ser expresso como uma união finita $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ de conjuntos fechados irredutíveis Y_i . Suponha que $Y_i \supsetneq Y_j$ para $i \neq j$, então Y_i são unicamente determinados. Os Y_i são chamados de componentes irredutíveis de Y .

Prova: (Existência). Seja \mathbb{G} o conjunto de subconjuntos fechados não vazios de X que não podem ser escritos como uma união finita de subconjuntos fechados irredutíveis. Se \mathbb{G} é não vazio, então como X é Noetheriano segue que \mathbb{G} possui um elemento minimal Y . Então Y não é irredutível por construção. Portanto existem subconjuntos fechados próprios Y' e Y'' tais que $Y = Y' \cup Y''$. Pela minimalidade de Y cada Y' e Y'' não pode ser escrito como união de subconjuntos fechados irredutíveis, portanto Y também não pode, absurdo. Concluimos assim que todo conjunto fechado Y pode ser escrito como a união de $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ de conjuntos irredutíveis.

(Unicidade) Suponha que $Y = Y'_1 \cup \dots \cup Y'_s$ seja uma outra representação para Y . Então $Y'_1 \subseteq Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ então $Y'_1 = \bigcup (Y'_1 \cap Y_i)$. Mas Y'_1 é irredutível, então $Y'_1 \subseteq Y_i$ para algum i , a menos de ordem dizemos que $i = 1$, Analogamente concluimos que $Y_1 \subseteq Y'_j$ para algum j , e portanto $Y_1 = Y'_1$, repetindo o processo sucessivamente chegamos que $Y_i = Y'_i$ para todo $i = 1, \dots, r$, portanto as escritas são iguais e isso garante a unicidade. ■

Corolário 2 Todo conjunto algébrico em \mathbb{A}^n pode ser expresso unicamente como uma união de variedades, onde nenhuma está contido em outra.

Definição 22 Se X é um espaço topológico, definimos como dimensão de X (denotado por $\dim X$) o supremo de todos os inteiros n tais que existe um cadeia $Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n$ de subconjuntos fechados irredutíveis de X . Definimos a dimensão de um afim ou quase afim variedade sendo dimensão dele como um espaço topológico.

Exemplo 20 A dimensão de \mathbb{A}^1 é 1, pois os únicos subconjuntos fechados e irredutíveis de \mathbb{A}^1 são o vazio e o próprio \mathbb{A}^1 .

Definição 23 Seja $F = \{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathbb{A}[x_1, \dots, x_n]$ uma família de polinômios de grau 1, então dizemos o conjunto dado por $Z(F)$ é uma variedade linear afim em \mathbb{A}^n .

A forma geométrica que essa variedade linear assume varia de acordo com o espaço afim onde ela se encontra, por exemplo, considere em \mathbb{R}^2 o polinômio $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grau um, então $Z(f)$ será uma reta em \mathbb{R}^2 , em \mathbb{R}^3 se $f \in \mathbb{R}[x, y, z]$ é um polinômio de grau

1, então $Z(f)$ define um plano em \mathbb{R}^3 . Em geral uma variedade linear definido por um polinômio de grau 1 em \mathbb{A}^n terá dimensão $n - 1$.

2.3 Exemplos Complementares

Nessa seção descrevemos alguns exemplos e resultados relacionados à Geometria Algébrica e à Álgebra Comutativa que não são essenciais para o estudo de defeito de secante, mas que são interessantes para o leitor se familiarizar com o assunto.

Exemplo 21 Todo conjunto finito de \mathbb{A}^n é algébrico.

Provemos primeiro que vale para o conjunto unitário $\{a\} \subset \mathbb{A}^n$ com $a = (a_1, \dots, a_n)$. Considere os polinômios $v_1 = x_1 - a_1, v_2 = x_2 - a_2, \dots, v_n = x_n - a_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ então

$$v_i(a) = a_i - a_i = 0$$

para todo $i = 1, \dots, n$, portanto $\{a\} \subset Z(v_1, \dots, v_n)$. Perceba que $Z(v_1, \dots, v_n) = \{a\}$ pois se $b = (b_1, \dots, b_n) \in Z(v_1, \dots, v_n)$ então

$$b_i - a_i = 0 \Rightarrow b_i = a_i$$

para todo $i = 1, \dots, n$, ou seja, $a = b$. Portanto $Z(v_1, \dots, v_n) = \{a\}$. Isso mostra que $\{a\}$ é um conjunto algébrico.

Se $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ é um conjunto finito de k elementos então $B = \{b_1\} \cup \dots \cup \{b_k\}$. Como provamos acima cada $\{b_i\}$ é um conjunto algébrico, como B é a união finita de conjuntos algébricos segue que B é algébrico, portanto qualquer conjunto finito é algébrico.

Exemplo 22 Todo subconjunto algébrico de \mathbb{A}^1 não trivial é finito.

De fato em \mathbb{A}^1 considere $X = Z(I)$ um conjunto algébrico onde $I \subset k[x]$. Para qualquer polinômio não nulo $f \in k[x]$ temos que $Z(f)$ é finito e como $Z(I) \subset Z(f)$ para todo $f \in I$ temos que $Z(I)$ é finito.

Exemplo 23 O espaço \mathbb{A}^2 munido com a topologia de Zariski não é equivalente ao produto de espaços $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ com a topologia do produto.

De fato, tome o conjunto algébrico $X = Z(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$. Note que X é um conjunto algébrico de \mathbb{A}^2 e é composto pelos elementos do círculo unitário, que por sua vez possui infinitos elementos. Mostraremos que X não é um conjunto algébrico de $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$. De fato, suponha que

$$X = A_1 \times A_2,$$

com A_1, A_2 conjuntos algébricos de \mathbb{A}^1 . Pelo Exemplo 22 temos que ou A_1, A_2 são finitos ou $A_1, A_2 = \mathbb{A}^1$, vamos separar por casos.

Caso A_1 e A_2 sejam finitos então $A_1 \times A_2$ é um conjunto finito o que seria um absurdo pois X possui infinitos elementos.

Caso $A_1 = A_2 = \mathbb{A}^1$ então $A_1 \times A_2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, o que também é um absurdo pois $X \neq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ basta ver que $(0, 0) \notin X$ mas $(0, 0) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$.

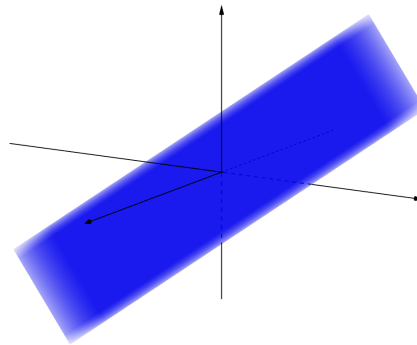
Caso $A_1 = \mathbb{A}^1$ e A_2 seja finito, então $A_1 \times A_2$ é o conjunto de retas paralelas $\bigcup Z(x - a)$ com $a \in A_2$. Portanto existe um numero finito de valores de y tais que $(x, y) \in A_1 \times A_2$, porém existe infinitos y tais que $(x, y) \in X$ para algum $x \in \mathbb{A}^1$. Isso implica que X é diferente de $A_1 \times A_2$.

Portanto em todos os casos X não pode ser escrito como o produto cartesiano de conjuntos algébricos em $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$. Isso implica que X não é um conjunto algébrico de $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, mas é algébrico em \mathbb{A}^2 , logo $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ não é equivalente a \mathbb{A}^2 .

Exemplo 24 Em \mathbb{A}^2 uma variedade linear é sempre uma reta pois dado um polinômio $f(x, y) = ax + by + c$ o conjunto dos zeros de f definem uma reta.

Exemplo 25 Em \mathbb{C}^3 tome $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ com $f(x, y, z) = 4x - 5y + 10z$ então $Z(f)$ define um plano

Figura 2.4: Exemplo 25



Definição 24 Um espaço topológico X é chamado Noetheriano se satisfaz a seguinte propriedade: para qualquer sequência $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$ de conjuntos fechados existe um inteiro r tal que $Y_r = Y_{r+1} = Y_{r+2} = \dots$.

Proposição 10 \mathbb{A}^n é um espaço Noetheriano.

Prova: De fato, seja $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$ uma sequência de conjunto fechados, então $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq \dots$ é uma cadeia crescente de ideais em $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Como A é um anel Noetheriano, então existe r inteiro tal que, $I(Y_i) = I(Y_r)$ para todo $i \geq r$, logo $Y_i = Z(I_i) = Z(I_r) = Y_r$, portanto \mathbb{A}^n é Noetheriano. ■

Definição 25 Se $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ é um conjunto algébrico afim, definimos o anel coordenado afim $A(Y)$ de Y por $\mathbb{A}/I(Y)$.

Definição 26 Em um espaço topológico X , definimos a dimensão de X denotada por $\dim X$ como sendo o supremo de todos os inteiros n tais que existe uma cadeia $Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n$ de subconjuntos fechados irreduzíveis de X . Definimos a dimensão de uma variedade afim ou quase-afim como sendo a sua dimensão como espaço topológico.

Definição 27 Em um espaço topológico A , a *altura* de um ideal primo \mathfrak{p} é o supremo de todos os inteiros n tais que existe uma cadeia $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$ de ideais primos distintos. Definimos a dimensão de A como sendo o supremo das *alturas* de todos os ideais primos.

Proposição 11 Se Y é um conjunto algébrico afim, então a dimensão de Y é igual à dimensão do seu anel de coordenadas afim $A(Y)$.

Prova: Se Y é um conjunto algébrico afim de \mathbb{A}^n então os subconjuntos fechados irreduzíveis de Y correspondem aos ideais primos de $A = k[x_1, \dots, x_n]$ que contém $I(Y)$. Estes estão em correspondência com os ideais primos de $A(Y)$. Como $\dim Y$ é o tamanho da maior cadeia de ideais primos em $A(Y)$ logo eles possuem a mesma dimensão. ■

Teorema 2 Seja k um corpo e B um domínio de integridade o qual é uma k -álgebra finitamente gerada. Então

(a) A dimensão de B é igual ao grau de transcendência do corpo quociente $k(B)$ de B sobre k .

(b) Para ideal primo \mathfrak{p} de B , temos que

$$\text{altura}(\mathfrak{p}) + \dim(B/\mathfrak{p}) = \dim B.$$

Prova: [15] Teorema 1.8A.

Proposição 12 A dimensão de \mathbb{A}^n é n .

Prova: De acordo com a Proposição 11 temos que $\dim(k[x_1, \dots, x_n]) = n$ e portanto segue do item (a) do Teorema 2 que $\dim(\mathbb{A}^n) = \dim(k[x_1, \dots, x_n]) = n$. ■

Proposição 13 Seja A um domínio de integridade Noetheriano, A é um domínio de fatoração única, se e somente se, todo ideal primo de tamanho 1 é principal.

Prova: [15] Teorema 1.12A.

Proposição 14 Uma variedade Y em \mathbb{A}^n tem dimensão $n - 1$ se e somente se Y é o conjunto de zeros $Z(f)$ de um polinômio não constante irreduzível em $A = k[x_1, \dots, x_n]$.

Prova: Primeiro mostraremos que se f é um polinômio irreduzível então $Z(f)$ é uma variedade. De fato, como f é irreduzível o ideal $\mathfrak{p} = (f)$ é primo, portanto \mathfrak{p} tem altura 1 e a variedade $Z(f)$ possui dimensão $n - 1$.

Suponhamos que $\dim(Y) = n - 1$, então pela Proposição 13 temos que Y é um ideal primo, e como o anel de polinômios A é um domínio de fatoração única, segue que todo ideal é principal, portanto $Y = Z(f)$ com f irreduzível pois Y é primo. ■

Exemplo 26 A curva cúbica torcida $Y = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in k\}$ é uma variedade afim de \mathbb{A}^3 de dimensão 1.

Provaremos que o ideal de Y dado por $I(Y) = (y - x^2, z - x^3)$ é um conjunto algébrico irreduzível. Para isso mostraremos que $I(Y)$ é primo e aplicaremos o Corolário 1.

Sejam f, g tais que $fg \in I(Y)$. Vamos utilizar os seguintes isomorfismos $k[x, y, z] \cong (k[x, y])[z], k[x, y] \cong (k[x])[y]$ e pelo algoritmo da divisão para polinômios em uma variável temos

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x^3 - z)f_1(x, y, z) + (x^2 - y)f_2(x, y) + f_3(x), \\ g(x, y, z) &= (x^3 - z)g_1(x, y, z) + (x^2 - y)g_2(x, y) + g_3(x). \end{aligned}$$

Como $fg \in I(Y)$ então $f_3(x) \cdot g_3(x) \in I(Y)$ portanto

$$f_3(x) \cdot g_3(x) = (x^3 - z)h_1(x, y, z) + (x^2 - y)h_2(x, y).$$

Considerando $(x, y, z) = (t, t^2, t^3)$ temos $f_3(t) \cdot g_3(t) = 0$ para todo $t \in k$, como k é algebricamente fechado temos que $f_3 \cdot g_3 = 0$, então ou $f_3 = 0$ ou $g_3 = 0$, logo temos que $f \in I(Y)$ ou $g \in I(Y)$. Portanto $I(Y)$ é primo, pelo Corolário 1 concluímos que Y é irreduzível.

Definição 28 Uma variedade algébrica X de dimensão d em \mathbb{A}^n é dita não degenerada se não existe $n' < n$ tal que $X \subset \mathbb{A}^{n'}$.

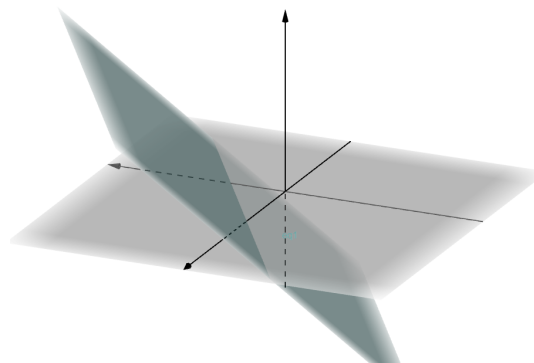
Exemplo 27 Em \mathbb{C}^3 a esfera é um variedade não degenerada, pois a esfera é dada por $S = Z(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ o que define uma quádrlica em \mathbb{C}^3 , portanto S é não degenerada.

Exemplo 28 Todo hiperplano é degenerado, pois ele está em um espaço isomorfo a \mathbb{A}^2 . Considere \mathbb{C}^3 então o hiperplano dado por

$$\pi = 8x + 5y - 10z + 10$$

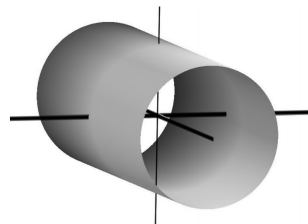
Possui representação gráfica:

Figura 2.5: Exemplo 28



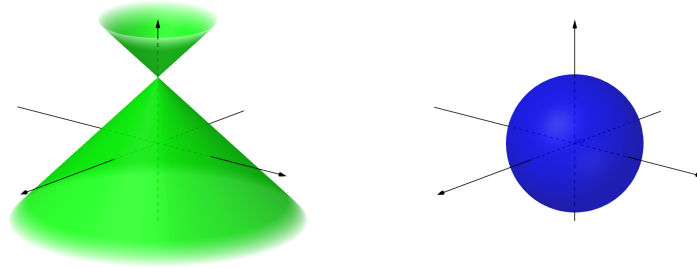
Exemplo 29 Em \mathbb{R}^3 considere $f = x^2 + z^2 - 1$. Portanto a variedade algébrica dada por $V = Z(f)$ é um cilindro representado geometricamente por pela Figura 2.6

Figura 2.6: Exemplo 29



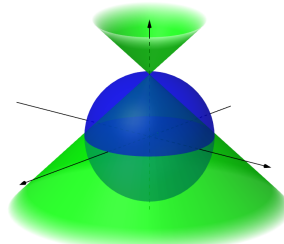
Exemplo 30 Em \mathbb{R}^3 considere os polinômios $f = (z-2)^2 - x^2 - y^2$ e $g = (x^2 + y^2 + z^2 - 4)$, então temos as variedade algébricas $C = Z((z-2)^2 - x^2 - y^2)$ e $E = Z(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$, onde C é um cone e E é uma esfera de raio 2.

Figura 2.7: Representação gráfica do cone C e a esfera E



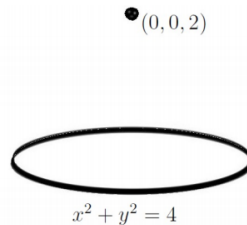
Pela Proposição 7 temos que a união de duas variedade algébricas é uma variedade algébrica, logo $Z(f) \cup Z(g)$ é uma variedade algébrica dada por

Figura 2.8: Representação gráfica da união do cone C e a esfera E



Além disso o conjunto dado por $X = Z(f, g)$ é uma variedade algébrica também e ela é dada pela interseção do cone C com a esfera E .

Figura 2.9: Representação gráfica da interseção entre o cone C e a esfera E



O exemplo acima nos induz a pensar a seguinte propriedade: seja a família de polinômios $F = \{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathbb{A}[x_1, \dots, x_n]$, então a variedade algébrica dada por $V = Z(F)$ é igual a a interseção de cada $Z(f_i)$ com $i = 1, \dots, k$, ou seja,

$$V = Z(F) = Z(f_1) \cap \dots \cap Z(f_k).$$

Definição 29 Chamamos de espectro de A o conjunto de todos os ideais primos de A , e denotamos por $\text{spec}(A)$.

Exemplo 31 O espectro $\text{spec}(A)$ de um anel comutativo A com a topologia de Zariski é um conjunto irredutível, se, e somente se, o nilradical de A é um ideal primo.

Considere $f \in A$ e denotemos por X_f o complemento de $V(f)$. Pelo Corolário 1 $V(f)$ é o conjunto de todos os ideais primos de A que contém f , portanto a família $\{X_f\}_{f \in A}$ define um base na topologia de Zariski para $\text{spec}(A)$. Se $\text{spec}(A)$ é irredutível então a

interseção entre quaisquer dois ideais primos de A é não vazia, pois eles são fechados na topologia de Zariski.

(\Rightarrow) Sejam $x, y \in A$ com $xy \in \mathfrak{N}(A)$. Então $xy \in \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \subset A$ primo. Temos três casos

1. $x \in \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \text{spec}(A) \Rightarrow x \in \mathfrak{N}(A)$.
2. $y \in \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \text{spec}(A) \Rightarrow y \in \mathfrak{N}(A)$.
3. $\text{spec}(A) = V(\{x\}) \cup V(\{y\})$, como $\text{spec}(A)$ é irredutível isso implica que $\text{spec}(A) = V(\{x\})$ ou $\text{spec}(A) = V(\{y\})$.

Em todos os 3 casos temos que $\text{spec}(A)$ é um ideal primo.

(\Leftarrow) Suponha que $\text{spec}(A)$ não é irredutível. Portanto, existem fechados próprios $V(E)$ e $V(F)$, com $E, F \subset A$, tais que

$$\text{spec}(A) = V(E) \cup V(F).$$

Portanto existem $\mathfrak{p} \in V(E) \setminus V(F)$ e $\mathfrak{q} \in V(F) \setminus V(E)$.

Tome $x \in F \setminus \mathfrak{p}$ e $y \in E \setminus \mathfrak{q}$. Mostremos que $xy \in \mathfrak{N}(A)$ mas $x, y \notin \mathfrak{N}(A)$. De fato, $x, y \notin \mathfrak{N}(A)$ pois $x \notin \mathfrak{p}$ e $y \notin \mathfrak{q}$. Porém, $xy \in \mathfrak{N}(A)$, pois dado um ideal primo \mathfrak{r} de A temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{r} \in \text{spec}(A) &= V(E) \cup V(F) \\ &\Rightarrow E \subset \mathfrak{r} \text{ ou } F \subset \mathfrak{r} \\ &\Rightarrow y \in \mathfrak{r} \text{ ou } x \in \mathfrak{r} \Rightarrow xy \in \mathfrak{r}. \end{aligned}$$

Exemplo 32 Considere os anéis $A_1 = \mathbb{C}[x, y]/(xy)$ e $A_2 = \mathbb{C}[x, y]/(x^2)$.

Note que A_1 e A_2 não são domínios. Podemos escrever

$$A_1 = \{\overline{f(x)} + \overline{g(y)} : f, g \in \mathbb{C}[t]\} \cong \mathbb{C}[x] \oplus \mathbb{C}[y], \text{ onde } \overline{xy} = 0$$

$$A_2 = \{\overline{f(y)} + \overline{xg(y)} : f, g \in \mathbb{C}[t]\} \cong \mathbb{C}[y] \oplus x\mathbb{C}[y], \text{ onde } \overline{x^2} = 0$$

Note que \overline{x} é nilpotente em A_2 , pois $(\overline{x})^2 = \overline{x^2} = 0$. Além disso, A_1 não possui nilpotentes pois:

$$\begin{aligned} f \in \mathbb{C}[x, y], \overline{f^n} &= 0 \in A_1 \\ &\Rightarrow f^n = xyg, g \in \mathbb{C}[x, y] \\ &\Rightarrow x|f^n \Rightarrow x|f \\ &\Rightarrow y|f^n \Rightarrow y|f. \end{aligned}$$

Com um argumento similar mostra-se que o $\mathfrak{N}(A_2) = (\overline{x})$. Note que $\mathfrak{N}(A_1) = 0$, mas ele não é primo pois A_1 não é domínio. Note que $\mathfrak{N}(A_2) = (\overline{x})$ é primo, pois $A_2/(\overline{x}) \cong \mathbb{C}[y]$ é domínio. Portanto, pelo exemplo anterior concluímos que $\text{spec}(A_2)$ é irredutível, enquanto que $\text{spec}(A_1)$ não é irredutível.

3 Variedades Projetivas

Nesse capítulo estudaremos os conceitos fundamentais sobre variedades algébricas sobre o espaço projetivo. Usaremos como texto base o livro [15], portanto para um estudo mais aprofundado é recomendado a leitura do mesmo.

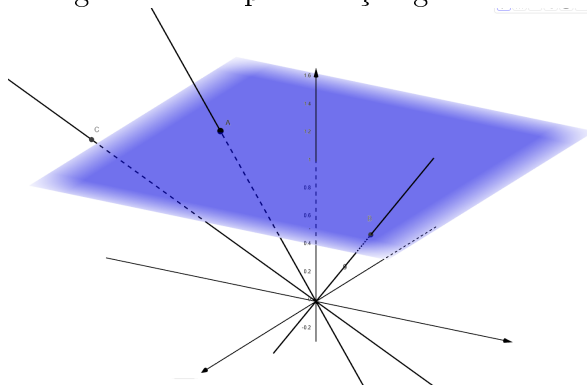
3.1 Espaço Projetivo

Seja k um corpo algebricamente fechado. Definimos o n -espaço projetivo sobre k , denotado por \mathbb{P}_k^n (ou apenas \mathbb{P}^n), como o conjunto de todas as retas de \mathbb{A}^{n+1} passando pela origem, esse conjunto define uma classe de equivalência dos elementos não nulos de \mathbb{A}^{n+1} onde se $P, Q \in \mathbb{A}^{n+1}$ então $P \equiv Q$ se e somente se P, Q e 0 são colineares. De fato isso é uma classe de equivalência, pois sendo P, Q e $R \in \mathbb{P}^n$ temos que:

1. obviamente $P \equiv P$ pois sempre existe uma reta passando por dois pontos P e 0 .
2. se $P \equiv Q$ então eles são colineares com o 0 e portanto Q, P e 0 são colineares e $Q \equiv P$.
3. se $P \equiv Q$ e $Q \equiv R$ então existem retas f e g passando por $P, Q, 0$ e $Q, R, 0$ respectivamente, como existe uma única reta passando por Q e 0 então as retas f e g são iguais e portanto P, R e 0 são colineares assim $P \equiv R$.

Exemplo 33 Considere o espaço projetivo \mathbb{P}^2 . Podemos construir o espaço \mathbb{P}^2 da seguinte forma: considere o plano $z = 1$ e tome todas as retas em k^3 que passam pela origem e interceptam o plano $z = 1$, então essas retas definem uma relação de equivalência em \mathbb{P}^2 onde dois pontos estão na mesma classe de equivalência se, e somente se, eles estão na mesma reta passando pela origem.

Figura 3.1: Representação gráfica de \mathbb{P}^2



Definição 30 Em \mathbb{P}^n um ponto P é representado por uma $n + 1$ -upla $P = (a_0 : \dots : a_n)$, os valores a_0, \dots, a_n são chamados coordenadas homogêneas de P .

Considere $S = k[x_0, \dots, x_n]$ um anel de polinômios, então podemos separar os elementos de S por graus, mais precisamente qualquer polinômio de S pode ser escrito como soma de polinômios homogêneos. Considere S_d o conjunto de todos os polinômios homogêneos de S com grau d então temos $S = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} S_d$.

Definição 31 Definimos por S^h o subconjunto de todos os polinômios homogêneos de S .

Definição 32 Um ideal $P \subset S$ é dito homogêneo se e somente se ele pode ser gerado por elementos homogêneos. A soma, o produto, a interseção e o radical de ideais homogêneos é também um ideal homogêneo.

Em \mathbb{P}^n não podemos definir uma função a partir de um $f \in S$ qualquer, pois um ponto de \mathbb{P}^n terá varias representações em coordenadas homogêneas. Se f é um polinômio homogêneo de grau d então $f(Za_0, \dots, Za_n) = Z^d f(a_0, \dots, a_n)$, ou seja, para qualquer escolha de coordenadas homogêneas de um ponto P temos que a condição de $f(P) = 0$ está bem definida. Portanto, para estudar zeros de polinômios \mathbb{P}^n é preciso fazer a homogenização dos polinômios.

De maneira análoga ao que fizemos para o espaço afim, chamamos de zeros de um polinômio homogêneo o conjunto dado por $Z(f) = \{p \in \mathbb{P}^n | f(P) = 0\}$. Se T é um conjunto qualquer de polinômios homogêneos de S definimos os zeros de T por

$$Z(T) = \{P \in \mathbb{P}^n | f(P) = 0 \text{ para todo } f \in T\}.$$

Definição 33 Um subconjunto Y de \mathbb{P}^n é dito um conjunto algébrico se existe um conjunto T de polinômios homogêneos de S tal que $Y = Z(T)$.

Proposição 15 A união de dois conjuntos algébricos é um conjunto algébrico. A interseção de uma família de conjuntos algébricos é um conjunto algébrico. O conjunto vazio e \mathbb{P}^n são conjuntos algébricos.

Prova: Sejam $Y_1 = Z(T_1)$ e $Y_2 = Z(T_2)$ dois conjuntos algébricos de \mathbb{P}^n , mostraremos que $Y_1 \cup Y_2 = Z(T_1 T_2)$ onde $T_1 T_2$ é o conjunto dos produtos entre um elemento de T_1 e um elemento de T_2 .

Se $P \in Y_1 \cup Y_2$ então ou $P \in Y_1$ ou $P \in Y_2$, dado $f \in T_1 T_2$ temos que $f = gh$ com $g \in T_1$ e $h \in T_2$. Suponha sem perda de generalidade que $P \in Y_1$, portanto $g(P) = 0$ e portanto temos que

$$f(P) = g(P)h(P) = 0.$$

Assim, $P \in Z(T_1 T_2)$ logo $Y_1 \cup Y_2 \subset Z(T_1 T_2)$.

Reciprocamente, tome $P \in Z(T_1 T_2)$. Suponha que $P \notin Y_1$, então existe um $f \in T_1$ tal que $f(P) \neq 0$. Como para qualquer $g \in T_2$, $fg(P) = 0$ implica que $g(P) = 0$. Assim $P \in Y_2$, o que implica $P \in Y_1 \cup Y_2$. Portanto $Y_1 \cup Y_2 \supset Z(T_1 T_2)$.

Seja $Y_\alpha = Z(T_\alpha)$ é uma família de conjuntos algébricos, mostraremos que $\bigcap Y_\alpha = Z(\bigcup T_\alpha)$.

Suponha $P \in \bigcap Y_\alpha$, então $P \in Z(T_\alpha)$ para todo α , assim temos que $P \in Z(\bigcup T_\alpha)$. Portanto $\bigcap Y_\alpha \subset Z(\bigcup T_\alpha)$.

Agora considere $P \in Z(\bigcup T_\alpha)$, ou seja, para todo $f \in \bigcup T_\alpha$ temos que $f(P) = 0$. Portanto $P \in Z(T_\alpha)$, ou seja, $P \in \bigcap Y_\alpha$. Isto implica que $\bigcap Y_\alpha \supset Z(\bigcup T_\alpha)$. Portanto

$$\bigcap Y_\alpha = Z(\bigcup T_\alpha),$$

e então $\bigcap Y_\alpha$ é um conjunto algébrico.

Perceba que $Z(1) = \emptyset$ onde 1 é o polinômio constante igual a 1, portanto \emptyset é um conjunto algébrico. Por outro lado, $Z(0) = \mathbb{P}^n$, pois qualquer ponto aplicado no polinômio nulo resulta na origem, portanto \mathbb{P}^n é um conjunto algébrico. ■

Definição 34 Definimos a topologia de Zariski em \mathbb{P}^n tomando os conjuntos abertos sendo o complemento de um conjunto algébrico.

Definição 35 Uma variedade algébrica projetiva é um conjunto algébrico irredutível em \mathbb{P}^n , com a topologia induzida. Um conjunto aberto de uma variedade projetiva é uma variedade quase projetiva. A dimensão de uma variedade projetiva é a sua dimensão como espaço topológico.

Exemplo 34 A curva racional normal dada por $Y = \{(s^3 : s^2t : st^2 : t^3) : (s : t) \in \mathbb{P}^1\} \subset \mathbb{P}^3_{(x:y:z:w)}$ é um variedade projetiva.

Mostraremos que a curva racional Y é dada pelo conjunto dos zeros do ideal $I = (wy - z^2, x^2w - y^3, xw - yz)$. De fato, seja $P = (x : y : z : w) \in Y$ então P é da forma $P = (s^3 : s^2t : st^2 : t^3)$ portanto temos

$$\begin{aligned} wy - z^2 &= s^2tt^3 - (st^2)^2 = 0 \\ x^2w - y^3 &= s^6t^3 - s^6t^3 = 0 \\ xw - yz &= s^3t^3 - s^2tst^2 = 0. \end{aligned}$$

Portanto temos que $P \in Z(I)$ e isso implica que $Y \subset Z(I)$.

Agora seja $P = (x : y : z : w) \in Z(I)$ um ponto. Se $w \neq 0$ então podemos assumir $w = 1$ e daí pelos geradores de I temos

$$y = z^2 \text{ e } x = zy = z^3,$$

portanto $p = (z^3 : z^2 : z : 1) \in Y$.

Se $w = 0$ então temos $z = 0$ e $y = 0$ e x é livre, então tomando $x = 1, s = 1$ e $t = 0$ o ponto P é da forma $P = (1 : 0 : 0 : 0) = (s^3 : s^2t : st^2 : t^3) \in Y$, isso implica que $I(Z) \subset Y$. Portanto $Z(I) = Y$, logo Y é algébrico.

Definição 36 Seja $S = k[x_0, \dots, x_n]$ e Y um subconjunto qualquer de \mathbb{P}^n . Definimos o ideal homogêneo de Y o conjunto

$$I(Y) = \{f \in S \mid f \text{ é homogêneo e } f(P) = 0 \text{ para todo } P \in Y\}.$$

Se Y é um conjunto algébrico, definimos o anel de coordenadas homogêneas de Y como sendo $S(Y) = S/I(Y)$.

Se $f \in S$ é um polinômio linear homogêneo, então o conjunto dos zeros de f é chamado de hiperplano. Em particular denotamos o conjunto de zeros de x_i por H_i , para $i = 0, 1, \dots, n$. Considere U_i o conjunto aberto $\mathbb{P}^n - H_i$. Então \mathbb{P}^n é coberto pela união dos U_i , pois se $P = (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$, então ao menos uma coordenada de P é diferente de zero, ou seja, $a_j \neq 0$ e portanto $P \in U_j$.

Considere um morfismo $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n$ da seguinte maneira: Se $P = (a_0 : \dots : a_n) \in U_i$, então $\phi_i(P) = Q$, onde Q é o ponto de coordenadas afins dado por

$$Q = \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right).$$

Note que ϕ_i esta bem definida desde que os índices $\frac{a_j}{a_i}$ independem da escolha de coordenadas homogêneas.

Proposição 16 [[15], Proposição 2.2] O morfismo ϕ_i é um homomorfismo de U_i com a topologia de Zariski induzida sobre \mathbb{P}^n .

Proposição 17 \mathbb{P}^n é um espaço topológico Noetheriano.

Prova: De fato, temos pela Proposição 10 que o espaço afim \mathbb{A}^n é Noetheriano. Considere uma cadeia de conjuntos $Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$ no espaço \mathbb{P}^n . Para cada Y_i existe um conjunto V_i em \mathbb{A}^n onde para cada $y \in Y_i$ temos que a classe de equivalência de y_i é igual a classe de algum $x_i \in V_i$, assim temos a cadeia de conjuntos $V_1 \supset V_2 \supset \dots$ em \mathbb{A}^n , como \mathbb{A}^n é Noetheriano temos que existe um inteiro r tal que para todo $s \leq r$ temos

$$V_s = V_{s+1}$$

Portanto, como os U_i representam as classes de equivalência dos Y_i temos que para todo $s \leq r$ que $Y_s = Y_{s+1}$. Concluimos assim que \mathbb{P}^n é Noetheriano. ■

Proposição 18 Seja $S = k[x_0, \dots, x_n]$ e S^h o subconjunto de todos os polinômios homogêneos de S . Então são válidas as seguintes propriedades:

1. Se $T_1 \subseteq T_2$ são subconjuntos de S^h então $Z(T_1) \supseteq Z(T_2)$.
2. Se $Y_1 \subseteq Y_2$ são subconjuntos de \mathbb{P}^n , então $I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$.
3. Para quaisquer dois subconjuntos Y_1, Y_2 de \mathbb{P}^n temos que $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.
4. Se $\mathfrak{a} \subset S$ é um ideal homogêneo com $Z(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$ então $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.
5. Para qualquer subconjunto $Y \subset \mathbb{P}^n$, $Z(I(Y)) = \overline{Y}$.

Prova:

1. Seja $p \in Z(T_2)$ ou seja para todo $f \in T_2$ temos $f(P) = 0$, tome um $g \in T_1$ então como $T_1 \subset T_2$ temos que $g \in T_2$ e logo $g(P) = 0$ para qualquer $g \in T_1$, portanto $p \in Z(T_1)$ o que implica que $Z(T_2) \subset Z(T_1)$.
2. Seja $f \in I(Y_2)$ então $f(P) = 0$ para todo $P \in Y_2$, como $Y_1 \subset Y_2$ então para todo $P_1 \in Y_1$ temos $f(P_1) = 0$, isso implica que $f \in I(Y_1)$ e portanto $I(Y_2) \subset I(Y_1)$.
3. Primeiro mostraremos que $I(Y_1 \cup Y_2) \subset I(Y_1) \cap I(Y_2)$. Considere $f \in I(Y_1 \cup Y_2)$, então para todo $P \in Y_1 \cup Y_2$ temos $f(P) = 0$. Portanto, para todo $x \in Y_1$ temos $x \in Y_1 \cup Y_2$, isso implica que $f(x) = 0$, logo $f \in I(Y_1)$. Analogamente mostra-se que $f \in I(Y_2)$, com isso temos que $f \in I(Y_1) \cap I(Y_2)$, ou seja

$$I(Y_1 \cup Y_2) \subseteq I(Y_1) \cap I(Y_2).$$

Agora mostraremos que $I(Y_1) \cap I(Y_2) \subset I(Y_1 \cup Y_2)$. Considere $g \in I(Y_1) \cap I(Y_2)$, então $g \in I(Y_1)$ e $g \in I(Y_2)$, isso nos dá que para todo ponto $p_1 \in Y_1$ temos

$$g(p_1) = 0,$$

e para todo $p_2 \in Y_2$ temos

$$g(p_2) = 0.$$

Portanto para todo ponto $p \in Y_1 \cup Y_2$ temos $g(p) = 0$, isso implica que $g \in I(Y_1 \cup Y_2)$, ou seja, $(Y_1 \cup Y_2) \supseteq I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

4. Pelo Hilbert's Nullstellensatz 1 temos que se $f \in I(Z(\mathfrak{a}))$ então existe algum $r > 0$ tal que $f^r \in \mathfrak{a}$, o que implica em $I(Z(\mathfrak{a})) \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Agora tomando $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ temos que existe $r > 0$ tal que $f^r \in \mathfrak{a}$, então $f^r(P) = 0$ para todo $P \in Z(\mathfrak{a})$, portanto temos que $f(P) = 0$, e assim $f \in I(Z(\mathfrak{a}))$, isto implica que

$$\sqrt{\mathfrak{a}} \subset I(Z(\mathfrak{a})).$$

5. Note que $Y \subset I(Z(Y))$ e como $I(Z(Y))$ é fechado, segue que o $\overline{Y} \subset I(Z(Y))$. Suponha que exista um outro conjunto fechado W tal que $Y \subset W$. Portanto temos que existe um ideal \mathfrak{a} tal que $W = Z(\mathfrak{a})$ e como $Y \subset W = Z(\mathfrak{a})$ pelo item (2) temos $I(Z(\mathfrak{a})) \subset I(Y)$ e pelo item (1) concluímos que

$$Z(I(Y)) \subset Z(I(Z(\mathfrak{a})) = Z(\mathfrak{a}) = W.$$

Assim, se um conjunto fechado W contém Y então $Z(I(Y)) \subset W$ e portanto $Z(I(Y)) = \overline{Y}$. ■

Proposição 19 Um conjunto algébrico $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ é irredutível se e somente se $I(Y)$ é um ideal primo.

Prova: (\Rightarrow) Suponha Y algébrico. Seja $fg \in I(Y)$, então $Y \subset Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$, pois dado $P \in Y$ temos que $fg(P) = 0$ logo $P \in Z(fg)$, então temos

$$Y = (Y \cap Z(f)) \cup (Y \cap Z(g)).$$

Considere os conjuntos fechados $Y_1 = (Y \cap Z(f))$ e $Y_2 = (Y \cap Z(g))$, então $Y = Y_1 \cup Y_2$, como Y é algébrico segue que $Y_1 \subset Y_2$ ou $Y_2 \subset Y_1$, isso implica que $Y = Y_1$ ou $Y = Y_2$. Suponha sem perda de generalidade que $Y = Y_1$ então $Y \subset (Y \cap Z(f))$ e portanto $Y \subset Z(f)$, com isso concluímos que $f \in I(Y)$ isso mostra que $I(Y)$ é primo.

(\Leftarrow) Seja $I(Y)$ primo. Suponha que existam fechados Y_1 e Y_2 tais que $Y = Y_1 \cup Y_2$, portanto pela Proposição 18 item (3) temos que $I(Y) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

Suponha $I(Y) \neq I(Y_1)$, caso contrário teríamos $I(Y_1) \subset I(Y_2)$ e isso implicaria em $Y_2 \subset Y_1$. Considere $f \in I(Y_1)$ tal que $f \notin I(Y)$, para todo $g \in I(Y_2)$ temos $fg \in I(Y_1) \cap I(Y_2) = I(Y)$, mas como $I(Y)$ é primo por hipótese temos que $f \in I(Y)$ ou $g \in I(Y)$, como $f \notin I(Y)$ então $g \in I(Y)$. Isto implica que $I(Y) = I(Y_2)$ e portanto $I(Y_2) \subset I(Y_1)$, pela Proposição 18 item (2) temos que $Y_1 \subset Y_2$, isso mostra que Y é irredutível. ■

Proposição 20 \mathbb{P}^n é irredutível nele mesmo.

Prova: Note que $I(\mathbb{P}^n) = \{0\}$ e como $S = k[x_1, \dots, x_n]$ é domínio de integridade segue que $\{0\}$ é um ideal primo e portanto $I(\mathbb{P}^n) = \{0\}$ é irredutível. ■

3.2 Morfismos

Primeiramente trabalharemos o conceito de função regular em uma variedade quase afim X em \mathbb{A}^n , posteriormente introduziremos esse conceito para variedades projetivas, para isso iremos considerar funções de uma variedade Y em um corpo k .

Definição 37 Seja X uma variedade algébrica quase afim. Uma função $f : X \rightarrow k$ é regular em um ponto $x \in X$ se existe uma vizinhança aberta U_x de x e polinômios $g, h \in A = k[x_1, \dots, x_n]$, tais que h não assume valor nulo em U_x e $f = g/h$ em U_x . Dizemos que f é regular em X se é regular em todo ponto de X .

Lema 1 Uma função regular f é contínua quando k está identificado com \mathbb{A}^1 na topologia de Zariski.

Prova: Mostraremos que f^{-1} leva um conjunto fechado em conjunto fechado. Para tal é suficiente mostrar que $f^{-1}(a) = \{P \in Y \mid f(P) = a\}$ é fechado para qualquer $a \in k$, provaremos que vale localmente para um subconjunto de Y . Um subconjunto Z de um espaço topológico Y é fechado se e somente se Y pode ser coberto por conjuntos abertos U tais que $Z \cap U$ é fechado em U para cada U . Então seja U um aberto o qual f pode ser representado como g/h com $g, h \in A$, e h não nulo em U . Então temos que

$$f^{-1}(a) \cap U = \{P \in U \mid g(P)/h(P) = a\}.$$

Mas $g(P)/h(P) = a$ se e somente se $(g - ah)(P) = 0$. Portanto $f^{-1}(a) \cap U = Z(g - ah) \cap U$ que é fechado, isso implica que $f^{-1}(a)$ é fechado em Y , portanto f é contínua. ■

Podemos enunciar a Definição 37 e o Lema 1 para um espaço projetivo. A partir daqui vamos considerar Y uma variedade quase projetiva de \mathbb{P}^n .

Definição 38 Seja Y uma variedade algébrica quase projetiva. Uma função $f : Y \rightarrow k$ é regular em um ponto $P \in Y$ se existir uma vizinhança aberta U com $p \in U \subset Y$, e polinômios homogêneos $g, h \in S = k[x_0, \dots, x_n]$, de mesmos graus, tal que h não se anula em U e $f = g/h$ em U . Dizemos que f é regular em Y se é regular em todo ponto de Y .

Definição 39 Seja k um corpo algebricamente fechado. Chamaremos de variedade sobre k uma variedade que seja afim, quase afim, projetiva ou quase projetiva definida sobre k . Se X, Y são duas variedades, um morfismo $\sigma : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua tal que para todo conjunto aberto $V \subset Y$ e toda função regular $f : V \rightarrow k$, a função $f(\sigma) : \sigma^{-1}(V) \rightarrow k$ é regular.

Exemplo 35 (Mergulho de Segre) Seja $\phi : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \rightarrow \mathbb{P}^N$ um morfismo dado por

$$(a_0 : \dots : a_r) \times (b_0 : \dots : b_s) \mapsto (a_i b_j)_{i=0, \dots, r; j=0, \dots, s}$$

onde $N = rs + r + s - 1$. Note que ϕ está bem definida e é injetiva. A imagem de ϕ é uma subvariedade de \mathbb{P}^N e é chamada Mergulho de Segre.

Proposição 21 Seja X uma variedade quase afim, e sejam f e g duas funções regulares tais que $f = g$ para algum aberto $U \subset X$, então $f = g$ em todo X .

Prova: De fato, desde que X é uma variedade quase afim ele é irredutível, e portanto todo aberto de X é denso. Como U é denso em X e f e g são contínuas segue que $f = g$ em todo X . ■

Definição 40 Seja k um corpo algebricamente fechado. Se X, Y são duas variedades sobre k , um morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua de modo que para todo conjunto aberto $V \subset Y$ e para toda função regular $f : V \rightarrow k$, a função $f \circ \phi : \phi^{-1}(V) \rightarrow k$ é regular.

Proposição 22 A composição de dois morfismos é um morfismo.

Podemos classificar um morfismo baseado em propriedades. Dizemos que um morfismo é um isomorfismo quando ele admite inversa e sua inversa é também um morfismo. Ou seja um isomorfismo é um morfismo bijetor.

Observação 3 Todo isomorfismo é bijetivo e bicontínuo, mas um morfismo bijetivo e bicontínuo não necessariamente é um isomorfismo, pois para isso sua inversa deve ser um isomorfismo.

Definição 41 Seja Y uma variedade. Denotamos por $\mathcal{O}(Y)$ o anel de todas as funções regulares de Y . Se P é um ponto de Y , definimos o anel local de P em Y por $\mathcal{O}_{P,Y}$ (ou apenas \mathcal{O}_P) o anel das funções que são regulares em um aberto $U \subset Y$ que contém P . Ou seja, um elemento de \mathcal{O}_P é um par $\langle U, f \rangle$ onde U é uma vizinhança aberta de P em Y e f é uma função regular em U .

Observação 4 Note que \mathcal{O}_P é um anel local. De fato o seu ideal maximal é o conjunto das funções regulares que se anulam em P . Se $f(P) \neq 0$, então $1/f$ é regular em alguma vizinhança de P . Portanto o corpo residual \mathcal{O}_P/m é isomorfo a k .

Definição 42 Seja Y uma variedade projetiva, definimos o corpo de funções de Y denotado por $K(Y)$ onde um elemento de $K(Y)$ é uma classe de equivalência dos pares $\langle U, f \rangle$, em que U é um subconjunto aberto não vazio de Y e f é uma função regular em U . Dois pares $\langle U, f \rangle$ e $\langle V, g \rangle$ serão iguais como classe de equivalência se $f = g$ em $U \cap V$. Os elementos de $K(Y)$ são chamados de funções racionais em Y .

Proposição 23 O corpo de funções $K(Y)$ é a união de todos os \mathcal{O}_P para todo $P \in Y$.

Note que $K(Y)$ é de fato um corpo. Desde de que Y é irredutível, quaisquer dois abertos não vazios possuem interseção não vazia. Portanto podemos definir adição e multiplicação em $K(Y)$, fazendo dele um anel.

Teorema 3 Seja $Y \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim com anel de coordenadas afim $A(Y)$ então

1. $\mathcal{O}(Y) \cong A(Y)$;
2. Para cada ponto $P \in Y$, seja $\mathfrak{m}_P \subseteq A(Y)$ o ideal das funções que se anulam em P . Então existe $P \mapsto \mathfrak{m}_P$ uma correspondência 1 – 1 entre os pontos de Y e os ideais maximais de $A(Y)$.
3. Para cada $P, \mathcal{O}_P \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$ e $\dim \mathcal{O}_P = \dim Y$;
4. $K(Y)$ é isomorfo ao corpo quociente de $A(Y)$.

Prova: [15] Teorema 3.2.

Proposição 24 Seja $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$ o conjunto aberto definido pela equação $x_i \neq 0$, então a função $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n$ é um isomorfismo de variedades.

Prova: Já mostramos que ϕ é um homomorfismo, então falta verificar que as funções regulares são as mesmas para qualquer conjunto aberto. Em U_i as funções regulares são localmente quocientes de polinômios homogêneos em x_0, \dots, x_n de mesmo grau. Em \mathbb{A}^n as funções regulares são localmente quocientes de polinômios em y_1, \dots, y_n . Perceba que essas duas definições são idênticas, portanto as funções regulares permanecem as mesmas como queríamos. ■

Definição 43 Seja $Y \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade projetiva de dimensão n . Considere um ponto $P \in Y$, então uma parametrização local de Y sobre o ponto P é uma aplicação da forma $\phi : \mathbb{A}^n \rightarrow U \cap Y$ onde $P \in U$ e $U \subset \mathbb{A}^N$.

Definição 44 Seja $Y \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim e seja $f_1, \dots, f_t \in k[x_1, \dots, x_n]$ o conjunto de geradores para o ideal de Y . Então Y é não singular em um ponto $P \in Y$ se o posto da matriz $\| (\partial f_i / \partial x_j)(P) \|$ é $n - m$ onde m é a dimensão de Y . Dizemos então que P é um ponto não singular ou ponto liso de Y . Se todos os pontos em Y são lisos então Y é dita uma variedade não singular.

Definição 45 Seja $Y \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade projetiva de dimensão n . Dizemos que $P \in Y$ é um ponto não singular ou ponto liso de Y se dada uma parametrização local $\phi : \mathbb{A}^n \rightarrow Y \cap U$ com $P \in U \subset \mathbb{A}^N$ sobre P temos que P é um ponto não singular de ϕ .

Definição 46 Seja S um anel graduado, e \mathfrak{p} um ideal primo homogêneo de S . Denotamos por $S_{(\mathfrak{p})}$ o subanel dos elementos de grau 0 na localização de S com respeito ao subconjunto multiplicativo T consistindo dos elementos homogêneos de S que não estão em \mathfrak{p} .

Teorema 4 Seja $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva com anel de coordenadas $S(Y)$. então as seguintes afirmações são válidas:

1. $\mathcal{O}(Y) = k$.
2. Para qualquer ponto $P \in Y$, seja $m_P \subseteq S(Y)$ o ideal gerado pelo conjunto de polinômios homogêneos $f \in S(Y)$ tal que $f(P) = 0$. Então $\mathcal{O}_P = S(Y)_{(m_P)}$.
3. $K(Y) \cong S(Y)_{(0)}$.

Prova: [15] Teorema 3.4.

Proposição 25 Seja X uma variedade qualquer e seja Y uma variedade afim. Então existe uma aplicação bijetiva de conjuntos dada por

$$\alpha : \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(A(Y), \mathcal{O}(X))$$

em que $\text{Hom}(X, Y)$ é o conjunto dos morfismos de variedades e $\text{Hom}(A(Y), \mathcal{O}(X))$ é o conjunto dos morfismos de k -álgebras.

Prova: [15] Proposição 3.5. ■

Corolário 3 Se X, Y são duas variedades afins, então X e Y são isomorfos se e somente se $A(X)$ e $A(Y)$ são isomorfos como k -álgebras

Lema 2 Seja X um variedade qualquer, e seja $Y \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim. Uma aplicação de conjuntos $\psi : X \rightarrow Y$ é um morfismo se e somente se $x_i \circ \psi$ é uma função regular em X para cada i , onde x_1, \dots, x_n são funções coordenadas em \mathbb{A}^n .

Corolário 4 Se X, Y são duas variedades afins, então X e Y são isomorfos se e somente se $A(X)$ e $A(Y)$ são isomorfos como k -álgebras

Definição 47 Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade quase afim tal que $X = Z(I) \setminus Z(f) = Y \setminus Z(f)$ onde $f \in k[x_1, \dots, x_n] = A$ e I é um ideal primo de A . Então o anel de coordenadas de X é $A(X) = A(Y)_{(f)} = (A/I)_{(f)}$, (localização no conjunto multiplicativo $\{f^j : j \in \mathbb{N}\}$.)

Exemplo 36 1. Seja Y a curva plana definida por $y = x^2$ em \mathbb{A}^2 , então $A(Y)$ é isomorfo ao anel $k[x]$.

2. Seja Z a curva plana definida pelo polinômio $xy = 1$ então $A(Z)$ não é isomorfo ao anel $k[x]$.

3. Seja f um polinômio quadrático qualquer em $k[x, y]$ e seja W a cônica definida por f , então $A(W)$ é isomorfo a $A(Y)$ ou $A(Z)$.

1) Seja $W = Z(p)$ uma cônica irredutível e $p \in k[x, y]$ irredutível dado por

$$p = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

Como f tem grau 2 então com uma mudança linear de variáveis podemos assumir que

$$p = y^2 + dx + ey + f$$

ou

$$p = x^2 + y^2 + dx + ey + f.$$

No primeiro se $d = 0$ o polinômio não é irredutível, o que leva a um absurdo. Assim assumimos $d \neq 0$. Vamos fazer uma série de mudanças de coordenadas para chegar na forma do polinômio que precisamos. Aplicando uma mudança de variáveis do tipo $x \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma$ temos

$$dx + ey + f \mapsto d(\alpha x + \beta y + \gamma) + ey + f.$$

Podemos considerar

$$\begin{aligned} d\gamma + f &= 0 \\ d\alpha &= -1 \\ d\beta + e &= 0 \end{aligned}$$

ou seja, é necessário e suficiente que $\gamma = -f/d, \alpha = -1/d, \beta = -e/d$. Assim mostramos, nesse caso, que W é isomorfo a $C_1 = Z(y^2 - x)$.

Para o outro caso usando uma mudança de variáveis do tipo $x \mapsto x + y$ e $y \mapsto i(x - y)$ podemos assumir que p é da forma

$$p = xy + dx + ey + f.$$

Primeiro aplicando $x \mapsto x - e$ obtemos

$$p = xy + dx + f.$$

Segundo aplicando $y \mapsto y - d$ obtemos

$$p = xy + f.$$

Note que $f \neq 0$ pois p é irredutível. Por último aplicando o $x \mapsto -fx$ obtemos

$$p = xy - 1.$$

Assim mostramos, nesse caso, que W é isomorfo a $C_2 = Z(xy - 1)$. Agora basta provar que C_1 é isomorfa a \mathbb{A}^1 e C_2 é isomorfa a $\mathbb{A}^1 - \{0\}$. Usando o Corolário 4 basta mostrar que os anéis de coordenadas são isomorfos, mas mostra-se que as aplicações a seguir são isomorfismos

$$\begin{aligned} \phi : C_1 &\rightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x, y) = (x, x^2) &\mapsto x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : C_2 &\rightarrow \mathbb{A}^1 - \{0\} \\ (x, y) = (x, 1/x) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Note que

$$A(C_1) = k[x, y]/(y - x^2) \cong k[x] = k[x]/(0) = A(\mathbb{A}^1)$$

e

$$A(C_2) = k[x, y]/(xy - 1) \cong k[x, 1/x] = k[x]_{(x)} = A(\mathbb{A}^1 - \{0\}).$$

2) Seja $X = \mathbb{A}^1 - \{a_1, \dots, a_k\}$. Então o anel de coordenadas de X é

$$A(X) = k[x]_{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}$$

que não é isomorfo a $k[x]$ ao anel de coordenadas de \mathbb{A}^1 pois o primeiro é um anel local e o segundo não.

3) Seja $U \subset \mathbb{P}^2$ uma cônica projetiva, isto é, $U = Z(F)$ com $F \in k[x, y, z]$ homogêneo irredutível e de grau 2. Considere a desomogeneização

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \in k[x, y]$$

de F com respeito a z e a correspondente variedade afim

$$V = Z(f) = Z(F) \cap Z(z - 1) \subset \mathbb{A}_{(x,y)}^2.$$

Como

$$f = (ax + by + c)(dx + ey + g) \Leftrightarrow F = (ax + by + cz)(dx + ey + gz)$$

sabemos que f é irredutível. Note que se o grau de f não é dois, então $f = dx + ey + f$ e daí $F = dxz + eyz + fz^2$, contradição novamente.

Assim, V é uma cônica afim plana e pelo item item 1 é isomorfa a $Z(y^2 - x)$ ou $Z(xy - 1)$. Então U é isomorfa a $Z(y^2 - xz)$ ou $Z(xy - z^2)$ que são claramente isomorfas bastando fazer $y \mapsto z$.

Exemplo 37 Uma cônica em \mathbb{A}^2 é isomorfa ou a \mathbb{A}^1 ou a $\mathbb{A}^1 - \{0\}$

Considere uma cônica W dada por um polinômio quadrático irreduzível $f \in k[x, y]$, portanto $A(W)$ é isomorfo a $A(Y)$ ou a $A(Z)$ onde Y é a curva plana definida por $y = x^2$ e Z a curva plana definida pelo polinômio $xy = 1$, temos que $A(Y)$ é isomorfo a $k[x]$ e portanto temos que Y é isomorfo a \mathbb{A}^1 . Assim pelo Corolário 4 temos que W é isomorfo a \mathbb{A}^1 .

Agora caso $A(W)$ seja isomorfo a $A(Z)$, como $A(Z)$ é isomorfo a $\mathbb{A}^1 - \{0\}$, segue análogo ao caso acima que W é isomorfo a $\mathbb{A}^1 - \{0\}$.

Exemplo 38 O espaço afim \mathbb{A}^1 não é isomorfo a nenhum subconjunto próprio dele.

Considere $Y \subset X = \mathbb{A}^1$ um subconjunto próprio, e suponha que existe um isomorfismo $\phi : X \rightarrow Y$, como ϕ é isomorfismo temos que ϕ admite uma inversa a qual é também um morfismo, onde

$$\phi \circ \phi^{-1} = Id_Y$$

e

$$\phi^{-1} \circ \phi = Id_X.$$

Mas veja que como Y é subconjunto próprio de X existe um $a \in X$ tal que $a \notin Y$ e portanto temos que a não pertence a imagem de $\phi \circ \phi^{-1}$. Porém, existe $x \in Y$ tal que $\phi^{-1}(x) = a$, logo a inversa não pode ser bem definida e portanto ϕ não é isomorfismo, logo X e Y não são isomorfos como queríamos.

Exemplo 39 Qualquer cônica em \mathbb{P}^2 é isomórfica a \mathbb{P}^1 .

Se C é uma cônica em \mathbb{P}^2 então ela é a projetivização de uma cônica irreduzível C_1 no espaço afim \mathbb{A}^2 . Pelo Exemplo 36 a cônica C_1 é isomorfa a \mathbb{A}^1 ou $\mathbb{A}^1 - \{0\}$, mas a projetivização de ambas resultando no espaço \mathbb{P}^1 e logo em todos os casos temos que a projetivização de C_1 é isomorfa a \mathbb{P}^1 .

Exemplo 40 \mathbb{A}^2 não é homeomorfo a \mathbb{P}^2 .

Pelo Teorema de Bezout ([21], Capítulo 5) quaisquer duas curvas em \mathbb{P}^2 possuem interseção, porém duas retas paralelas não possuem interseção em \mathbb{A}^2 portanto os conjuntos \mathbb{A}^2 e \mathbb{P}^2 não podem ser isomorfos.

Exemplo 41 Existe uma variedade quase afim o qual não é afim. Por exemplo $X = \mathbb{A}^2 - \{(0, 0)\}$ não é uma variedade afim.

De fato como X é o complementar do conjunto $\{(0, 0)\}$ o qual é algébrico segue que X é um aberto em \mathbb{A}^2 , logo X é uma variedade quase afim. Porém, X não é afim pois ele não é fechado em \mathbb{A}^2 . De fato, se X fosse uma variedade afim teríamos que $\mathbb{A}^2 = X \cup \{0\}$ e portanto \mathbb{A}^2 seria união de dois subconjuntos fechados próprios, ou seja, \mathbb{A}^2 seria redutível, absurdo, pois ele é uma variedade afim, portanto como $\{0\}$ é sempre fechado por ser finito segue que X não pode ser fechado e portanto não é uma variedade afim.

Exemplo 42 Seja Y uma hipersuperfície em \mathbb{A}^n dada pela equação $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Então $\mathbb{A}^n - Y$ é isomorfo a uma hipersuperfície H em \mathbb{A}^{n+1} dada por $x_{n+1}f = 1$. Em particular, $\mathbb{A}^n - Y$ é afim, e seu anel afim é $k[x_1, \dots, x_n]_f$.

Para $P = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in H$, seja $\phi(P) = (a_1, \dots, a_n)$. Então ϕ é um morfismo de H para \mathbb{A}^n . Também temos que ϕ é dado por uma aplicação bijetiva de H em $\mathbb{A}^n - Y$. Como a aplicação é bijetiva temos que ϕ é um isomorfismo se e somente se ϕ^{-1} é um morfismo. Mas $\phi^{-1}(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n, 1f(a_1, \dots, a_n))$, então pelo Lema 2 segue que ϕ^{-1} é um morfismo.

Proposição 26 Seja $Y \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade algébrica, então existe uma base para a topologia consistindo de conjuntos abertos afins para Y .

Prova: Seja $P \in Y$ um ponto qualquer e $U \subset Y$ um aberto contendo P , como Y é uma variedade podemos sem perda de generalidade assumir que $U = Y$, pois U é um aberto de uma variedade, portanto U é uma variedade quase afim ou quase projetiva.

Suponha que Y é uma variedade quase afim em \mathbb{A}^n e seja $Z = \bar{Y} - Y$ o qual é fechado em \mathbb{A}^n . Como $P \in Y$ temos que $P \notin Z$, portanto existe um polinômio f tal que $f(P) \neq 0$. Seja H a hipersuperfície dada por $f = 0$ em \mathbb{A}^n , então $Z \subset H$ e $P \notin H$. Portanto $P \in Y - Y \cap H$, o qual é aberto de Y pois $Y \cap H$ é uma interseção de fechado que é fechado.

Por outro lado temos que $Y - Y \cap H$ é um fechado de $\mathbb{A}^n - H$, o qual é afim e portanto segue que $Y - Y \cap H$ é afim, como P e Y foram tomados arbitrariamente os conjuntos afim definidos por $Y - Y \cap H$ como foi construído forma uma base topológica para Y pois dado qualquer vizinhança aberta de um P existe uma subvizinhança na forma $Y - Y \cap H$. ■

3.3 Aplicações Racionais

Nesse seção estudaremos o conceito de aplicações racionais, essas aplicações são morfismos definidos sobre um conjunto aberto. Este tipo de aplicação é importante para o estudo de variedades algébricas, uma vez que uma aplicação racional carrega as propriedades de uma variedade algébrica para uma outra variedade. Assim podemos analisar as propriedades de uma variedade algébrica a partir de uma outra variedade através de uma aplicação racional.

Lema 3 Sejam X e Y duas variedades quaisquer, ϕ e ρ dois morfismos de X para Y . Se existe um aberto $U \subset X$ tal que $\phi|_U = \rho|_U$, então $\phi = \rho$ em todo X .

Prova: Seja X e Y duas variedades em \mathbb{P}^n . Podemos considerar $Y = \mathbb{P}^n$, pois para Y qualquer basta aplicar o morfismo inclusão $Y \rightarrow \mathbb{P}^n$. Considere o produto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, o qual tem uma estrutura de variedade projetiva dada pela variedade de Segre

$$\begin{aligned} \phi \times \rho : X &\rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \\ x &\mapsto (\phi(x), \rho(x)). \end{aligned}$$

Seja $\delta = \{P \times P | P \in \mathbb{P}^n\}$ o subconjunto diagonal de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. Este conjunto é definido pelas equações $\{x_i y_i = x_j y_j | i, j = 0, 1, \dots, n\}$ e portanto é um subconjunto fechado de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. Pela hipótese existe um aberto U tal que $\phi \times \rho(U) \subset \delta$. Mas U é denso em X , e δ é fechado, portanto $\phi \times \rho(X) \subset \delta$.

Como U é um aberto em X o qual é uma variedade temos que U é denso em X , suponha que $\phi \neq \rho$, ou seja, existe $x \in X$ tal que $\phi(x) \neq \rho(x)$ e seja V uma vizinhança qualquer de x em X , como U é denso temos que $U \cap V \neq \emptyset$, então seja $a \in U \cap V$ como

$a \in U$ temos que $\phi(a) = \rho(a)$ como ϕ é morfismo temos que para qualquer função regular f temos que $f \circ \phi$ é regular para algum aberto V , portanto $f \circ \rho = f \circ \phi$ para qualquer aberto, então $\phi(x) = \rho(x)$ o que é um absurdo. Logo $\phi = \rho$. ■

Definição 48 Sejam X e Y variedades projetivas. Uma aplicação racional $\phi : X \rightarrow Y$ é uma classe de equivalência de pares $\langle U, \phi_U \rangle$ onde U é um aberto não vazio em X e ϕ_U é o morfismo ϕ restrito em U , e onde $\langle U, \phi_U \rangle = \langle V, \phi_V \rangle$ são equivalentes se e somente se, ϕ_U e ϕ_V são iguais em $U \cap V$. A aplicação racional ϕ é dita dominante se para algum par $\langle U, \phi_U \rangle$ a imagem ϕ_U é densa em Y .

Perceba que a relação acima será de fato uma relação de equivalência. De fato, seja ϕ uma aplicação racional de X em Y e sejam $U, V, W \subset X$ então

1. **Reflexiva** É claro que $\langle U, \phi_U \rangle = \langle U, \phi_U \rangle$ pois $\phi_U = \phi_U$.
2. **Simetria** temos que $\langle U, \phi_U \rangle = \langle V, \phi_V \rangle$ se e somente se $\phi_U = \phi_V$ em $U \cap V$, isso se e somente se, $\phi_V = \phi_U$ em $V \cap U$.
3. **Transitiva** Se $\langle U, \phi_U \rangle = \langle V, \phi_V \rangle$ e $\langle V, \phi_V \rangle = \langle W, \phi_W \rangle$ temos que $\phi_U = \phi_V$ em $U \cap V$ e $\phi_V = \phi_W$ em $V \cap W$ portanto temos que $\phi_U = \phi_V = \phi_W$ em $U \cap V \cap W$, como $U \cap V \cap W$ é um aberto temos que pelo Lema 3 que $\phi_U = \phi_W$ em todo aberto $U \cap W$ e portanto $\langle U, \phi_U \rangle = \langle W, \phi_W \rangle$, logo vale a transitividade.

Definição 49 Uma aplicação birracional $\phi : X \rightarrow Y$ é uma aplicação racional a qual admite inversa $\rho : Y \rightarrow X$, tal que, $\rho \circ \phi = Id_X$ e $\phi \circ \rho = Id_Y$ como aplicações racionais. Se existe uma aplicação birracional entre X e Y dizemos que X e Y são birracionalmente equivalentes, ou apenas birracionais.

Uma variedade Y é dita racional se é birracionalmente equivalente a \mathbb{P}^n para algum n .

Exemplo 43 Toda cônica plana em \mathbb{P}^2 é racional.

Pelo Exemplo 39 toda cônica de \mathbb{P}^2 é isomorfa a \mathbb{P}^1 , portanto toda cônica é birracionalmente equivalente a \mathbb{P}^1 .

Teorema 5 Sejam duas variedades X e Y , então existe uma bijeção entre

1. O conjunto das aplicações racionais de X e Y .
2. O conjunto de homomorfismos de k -álgebras de $K(Y)$ para $K(X)$.

Esta correspondência é dada por uma equivalência de categorias de variedades e aplicações racionais dominantes com a categoria de extensão de corpos finitamente gerados de k .

Prova: [15] Teorema 4.4.

Corolário 5 Para quaisquer duas variedades X e Y , as seguintes condições são equivalentes:

1. X e Y são birracionalmente equivalentes.
2. existe subconjuntos abertos $U \subset X$ e $V \subset Y$ com U isomorfo a V .
3. $K(X) \cong K(Y)$ como k -álgebras.

Prova: ($i \Rightarrow ii$) Seja $\phi : X \rightarrow Y$ uma aplicação birracional e seja ϕ^{-1} sua inversa, então existem $U \subset X$ e $V \subset Y$ tais que a ϕ é dada por $\langle U, \phi \rangle$ e sua inversa ϕ^{-1} é dada por $\langle V, \phi^{-1} \rangle$, portanto ϕ é um morfismo bijetor de $\phi : U \rightarrow V$, logo é um isomorfismo de U e V portanto U e V são isomorfos.

($ii \Rightarrow iii$) Segue diretamente da Definição 42 de corpo de funções.

($iii \Rightarrow i$) Segue do Teorema 5. ■

Proposição 27 Seja X uma variedade algébrica de dimensão r , então X é birracional à uma hipersuperfície Y em \mathbb{P}^{r+1} .

Prova: [15] Proposição 4.9 .

Proposição 28 Se f e g são funções regulares em conjuntos abertos U e V de uma variedade X respectivamente, onde $f = g$ em $U \cap V$ então a função dada por f em U e por g em V é uma função regular em $U \cup V$.

Prova: De fato seja F a função definida por f se o domínio está em U e por g se o domínio está em V , se $x \in U \cap V$, então temos que $F(x) = f(x) = g(x)$. Como U e V são abertos temos que $U \cap V$ é aberto e portanto existe uma vizinhança de U_x de x tal que

$$F = f = g = \frac{p(x_1, \dots, x_n)}{q(x_1, \dots, x_n)},$$

portanto F é regular em $U \cup V$. Também temos que $F(x)$ é uma curva regular pois f e g o são. Sem perda de generalidade se $x \in U - U \cap V$ temos que $F(x) = f(x)$ para $U \cup (U \cap V)$ que é aberto e portanto se $x \in U - U \cap V$ então existe uma vizinhança aberta de x dada por $U_x \subset U$ tal que

$$F = f = \frac{p(x_1, \dots, x_n)}{q(x_1, \dots, x_n)}.$$

Portanto, F é regular em U , como F é regular em U e em $U \cap V$ segue que F é regular em $U - U \cap V$ e portanto é regular em todo seu domínio. ■

Corolário 6 Se f é uma função racional em X , então existe um maior conjunto aberto U de X o qual f é representado por uma função regular. Diremos que f está definida nos pontos de U .

Suponha que f é racional em alguma aberto $U \subset X$. Se f é racional para algum outro aberto V temos pela Proposição 28 que f é racional em $U \cup V$, então seja Σ a família de todos os subconjuntos de X os quais f é racional. Portanto pela Proposição 28 temos que f é racional no conjunto dado por $M = \bigcup_{U \subset \Sigma} U$ e por construção esse conjunto é o maior em X o qual f é racional. ■

3.4 Variedades de Veronese e Segre-Veronese

Nesta seção estudaremos dois tipos específicos de variedades algébricas, as variedades de Veronese e a de Segre-Veronese. Estas serão as variedades as quais faremos o estudo e análise sobre a dimensão de suas variedades secantes e o seu defeito em relação às suas variedades secantes.

Definição 50 Seja n e d inteiros positivos. Definimos a variedade de Veronese V_d^n sendo a imagem do morfismo que leva pontos de \mathbb{P}^n em todos os monômios de grau d das coordenadas de \mathbb{P}^n , mais precisamente esse morfismo é dado por

$$v_d^n : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$$

$$(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \mapsto (x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \cdots : x_n^d),$$

em que $N = \binom{n+d}{d} - 1$.

A variedade de Veronese como está definida de fato é uma variedade algébrica projetiva, pois é um mergulho de \mathbb{P}^n para \mathbb{P}^N como é observado no Exemplo ??.

Exemplo 44 A variedade de Veronese V_2^1 é a imagem do morfismo

$$v_2^1 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$$

$$(x_0 : x_1) \mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2).$$

Exemplo 45 A variedade de Veronese V_2^2 é a imagem do morfismo

$$v_2^2 : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$$

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2).$$

Exemplo 46 A variedade de Veronese V_2^n é a imagem do morfismo

$$v_2^n : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$$

$$(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : \cdots : x_n^2).$$

Exemplo 47 Dada uma variedade de Veronese V_d^n podemos representar ela matricialmente, considere a variedade V_2^2 dada por

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2)$$

então a matriz simétrica P dada por

$$P = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix},$$

é a representação matricial de V_2^2 .

Definição 51 Sejam $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$ e $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$ duas r -uplas de inteiros positivos, com $n_1 \leq \cdots \leq n_r$. Sejam $d = d_1 + \cdots + d_r$, $n = n_1 + \cdots + n_r$, e $N(\mathbf{n}, \mathbf{d}) = \prod_{i=1}^r \binom{n_i+d_i}{n_i} - 1$. Então a variedade de Segre-Veronese $SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}$ é dada pela imagem do morfismo

$$v_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} : \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \rightarrow \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d})}$$

$$(x_{10} : \cdots : x_{1n_1} : \cdots : x_{r0} : \cdots : x_{rn_r}) \mapsto (M_0 : \cdots : M_N)$$

onde M_0, \dots, M_N são todas os monômios de grau d_i em relação as variáveis de \mathbb{P}^i para $i = 1, \dots, r$. A Segre-Veronese como está definida é de fato uma variedade algébrica projetiva, pois é um mergulho de Segre como no Exemplo 35.

Quando $r > 1$ e $d_1 = d_2 = \cdots = d_r = 1$ temos o caso particular que chamamos de variedade de Segre que será dada pelo morfismo:

$$v_{(1, \dots, 1)}^{\mathbf{n}} : \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \rightarrow \mathbb{P}^N$$

$$(x_{10} : x_{11} : \cdots : x_{1n_1} : \cdots : x_{r0} : x_{r1}, \cdots : x_{rn_r}) \mapsto (M_0 : \cdots : M_N).$$

Exemplo 48 A variedade de Segre $SV_{(1,1)}^{(1,1)}$ é dada por

$$v_{(1,1)}^{(1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$$

$$(x_0 : x_1 : y_0 : y_1) \mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1).$$

Exemplo 49 A variedade de Segre $SV_{(1,1)}^{(1,2)}$ é dada por

$$v_{(1,1)}^{(1,2)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$$

$$(x_0 : x_1 : y_0 : y_1 : y_2) \mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_0y_2 : x_1y_0 : x_1y_1 : x_1y_2).$$

Exemplo 50 A variedade de Segre-Veronese $SV_{(1,2)}^{(1,1)}$ é dada por

$$v_{(1,2)}^{(1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^5$$

$$(x_0 : x_1 : y_0 : y_1) \mapsto (x_0y_0^2 : x_0y_0y_1 : x_0y_1^2 : x_1y_0^2 : x_1y_0y_1 : x_1y_1^2).$$

Exemplo 51 A variedade de Segre-Veronese $SV_{(1,1,1)}^{(1,1,1)}$ é dada por

$$v_{(1,1,1)}^{(1,1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^8$$

$$(x_0 : x_1 : y_0 : y_1 : z_0 : z_1) \mapsto (x_0y_0z_0 : x_0y_1z_0 : \cdots : x_1y_1z_1).$$

Podemos utilizar a seguinte indexação para as coordenadas de uma variedade de Segre-Veronese.

Definição 52 Sejam n e d inteiros positivos, defina o conjunto

$$\Lambda_{n,d} = \{I = (i_1, \dots, i_d), 0 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_d \leq n\}.$$

Para todo $I, J \in \Lambda_{n,d}$ definimos a distância entre eles $d(I, J)$ sendo o número de coordenadas em que eles se diferem. Ou seja, dados $I = (i_1, \dots, i_d)$ e $J = (j_1, \dots, j_d)$, existe um $r \geq 0$, distintos índices $\lambda_1, \dots, \lambda_r \subset \{1, \dots, d\}$ e distintos índices $\tau_1, \dots, \tau_r \subset \{1, \dots, d\}$ tais que $i_{\lambda_k} = j_{\tau_k}$ para todo $1 \leq k \leq r$ e $\{i_\lambda, \lambda \neq \lambda_1, \dots, \lambda_r\} \cap \{j_\tau, \tau \neq \tau_1, \dots, \tau_r\} = \emptyset$. Portanto $d(I, J) = d - r$. Note que $\Lambda_{n,d}$ tem diâmetro d e tamanho $\binom{n+d}{d} = N(n, d) + 1$.

Sejam $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$ e $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$ duas r -uplas de inteiros positivos, e considere o conjunto

$$\Lambda = \Lambda_{\mathbf{n}, \mathbf{d}} = \Lambda_{n_1, d_1} \times \cdots \times \Lambda_{n_r, d_r}.$$

Dados $I = (I^1, \dots, I^r), J = (J^1, \dots, J^r) \in \Lambda$, definimos a distância entre eles por

$$d(I, J) = d(I^1, J^1) + \cdots + d(I^r, J^r).$$

Perceba que Λ tem diâmetro de tamanho d e tamanho $\prod_{i=1}^r \binom{n_i+d_i}{n_i} = N(\mathbf{n}, \mathbf{d}) + 1$. Essa distância é chamada de distância de Hamming. Dada uma Segre-Veronese $SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}$ e $I = (I_1, \dots, I_r) \in \Lambda$, defina

$$e_I = v_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}(e_{I_1}, \dots, e_{I_r}) = (0 : \cdots : 0 : M_I = 1 : 0 : \cdots : 0) \in \mathbb{P}^N.$$

Exemplo 52 Para a Segre-Veronese $SV_{(2,2)}^{(1,1)}$ temos que

$$\Lambda = \Lambda_{1,2} \times \Lambda_{1,2} = \{I = ((x_1, x_2), (y_1, y_2)), 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1 \text{ e } 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1\}.$$

Para simplificar a notação vamos considerar $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ assim temos que Λ é dado por

$$\Lambda = \{(0000), (1000), (0100), (0010), (0001), (1100), (1010), (1001), (0110), (0101), (0011), (1110), (1101), (1011), (0111), (1111)\}.$$

E temos os pontos coordenados

$$\begin{aligned} e_{(0000)} &= (x_0^2 y_0^2 : 0 : \cdots : 0) = (1 : 0 : \cdots : 0) \\ e_{(1000)} &= (0 : x_0 x_1 y_0^2 : 0 : \cdots : 0) = (0 : 1 : 0 : \cdots : 0) \\ &\vdots \\ e_{(1111)} &= (0 : \cdots : 0 : x_1^2 y_1^2) = (0 : \cdots : 0 : 1). \end{aligned}$$

4 Espaços e Projeções Osculadoras

4.1 Espaços Osculadores

Nesta seção vamos estudar os espaços osculadores das variedades de Segre-Veronese com o propósito de determinar os geradores de um espaço osculador dados os parâmetros da variedade. Determinar quais são os geradores será importante para determinar em quais condições uma projeção osculadora é birracional.

Definição 53 Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva de dimensão m e P um ponto liso. Considere

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A}^m &\rightarrow \mathbb{A}^n \cap X \\ 0 &\mapsto P \\ t = (t_1, \dots, t_m) &\mapsto \varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{aligned}$$

uma parametrização local. Para cada $I = (i_1, \dots, i_m)$ com $i_1, \dots, i_m \geq 0$ inteiros, definimos:

$$|I| = \sum_{j=1}^m i_j.$$

Considere φ_I sendo a derivada parcial de φ dada por:

$$\varphi_I = \frac{\partial^I \varphi}{\partial t_1^{i_1} \dots \partial t_m^{i_m}},$$

então o espaço osculador de ordem s de X no ponto P é dado pelo o fecho projetivo:

$$T_P^s(X) = \overline{\langle \varphi_I(0); |I| \leq s \rangle}.$$

Note que se $n = 0$ não teremos derivadas parciais e portanto o único elemento do espaço osculador centrado no ponto P é o próprio P .

Exemplo 53 O espaço T_P^1 é chamado espaço tangente à variedade X sobre o ponto P .

Exemplo 54 Considere a seguinte variedade de Veronese:

$$\begin{aligned} V : \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}_{(y_0, \dots, y_5)}^5 \\ (x : y : z) &\mapsto (x^2 : xy : xz : y^2 : yz : z^2). \end{aligned}$$

Seja $P = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) \in Y$ e considere a seguinte parametrização no aberto $\mathbb{P}^5 \setminus (y_0 = 0)$: dada por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A}^2 &\rightarrow \mathbb{A}_{(x_0, \dots, x_4)}^5 \cap Y \\ 0 &\mapsto P \\ (t_1, t_2) &\mapsto (t_1, t_2, t_1^2, t_1 t_2, t_2^2). \end{aligned}$$

Logo temos as seguintes derivas φ_I para $|I| \leq 2$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} &= (1, 0, 2t_1, t_2, 0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} &= (0, 1, 0, t_1, 2t_2) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2} &= (0, 0, 2, 0, 0) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2^2} &= (0, 0, 0, 0, 2) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1 t_2} &= (0, 0, 0, 1, 0).\end{aligned}$$

Portanto, como $\varphi(0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0)$, tem-se que os espaços osculadores de V_2^2 sobre o ponto P serão

$$\begin{aligned}T_P^0 &= \{P\}. \\ T_P^1 &= \overline{\langle (0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0) \rangle}. \\ T_P^2 &= \overline{\langle (0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 1, 0) \rangle} = \mathbb{P}^5.\end{aligned}$$

Como o espaço osculador de ordem 2 é igual ao espaço \mathbb{P}^5 temos que os espaços osculadores de ordem maior que 2 serão todos iguais a \mathbb{P}^5 , pois temos que

$$T_P^2 = \mathbb{P}^5 \subset T_P^k \subset \mathbb{P}^5$$

para $k > 2$ e portanto $T_P^k = \mathbb{P}^5$ para qualquer $k \geq 2$.

Exemplo 55 Considere a variedade de Segre $SV_{(1,2)}^{(2,1)}$ dada pelo morfismo

$$\begin{aligned}v_{(1,2)}^{(2,1)} : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}_{(z_0:z_1:\dots:z_8)}^8 \\ (x_0 : x_1 : x_2 : y_0 : y_1) &\mapsto (x_0 y_0^2 : x_0 y_0 y_1 : x_0 y_1^2 : x_1 y_0^2 : x_1 y_0 y_1 : x_1 y_1^2 : x_2 y_0^2 : x_2 y_0 y_1 : x_2 y_1^2).\end{aligned}$$

Considere $P = (1 : 0 : \dots : 0) \in SV_{(1,1)}^{(2,1)}$, considere o aberto $\mathbb{P}^8 \setminus (z_0 = 1)$ e tome a seguinte parametrização sobre este aberto

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{A}^3 &\rightarrow \mathbb{A}_{(x_0:\dots:x_7)}^8 \cap SV_{(1,1)}^{(2,1)} \\ 0 &\mapsto P \\ (t_1, t_2, t_3) &\mapsto \varphi(t_1, t_2, t_3) = (t_1, t_1^2, t_2, t_1 t_2, t_1^2 t_2, t_3, t_1 t_3, t_1^2 t_3)\end{aligned}$$

Como já vimos $T_P^0 = \{P\}$. Temos as seguintes derivadas φ_I para $|I| \leq 2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} &= (1, 2t_1, 0, t_2, 2t_1t_2, 0, t_3, 2t_1t_3) \\
\frac{\partial \varphi}{\partial t_2} &= (0, 0, 1, t_1, t_1^2, 0, 0, 0) \\
\frac{\partial \varphi}{\partial t_3} &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, t_1, t_1^2) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2} &= (0, 2, 0, t_2, 0, 0, 2t_3) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2^2} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1 t_2} &= (0, 0, 0, 1, 2t_1, 0, 0, 0) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1 t_3} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2t_1) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2 t_3} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2 t_3} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 2) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2 t_2} &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Aplicando em $\varphi(0) = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(0) &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = e_1 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(0) &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) = e_3 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial t_3}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) = e_6 \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2}(0) &= (0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = 2e_2 \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2^2}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0 \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1 t_2}(0) &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) = e_4 \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1 t_3}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) = e_7 \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2 t_3}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0 \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2 t_3}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2) = 2e_8 \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2 t_2}(0) &= (0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0) = 2e_5
\end{aligned}$$

Assim obtemos que os espaços osculadores de $SV_{(1,1)}^{(2,1)}$ sobre o ponto P até a ordem 2 são dados por

$$\begin{aligned} T_P^0 &= \{P\}. \\ T_P^1 &= \overline{\langle e_0, e_1, e_3, e_6 \rangle}. \\ T_P^2 &= \overline{\langle e_0, e_1, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \rangle}. \end{aligned}$$

É perceptível que quanto maior a dimensão da variedade maior será o número de espaços osculadores distintos, além disso o processo computacional para encontrar tais espaço osculadores é cada vez maior conforme aumenta os valores dos parâmetros. Para otimizar o cálculo para encontrar os espaços osculadores vamos utilizar a notação da Definição 52.

Exemplo 56 Considere a Segre-Veronese e a parametrização do Exemplo 55 então temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(0) &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = e_1 = e_{(0),(0,1)} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(0) &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) = e_3 = e_{(1),(0,0)} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t_3}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) = e_6 = e_{(2),(0,0)} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2}(0) &= (0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = 2e_2 = 2e_{(0),(1,1)} = 2\varphi(e_0, e_1) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2^2}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1 t_2}(0) &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) = e_4 = e_{(1),(0,1)} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1 t_3}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) = e_7 = e_{(2),(0,1)} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2 t_3}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2 t_3}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2) = 2e_8 = 2e_{(2),(1,1)} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2 t_2}(0) &= (0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0) = 2e_5 = 2e_{(1),(1,1)}, \end{aligned}$$

onde o índice $\{(i)(j, k)\}$ indica quais as variáveis que compõe o monômio representado. Portanto, os espaço osculadores serão:

$$\begin{aligned} O_P^1 &= \langle e_1, e_3, e_6 \rangle, \\ O_P^2 &= \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \rangle = \mathbb{A}^8. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T_P^1 &= \overline{\langle e_{(0),(0,1)}, e_{(1),(0,0)}, e_{(2),(0,0)} \rangle}, \\ T_P^2 &= \overline{\langle e_{(0),(0,1)}, e_{(0),(1,1)}, e_{(1),(0,0)}, e_{(1),(0,1)}, e_{(2),(0,0)}, e_{(1),(1,1)}, e_{(2),(0,1)}, e_{(2),(1,1)} \rangle} \end{aligned}$$

Seja $\Lambda = \{000, 001, 100, 200, 011, 101, 201, 211, 111\}$. Considere a distância como na Definição 52

$$d(abc, a'b'c') = d(a, a') + d(bc, b'c')$$

$$d(a, a') = 1 - \delta_{aa'}$$

$$d(bc, b'c') = 2 - \delta_{bb'} - \delta_{cc'}.$$

Em que $\delta_{aa'}$ é o número de coordenadas iguais entre a e a' . Observe que o espaço osculador T_p^k é o espaço gerado pelas uplas de Λ que possuem distância menor ou igual a k da upla $e_0 = e_{000}$. Podemos generalizar essa propriedade do espaço osculador para uma variedade Segre-Veronese genérica, ou seja, vamos escrever um espaço o osculador como o gerado por uplas de Λ .

Proposição 29 Considere a notação da Definição 52, seja $I^1 = (i_1, \dots, i_1), \dots, I^r = (i_r, \dots, i_r)$ com $0 \leq i_j \leq n_j$ e $I = (I^1, \dots, I^r)$. Considere o ponto

$$e_I = \sigma v_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$$

então para qualquer $s \geq 0$ temos que

$$T_{e_I}^s(SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}) = \langle e_j | d(I, J) \leq s \rangle.$$

Em particular, $T_{e_I}^s(SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}) = \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d})}$ para $s \geq d$.

Prova: Podemos assumir sem perda de generalidade que $I^1 = (0, \dots, 0), \dots, I^r = (0, \dots, 0)$ e seja $(z_K)_{K \in \Lambda}$ a representação das coordenadas de $\mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d})}$, considere a parametrização

$$\phi : \mathbb{A}^{\sum n_i} \rightarrow SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} \cap (z_I \neq 0) \subset \mathbb{A}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d})}$$

a qual é dada por

$$A = (a_{j,i})_{j=1, \dots, r; i=1, \dots, n_j} \mapsto \left(\prod_{j=1}^r \prod_{k=1}^{d_j} a_{j, i_k^j} \right)_{K=(K^1, \dots, K^r) \in \Lambda - \{I\}},$$

onde $K^j = (i_1^j, \dots, i_{d_j}^j) \in \Lambda_{n_j, d_j}$ para cada $j = 1, \dots, r$. Dados inteiros l e m defina $\text{deg}_{l,m} K$ como o grau do polinômio

$$\phi(A)_K = \prod_{j=1}^r \prod_{k=1}^{d_j} a_{j, i_k^j}$$

com respeito a $a_{l,m}$, onde $\phi(A)_K$ é a K -ésima coordenada do ponto $\phi(A)$. Então $0 \leq \text{deg}_{l_j, m_j} K \leq d_l$, e o grau de $\phi(A)_K$ com respeito às variáveis $a_{j,i}$ é no máximo d . Primeiro analisaremos a derivada em uma variável $\frac{\partial^{\lambda_1} \phi(A)_K}{\partial a_{l_1, m_1}^{\lambda_1}}$ de grau λ_1 , ao derivarmos apenas uma vez $\phi(A)_K$ obtemos

$$\frac{\partial \phi(A)_K}{\partial a_{l_1, m_1}} = \text{deg}_{l_1, m_1} K \frac{\phi(A)}{a_{l_1, m_1}}.$$

Ao derivarmos pela segunda vez sobre a variável a_{l_1, m_1} obtemos

$$\frac{\partial^2 \phi(A)_K}{\partial a_{l_1, m_1}^2} = \text{deg}_{l_1, m_1} K (\text{deg}_{l_1, m_1} K - 1) \frac{\phi(A)_K}{a_{l_1, m_1}^2}.$$

Essa expressão pode ser reescrita como

$$\frac{\partial^2 \phi(A)_K}{\partial a_{l_1, m_1}^2} = \frac{(deg_{l_1, m_1} K)!}{(deg_{l_1, m_1} K - 2)!} \frac{\phi(A)_K}{a_{l_1, m_1}^2}.$$

Com isso, através de um processo de indução obtemos a seguinte expressão para a derivada λ_1 -ésima em relação à variável a_{l_1, m_1}

$$\frac{\partial^{\lambda_1}}{\partial a_{l_1, m_1}^{\lambda_1}} = \frac{(deg_{l_1, m_1} K)! \phi(A)_K}{(deg_{l_1, m_1} K - \lambda_1)! a_{l_1, m_1}^{\lambda_1}}.$$

Portanto, temos a escrita explícita para essa derivada. Caso $deg_{l_1, m_1} K < \lambda_1$, como $deg_{l_1, m_1} K$ é o grau do polinômio $\prod_{j=1}^r \prod_{k=1}^{d_j} a_{j, i_k^j}$ com relação à variável a_{l_1, m_1} e portanto se derivarmos este polinômio λ_1 vezes com respeito à variável a_{l_1, m_1} o resultado será 0 pois λ_1 é maior que o grau. Agora faremos o caso da derivada de múltiplas variáveis, dada a derivada parcial

$$\frac{\partial^{\lambda_1 + \dots + \lambda_t} \phi(A)_K}{\partial a_{l_1, m_1}^{\lambda_1} \dots \partial a_{l_t, m_t}^{\lambda_t}}.$$

Caso $deg_{l_j, m_j} K < \lambda_j$ para algum j temos que a derivada parcial será 0, então suponhamos que $deg_{l_j, m_j} K \geq \lambda_j$ para todo j , neste caso temos

$$\frac{\partial^{\lambda_1 + \dots + \lambda_t} \phi(A)_K}{\partial a_{l_1, m_1}^{\lambda_1} \dots \partial a_{l_t, m_t}^{\lambda_t}} = \frac{\partial^{\lambda_2 + \dots + \lambda_t}}{\partial a_{l_2, m_2}^{\lambda_2} \dots \partial a_{l_t, m_t}^{\lambda_t}} \left(\frac{\partial^{\lambda_1} (\phi(A))}{\partial a_{l_1, m_1}^{\lambda_1}} \right).$$

Como sabemos explicitamente a derivada em uma variável temos

$$\frac{\partial^{\lambda_1 + \dots + \lambda_t} \phi(A)_K}{\partial a_{l_1, m_1}^{\lambda_1} \dots \partial a_{l_t, m_t}^{\lambda_t}} = \frac{\partial^{\lambda_2 + \dots + \lambda_t}}{\partial a_{l_2, m_2}^{\lambda_2} \dots \partial a_{l_t, m_t}^{\lambda_t}} \left(\frac{(deg_{l_1, m_1} K)! \phi(A)_K}{(deg_{l_1, m_1} K - \lambda_1)! a_{l_1, m_1}^{\lambda_1}} \right).$$

Calculando a derivada em relação à variável a_{l_2, m_2} obtemos

$$\frac{\partial^{\lambda_1 + \dots + \lambda_t} \phi(A)_K}{\partial a_{l_1, m_1}^{\lambda_1} \dots \partial a_{l_t, m_t}^{\lambda_t}} = \frac{\partial^{\lambda_3 + \dots + \lambda_t}}{\partial a_{l_3, m_3}^{\lambda_3} \dots \partial a_{l_t, m_t}^{\lambda_t}} \left(\frac{(deg_{l_2, m_2} K)!}{(deg_{l_2, m_2} K - \lambda_2)! a_{l_2, m_2}^{\lambda_2}} \right) \left(\frac{(deg_{l_1, m_1} K)! \phi(A)_K}{(deg_{l_1, m_1} K - \lambda_1)! a_{l_1, m_1}^{\lambda_1}} \right).$$

Repetindo o processo sucessivamente chegaremos no seguinte produtório:

$$\frac{\partial^{\lambda_1 + \dots + \lambda_t} \phi(A)_K}{\partial a_{l_1, m_1}^{\lambda_1} \dots \partial a_{l_t, m_t}^{\lambda_t}} = \prod_{j=1}^t \left(\frac{(deg_{l_j, m_j} K)!}{(deg_{l_j, m_j} K - \lambda_j)! a_{l_j, m_j}^{\lambda_j}} \right) \phi(A)_K.$$

Perceba que o grau dessa derivada em relação à variável a_{l_j, m_j} é $deg_{l_j, m_j} K - \lambda_j$. Portanto se $deg_{l_j, m_j} K - \lambda_j > 0$ para algum j esta derivada será um polinômio homogêneo de grau $deg_{l_j, m_j} K - \lambda_j$ em relação a a_{l_j, m_j} , e portanto será 0 quando $A = 0$. Caso $deg_{l_j, m_j} K - \lambda_j < 0$ para algum j a derivada será 0 pois o grau da derivada é maior que o grau do polinômio na variável a_{l_j, m_j} . Portanto, o único caso em que a derivada parcial avaliada em $A = 0$ não se anula é quando $deg_{l_j, m_j} K = \lambda_j$ para todo j , neste caso temos que a derivada é dada por

$$\frac{\partial^{\lambda_1 + \dots + \lambda_t} \phi(0)_K}{\partial a_{l_1, m_1}^{\lambda_1} \dots \partial a_{l_t, m_t}^{\lambda_t}} = \prod_{j=1}^t ((deg_{l_j, m_j} K)!),$$

ou seja, temos que

$$\frac{\partial^{\lambda_1+\dots+\lambda_t}\phi(0)_K}{\partial a_{l_1,m_1}^{\lambda_1}\dots\partial a_{l_t,m_t}^{\lambda_t}} = 0,$$

se $\text{deg}_{l_j,m_j}K \neq \lambda_j$ para algum j , e

$$\frac{\partial^{\lambda_1+\dots+\lambda_t}\phi(0)_K}{\partial a_{l_1,m_1}^{\lambda_1}\dots\partial a_{l_t,m_t}^{\lambda_t}} = \prod_{j=1}^t ((\lambda_j)!),$$

se $\text{deg}_{l_j,m_j}K = \lambda_j$ para todo j . Agora note que o cálculo feito até aqui é a derivada parcial na K -ésima coordenada de $\phi(A)$. Perceba que para cada duas coordenadas K e L , temos que existe um j tal que $\text{deg}_{l_j,m_j}K \neq \text{deg}_{l_j,m_j}L$. Portanto, isso quer dizer que apenas em uma coordenada é possível que $\text{deg}_{l_j,m_j}K = \lambda_j$ para todo j , dessa maneira ao calcular a derivada parcial de $\phi(A)$ teremos apenas uma coordenada J não nulo ou seja

$$\frac{\partial^{\lambda_1+\dots+\lambda_t}\phi(0)}{\partial a_{l_1,m_1}^{\lambda_1}\dots\partial a_{l_t,m_t}^{\lambda_t}} = \left(0, 0, \dots, 0, \prod_{j=1}^t (\lambda_j)!, 0, \dots, 0 \right),$$

ou melhor

$$\frac{\partial^{\lambda_1+\dots+\lambda_t}\phi(0)}{\partial a_{l_1,m_1}^{\lambda_1}\dots\partial a_{l_t,m_t}^{\lambda_t}} = (\lambda_1!) \cdots (\lambda_t!) e_J.$$

Onde $J \in \Lambda$ é caracterizado por

$$\text{deg}_{l,m}J = \lambda_j,$$

se $(l, m) = (l_j, m_j)$ para algum j , e caso contrário temos

$$\text{deg}_{l,m}J = 0.$$

Agora, dados $J \in \Lambda$ e s tais que $d(I, J) \leq s$ temos que $J = (J^1, \dots, J^r)$ e que o $d(J^1, I^1) + \dots + d(J^r, I^r) = d(J, I) \leq s$. Cada J^i é uma d_i -upla e considere k_i o número de coordenadas distintas e não nulas de J^i , assim podemos escrever J^i como

$$J^i = (0, 0, \dots, 0, J_{l_1}^i, \dots, J_{l_1}^i, \dots, J_{l_{k_i}}^i, \dots, J_{l_{k_i}}^i),$$

onde cada coordenada J_m^i representa a variável a_m^l , agora sejam $\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{ik_i}$ sendo o número de vezes que cada coordenada não nula de J^i aparece, como essas coordenadas são não nulas temos que

$$d(J^i, I^i) = \lambda_{i1} + \dots + \lambda_{ik_i}.$$

Portanto temos

$$d(J, I) = d(J^1, I^1) + \dots + d(J^r, I^r) = (\lambda_{11} + \dots + \lambda_{1k_1}) + \dots + (\lambda_{r1} + \dots + \lambda_{rk_r}).$$

Tomando $t = k_1 + \dots + k_r$ faremos uma reindexação da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} &= \lambda_1 \\
\lambda_{12} &= \lambda_2 \\
&\vdots \\
\lambda_{1k_1} &= \lambda_{k_1} \\
\lambda_{21} &= \lambda_{k_1+1} \\
\lambda_{22} &= \lambda_{k_1+2} \\
&\vdots \\
\lambda_{2k_2} &= \lambda_{k_1+k_2} \\
&\vdots \\
\lambda_{rk_r} &= \lambda_{k_1+\dots+k_r}.
\end{aligned}$$

Ou seja, temos $\lambda_{mn} = \lambda_{\sum_{i=0}^{m-1} (k_i)+n}$ com $k_0 = 0$. Portanto, dados $J \in \Lambda$ e s existem $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ associados às variáveis a_{l_j, m_j} com $j = 0, \dots, t$ em que $l_j = u$ e $m_j = v$ quando $\lambda_j = \lambda_{uv}$, logo $d(J, I) = \lambda_1 + \dots + \lambda_t$. Então temos

$$\left\langle \frac{\partial^{\lambda_1 + \dots + \lambda_t} \phi(0)}{\partial^{\lambda_1} a_{l_1, m_1} \dots \partial^{\lambda_t} a_{l_t, m_t}} \mid 1 \leq l_1, \dots, l_t \leq r, 1 \leq m_j \leq n_j, j = 1, \dots, t \right\rangle = \langle e_J \mid d(J, I) \leq s \rangle.$$

■

Corolário 7 Para um ponto qualquer $p \in SV_{\mathbf{d}}^n$ temos que

$$\dim T_p^s SV_{\mathbf{d}}^n = \sum_{l=1}^s \sum_{\substack{0 \leq l_1 \leq d_1, \dots, 0 \leq l_r \leq d_r, \\ l = l_1 + l_2 + \dots + l_r}} \binom{n_1 + l_1 - 1}{l_1} \dots \binom{n_r + l_r - 1}{l_r},$$

para todo $0 \leq s \leq d$, enquanto que $T_p^s(SV_{\mathbf{d}}^n) = \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d})}$ para qualquer $s \geq d$. Em particular, para a variedade de Veronese V_d^n temos que

$$\dim T_p^s V_d^n = n + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+s-1}{s},$$

para qualquer $0 \leq s \leq d$.

Prova: Podemos considerar sem perda de generalidade $p = e_I$ onde $I = (0, 0, \dots, 0)$, note que pela Proposição 29

$$T_p^s SV_{\mathbf{d}}^n = \overline{\langle e_J \mid d(J, I) \leq s \rangle}$$

e portanto temos que

$$\dim T_p^s V_d^n = \dim \overline{\langle e_J \mid d(J, I) \leq s \rangle} = \dim \langle e_J \mid d(J, I) \leq s \rangle.$$

Agora como cada e_J é um ponto coordenada a dimensão será dada pelo número de e_J menos 1 que geram o espaço osculador. Portanto, temos de encontrar o número e_J que geram o espaço osculador. Primeiro note que

$$\dim \langle e_J \mid d(J, I) \leq s \rangle = \sum_{l=1}^s \dim \langle e_J \mid d(J, I) = l \rangle.$$

Calculamos então a dimensão de cada $\langle e_J | d(J, I) = l \rangle$. Como a distância $d(J, I)$ é dada pelo número de coordenadas diferentes entre I e J e como $I = (0, \dots, 0)$ então a distância $d(J, I)$ será dada pelo número de coordenadas não nulas de J . Portanto, precisamos encontrar o número de e_J que possuem l coordenadas não nulas.

Considere uma fatoraçoão qualquer $l = l_1 + \dots + l_r$ onde l_i com $i = 1, \dots, r$ são inteiros não negativos em que $0 \leq l_i \leq d_i$ para todo $i = 1, \dots, r$. Portanto queremos todas as combinações de l_i elementos entre n_i , usando [18] temos que o total de possibilidade para que e_J tenha l_i sub-coordenadas dependentes de n_i que serão não nulas é dado por $\binom{n_i + l_i - 1}{l_i}$. Portanto, temos que o número de e_J que terá exatamente l coordenadas não nulas será

$$\sum_{\substack{0 \leq l_1 \leq d_1, \dots, 0 \leq l_r \leq d_r, \\ l = l_1 + l_2 + \dots + l_r}} \binom{n_1 + l_1 - 1}{l_1} \dots \binom{n_r + l_r - 1}{l_r}.$$

Como observamos anteriormente temos

$$\langle e_J | d(J, I) \leq s \rangle = \sum_{l=1}^s \langle e_J | d(J, I) = l \rangle$$

e portanto temos que o número de geradores de $\langle e_J | d(J, I) \leq s \rangle$ será

$$\sum_{l=1}^s \sum_{\substack{0 \leq l_1 \leq d_1, \dots, 0 \leq l_r \leq d_r, \\ l = l_1 + l_2 + \dots + l_r}} \binom{n_1 + l_1 - 1}{l_1} \dots \binom{n_r + l_r - 1}{l_r}.$$

■

Observação 5 Por questões de conveniência usaremos a indexação de Λ sem os parênteses, por exemplo, o ponto $e_{(1,1)(1,1)}$ será denotado apenas por: e_{1111} .

Exemplo 57 Considere a Segre-Veronese $SV_{(2,2)}^{(1,1)}$ dada pela imagem do morfismo

$$sv : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{(z_0:z_1:\dots:z_8)}^8$$

$$(x_0 : x_1 : y_0 : y_1) \mapsto (x_0^2 y_0^2 : x_0^2 y_0 y_1 : x_0^2 y_1^2 : x_0 x_1 y_0^2 : x_0 x_1 y_0 y_1 : x_0 x_1 y_1^2 : x_1^2 y_0^2 : x_1^2 y_0 y_1 : x_1^2 y_1^2).$$

Então tomando $P = e_0 = e_{0000}$ temos

$$\Lambda = \{0000, 0001, 0011, 0100, 0101, 0111, 1100, 1101, 1111\}$$

$$d(abcd, a'b'c'd') = d(ab, a'b') + d(cd, c'd')$$

$$e_{0000} = e_0$$

$$e_{0001} = e_1$$

$$e_{0100} = e_3$$

$$e_{0011} = e_2$$

$$e_{0101} = e_4$$

$$e_{1100} = e_6$$

$$e_{0111} = e_5$$

$$e_{1101} = e_7$$

$$e_{1111} = e_8.$$

Portanto, temos que os espaços osculadores de $SV_{(2,2)}^{(1,1)}$ com centro em P são dados por

$$\begin{aligned} T_P^1 &= \overline{\langle e_{0000}, e_{0001}, e_{0100} \rangle} = \overline{\langle e_0, e_1, e_3 \rangle} \\ T_P^2 &= \overline{\langle e_{0000}, e_{0001}, e_{0100}, e_{0011}, e_{0101}, e_{1100} \rangle} = \overline{\langle e_0, e_1, e_3, e_2, e_4, e_6 \rangle} \\ T_P^3 &= \overline{\langle e_{0000}, e_{0001}, e_{0100}, e_{0011}, e_{0101}, e_{1100}, e_{0111}, e_{1101} \rangle} = \overline{\langle e_0, e_1, e_3, e_2, e_4, e_6, e_5, e_7 \rangle} \\ T_P^4 &= \overline{\langle e_{0000}, e_{0001}, e_{0100}, e_{0011}, e_{0101}, e_{1100}, e_{0111}, e_{1101}, e_{1111} \rangle} = \overline{\langle e_0, e_1, e_3, e_2, e_4, e_6, e_5, e_7, e_8 \rangle} = \mathbb{P}^8. \end{aligned}$$

Exemplo 58 Considere a variedade de Segre-Veronese

$$SV_{2,2,2}^{1,1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{(z_0:z_1:\dots:z_{26})}^{26}$$

Seja $P = e_0 = e_{0000}$ então teremos que o seguinte conjunto Λ

$$\begin{aligned} \Lambda = \{ &000000, 000001, 000011, 000100, 000101, 000111, 001100, 001101, 001111, \\ &010000, 010001, 010011, 010100, 010101, 010111, 011100, 011101, 011111, \\ &110000, 110001, 110011, 110100, 110101, 110111, 111100, 111101, 111111\}. \end{aligned}$$

Portanto pela Proposição 29 temos que os espaços osculadores de ordem 1 e 2 com centro em P serão

$$\begin{aligned} T_P^1 &= \overline{\langle e_{000000}, e_{000001}, e_{000100}, e_{010000} \rangle} = \overline{\langle e_0, e_1, e_3 \rangle} \\ T_P^2 &= \overline{\langle e_{000000}, e_{000001}, e_{000100}, e_{010000}, e_{000011}, e_{001100}, e_{110000}, e_{000101}, e_{010100}, e_{010001} \rangle} \\ &= \overline{\langle e_0, e_1, e_3, e_2, e_4, e_6 \rangle}. \end{aligned}$$

4.2 Projeções Osculadoras

Considere uma variedade de Veronese $V_d^n \subset \mathbb{P}^{N(n,d)}$ e um ponto coordenado $e_i = e_{(i,\dots,i)} \in V_d^n$ para algum $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Escrevemos $(z_I)_{I \in \Lambda_{n,d}}$ para as coordenadas em $\mathbb{P}^{N(n,d)}$, onde $\Lambda_{n,d}$ é como na Definição 52 e $N(n,d) = |\Lambda_{n,d}| - 1$.

Precisaremos de uma aplicação racional auxiliar para estudar a projeção centrada em um espaço osculador, considere então a projeção

$$\begin{aligned} \pi_i : \mathbb{P}^n &\rightarrow \mathbb{P}^{n-1} \\ (x_i) &\mapsto (x_j)_{j \neq i} \end{aligned}$$

que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\sigma v_d^n} & V_d^n \subseteq \mathbb{P}^{N(n,d)} \\ \downarrow \pi_i & & \downarrow \Pi_i \\ \mathbb{P}^{n-1} & \xrightarrow{\sigma v_d^{n-1}} & V_d^{n-1} \subseteq \mathbb{P}^{N(n-1,d)} \end{array}$$

e induz a projeção linear:

$$\begin{aligned} \Pi_i : V_d^n &\rightarrow V_d^{n-1} \\ (z_I)_{I \in \Lambda_{n,d}} &\mapsto (z_I)_{I \in \Lambda_{n,d} | i \notin I}. \end{aligned}$$

Uma forma de determinar a birracionalidade é através da dimensão da fibra da aplicação, portanto usaremos o seguinte lema para isso

Lema 4 Dados $y \in \mathbb{P}^{n-1}$, $z \in \pi_i^{-1}(y)$ e $Y = \sigma v_d^{n-1}(y)$ temos que a fibra de Π_i sobre o ponto Y é dada por

$$F = \Pi_i^{-1}(Y) = \sigma v_d^n(\pi_i^{-1}(y)) = \sigma v_d^n(\langle z, e_i \rangle) \cong V_d^1$$

Prova: De fato, se $y \in \mathbb{P}^{n-1}$ e $z \in \pi_i^{-1}(y)$ temos que

$$\pi_i^{-1}(y) = \langle z, e_i \rangle,$$

que é a fibra de π_i sobre o ponto y . Como σv_d^n é um isomorfismo pelo diagrama temos

$$F = \sigma v_d^n(\pi_i^{-1}(y)) = \sigma v_d^n(\langle z, e_i \rangle).$$

■

Considere a variedade de Veronese V_d^n e o espaço osculador $T_{e_I}^s$ de ordem s centrado em e_I , pela Proposição 29 temos que o espaço osculador é gerado por $\{e_J | d(I, J) \leq s\}$

com $J \in \Lambda_{n,d}$. Dessa forma, a projeção linear de V_d^n centrada no espaço osculador $T_{e_I}^s$ é dada por:

$$\begin{aligned} \Gamma_i^s : V_d^n &\rightarrow \mathbb{P}^{N(n,d,s)} \\ (z_I)_{I \in \Lambda_{n,d}} &\mapsto (z_I)_{I \in \Lambda_{n,d}^s}, \end{aligned}$$

onde $\Lambda_{n,d}^s = \{J \in \Lambda_{n,d} \mid d(J, I) > s\}$ e $N(n, d, s) = |\Lambda_{n,d}^s| - 1$. Usaremos o seguinte lema durante a demonstração dos resultados da birracionalidade de Γ_i^s .

Lema 5 Sejam $f : X \rightarrow Z$, $g : X \rightarrow Y$ e $h : Y \rightarrow Z$ aplicações racionais tais que $f = h \circ g$. Se $y \in Y$ então $g^{-1}(y) \subset f^{-1}(h(y))$. Em particular, se f é birracional sobre sua imagem então g é birracional sobre sua imagem.

Prova: Sejam $y \in Y$ e $x \in g^{-1}(y)$. Então $f(x) = h \circ g(x) = h(g(x)) = h(y)$. Isto prova a primeira parte.

Para a segunda parte como f é birracional então $f^{-1}(h(y))$ tem um único ponto para $y \in Y$ geral, e portanto a fibra $g^{-1}(y)$ de qualquer ponto geral $y \in Y$ por g tem também apenas um ponto. ■

Lema 6 Considere a projeção da variedade de Veronese $V_d^n \subset \mathbb{P}^{N(n,d)}$, $d \geq 2$ com centro no espaço osculador $T_{e_{\underline{i}}}^s$ de ordem s sobre o ponto $e_{\underline{i}} = e_{(i, \dots, i)} \in V_d^n$, $0 \leq s \leq d-1$:

$$\Gamma_i^s : V_d^n \rightarrow \mathbb{P}^{N(n,d,s)}.$$

Então Γ_i^s é uma aplicação birracional para qualquer $s \leq d-2$, além disso $\Gamma_i^{d-1} = \Pi_i$.

Prova: Para o caso onde $s = d-1$ aplicando a Proposição 29 a projeção é dada por

$$(z_I)_{I \in \Lambda_{n,d}} \mapsto (z_I)_{I \in \Lambda_{n,d} \mid d(I, J) > d-1},$$

observando que para qualquer $J \in \Lambda_{n,d}$ tal que $d(J, (i, \dots, i)) > d-1$ temos

$$d(J, (i, \dots, i)) = d \Leftrightarrow i \notin J.$$

Portanto a projeção Γ_i^{d-1} é igual à projeção linear Π_i . Agora consideremos $s \leq d-2$, temos que Γ_i^{d-2} pode ser fatorado por Γ_i^j para todo $0 \leq j \leq d-3$.

$$\begin{array}{ccc} V_d^n & \xrightarrow{\Gamma_i^j} & \mathbb{P}^{N(n,d,j)} \\ & \searrow \Gamma_i^{d-2} & \downarrow \phi_j \\ & & \mathbb{P}^{N(n,d,d-2)} \end{array}$$

Com $\Gamma_i^{d-2} = \phi_j \circ \Gamma_i^j$ onde ϕ_j é dado por

$$\begin{aligned} \phi_j : \mathbb{P}^{N(n,d,s)} &\rightarrow \mathbb{P}^{N(n,d,d-2)} \\ (z_I)_{I \in \Lambda_{n,d} \mid d(I, J) > j} &\mapsto (z_I)_{I \in \Lambda_{n,d,s} \mid d(I, J) > d-2}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 5, se Γ_i^{d-2} for birracional então Γ_i^j também será birracional para todo $0 \leq j \leq d-3$. Assim, é suficiente prova apenas a birracionalidade de Π_i^{d-2} . Nós podemos assumir que $i \geq 0$ e considerar a coleção de índices

$$J_0 = (0, \dots, 0, 0), J_1 = (0, \dots, 0, 1), \dots, J_n = (0, \dots, 0, n) \in \Lambda_{(n,d)}.$$

Note que $d(J_j, (i, \dots, i)) \geq d-1$ para qualquer $j \in \{1, \dots, n\}$. Defina a projeção linear

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{P}^{N(n,d,s)} &\dashrightarrow \mathbb{P}^N \\ (z_J)_{J|d(I,J)>d-2} &\mapsto (z_{J_0}, \dots, z_{J_n}). \end{aligned}$$

A composição

$$\begin{aligned} \gamma \circ \Gamma_i^{d-2} \circ v_d^n : \mathbb{P}^n &\dashrightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_0 : \dots : x_n) &\mapsto (x_0^{d-1}x_0 : \dots : x_0^{d-1}x_n) = (x_0 : \dots : x_n). \end{aligned}$$

é a aplicação identidade pelo fato de que x^{d-1} fatora todas as coordenadas e como o espaço é projetivo temos que $(x_0^{d-1}x_0 : \dots : x_0^{d-1}x_n) = (x_0 : \dots : x_n)$, portanto segue que Γ_i^{d-2} é birracional. ■

Agora seja $SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} \subset \mathbb{P}^{N(\mathbf{n},\mathbf{d})}$ uma variedade de Segre-Veronese, como na Definição 51 temos $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$ e $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$. Sem perda de generalidade considere $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$. Usando a notação da Proposição 29, tome o ponto coordenado

$$e_I = e_{i_1}^{d_1} \otimes e_{i_2}^{d_2} \otimes \dots \otimes e_{i_r}^{d_r} \in SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}},$$

com $0 \leq i_j \leq n_j, I = ((i_1, \dots, i_1), \dots, (i_r, \dots, i_r))$. Denote por $(z_I)_{I \in \Lambda}$ as coordenadas de $\mathbb{P}^{N(\mathbf{n},\mathbf{d})}$ em que

$$\Lambda = \Lambda_{\mathbf{n},\mathbf{d}} = \Lambda_{n_1,d_1} \times \dots \times \Lambda_{n_r,d_r}$$

e $N(\mathbf{n}, \mathbf{d}) = |\Lambda| - 1$.

A partir de agora, iremos considerar $d = d_1 + d_2 + \dots + d_r$. Dados $s \leq d-1$ e $I = (I^1, \dots, I^r)$ onde $I^j = (i, \dots, i) \in \Lambda_{n_j,d_j}$, considere

$$\Lambda^s = \{J \in \Lambda | d(I, J) > s\}.$$

Dessa maneira a projeção linear de $SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}$ centrada no espaço osculador $T_{e_I}^s$ de ordem s em e_I é definida por

$$\begin{aligned} \Pi_{T_{e_I}^s} : SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} &\dashrightarrow \mathbb{P}^{N(\mathbf{n},\mathbf{d},s)} \\ (z_J)_{J \in \Lambda} &\mapsto (z_J)_{J \in \Lambda^s}. \end{aligned}$$

para todo $s \leq d-1$, em que $N(\mathbf{n}, \mathbf{d}, s) = |\Lambda^s| - 1$.

Para estudar as condições de birracionalidade da projeção $\Pi_{T_{e_I}^s}$ precisamos definir uma aplicação racional auxiliar Σ_l para cada $l = 1, \dots, r$. Seja

$$\Sigma_l : SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_l}.$$

para cada $l \in \{1, \dots, r\}$, onde a aplicação Σ_1 é a composição do produto de aplicações

$$\Gamma_{i_1}^{d_1-2} \times \prod_{j=2}^r \Pi_{i_j} : V_{d_1}^{n_1} \times \dots \times V_{d_r}^{n_r} \dashrightarrow \mathbb{P}^{N(n_1, d_1, d_1-2)} \times \prod_{j=2}^r \mathbb{P}^{N(n_j-1, d_j)}$$

com a Segre mergulhada

$$\mathbb{P}^{N(n_1, d_1, d_1-2)} \times \prod_{j=2}^r \mathbb{P}^{N(n_j-1, d_j)} \hookrightarrow \mathbb{P}^{N_1}.$$

As outras aplicações Σ_l com $2 \leq l \leq r$ são definidas analogamente. Em coordenadas, se escrevem as aplicações Σ_l da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \Sigma_l : SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} &\dashrightarrow \mathbb{P}^{N_l} \\ (z_J) &\mapsto (z_J)_{J \in \Lambda_l}, \end{aligned}$$

onde $\Lambda_l = \{J = (J^1, \dots, J^r) \in \Lambda \mid d(J^l, (i_l, \dots, i_l)) > d_l - 1 \text{ e } i_j \notin J^j \text{ para todo } j \neq l\}$.

Proposição 30 Considere a projeção da variedade de Segre-Veronese $SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} \subset \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d})}$ com centro no espaço osculador $\Pi_{T_{e_I}^s}$ de ordem s no ponto $e_I = e_{i_1}^{d_1} \otimes e_{i_2}^{d_2} \otimes \dots \otimes e_{i_r}^{d_r} \in SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}$ com $0 \leq s \leq d-1$:

$$\Pi_{T_{e_I}^s} : SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} \dashrightarrow \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d}, s)}.$$

Então $\Pi_{T_{e_I}^s}$ é uma aplicação birracional para qualquer $s \leq d-2$, por outro lado $\Pi_{T_{e_I}^{d-1}}$ faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} & \xrightarrow{\sigma v_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}} & SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} \subset \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d})} \\ \downarrow \pi_{i_1} \times \dots \times \pi_{i_r} & & \downarrow \Pi_{T_{e_I}^{d-1}} \\ \mathbb{P}^{n_1-1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r-1} & \xrightarrow{\sigma v_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}-1}} & SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}-1} \subset \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}-1, \mathbf{d})} \end{array}$$

onde $\mathbf{n}-1 = (n_1-1, \dots, n_r-1)$. Além disso, o fecho da fibra de $\Pi_{T_{e_I}^{d-1}}$ é a variedade de Segre-Veronese $SV_{\mathbf{d}}^{1, \dots, 1}$.

Prova: Primeiramente temos que $\Pi_{T_{e_I}^{d-2}}$ pode ser fatorado por $\Pi_{T_{e_I}^j}$ para todo $0 \leq j \leq d-3$ como no seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} & \xrightarrow{\Gamma_i^j} & \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d}, j)} \\ & \searrow \Gamma_i^{d-2} & \downarrow \phi \\ & & \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d}, d-2)} \end{array}$$

em que

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d}, j)} &\rightarrow \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d}, d-2)} \\ (z_J)_{J \in \Lambda | d(I, J) > j} &\mapsto (z_J)_{J \in \Lambda | d(I, J) > d-2} \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 5 se $\Pi_{T_{e_I}^{d-2}}$ é birracional temos que toda $\Pi_{T_{e_I}^j}$ também será para todo $j = 0, \dots, d-3$. Portanto, é suficiente provar a birracionalidade para $\Pi_{T_{e_I}^{d-2}}$. Perceba que $\Pi_{T_{e_I}^{d-2}}$ fatora a aplicação Σ_l pois

$$J = (J^1, \dots, J^r) \in \Lambda_l \Rightarrow d(J, I) \geq d_l - 1 + \sum_{j \neq l} d_j = d - 1 > d - 2.$$

Escreva $\tau_l : \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d}, d-2)} \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_l}$ como a projeção fazendo o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} & \xrightarrow{\Gamma_i^{d-2}} & \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d}, d-2)} \\ & \searrow \Sigma_l = \tau_l \circ \Gamma_i^{d-2} & \downarrow \tau_l \\ & & \mathbb{P}^{N_l} \end{array}$$

e tome um ponto geral

$$x \in \overline{\Pi_{T_{e_I}^{d-2}}(SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}})} \subseteq \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d}, d-2)}.$$

e considere $x_l = \tau_l(x), l = 1, \dots, r$. Denote por $F \subset \mathbb{P}^n$ o fecho da fibra de $\Pi_{T_{e_I}^{d-2}}$ sobre o ponto x e por F_l o fecho da fibra de Σ_l sobre o ponto x_l . Pelo Lema 5 temos $F \subset F_l$, seja $y \in F$ ponto geral, e escreva $y = \sigma v_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}(y_1, \dots, y_r)$, com $y_j \in \mathbb{P}^{n_j}, j = 1, \dots, r$. Então pelo Lema 4 temos que F_l é a imagem sobre $\sigma v_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}$ de

$$\langle y_1, e_{i_1} \rangle \times \dots \times \langle y_{l-1}, e_{i_{l-1}} \rangle \times y_l \times \langle y_{l+1}, e_{i_{l+1}} \rangle \times \dots \times \langle y_r, e_{i_r} \rangle \subset \mathbb{P}^{\mathbf{n}}.$$

Como $F \subset F_l$ para todo $l = 1, \dots, r$ temos que $F \subset \bigcap F_l$ e como $\bigcap F_l = \{(y_1, \dots, y_r)\} = \{y\}$ segue que $F = \{y\}$, isso nos dá que $\Pi_{T_{e_I}^{d-2}}$ é birracional. ■

Em seguida analisaremos as condições de birracionalidade para o caso de projeções lineares centradas em um espaço gerado por vários espaços osculadores sobre pontos em posições gerais. Primeiro faremos para o caso da variedade de Veronese $V_d^n \subset \mathbb{P}^{N(n, d)}$, com pontos coordenados $e_i = e_{(i, \dots, i)} \in V_d^n, i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Para todo $m \in \{1, \dots, n\}$ seja $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_m)$ uma $(m+1)$ -upla de inteiros positivos e seja $s = s_0 + \dots + s_m$. Considere $e_{i_0}, \dots, e_{i_m} \in V_d^n$ pontos coordenados distintos, denotaremos por $T_{e_{i_0}, \dots, e_{i_m}}^{s_0, \dots, s_m} \subset \mathbb{P}^{N(n, d)}$ o espaço linear gerado por $\langle T_{e_{i_0}}^{s_0}, \dots, T_{e_{i_m}}^{s_m} \rangle$.

Pela Proposição 29 temos que a projeção de V_d^n centrada em $T_{e_{i_0}, \dots, e_{i_m}}^{s_0, \dots, s_m} \subset \mathbb{P}^{N(n, d)}$ é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_m}}^{s_0, \dots, s_m} : V_d^n &\dashrightarrow \mathbb{P}^{N(n, d, \mathbf{s})} \\ (z_I)_{I \in \Lambda_{n, d}} &\mapsto (z_J)_{J \in \Lambda_{n, d}^{\mathbf{s}}}. \end{aligned}$$

Onde $\Lambda_{n, d}^{\mathbf{s}} = \{J \in \Lambda_{n, d} | d(J, (j, \dots, j)) > s_j \text{ para todo } j = 0, \dots, m\}$ é não vazio e $N(n, d, \mathbf{s}) = |\Lambda_{n, d}^{\mathbf{s}}| - 1$.

Lema 7 Seja $d \geq 2$ e $0 \leq s_j \leq d - 2$ para todo $j = 0, \dots, m$. Então se $n \leq d$ e $s \leq n(d - 1) - 2$ temos que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_m}}^{s_0, \dots, s_m}$ é uma aplicação birracional sobre sua imagem.

Prova: Para mostrar a birracionalidade de $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_m}}^{s_0, \dots, s_m}$ exibiremos $J_0, \dots, J_n \in \Lambda_{n,d}^s$ e a projeção linear

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{P}^{N(n,d)} &\dashrightarrow \mathbb{P}^n \\ (z_I)_{I \in \Lambda_{n,d}^s} &\mapsto (z_{J_j})_{j=0, \dots, n} \end{aligned}$$

tais que a composição $\gamma \circ \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_m}}^{s_0, \dots, s_m} \circ v_d^n : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ é uma transformação de Cremona de \mathbb{P}^n , ou seja, essa composição tem que ser da forma

$$\begin{aligned} \gamma \circ \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_m}}^{s_0, \dots, s_m} \circ v_d^n : \mathbb{P}^n &\dashrightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}} &\mapsto \left(\frac{1}{x_0} : \frac{1}{x_1} : \dots : \frac{1}{x_n} \right). \end{aligned}$$

Separamos em dois casos, primeiro o caso onde $m < n$ e o segundo caso onde $m = n$. Suponha $m < n$ então tome $J_j \in \Lambda_{n,d}^s$ com $0 \leq j \leq n$ onde J_j é dado por

$$J_j = (0, 1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, n, n, \dots, n).$$

Como $m \leq n$, temos que para todo $j = 0, \dots, n$ temos que $d(J_j, (i, \dots, i)) = d - 1 > s_j$ para $i = 0, \dots, m$, portanto temos que J_j de fato está em $\Lambda_{n,d}^s$. Assim, obtemos a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma \circ \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_m}}^{s_0, \dots, s_m} \circ v_d^n : \mathbb{P}^n &\dashrightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}} &\mapsto (x_{J_j})_{j \in \{0, 1, \dots, n\}}. \end{aligned}$$

Perceba que essa é uma transformação de Cremona para \mathbb{P}^n , de fato, temos que $\gamma \circ \Gamma_{e_{i_0}}^{s_0, \dots, s_m}$ é dada por

$$(x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}} \mapsto (x_1 x_2 \dots x_n^{d-n+1} : x_0 x_1 \dots x_n^{d-n+1} : \dots : x_0 \dots x_n^{d-n}).$$

Perceba que x_n^{d-n} fatora todas as coordenadas, logo podemos retirá-lo e daí temos

$$(x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}} \mapsto (x_1 x_2 \dots x_n : x_0 x_2 \dots x_n : \dots : x_0 \dots x_{n-1}).$$

Como \mathbb{P}^n é um espaço projetivo podemos dividir todas as coordenadas da imagem $\gamma \circ \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_m}}^{s_0, \dots, s_m} \circ v_d^n$ por $x_0 x_1 \dots x_n$, ou seja, a imagem de (x_i) será dada por

$$(x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}} \mapsto \left(\frac{1}{x_0} : \dots : \frac{1}{x_n} \right).$$

Portanto, temos que $\gamma \circ \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_m}}^{s_0, \dots, s_m} \circ v_d^n$ é de fato a transformação de Cremona a qual é birracional.

Caso $m = n$ temos que existe $s_i \neq d - 2$ caso contrário teríamos

$$s = (n + 1)(d - 2) = n(d - 1) - n + d - 2,$$

e de $s \leq n(d - 1) - 2$ teríamos que

$$-n + d \leq 0,$$

ou seja

$$d \leq n,$$

o que é uma contradição com a hipótese. Logo existe pelo menos um $0 \leq i \leq n$ tal que $s_i < d - 2$, seja \tilde{s} o conjunto de todos os $i = 0, \dots, n$ tais que $s_i < d - 2$, seja k o número de elementos de \tilde{s} e denote $\tilde{s} = \{\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_{k-1}\}$, então temos que

$$s = (n + 1 - k)(d - 2) + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{s}_i.$$

Assim temos

$$n(d - 1) - n + d - 2 - k(d - 2) + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{s}_i \leq n(d - 1) - 2,$$

ou seja, temos que

$$\begin{aligned} -n + d - k(d - 2) + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{s}_i &\leq 0 \\ d - n &\leq k(d - 2) - \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{s}_i. \end{aligned}$$

logo

$$d - n \leq \sum_{i=0}^{k-1} (d - 2 - \tilde{s}_i).$$

Agora considere a família de J_j dada da seguinte maneira

$$J_j = (0, 1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, n, \tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_h, \dots, \tilde{s}_h)$$

onde cada \tilde{s}_i é inserido $d - \tilde{s}_i - 2$ vezes até que J_j complete uma d -upla, isso é possível, pois J_j é uma n -upla com uma $d - n$ -upla e como $d - n \leq \sum_{i=0}^{k-1} (d - 2 - \tilde{s}_i)$ existe uma quantidade suficiente de \tilde{s}_i para completar a $d - n$ -upla dessa maneira. Agora note que tomando J_j desta maneira temos

$$d(J_j, (i, \dots, i)) > s_i$$

para todo $i, j = 0, \dots, n$. De fato, se $s_i = d - 2$ temos que $d(J_j, (i, \dots, i)) = d - 1$ e caso $s_i \in \tilde{s}$ temos $d(J_j, (i, \dots, i)) > s_i$ pois J_j possui um máximo de $d - s_i - 1$ coordenadas iguais a i . Portanto segue que $J_j \in \Lambda^s$, então considere a projeção

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{P}^{N(n,d)} &\dashrightarrow \mathbb{P}^n \\ (z_I)_{I \in \Lambda_{n,d}^s} &\mapsto (z_{J_j})_{j=\{0,\dots,n\}}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma \circ \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_m}}^{s_0, \dots, s_m} \circ \nu_d^n : \mathbb{P}^n &\dashrightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}} &\mapsto (z_{J_j})_{j=\{0, \dots, n\}}. \end{aligned}$$

Perceba que essa é uma transformação de Cremona para \mathbb{P}^n , de fato, temos que $\gamma \circ \Gamma_{e_{i_0}}^{s_0, \dots, s_m}$ é dada por

$$(x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}} \mapsto (x_1 x_2 \dots x_n x_{\tilde{s}} : x_0 x_1 \dots x_n x_{\tilde{s}} : \dots : x_0 \dots x_{n-1} x_{\tilde{s}}),$$

em que

$$x_{\tilde{s}} = x_{\tilde{s}_1}^{d-\tilde{s}_1-2} x_{\tilde{s}_2}^{d-\tilde{s}_2-2} \dots x_{\tilde{s}_{h-1}}^{d-\tilde{s}_{h-1}-2} x_{\tilde{s}_h}^g,$$

onde $1 \leq h \leq k$ e $1 \leq g \leq d - \tilde{s}_h - 2$. Perceba que $x_{\tilde{s}}$ é um fator em comum de todas as coordenadas, logo podemos retirá-lo e daí temos

$$(x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}} \mapsto (x_1 x_2 \dots x_n : x_0 x_1 \dots x_n : \dots : x_0 \dots x_{n-1}).$$

Como vimos no caso anterior, esta é a transformação de Cremona e portanto temos que $\gamma \circ \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_m}}^{s_0, \dots, s_m} \circ v_d^n$ é uma transformação de Cremona a qual é birracional. ■

Lema 8 Seja $d \geq 2$ e $0 \leq s_j \leq d - 2$ para todo $j = 0, \dots, m$. Então se $n \leq d$ e $s = n(d - 1) - 1$ temos que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_m}}^{s_0, \dots, s_m}$ é uma aplicação constante.

Prova: Considere primeiramente o caso $m < n$, como $s_i \leq d - 2$ para $i = 0, \dots, n$ então temos que

$$s \leq (m + 1)(d - 2) \leq n(d - 2) = nd - 2n = nd - n - n = n(d - 1) - n$$

mas pela hipótese temos que $s = n(d - 1) - 1$, ou seja,

$$\begin{aligned} n(d - 1) - 1 &\leq n(d - 1) - n \\ -1 &\leq -n, \end{aligned}$$

ou

$$n \leq 1.$$

A única maneira de satisfazer a inequação acima é tomando $n = 1$ e teríamos que $m = 0$ pois $m < n$, logo a projeção osculadora é centrada em apenas um espaço osculador e já tratamos esse caso.

Agora considere $J \in \Lambda_{n,d}^s$, então temos que $d(J, (i, \dots, i)) > s_i$, ou seja, J possui um máximo de $d - s_i - 1$ coordenadas iguais a i para todo $i = 0, \dots, n$. Sejam $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ onde λ_i representa a quantidade coordenadas iguais a i de J , assim temos que

$$\begin{aligned} d &= \lambda_0 + \dots + \lambda_n \\ &\leq d - s_0 - 1 + d - s_1 - 1 + \dots + d - s_n - 1 \\ &= (n + 1)d - s - (n + 1) \\ &= (n + 1)(d - 1) - s \\ &= (n + 1)(d - 1) - n(d - 1) + 1 \\ &= n(d - 1) + (d - 1) - n(d - 1) + 1 \\ &= d. \end{aligned}$$

Portanto, segue que $\lambda_i = d - s_i - 1$ para $i = 0, \dots, n$ é a única possibilidade para satisfazer $d(J, (i, \dots, i)) = s_i$, ou seja, a imagem da projeção $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_m}}^{s_0, \dots, s_m}$ é dada por um único e_J , portanto $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_m}}^{s_0, \dots, s_m}$ é uma aplicação constante. ■

Lema 9 Seja $d \geq 2$ e $0 \leq s_j \leq d - 2$ para todo $j = 0, \dots, m$. Se $n > d$ então $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2}$ é birracional sobre sua imagem.

Prova: Seja $K_0 = \{0, \dots, n - d\}$. Para todo $j \in K_0$ considere

$$(J_{K_0})_j := (j, n - d + 1, n - d + 2, \dots, n)$$

uma d -upla, note que $d((J_{K_0})_j, (i, \dots, i)) \geq d - 2$ para todo $i = 0, \dots, n$. Portanto temos que $(J_{K_0})_j \in \Lambda_{n,d}^s$ para todo $j \in K_0$. Então definimos a projeção linear

$$\begin{aligned} \gamma_{K_0} : \mathbb{P}^{N(n,d,s)} &\dashrightarrow \mathbb{P}^{n-d} \\ (z_I)_{I \in \Lambda_{n,d}^s} &\mapsto (z_{(J_{K_0})_j})_{j \in K_0}. \end{aligned}$$

Então a composição $\gamma_{K_0} \circ \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2} \circ v_d^n : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-d}$ é a projeção linear dada por

$$\begin{aligned} \gamma_{K_0} \circ \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2} \circ v_d^n : \mathbb{P}^n &\dashrightarrow \mathbb{P}^{n-d} \\ (x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}} &\mapsto (x_j)_{j \in K_0}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, para cada subconjunto $K \subset \{0, \dots, n\}$ com $n - d + 1$ elementos distintos definimos a projeção linear $\gamma_K : \mathbb{P}^{N(n,d,s)} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-d}$ em que a composição $\gamma_K \circ \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2} \circ v_d^n$ é a projeção linear dada por

$$\begin{aligned} \gamma_K \circ \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2} \circ v_d^n : \mathbb{P}^n &\dashrightarrow \mathbb{P}^{n-d} \\ (x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}} &\mapsto (x_i)_{i \in K}. \end{aligned}$$

Como v_d^n é um isomorfismo, pelo Lema 5 temos que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2}$ é birracional. ■

Corolário 8 Seja $d \geq 2$ então $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_{n-1}}}^{d-2, \dots, d-2}$ é birracional.

Prova: O caso $n = 1$ já foi trabalhado no Lema 9, então considere $n \geq 2$ e note que $s = n(d - 2)$ ou seja

$$s = n(d - 1) - n \leq n(d - 1) - 2.$$

Se $n \leq d$ temos que pelo Lema 7 temos que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2}$ é birracional. Caso $n > d$ temos pelo Lema 9 que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2}$ é birracional. ■

Corolário 9 Seja $d \geq 2$, se $n \geq 2$ então $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2, \min\{n, d\}-2}$ é birracional, por outro lado, $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2, \min\{n, d\}-1}$ não é birracional.

Prova: Primeiro provaremos que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2, \min\{n, d\}-2}$ é birracional, de fato, separemos em dois caso, primeiro se $n \leq d$ então $\min\{n, d\} = n$ e logo

$$\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2, n-2}.$$

Portanto, temos que

$$s = n(d - 2) + n - 2 = n(d - 1) - n + n - 2 = n(d - 1) - 2,$$

logo pelo Lema 7 temos que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_{n-1}}}^{d-2, \dots, d-2, \min\{n, d\}-2}$ é birracional.

Caso $n > d$ temos que $\min\{n, d\} = d$ e portanto temos que

$$\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_{n-1}}}^{d-2, \dots, d-2, \min\{n, d\}-2} = \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2, d-2}.$$

Assim pelo Lema 9 temos que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2, \min\{n, d\}-2}$ é birracional.

Agora provaremos que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2, \min\{n, d\}-1}$ não é birracional, separemos em dois casos novamente. Suponha $n \leq d$, logo, $\min\{n, d\} = n$ e portanto temos

$$\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2, \min\{n, d\}-1} = \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2, n-1}.$$

Assim temos que

$$s = n(d-2) + n - 1 = n(d-1) - n + n - 1 = n(d-1) - 1$$

e portanto satisfaz as hipóteses do Lema 8, ou seja, $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2, \min\{n, d\}-1}$ é uma aplicação constante, logo não é birracional.

Caso $n > d$ temos que $\min\{n, d\} = d$ e portanto

$$\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2, \min\{n, d\}-1} = \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2, d-1}.$$

Temos que $\Gamma_{e_{i_n}}^{d-1}$ fatora $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2, \min\{n, d\}-1}$, e pelo Lema 6 temos que $\Gamma_{e_{i_n}}^{d-1} = \Pi_n$, portanto não é birracional, isso implica que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-2, \dots, d-2, \min\{n, d\}-1}$ não é birracional. ■

Corolário 10 Se $d \geq 3$ então $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, \min\{2n, d\}-2}$ é birracional mas $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, \min\{2n, d\}-1}$ não é birracional.

Prova: Primeiramente provaremos que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, \min\{2n, d\}-2}$ é birracional. Suponha que $2n \leq d$, ou seja, $\min\{2n, d\} = 2n$, logo

$$\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, \min\{2n, d\}-2} = \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, 2n-2}$$

e portanto temos que

$$s = n(d-3) + 2n - 2 = n(d-1) - 2n + 2n - 2 = n(d-1) - 2.$$

Pelo Lema 7 segue que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, \min\{2n, d\}-2}$ é birracional.

Suponha que $2n > d$, ou seja, $\min\{2n, d\} = d$, logo

$$\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, \min\{2n, d\}-2} = \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, d-2}.$$

Dessa maneira, temos que

$$s = n(d-3) + d - 2 = n(d-1) - 2n + d - 2.$$

Como temos $2n > d$ então $-2n + d < 0$ e portanto

$$s = n(d-1) - 2n + d - 2 < n(d-1) - 2.$$

Segue do Lema 7 que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, \min\{2n, d\}-2}$ é birracional.

Agora considere $2n \leq d$ então temos que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, \min\{2n, d\}-1} = \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, 2n-1}$ e portanto temos

$$s = n(d-3) + 2n - 1 = n(d-1) - 2n + 2n - 1 = n(d-1) - 1.$$

Portanto $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, \min\{2n, d\}-1}$ satisfaz as hipóteses do Lema 8 e portanto temos que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, \min\{2n, d\}-1}$ é uma aplicação constante, a qual não é birracional.

Caso $2n > d$ temos que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, \min\{2n, d\}-1} = \Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, d-1}$, assim temos que $\Gamma_{i_n}^{d-1}$ fatora $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, d-1}$. Pelo Lema 6 temos $\Gamma_{e_n}^{d-1} = \Pi_{e_{i_n}}$, logo não é birracional, portanto segue que $\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}}^{d-3, \dots, d-3, d-1}$ não pode ser birracional. ■

Agora iremos estudar a projeção osculadora de uma Segre-Veronese centrada no espaço gerado por vários espaços osculadores. Seja $SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} \subset \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d})}$ uma variedade de Segre-Veronese, e considere $(z_I)_{I \in \Lambda}$ a representação de suas coordenadas em $\mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d})}$. Considere os pontos coordenadas $e_{I_0}, e_{I_1}, \dots, e_{I_{n_1}} \in SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}$ onde

$$I_j = ((j, \dots, j), \dots, (j, \dots, j)) \in \Lambda.$$

Seja $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_m)$ uma $(m+1)$ -uplas de inteiros positivos, e seja $s = s_0 + \dots + s_m$. Denote por $T_{e_{I_0}, \dots, e_{I_m}}^{s_0, \dots, s_m} \subset \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d})}$ o espaço linear gerado pelos espaços osculadores $T_{e_{I_0}}^{s_0}, \dots, T_{e_{I_m}}^{s_m}$. Pela Proposição 29 a projeção de $SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}$ centrada em $T_{e_{I_0}, \dots, e_{I_m}}^{s_0, \dots, s_m}$ é dada por

$$\begin{aligned} \Pi_{T_{e_{I_0}, \dots, e_{I_m}}^{s_0, \dots, s_m}} : SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} &\dashrightarrow \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d}, \mathbf{s})} \\ (z_I)_{I \in \Lambda} &\mapsto (z_J)_{J \in \Lambda^{\mathbf{s}}}. \end{aligned}$$

Em que $\Lambda^{\mathbf{s}} = \{J \in \Lambda \mid d(I_j, J) > s_j \forall j\}$ é não vazio e $N(\mathbf{n}, \mathbf{d}, \mathbf{s}) = |\Lambda^{\mathbf{s}}| - 1$.

Proposição 31 Sejam $r, d \geq 2$. Então a projeção $\Pi_{T_{e_{I_0}, \dots, e_{I_{n_1-1}}}^{d-2, \dots, d-2}} : SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} \dashrightarrow \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d}, \mathbf{d-2})}$ é birracional.

Prova: Para cada $l \in \{1, \dots, r\}$ considere o conjunto

$$\Lambda_l = \left\{ J = (J^1, \dots, J^r) \in \Lambda \mid \begin{cases} 0, \dots, n_1 - 1 \notin J^j & \text{se } j \neq l \\ d(J^l, (i, \dots, i)) \geq d_l - 1 & \forall i \in \{0, \dots, n_1 - 1\} \end{cases} \right\}$$

e considere a projeção linear

$$\begin{aligned} \Sigma_l : SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} &\dashrightarrow \mathbb{P}^{N_l} \\ (z_I)_{I \in \Lambda} &\mapsto (z_J)_{J \in \Lambda_l}, \end{aligned}$$

Note que $\Lambda_l \subset \Lambda^{\mathbf{d-2}}$, de fato, seja $J \in \Lambda_l$ então temos que

$$d(J, I_i) = d(J^1, (i, \dots, i)) + \dots + d(J^r, (i, \dots, i)),$$

com $i = 0, \dots, n_1 - 1$, quando $j \neq l$ temos que $0, \dots, n_1 - 1 \notin J^j$ e portanto $d(J^j, (i, \dots, i)) = d_j$, quando $j = l$ temos que $d(J^l, (i, \dots, i)) = d_l - 1$ e portanto

$$d(J, I_i) = d_1 + \dots + d_r - 1 = d - 1 > d - 2.$$

Logo $J \in \Lambda^{\mathbf{d-2}}$ e portanto $\Lambda_l \subset \Lambda^{\mathbf{d-2}}$. Dessa forma $\Lambda^{\mathbf{d-2}}$ fatora Λ_l , então existe uma projeção linear $\tau_l : \mathbb{P}^{N(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{d-2})} \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_l}$ tal que $\Sigma_l = \tau_l \circ \Pi_{T_{e_{I_0}, \dots, e_{I_{n_1-1}}}^{d-2, \dots, d-2}}$ e que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc}
SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} & \xrightarrow{\Pi_{T_{e_{I_0}, \dots, e_{I_{n_1-1}}}}^{d-2, \dots, d-2}} & \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d}, \mathbf{d}-2)} \\
& \searrow \Sigma_l = \tau_l \circ \Gamma_i^{d-2} & \downarrow \tau_l \\
& & \mathbb{P}^{N_i}
\end{array}$$

Quando $j = l$ a restrição de $\Sigma_l \circ \sigma v_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}$ para

$$\{pt\} \times \cdots \times \{pt\} \times \mathbb{P}^{n_l} \times \{pt\} \times \cdots \times \{pt\}$$

com $\{pt\}$ um ponto geral, é isomorfa à projeção osculadora

$$\Gamma_{e_{i_0}, \dots, e_{i_{n_1-1}}}^{d-2, \dots, d-2} : SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} \dashrightarrow \mathbb{P}^{N(n_l, d_l, \mathbf{d}-2)}.$$

Quando $j \neq l$, a restrição de $\Sigma_l \circ \sigma v_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}$ para

$$\{pt\} \times \cdots \times \{pt\} \times \mathbb{P}^{n_j} \times \{pt\} \times \cdots \times \{pt\}$$

é isomorfa à projeção com centro em $\langle e_0, \dots, e_{n_1-1} \rangle$ que por sua vez é birracional pelo Corolário 8.

Considere $x_l = \tau_l(x)$ com $l = 1, \dots, r$. Seja $F \subset \mathbb{P}^n$ o fecho da fibra de $\Pi_{T_{e_{I_0}, \dots, e_{I_{n_1-1}}}}^{d-2, \dots, d-2}$ sobre x e F_l o fecho da fibra de Σ_l sobre x_l . Pelo Lema 5 temos que $F \subset F_l$. Seja $y \in F \subset F_l$ um ponto geral com $y = \sigma v_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}(y_1, \dots, y_r)$, com $y_j \in \mathbb{P}^{n_j}$ e $j = 1, \dots, r$. Então, F_l é a imagem sobre $\sigma v_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}$ de

$$\langle y_1, e_{i_0}, \dots, e_{n_1-1} \rangle \times \cdots \times \langle y_{l-1}, e_0, \dots, e_{n_1-1} \rangle \times y_l \times \langle y_{l+1}, e_0, \dots, e_{n_1-1} \rangle \times \cdots \times \langle y_r, e_0, \dots, e_{n_1-1} \rangle.$$

Como $F \subset F_l$ temos que $F = \bigcap_{l=1, \dots, r} F_l$, mas note que $\bigcap_{l=1, \dots, r} F_l = \{(y_1, \dots, y_r)\} = \{y\}$. Portanto temos $F = \{y\}$, logo $\Pi_{T_{e_{I_0}, \dots, e_{I_{n_1-1}}}}^{d-2, \dots, d-2}$ é birracional. ■

5 Defeitos Secantes

5.1 Defeitos Secantes em Variedade de Veronese

Nessa seção começaremos o estudo de defeitos secantes em variedades algébricas. Em geral, não é simples determinar se uma variedade é ou não h -defeituosa. Para isso, usaremos as projeções osculadoras definidas no capítulo anterior como hipóteses dos resultados para determinar o defeito das variedades de Veronese e Segre-Veronese. Para um estudo mais aprofundado sobre os defeitos secantes veja [19].

Definição 54 Sejam $X \subset \mathbb{P}^N$, uma secante h -linear de X é um espaço linear de X gerado por h pontos $x_1, \dots, x_h \in X$ denotado por $\langle x_1, \dots, x_h \rangle$.

Definição 55 Seja $X \subset \mathbb{P}^N$, uma variedade algébrica e h um inteiro não negativo, definimos a variedade h -secante de X pelo fecho projetivo da união de todas as secantes h -lineares

$$Sec_h X = \overline{\bigcup_{p_1, \dots, p_h} \langle p_1, \dots, p_h \rangle}.$$

Exemplo 59 Em uma variedade algébrica a secante 2-linear passando por dois pontos é a reta passando por esses pontos, por 3 pontos não colineares será a variedade 3-linear gerada por eles.

Observação 6 A $Sec_h X$ é uma variedade algébrica ([19] Russo, 2001).

Definição 56 Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade algébrica de dimensão n , chamamos de dimensão esperada de $Sec_h X$ a dimensão máxima a qual ela pode ter. Temos por [19] que a dimensão esperada é dada por

$$expdim(Sec_h X) = \min\{N, h(n+1) - 1\}.$$

Assim, caso

$$dim(Sec_h X) < expdim(Sec_h X),$$

dizemos que a variedade X é h -defeituosa.

Exemplo 60 Toda variedade $X \subset \mathbb{P}^N$ não-degenerada não é 1-defeituosa.

De fato, considere n a dimensão de X , para $h = 1$ temos que a dimensão esperada de $Sec_1 X$ é

$$expdim(Sec_1 X) = \min\{N, 1(n+1) - 1\} = \min\{N, n\} = n.$$

Note que, dado $x \in X$ temos que

$$x \in \langle x \rangle \subset \overline{\bigcup_{x_i \in X} \langle x_i \rangle} = Sec_1 X.$$

Portanto segue que $X \subset Sec_1 X$ e logo $Sec_1 X = X$. Assim

$$dim(Sec_1 X) = dim X = n = expdim(Sec_1 X),$$

logo X é não 1-defeituosa.

Proposição 32 Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade não-degenerada. Se X é h -defeituosa, então X é k -defeituosa para todo $k \geq h$.

Exemplo 61 A superfície de Veronese V_2^2 é 2-defeituosa.

De fato, considere a variedade V_2^2 como a imagem de um morfismo $\sigma : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$ dado por

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2).$$

Agora considere um ponto $P = (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2) \in V_2^2$ pode ser visto matricialmente da seguinte maneira

$$P = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

tem posto 1 enquanto que a matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

possui posto entre 1 e 3, logo o $\text{posto}(P) \leq \min\{1, 3\}$ o que implica que

$$\text{posto}(P) = 1.$$

Ou seja, a matriz do ponto P é simétrica de posto 1. Portanto podemos considerar V_2^2 um subconjunto das matrizes simétricas de posto 1, logo

$$\begin{aligned} \text{Sec}_2(V_2^2) &\subset \{\overline{M + N}; M, N \in \mathbb{M}_3 \text{ matrizes simétricas de posto 1}\} \\ &= \{\overline{M} \in \mathbb{M}_3 \mid \text{matriz simétrica de posto 2}\} \\ &= \{\overline{M} \in \mathbb{M}_3 \mid M \text{ matriz simétrica de determinante nulo}\} \\ &= Z(\det(M)) = Z((y_0y_3y_5 + y_1y_4y_2 + y_2y_1y_4 - y_2^2y_3 - y_1^2y_5 - y_0y_4^2)). \end{aligned}$$

Dessa maneira $\text{Sec}_2(V_2^2)$ é uma hipersuperfície de grau 3 em \mathbb{P}^5 , logo a codimensão é 1 e a dimensão dela é 4, porém a dimensão esperada de $\text{Sec}_2(V_2^2)$ é $2(2 + 1) - 1 = 5$. Portanto V_2^2 é 2 defeituosa.

Exemplo 62 A variedade V_2^n é n -defeituosa para todo $n \geq 2$.

No exemplo anterior provamos para $n = 2$, agora usaremos a mesma estratégia para um n qualquer. Considere a variedade V_2^n como a imagem de $\sigma : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$ dada por

$$(x = x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : \cdots : x_0x_n : x_1^2 : x_1x_2 : \cdots : x_1x_n : \cdots : x_n^2).$$

Então, analogamente ao exemplo anterior temos que V_2^n pode ser representado como o conjunto das matrizes simétricas $n + 1 \times n + 1$ com posto 1

$$\begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & \cdots & x_0x_n \\ x_0x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0x_n & x_1x_n & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}.$$

Portanto temos que

$$\begin{aligned}
Sec_n(V_2^n) &= \{\overline{M_1 + \cdots + M_n} | M_1, \dots, M_n \in \mathbb{M}_{n+1} \text{ matrizes simétrica de posto } 1\} \\
&= \{\overline{M} \in \mathbb{M}_{n+1} | M \text{ matriz simétrica de posto } n\} \\
&= \{\overline{M} \in \mathbb{M}_{n+1} | M \text{ matriz simétrica com determinante nulo}\} \\
&= Z(det(M)).
\end{aligned}$$

Como M é uma matriz $(n+1) \times (n+1)$ temos que $det(M)$ é dado por um polinômio homogêneo de grau $n+1$ e temos que $Sec_n(V_2^n)$ é uma hipersuperfície de dimensão $N-1$ em \mathbb{P}^N , porém a dimensão esperada de $Sec_n(V_2^n)$ é

$$\begin{aligned}
expdim(Sec_n(V_2^n)) &= \min\{N, n(n+1) - 1\} \\
&= \min\{N, n^2 + n - 1\} \\
&= N,
\end{aligned}$$

pois como $N = \binom{n+2}{2} - 1 = \frac{n^2+3n}{2}$ temos

$$n^2 + n - 1 = \frac{2n^2 + 2n}{2} - 1 > \frac{n^2 + 3n}{2} - 1 = N - 1$$

para todo $n \geq 2$. Portanto

$$dim(Sec_n(V_2^n)) = N - 1 < N = expdim(Sec_n(V_2^n)),$$

ou seja, V_2^n é n defeituosa.

Calcular a dimensão da variedade h -secante de uma variedade nem sempre é uma tarefa fácil. Para nos auxiliar, iremos utilizar o Lema de Terracini o qual apresenta uma formula para a dimensão da variedade k -secante de uma variedade X .

Teorema 6 (Lema de Terracini) Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade algébrica projetiva não degenerada. Então se $char(K) = 0$, existe um subconjunto aberto $U \subset Sec_2 X$ tal que

$$\langle T_{x_1} X, \dots, T_{x_k} X \rangle = T_z Sec_k X$$

para todo $z \in U, x_i \in X, i = 1, \dots, k, z \in \langle x_1, \dots, x_k \rangle$. Em particular

$$dim(Sec_2 X) = 2dim(X) - dim(T_x X \cap T_y X)$$

para todo $x, y \in X$ sendo pontos gerais.

Prova: Teorema 1.3.1 [19]

Exemplo 63 A variedade de Veronese $V_2^2 \subset \mathbb{P}^5$ é 2-defeituosa.

De fato, tome dois pontos gerais $p, q \in \mathbb{P}^2$, sem perda de generalidade podemos considerar $p = (1 : 0 : 0)$ e $q = (0 : 0 : 1)$, considere $P = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0), Q = (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^5$ as imagem de V_2^2 sobre os pontos p e q . Seja $l \subset \mathbb{P}^2$ a reta passando por p e q e seja L a imagem de l por V_2^2 . Perceba que

$$l = \{(t_0 : 0 : t_1) \in \mathbb{P}^2 | (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}^1\},$$

portanto temos L é dada pelo conjunto

$$L = \{(t_0^2 : 0 : t_1^2 : 0 : t_0 t_1 : 0) \in \mathbb{P}^5 \mid (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}^1\}.$$

Vamos agora construir os espaços osculadores $T_P L$ e $T_Q L$ seguindo a Definição 53. Considere a parametrização no aberto \mathbb{P}^5 ($x_0 = 0$)

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A}^1 &\rightarrow \mathbb{A}^5 \cap Y \\ 0 &\mapsto P \\ t_1 &\mapsto \varphi(t_1) = (0, t_1^2, 0, t_1, 0). \end{aligned}$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} &= (0, 0, 0, 0, 0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} &= (0, 2t_1, 0, 1, 0). \end{aligned}$$

Portanto temos que

$$\begin{aligned} T_P L &= \overline{\langle (0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0) \rangle} \\ &= \langle (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0), (1 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0) \rangle \\ &= \langle (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0), (0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0) \rangle. \end{aligned}$$

Agora considere a parametrização no aberto \mathbb{P}^5 ($x_2 = 0$)

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{A}^1 &\rightarrow \mathbb{A}^5 \cap Y \\ 0 &\mapsto Q \\ t_0 &\mapsto \phi(t_0) = (t_0^2, 0, 0, 0, t_0, 0). \end{aligned}$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t_0} &= (2t_0, 0, 0, 0, 1, 0) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t_1} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Portanto temos que

$$\begin{aligned} T_Q L &= \overline{\langle (0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0) \rangle} \\ &= \langle (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0), (0 : 0 : 1 : 0 : 1 : 0) \rangle \\ &= \langle (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0), (0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0) \rangle. \end{aligned}$$

Assim temos que $(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0) \in T_P L \cap T_Q L$ portanto temos que

$$\dim(T_P L \cap T_Q L) \geq 0.$$

Como $L \subset V_2^2$ implica que

$$\{(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0)\} \subset (T_P V_2^2 \cap T_Q V_2^2).$$

Assim temos que

$$\dim(T_P V_2^2 \cap T_Q V_2^2) \geq 0.$$

Pelo Lema de Terracini temos que

$$\dim(\text{Sec}_2(V_2^2)) = \dim(V_2^2) + \dim(V_2^2) - \dim(T_P V_2^2 \cap T_Q V_2^2),$$

ou seja

$$\dim(\text{Sec}_2(V_2^2)) = 2 + 2 - \dim(T_P V_2^2 \cap T_Q V_2^2) \leq 4 < 5 = \text{expdim}(\text{Sec}_2(V_2^2)).$$

Portanto V_2^2 é 2 defeituosa.

Exemplo 64 A variedade de Veronese V_2^n é 2-defeituosa.

De fato, considere sem perda de generalidade $p = (1 : 0 : \dots : 0)$ e $q = (0 : 1 : \dots : 0)$ dois pontos gerais de P^n e sejam $P = (1 : 0 : \dots : 0), Q = (0 : 1 : 0 : \dots : 0) \subset \mathbb{P}^N$ as imagens de p e q por V_2^n respectivamente. Seja l a reta passando por p e q ou seja

$$l = \{(a : b : 0 : \dots : 0) | (a : b) \in \mathbb{P}^1\}$$

Então a imagem de l pela Veronese será

$$L = \{(a^2 : b^2 : 0 : \dots : 0 : ab : 0 : \dots : 0) | (a : b) \in \mathbb{P}^1\}.$$

Agora vamos encontrar os espaços osculadores $T_P L$ e $T_Q L$, note que $P = e_{(00)}$ e $Q = e_{(11)}$ pela Proposição 29 temos que os espaços osculadores de ordem 1 são dados por

$$T_P L = T_{e_{(00)}} L = \{e_J, J \in \Lambda | d(J, (00)) \leq 1\}$$

$$T_Q L = T_{e_{(11)}} L = \{e_J, J \in \Lambda | d(J, (11)) \leq 1\}.$$

Note que para $J = (01)$ temos que

$$d(J, (00)) = 1$$

e

$$d(J, (11)) = 1.$$

Portanto temos que $e_J \in T_P L$ e $e_J \in T_Q L$ logo temos que $e_J \in T_P L \cap T_Q L$. Como $L \subset V_2^n$ temos que

$$e_J \in T_P V_2^n \cap T_Q V_2^n,$$

e portanto

$$\dim T_P V_2^n \cap T_Q V_2^n \geq 0.$$

Temos que a dimensão esperada da variedade 2-secante de V_2^n é

$$\text{expdim}(\text{Sec}_2 V_2^n) = \min\{N, 2(n+1) - 1\},$$

em que N é dado por

$$N = \binom{(n+1) + 2 - 1}{2} - 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2}.$$

Pelo Lema de Terracini a dimensão de $\text{Sec}_2 V_2^n$ é dada por

$$\dim(\text{Sec}_2 V_2^n) = 2\dim(V_2^n) - \dim(T_P V_2^n \cap T_Q V_2^n),$$

mas note que

$$2\dim(V_2^n) - \dim(T_P V_2^n \cap T_Q V_2^n) = 2n - \dim(T_P V_2^n \cap T_Q V_2^n) \leq 2n < \min\{N, 2(n+1) - 1\},$$

pois

$$N = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} > 2n$$

e

$$2(n+1) - 1 = 2n + 1 > 2n,$$

para todo $n \geq 2$, logo

$$\dim(\text{Sec}_2 V_2^n) < \text{expdim}(\text{Sec}_2 V_2^n)$$

e portanto V_2^n é 2-defeituosa.

5.2 Degeneração de Espaços Osculadores

Para o estudo do defeito secante de uma variedade usaremos a técnica de degeneração de espaços osculadores, uma das hipóteses necessárias para utilizar essa técnica é que uma projeção osculadora específica seja genericamente finita. Para o caso da variedade de Segre-Veronese foi provado na Proposição 31 que a projeção osculadora $\Pi_{T_{e_{I_0}, \dots, e_{I_{n_1-1}}}}^{d-2, \dots, d-2}$ é birracional, e veremos que segue direto da definição que birracional implica em genericamente finita. Isso nos ajudará a encontrar uma cota para o defeito secante da variedade de Segre-Veronese.

Definição 57 Sejam $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ variedades algébricas e seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação racional, dizemos que f é genericamente finita quando para todo $p \in Y$ ponto geral temos que $f^{-1}(p)$ é um conjunto finito.

Observação 7 Toda aplicação birracional é genericamente finita, pois a imagem inversa de um ponto geral por uma aplicação birracional é apenas um ponto o qual forma um conjunto finito.

Exemplo 65 Considere $C \subset \mathbb{P}^2$ uma curva elíptica plana dada por $f = zy^2 - x(x - z)(x - 2z)$ e a projeção

$$\begin{aligned} \pi_y : \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^1 \\ (x : y : z) &\mapsto (x : z) \end{aligned}$$

com centro $(0, 1, 0)$. Seja ϕ a restrição de π_y sobre a curva C . Então ϕ é genericamente finita, mas não é birracional.

De fato seja $(x_0, z_0) \in \mathbb{P}^1$ um ponto geral da imagem de ϕ , então a imagem inversa de ϕ sobre o ponto (x_0, z_0) é dada por

$$\phi^{-1}(x_0, z_0) = \{(x_0, y, z_0) \in \mathbb{P}^2 \mid z_0 y^2 + x_0(x_0 + z_0)(x_0 + 2z_0) = 0\}.$$

Desconsiderando os casos especiais em que $x_0 = z_0 = 0$, $x_0 = z_0$ ou $x_0 = 2z_0$, temos que y assumirá dois valores possíveis, portanto a pré-imagem de ϕ sobre um ponto geral será um conjunto finito de dois elementos, portanto ela é genericamente finita, mas não é birracional.

Definição 58 Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade algébrica projetiva e sejam $p_1, \dots, p_h \in X$ pontos gerais com espaços tangentes $T_{p_i}X$. Chamamos de uma projeção h -tangencial de X a projeção linear

$$\tau_{X,h} : X \subset \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_h}$$

com centro em $\langle T_{p_1}X, \dots, T_{p_h}X \rangle$.

Para a demonstração de que a variedade de Segre-Veronese não é h -defeituosa para um certo h usaremos um resultado auxiliar. A proposição a seguir foi desenvolvida por L. Chiantini e C. Ciliberto ([11], 2001) e ela apresenta condições necessárias e suficientes para que uma variedade $X \subset \mathbb{P}^N$ não seja $(h+1)$ -defeituosa.

Proposição 33 [[11], Proposition 3.5] Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade projetiva não degenerada de dimensão n , e sejam $x_1, \dots, x_h \in X$ pontos gerais. Assuma que

$$N - \dim(\langle T_{x_1}X, \dots, T_{x_h}X \rangle) - 1 \geq n.$$

Então a projeção tangencial $\tau_{X,h}$ é genericamente finita se e somente se X não é $(h+1)$ -defeituosa.

Agora, considere $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade projetiva, e $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$ uma família de subespaços k -dimensionais de \mathbb{P}^n . Para qualquer $t \in \mathbb{P}^1$ nós denotamos por $\Lambda_t \cong \mathbb{P}^k$ a fibra de $f^{-1}(t)$ e por $\pi_{\Lambda_t|X}$ a restrição para X da projeção linear $\pi_{\Lambda_t} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-k-1}$ com centro em Λ_t .

Proposição 34 [[17], Proposição 4.8] Se existe $t_0 \in \mathbb{P}^1$ tal que $\pi_{\Lambda_{t_0}|X} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-k-1}$ é genericamente finita então $\pi_{\Lambda_t|X} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-k-1}$ é genericamente finita para $t \in \mathbb{P}^1$ geral.

Lema 10 Sejam Π_U e Π_V duas projeções tais que $U \subset V$, se Π_V é genericamente finita, então Π_U também é genericamente finita.

Prova: Suponha que Π_V seja genericamente finita, ou seja, a fibra de um ponto geral x por Π_V é um conjunto finito, como $U \subset V$ pelo Lema 5 temos que

$$\Pi_U^{-1}(x) \subset \Pi_V^{-1}(x)$$

logo a fibra de x em Π_U está contida na fibra de x por Π_V que por sua vez é finita, logo Π_U é genericamente finita. ■

Agora vamos estudar o conceito de degeneração de espaços osculadores. A partir da degeneração poderemos carregar algumas propriedades de um espaço osculador para outros espaços osculadores de ordem menor.

Definição 59 Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade projetiva. Dizemos que espaços osculadores $T_{p_1}^{k_1}, T_{p_2}^{k_2}, \dots, T_{p_n}^{k_n}$ degeneram para um espaço $T_{p_1}^k$ se existem morfismos $\phi_j : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ tais que $\phi_j(t_0) = p_1$ e $\phi_j(t_\infty) = p_k$ e o limite quando $t \rightarrow 0$ de

$$T_t = \langle T_{p_1}^{k_1}, T_{\phi_2(t)}^{k_2}, \dots, T_{\phi_n(t)}^{k_n} \rangle$$

está contido em $T_{p_1}^k$.

A partir da definição de degeneração de espaços osculadores introduziremos o conceito de regularidade m -osculadora e 2-osculadora forte. Essas propriedades nos dizem em qual espaço osculador o gerado por vários espaços osculadores irá degenerar.

Definição 60 Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade projetiva. Dizemos que X possui regularidade m -osculadora se dados $p_1, \dots, p_n \in X$ e k inteiro positivo temos que o espaço

$$T_t = \langle T_{p_1}^k, \dots, T_{p_n}^k \rangle$$

se degenera em $T_{p_1}^{2k+1}$.

Dizemos que X possui regularidade 2-osculadora forte se para todo $p \neq q \in X$ pontos gerais e k_1 e k_2 inteiros positivos temos que o espaço

$$\langle T_p^{k_1}, T_q^{k_2} \rangle$$

se degenera em $T_p^{k_1+k_2+1}$.

As propriedades de regularidade 2-osculadora e m -osculadora nos permitem determinar quantos e quais espaços osculadores de uma variedade algébrica X degeneram em um espaço osculador maior. Para determinar o defeito secante de uma variedade seguiremos os seguintes passos. Dada uma projeção osculadora que seja genericamente finita vamos determinar quantos tangentes degeneram nos espaços osculadores dessa projeção através das regularidades 2-osculadora forte e m -osculadora. Posteriormente, com a Proposição 34 garantimos que a projeção com centro nos espaços tangentes é genericamente finita e por fim com a Proposição 33 determinamos o defeito secante de acordo com a quantidade de tangentes que degeneram nos espaços osculadores.

Mostrar que uma variedade possui regularidade m -osculadora ou regularidade 2-osculadora forte não é trivial, vejamos o exemplo da curva racional normal de grau n a qual possui regularidade 2-osculadora forte.

Proposição 35 A curva racional normal $C_n \subset \mathbb{P}^n$ de grau n possui regularidade 2-osculadora forte.

Considere pontos gerais $p, q \in C_n$ com $p = e_0$ e $q = e_n$ e tome a curva racional normal dada por

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ \psi(s : t) &\mapsto (s^n : s^{n-1}t : \dots : t^n), \end{aligned}$$

onde $\psi(1 : 0) = p$ e $\psi(0 : 1) = q$. Considere a parametrização da curva racional para $s = 1$ de \mathbb{P}^n para \mathbb{A}^n em torno do ponto p

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A}^1 &\rightarrow \mathbb{A}^n \\ s &\mapsto (1, t, \dots, t^n) = e_0 + te_1 + t^2e_2 + \dots + t^ne_n. \end{aligned}$$

Então o espaço osculador de ordem k_1 em p é dado por

$$\begin{aligned} O_p^{k_1} &= \langle \varphi^{(1)}(0), \dots, \varphi^{(k_1)}(0) \rangle \\ T_p^{k_1} &= \overline{O_p^{k_1}}, \end{aligned}$$

observe que

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(t) &= (1, 2t, \dots, nt^{n-1}) \\ \varphi^{(2)}(t) &= (0, 2, \dots, n(n-1)t^{n-2}) \\ &\vdots \\ \varphi^{(l)}(t) &= \left(0, \dots, 0, l!, \frac{(l+1)!}{(1)!}t, \dots, \frac{n!}{(n-l)!}t^{n-l} \right). \end{aligned}$$

Como $\varphi(0) = 0$ temos que a derivada l -ésima de φ em 0 é

$$\varphi^{(l)}(0) = (0, 0, \dots, l!, 0, \dots, 0) = l!e_l,$$

para todo $l \leq n$, portanto

$$O_p^{k_1} = \langle 1!e_1, \dots, k_1!e_{k_1} \rangle,$$

tomando o fecho de $O_p^{k_1}$ obtemos

$$T_p^{k_1} = \overline{O_p^{k_1}} = \langle e_0, e_1, \dots, e_{k_1} \rangle \approx \mathbb{P}^{k_1}.$$

Então dado o espaço

$$T_t = \langle T_p^{k_1}, T_{\varphi(t)}^{k_2} \rangle = \overline{\langle O_p^{k_1}, O_{\varphi(t)}^{k_2} \rangle} = \overline{O}_t$$

é suficiente mostrar que o limite T_0 quando $t \rightarrow 0$ dado por

$$\begin{aligned} \overline{O}_0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \overline{\langle O_p^{k_1}, O_{\varphi(t)}^{k_2} \rangle} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \overline{\langle p = \varphi(0), \varphi'(0), \dots, \varphi^{(k_1)}(0), \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k_2)}(t) \rangle} \end{aligned}$$

é igual a $\mathbb{P}^{k_1+k_2+1}$. Temos que

$$\begin{aligned} O_0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \langle O_p^{k_1}, O_{\varphi(t)}^{k_2} \rangle \\ &= \langle e_1, e_2, \dots, e_{k_1}, te_1 + t^2e_2 + \dots + t^ne_n, 2e_2 + 6te_3 + \dots + n(n-1)t^{n-2}e_n, \dots \rangle. \end{aligned}$$

Vamos considerar sem perda de generalidade $k_1 \leq k_2$, usando os vetores e_1, e_2, \dots, e_{k_1} , eliminamos as componentes e_1, e_2, \dots, e_{k_1} dos vetores $\varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \varphi^{(2)}(t), \dots, \varphi^{(k_2)}(t)$. Chamando de $\varphi_0^{(0)}(t), \varphi_0^{(1)}(t), \varphi_0^{(2)}(t), \dots, \varphi_0^{(k_2)}(t)$, respectivamente, os vetores resultantes, temos:

$$O_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \langle e_1, \dots, e_{k_1}, \varphi_0^{(0)}(t), \varphi_0^{(1)}(t), \varphi_0^{(2)}(t), \dots, \varphi_0^{(k_2)}(t) \rangle,$$

onde o $\varphi_0^{(l)}(t)$ para $l = 0, \dots, k_2$ é dado por

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(0)}(t) &= t^{k_1+1}e_{k_1+1} + t^{k_1+2}e_{k_1+2} + \dots + t^ne_n = \sum_{j=k_1+1}^n t^j e_j \\ \varphi_0^{(1)}(t) &= (k_1+1)t^{k_1}e_{k_1+1} + \dots + \frac{n!}{(n-1)!}t^{n-1}e_n = \sum_{j=k_1+1}^n jt^{j-1}e_j \\ &\vdots \\ \varphi_0^{(k_2)}(t) &= \frac{(k_1+1)!}{(k_1-k_2+1)!}t^{k_1-k_2+1}e_{k_1+1} + \dots + \frac{n!}{(n-k_2)!}t^{n-k_2}e_n = \sum_{j=k_1+1}^n \frac{j!}{(j-k_2)!}t^{j-k_2}e_j. \end{aligned}$$

Assim temos

$$O_t = \left\langle e_i, i = 1, \dots, k_1; \varphi_0^{(i)}(t) = \sum_{j=k_1+1}^n \frac{j!}{(j-i)!}t^{j-i}e_j, i = 0, 1, \dots, k_2 \right\rangle.$$

Vamos fazer uma representação matricial de O_t . Considere a matriz $(k_1 + k_2 + 1) \times n$ por blocos

$$A = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & 0 & 0 \\ 0 & B & C \end{pmatrix},$$

cujas linhas são as coordenadas dos vetores geradores de O_t na base e_0, \dots, e_n . O bloco Id é a matriz identidade de tamanho k_1 e B é uma matriz quadrada de tamanho $k_2 + 1$. Vamos provar que B' tem posto máximo, e portanto pode ser escalonada. Note que

$$B' = \begin{pmatrix} t^{k_1+1} & t^{k_1+2} & \dots & t^n \\ (k_1 + 1)t^{k_1} & (k_1 + 2)t^{k_1+1} & \dots & nt^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{(k_1+1)!}{(k_1-k_2+1)!}t^{k_1+1-k_2} & \frac{(k_1+2)!}{(k_1-k_2+2)!}t^{k_1+2-k_2} & \dots & \frac{n!}{(n-k_2)!}t^{n-k_2} \end{pmatrix}$$

$$B \cong D = \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & t^{k_2} \\ k_1 + 1 & (k_1 + 2)t & \dots & (k_1 + k_2 + 1)t^{k_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{(k_1+1)!}{(k_1-k_2+1)!} & \frac{(k_1+2)!}{(k_1-k_2+2)!}t^{k_1+2-k_2} & \dots & \frac{(k_1+k_2+1)!}{(k_1+1)!}t^{k_2} \end{pmatrix}$$

é quadrada de tamanho $k_2 + 1$. Note que

$$\det(D) = \det(M)t^m$$

onde $m = 0 + 1 + 2 + \dots + k_2$ e M é a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 + 1 & k_1 + 2 & \dots & k_1 + k_2 + 1 \\ (k_1 + 1)k_1 & (k_1 + 2)(k_1 + 1) & \dots & (k_1 + k_2 + 1)(k_1 + k_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{(k_1+1)!}{(k_1-k_2+1)!} & \frac{(k_1+2)!}{(k_1-k_2+2)!} & \dots & \frac{(k_1+k_2+1)!}{(k_1+1)!} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 + 1 & k_1 + 2 & \dots & k_1 + k_2 + 1 \\ (k_1 + 1)k_1/2 & (k_1 + 2)(k_1 + 1)/2 & \dots & (k_1 + k_2 + 1)(k_1 + k_2)/2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{(k_1+1)!}{(k_1-k_2+1)k_2!} & \frac{(k_1+2)!}{(k_1-k_2+2)k_2!} & \dots & \frac{(k_1+k_2+1)!}{(k_1+1)!k_2!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \binom{k_1+1}{0} & \binom{k_1+2}{0} & \dots & \binom{k_1+k_2+1}{0} \\ \binom{k_1+1}{k_1+1} & \binom{k_1+2}{k_1+2} & \dots & \binom{k_1+k_2+1}{k_1+k_2+1} \\ \binom{k_1+1}{1} & \binom{k_1+2}{1} & \dots & \binom{k_1+k_2+1}{1} \\ \binom{k_1+1}{2} & \binom{k_1+2}{2} & \dots & \binom{k_1+k_2+1}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{k_1+1}{k_2} & \binom{k_1+2}{k_2} & \dots & \binom{k_1+k_2+1}{k_2} \end{pmatrix} = \left(\binom{k_1 + j}{i - 1} \right)_{(i,j)}.$$

Note que $k_1 + j \geq i - 1$ e segue por [14, Corolário 2] que $\det(M) \neq 0$. Portanto a matriz é escalonável. Considere $\varphi_{mod}^{(i)}(t)$ os vetores cujas as coordenadas são dadas pelas linhas da resultante do escalonamento da matriz M , então podemos substituir $\varphi_0^{(i)}(t)$ por $\varphi_{mod}^{(i)}(t)$. Portanto, como a matriz A possui posto máximo temos que todos os vetores de O_0 são

linearmente independentes o que implica que

$$O_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \langle e_1, e_2, \dots, e_{k_1}, \varphi_{\text{mod}}^{(0)}, \varphi_{\text{mod}}^{(1)}, \dots, \varphi_{\text{mod}}^{(k_2)} \rangle \approx \mathbb{A}^{k_1+k_2+1}.$$

Tomando o fecho de O_0 obtemos $T_0 = \mathbb{P}^{k_1+k_2+1} = T_p^{k_1+k_2+1}$ como queríamos. ■

Exemplo 66 Considere $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade algébrica com regularidade 2-osculadora forte, então dados $p, q \in X$ temos que

$$T = \langle T_p^1, T_q^1 \rangle$$

degenera em T_p^3 . Para $k_1 = 3, k_2 = 1$ temos que

$$T_t = \langle T_p^3, T_q^1 \rangle$$

degenera em T_p^5 , como em T_p^3 se degeneram dois espaços tangentes, portanto temos que em T_p^5 se degeneram 3 espaços tangentes.

Exemplo 67 Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ variedade algébrica que possui regularidade m -osculadora e regularidade 2-osculadora forte, então dados $p_1, \dots, p_m \in X$ temos que

$$T = \langle T_{p_1}^1, \dots, T_{p_m}^1 \rangle$$

degenera em $T_{p_1}^3$, ou seja, temos que em $T_{p_1}^3$ degeneram m espaços tangentes. Como X tem regularidade 2-osculadora forte temos que

$$T = \langle T_{p_1}^3, T_q^1 \rangle$$

se degenera em $T_{p_1}^5$, como $T_{p_1}^3$ degeneram m tangentes, temos que temos que em $T_{p_1}^5$ degeneram $m + 1$ tangentes.

5.3 Defeitos Secantes da Segre-Veronese

Nessa seção iremos estabelecer condições suficientes para que uma variedade de Segre-Veronese não seja h -defeituosa utilizando o método desenvolvido em [17] onde é aplicado para estudar o defeito secante das variedades Grassmanianas, porém, pode se aplicar esse resultado em outros tipos de variedades. Em [6] esse método foi utilizado para estudar o defeito secante de variedades de Segre-Veronese.

Perceba pelos exemplos do final da Seção 5.2 que dada uma variedade algébrica com as propriedades de regularidade m -osculadora e regularidade 2-osculadora forte é possível determinar quantos espaços tangentes cabem dentro de um espaço osculador. Podemos explicitar a quantidade de espaços tangentes que degeneram em um espaço osculador. Definimos $h_m(k)$ como o número de tangentes que degeneram em um espaço osculador de ordem k de acordo com a regularidade m -osculadora e regularidade 2-osculadora forte. Esse $h_m(k)$ é definido da seguinte maneira.

Definição 61 Seja $m \leq 2$ um inteiro. Defina a função

$$h_m : \mathbb{N}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}.$$

da seguinte forma: $h_m(0) = 0$. Para qualquer $k \geq 1$, escreva

$$k + 1 = 2^{\lambda_1} + 2^{\lambda_2} + \cdots + 2^{\lambda_l} + \epsilon,$$

onde $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_l \geq 1, \epsilon \in \{0, 1\}$ e defina

$$h_m(k) := m^{\lambda_1-1} + m^{\lambda_2-1} + \cdots + m^{\lambda_l-1}.$$

Em particular $h_m(2k) = h_m(2k - 1)$ e $h_2(k) = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$.

Ficará claro durante a demonstração do Teorema 7 que o $h_m(k)$ como está definido representa a quantidade de tangentes que degeneram em um espaço osculador de ordem k .

Exemplo 68 Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade com regularidade 5-osculadora e 2-osculadora forte. Temos que

$$9 + 1 = 10 = 2^3 + 2^1,$$

portanto

$$h_5(9) = 5^{3-1} + 5^{1-1} = 26,$$

ou seja, podemos degenerar

$$\langle T_{p_1}^1, T_{p_2}^1, \dots, T_{p_{26}}^1 \rangle$$

para dentro de $T_{p_1}^9$.

Exemplo 69 Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade com regularidades $n + 1$ -osculadora e 2-osculadora forte, então temos a Tabela 5.3 mostrando os valores de $h_{n+1}(k)$ de acordo com o k .

Tabela 5.1: Valores de $h_m(k)$ conforme k varia.

k	$h_{n+1}(k)$
3	$n + 1$
5	$(n + 1) + 1$
7	$(n + 1)^2$
9	$(n + 1)^2 + 1$
11	$(n + 1)^2 + (n + 1)$
13	$(n + 1)^2 + (n + 1) + 1$
15	$(n + 1)^3$
17	$(n + 1)^3 + 1$
19	$(n + 1)^3 + (n + 1)$

Para nos auxiliar na demonstração dos próximos resultados vamos classificar as variedades a partir de quais de suas projeções osculadoras são genericamente finitas.

Definição 62 Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade algébrica, dizemos que X possui tipo

$$(k_1, \dots, k_1, k_2, \dots, k_2, \dots, k_r, \dots, k_r) = (k_1^{(i_1)}, k_2^{(i_2)}, \dots, k_r^{(i_r)})$$

quando dados $j = i_1 + \cdots + i_r$ pontos p_1, \dots, p_j temos que a projeção osculadora

$$\Pi_{T_{p_1, \dots, p_j}^{k_1, \dots, k_1, \dots, k_r, \dots, k_r}} = \Pi_{\langle T_{p_1}^{k_1}, \dots, T_{p_j}^{k_r} \rangle}$$

é genericamente finita.

Exemplo 70 Considere a Segre-Veronese $X = SV_{3,3,3}^{2,2,2}$ então pela Proposição 31 temos que a projeção osculadora $\Pi_{T_{e_{I_0}, e_{I_1}}^{7,7}}$ é genericamente finita, portanto X tem tipo $(7, 7) = 7^{(2)}$.

Para utilizar a técnica de degeneração de espaços osculadores precisaremos que a variedade possua regularidade m -osculadora e 2-osculadora forte. O Lema 11 nos garante que uma Segre-Veronese possui essas propriedades.

Lema 11 *[[6], Proposição 5.1 e Proposição 5.10]* A variedade de Segre-Veronese $SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} \subseteq \mathbb{P}^{N(\mathbf{n}, \mathbf{d})}$ possui regularidade 2-osculadora forte e regularidade $(n_1 + 1)$ -osculadora, onde $\mathbf{n} = \{n_1, \dots, n_r\}$ e $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$.

Agora vamos exibir uma cota para o defeito secante da Segre-Veronese $SV_{2,5}^{3,3}$ a partir de sua regularidade 4-osculadora e 2-osculadora forte.

Exemplo 71 A Segre-Veronese $SV_{2,5}^{3,3}$ não é h -defeituosa para $h \leq 16$.

Considere $X = SV_{2,5}^{3,3}$. Pelo Lema 11 temos que X possui regularidade 2-osculadora forte e 4-osculadora, pela Proposição 31 temos que a projeção osculadora $\Pi_{T_{p_1, p_2, p_3}^{5,5,5}}$ é birracional, isto implica que essa projeção é genericamente finita.

Tome pontos gerais $a = a_1, a_2, b = b_1, b_2, c = c_1, c_2$ de X . Como X tem regularidade 2-osculadora forte então podemos degenerar

$$L_1^0 = \langle T_{a_1}^3, T_{a_2}^1, T_{b_1}^3, T_{b_2}^1, T_{c_1}^3, T_{c_2}^1 \rangle$$

em

$$L_1^\infty = V_1 \subset U_1 = \langle T_{a_1}^5, T_{b_1}^5, T_{c_1}^5 \rangle$$

por meio de uma família

$$L_1^t = \langle T_{a_1}^3, T_{a_2^t}^1, T_{b_1}^3, T_{b_2^t}^1, T_{c_1}^3, T_{c_2^t}^1 \rangle, t \in \mathbb{P}^1.$$

Como X tem tipo $(5, 5, 5)$ então Π_{U_1} é genericamente finita. Como $V_1 \subset U_1$ pelo Lema 10 temos que Π_{V_1} é genericamente finita. Pela Proposição 34 segue que $\Pi_{L_1^t}$ é genericamente finita. Isso implica que X tem tipo $(3, 1, 3, 1, 3, 1)$.

Agora como X tem regularidade 4-osculadora então podemos degenerar 4 tangentes em um espaço osculador T_p^3 . Portanto podemos degenerar

$$L_2^0 = \langle T_{a_1}^1, T_{a_2}^1, T_{a_3}^1, T_{a_4}^1, T_{a_5}^1, T_{b_1}^1, T_{b_2}^1, T_{b_3}^1, T_{b_4}^1, T_{b_5}^1, T_{c_1}^1, T_{c_2}^1, T_{c_3}^1, T_{c_4}^1, T_{c_5}^1 \rangle$$

em

$$L_2^\infty = V_2 \subset U_2 = \langle T_{a_1}^3, T_{a_5}^1, T_{b_1}^3, T_{b_5}^1, T_{c_1}^3, T_{c_5}^1 \rangle$$

por meio de uma família

$$L_2^t = \langle T_{a_1}^1, T_{a_2^t}^1, T_{a_3^t}^1, T_{a_4^t}^1, T_{a_5}^1, T_{b_1}^1, T_{b_2^t}^1, T_{b_3^t}^1, T_{b_4^t}^1, T_{b_5}^1, T_{c_1}^1, T_{c_2^t}^1, T_{c_3^t}^1, T_{c_4^t}^1, T_{c_5}^1 \rangle,$$

como Π_{U_2} é genericamente finita, temos pelo Lema 10 que Π_{V_2} é genericamente finita. Seguindo o mesmo argumento de L_1^t temos que X tem tipo $1^{(15)}$. Então pela proposição 33 temos que X não é 16-defeituosa.

Para a demonstração dos próximos resultados iremos aplicar a hipótese de m -osculadora repetidas vezes. Para facilitar esse processo vamos utilizar o seguinte lema.

Lema 12 Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade projetiva com regularidade m -osculadora.

1. Se X tem tipo $(2^c - 1)$ então X tem tipo

$$(1, \dots, 1) = 1^{(m^{c-1})}.$$

2. Se X tem tipo $(2^{c_1} - 1, \dots, 2^{c_j} - 1)$ então X tem tipo

$$(1, \dots, 1) = 1^{(m^{c_1-1} + \dots + m^{c_j-1})}.$$

Prova: Parte 1 Como X tem tipo $(2^c - 1)$ então a projeção $\Pi_{T_P^{2^c-1}}$ é genericamente finita. Agora perceba que para todo $c > 1$ temos que

$$2^c - 1 = 2(2^{c-1} - 1) + 1.$$

Portanto, pela a regularidade m -osculadora temos que dados pontos gerais P_1, \dots, P_m o espaço osculador

$$L_1^0 = \langle T_{P_1}^{2^{c-1}-1}, \dots, T_{P_m}^{2^{c-1}-1} \rangle$$

se degenera em

$$L_1^\infty = V_1 \subset U_1 = \langle T_{P_1}^{2^c-1} \rangle$$

por meio de uma família

$$L_1^t = \langle T_{P_1}^{2^{c-1}-1}, T_{P_2^t}^{2^{c-1}-1}, \dots, T_{P_m^t}^{2^{c-1}-1} \rangle.$$

Como X tem tipo $(2^c - 1)$ então Π_{U_1} é genericamente finita. Pelo Lema 10 temos que Π_{V_1} é genericamente finita. Pela Proposição 34 segue que $\Pi_{L_1^t}$ é genericamente finita para algum t . Isso implica que X tem tipo $(2^{c-1} - 1, \dots, 2^{c-1} - 1) = (2^{c-1} - 1)^{(m)}$. Podemos repetir o mesmo processo $c - 2$ vezes sucessivamente até

$$2^{c-(c-1)} - 1 = 2 - 1 = 1,$$

isso implica que X tem tipo

$$h = (1, \dots, 1) = 1^{(m^{k-1})}.$$

Parte 2: Agora suponha que X tem tipo $(2^{c_1} - 1, \dots, 2^{c_j} - 1)$. Pela regularidade m osculadora temos que

$$L_1^0 = \langle T_{P_1}^{2^{c_1-1}-1}, \dots, T_{P_m}^{2^{c_1-1}-1} \rangle$$

se degenera em

$$L_1^\infty = V_1 \subset U_1 = \langle T_{P_1}^{2^{c_1}-1} \rangle$$

por meio de uma família

$$L_1^t = \langle T_{P_1}^{2^{c_1-1}-1}, T_{P_2^t}^{2^{c_1-1}-1}, \dots, T_{P_m^t}^{2^{c_1-1}-1} \rangle.$$

Isso implica que dados pontos gerais Q_2, \dots, Q_j temos que o espaço osculador

$$L_2^0 = \langle L_1^0, T_{Q_2}^{2^{c_2}-1}, \dots, T_{Q_j}^{2^{c_j}-1} \rangle = \langle T_{P_1}^{2^{c_1-1}-1}, \dots, T_{P_m}^{2^{c_1-1}-1}, T_{Q_2}^{2^{c_2}-1}, \dots, T_{Q_j}^{2^{c_j}-1} \rangle$$

se degenera em

$$L_2^\infty = V_2 \subset U_2 = \langle U_1, T_{Q_2}^{2^{c_2}-1}, \dots, T_{Q_j}^{2^{c_j}-1} \rangle = \langle T_{P_1}^{2^{c_1}-1}, T_{Q_2}^{2^{c_2}-1}, \dots, T_{Q_j}^{2^{c_j}-1} \rangle$$

por meio de uma família

$$\begin{aligned} L_2^t &= \langle L_1^t, T_{Q_2}^{2^{c_2}-1}, \dots, T_{Q_j}^{2^{c_j}-1} \rangle \\ &= \langle T_{P_1}^{2^{c_1}-1}, T_{P_2}^{2^{c_1}-1}, \dots, T_{P_m}^{2^{c_1}-1}, T_{Q_2}^{2^{c_2}-1}, \dots, T_{Q_j}^{2^{c_j}-1} \rangle. \end{aligned}$$

Como X tem tipo $(2^{c_1} - 1, \dots, 2^{c_j} - 1)$ então Π_{U_2} é genericamente finita. Pelo Lema 10 temos que Π_{V_2} é genericamente finita. Pela Proposição 34 segue que $\Pi_{L_2^t}$ é genericamente finita para algum t . Isso implica que X tem tipo

$$(2^{c_1-1} - 1, \dots, 2^{c_1-1} - 1, 2^{c_2} - 1, \dots, 2^{c_j} - 1) = ((2^{c_1-1} - 1)^{(m)}, 2^{c_2} - 1, \dots, 2^{c_j} - 1).$$

Podemos repetir o mesmo processo $c_1 - 2$ vezes sucessivamente até

$$2^{c_1-(c_1-1)} - 1 = 2 - 1 = 1,$$

isso implica que X tem tipo

$$h = (1, \dots, 1, 2^{c_2} - 1, \dots, 2^{c_j} - 1) = (1^{(m^{c_1-1})}, 2^{c_2} - 1, \dots, 2^{c_j} - 1).$$

Agora aplicando o mesmo procedimento para cada $2^{c_i} - 1$ concluímos que X tem tipo

$$h = (1^{(m^{c_1-1})}, \dots, 1^{(m^{c_j-1})}) = 1^{(m^{c_1-1} + \dots + m^{c_j-1})}.$$

■

Agora vamos generalizar o Exemplo 71 para uma variedade algébrica com regularidade m -osculadora e 2-osculadora forte, vamos utilizar a mesma estratégia do exemplo, repetindo o procedimento de degenerar um espaço osculador em outro repetidas vezes.

Teorema 7 *[[6], Teorema 4.7]* Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade projetiva com regularidade m -osculadora e regularidade 2-osculadora forte. Sejam $k_1, \dots, k_l \geq 1$ inteiros tais que a projeção osculadora $\Pi_{T_{P_1, \dots, P_l}^{k_1, \dots, k_l}}$ é genericamente finita. Então X não é h -defeituosa para

$$h \leq \left(\sum_{j=1}^l h_m(k_j) \right) + 1,$$

onde h_m é como na Definição 61.

Prova: Para a prova do Teorema iremos utilizar a técnica de degeneração de espaços osculadores feita no Exemplo 71 simplificando a notação para a degeneração.

Primeiro vamos fazer a degeneração para $T_{P_1}^{k_1}$ e em seguida repetimos o processo analogamente para os outros $T_{P_i}^{k_i}$. Vamos considerar todos os k_i sendo impares, caso contrário tome $k_i - 1$, isso não é problema pois $h_m(k_i) = h_m(k_i - 1)$ quando k_i é par.

Seja $T_1 = \langle T_{P_2}^{k_2}, \dots, T_{P_l}^{k_l} \rangle$, então podemos escrever $T_{P_1, \dots, P_l}^{k_1, \dots, k_l}$ da seguinte maneira

$$T_{P_1, \dots, P_l}^{k_1, \dots, k_l} = \langle T_{P_1}^{k_1}, T_{P_2}^{k_2}, \dots, T_{P_l}^{k_l} \rangle = \langle T_{P_1}^{k_1}, T_1 \rangle.$$

Para k_1 considere λ_1 sendo o maior inteiro tal que

$$k_1 \geq 2^{\lambda_1} - 1.$$

Suponha $k_1 > 2^{\lambda_1} - 1$. Dados P_1, P_2 pontos gerais, como X possui regularidade 2-osciladora podemos degenerar

$$L_1^0 = \langle T_{P_1}^{2^{\lambda_1}-1}, T_{P_2}^u, T_1 \rangle$$

em

$$L_1^\infty = V_1 \subset U_1 = \langle T_{P_1}^{k_1}, T_1 \rangle$$

por meio de uma família

$$L_1^t = \langle T_{P_1}^{2^{\lambda_1}-1}, T_{P_2}^t, T_1 \rangle,$$

onde $u = k_1 - 2^{\lambda_1}$. Como X tem tipo (k_1, k_2, \dots, k_l) então Π_{U_1} é genericamente finita. Pelo Lema 10 temos que Π_{V_1} é genericamente finita. Pela Proposição 34 segue que $\Pi_{L_1^t}$ é genericamente finita para algum t . Isso implica que X tem tipo $(2^{\lambda_1} - 1, u, k_2, \dots, k_l)$.

Agora para $T_{P_2}^u$ repetimos o mesmo processo, seja λ_2 o maior inteiro tal que

$$u \geq 2^{\lambda_2} - 1.$$

Analogamente, como X possui regularidade 2-osciladora forte, existem $P_2, P_3 \in X$ tais que

$$\langle T_{P_1}^{2^{\lambda_1}-1}, T_{P_2}^{2^{\lambda_2}-1}, T_{P_3}^{u_1}, T_1 \rangle$$

se degenera em

$$\langle T_{P_1}^{2^{\lambda_1}-1}, T_{P_2}^u, T_1 \rangle$$

onde $u_1 = u - 2^{\lambda_2} - 2$ e pelo mesmo argumento de λ_1 temos que X tem tipo $(2^{\lambda_1} - 1, 2^{\lambda_2} - 1, u_1, k_2, \dots, k_l)$. Novamente podemos usar a regularidade 2-osciladora para separar o u_1 em $2^{\lambda_3} - 1$ e u_2 . Podemos repetir esse processo sucessivamente até que $u_j = 2^{\lambda_j} - 1$ para algum j inteiro. Assim concluímos que X tem tipo $(2^{\lambda_1} - 1, \dots, 2^{\lambda_j} - 1, k_2, \dots, k_l)$. Perceba que

$$k_1 = 2^{\lambda_1} - 1 + \dots + 2^{\lambda_j} - 1 + (j - 1) = 2^{\lambda_1} + \dots + 2^{\lambda_j} - 1,$$

ou seja

$$k_1 + 1 = 2^{\lambda_1} + \dots + 2^{\lambda_j}.$$

Para cada k_i podemos repetir o processo de degeneração feito para k_1 , assim X tem tipo

$$(2^{\lambda_{11}} - 1, \dots, 2^{\lambda_{1j_1}} - 1, 2^{\lambda_{21}} - 1, \dots, 2^{\lambda_{2j_2}} - 1, \dots, 2^{\lambda_{l1}} - 1, \dots, 2^{\lambda_{lj_l}} - 1)$$

para $\lambda_{11}, \dots, \lambda_{lj_l}$ inteiros positivos tais que

$$k_i + 1 = 2^{\lambda_{i1}} + \dots + 2^{\lambda_{ij_i}}$$

para cada $i = 1, \dots, l$. Como X tem regularidade m -osciladora, pelo Lema 12 temos que X tem tipo

$$\begin{aligned} h &= (1^{(m^{\lambda_{11}}-1)}, \dots, 1^{(m^{\lambda_{1j_1}}-1)}, \dots, 1^{(m^{\lambda_{l1}}-1)}, \dots, 1^{(m^{\lambda_{lj_l}}-1)}) \\ &= (1^{(m^{\lambda_{11}-1} + \dots + m^{\lambda_{1j_1}-1})}, \dots, 1^{(m^{\lambda_{l1}-1} + \dots + m^{\lambda_{lj_l}-1})}). \end{aligned}$$

Portanto temos que X tem tipo

$$(1^{(h_m(k_1))}, \dots, 1^{(h_m(k_l))}) = 1^{\sum_{i=1}^l h_m(k_i)}.$$

Então pela Proposição 33 X não é $(h + 1)$ -defeituosa, onde h é dado por

$$h = \sum_{i=1}^l h_m(k_i).$$

■

Perceba que para utilizarmos o Teorema 7 precisamos que a variedade possua regularidade m -osculadora e 2-osculadora forte. Pelo Lema 11 garantimos essas hipóteses para as variedades de Segre-Veronese. Assim, conseguimos aplicar o Teorema 7 e obtermos uma cota para o defeito secante nas variedades de Segre-Veronese.

Teorema 8 ([6], Teorema 4.8) A Segre-Veronese $SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} \subset \mathbb{P}^n$ é não h -defeituosa para

$$h \leq n_1 h_{n_1+1}(d-2) + 1,$$

onde h_m é como na Definição 61.

Prova: Pelo Lema 11 temos que $SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}$ possui regularidade 2-osculadora forte e regularidade $(n_1 + 1)$ -osculadora. Pela Proposição 31, temos que a projeção $\Pi_{T_{e_{I_0}, \dots, e_{I_{n_1-1}}}}^{d-2, \dots, d-2}$ é birracional, portanto ela é finitamente gerada. Logo, $SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 7. Logo segue que $SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}$ não é h -defeituosa para

$$h \leq n_1 h_{n_1+1}(d-2) + 1.$$

■

Exemplo 72 A variedade $SV_{2,5}^{3,3}$ não é 16-defeituosa.

Já vimos pelo Exemplo 71 que $SV_{2,5}^{3,3}$ é não 16-defeituosa, usando o Teorema 8 temos,

$$h \leq 3h_{3+1}(5) + 1.$$

Note que

$$5 + 1 = 6 = 2^2 + 2^1,$$

assim temos que

$$h_4(5) = 4^1 + 4^0 = 5,$$

o que nos dá

$$h \leq 3 \cdot 5 + 1 = 16.$$

Exemplo 73 A variedade $SV_{2,2,2}^{1,1,1}$ não é 3-defeituosa.

Pelo Teorema 7 temos que $SV_{2,2,2}^{1,1,1}$ é não h -defeituosa para

$$h \leq (1h_{1+1}(4)) + 1.$$

Note que

$$4 + 1 = 5 = 2^2 + 1,$$

dessa forma temos que

$$h_2(4) = 2^{2-1} = 2,$$

e portanto temos que

$$h \leq 1 \cdot 2 + 1 = 3.$$

portanto, $SV_{2,2,2}^{1,1,1}$ é não h -defeituosa para $h \leq 3$.

Exemplo 74 A variedade $SV_{4,4,4}^{5,6,7}$ não é 186-defeituosa.

Pelo Teorema 7 temos que $SV_{4,4,4}^{5,6,7}$ é não defeituosa para

$$h \leq (5h_{5+1}(10)) + 1.$$

Note que

$$10 + 1 = 11 = 2^3 + 2^1 + 1,$$

dessa forma temos que

$$h_6(10) = 6^{3-1} + 6^{1-1} = 37,$$

e portanto temos que

$$h \leq 5 \cdot 37 + 1 = 186.$$

portanto, $SV_{4,4,4}^{5,6,7}$ é não h -defeituosa para $h \leq 186$.

Exemplo 75 Segue diretamente do Teorema 8 que a variedade $SV_{1,\dots,1}^{n_1,\dots,n_r}$ é não h -defeituosa para $h \leq n_1 h_{n_1+1}(r-2) + 1$.

Exemplo 76 Segue diretamente do Teorema 8 que a variedade $SV_{d_1,\dots,d_r}^{1,\dots,1}$ é não h -defeituosa para $h \leq h_2(d-2) + 1$.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Abo, *On non-defectivity of certain Segre-Veronese varieties*, Symbolic Comput, 45, 2010, 1254-1269.
- [2] H. Abo, M. C. Brambilla, *Secant varieties of Segre-Veronese varieties $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ embedded by $\mathcal{O}(1, 2)$* , Experimental Mathematics, 18, 2009, 3.
- [3] H. Abo, M. C. Brambilla, *New examples of defective secant varieties of Segre-Veronese varieties*, Collectanea Mathematica. 63, 2012, 3, 287- 297.
- [4] H. Abo, M. C. Brambilla, *On the dimensions of secant varieties of Segre-Veronese varieties*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 192, 2013, 61-92.
- [5] J. Alexander, A. Hirschowitz, *Polynomial interpolation in several variables*, J. Algebraic Geom. 4, 1995, no. 2, 201-222
- [6] C. Araujo, A. Massarenti, R. Rischter *On non-secant defectivity of Segre-Veronese varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. 371 (2019), no. 4, 2255-2278.
- [7] M. Atiyah, *Introduction to Commutative Algebra*, Universidade de Oxford, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [8] E. Ballico, A. Bernardi, M. V. Catalisano, *Higher secant varieties of $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1$ embedded in bi-degree $(a; b)$* , Communications in algebra, v. 40, n. 10, 2012, 3822-3840.
- [9] A. Bernardi, E. Carlini, M. V. Catalisano, *Higher secant varieties of $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ embedded in bi-degree $(1; d)$* , J. of pure and applied algebra, 215, n. 12, 2011, 2853-2858.
- [10] M. V. Catalisano, A. V. Geramita, A. Gimigliano, *Higher secant varieties of Segre-Veronese varieties, in: Projective Varieties with Unexpected Properties*, Walter de Gruyter, Berlin, 2005, 81-107.
- [11] L. Chiantini, C. Ciliberto, *Weakly Defective Varieties, Transactions Of The American Mathematical Society*, v. 354, Number 1, Pages 151-178, 2001.
- [12] L. Chiantini, C. Ciliberto, *On the classification of defective threefolds, in: Projective Varieties with Unexpected Properties*, Walter de Gruyter, Berlin, 2005, 131-176.
- [13] W. Fulton, *Algebraic Curves*, Addison-Wesley Publishing Company, 2008.
- [14] I. Gessel, G. Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Advances in Mathematics, v. 58, Issue 3, 1985, 300-321.
- [15] R. Hartshorne *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Univerdade da California, Berkeley, 1977.
- [16] E. Lima, *Cálculo Tensorial*, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

- [17] A. Massarenti, R. Rischter *On Non-Secant Defectivity Via Osculating Projection*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 19 (2019), no. 1, 1-34.
- [18] J. Plínio, M. P. Mello, I. Murari, *Introdução à Análise Combinatória*, Ciência Moderna, 4 edição, 2007.
- [19] F. Russo, *Tangents and Secants of Algebraic Varieties*, IMPA Monographs in Mathematics, Rio de Janeiro, Brasil, 2003.
- [20] I. Shafarevich *Basic Algebraic Geometry 1*, Instituto de Matemática de Steklov, Moscow, 1988.
- [21] I. Vainsencher, *Introdução a Curvas Algébricas Planas*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, 2017.