

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

Defeitos Topológicos em Teorias de Campo

Edson da Silva Souza

Itajubá, 16 de março de 2021

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA**

Edson da Silva Souza

Defeitos Topológicos em Teorias de Campo

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física.

Área de Concentração: Física

Linha de Pesquisa: Teoria de Campos

Orientador: Prof. Dr. Alexis Roa Aguirre

16 de março de 2021

Itajubá

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

Defeitos Topológicos em Teorias de Campo

Edson da Silva Souza

Dissertação aprovada por banca examinadora
em 22 de Fevereiro de 2021, conferindo ao autor
o título de **Mestre em Ciências em Física.**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alexis Roa Aguirre (UNIFEI)
Prof. Dr. Fabricio Augusto Barone Rangel (UNIFEI)
Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho (UFPB)
Prof. Dr. Gabriel Luchini Martins (UFES)

Itajubá
2021

Agradecimentos

Agradeço a minha família, meu pai Adilson, minha mãe Maria e a minha irmã Luana, por todos os momentos em que vivemos juntos.

Ao Professor Alexis Aguirre, obrigado por me orientar, sempre com muita atenção e paciência, por me ajudar a entender como se faz ciência.

Agradeço a cidade de Itajubá e todos que ali vivem, foram bons sete anos.

Agradeço aos professores e funcionários da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), onde pude crescer muito como pessoa e profissional em cada experiência nova.

Aos colegas de curso, em especial ao Leandro e ao Leonardo, que foram mais próximos a mim em toda essa jornada.

À agência de fomento CAPES pelo apoio financeiro durante todo o meu mestrado.

"A maioria das pessoas imagina que o mais importante no diálogo é a palavra. Engano: o importante é a pausa. É na pausa que duas pessoas se entendem e entram em comunhão."

(Nelson Rodrigues)

Resumo

Neste trabalho propomos o desenvolvimento de novos modelos de dois e três campos escalares reais acoplados que possuem soluções BPS (Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield). Para tal fim utilizaremos o método recentemente proposto, conhecido como método de extensão. Em particular, construiremos explicitamente novos modelos de dois e três campos escalares acoplados, e também estudaremos a estabilidade linear de suas respectivas soluções BPS.

Palavras-chaves: Sólitons topológicos. Teorias de Campos. Método de deformação. Método de extensão.

Abstract

In this work we propose the development of new models of two and three fields coupled scalar real supporting BPS solutions (Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield). For this purpose, we will use the recently proposed method, known as the extension method. In particular, we will explicitly construct new models of two and three coupled scalar fields, and also we will study the linear stability of their respective BPS solutions.

Key-words: Topological Solitons. Field theories. Deformation method. Extension method.

Lista de Publicações

Os resultados deste trabalho de dissertação foram publicados na revista científica internacional *European Physical Journal C*:

1. A. R. Aguirre and E. S. Souza, *Extended multi-scalar field theories in (1+1) dimensions*, *Eur. Phys. J. C* 80 (2020) no.12, 1143 [[arXiv:hep-th/2008.11307](#)].

Lista de ilustrações

Figura 1 – Potencial mecânico-quântico $U_+(x)$ associado ao modelo estendido $(\phi^4 + \varphi_l^6)$ para diferentes valores dos parâmetros. Na esquerda, traçamos o potencial com $c = -1$, e $b = 0.6$ (linha sólida), e $b = 0.125$ (linha tracejada). Na direita, traçamos o potencial com $c = -2$, e $b = 1.5$ (linha sólida), e $b = 1.1$ (linha tracejada).	32
Figura 2 – Potenciais mecânico-quânticos descontínuos $U_{\pm}(x)$ associados ao modelo estendido $(\phi^4 + \text{sG})$, para $\alpha = 1$ e $a_2 = -2a_1$	37
Figura 3 – A linha sólida (vermelha) é o gráfico da solução $\phi^{(+)}$ para os valores de parâmetros $a_1 = 3$ e $a_2 = -1$. A linha tracejada (azul) é o gráfico da solução $\phi^{(-)}$ para os valores de parâmetro $a_1 = -1$ e $a_2 = 1$, com $\alpha = 1$	39
Figura 4 – Potenciais mecânico-quânticos U_+ (linha sólida) e U_- (linha tracejada) do modelo estendido $(\text{sG} + \text{E})$ para $a_2 = b_3 = 0$, e $\alpha = 1$	42
Figura 5 – Potenciais mecânico-quanticos U_+ (na esquerda) e U_- (na direita) para $a_2 = 0$ e $\alpha = 1$. Para ambos, plotamos os valores $b_3 = 0$, $b_3 = -0.01$, e $b_3 = -0.8$, representado com linhas pontilhadas, sólidas e tracejadas, respectivamente.	44
Figura 6 – Potenciais mecânico-quanticos U_+ (na esquerda) e U_- (na direita) para $a_2 = 0$ and $\alpha = 1$. Para ambos, plotamos os valores $b_3 = 0$, $b_3 = 0.01$, e $b_3 = 0.4$, representado com linhas pontilhadas, sólidas e tracejadas, respectivamente.	44
Figura 7 – Potenciais mecânico-quanticos U_+ (na esquerda) e U_- (na direita) para $b_3 = 0$ e $\alpha = 1$. Para ambos, plotamos os valores $a_2 = 0$, $a_2 = -0.01$, and $a_2 = -0.8$, representado com linhas pontilhadas, sólidas e tracejadas, respectivamente.	44
Figura 8 – Potenciais mecânico-quanticos U_+ (na esquerda) e U_- (na direita) para $b_3 = 0$ e $\alpha = 1$. Para ambos, plotamos os valores $a_2 = 0$, $a_2 = 0.01$, and $a_2 = 0.2$, representado com linhas pontilhadas, sólidas e tracejadas, respectivamente.	45
Figura 9 – Potenciais mecânico-quanticos U_+ (na esquerda) e U_- (na direita) para $a_2 = 0$ e $b_3 = 0$ (linha pontilhada), $a_2 = 0.01$ e $b_3 = 0.01$ (linha sólida), e $a_2 = 0.1$ e $b_3 = 0.1$ (linha tracejada).	45
Figura 10 – Potenciais mecânico-quânticos U_+ (na esquerda) e U_- (na direita) do modelo estendido $(\phi^4 + \zeta^{4I})$ com $\alpha = 1$	48
Figura 11 – Potenciais mecânico-quânticos U_+ (à esquerda) e U_- (à direita) para $\alpha = \beta = c_1 = 1$	58

Figura 12 – Potenciais mecânico-quânticos U_+ (à esquerda) e U_- (à direita) para $\alpha = \beta = 1$. Para ambos, temos plotado os valores $c_1 = 0$ (linha tracejada em vermelho) e $c_1 = 0.02$ (linha sólida em azul).	58
Figura 13 – Gráfico da projeção do potencial $V(0, \chi, \psi)$ para os valores $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $a_1 = 2$, e $b_4 = 0.1$	64
Figura 14 – Superpotencial efetivo de dois campos (na esquerda) e seu potencial associado (na direita) para os dois campos sine-Gordon acoplados. Para ambos, temos plotado os valores $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, and $b_4 = 0.1$. . .	65

Lista de tabelas

Tabela 1 – Número de estados ligados e seus autovalores para diferentes valores dos parâmetros b e c	33
--	----

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	FORMALISMO GERAL PARA TEORIAS BPS	16
2.1	Carga topológica	18
2.2	Estabilidade	19
3	MÉTODO DE DEFORMAÇÃO	22
3.1	A deformação $\phi^4 \leftrightarrow \varphi_l^6$	23
3.2	A deformação $\phi^4 \leftrightarrow s\mathbf{G}$	24
3.3	A deformação $s\mathbf{G} \leftrightarrow$ modelo-E	24
3.4	A deformação $\phi^4 \leftrightarrow \zeta^{4I}$	25
4	MÉTODO DE EXTENSÃO PARA DOIS CAMPOS	26
4.1	Estabilidade linear para dois campos	27
4.2	Modelo acoplado $(\phi^4 + \varphi_l^6)$ e estabilidade	29
4.3	Modelo acoplado $(\phi^4 + s\mathbf{G})$ e estabilidade	33
4.4	Modelo acoplado $(s\mathbf{G} + \mathbf{E})$ e estabilidade	39
4.5	Modelo acoplado $(\phi^4 + \zeta^{4I})$ e estabilidade	45
5	MÉTODO DE EXTENSÃO PARA TRÊS CAMPOS	49
5.1	Estabilidade linear para três campos	51
5.2	Modelo acoplado $(\phi^4 + \varphi_l^6 + \zeta^{4I})$ e estabilidade	52
5.3	Modelo acoplado $(\phi^4 + s\mathbf{G} + \mathbf{E})$ e estabilidade	55
5.4	Modelo acoplado $(\phi^4 + s\mathbf{G}_1 + s\mathbf{G}_2)$ e estabilidade	60
5.4.1	Projeção do potencial V	63
5.4.2	Projeção do superpotencial W	64
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	66
	APÊNDICE A – POTENCIAIS ASSOCIADOS EXATAMENTE SOLÚVEIS	68
	APÊNDICE B – CÁLCULO DAS FUNÇÕES g PARA SISTEMAS DE TRÊS CAMPOS	69
B.1	O modelo estendido $(\phi^4 + \varphi_l^6 + \zeta^{4I})$	69
B.2	O modelo estendido $(\phi^4 + s\mathbf{G} + \mathbf{E})$	73
B.3	O modelo estendido $(\phi^4 + s\mathbf{G}_1 + s\mathbf{G}_2)$	76

REFERÊNCIAS	79
--------------------------	-----------

1 Introdução

Do que se tem relato, Sólitons foram observados e estudados primeiramente pelo engenheiro escocês John Scott Russell em 1834 [2]. Deste momento até a atualidade, descrevemos defeitos topológicos como sendo soluções topológicas de teoria de campos não-lineares cuja densidade de energia é concentrada e sua respectiva energia é finita (defeitos topológicos que preservam a estrutura após colidirem, mantém a nomenclatura de Sólitons), exigindo para tal efeito condições de contorno especiais [3]-[4]. As teorias de defeitos topológicos apresentam importantes aplicações em diversas áreas da física, como na Teoria Quântica de Campos e Física de Partículas [5], na Cosmologia [6]-[11], na Matéria Condensada [12]-[15], entre outras.

Nesta dissertação trabalharemos com defeitos topológicos descritos por campos escalares reais em $(1 + 1)$ dimensões, que suportam soluções BPS (Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield) [16, 17]. Estas soluções são estáticas e satisfazem equações diferenciais de primeira ordem, além da equação de Euler-Lagrange de segunda ordem. Além disso, soluções BPS são estáveis [18]-[21] e descrevem sistemas com energia mínima. Recentemente tem havido um grande interesse na investigação de teorias de múltiplos campos escalares em $(1 + 1)$ dimensões [22]-[32]. Tradicionalmente a análise de modelos de múltiplos campos era realizada principalmente usando o método da órbita de teste (*trial orbit method*) [22]-[25], que consiste em introduzirmos uma órbita teste da forma $\mathcal{O}(\phi_1, \dots, \phi_n) = 0$, isto é, um funcional dos campos que será utilizado para desacoplar os respectivos campos escalares reais. Contudo, este método demonstrou ser pouco eficiente para lidar com modelos de múltiplos campos escalares mais complexos, uma vez que a órbita não pode ser arbitrária e requer tentativa e erro. Porém, mais recentemente foi proposto um novo método que permite descrever de forma sistemática teorias de múltiplos campos escalares reais BPS em $(1 + 1)$ dimensões, a partir de diversas teorias BPS de um campo escalar real. Esta estratégia é conhecida como método de extensão [26, 29], o qual consiste em iniciarmos com diversas teorias de um campo escalar real, as quais são relacionadas entre elas por mapeamentos, conhecidos como funções de deformação [33]-[36]. Em seguida, utilizaremos estas funções, e suas inversas, para descrevermos diferentes expressões para as respectivas equações de primeira ordem, as quais serão usadas para propor a equação de primeira ordem para teoria estendida através de um ansatz conveniente [26, 29]. Neste trabalho, utilizaremos o método de extensão para construir novos modelos de dois e três campos escalares reais BPS. Além disso, estudaremos a estabilidade clássica ou linear para cada modelo estendido obtido. Para tal objetivo, consideraremos teorias de campos escalares bem conhecidos na literatura, tais como a teoria ϕ^4 [36], a teoria tipo φ^6 [35], o modelo sine-Gordon [3], o modelo periódico exótico (modelo-E) [37, 38], e a teoria ζ^{4I}

invertida não-BPS [36].

A dissertação está dividida da seguinte forma. No capítulo 2, descrevemos o formalismo geral para as teorias não lineares topológicas em $(1 + 1)$ dimensões no caso de n campos escalares reais. Definimos a carga topológica [3] associada as configurações dos campos, permitindo assim classificar as configurações em topológicas (carga diferente de zero) e não-topológicas (cargas nula). Finalizamos o capítulo descrevendo o formalismo geral da estabilidade, onde usamos para tal fim a formulação da estabilidade clássica ou linear [18]-[21]. No capítulo 3, apresentamos o método de deformação [33]-[36] para o caso de um campo escalar real. Este método consiste em iniciarmos com uma teoria de um campo escalar real conhecida, para em seguida considerarmos uma função contínua, suave, e inversível que irá deformar o modelo original em uma nova teoria de um campo escalar real, cuja solução deformada será dada pelo inverso da função de deformação. Aplicaremos o método nas teorias descritas acima. No capítulo 4, apresentaremos o método de extensão para o caso de dois campos escalares. Particularizemos a estabilidade para este cenário, focando no caso BPS. Tendo o formalismo em mãos, utilizaremos os resultados obtidos no capítulo 3 a fim de ilustrarmos o método, construindo assim novos modelos estendidos de dois campos. No capítulo 5, iremos generalizar o desenvolvimento feito no capítulo 4 para o cenário de três campos escalares reais. No capítulo 6, finalizaremos nosso trabalho apresentando as conclusões deste trabalho de dissertação, e as perspectivas de investigações futuras. No apêndice A, resumimos algumas características dos potenciais solúveis Rosen-Morse II e Scarf II [39]. No apêndice B, contém alguns cálculos explícitos derivados do capítulo 5.

2 Formalismo geral para teorias BPS

Construiremos neste capítulo o formalismo geral para as teorias não lineares topológicas em $(1 + 1)$ dimensões. Primeiramente vamos obter as equações de Euler-Lagrange para n campos escalares reais e as condições de contorno que garantirão as estruturas dos defeitos topológicos, ou seja, configurações de campos com densidade de energia concentrada e energia finita. Além disso, para potenciais exclusivamente positivos podemos definir as teorias BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) que possuem características interessantes e convenientes além de serem fundamentais na construção do método de extensão. Finalizaremos este capítulo construindo, a partir de perturbações lineares, o formalismo geral da estabilidade destas teorias topológicas.

O formalismo geral para teorias de n campos escalares reais em $(1 + 1)$ dimensões $\phi_i(t, x)$, para $i = 1, 2, \dots, n$, pode ser descritos pela seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - V(\phi), \quad (2.1)$$

onde os defeitos topológicos para diferentes teorias serão caracterizados pelo potencial $V(\phi) \equiv V(\phi_1, \dots, \phi_n)$. Estamos considerando aqui a métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ e, em unidade naturais, a seguinte notação $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $x^0 = t$, $x^1 = x$. Da densidade lagrangiana obtemos a equação de Euler-Lagrange

$$\partial_t^2 \phi_i - \partial_x^2 \phi_i + \frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0, \quad (2.2)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, e a seguinte densidade de energia

$$\mathcal{H}(t, x) = T^{00} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(\partial_t \phi_i)^2 + (\partial_x \phi_i)^2] + V(\phi), \quad (2.3)$$

onde T^{00} é a componente temporal do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$, derivado a partir do teorema de Noether [40] pela invariância translacional das coordenadas espaço-temporais dos campos escalares. Deste modo a energia funcional do sistema

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{H}(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(\partial_t \phi_i)^2 + (\partial_x \phi_i)^2] + V(\phi) \right), \quad (2.4)$$

é dada pela integral espacial da densidade de energia (2.3) em todo espaço. Sendo assim, ao considerarmos a invariância sobre o grupo de Lorentz, podemos trabalhar no referencial de configurações estáticas ($\partial_t \phi_i = 0$), que pela eq.(2.2)

$$\phi_i''(x) = \frac{\partial V}{\partial \phi_i}, \quad (2.5)$$

para a seguinte notação $\phi'_i \equiv \frac{d}{dx} \phi_i$ e $i = 1, 2, \dots, n$. Multiplicando ambos os lados da expressão acima por $\phi'_i(x)$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d}{dx} (\phi'_i)^2 \right] = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \phi'_i, \quad (2.6)$$

e integrando na componente espacial

$$\frac{1}{2} (\phi'_i)^2 = \int \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \phi'_i(x) dx = \int \frac{\partial V}{\partial \phi_i} d\phi_i, \quad (2.7)$$

obtemos uma equação equivalente de primeira ordem. A energia funcional do sistema estático pode ser reescrita da forma

$$\begin{aligned} E[\phi] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{H}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\phi'_i)^2 + V(\phi) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sum_{i=1}^n \int \frac{\partial V}{\partial \phi_i} d\phi_i + V(\phi) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\int dV(\phi) + V(\phi) \right) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx V(\phi), \end{aligned} \quad (2.8)$$

ao usarmos a eq.(2.7). Podemos observar da eq.(2.8) que a exigência de energia finita para uma configuração não trivial impõem as seguintes condições de contorno

$$\phi_i(\pm\infty) \rightarrow \bar{\phi}_i^{\pm}, \quad \phi'_i(\pm\infty) \rightarrow 0, \quad V(\bar{\phi}) = 0, \quad (2.9)$$

de forma que $\bar{\phi} \equiv (\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_n)$ representa os mínimos degenerados do potencial $V_{\phi_i}(\bar{\phi}) = 0$, onde estamos considerando a notação $V_{\phi_i} \equiv \frac{\partial V}{\partial \phi_i}$. Assim vemos que o potencial possuirá pelo menos um mínimo em conformidade com as condições (2.9), gerando neste caso as configurações não-topológicas tipo lump. Todavia, quando dois ou mais mínimos degenerados existirem o potencial suportará configurações topológicas, denominadas kinks, conectando assintoticamente os mínimos adjuntos $\bar{\phi}^-$ e $\bar{\phi}^+$. Portanto, as condições de contorno (2.9) permitem distinguir quais tipos de configurações topológicas são suportadas pelo potencial, de modo que podemos definir uma carga topológica. No caso de potenciais exclusivamente positivos podemos definir uma função suave dos n campos escalares $W(\phi)$, conhecida como superpotencial ou pré-potencial [43], que relaciona com o potencial pela expressão

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n W_{\phi_i}^2, \quad (2.10)$$

em que denotamos $W_{\phi_i} \equiv \frac{\partial W}{\partial \phi_i}$. Consequentemente, podemos escrever as equações de segunda ordem BPS a partir de (2.5)

$$\phi''_i = \sum_{j=1}^n W_{\phi_j} W_{\phi_j \phi_i}, \quad (2.11)$$

onde $i = 1, 2, \dots, n$, assim como a equação de primeira ordem de (2.7)

$$\phi'_i = \pm W_{\phi_i}, \quad (2.12)$$

de modo que configurações BPS (ou estados BPS) de primeira ordem também serão configurações das equações de segunda ordem (2.11) quando $W_{\phi_i \phi_j}(\phi) = W_{\phi_j \phi_i}(\phi)$, para todo i e j . A energia funcional (2.8) para o sistema BPS será dada por

$$\begin{aligned} E_{BPS}[\phi] &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[(\phi'_i)^2 + W_{\phi_i}^2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\phi'_i \mp W_{\phi_i} \right)^2 \pm \int_{-\infty}^{\infty} dW(\phi(x)) \\ &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} dW(\phi(x)) = \left\| W(\bar{\phi}^+) - W(\bar{\phi}^-) \right\|, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde temos completado o quadrado e consideramos a equação de primeira ordem BPS (2.12). A energia BPS deve ser não nula, de modo que podemos observar que sua expressão depende somente da topologia do sistema, isto é, é uma função dos mínimos degenerados do potencial, além de representar os estados de energia mínima do sistema. Daqui em diante, exceto se mencionado o contrário, trabalharemos somente com teorias BPS, as quais além das características já mencionadas acima, possuem a estabilidade linear como será mostrado nos próximos capítulos.

2.1 Carga topológica

Como vimos acima, os defeitos topológicos requerem condições de contorno relacionadas com os mínimos degenerados de algum potencial em particular, descrevendo assim os diferentes comportamentos assintóticos das configurações. Uma vez que esperamos que o sistema evolua no tempo, governado pela equação de campo (2.2), mantendo a energia conservada. Devemos esperar que as condições de contorno (2.9) também sejam invariantes no tempo, permitindo assim definir uma carga topológica [3]. Em (1 + 1) dimensões, começemos considerando a seguinte definição para a corrente topológica

$$j^\mu = a \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu h(\phi), \quad (2.14)$$

sendo a uma constante de normalização, $\epsilon^{\mu\nu}$ o pseudo-tensor completamente antissimétrico (Levi-Civita), e $h(\phi)$ uma função arbitrária dependente dos campos ϕ . Notemos que por virtude das derivadas comutarem ($\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$), vemos que a corrente topológica é automaticamente conservada $\partial_\mu j^\mu = 0$. Sendo assim, uma vez que consideraremos somente configurações bem definidas e topologicamente limitadas, assumiremos $h(\phi) \equiv \phi$ de modo que

$$j^\mu = a \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (2.15)$$

Se considerássemos teorias em que a topologia das configurações não sejam necessariamente limitadas [41], ainda poderíamos manter as descrições realizadas acima ao redefinirmos a função arbitrária $h(\phi)$ em termos do superpotencial [42], mantendo assim a validade da carga topológica mesmo para esses contornos. Sem perda de generalidade, definimos para as configurações estáticas a seguinte carga topológica

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx j^0(x) = a \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi'(x) = a [\phi(x = \infty) - \phi(x = -\infty)] = a [\bar{\phi}^+ - \bar{\phi}^-], \quad (2.16)$$

de modo a depender somente da topologia do sistema. Configurações de campo que possuem $Q \neq 0$ ($\bar{\phi}^+ \neq \bar{\phi}^-$) são denominadas soluções topológicas (kinks), e configurações que possuem $Q = 0$ ($\bar{\phi}^+ = \bar{\phi}^-$) são soluções não-topológicas (lumps). Desta forma dissemos que as soluções de campo são caracterizadas por dois índices assintóticos ($\bar{\phi}^-, \bar{\phi}^+$), formando setores adjacentes que não mudam com a evolução temporal do sistema. Por conseguinte, vemos que esses setores são invariantes homotópicos, isto é, invariantes sob deformações arbitrárias contínuas das configurações de campos, o que justifica chamá-los de setores topológicos, sendo cada setor uma classe diferente. Além disso, uma vez que os mínimos degenerados são distinguíveis pelos índices do setor, teremos uma quebra espontânea de simetria e, neste caso espacialmente unidimensional, as teorias apresentarão a simetria discreta $\phi \leftrightarrow -\phi$. Como uma breve ilustração consideremos o potencial da teoria ϕ^4 , da forma

$$V(\phi) = \frac{\alpha^2}{2} (1 - \phi^2)^2, \quad (2.17)$$

de modo que os mínimos degenerados do potencial são $\bar{\phi} = \pm 1$. Assim podemos ter

- $Q = 0$ quando $\bar{\phi}^+ = \bar{\phi}^- = \pm 1$, isto é, soluções triviais de mínimos,
- $Q = +1$ quando $\bar{\phi}^+ = 1$ e $\bar{\phi}^- = -1$, onde convencionamos chamar de kink,
- $Q = -1$ quando $\bar{\phi}^+ = -1$ e $\bar{\phi}^- = 1$, de modo que chamamos de anti-kink.

Embora a definição de carga topológica possa parecer muito simples aqui, sua construção se torna importante quando lidamos com teorias mais gerais como teorias de gauge [5], onde a simetria do espaço dos mínimos não é mais discreta. Contudo, devemos enfatizar que a definição de carga topológica surge a partir das condições de contorno, e não de um grupo de simetria.

2.2 Estabilidade

Com objetivo de estudarmos a estabilidade clássica ou linear para um sistema de n campos escalares estáticos que satisfazem a eq.(2.5), iremos considerar pequenas flutuações da forma

$$\Phi_i(t, x) = \phi_i(x) + \eta_i(t, x), \quad (2.18)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, e em primeira ordem nas perturbações, avaliaremos a evolução dinâmica dos campos perturbados (2.18). Veremos que a dificuldade consiste em determinarmos o espectro de autovalores do operador tipo Schrödinger associado aos modos normais do modelo clássico, cuja estabilidade ocorrerá no caso deles serem todos definidos semi-positivos e com o modo-zero coincidindo com o estado fundamental. Este procedimento é conhecido como a abordagem padrão [21].

A evolução dinâmica dos campos escalares perturbados $\Phi_i(t, x)$ é dada pela equação de Euler-Lagrange (2.2)

$$\partial_t^2 \Phi_i - \partial_x^2 \Phi_i + V_{\Phi_i}(\Phi) = 0, \quad (2.19)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, e $\Phi \equiv (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$. Substituindo a eq.(2.18) na eq.(2.19)

$$\partial_t^2 \eta_i - \partial_x^2 \eta_i - \phi_i''(x) + V_{\Phi_i}(\Phi) = 0, \quad (2.20)$$

e expandindo o potencial perturbado em ordens lineares de $\eta_i(t, x)$

$$V_{\Phi_i}(\Phi) \approx V_{\phi_i}(\phi) + V_{\phi_i \phi_1}(\phi) \eta_1 + V_{\phi_i \phi_2}(\phi) \eta_2 + \dots + V_{\phi_i \phi_n}(\phi) \eta_n, \quad (2.21)$$

de modo que ao considerarmos as equações de campos estáticos (2.5), obtemos

$$\frac{\partial^2 \eta_i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial x^2} + V_{\phi_i \phi_1} \eta_1 + \dots + V_{\phi_i \phi_i} \eta_i + \dots + V_{\phi_i \phi_n} \eta_n = 0. \quad (2.22)$$

Uma vez que as perturbações são em torno de soluções estáticas $\phi_i(x)$, vamos assumir que

$$\eta_i(t, x) = \sum_k \eta_{ki}(x) \cos(w_k t), \quad (2.23)$$

e ao substituírmos na eq.(2.22), obtemos a equação de autovalores tipo Schrödinger

$$H\Psi_k(x) = w_k^2 \Psi_k(x), \quad (2.24)$$

onde

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} V_{\phi_1 \phi_1} & V_{\phi_1 \phi_2} & \cdots & V_{\phi_1 \phi_i} & \cdots & V_{\phi_1 \phi_n} \\ V_{\phi_2 \phi_1} & V_{\phi_2 \phi_2} & \cdots & V_{\phi_2 \phi_i} & \cdots & V_{\phi_2 \phi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{\phi_i \phi_1} & V_{\phi_i \phi_2} & \cdots & V_{\phi_i \phi_i} & \cdots & V_{\phi_i \phi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{\phi_n \phi_1} & V_{\phi_n \phi_2} & \cdots & V_{\phi_n \phi_i} & \cdots & V_{\phi_n \phi_n} \end{pmatrix}, \quad \Psi_k(x) = \begin{pmatrix} \eta_{k1}(x) \\ \eta_{k2}(x) \\ \vdots \\ \eta_{ki}(x) \\ \vdots \\ \eta_{kn}(x) \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

no qual a matriz acima está escrita em termos das soluções estáticas $\phi_i(x)$. Podemos observar da eq.(2.24) que autovalores negativos ($w_k^2 < 0$) destruirá a estrutura da configuração estática pela perturbação (2.23), desta forma a estabilidade só existirá para autovalores positivos semi-definidos ($w_k^2 \geq 0$). Além disso, diferenciando a equação de segunda ordem (2.5) com respeito a x e comparando com as expressões (2.24,2.25), vemos que o modo-zero ($H\Psi_0(x) = 0$) é intrínseco ao formalismo com autoestado

$$\Psi_0(x) = \begin{pmatrix} \eta_{01}(x) \\ \vdots \\ \eta_{0i}(x) \\ \vdots \\ \eta_{0n}(x) \end{pmatrix} = N_0 \begin{pmatrix} \phi_1'(x) \\ \vdots \\ \phi_i'(x) \\ \vdots \\ \phi_n'(x) \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

onde N_0 é uma constante de normalização e $\Psi_0(x)$ é o autoestado fundamental, que coincide com a configuração de menor energia para um sistema BPS.

Nos próximos capítulos, particularizemos o formalismo desenvolvido acima para os casos de dois e três campos BPS. Sabe-se que para esses casos BPS é possível, a partir da definição do superpotencial W (2.10), descrever o Hamiltoniano H (2.25) em termos de um operador de primeira ordem [1, 21]

$$H = A_-^\dagger A_- = A_+ A_-, \quad (2.27)$$

sendo

$$A_\pm = \pm \frac{d}{dx} + \mathbf{W}. \quad (2.28)$$

Uma vez que, \mathbf{W} é uma matriz quadrada real com dimensão correspondente ao número de campos, teremos que $A_\pm^\dagger = A_\mp$. Tendo definido H conforme a eq.(2.27), a estratégia seguinte será buscar diagonalizar a matriz original \mathbf{W} , de modo que assim obtemos uma matriz equivalente diagonalizada. O objetivo desta estratégia, de um modo geral, é o de simplificar as análises ao conduzir um sistema de autovalores tipo Schrödinger, que em geral será acoplado, em um sistema do mesmo gênero só que desacoplado. Em outras palavras, seguindo esse procedimento será possível analisar o sistema de equações de autovalor de forma que as equações serão independentes uma das outras.

3 Método de deformação

No cenário de modelos descritos por um único campo, um método introduzido recentemente possibilita relacionar diferentes teorias por um difeomorfismo de modo a gerar uma nova família de configurações topológicas ou não-topológicas. Este procedimento é conhecido como método de deformação [33, 34], o qual descreveremos a seguir.

Consideremos a seguinte lagrangiana para um modelo de um campo escalar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad \text{com} \quad V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2, \quad (3.1)$$

de modo a suportar a configuração BPS satisfazendo a equação de primeira ordem

$$\phi' = W_\phi(\phi). \quad (3.2)$$

Com o modelo original em mãos, introduzimos uma função suave invertível f como sendo a função deformação definindo

$$\phi(x) = f(\varphi(x)), \quad (3.3)$$

onde φ é a nova configuração BPS deformada. Todavia, a obtenção de uma nova teoria topológica deformada, derivada pela transformação (3.3), requererá um potencial deformado que relacione com o potencial original pela expressão

$$\tilde{V}(\varphi) = \frac{1}{f_\varphi^2} V(\phi \rightarrow f(\varphi)), \quad (3.4)$$

para $f_\varphi \equiv \frac{df}{d\varphi}$, gerando a lagrangiana deformada

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \tilde{V}(\varphi), \quad \text{com} \quad \tilde{V}(\varphi) = \frac{1}{2} \tilde{W}_\varphi^2, \quad (3.5)$$

além da equação de primeira ordem

$$\varphi' = \tilde{W}_\varphi(\varphi), \quad (3.6)$$

cuja solução será $\varphi(x) = f^{-1}(\phi(x))$. Sendo assim o método consiste em considerarmos uma teoria inicial cujas soluções topológicas são conhecidas, e em seguida, propor uma transformação na configuração original por uma função de deformação, gerando assim uma nova configuração deformada para uma nova teoria deformada. Uma vez que estamos considerando teorias que suportam configurações BPS, podemos definir uma relação equivalente a (3.4) em termos dos superpotenciais

$$W_\phi(\phi \rightarrow f(\varphi)) = W_\phi(\varphi) = f_\varphi \tilde{W}_\varphi(\varphi), \quad (3.7)$$

a partir da definição (3.3). Obtendo assim a seguinte relação

$$\frac{d\phi}{d\varphi} = \frac{W_\phi(\phi)}{\tilde{W}_\varphi(\varphi)}, \quad (3.8)$$

que será importante para construirmos teorias de multi-campos escalares [44] que suportam configurações BPS. De fato, ao promovermos a função de deformação (3.3) a uma órbita no espaço de configurações dos campos, funcionando como um vínculo entre os mesmos, veremos uma estrutura semelhante com a relação (3.8) para o caso de multi-campos BPS [26, 29]. Permittindo assim descrever um novo método para sistemas de multi-campos escalares acoplados em $(1 + 1)$ dimensões, onde apresentaremos no próximo capítulo.

Consideremos agora algumas teorias já bem definidas que suportam configurações BPS para ilustrarmos o método de deformação. No próximo capítulo partiremos desses exemplos para ilustrarmos o método de multi-campos acoplados.

3.1 A deformação $\phi^4 \leftrightarrow \varphi_l^6$

Iniciando pelo modelo bem conhecido ϕ^4 [36], cujo potencial e o superpotencial são, respectivamente,

$$V(\phi) = \frac{\alpha^2}{2} (1 - \phi^2)^2, \quad (3.9)$$

$$W_\phi(\phi) = \alpha (1 - \phi^2), \quad (3.10)$$

onde α é um parâmetro real positivo adimensional, de modo a suportar a configuração estática BPS

$$\phi(x) = \tanh(\alpha x). \quad (3.11)$$

Propondo uma deformação do modelo ϕ^4 da forma

$$\phi = f(\varphi) = |\varphi| - 1, \quad (3.12)$$

resulta no modelo topológico BPS tipo- φ^6 (denotamos por φ_l^6) [35]

$$\tilde{V}(\varphi) = \frac{\alpha^2}{2} \varphi^2 (2 - |\varphi|)^2, \quad (3.13)$$

$$\tilde{W}_\varphi(\varphi) = \alpha \varphi (2 - |\varphi|), \quad (3.14)$$

$$\varphi_\pm(x) = \pm(1 + \tanh(\alpha x)), \quad (3.15)$$

que é uma versão semelhante ao modelo ϕ^6 [36]. Observemos que no exemplo acima o processo de deformação pode modificar os números de mínimos degenerados. De fato, podemos perceber que o modelo original possui os seguintes mínimos $\bar{\phi} = \{\pm 1\}$, enquanto o modelo deformado possui os mínimos $\bar{\varphi} = \{0, \pm 1\}$. Consequentemente, ocorrendo a interessante formação de novos setores topológicos. Além disso, podemos destacar que ambos os modelos são BPS e estáveis [35, 36].

3.2 A deformação $\phi^4 \leftrightarrow \text{sG}$

Como segundo exemplo, comecemos novamente pelo modelo ϕ^4 definido pelas eqs.(3.9)-(3.11). Propondo agora a seguinte deformação

$$\phi = f(\chi) = \sin(\beta \chi), \quad (3.16)$$

sendo β um parâmetro real positivo adimensional e χ é o novo modelo deformado. Obtemos o modelo sine-Gordon (denotamos por sG) [3], representado pelas seguintes expressões

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \cos^2(\beta \chi), \quad (3.17)$$

$$\tilde{W}_\chi(\chi) = \frac{\alpha}{\beta} \cos(\beta \chi), \quad (3.18)$$

$$\chi(x) = \frac{1}{\beta} \arcsin(\tanh(\alpha x)). \quad (3.19)$$

Podemos observar que neste modelo possuímos infinitos mínimos degenerados arranjados nos valores $\bar{\chi}_k = \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\beta}$, com $k \in \mathbb{Z}$, de modo a gerar um número infinito de setores topológicos equivalentes, onde no caso particular da solução (3.19) corresponde ao setor $(\bar{\chi}_0, \bar{\chi}_1)$. Além disso, este modelo BPS também é estável [36].

3.3 A deformação sG \leftrightarrow modelo-E

No terceiro exemplo, adotamos como modelo original um modelo bosônico BPS desenvolvido recentemente, nomeado de modelo exótico (denotamos por modelo-E) [37, 38], da forma

$$V(\eta) = \frac{\alpha^2}{2} (1 + \eta)^2 \cos^2\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right), \quad (3.20)$$

$$W_\eta(\eta) = \alpha (1 + \eta) \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right), \quad (3.21)$$

$$\eta(x) = e^{\arctan(\sinh(\alpha x))} - 1, \quad (3.22)$$

sendo α real, positivo e adimensional. Este modelo possui infinitos mínimos degenerados arranjados agora nos valores $\bar{\eta}_k = e^{(k-\frac{1}{2})\pi} - 1$, com $k \in \mathbb{Z}$, e naturalmente infinitos setores topológicos. Contudo, observemos que neste caso os setores topológicos não são mais equivalentes, de modo que a energia BPS dependerá do setor topológico considerado em particular. Portanto, devemos esclarecer que na configuração BPS (3.22) consideramos o caso conectado pelo setor $(\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1)$. O modelo-E suporta configurações BPS estáveis [37]. Ao deformar o modelo-E pela seguinte função de deformação

$$\eta = f(\chi) = e^{\beta \chi} - 1, \quad (3.23)$$

obtemos novamente o modelo sG descrito pelas expressões (3.17)-(3.19).

3.4 A deformação $\phi^4 \leftrightarrow \zeta^{4I}$

Como último exemplo consideramos um modelo BPS topológico que deforma em um modelo não-topológico. Com esta finalidade, partindo do modelo ϕ^4 (3.9)-(3.11) e propondo a seguinte deformação

$$|\phi| = f(\zeta) = \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}}, \quad (3.24)$$

sendo β um parâmetro real positivo adimensional e ζ o novo modelo deformado, obtemos o modelo ζ^4 -invertido (denotamos por ζ^{4I}) [36]

$$\tilde{V}(\zeta) = \frac{\alpha^2}{2} \zeta^2 \left(1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}\right), \quad (3.25)$$

$$\tilde{W}_\zeta(\zeta) = -\alpha \omega \zeta \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}}, \quad (3.26)$$

$$\zeta(x) = \beta \operatorname{sech}(\alpha x), \quad (3.27)$$

onde

$$\omega = \frac{\phi}{|\phi|} = \begin{cases} 1 & \text{se } \phi(x) \geq 0 \\ -1 & \text{se } \phi(x) < 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Apesar da eq.(3.26) estar coerente com a construção definida em (3.7), devemos esclarecer que estamos extrapolando a definição, uma vez que, o modelo ζ^{4I} não é BPS. Note que este modelo possui somente o mínimo $\bar{\zeta} = \{0\}$, de modo a resultar em uma configuração não-topológica. Sendo assim, partimos de um modelo BPS estável e descrevemos um modelo não BPS instável [36].

4 Método de extensão para dois campos

Vamos agora descrever o método de extensão a fim de construirmos teorias de dois campos escalares BPS a partir de teorias de um campo BPS, onde usaremos a notação $W^{(1)}$ para representar o superpotencial das teorias de um campo escalar, e correspondentemente $W^{(2)}$ para o caso de dois campos escalares. Para uma teoria de dois campos escalares que suportam configurações BPS, denotados por ϕ e φ , vemos que das equações de primeira ordem (2.12)

$$\phi' = W_{\phi}^{(2)}, \quad \varphi' = W_{\varphi}^{(2)}, \quad (4.1)$$

podemos escrever a seguinte relação

$$\frac{d\phi}{d\varphi} = \frac{W_{\phi}^{(2)}(\phi, \varphi)}{W_{\varphi}^{(2)}(\phi, \varphi)}, \quad (4.2)$$

apresentando assim uma estrutura semelhante a expressão (3.8) derivada em termos dos superpotenciais de um campo escalar. De fato, o novo método se inspira nessa semelhança para estender a estrutura da expressão de um campo em dois campos, daí o nome método de extensão [26]. Para tal, iniciamos com uma teoria de um campo ϕ e utilizamos a deformação $\phi = f(\varphi)$ para reescrever a equação de primeira ordem em três modos equivalentes

$$\phi' = W_{\phi}^{(1)}(\phi), \quad \phi' = W_{\phi}^{(1)}(\varphi), \quad \phi' = W_{\phi}^{(1)}(\phi, \varphi), \quad (4.3)$$

onde na segunda expressão fizemos o uso total da função $\phi \rightarrow f(\varphi)$ a fim de escrevermos $W_{\phi}^{(1)}$ com uma função somente de φ , enquanto na terceira expressão utilizamos parcialmente a função deformação de modo que $W_{\phi}^{(1)}$ seja expresso por ambos ϕ e φ . Obviamente, há uma ambiguidade na obtenção da última expressão, uma vez que ela dependerá de qual escolha arbitrária foi parcialmente executada.

Visto que o campo deformada φ também satisfaz uma equação de primeira ordem BPS (3.6), podemos assim utilizar a inversa da função de deformação $\varphi \rightarrow f^{-1}(\phi)$ para escrevermos $\widetilde{W}_{\varphi}^{(1)}$ (3.7), de modo análogo ao caso anterior, nas seguintes relações equivalentes

$$\varphi' = \widetilde{W}_{\varphi}^{(1)}(\varphi), \quad \varphi' = \widetilde{W}_{\varphi}^{(1)}(\phi), \quad \varphi' = \widetilde{W}_{\varphi}^{(1)}(\phi, \varphi). \quad (4.4)$$

Tendo as relações (4.3) e (4.4) determinadas, estamos agora aptos em promover a extensão através do seguinte ansatz

$$W_{\phi}^{(2)}(\phi, \varphi) = a_1 W_{\phi}^{(1)}(\varphi) + a_2 W_{\phi}^{(1)}(\phi, \varphi) + a_3 W_{\phi}^{(1)}(\phi) + p_1 g(\varphi) + p_2 g(\phi, \varphi) + p_3 g(\phi), \quad (4.5)$$

$$W_{\varphi}^{(2)}(\phi, \varphi) = b_1 \widetilde{W}_{\varphi}^{(1)}(\varphi) + b_2 \widetilde{W}_{\varphi}^{(1)}(\phi, \varphi) + b_3 \widetilde{W}_{\varphi}^{(1)}(\phi) + q_1 \tilde{g}(\varphi) + q_2 \tilde{g}(\phi, \varphi) + q_3 \tilde{g}(\phi), \quad (4.6)$$

onde, por consistência, os parâmetros a_i , b_i , p_i e q_i para $i = 1, 2, 3$, devam satisfazer as restrições

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{i=1}^3 b_i = 1, \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^3 p_i = \sum_{i=1}^3 q_i = 0. \quad (4.7)$$

Além disso, também por condições de consistência, g e \tilde{g} são funções arbitrárias que serão determinadas pela exigência de $W^{(2)}(\phi, \varphi)$ ser suave e contínuo, ou seja, pela condição

$$W_{\phi\varphi}^{(2)}(\phi, \varphi) = W_{\varphi\phi}^{(2)}(\phi, \varphi). \quad (4.8)$$

Portanto ao substituirmos as eqs.(4.5) e (4.6) na condição (4.8) obtemos

$$\begin{aligned} 0 = & p_1 g_\varphi(\varphi) + p_2 g_\varphi(\phi, \varphi) - q_2 \tilde{g}_\phi(\phi, \varphi) - q_3 \tilde{g}_\phi(\phi) + a_1 W_{\phi\varphi}^{(1)}(\varphi) + a_2 W_{\phi\varphi}^{(1)}(\phi, \varphi) \\ & - b_2 \widetilde{W}_{\varphi\phi}^{(1)}(\phi, \varphi) - b_3 \widetilde{W}_{\varphi\phi}^{(1)}(\phi), \end{aligned} \quad (4.9)$$

de modo a determinar a forma específica das funções g e \tilde{g} , com uma certa arbitrariedade de escolha nos parâmetros e no arranjo dos termos. Devido essas arbitrariedades podemos dizer que haverá inúmeros modelos resultantes, possibilitando assim determinar diferentes expressões para $W_{\phi}^{(2)}(\phi, \varphi)$ e $W_{\varphi}^{(2)}(\phi, \varphi)$. Nosso principal objetivo aqui é construir modelos que suportem configurações BPS, de modo que isso será alcançado escolhendo cuidadosamente essas formas. Depois de fazer isso, podemos voltar ao sistema dado pelas eqs.(4.5) e (4.6), e realizar integrações simples para finalmente determinarmos a forma de $W^{(2)}(\phi, \varphi)$. Além disto, podemos verificar diretamente que a solução do modelo estendido de dois campos são as respectivas soluções BPS para os modelos de um campo original e deformado, com a função de deformação sendo agora estendida a uma órbita no espaço das configurações. A seguir, descreveremos a estabilidade linear para dois campos BPS e ilustraremos o método de extensão construindo explicitamente novos modelos de dois campos escalares interessantes.

4.1 Estabilidade linear para dois campos

Preocupemos agora em avaliar a estabilidade clássica ou linear no caso particular de dois campos escalares acoplados, onde focaremos aqui em configurações BPS [21]. Portanto, utilizaremos os resultados construídos na seção 2.1 no caso de dois campos BPS, nos quais continuaremos denotando por ϕ e φ .

Vimos na seção 2.1 que ao considerarmos a perturbação linear (2.18) em torno dos campos estáticos $\phi(x)$ e $\varphi(x)$, da forma

$$\Phi_1(t, x) = \phi(x) + \sum_k \rho_k(x) \cos(w_k t), \quad (4.10)$$

$$\Phi_2(t, x) = \varphi(x) + \sum_k \sigma_k(x) \cos(w_k t), \quad (4.11)$$

obtemos um problema de autovalores tipo Schrödinger $H\Psi_k(x) = w_k^2\Psi_k$, com

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \left(\begin{array}{cc} V_{\phi\phi} & V_{\phi\varphi} \\ V_{\varphi\phi} & V_{\varphi\varphi} \end{array} \right) \Big|_{\{\phi(x), \varphi(x)\}}, \quad \Psi_k(x) = \begin{pmatrix} \rho_k(x) \\ \sigma_k(x) \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

sendo a matriz descrita somente em termos dos campos estáticos $\phi(x)$ e $\varphi(x)$. Uma vez que estamos propondo que o potencial $V(\phi, \varphi)$ suporte estados BPS (2.10)

$$V(\phi, \varphi) = \frac{1}{2} \left(W_{\phi}^{(2)}(\phi, \varphi) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(W_{\varphi}^{(2)}(\phi, \varphi) \right)^2, \quad (4.13)$$

então podemos escrever as seguintes expressões

$$V_{\phi\phi} = \left(W_{\phi\phi}^{(2)} \right)^2 + W_{\phi}^{(2)} W_{\phi\phi\phi}^{(2)} + \left(W_{\phi\varphi}^{(2)} \right)^2 + W_{\varphi}^{(2)} W_{\varphi\phi\phi}^{(2)}, \quad (4.14)$$

$$V_{\varphi\varphi} = \left(W_{\varphi\varphi}^{(2)} \right)^2 + W_{\varphi}^{(2)} W_{\varphi\varphi\varphi}^{(2)} + \left(W_{\phi\varphi}^{(2)} \right)^2 + W_{\phi}^{(2)} W_{\phi\varphi\varphi}^{(2)}, \quad (4.15)$$

$$V_{\phi\varphi} = V_{\varphi\phi} = W_{\phi\varphi}^{(2)} W_{\phi\phi}^{(2)} + W_{\phi}^{(2)} W_{\varphi\phi\phi}^{(2)} + W_{\phi\phi}^{(2)} W_{\varphi\varphi}^{(2)} + W_{\varphi}^{(2)} W_{\phi\varphi\varphi}^{(2)}. \quad (4.16)$$

Substituindo as eqs.(4.14)–(4.16) na eq.(4.12), encontramos que a matriz \mathbf{W} que define o operador linear de primeira ordem A_{\pm} é dada por (2.28)

$$\mathbf{W} = \left(\begin{array}{cc} W_{\phi\phi}^{(2)} & W_{\phi\varphi}^{(2)} \\ W_{\varphi\phi}^{(2)} & W_{\varphi\varphi}^{(2)} \end{array} \right) \Big|_{\{\phi(x), \varphi(x)\}}, \quad (4.17)$$

permitindo reescrever o operador tipo Schrödinger na forma (2.27). Da seguinte constatação $A_{\pm}^{\dagger} = A_{\mp}$, observamos que no caso BPS o operador tipo Schrödinger H será positivo semi-definido ($w_k \geq 0 \forall k$), e com estado fundamental (2.26) coincidindo com o modo zero ($w_0 = 0$) apresentando, na base que está definida \mathbf{W} em (4.17), a seguinte forma

$$\Psi_0(x) = \begin{pmatrix} \rho_0(x) \\ \sigma_0(x) \end{pmatrix} = N_0 \begin{pmatrix} \phi'(x) \\ \varphi'(x) \end{pmatrix} = N_0 \begin{pmatrix} W_{\phi}^{(2)}(x) \\ W_{\varphi}^{(2)}(x) \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

sendo N_0 uma constante de normalização. Portanto, asseguramos a estabilidade linear das configurações BPS, pelo menos para algum vínculo entre os parâmetros. No que diz respeito a determinação explícita do espectro de autovalores (w_k), vemos que o acoplamento entre os campos estáticos resulta em geral no acoplamento das flutuações em (4.12). Contudo, podemos contornar esta dificuldade inerente a equação de autovalor ao considerarmos o operador de primeira ordem (4.17) com sua matriz original W sendo trocada por uma matriz diagonal equivalente, tornando geralmente o problema mais maleável. Sendo assim, ao considerarmos um operador equivalente de primeira ordem da forma

$$A_{\pm} = \pm \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} u_+ & 0 \\ 0 & u_- \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

resulta na expressão [21]

$$u_{\pm} = \frac{1}{2} \left(W_{\phi\phi}^{(2)} + W_{\varphi\varphi}^{(2)} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(W_{\phi\phi}^{(2)} - W_{\varphi\varphi}^{(2)} \right)^2 + \left(W_{\phi\varphi}^{(2)} \right)^2}. \quad (4.20)$$

Substituindo (4.19) em (5.25), obtemos duas equações de autovalor

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U_+(x) \right] \rho_k(x) = w_k^2 \rho_k(x), \quad (4.21)$$

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U_-(x) \right] \sigma_k(x) = w_k^2 \sigma_k(x), \quad (4.22)$$

onde os potenciais mecânico-quânticos são dados por

$$U_{\pm}(x) = u_{\pm}^2 + \frac{du_{\pm}}{dx}. \quad (4.23)$$

Vale ressaltar que, em geral, este método requer algumas simplificações devido os termos dentro da raiz em (4.20) trazerem algumas complicações para os cálculos analíticos explícitos. Sendo assim, quando aplicarmos essas construções acima nos respectivos modelos, tentaremos simplificar os termos da raiz sempre que possível de modo a permitir realizarmos uma análise analítica da estabilidade das configurações BPS para modelos de dois campos. Caso contrário, os problemas espectrais correspondentes devem ser analisados de um ponto de vista numérico.

4.2 Modelo acoplado $(\phi^4 + \varphi_l^6)$ e estabilidade

Como um primeiro exemplo, utilizaremos o método de extensão para acoplarmos a teoria ϕ^4 com a teoria φ_l^6 descritos na seção 3.1. Iniciando pela teoria ϕ^4 (3.10)

$$W_{\phi}^{(1)}(\phi) = \alpha (1 - \phi^2), \quad (4.24)$$

e considerando a função de deformação (3.12)

$$\phi = f(\varphi) = |\varphi| - 1, \quad (4.25)$$

vimos que resulta no modelo deformado φ_l^6 (3.14) da forma

$$\widetilde{W}_{\varphi}^{(1)}(\varphi) = \alpha \varphi (2 - |\varphi|). \quad (4.26)$$

Podemos agora utilizar a função de deformação (4.25) para escrever o superpotencial de ϕ^4 (4.24) nas três expressões equivalentes (4.3)

$$W_{\phi}^{(1)}(\varphi) = \alpha |\varphi| (2 - |\varphi|), \quad (4.27a)$$

$$W_{\phi}^{(1)}(\phi, \varphi) = \alpha (1 + \phi(1 - |\varphi|)), \quad (4.27b)$$

$$W_{\phi}^{(1)}(\phi) = \alpha (1 - \phi^2), \quad (4.27c)$$

de modo que na primeira expressão fizemos uma transformação $\phi \rightarrow f(\varphi)$ completa, enquanto na segunda fizemos uma transformação parcial. De forma análoga, utilizando a

função de deformação inversa $\varphi \rightarrow f^{-1}(\phi)$, escrevemos o superpotencial deformado (4.26) nas expressões equivalentes

$$\widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\varphi) = \alpha \varphi(2 - |\varphi|), \quad (4.28a)$$

$$\widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\phi, \varphi) = \alpha \varphi(1 - \phi), \quad (4.28b)$$

$$\widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\phi) = \alpha \epsilon(1 - \phi^2), \quad (4.28c)$$

onde o parâmetro ϵ é uma constante e assume o valor $\epsilon = \pm 1$ dependendo da respectiva solução φ_\pm (3.15). A fim de especificarmos as funções g , devemos agora substituir as equações (4.27) e (4.28) na condição (4.9), obtendo explicitamente

$$\begin{aligned} p_1 g_\varphi(\varphi) + p_2 g_\varphi(\phi, \varphi) - q_2 \tilde{g}_\phi(\phi, \varphi) - q_3 \tilde{g}_\phi(\phi) \\ = -\alpha b_2 \varphi - 2\alpha \epsilon a_1(1 - |\varphi|) - 2\alpha \epsilon b_3 \phi + \alpha \epsilon a_2 \phi. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Como temos uma liberdade nos parâmetros (4.7), podemos fazer $p_1 = 0$ e $q_3 = 0$, e rearranjar os termos de modo que

$$p_2 g_\varphi(\phi, \varphi) = -\alpha b_2 \varphi - 2\alpha \epsilon b_3 \phi, \quad (4.30)$$

$$q_2 \tilde{g}_\phi(\phi, \varphi) = 2\alpha \epsilon a_1(1 - |\varphi|) - \alpha \epsilon a_2 \phi, \quad (4.31)$$

resultando em $p_3 = -p_2$, $q_1 = -q_2$, e após integrações simples, nas seguintes expressões

$$g(\phi, \varphi) = -\frac{\alpha}{p_2} \left(\frac{b_2}{2} \varphi^2 + 2b_3 \phi |\varphi| \right), \quad (4.32a)$$

$$\tilde{g}(\phi, \varphi) = \frac{\epsilon \alpha}{q_2} \left(2a_1 \phi(1 - |\varphi|) - \frac{a_2}{2} \phi^2 \right), \quad (4.32b)$$

em que denotamos $|\varphi| = \epsilon \varphi$. Além disso, podemos usar a função deformação, e sua inversa, para escrever

$$p_3 g(\phi) = \frac{\alpha b_2}{2} (1 + \phi)^2 + 2\alpha b_3 \phi(1 + \phi), \quad (4.33a)$$

$$q_1 \tilde{g}(\varphi) = \alpha \epsilon \left(2a_1 + \frac{a_2}{2} \right) (1 - |\varphi|)^2. \quad (4.33b)$$

Com as funções g especificadas acima, podemos definir agora o ansatz (4.5) e (4.6), obtendo respectivamente

$$\begin{aligned} W_\phi^{(2)}(\phi, \varphi) = \alpha \left[a_1 |\varphi|(2 - |\varphi|) - \frac{b_2}{2} \varphi^2 + a_2 (1 + \phi(1 - |\varphi|)) - 2b_3 \phi |\varphi| + a_3 (1 - \phi^2) \right. \\ \left. + \frac{b_2}{2} (1 + \phi)^2 + 2b_3 \phi(1 + \phi) \right], \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} W_\varphi^{(2)}(\phi, \varphi) = \alpha \left[b_1 \varphi(2 - |\varphi|) + \epsilon \left(2a_1 + \frac{a_2}{2} \right) (1 - |\varphi|)^2 + b_2 \varphi(1 - \phi) \right. \\ \left. + 2a_1 \epsilon \phi(1 - |\varphi|) - \epsilon \left(b_3 + \frac{a_2}{2} \right) \phi^2 + \epsilon b_3 \right], \end{aligned} \quad (4.35)$$

que por uma integração simples resulta em

$$\begin{aligned}
W^{(2)}(\phi, \varphi) = & \alpha \left[\frac{1}{2} (a - b + c + 1) |\varphi| - \frac{1}{2} (a + c - 1) \varphi^2 + \frac{1}{6} (a + b + c - 1) |\varphi| \varphi^2 \right. \\
& + a \phi |\varphi| - \frac{1}{2} (a + b) \phi \varphi^2 + \frac{1}{2} (a + b - c - 1) \phi^2 |\varphi| + \frac{1}{2} (2 - a + b) \phi \\
& \left. + \frac{1}{2} (1 + c - a) \phi^2 - \frac{1}{6} (a + b - 2c) \phi^3 - \frac{1}{6} (a - 2b + c - 1) \right], \quad (4.36)
\end{aligned}$$

para os parâmetros renomeados $a \equiv 2a_1$, $b \equiv b_2$ e $c \equiv 2a_1 + a_2 - b_2 - 2b_1 + 1$. Note que o modelo acima acopla o campo ϕ com φ , mostrando assim que o método de extensão gera de fato o modelo $(\phi^4 + \varphi_l^6)$. Além disso, podemos verificar diretamente que as configurações

$$\phi(x) = \tanh(\alpha x) \quad \text{e} \quad \varphi_{\pm}(x) = \pm(1 + \tanh(\alpha x)), \quad (4.37)$$

são as respectivas soluções da equação de primeira ordem para dois campos BPS (4.1) quando $W_{\phi}^{(2)}$ e $W_{\varphi}^{(2)}$ são definidos pelas expressões (4.34) e (4.35). Este modelo contém três mínimos degenerados, nos valores $m_1 = (-1, 0)$, $m_2 = (1, 2)$, e $m_3 = (1, -2)$, sendo dois deles setores BPS. A saber, o setor conectando o mínimo m_1 com m_2 e o setor que conecta m_1 com m_3 , onde pela eq.(2.13) vemos que os dois setores apresentam a seguinte energia $E_{BPS} = 8\alpha/3$.

Existem vários outros setores topológicos que aparecem dependendo da escolha nos valores dos parâmetros. Por exemplo, para $a = b = 0$ e $c = -1$, recuperamos o setor BPS associado ao modelo ϕ^4 , conectando os dois mínimos $(\pm 1, 0)$, com energia $E_{BPS} = 4\alpha/3$. Por outro lado, também podemos verificar que a configuração trivial $\phi = 0$ não pertence ao espaço dos mínimos deste potencial. Por fim, teremos que para os valores $a = c = 1$ e $b = 0$, o superpotencial $W^{(2)}(\phi, \varphi)$ torna-se uma função harmônica dos campos, isto é $W_{\phi\varphi}^{(2)} = W_{\varphi\phi}^{(2)}$, e conseqüentemente toda solução será solução BPS [45, 46].

Estudaremos agora a estabilidade do modelo estendido $(\phi^4 + \varphi_l^6)$. Sendo assim devemos considerar o superpotencial (4.36) e os estados BPS (4.37) na expressão (4.20), obtendo neste caso a expressão

$$u_{\pm} = b + (c - 1) \tanh(x) \pm \sqrt{\left(b + (1 + c) \tanh(x)\right)^2}, \quad (4.38)$$

onde consideramos $\alpha = 1$. A fim de realizar um estudo analítico da estabilidade, eliminaremos a raiz assumindo a condição

$$b \geq |1 + c|, \quad (4.39)$$

de modo que os potenciais mecânico-quânticos (4.23) correspondem neste caso as expressões (ver figura 1)

$$U_+(x) = 4b^2 + 4c^2 + 8bc \tanh(x) - 2c(2c - 1) \operatorname{sech}^2(x), \quad (4.40)$$

$$U_-(x) = 4 - 6 \operatorname{sech}^2(x). \quad (4.41)$$

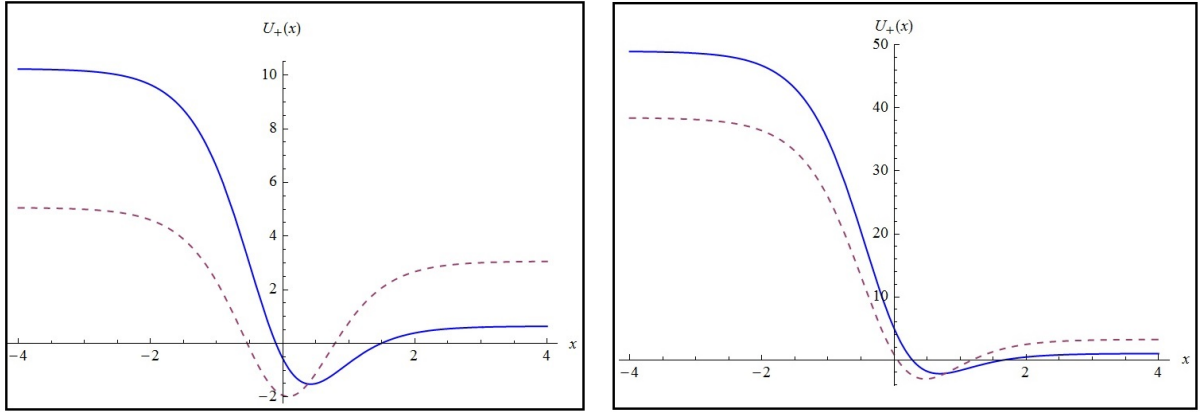


Figura 1 – Potencial mecânico-quântico $U_+(x)$ associado ao modelo estendido $(\phi^4 + \varphi_l^6)$ para diferentes valores dos parâmetros. Na esquerda, traçamos o potencial com $c = -1$, e $b = 0.6$ (linha sólida), e $b = 0.125$ (linha tracejada). Na direita, traçamos o potencial com $c = -2$, e $b = 1.5$ (linha sólida), e $b = 1.1$ (linha tracejada).

Desta forma podemos observar que ambos apresentam a forma do potencial Rosen-Morse II [39] (ver apêndice A). Para o potencial $U_+(x)$ (4.40) vemos que os parâmetros de Rosen-Morse II são

$$A = -2c, \quad B = 4bc, \quad (4.42)$$

onde pela condição de estabilidade (A.3) devemos ter

$$c < 0, \quad |b| < |c|, \quad 0 \leq k < A - \sqrt{4|b||c|}, \quad (4.43)$$

sendo k o número de estados ligados (de modo que $k \in \mathbb{N}$). Devemos agora escolher explicitamente alguns valores para os parâmetros b e c que respeitem as condições descritas acima. Por exemplo, perceba que se escolhermos $b = 0$ devemos ter pela condição (4.39) que $c = -1$, resultando em

$$U_+(x) = U_-(x) = 4 - 6 \operatorname{sech}^2(x), \quad (4.44)$$

de modo que ambos potenciais são iguais e a estabilidade é garantida. Agora, se $b < 0$ a condição (4.39) não pode ser satisfeita, impedindo a continuação do estudo da estabilidade neste caso, pelo menos analiticamente. Para finalizar, quando consideramos $b > 0$ vemos que das condições (4.39) e (4.43), encontramos a condição

$$|1 + c| \leq b < |c|, \quad (4.45)$$

que, por consistência, exige $c < -1/2$. Além disso, analisando os possíveis valores de k , vemos que no intervalo $-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < c < -\frac{1}{2}$, teremos somente um estado $k = 0$. Todavia, se agora considerarmos os valores em que $c \leq -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, podemos ter as

seguintes possibilidades

$$k = \begin{cases} 0, & \text{se } \frac{1}{|c|} \left(c + \frac{1}{2}\right)^2 \leq b < |c|, \\ 0 \text{ and } 1, & \text{se } |1 + c| \leq b < \frac{1}{|c|} \left(c + \frac{1}{2}\right)^2. \end{cases} \quad (4.46)$$

Podemos também perceber que o potencial $U_+(x)$ apresentará autovalores comuns ao do potencial $U_-(x)$, isto é $E_0 = 0$ e $E_1 = 3$, somente se

$$b = \sqrt{\frac{(1+c)(1+2c)^2}{(1+4c)}}, \quad \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < c < -1. \quad (4.47)$$

Na tabela 1, escolhemos alguns valores particulares para os parâmetros a fim de ilustrar nossos resultados. Para todos esses casos, a estabilidade das soluções está garantida.

c	b	k	$E_k = \omega_k^2$
-1	0.6	0	0
-1	0.125	0	0
		1	2.81
-2	1.5	0	0
-2	1.1	0	0
		1	3.24

Tabela 1 – Número de estados ligados e seus autovalores para diferentes valores dos parâmetros b e c .

4.3 Modelo acoplado $(\phi^4 + \text{sG})$ e estabilidade

Como segundo exemplo, vamos acoplar a teoria ϕ^4 com a teoria sG descritos na seção 3.2. Sendo assim, partindo do superpotencial ϕ^4 (3.10) e considerando a seguinte função de deformação (3.16)

$$\phi = f(\chi) = \sin(\beta \chi), \quad (4.48)$$

obtemos o superpotencial sG (3.18)

$$\widetilde{W}_\chi^{(1)}(\chi) = \frac{\alpha}{\beta} \cos(\beta \chi). \quad (4.49)$$

Pela função de deformação (4.48) iniciamos o método de extensão escrevendo o superpotencial ϕ^4 nas seguintes expressões equivalentes

$$W_\phi^{(1)}(\phi) = \alpha(1 - \phi^2), \quad (4.50a)$$

$$W_\phi^{(1)}(\chi) = \alpha \cos^2(\beta \chi), \quad (4.50b)$$

$$W_\phi^{(1)}(\phi, \chi) = \alpha(1 - \phi \sin(\beta \chi)), \quad (4.50c)$$

e de forma análoga podemos escrever o superpotencial sG como segue

$$\widetilde{W}_\chi^{(1)}(\chi) = \frac{\alpha}{\beta} \cos(\beta \chi), \quad (4.51a)$$

$$\widetilde{W}_\chi^{(1)}(\phi) = \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{1 - \phi^2}, \quad (4.51b)$$

$$\widetilde{W}_\chi^{(1)}(\phi, \chi) = \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{1 - \phi \sin(\beta \chi)}. \quad (4.51c)$$

Como temos uma certa liberdade na escolha dos parâmetros (4.7) e no arranjo dos termos, será conveniente fazer $b_2 = b_3 = 0$, a fim de eliminarmos os últimos dois termos equivalentes de $\widetilde{W}_\chi^{(1)}$ que apresentam funcionais com raiz quadrada. Sem perda de generalidade, escolhemos ainda fazer $p_1 = p_2 = q_3 = 0$, de modo a fixar $b_1 = 1$, $p_3 = 0$ e $q_2 = -q_1$. Portanto, podemos especificar as funções g substituindo as equações (4.50) e (4.51) na condição (4.9) junto com os parâmetros, obtendo assim

$$q_2 \tilde{g}_\phi(\phi, \chi) = -\alpha \beta \left(2a_1 \sin(\beta \chi) + a_2 \phi \right) \cos(\beta \chi). \quad (4.52)$$

Por uma integração simples, temos

$$\tilde{g}(\phi, \chi) = -\frac{\alpha \beta}{q_2} \left(2a_1 \phi \sin(\beta \chi) + \frac{a_2}{2} \phi^2 \right) \cos(\beta \chi), \quad (4.53)$$

assim como

$$\tilde{g}(\chi) = \frac{\alpha \beta}{q_1} \left(2a_1 + \frac{a_2}{2} \right) \sin^2(\beta \chi) \cos(\beta \chi), \quad (4.54)$$

ao utilizarmos a função de deformação. Substituindo os resultados acima no ansatz (4.5) e (4.6), obtemos respectivamente

$$W_\phi^{(2)}(\phi, \chi) = \alpha \left[a_1 \cos^2(\beta \chi) + a_2 (1 - \phi \sin(\beta \chi)) + (1 - a_1 - a_2) (1 - \phi^2) \right], \quad (4.55)$$

$$W_\chi^{(2)}(\phi, \chi) = \alpha \left[\frac{1}{\beta} \cos(\beta \chi) + \beta \left(2a_1 + \frac{a_2}{2} \right) \sin^2(\beta \chi) \cos(\beta \chi) - a_1 \beta \phi \sin(2\beta \chi) - \frac{a_2 \beta}{2} \phi^2 \cos(\beta \chi) \right], \quad (4.56)$$

onde devemos realizar integrações simples para obtermos o superpotencial de dois campos da forma

$$W^{(2)}(\phi, \chi) = \alpha \left[\phi - (1 - a_1 - a_2) \frac{\phi^3}{3} - a_1 \phi \sin^2(\beta \chi) - \frac{a_2}{2} \phi^2 \sin(\beta \chi) + \frac{1}{\beta^2} \sin(\beta \chi) + \frac{1}{3} \left(2a_1 + \frac{a_2}{2} \right) \sin^3(\beta \chi) \right]. \quad (4.57)$$

Observe que agora temos acoplado o campo ϕ com χ , mostrando que o método de extensão gerou o modelo ($\phi^4 + \text{sG}$). Este modelo é uma generalização dos modelos de campos acoplados não lineares desenvolvidos recentemente em [47]. Podemos verificar diretamente que as configurações

$$\phi(x) = \tanh(\alpha x) \quad \text{e} \quad \chi(x) = \frac{1}{\beta} \arcsin(\tanh(\alpha x)), \quad (4.58)$$

são as respectivas soluções BPS da equação de primeira ordem (4.1) quando as derivadas parciais forem definidas por (4.55) e (4.56). Este modelo BPS conecta os mínimos degenerados $m_1 = \left(-1, -\frac{\pi}{2\beta}\right)$ com $m_2 = \left(1, \frac{\pi}{2\beta}\right)$, com energia $E_{BPS} = 2\alpha \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\beta^2}\right)$. A estabilidade do modelo $(\phi^4 + \text{sG})$, consiste agora em substituir o superpotencial (4.57) e os estados BPS (4.58) na expressão (4.20). A fim de simplificar, escolhemos fazer $a_2 = -2a_1$ e $\alpha = 1$ de modo que

$$u_{\pm} = -\frac{3}{2} \tanh(x) \pm \frac{1}{2} \text{sgn}(x) \tanh(x), \quad (4.59)$$

onde $\text{sgn}(x)$ é a função sinal. Da equação acima, obtemos os seguintes potenciais mecânico quântico (4.23)

$$U_{\pm}(x) = \frac{1}{2}(5 \mp 3 \text{sgn}(x)) - 2(2 \mp \text{sgn}(x)) \text{sech}^2(x). \quad (4.60)$$

Os potenciais acima podem também serem associados ao potencial Rosen-Morse II (A.1), sendo $B = 0$ e $\alpha = 1$. Contudo, devido à função $\text{sgn}(x)$, podemos ver da figura 2 que eles agora serão descontínuos de modo a requerer uma atenção mais especial no que diz respeito ao nosso objetivo de determinar os autovalores. Com esta finalidade, consideremos a equação de Schrödinger

$$\left[-\partial_x^2 - E + U(x)\right] \Psi(x) = 0, \quad (4.61)$$

assumindo $\hbar = 2m = 1$ e que as energias discretas E são definidas pelo seguinte potencial composto e descontínuo

$$U(x) = U^{(L)}(x)\theta(-x) + U^{(R)}(x)\theta(x) = \sum_{\kappa} \theta(\kappa x) U^{(\kappa)}(x), \quad (4.62)$$

onde $\theta(x)$ denota a função degrau unitário, $\kappa = \{L, R\}$ de modo que $\theta(Lx) \equiv \theta(-x)$ e $\theta(Rx) \equiv \theta(x)$, e $U^{(L/R)}(x)$ os dois correspondentes potenciais contínuos e simétricos, os quais admitimos que os correspondentes níveis de energia e funções de onda de todos os estados estacionários são conhecidos. Uma vez que as funções de onda não podem ser qualquer função, devemos pressupor que $\Psi(x)$ e $\partial_x \Psi(x) \equiv \Psi'(x)$ sejam contínuos em $x = 0$, além de $\Psi(x)$ ser nulo nos extremos ($\Psi(\pm\infty) = 0$). Desta forma, podemos seguir os procedimentos introduzidos em [48, 49] a fim de determinarmos os níveis de energia no caso de potenciais compostos, fazendo uso do chamado teorema de fatorização da função de Green [50]. Iniciemos considerando as funções de Green para os potenciais $U^{(L/R)}(x)$

$$\left[-\partial_x^2 - E + U^{(\kappa)}(x)\right] G^{(\kappa)}(x, x'; E) = \delta(x - x'), \quad (4.63)$$

para $\kappa = \{L, R\}$, de modo que $G^{(L/R)}(x, x'; E)$ são as funções de Green associadas aos respectivos potenciais $U^{(L)}(x)$ e $U^{(R)}(x)$. A função de Green deve ser limitada nos extremos $G^{(\kappa)}(x = \pm\infty, x'; E) = 0$, para ambos os casos $k = \{L, R\}$, enquanto a diferencial $\partial_x G^{(\kappa)}(x, x'; E)$ apresenta descontinuidade em $x = x' = 0$, de forma que

$$\partial_x G^{(\kappa)}(0, 0^+; E) - \partial_x G^{(\kappa)}(0, 0^-; E) = 1, \quad (4.64)$$

$$\partial_x G^{(\kappa)}(0, 0^+; E) + \partial_x G^{(\kappa)}(0, 0^-; E) = 0, \quad (4.65)$$

para os limites $x' \rightarrow 0^\pm$. A eq.(4.64) é uma identidade geral, enquanto a expressão (4.65) é uma consequência da simetria no ponto $x = 0$, onde será útil para simplificarmos as análises. Multiplicando a eq.(4.63) por $\Psi(x)$ pela esquerda e a eq.(4.61) por $G^{(\kappa)}(x, x'; E)$, obteremos ao subtrair os resultados e considerar a relação

$$(U(x) - U^{(\kappa)}) \Psi(x) G^{(\kappa)}(x, x'; E) = -\kappa \theta(-\kappa x) \Delta U G^{(\kappa)}(x, x'; E) \Psi(x), \quad (4.66)$$

onde denotamos $\Delta U = U^{(R)}(x) - U^{(L)}(x)$, as seguintes expressões

$$\begin{aligned} \Psi(x) \partial_x^2 G^{(\kappa)}(x, x'; E) - G^{(\kappa)}(x, x'; E) \Psi''(x) - \kappa \theta(-\kappa x) \Delta U G^{(\kappa)}(x, x'; E) \Psi(x) \\ = -\Psi(x) \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (4.67)$$

para $\kappa = \{L, R\}$. Integrando a eq.(4.67) de $(0, \infty)$, e realizando uma integração por partes assumindo $\Psi(x = \pm\infty) = 0$ e $G^{(\kappa)}(x = \pm\infty, x'; E) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} G^{(\kappa)}(0, x'; E) \Psi'(0) - \Psi(0) G^{(\kappa)}(0, x'; E) - \kappa \int_0^\infty dx \theta(-\kappa x) \Delta U G^{(\kappa)}(x, x'; E) \Psi(x) \\ = -\Psi(x') \theta(x'), \end{aligned} \quad (4.68)$$

para $\kappa = \{L, R\}$. Analogamente, podemos agora integrar de $(-\infty, 0)$ para obter

$$\begin{aligned} \Psi(0) \partial_x G^{(\kappa)}(0, x'; E) - G^{(\kappa)}(0, x'; E) \Psi'(0) - \kappa \int_{-\infty}^0 dx \theta(-\kappa x) \Delta U G^{(\kappa)}(x, x'; E) \Psi(x) \\ = -\Psi(x') \theta(x'). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Deste modo, podemos considerar $\kappa = \{R\}$ na eq.(4.68) e $\kappa = \{L\}$ na eq.(4.69) para descrever a seguinte relação compactada

$$G^{(\kappa)}(0, x'; E) \Psi'(0) - \Psi(0) \partial_x G^{(\kappa)}(0, x'; E) = -\kappa \Psi(x') \theta(\kappa x'), \quad (4.70)$$

que ao assumirmos os limites $x \rightarrow 0^\pm$, teremos

$$\kappa \Psi(0) = \Psi(0) \partial_x G^{(\kappa)}(0, 0^\kappa; E) - \Psi'(x) G^{(\kappa)}(0, 0; E), \quad (4.71)$$

$$0 = \Psi(0) \partial_x G^{(\kappa)}(0, 0^{-\kappa}; E) - \Psi'(0) G^{(\kappa)}(0, 0; E). \quad (4.72)$$

Somando as duas expressões acima e usando a relação (4.65), encontramos

$$\Psi(0) = -2\Psi'(0) G^{(R)}(0, 0; E), \quad (4.73)$$

$$-\Psi(0) = -2\Psi'(0) G^{(L)}(0, 0; E), \quad (4.74)$$

de modo que podemos escrever

$$\left[G^{(R)}(0, 0; E) + G^{(L)}(0, 0; E) \right] \Psi'(0) = 0. \quad (4.75)$$

Para o caso $\Psi'(0) = 0$ teremos que $G^{(\kappa)}(0, 0; E)$, para $\kappa = \{L, R\}$, apresentará um polo em $E = E_0$, uma vez que estamos assumindo possuir estados ligados. Assim E_0 será um

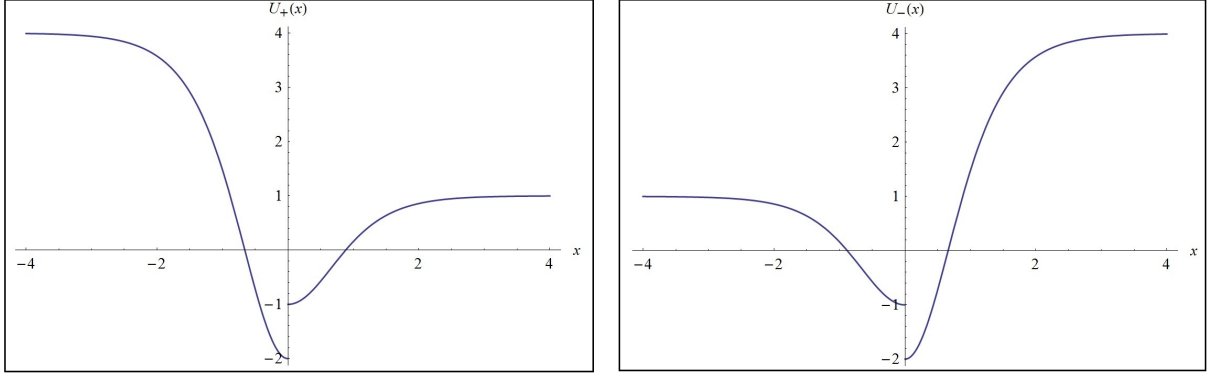


Figura 2 – Potenciais mecânico-quânticos descontínuos $U_{\pm}(x)$ associados ao modelo estendido $(\phi^4 + \text{sG})$, para $\alpha = 1$ e $a_2 = -2a_1$.

autoestado comum para ambos potenciais $U^{(L)}$ e $U^{(R)}$. Todavia, para $\Psi'(0) \neq 0$, obtemos a seguinte equação transcendental

$$G^{(L)}(0, 0; E) + G^{(R)}(0, 0; E) = 0, \quad (4.76)$$

cujos autovalores E permitidos pelo potencial composto U são todos os valores que satisfazem a equação acima (4.76). Sendo assim, devemos agora prosseguir na determinação da função de Green associada aos potenciais $U^{(L)}$ e $U^{(R)}$, isto é, devemos determinar a função de Green associada ao potencial Rosen-Morse II [51] com $B = 0$ e $\alpha = 1$. Neste cenário, descrevemos a função de Green associada ao potencial Rosen-Morse II $(G^{(RM)}(x, x'; E))$ por

$$[-\partial_x^2 + A' \operatorname{sech}^2(x) - E'] G^{(RM)}(x, x'; E) = -i\delta(x - x'), \quad (4.77)$$

onde consideramos $\hbar = 2m = 1$, $A' = -A(A+1)$, e $E' = E - A^2$ com A sendo o parâmetro dado em (A.1). A fim de determinarmos $G^{(RM)}(x, x'; E)$, consideremos a seguinte equação de Green para l e m inteiros

$$[-\partial_x^2 - l(l+1) \operatorname{sech}^2(x) + m^2] \left(\tanh(x) | \tanh(x_a) \right)_{m,l} = -i\delta(x - x_a), \quad (4.78)$$

cuja solução é bem conhecida

$$\left(\tanh(x_b) | \tanh(x_a) \right)_{m,l} = -\frac{i}{2} \Gamma(m-l) \Gamma(l+m+1) \times \left[\theta(x_b - x_a) P_l^{-m}(\tanh(x_b)) P_l^{-m}(-\tanh(x_a)) + (x_b \leftrightarrow x_a) \right], \quad (4.79)$$

onde $\theta(x)$ é a função degrau unitária, $\Gamma = \Gamma(m, L)$ a função gama, e $P_l^m(x)$ são os polinômios de Legendre associados. Observe que as funções acima estão descritas em termos dos parâmetros discretos m e l . Todavia, uma vez que a função gama e os polinômios de Legendre são bem definidos no domínio complexo, podemos estender o domínio das variáveis discretas para o contínuo, de modo que

$$\Gamma = \Gamma(y), \quad (4.80)$$

$$P_a^b(y) = \frac{1}{\Gamma(1-b)} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\frac{b}{2}} F\left(-a, 1+a; 1-b; \frac{1-y}{2}\right), \quad (4.81)$$

onde aqui consideramos a, b , e y variáveis reais, e $F(a, b; c; y)$ a função hipergeométrica. Deste modo ao compararmos a eq.(4.77) com a eq.(4.78), vemos que

$$l(A) = A, \quad m(A, E) = \sqrt{A^2 - E}. \quad (4.82)$$

Por conseguinte, podemos indiretamente derivar a função de Green $G^{(RM)}(x, x'; E)$ substituindo as relações acima (4.82) na eq.(4.79), de modo que

$$G^{(RM)}(x, x'; E) = -\frac{i}{2} \Gamma(\sqrt{A^2 - E} - A) \Gamma(1 + A + \sqrt{A^2 - E}) \times \left[\theta(x - x') P_A^{-\sqrt{A^2 - E}}(\tanh(x)) P_A^{-\sqrt{A^2 - E}}(-\tanh(x')) + (x \leftrightarrow x') \right], \quad (4.83)$$

que ao considerarmos o caso particular $x = x' = 0$, obtemos

$$G^{(RM)}(0, 0; E) = -\frac{i}{2} \frac{\Gamma(\sqrt{A^2 - E} - A)}{\Gamma^2(1 + \sqrt{A^2 - E})} \times \frac{\Gamma(1 + A + \sqrt{A^2 - E}) \Gamma^2\left(\frac{1 + \sqrt{A^2 - E}}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{2 + \sqrt{A^2 - E}}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1 - A + \sqrt{A^2 - E}}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{2 + A + \sqrt{A^2 - E}}{2}\right)}. \quad (4.84)$$

O espectro discreto de autovalores satisfaz a relação

$$\lim_{E \rightarrow E_k} (E - E_k) G(x, x'; E) = \frac{i(-1)^k}{k!} \sqrt{A^2 - E_k} \Gamma(1 + 2A - k) \times \left[\theta(x - x') P_A^{-\sqrt{A^2 - E}}(\tanh(x)) P_A^{-\sqrt{A^2 - E}}(-\tanh(x')) + (x \leftrightarrow x') \right]. \quad (4.85)$$

Retornando para o nosso caso em particular, podemos decompor o potencial $U_+(x)$ (4.60) como segue

$$U_+^{(L)} = 4 - 6 \operatorname{sech}^2(x), \quad U_+^{(R)} = 1 - 2 \operatorname{sech}^2(x), \quad (4.86)$$

de modo que

$$G_+^{(L)}(0, 0; E) = \frac{i}{2} \frac{(3 - E)}{E \sqrt{4 - E}}, \quad G_+^{(R)}(0, 0; E) = \frac{i}{2} \frac{\sqrt{1 - E}}{E}. \quad (4.87)$$

Substituindo a equação acima (4.87) na equação transcendental (4.76), permite escrever

$$E \sqrt{1 - E} \sqrt{4 - E} + E(3 - E) = 0, \quad (4.88)$$

sendo assim permitido somente o autovalor $E = 0$ para o potencial descontínuo $U_+(x)$. Pela eq.(4.85), podemos ver que o autovalor da energia zero é comum aos potenciais decompostos, o que é consistente com o fato de $E = 0$ ser um pólo da função de Green (4.83) para ambos os casos. Uma equação transcendental idêntica será obtida para o potencial $U_-(x)$, uma vez que $U_-^{(L/R)} = U_+^{(R/L)}$, que novamente permitirá apenas o autovalor de

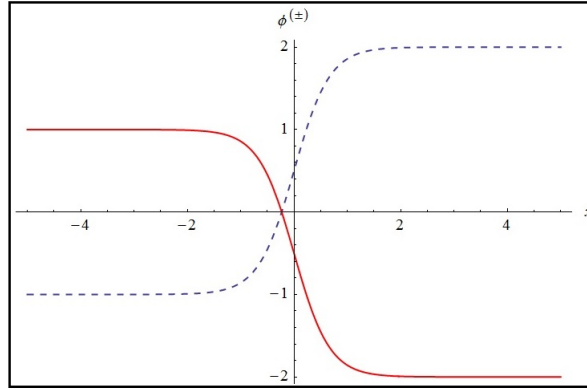


Figura 3 – A linha sólida (vermelha) é o gráfico da solução $\phi^{(+)}$ para os valores de parâmetros $a_1 = 3$ e $a_2 = -1$. A linha tracejada (azul) é o gráfico da solução $\phi^{(-)}$ para os valores de parâmetro $a_1 = -1$ e $a_2 = 1$, com $\alpha = 1$.

energia zero. Esses resultados nos levam a garantir a estabilidade para as soluções BPS do modelo estendido ($\phi^4 + \text{sG}$), pelo menos para nossa escolha particular de parâmetros.

Podemos constatar que o superpotencial (4.57) gera também os mínimos degenerados $(-1, (2k - \frac{1}{2})\frac{\pi}{\beta})$, e $(1, (2k + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\beta})$, sendo $k \in \mathbb{Z}$. De modo que podemos destacar a existência de outras soluções BPS, onde um exemplo em particular são

$$\phi^{(-)}(x) = \frac{(1 - a_1) - e^{(-2(1-a_1)+a_2)\alpha x}}{((1 - a_1) - a_2) + e^{(-2(1-a_1)+a_2)\alpha x}}, \quad \chi^{(-)}(x) = \frac{\pi}{\beta} \left(2k - \frac{1}{2} \right), \quad (4.89)$$

quando os parâmetros a_1 e a_2 satisfazem as restrições $a_2 < (1 - a_1)$, e $a_2 \neq 2(1 - a_1)$, pois do contrário teremos que $\phi^-(x)$ torna-se uma exponencial ao violarmos a primeira restrição, e uma constante na violação da segunda. Pela escolha $k = 0$, temos que estas soluções conectam o mínimo m_1 a um novo mínimo $m_3 = (\frac{1-a_1}{1-a_1-a_2}, -\frac{\pi}{2\beta})$. A energia BPS sendo agora da forma

$$E_{BPS} = \frac{\alpha}{6} \frac{|2(1 - a_1) - a_2|^3}{(1 - a_1 - a_2)^2}. \quad (4.90)$$

Uma outra solução possível é dada pelas seguintes expressões

$$\phi^{(+)}(x) = \frac{(1 - a_1) + e^{(2(1-a_1)-a_2)\alpha x}}{(a_2 - (1 - a_1)) + e^{(2(1-a_1)-a_2)\alpha x}}, \quad \chi^{(+)}(x) = \frac{\pi}{\beta} \left(2k + \frac{1}{2} \right), \quad (4.91)$$

quando $a_2 > (1 - a_1)$, e novamente $a_2 \neq 2(1 - a_1)$. Para $k = 0$, as soluções agora conectam o mínimo m_2 para o novo mínimo $m_4 = (-\frac{1-a_1}{1-a_1-a_2}, \frac{\pi}{2\beta})$. As novas soluções em (4.91) geram a mesma energia BPS que as soluções em (4.89), dada na eq.(4.90). Plotamos ambas soluções $\phi^\pm(x)$ na figura 3.

4.4 Modelo acoplado (sG + E) e estabilidade

Com o método da extensão objetivamos acoplar agora a teoria sG com o modelo-E, onde ambos estão representados na seção 3.3 juntamente com a função de deformação que

relaciona as teorias. Tendo o superpotencial do modelo-E (3.21)

$$W_\eta^{(1)}(\eta) = \alpha (1 + \eta) \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right), \quad (4.92)$$

e a seguinte função de deformação (3.23)

$$\eta = f(\chi) = e^{\beta\chi} - 1, \quad (4.93)$$

obtemos o superpotencial sG (3.18). Desta forma, podemos escrever as seguintes expressões equivalentes para o modelo-E

$$W_\eta^{(1)}(\eta) = \alpha(1 + \eta) \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right), \quad (4.94a)$$

$$W_\eta^{(1)}(\chi) = \alpha e^{\beta\chi} \cos(\beta\chi), \quad (4.94b)$$

$$W_\eta^{(1)}(\eta, \chi) = \alpha(1 + \eta) \cos(\beta\chi), \quad (4.94c)$$

e para o modelo sG

$$\widetilde{W}_\chi^{(1)}(\chi) = \frac{\alpha}{\beta} \cos(\beta\chi), \quad (4.95a)$$

$$\widetilde{W}_\chi^{(1)}(\eta) = \frac{\alpha}{\beta} \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right), \quad (4.95b)$$

$$\widetilde{W}_\chi^{(1)}(\eta, \chi) = \frac{2\alpha}{\beta} \left[\cos\left(\frac{\beta\chi}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (4.95c)$$

Substituindo as equações (4.94) e (4.95) na condição (4.9) com $p_1 = q_3 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} p_2 g_\chi(\eta, \chi) - q_2 \tilde{g}_\eta(\eta, \chi) &= -\alpha \beta a_1 e^{\beta\chi} (\cos(\beta\chi) - \sin(\beta\chi)) + \alpha \beta a_2 (1 + \eta) \sin(\beta\chi) \\ &\quad - \frac{\alpha}{\beta} \frac{b_2}{(1 + \eta)} \cos\left(\frac{\beta\chi}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right) \\ &\quad - \frac{\alpha}{\beta} \frac{b_3}{(1 + \eta)} \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right). \end{aligned} \quad (4.96)$$

Assim podemos agrupar os termos de modo que após uma integração simples, resulta nas seguintes funções g

$$g(\eta, \chi) = -\alpha \frac{a_1}{p_2} e^{\beta\chi} \cos(\beta\chi) - \frac{\alpha b_3}{\beta p_2} \frac{\chi}{(1 + \eta)} \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right), \quad (4.97)$$

$$\tilde{g}(\eta, \chi) = -\frac{2\alpha b_2}{\beta q_2} \cos\left(\frac{\beta\chi}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right) - \alpha \beta \frac{a_2}{q_2} \left(\eta + \frac{\eta^2}{2}\right) \sin(\beta\chi), \quad (4.98)$$

onde utilizaremos novamente a função de deformação para reescrever as expressões acima nas respectivas formas

$$g(\eta) = -\frac{\alpha a_1}{p_2} (1 + \eta) \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) - \frac{\alpha b_3}{\beta^2 p_2} \frac{\ln(1 + \eta)}{(1 + \eta)} \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right), \quad (4.99)$$

$$\tilde{g}(\chi) = -\frac{2\alpha b_2}{\beta q_2} \cos^2\left(\frac{\beta\chi}{2}\right) - \frac{\alpha \beta a_2}{2q_2} (e^{2\beta\chi} - 1) \sin(\beta\chi). \quad (4.100)$$

A partir desses resultados, retornamos no ansatz (4.5) e (4.6), obtendo

$$W_{\eta}^{(2)}(\eta, \chi) = \alpha a_2(1 + \eta) \cos(\beta \chi) + \alpha(1 - a_2)(1 + \eta) \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) + \frac{\alpha b_3}{\beta^2} \left(\frac{\ln(1 + \eta) - \beta \chi}{(1 + \eta)}\right) \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right), \quad (4.101)$$

$$W_{\chi}^{(2)}(\eta, \chi) = \frac{\alpha}{\beta}(1 - b_3) \cos(\beta \chi) + \frac{\alpha b_3}{\beta} \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) + \frac{\alpha \beta a_2}{2} (e^{2\beta \chi} - (1 + \eta)^2) \sin(\beta \chi). \quad (4.102)$$

Assim construímos o superpotencial de dois campos

$$W^{(2)}(\eta, \chi) = \frac{\alpha}{5}(1 - a_2)(1 + \eta)^2 \left[2 \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) + \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right)\right] + \frac{\alpha b_3}{\beta^2} \left[(\beta \chi - \ln(1 + \eta)) \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) + \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right)\right] + \alpha a_2 \left(\eta + \frac{\eta^2}{2}\right) \cos(\beta \chi) + \frac{\alpha a_2}{10} \left[(5 - e^{2\beta \chi}) \cos(\beta \chi) + 2e^{2\beta \chi} \sin(\beta \chi)\right] + \frac{\alpha}{\beta^2}(1 - b_3) \sin(\beta \chi), \quad (4.103)$$

para o modelo (sG + E) ao acoplarmos o campo χ com o campo η . Este superpotencial suporta as seguintes configurações BPS

$$\eta(x) = e^{\arctan(\sinh(\alpha x))} - 1 \quad \text{e} \quad \chi(x) = \frac{1}{\beta} \arctan(\sinh(\alpha x)), \quad (4.104)$$

conectando os mínimos degenerados $m_1 = (e^{-\pi/2} - 1, -\pi/2\beta)$ e $m_2 = (e^{\pi/2} - 1, \pi/2\beta)$, com energia

$$E_{BPS} = \frac{2\alpha}{5\beta^2} (5 + \beta^2 \cosh \pi). \quad (4.105)$$

Para estudar a estabilidade do modelo (sG + E), devemos agora considerar o superpotencial (4.103) e os estados BPS (4.104) na expressão (4.20), obtendo

$$u_{\pm} = \frac{\alpha}{2} \left\{ \operatorname{sech}(\alpha x) + \left(a_2 + b_3 - 2 + \frac{b_3}{\beta^2} e^{-2\arctan(\sinh(\alpha x))} + a_2 \beta^2 e^{2\arctan(\sinh(\alpha x))}\right) \tanh(\alpha x) \pm 2 \left[\left(\frac{b_3}{\beta} e^{-\arctan(\sinh(\alpha x))} + a_2 \beta e^{\arctan(\sinh(\alpha x))}\right)^2 \tanh^2(\alpha x) + \frac{e^{-4\arctan(\sinh(\alpha x))}}{4\beta^4} \left(\beta^2 e^{2\arctan(\sinh(\alpha x))} \operatorname{sech}(\alpha x) - \left(\beta^2 e^{2\arctan(\sinh(\alpha x))} - 1\right) (b_3 + a_2 \beta^2 e^{2\arctan(\sinh(\alpha x))}) \tanh(\alpha x)\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (4.106)$$

Novamente, com objetivo de realizarmos um estudo analítico do potencial mecânico quântico associado, escolhemos $a_2 = b_3 = 0$, de modo que ao substituirmos a eq.(4.106) na eq.(4.23), resulta

$$U_{+}^{(0)}(x) = \alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{sech}^2(\alpha x) - 3\alpha^2 \operatorname{sech}(\alpha x) \tanh(\alpha x), \quad (4.107)$$

$$U_{-}^{(0)}(x) = \alpha^2 - 2\alpha^2 \operatorname{sech}^2(\alpha x), \quad (4.108)$$

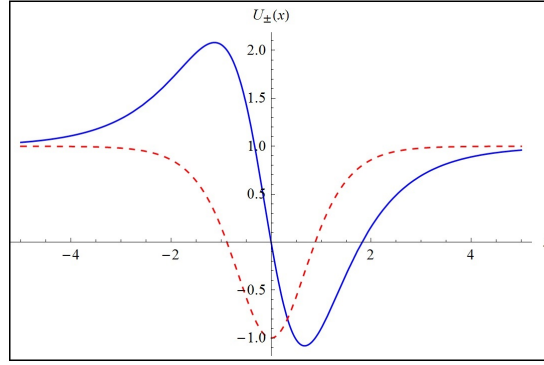


Figura 4 – Potenciais mecânico-quânticos U_+ (linha sólida) e U_- (linha tracejada) do modelo estendido (sG + E) para $a_2 = b_3 = 0$, e $\alpha = 1$.

correspondendo respectivamente nos potenciais Scarf II (A.1) e Rosen-Morse II (A.6). Todavia, esta escolha de parâmetros trivialmente desacopla os campos η e χ , como pode ser visto na figura 4.

Dada a dificuldade de analisarmos analiticamente os potenciais quânticos para um valor mais geral dos parâmetros a_2 e b_3 , partiremos então para uma análise qualitativa de aproximação dos estados ligados para algumas configurações de parâmetros. Sendo assim, o máximo que poderemos garantir aqui é que existe estabilidade para alguns valores muito pequenos dos parâmetros, ou seja, os potenciais possuem o modo zero como seu estado fundamental, e não há autovalores de energia negativa. Claro, uma análise mais precisa e geral requerirá um estudo numérico mais profundo.

Começemos considerando alguns pequenos valores dos parâmetros a_2 e b_3 , e notemos como o potencial se deforma por essas perturbações. Nas figuras 5 e 6 plotamos os potenciais para algumas configurações com $a_2 = 0$, e b_3 com alguns valores pequenos. Enquanto, nas figuras 7 e 8, plotamos configurações com $b_3 = 0$, e a_2 pequeno. Portanto, uma vez que valores nulos de a_2 e b_3 geram potenciais mecânico-quânticos exatamente solúveis desacoplados, podemos perceber que para valores muito pequenos dos parâmetros ($\lesssim 10^{-2}$), continuaremos possuindo potenciais exatamente solúveis com acoplamento fraco (ver figura 9). Permitindo assim desenvolver uma teoria de perturbação independente do tempo que determinará as correções perturbativas nos autovalores, onde consideraremos correções de primeira ordem. Primeiramente consideremos $a_2 = 0$ e $b_3 = \lambda \lesssim 10^{-2}$, obtendo o seguinte Hamiltoniano perturbado

$$H = H_0 + \lambda H_1, \quad (4.109)$$

com

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} U_+^{(0)} & 0 \\ 0 & U_-^{(0)} \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} U_+^{(1)} & 0 \\ 0 & U_-^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (4.110)$$

onde $U_{\pm}^{(0)}$ são os potenciais exatamente solúveis (4.107) e (4.108), enquanto $U_{\pm}^{(1)}$ são as correções de primeira ordem, que neste caso são dadas por

$$U_{+}^{(1)} = -\frac{\alpha^2}{\beta^2} e^{-2\arctan(\sinh(\alpha x))} (2 - 3 \operatorname{sech}^2(\alpha x)), \quad (4.111)$$

$$U_{-}^{(1)} = -\alpha^2 (2 - 3 \operatorname{sech}^2(\alpha x)). \quad (4.112)$$

No tratamento perturbativo, o espectro de autovalor E_k será expandido em série de potência λ , da seguinte forma

$$E_k = E_k^{(0)} + \lambda E_k^{(1)} + \dots, \quad (4.113)$$

onde $E_k^{(0)}$ são os autovalores não perturbados, representados neste caso respectivamente por (A.2) e (A.7). Enquanto $E_k^{(1)}$ são as correções de primeira ordem determinadas pela expressão

$$E_k^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} [\rho_k^*(x) U_{+}^{(1)}(x) \rho_k(x) + \sigma_k^*(x) U_{-}^{(1)}(x) \sigma_k(x)] dx, \quad (4.114)$$

onde ρ_k e σ_k são as autofunções associadas aos potenciais Scarf II (A.8) e Rosen-Morse II (A.4), respectivamente. Sendo assim, ao compararmos as formas explícitas das eqs.(4.107) e (4.108) com as dos potenciais exatamente solúveis, teremos $A = \alpha$ em ambos os casos, enquanto $B = -\alpha$ para $U_{+}^{(0)}$, e $B = \alpha$ para $U_{-}^{(0)}$. Após os cálculos, concluímos que ambos possuirão somente o estado fundamental $k = 0$, o modo zero, com

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \rho_0(x) \\ \sigma_0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sech}(\alpha x) e^{\arctan(\sinh(\alpha x))} \\ \operatorname{sech}(\alpha x) \end{pmatrix}, \quad (4.115)$$

e energia $E_0^{(0)} = 0$. Agora, usando explicitamente a eq.(4.114) vemos que a correção perturbativa para este cenário será nula ($E_0^{(1)} = 0$). Portanto, até primeira ordem de correção, vemos que os potenciais perturbados apresentarão somente o estado fundamental com autovalor nulo ($E_0 = 0$).

Consideremos agora o caso $b_3 = 0$ e $a_2 = \lambda \lesssim 10^{-2}$. De modo similar, encontraremos em correções de primeira ordem $U_{\pm}^{(1)}$

$$U_{+}^{(1)} = -\alpha^2 (2 - 3 \operatorname{sech}^2(\alpha x) - 2 \operatorname{sech}(\alpha x) \tanh(\alpha x)), \quad (4.116)$$

$$U_{-}^{(1)} = -\alpha^2 \beta^2 e^{2\arctan(\sinh(\alpha x))} (2 - 3 \operatorname{sech}^2(\alpha x) - 2 \operatorname{sech}(\alpha x) \tanh(\alpha x)). \quad (4.117)$$

Determinando novamente os parâmetros e as autofunções, e retornamos na eq.(4.114), descobrimos que a correção de primeira ordem para o modo zero também desaparece. Portanto, podemos garantir que em correções de primeira ordem o regime de acoplamento fraco, para $a_2 \lesssim 10^{-2}$ e $b_3 \lesssim 10^{-2}$, descreve um modelo estendido (sG+E) estável. Como já mencionamos, valores mais gerais dos parâmetros de acoplamento, requerirá uma análise numérica mais completa do problema espectral.

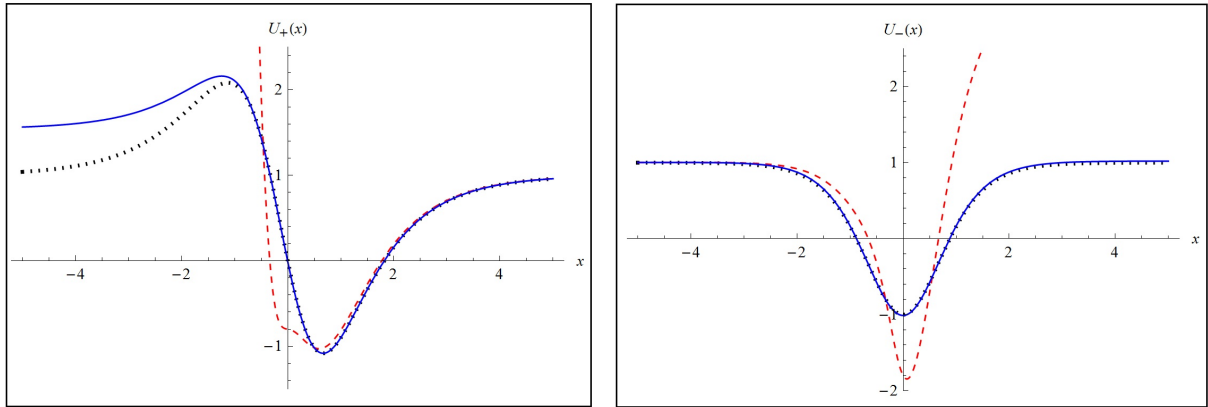


Figura 5 – Potenciais mecânico-quanticos U_+ (na esquerda) e U_- (na direita) para $a_2 = 0$ e $\alpha = 1$. Para ambos, plotamos os valores $b_3 = 0$, $b_3 = -0.01$, e $b_3 = -0.8$, representado com linhas pontilhadas, sólidas e tracejadas, respectivamente.

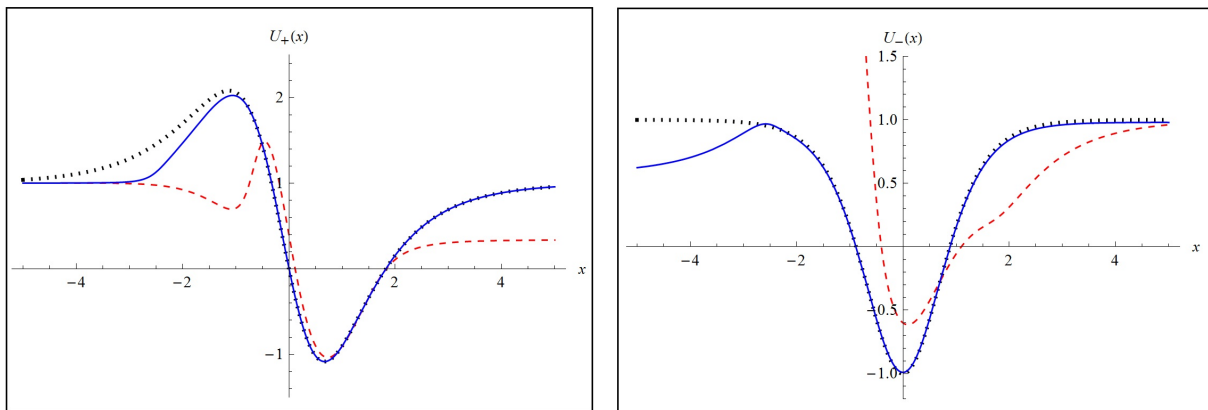


Figura 6 – Potenciais mecânico-quanticos U_+ (na esquerda) e U_- (na direita) para $a_2 = 0$ and $\alpha = 1$. Para ambos, plotamos os valores $b_3 = 0$, $b_3 = 0.01$, e $b_3 = 0.4$, representado com linhas pontilhadas, sólidas e tracejadas, respectivamente.

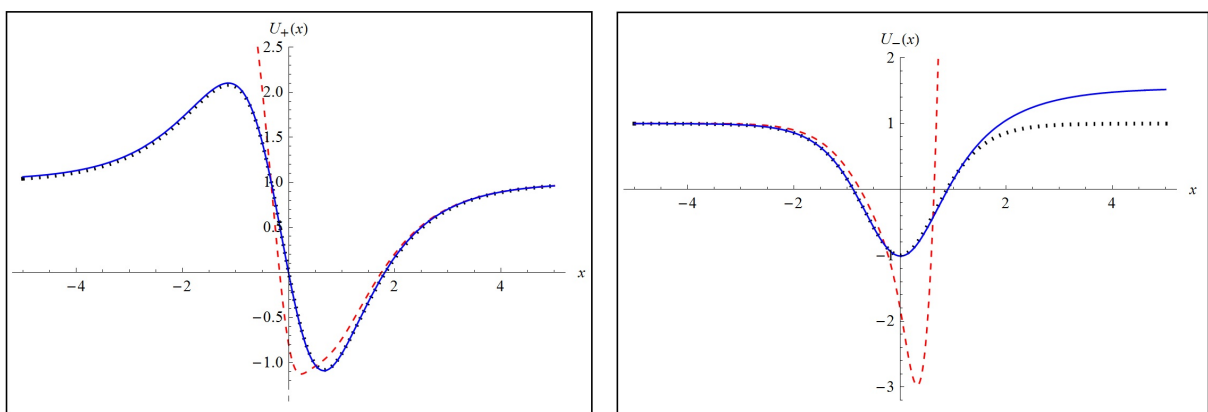


Figura 7 – Potenciais mecânico-quanticos U_+ (na esquerda) e U_- (na direita) para $b_3 = 0$ e $\alpha = 1$. Para ambos, plotamos os valores $a_2 = 0$, $a_2 = -0.01$, and $a_2 = -0.8$, representado com linhas pontilhadas, sólidas e tracejadas, respectivamente.

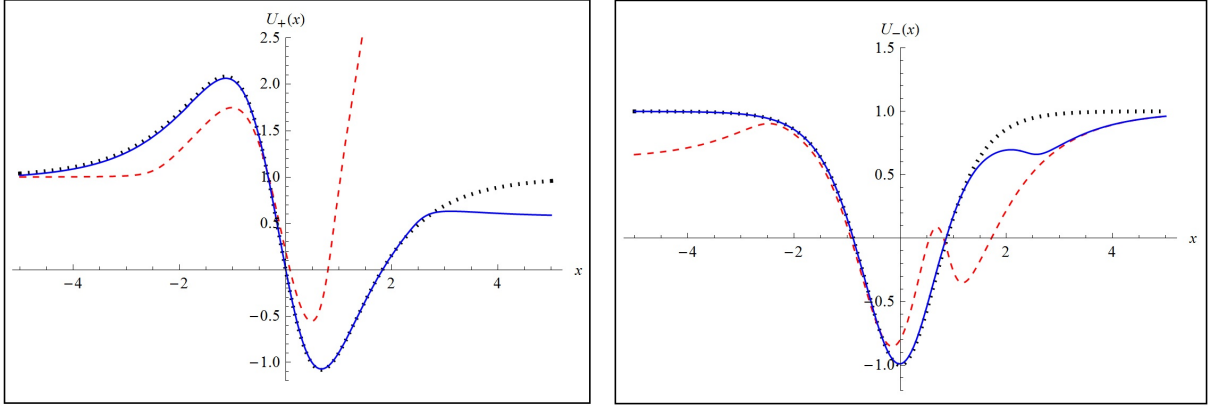


Figura 8 – Potenciais mecânico-quanticos U_+ (na esquerda) e U_- (na direita) para $b_3 = 0$ e $\alpha = 1$. Para ambos, plotamos os valores $a_2 = 0$, $a_2 = 0.01$, and $a_2 = 0.2$, representado com linhas pontilhadas, sólidas e tracejadas, respectivamente.

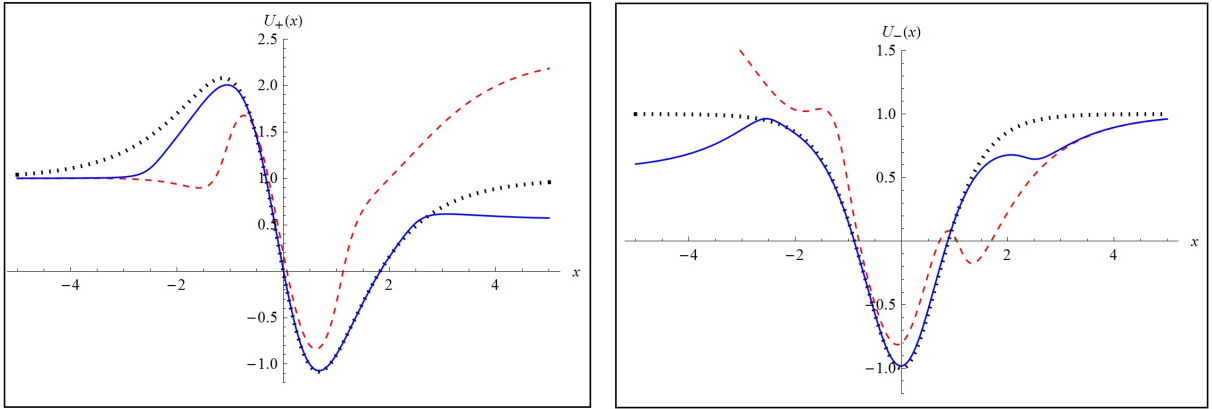


Figura 9 – Potenciais mecânico-quanticos U_+ (na esquerda) e U_- (na direita) para $a_2 = 0$ e $b_3 = 0$ (linha pontilhada), $a_2 = 0.01$ e $b_3 = 0.01$ (linha sólida, e $a_2 = 0.1$ e $b_3 = 0.1$ (linha tracejada).

4.5 Modelo acoplado $(\phi^4 + \zeta^{4I})$ e estabilidade

Para finalizar os exemplos do método de extensão para dois campos, consideremos o acoplamento da teoria ϕ^4 com a teoria ζ^{4I} descritas na seção 3.4. Iniciando com o superpotencial ϕ^4 (3.10) e considerando a seguinte função de deformação (3.24)

$$|\phi| = f(\zeta) = \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}}, \quad (4.118)$$

obtemos o equivalente ao superpotencial do modelo ζ^{4I} (3.26)

$$\widetilde{W}_\zeta^{(1)}(\zeta) = -\alpha\omega\zeta\sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}}, \quad (4.119)$$

onde ω é definido pela eq.(3.28). As expressões equivalentes do superpotencial ϕ^4 podem ser expressas na forma

$$W_\phi^{(1)}(\phi) = \alpha(1 - \phi^2), \quad (4.120a)$$

$$W_\phi^{(1)}(\zeta) = \frac{\alpha}{\beta^2} \zeta^2, \quad (4.120b)$$

$$W_\phi^{(1)}(\phi, \zeta) = \frac{\alpha}{\beta} \zeta \sqrt{1 - \phi^2}, \quad (4.120c)$$

enquanto as do superpotencial deformado ζ^{4I} na forma

$$\widetilde{W}_\zeta^{(1)}(\zeta) = -\alpha \omega \zeta \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}}, \quad (4.121a)$$

$$\widetilde{W}_\zeta^{(1)}(\phi) = -\alpha \beta \phi \sqrt{1 - \phi^2}, \quad (4.121b)$$

$$\widetilde{W}_\zeta^{(1)}(\phi, \zeta) = -\alpha \phi \zeta. \quad (4.121c)$$

Utilizando as expressões acima e fazendo $p_2 = q_3 = 0$, de modo que $p_3 = -p_1$ e $q_2 = -q_1$, na condição (4.9) resulta

$$\begin{aligned} p_1 g_\zeta(\zeta) - q_2 \tilde{g}_\phi(\phi, \zeta) = & -\alpha \left(\frac{2a_1}{\beta^2} + b_2 \right) \zeta - \alpha \left(\frac{a_2}{\beta} + \beta b_3 \right) \sqrt{1 - \phi^2} \\ & + \alpha \beta b_3 \frac{\phi^2}{\sqrt{1 - \phi^2}} - \alpha b_1 \frac{d\omega}{d\phi} \zeta \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}}. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Agora, agrupando os termos acima e realizando integrações, obtemos

$$g(\zeta) = -\frac{\alpha}{2p_1} \left(\frac{2a_1}{\beta^2} + b_2 \right) \zeta^2, \quad (4.123)$$

$$\tilde{g}(\phi, \zeta) = \frac{\alpha \beta}{2q_2} \left(\frac{a_2}{\beta^2} + 2b_3 \right) \phi \sqrt{1 - \phi^2} + \frac{\alpha}{2\beta} \frac{a_2}{q_2} \arcsin(\phi) - 2\alpha \frac{b_1}{q_2} \zeta \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}}, \quad (4.124)$$

onde podemos utilizar a função de deformação para reescrever

$$g(\phi) = -\frac{\alpha \beta^2}{2p_1} \left(\frac{2a_1}{\beta^2} + b_2 \right) (1 - \phi^2), \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\zeta) = & \frac{\alpha \omega}{2q_2} \left(\frac{a_2}{\beta^2} + 2b_3 \right) \zeta \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}} + \frac{\alpha \omega}{2\beta} \frac{a_2}{q_2} \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}} \right) \\ & - 2\alpha \frac{b_1}{q_2} \zeta \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}}. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Retornando as expressões acima no ansatz (4.5) e (4.6) obtemos

$$W_\phi^{(2)}(\phi, \zeta) = \alpha \left(1 - a_2 + \frac{\beta^2 b_2}{2} \right) (1 - \phi^2) + \frac{\alpha a_2}{\beta} \zeta \sqrt{1 - \phi^2} - \frac{\alpha b_2}{2} \zeta^2, \quad (4.127)$$

$$W_\zeta^{(2)}(\phi, \zeta) = \frac{\alpha a_2}{2\beta} \left(\phi \sqrt{1 - \phi^2} + \arcsin(\phi) \right) - \alpha b_2 \phi \zeta - \frac{\alpha \omega a_2}{2\beta} \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}} \right) \\ - \alpha \omega \left(\frac{a_2}{2\beta^2} + 1 - b_2 \right) \zeta \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}}, \quad (4.128)$$

de forma que o superpotencial para $(\phi^4 + \zeta^{4I})$ será

$$W^{(2)}(\phi, \zeta) = \alpha \left(1 - a_2 + \frac{\beta^2 b_2}{2} \right) \phi \left(1 - \frac{\phi^2}{3} \right) + \frac{\alpha a_2}{2\beta} \zeta \left(\phi \sqrt{1 - \phi^2} + \arcsin(\phi) \right) \\ - \frac{\alpha b_2}{2} \phi \zeta^2 + \frac{\alpha \beta^2 \omega}{3} \left(1 - b_2 + \frac{a_2}{2\beta^2} \right) \left(1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\ + \frac{\alpha \omega a_2}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}} - \frac{\zeta}{\beta} \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}} \right) \right), \quad (4.129)$$

onde temos acoplado o campo ϕ com ζ . Embora tenhamos visto que o superpotencial de um campo ζ^{4I} (3.26) seja uma definição que extrapola o formalismo de deformação, podemos mesmo assim verificar que o método de extensão é válido e suporta as seguintes configurações como estados BPS

$$\phi(x) = \tanh(\alpha x) \quad \text{e} \quad \zeta(x) = \beta \operatorname{sech}(\alpha x). \quad (4.130)$$

Em outras palavras, podemos verificar que as configurações acima satisfazem a equação de primeira ordem para dois campos (4.1) quando as derivadas parciais forem dadas respectivamente por (4.127) e (4.128). Os mínimos degenerados conectados são $m_1 = (-1, 0)$ e $m_2 = (1, 0)$, de modo que a energia será

$$E_{BPS} = \frac{2\alpha}{3} (2 + \beta^2). \quad (4.131)$$

Verifiquemos agora a estabilidade do modelo estendido $(\phi^4 + \zeta^{4I})$. Assim ao considerarmos o superpotencial (4.129) e os estados BPS (4.130) na expressão (4.20), teremos

$$u_\pm = -2\alpha \tanh(\alpha x) \pm \alpha, \quad (4.132)$$

onde estamos assumindo por simplicidade que $\beta = 1$ e $a_2 = b_2 - 1$. Os potenciais mecânico-quânticos (4.23) descritos a partir da expressão obtida acima (4.132), ficam (ver figura 10)

$$U_+(x) = 5\alpha^2 - 4\alpha^2 \tanh(\alpha x) - 6\alpha^2 \operatorname{sech}^2(\alpha x), \quad (4.133)$$

$$U_-(x) = 5\alpha^2 + 4\alpha^2 \tanh(\alpha x) - 6\alpha^2 \operatorname{sech}^2(\alpha x). \quad (4.134)$$

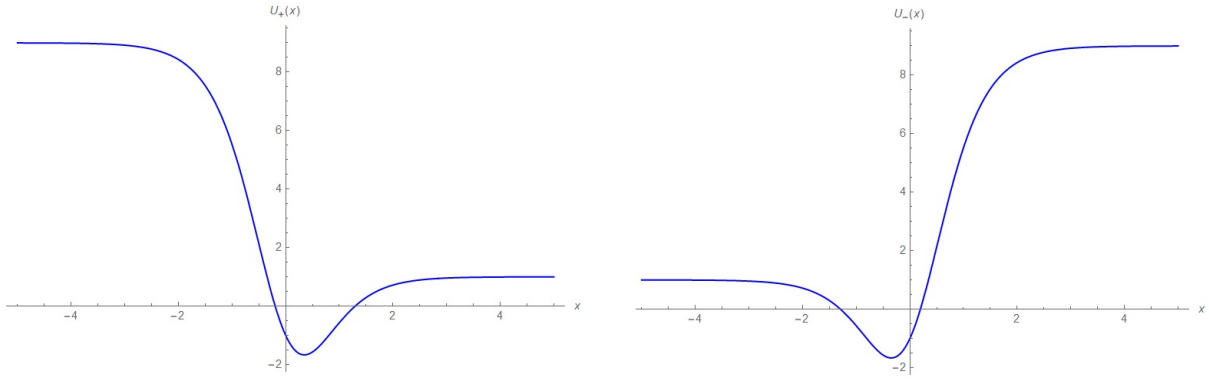


Figura 10 – Potenciais mecânico-quânticos U_+ (na esquerda) e U_- (na direita) do modelo estendido $(\phi^4 + \zeta^{4I})$ com $\alpha = 1$.

Ambos são o potencial Rosen-Morse II (ver apêndice A.1), cujos parâmetros de $U_+(x)$ devem ser $A = 2\alpha$ e $B = -2\alpha^2$, enquanto para $U_-(x)$ são $A = 2\alpha$ e $B = 2\alpha^2$. De maneira que o autovalor de ambos os casos são $E_0 = 0$ (A.2), possuindo somente o estado fundamental.

5 Método de extensão para três campos

No capítulo anterior formalizamos o método de extensão para dois campos [26]. Sendo assim, neste capítulo partiremos dessas construções para generalizar o método de extensão no caso de três campos [29], de forma que construiremos agora algumas teorias estendidas de três campos a partir de três teorias de um campo. Novamente focaremos em teorias de um campo BPS, desenvolvidas no capítulo 3, onde utilizaremos aqui os campos ϕ , φ , e χ para ilustrarmos o método generalizado e a notação $W^{(1)}$ para representar os superpotenciais das teorias de um campo e $W^{(3)}$ o caso estendido.

Partindo de uma teoria BPS para o campo ϕ , e considerando duas funções de deformação que relacionam este modelo com os outros campos BPS da forma

$$\phi = f_1(\varphi), \quad \phi = f_2(\chi), \quad (5.1)$$

resulta que

$$\varphi = f_3(\chi) \equiv f_1^{-1}(f_2(\chi)), \quad (5.2)$$

será uma terceira função de deformação relacionando naturalmente os campos restantes. Portanto, podemos utilizar as eqs.(5.1) e (5.2), e suas inversas, na teoria de um campo ϕ para reescrevermos a equação de primeira ordem em sete modos equivalentes

$$\begin{aligned} \phi' &= W_\phi^{(1)}(\phi), & \phi' &= W_\phi^{(1)}(\varphi), & \phi' &= W_\phi^{(1)}(\chi), & \phi' &= W_\phi^{(1)}(\phi, \varphi), \\ \phi' &= W_\phi^{(1)}(\phi, \chi), & \phi' &= W_\phi^{(1)}(\varphi, \chi), & \phi' &= W_\phi^{(1)}(\phi, \varphi, \chi), \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde variamos entre uma substituição total e parcial, no qual está última novamente poderá gerar ambiguidades de escolha. Utilizando a função de deformação inversa $\varphi \rightarrow f_1^{-1}(\phi)$ para escrevermos $\widetilde{W}_\varphi^{(1)}$ (3.7) e, em seguida, proceder de modo similar ao caso anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi' &= \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\varphi), & \varphi' &= \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\phi), & \varphi' &= \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\chi), & \varphi' &= \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\phi, \varphi), \\ \varphi' &= \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\varphi, \chi), & \varphi' &= \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\phi, \chi), & \varphi' &= \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\phi, \varphi, \chi). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Analogamente, da função inversa $\chi \rightarrow f_2^{-1}(\phi)$ obtemos $\widehat{W}_\chi^{(1)}$ (3.7) (para diferenciar os casos deformados estamos usando \widetilde{W} para um caso e \widehat{W} para o outro), de forma que

$$\begin{aligned} \chi' &= \widehat{W}_\chi^{(1)}(\chi), & \chi' &= \widehat{W}_\chi^{(1)}(\phi), & \chi' &= \widehat{W}_\chi^{(1)}(\varphi), & \chi' &= \widehat{W}_\chi^{(1)}(\phi, \chi), \\ \chi' &= \widehat{W}_\chi^{(1)}(\varphi, \chi), & \chi' &= \widehat{W}_\chi^{(1)}(\phi, \varphi), & \chi' &= \widehat{W}_\chi^{(1)}(\phi, \varphi, \chi). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Agora, faremos uma generalização dos ansatz usados em (4.5) e (4.6) para sistemas de três campos, na seguinte forma

$$\begin{aligned} W_\phi^{(3)}(\phi, \varphi, \chi) = & a_1 W_\phi^{(1)}(\varphi) + a_2 W_\phi^{(1)}(\phi, \varphi) + a_3 W_\phi^{(1)}(\phi) + a_4 W_\phi^{(1)}(\chi) + a_5 W_\phi^{(1)}(\phi, \chi) \\ & + a_6 W_\phi^{(1)}(\varphi, \chi) + a_7 W_\phi^{(1)}(\phi, \varphi, \chi) + p_1 g(\varphi) + p_2 g(\phi, \varphi) + p_3 g(\phi) \\ & + p_4 g(\chi) + p_5 g(\phi, \chi) + p_6 g(\varphi, \chi) + p_7 g(\phi, \varphi, \chi), \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} W_\varphi^{(3)}(\phi, \varphi, \chi) = & b_1 \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\varphi) + b_2 \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\phi, \varphi) + b_3 \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\phi) + b_4 \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\chi) + b_5 \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\phi, \chi) \\ & + b_6 \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\varphi, \chi) + b_7 \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\phi, \varphi, \chi) + q_1 \tilde{g}(\varphi) + q_2 \tilde{g}(\phi, \varphi) + q_3 \tilde{g}(\phi) \\ & + q_4 \tilde{g}(\chi) + q_5 \tilde{g}(\phi, \chi) + q_6 \tilde{g}(\varphi, \chi) + q_7 \tilde{g}(\phi, \varphi, \chi), \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} W_\chi^{(3)}(\phi, \varphi, \chi) = & c_1 \widehat{W}_\chi^{(1)}(\varphi) + c_2 \widehat{W}_\chi^{(1)}(\phi, \varphi) + c_3 \widehat{W}_\chi^{(1)}(\phi) + c_4 \widehat{W}_\chi^{(1)}(\chi) + c_5 \widehat{W}_\chi^{(1)}(\phi, \chi) \\ & + c_6 \widehat{W}_\chi^{(1)}(\varphi, \chi) + c_7 \widehat{W}_\chi^{(1)}(\phi, \varphi, \chi) + r_1 \hat{g}(\varphi) + r_2 \hat{g}(\phi, \varphi) + r_3 \hat{g}(\phi) \\ & + r_4 \hat{g}(\chi) + r_5 \hat{g}(\phi, \chi) + r_6 \hat{g}(\varphi, \chi) + r_7 \hat{g}(\phi, \varphi, \chi), \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde os parâmetros devam satisfazer

$$\sum_{i=1}^7 a_i = \sum_{i=1}^7 b_i = \sum_{i=1}^7 c_i = 1, \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^7 p_i = \sum_{i=1}^7 q_i = \sum_{i=1}^7 r_i = 0. \quad (5.9)$$

A continuidade e suavidade da função $W^{(3)}(\phi, \varphi, \chi)$ resulta agora nas seguintes condições

$$W_{\phi\varphi}^{(3)} = W_{\varphi\phi}^{(3)}, \quad W_{\phi\chi}^{(3)} = W_{\chi\phi}^{(3)}, \quad W_{\varphi\chi}^{(3)} = W_{\chi\varphi}^{(3)}, \quad (5.10)$$

as quais serão usadas para determinar as funções g . Portanto ao substituirmos as eqs.(5.6)-(5.8) nas condições acima (5.10), obtemos respectivamente

$$\begin{aligned} 0 = & p_1 g_\varphi(\varphi) + p_2 g_\varphi(\phi, \varphi) + p_6 g_\varphi(\varphi, \chi) + p_7 g_\varphi(\phi, \varphi, \chi) - q_5 \tilde{g}_\phi(\phi, \chi) - q_3 \tilde{g}_\phi(\phi) \\ & - q_2 \tilde{g}_\phi(\phi, \varphi) - q_7 \tilde{g}_\phi(\phi, \varphi, \chi) + a_1 W_{\phi\varphi}^{(1)}(\varphi) + a_2 W_{\phi\varphi}^{(1)}(\phi, \varphi) + a_6 W_{\phi\varphi}^{(1)}(\varphi, \chi) \\ & + a_7 W_{\phi\varphi}^{(1)}(\phi, \varphi, \chi) - b_2 \widetilde{W}_{\varphi\phi}^{(1)}(\phi, \varphi) - b_3 \widetilde{W}_{\varphi\phi}^{(1)}(\phi) - b_5 \widetilde{W}_{\varphi\phi}^{(1)}(\phi, \chi) - b_7 \widetilde{W}_{\varphi\phi}^{(1)}(\phi, \varphi, \chi), \end{aligned} \quad (5.11)$$

e

$$\begin{aligned} 0 = & p_4 g_\chi(\chi) + p_5 g_\chi(\phi, \chi) + p_6 g_\chi(\varphi, \chi) + p_7 g_\chi(\phi, \varphi, \chi) - r_5 \hat{g}_\phi(\phi, \chi) - r_3 \hat{g}_\phi(\phi) \\ & - r_2 \hat{g}_\phi(\phi, \varphi) - r_7 \hat{g}_\phi(\phi, \varphi, \chi) + a_4 W_{\phi\chi}^{(1)}(\chi) + a_5 W_{\phi\chi}^{(1)}(\phi, \chi) + a_6 W_{\phi\chi}^{(1)}(\varphi, \chi) \\ & + a_7 W_{\phi\chi}^{(1)}(\phi, \varphi, \chi) - c_2 \widehat{W}_{\chi\phi}^{(1)}(\phi, \varphi) - c_3 \widehat{W}_{\chi\phi}^{(1)}(\phi) - c_5 \widehat{W}_{\chi\phi}^{(1)}(\phi, \chi) - c_7 \widehat{W}_{\chi\phi}^{(1)}(\phi, \varphi, \chi), \end{aligned} \quad (5.12)$$

finalizando em

$$\begin{aligned} 0 = & r_1 \hat{g}_\varphi(\varphi) + r_2 \hat{g}_\varphi(\phi, \varphi) + r_6 \hat{g}_\varphi(\varphi, \chi) + r_7 \hat{g}_\varphi(\phi, \varphi, \chi) - q_4 \tilde{g}_\chi(\chi) - q_5 \tilde{g}_\chi(\phi, \chi) \\ & - q_6 \tilde{g}_\chi(\varphi, \chi) - q_7 \tilde{g}_\chi(\phi, \varphi, \chi) + b_4 \widetilde{W}_{\varphi\chi}^{(1)}(\chi) + b_5 \widetilde{W}_{\varphi\chi}^{(1)}(\phi, \chi) + b_6 \widetilde{W}_{\varphi\chi}^{(1)}(\varphi, \chi) \\ & + b_7 \widetilde{W}_{\varphi\chi}^{(1)}(\phi, \varphi, \chi) - c_1 \widehat{W}_{\chi\varphi}^{(1)}(\varphi) - c_2 \widehat{W}_{\chi\varphi}^{(1)}(\phi, \varphi) - c_6 \widehat{W}_{\chi\varphi}^{(1)}(\varphi, \chi) - c_7 \widehat{W}_{\chi\varphi}^{(1)}(\phi, \varphi, \chi). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Como foi mencionado, utilizaremos das relações acima para determinar a forma específica das funções g onde novamente teremos uma certa arbitrariedade de escolha nos parâmetros

e no arranjo dos termos. Após determinarmos as funções g retornamos as eqs.(5.6)-(5.8) de modo a obtermos as expressões de $W_\phi^{(3)}(\phi, \varphi, \chi)$, $W_\varphi^{(3)}(\phi, \varphi, \chi)$ e $W_\chi^{(3)}(\phi, \varphi, \chi)$ que, por integrações simples, resulta na expressão $W^{(3)}(\phi, \varphi, \chi)$. Além disto, podemos verificar diretamente que a solução do modelo estendido de três campos são as respectivas soluções BPS para os modelos de um campo. Todavia, devemos ter agora duas funções de deformação estendidas para definir uma órbita no espaço das configurações.

Seguiremos descrevendo a estabilidade linear para três campos BPS para, em seguida, ilustrarmos o método de extensão explicitamente.

5.1 Estabilidade linear para três campos

Utilizando o formalismo desenvolvido na seção 2.2 e os resultados particulares da seção 4.1 para dois campos BPS, busquemos descrever agora a estabilidade clássica ou linear no caso particular de três campos escalares acoplados BPS [1]. Somente por ilustração, continuemos com os campos ϕ , φ e χ .

Pelas perturbações lineares (2.18), em torno dos seguintes campos estáticos $\phi(x)$, $\varphi(x)$ e $\chi(x)$, da forma

$$\Phi_1(t, x) = \phi(x) + \sum_k \rho_k(x) \cos(w_k t), \quad (5.14)$$

$$\Phi_2(t, x) = \varphi(x) + \sum_k \sigma_k(x) \cos(w_k t), \quad (5.15)$$

$$\Phi_3(t, x) = \chi(x) + \sum_k \xi_k(x) \cos(w_k t), \quad (5.16)$$

obtemos novamente um problema de autovalores tipo Schrödinger $H\Psi_k(x) = w_k^2\Psi_k$, mas agora

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \left(\begin{array}{ccc} V_{\phi\phi} & V_{\phi\varphi} & V_{\phi\chi} \\ V_{\varphi\phi} & V_{\varphi\varphi} & V_{\varphi\chi} \\ V_{\chi\phi} & V_{\chi\varphi} & V_{\chi\chi} \end{array} \right) \Bigg|_{\{\phi(x), \varphi(x), \chi(x)\}}, \quad \Psi_k(x) = \begin{pmatrix} \rho_k(x) \\ \sigma_k(x) \\ \xi_k(x) \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

com a matriz descrita em termos dos campos estáticos $\phi(x)$, $\varphi(x)$ e $\chi(x)$. Considerando que o potencial $V(\phi, \varphi, \chi)$ seja BPS, podemos escrever

$$V_{\phi\phi} = \left(W_{\phi\phi}^{(3)}\right)^2 + W_\phi^{(3)}W_{\phi\phi\phi}^{(3)} + \left(W_{\phi\varphi}^{(3)}\right)^2 + W_\varphi^{(3)}W_{\phi\phi\varphi}^{(3)} + \left(W_{\phi\chi}^{(3)}\right)^2 + W_\chi^{(3)}W_{\phi\phi\chi}^{(3)}, \quad (5.18)$$

$$V_{\varphi\varphi} = \left(W_{\varphi\varphi}^{(3)}\right)^2 + W_\varphi^{(3)}W_{\varphi\varphi\varphi}^{(3)} + \left(W_{\phi\varphi}^{(3)}\right)^2 + W_\phi^{(3)}W_{\phi\varphi\varphi}^{(3)} + \left(W_{\varphi\chi}^{(3)}\right)^2 + W_\chi^{(3)}W_{\varphi\varphi\chi}^{(3)}, \quad (5.19)$$

$$V_{\chi\chi} = \left(W_{\chi\chi}^{(3)}\right)^2 + W_\chi^{(3)}W_{\chi\chi\chi}^{(3)} + \left(W_{\phi\chi}^{(3)}\right)^2 + W_\phi^{(3)}W_{\phi\chi\chi}^{(3)} + \left(W_{\varphi\chi}^{(3)}\right)^2 + W_\varphi^{(3)}W_{\varphi\chi\chi}^{(3)}, \quad (5.20)$$

$$V_{\phi\varphi} = W_{\phi\phi}^{(3)}W_{\phi\phi}^{(3)} + W_{\phi}^{(3)}W_{\phi\phi\phi}^{(3)} + W_{\phi\phi}^{(3)}W_{\phi\phi}^{(3)} + W_{\phi}^{(3)}W_{\phi\phi\phi}^{(3)} + W_{\phi\chi}^{(3)}W_{\phi\chi}^{(3)} + W_{\chi}^{(3)}W_{\phi\phi\chi}^{(3)}, \quad (5.21)$$

$$V_{\phi\chi} = W_{\phi\phi}^{(3)}W_{\phi\chi}^{(3)} + W_{\phi}^{(3)}W_{\phi\phi\chi}^{(3)} + W_{\phi\phi}^{(3)}W_{\phi\chi}^{(3)} + W_{\chi}^{(3)}W_{\phi\chi\chi}^{(3)} + W_{\phi\chi}^{(3)}W_{\chi\chi}^{(3)} + W_{\phi}^{(3)}W_{\phi\phi\chi}^{(3)}, \quad (5.22)$$

$$V_{\varphi\chi} = W_{\phi\varphi}^{(3)}W_{\phi\chi}^{(3)} + W_{\varphi}^{(3)}W_{\varphi\varphi\chi}^{(3)} + W_{\varphi\varphi}^{(3)}W_{\varphi\chi}^{(3)} + W_{\chi}^{(3)}W_{\varphi\chi\chi}^{(3)} + W_{\varphi\chi}^{(3)}W_{\chi\chi}^{(3)} + W_{\phi}^{(3)}W_{\phi\phi\chi}^{(3)}, \quad (5.23)$$

permitindo definir o operador linear

$$A_{\pm} = \pm \frac{d}{dx} + \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = \left(\begin{array}{ccc} W_{\phi\phi}^{(3)} & W_{\phi\phi}^{(3)} & W_{\phi\chi}^{(3)} \\ W_{\phi\phi}^{(3)} & W_{\phi\phi}^{(3)} & W_{\phi\chi}^{(3)} \\ W_{\chi\phi}^{(3)} & W_{\chi\phi}^{(3)} & W_{\chi\chi}^{(3)} \end{array} \right) \Bigg|_{\{\phi(x), \varphi(x), \chi(x)\}}, \quad (5.24)$$

de modo a reescrever o operador tipo Schrödinger

$$H = A_-^\dagger A_- = A_+ A_-. \quad (5.25)$$

Portanto, como já temos constatado da condição $A_{\pm}^\dagger = A_{\mp}$ no caso de dois campos, novamente observamos que o operador tipo Schrödinger H será positivo semi-definido ($w_k \geq 0 \forall k$) e com estado fundamental (2.26) coincidindo com o modo zero ($w_0 = 0$), dado agora por

$$\Psi_0(x) = \begin{pmatrix} \rho_0(x) \\ \sigma_0(x) \\ \xi_0(x) \end{pmatrix} = N_0 \begin{pmatrix} \phi'(x) \\ \varphi'(x) \\ \chi'(x) \end{pmatrix} = N_0 \begin{pmatrix} W_{\phi}^{(3)}(x) \\ W_{\varphi}^{(3)}(x) \\ W_{\chi}^{(3)}(x) \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

onde N_0 é uma constante de normalização. Na prática, nossa estratégia mais uma vez será tentar diagonalizar a matriz do superpotencial eq.(5.24), gerando portanto três equações tipo Schrödinger a serem analisadas separadamente. Isto será realizado explicitamente para cada modelo em particular.

5.2 Modelo acoplado $(\phi^4 + \varphi_l^6 + \zeta^{4I})$ e estabilidade

A fim de acoplarmos a teoria ϕ^4 com as teorias φ_l^6 e ζ^{4I} utilizando do método de extensão, devemos generalizar o caso de dois campos seguindo agora as descrições das seções 3.1 e 3.4. Iniciando pela teoria de um campo ϕ^4 (3.10)

$$W_{\phi}^{(1)}(\phi) = \alpha(1 - \phi^2), \quad (5.27)$$

e considerando as seguintes deformações (3.12) e (3.24)

$$\phi = f_1(\varphi) = |\varphi| - 1, \quad (5.28a)$$

$$|\phi| = f_2(\zeta) = \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}}, \quad (5.28b)$$

$$\zeta = f_3(\varphi) = f_1^{-1}(f_2(\varphi)) = \beta \sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2}, \quad (5.28c)$$

obtemos as teorias deformadas φ_l^6 (3.14) e ζ^{4I} (3.26), respectivamente,

$$\widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\varphi) = \alpha \varphi (2 - |\varphi|), \quad (5.29)$$

$$\widehat{W}_\zeta^{(1)}(\zeta) = -\alpha \omega \zeta \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}}, \quad (5.30)$$

onde definimos $\omega = \text{sgn}(\phi)$ (3.28). Além disso, vimos também que as configurações estáticas associadas aos superpotenciais acima são, respectivamente, dadas por

$$\phi(x) = \tanh(\alpha x), \quad \phi_\pm(x) = \pm(1 + \tanh(\alpha x)), \quad \zeta(x) = \beta \text{sech}(\alpha x). \quad (5.31)$$

De modo similar ao caso de dois campos, podemos agora utilizar as funções de deformação (5.28), e suas inversas, para escrever o superpotencial ϕ^4 (5.27) em sete expressões equivalentes, como segue

$$\begin{aligned} W_\phi^{(1)}(\phi) &= \alpha (1 - \phi^2), & W_\phi^{(1)}(\varphi) &= \alpha [1 - (|\varphi| - 1)^2], & W_\phi^{(1)}(\zeta) &= \frac{\alpha}{\beta^2} \zeta^2, \\ W_\phi^{(1)}(\phi, \varphi) &= \alpha [1 - \phi(|\varphi| - 1)], & W_\phi^{(1)}(\phi, \zeta) &= \frac{\alpha}{\beta} \zeta \sqrt{1 - \phi^2}, \\ W_\phi^{(1)}(\varphi, \zeta) &= \frac{\alpha}{\beta} \zeta \sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2}, & W_\phi^{(1)}(\phi, \varphi, \zeta) &= \frac{\alpha}{\beta} \zeta \sqrt{1 - \phi(|\varphi| - 1)}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

De modo análogo, obtemos para φ_l^6 (5.29) as seguintes expressões equivalentes

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\zeta) &= \frac{\alpha}{\beta^2} \epsilon \zeta^2, & \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\phi) &= \alpha \epsilon (1 - \phi^2), & \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\varphi) &= \alpha \varphi (2 - |\varphi|), \\ \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\phi, \zeta) &= \frac{\alpha}{\beta} \epsilon \zeta \sqrt{1 - \phi^2}, & \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\phi, \varphi) &= \alpha \varphi (1 - \phi), \\ \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\varphi, \zeta) &= \frac{\alpha}{\beta} \epsilon \zeta \sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2}, & \widetilde{W}_\varphi^{(1)}(\phi, \varphi, \zeta) &= \frac{\alpha}{\beta} \epsilon \zeta \sqrt{1 - \phi(|\varphi| - 1)}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

enquanto para ζ^{4I} , obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{W}_\zeta^{(1)}(\zeta) &= -\alpha \omega \zeta \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}}, & \widehat{W}_\zeta^{(1)}(\phi) &= -\alpha \beta \phi \sqrt{1 - \phi^2}, & \widehat{W}_\zeta^{(1)}(\phi, \zeta) &= -\alpha \phi \zeta, \\ \widehat{W}_\zeta^{(1)}(\varphi) &= -\alpha \beta (|\varphi| - 1) \sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2}, & \widehat{W}_\zeta^{(1)}(\phi, \varphi) &= -\alpha \beta \phi \sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2}, \\ \widehat{W}_\zeta^{(1)}(\varphi, \zeta) &= -\alpha \zeta (|\varphi| - 1), & \widehat{W}_\zeta^{(1)}(\phi, \varphi, \zeta) &= -\alpha \beta \omega \sqrt{1 - \phi(|\varphi| - 1)} \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Para especificarmos as funções g , devemos substituir as eqs.(5.32)-(5.34) nas condições generalizadas (5.10), de modo que obtemos (ver apêndice B.1)

$$\begin{aligned} W_\phi^{(3)}(\phi, \varphi, \zeta) &= \alpha (1 - \phi^2) + a_2 \phi (1 + \phi - |\varphi|) - \frac{1}{2} (1 - c_6) (\zeta^2 - \beta^2 (1 - \phi^2)), \\ W_\varphi^{(3)}(\phi, \varphi, \zeta) &= \frac{\alpha \epsilon}{2} \left((2 + c_6 \beta^2) (1 - (|\varphi| - 1)^2) - a_2 (\phi^2 - (|\varphi| - 1)^2) - c_6 \zeta^2 \right), \\ W_\zeta^{(3)}(\phi, \varphi, \zeta) &= -\alpha \zeta (\phi - c_6 (1 + \phi - |\varphi|)). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Realizando as correspondentes integrações, obtemos o seguinte superpotencial de três campos para o modelo estendido $(\phi^4 + \varphi_l^6 + \zeta^{4I})$

$$\begin{aligned} W^{(3)}(\phi, \varphi, \zeta) = & \alpha \left(1 - a_2 + \frac{\beta^2}{2}(1 - c_6) \right) \phi \left(1 - \frac{\phi^2}{3} \right) - \frac{\alpha}{2}(1 - c_6) \phi \varphi^2 - \frac{\alpha}{2} c_6 \varphi^2 (|\zeta| - 1) \\ & + \alpha a_2 \phi \left(1 - \frac{\phi}{2} (|\zeta| - 1) \right) + \frac{\alpha a_2}{2} |\zeta| + \frac{\alpha}{2} (2 - a_2 + \beta^2 c_6) \zeta^2 \left(1 - \frac{|\zeta|}{3} \right) \\ & + \frac{\alpha}{12} (2b_4 + c_6 \beta^2), \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde podemos verificar diretamente que os estados BPS são as expressões em (5.31), e a energia é dada por

$$E_{BPS} = \frac{2\alpha}{3} (4 + \beta^2). \quad (5.37)$$

A fim de estudarmos a estabilidade do modelo $(\phi^4 + \varphi_l^6 + \zeta^{4I})$, consideremos o superpotencial de três campos (5.36) com as respectivas configurações estáticas (5.31) na matriz do operador de primeira ordem (5.24), de modo a obtermos

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -2\alpha \tanh(\alpha x) & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha(2 + \beta^2) \tanh(\alpha x) & -\alpha \beta \epsilon \operatorname{sech}(\alpha x) \\ 0 & -\alpha \beta \epsilon \operatorname{sech}(\alpha x) & -\alpha \tanh(\alpha x) \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

onde temos escolhido $a_2 = 0$, e $c_6 = 1$, com objetivo de simplificar as expressões. Desta forma podemos diagonalizar a matriz acima calculando seus correspondentes autovalores, de forma que encontramos

$$\begin{aligned} u_0 &= -2\alpha \tanh(\alpha x), \\ u_{\pm} &= -\frac{\alpha}{2} \left((3 + \beta^2) \tanh(\alpha x) \pm \sqrt{4\beta^2 + (\beta^2 - 1)^2 \tanh^2(\alpha x)} \right). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Simplificaremos ainda mais as análises ao considerarmos $\beta = 1$, de modo a obter os potenciais mecânico-quânticos pela eq.(5.25)

$$U_0 = 4\alpha^2 - 6\alpha^2 \operatorname{sech}^2(\alpha x), \quad U_{\pm} = 5\alpha^2 - 6\alpha^2 \operatorname{sech}^2(\alpha x) \pm 4\alpha^2 \tanh(\alpha x), \quad (5.40)$$

sendo todos mais uma vez o potencial Rosen-Morse II (A.1). Vemos que o potencial U_0 terá como parâmetros $A = 2\alpha$ e $B = 0$, possuindo os autovalores $E_0 = 0$ e $E_1 = 3\alpha^2$. Os outros dois potenciais possuem respectivamente $A = 2\alpha$ e $B = \pm 2\alpha^2$, apresentando somente o estado fundamental $E_0 = 0$ em ambos casos. Consequentemente, para essas escolhas de parâmetros, teremos a estabilidade garantida. Outra escolha simples possível é $a_2 = 0$, e $c_6 = 0$, porém obteremos essencialmente os mesmos resultados.

5.3 Modelo acoplado $(\phi^4 + \text{sG} + \text{E})$ e estabilidade

Neste segundo exemplo, desenvolveremos o acoplamento das teorias ϕ^4 com sG e modelo-E pelo método de extensão, onde utilizaremos agora as expressões descritas nas seções 3.2 e 3.3. Os superpotenciais de um campo para ϕ^4 , sG, e modelo-E são dados respectivamente por

$$W_\phi^{(1)}(\phi) = \alpha(1 - \phi^2), \quad (5.41)$$

$$\widetilde{W}_\chi^{(1)}(\chi) = \frac{\alpha}{\beta} \cos(\beta\chi), \quad (5.42)$$

$$\widehat{W}_\eta^{(1)}(\eta) = \alpha(1 + \eta) \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right), \quad (5.43)$$

possuindo as respectivas configurações estáticas

$$\phi(x) = \tanh(\alpha x), \quad \chi(x) = \frac{1}{\beta} \arctan(\sinh(\alpha x)), \quad \eta(x) = e^{\arctan(\sinh(\alpha x))} - 1. \quad (5.44)$$

Vimos que as funções de deformação, conectando os três modelos, são da forma

$$\phi = f_1(\chi) = \sin(\beta\chi), \quad (5.45a)$$

$$\eta = f_2(\chi) = e^{\beta\chi} - 1, \quad (5.45b)$$

$$\phi = f_3(\eta) = f_1(f_2^{-1}(\eta)) = \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right), \quad (5.45c)$$

de modo que podemos escrever as expressões equivalentes de (5.41) como segue

$$\begin{aligned} W_\phi^{(1)}(\phi) &= \alpha(1 - \phi^2), & W_\phi^{(1)}(\chi) &= \alpha \cos^2(\beta\chi), \\ W_\phi^{(1)}(\eta) &= \alpha \cos^2\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right), & W_\phi^{(1)}(\phi, \chi) &= \alpha(1 - \phi \sin(\beta\chi)), \\ W_\phi^{(1)}(\phi, \eta) &= \alpha \left[1 - \phi \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right)\right], \\ W_\phi^{(1)}(\eta, \chi) &= \alpha \left[1 - \sin(\beta\chi) \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right)\right], \\ W_\phi^{(1)}(\phi, \eta, \chi) &= \alpha \left[1 - 2\phi \sin\left(\frac{\beta\chi}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right)\right], \end{aligned} \quad (5.46)$$

também as equivalente de (5.42)

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_\chi^{(1)}(\chi) &= \frac{\alpha}{\beta} \cos(\beta\chi), & \widetilde{W}_\chi^{(1)}(\phi) &= \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{1 - \phi^2}, \\ \widetilde{W}_\chi^{(1)}(\eta) &= \frac{\alpha}{\beta} \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right), \\ \widetilde{W}_\chi^{(1)}(\phi, \chi) &= \frac{\alpha}{\beta} \left[(1 - 2\phi^2) \cos(\beta\chi) + 2\phi \sqrt{1 - \phi^2} \sin(\beta\chi) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_\chi^{(1)}(\eta, \chi) &= \frac{\alpha}{\beta} \left[2 \cos\left(\frac{\beta\chi}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{4} \ln(1+\eta)^2\right) - 1 \right], \\
\widetilde{W}_\chi^{(1)}(\phi, \eta) &= \frac{\alpha}{\beta} \left[(1 - 2\phi^2) \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1+\eta)^2\right) + 2\phi\sqrt{1-\phi^2} \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1+\eta)^2\right) \right], \\
\widetilde{W}_\chi^{(1)}(\phi, \eta, \chi) &= \frac{\alpha}{\beta} \left[1 - 2\phi \sin\left(\frac{\beta\chi}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{4} \ln(1+\eta)^2\right) \right. \\
&\quad \left. + 2\sqrt{1-\phi^2} \sin\left(\frac{\beta\chi}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{4} \ln(1+\eta)^2\right) \right], \tag{5.47}
\end{aligned}$$

e as de (5.43)

$$\begin{aligned}
\widehat{W}_\eta^{(1)}(\eta) &= \alpha(1+\eta) \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1+\eta)^2\right), & \widehat{W}_\eta^{(1)}(\eta, \chi) &= \alpha(1+\eta) \cos(\beta\chi), \\
\widehat{W}_\eta^{(1)}(\chi) &= \alpha e^{\beta\chi} \cos(\beta\chi), & \widehat{W}_\eta^{(1)}(\phi, \chi) &= \alpha e^{\beta\chi} \sqrt{1-\phi^2}, \\
\widehat{W}_\eta^{(1)}(\phi) &= \alpha e^{\arcsin(\phi)} \sqrt{1-\phi^2}, & \widehat{W}_\eta^{(1)}(\phi, \eta) &= \alpha \sqrt{1-\phi^2} (1+\eta), \\
\widehat{W}_\eta^{(1)}(\phi, \eta, \chi) &= \alpha(1+\eta) \left[1 - 2 \sin\left(\frac{\beta\chi}{2}\right) \left(\phi \cos\left(\frac{1}{4} \ln(1+\eta)^2\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sqrt{1-\phi^2} \sin\left(\frac{1}{4} \ln(1+\eta)^2\right) \right) \right]. \tag{5.48}
\end{aligned}$$

Ao substituir as eqs.(5.46)-(5.48) nas relações (5.10), obtemos (ver apêndice B.2)

$$\begin{aligned}
W_\phi^{(3)}(\phi, \eta, \chi) &= \alpha(1 - a_4 - a_5)(1 - \phi^2) + \alpha a_4 \cos^2\left(\frac{1}{2} \ln(1+\eta)^2\right) \\
&\quad + \alpha a_5 \left[1 - \phi \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1+\eta)^2\right) \right], \tag{5.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_\chi^{(3)}(\phi, \eta, \chi) &= \frac{\alpha}{\beta} \cos(\beta\chi) + \alpha \beta c_1 e^{\beta\chi} (1 + \eta - e^{\beta\chi}) (\cos(\beta\chi) - \sin(\beta\chi)), \\
&\quad - \frac{\alpha \beta c_6}{2} \sin(\beta\chi) \left((1 + \eta)^2 - e^{2\beta\chi} \right), \tag{5.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_\eta^{(3)}(\phi, \eta, \chi) &= \alpha c_1 e^{\beta\chi} \cos(\beta\chi) + \alpha(1 - c_1 - c_6)(1 + \eta) \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1+\eta)^2\right) \\
&\quad + \alpha c_6(1 + \eta) \cos(\beta\chi) + \frac{\alpha a_4}{(1 + \eta)} \sin(\ln(1 + \eta)^2) \left[\sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) - \phi \right] \\
&\quad + \frac{\alpha a_5}{2(1 + \eta)} \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) \left[\sin^2\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) - \phi^2 \right], \tag{5.51}
\end{aligned}$$

de modo que após realizarmos integrações teremos o seguinte superpotencial de três campos

$$\begin{aligned}
 W^{(3)}(\phi, \eta, \chi) = & \alpha(1 - a_4 - a_5) \left(\phi - \frac{\phi^3}{3} \right) + \frac{\alpha}{\beta^2} \sin(\beta \chi) \\
 & + \frac{\alpha}{5} (1 - c_1 - c_6) (1 + \eta)^2 \left[2 \cos \left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2 \right) + \sin \left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2 \right) \right] \\
 & + \alpha a_4 \left[\phi \cos^2 \left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2 \right) + \frac{2}{3} \sin^3 \left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2 \right) \right] \\
 & + \alpha a_5 \left[\phi - \frac{\phi^2}{2} \sin \left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2 \right) + \frac{1}{6} \sin^3 \left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2 \right) \right] \\
 & + \frac{\alpha c_1}{5} e^{\beta \chi} \left[(5(1 + \eta) - 3e^{\beta \chi}) \cos(\beta \chi) + e^{\beta \chi} \sin(\beta \chi) \right] \\
 & + \frac{\alpha c_6}{10} \left[(5(1 + \eta)^2 - e^{2\beta \chi}) \cos(\beta \chi) + 2e^{2\beta \chi} \sin(\beta \chi) \right]. \quad (5.52)
 \end{aligned}$$

Este superpotencial estendido descreve o modelo $(\phi^4 + sG + E)$, pois vemos que de fato ocorre o acoplamento entre os campos aqui propostos. Além disso, podemos verificar que as configurações estáticas (5.44) são soluções BPS deste superpotencial conectando os mínimos $m_1 = (-1, -\frac{\pi}{2\beta}, -1 + e^{-\pi/2})$ e $m_2 = (1, \frac{\pi}{2\beta}, -1 + e^{\pi/2})$, com energia

$$E_{BPS} = 2\alpha \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{5} \cosh(\pi) \right). \quad (5.53)$$

Agora vamos estudar a estabilidade do modelo estendido $(\phi^4 + sG + E)$. Assim devemos substituir o superpotencial de três campos (5.52) e as configurações estáticas (5.44) na matriz do operador de primeira ordem (5.24), com a seguinte escolha de parâmetros $a_5 = -a_4$, e $c_6 = -c_1$, de modo a simplificar a matriz. Logo, obtemos

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -2\alpha \tanh(\alpha x) & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \operatorname{sech}(\alpha x) \left(\beta^2 c_1 e^{2\sin^{-1}(\tanh(\alpha x))} + \sinh(\alpha x) \right) & \alpha \beta c_1 \operatorname{sech}(\alpha x) \times e^{\sin^{-1}(\tanh(\alpha x))} \\ 0 & \alpha \beta c_1 \operatorname{sech}(\alpha x) e^{\sin^{-1}(\tanh(\alpha x))} & -\alpha \operatorname{sech}(\alpha x) \times (c_1 + \sinh(\alpha x) - 1) \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

Ao diagonalizarmos a matriz (5.54), encontraremos os seguintes autovalores

$$u_0 = -2\alpha \tanh(\alpha x), \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned}
 u_{\pm} = & -\frac{\alpha}{2} \operatorname{sech}(\alpha x) \left[2 \sinh(\alpha x) - 1 + c_1 \left(1 + \beta^2 e^{2\sin^{-1}(\tanh(\alpha x))} \right) \right. \\
 & \left. \pm \sqrt{1 + 2c_1 \left(\beta^2 e^{2\sin^{-1}(\tanh(\alpha x))} - 1 \right) + c_1^2 \left(1 + \beta^2 e^{-2\sin^{-1}(\tanh(\alpha x))} \right)^2} \right]. \quad (5.56)
 \end{aligned}$$

O primeiro autovalor (5.55) determina o seguinte potencial mecânico-quântico

$$U_0(x) = 4\alpha^2 - 6\alpha^2 \operatorname{sech}^2(\alpha x), \quad (5.57)$$

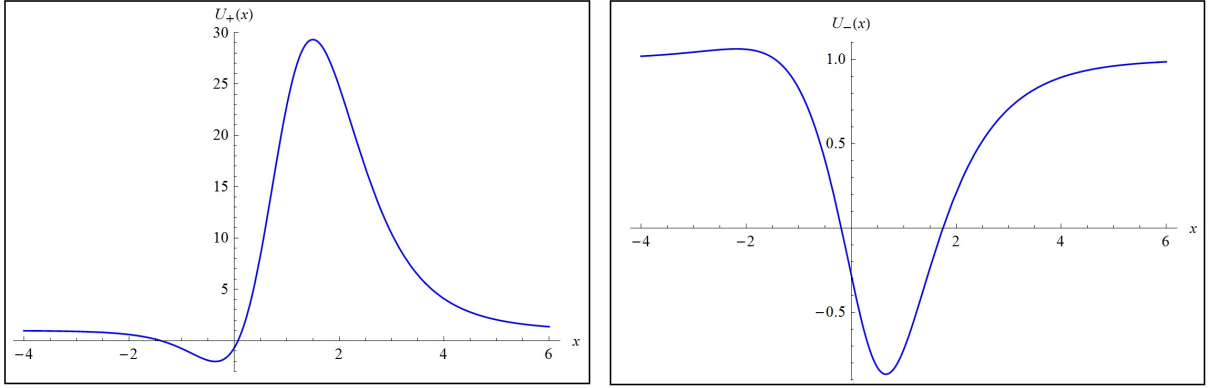


Figura 11 – Potenciais mecânico-quânticos U_+ (à esquerda) e U_- (à direita) para $\alpha = \beta = c_1 = 1$.

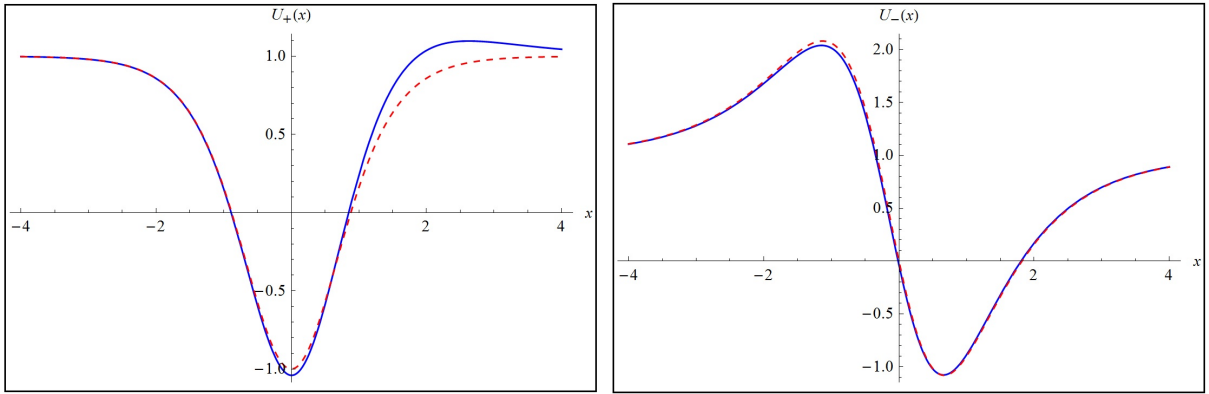


Figura 12 – Potenciais mecânico-quânticos U_+ (à esquerda) e U_- (à direita) para $\alpha = \beta = 1$. Para ambos, temos plotado os valores $c_1 = 0$ (linha tracejada em vermelho) e $c_1 = 0.02$ (linha sólida em azul).

possuindo os autovalores de energia $E_0 = 0$, e $E_1 = 3\alpha^2$, o qual garante parcialmente a estabilidade do modelo. Prosseguindo agora para os dois potenciais que faltam U_{\pm} , podemos observar que suas expressões serão muito complicadas, como podemos notar na figura 11 para uma escolha em particular nos parâmetros. Por isso, teremos algumas dificuldades em obtermos resultados analíticos para os casos mais gerais. Podemos notar entretanto que o caso $c_1 = 0$ desacopla o campo sine-Gordon, não sendo assim do nosso interesse, todavia nos permite prosseguir assumindo valores próximos como uma análise perturbativa, como mostra a figura 12.

Assumindo valores pequenos do parâmetro $c_2 = \lambda \lesssim 10^{-2}$, obtemos em primeira ordem o potencial perturbado

$$U_{\pm}(x) = U_{\pm}^{(0)}(x) + \lambda U_{\pm}^{(1)}(x), \quad (5.58)$$

onde os termos não perturbativos dos potenciais acima são dados respectivamente por

$$U_+^{(0)}(x) = \alpha^2 - 2\alpha^2 \operatorname{sech}^2(\alpha x), \quad (5.59)$$

$$U_-^{(0)}(x) = \alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{sech}^2(\alpha x) - 3\alpha^2 \operatorname{sech}(\alpha x) \tanh(\alpha x), \quad (5.60)$$

sendo $U_+^{(0)}$ descrito pelo potencial Rosen-Morse II (A.1) com $A = \alpha$, e $B = \alpha$, enquanto $U_-^{(0)}$ é descrito pelo Scarf II (A.6) com $A = \alpha$, e $B = -\alpha$. Em ambos casos, os potenciais não perturbativos possuem somente o estado fundamental, o modo zero $E_0^{(0)} = 0$. Na parte perturbativa, teremos que as correções de primeira ordem são

$$U_+^{(1)}(x) = \alpha^2 \beta^2 e^{2 \sin^{-1}(\tanh(\alpha x))} \left(3 \operatorname{sech}(\alpha x) \tanh(\alpha x) - 2 \operatorname{sech}^2(\alpha x) \right), \quad (5.61)$$

$$U_-^{(1)}(x) = \alpha^2 \left(3 \operatorname{sech}(\alpha x) \tanh(\alpha x) - 2 \operatorname{sech}^2(\alpha x) \right). \quad (5.62)$$

ao passo que a correção em primeira ordem da energia zero $E_0^{(1)}$ será dada por

$$E_0^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sigma_0^*(x) U_+^{(0)}(x) \sigma_0(x) + \xi_0^*(x) U_-^{(0)}(x) \xi_0(x) \right] dx, \quad (5.63)$$

onde podemos determinar as autofunções $\sigma_0(x)$ e $\xi_0(x)$, respectivamente, pelas expressões em (A.4) e (A.8), para $k = 0$ em ambos casos. Calculando explicitamente a integral (5.63) verificamos que $E_0^{(1)} = 0$, e assim podemos garantir a estabilidade das soluções em primeira ordem.

Devido a liberdade nos parâmetros, é possível obter diversos setores topológicos distintos dependendo dos valores que os quatro parâmetros assumem. De fato, se escolhermos $c_1 = c_6 = 0$, podemos verificar que as seguintes expressões são soluções BPS

$$\eta^{(\pm)}(x) = -1 + e^{\pm\pi/2}, \quad \chi(x) = \frac{1}{\beta} \arctan(\sinh(\alpha x)),$$

$$\phi^{(\pm)}(x) = \frac{(1 - a_4) \pm e^{(\pm 2(1 - a_4) \mp a_5) \alpha x}}{\pm(a_5 - (1 - a_4)) + e^{(\pm 2(1 - a_4) \mp a_5) \alpha x}}, \quad (5.64)$$

quando $a_5 \neq 2(1 - a_4)$, e ainda $a_5 > (1 - a_4)$ para $\phi^{(+)}(x)$, e $a_5 < (1 - a_4)$ para $\phi^{(-)}(x)$. As novas soluções derivadas acima $\phi^{(\pm)}$ (5.64), são muito semelhantes na forma com as eqs.(4.89) e (4.91) derivadas do modelo estendido ($\phi^4 + \text{sG}$), os quais também apresentam respectivamente o intervalo ± 1 e $\frac{\pm(1 - a_4)}{a_5 - (1 - a_4)}$. Dependendo dos valores dos parâmetros, teremos dois setores topológicos com as energias BPS correspondentes dadas por

$$E_{BPS}^{(\pm)} = \left| \frac{2\alpha}{\beta^2} \pm \frac{\alpha (a_5 - 2(1 - a_4))^3}{6 (a_5 - (1 - a_4))^2} \right|. \quad (5.65)$$

Também devemos estudar a estabilidade dessas novas soluções, de modo que no caso de $\phi^{(-)}$ teremos que a matriz \mathbf{W} será dada por

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 2\alpha(a_4 - 1)\phi^{(-)} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \sin(\beta \chi) & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha e^{\pi} a_4 (1 + \phi^{(-)}) + \alpha \end{pmatrix}, \quad (5.66)$$

onde escolhemos por simplicidade $a_5 = 0$, de modo que devemos ter $a_4 < 0$. Uma vez que a matriz já se encontra diagonalizada, podemos considerar a solução $\phi^{(-)}$ (5.64) para

derivar os potenciais mecânico-quânticos a seguir

$$U_+(x) = 4\alpha^2(a_4 - 1)^2 \frac{[(a_4 - 1)^2 + 4(a_4 - 1)e^{2\alpha(a_4-1)x} + e^{4\alpha(a_4-1)x}]}{[1 - a_4 + e^{2\alpha(a_4-1)x}]^2}, \quad (5.67)$$

$$U_0(x) = \alpha^2 - 2\alpha^2 \operatorname{sech}^2(\alpha x), \quad (5.68)$$

$$U_-(x) = \frac{8\alpha^2 a_4(a_4 - 1)^2 e^{\pi+2\alpha(a_4-1)x}}{[1 - a_4 + e^{2\alpha(a_4-1)x}]^2} + \left(\alpha - \frac{4\alpha e^\pi a_4(a_4 - 1)}{1 - a_4 + e^{2\alpha(a_4-1)x}} \right)^2, \quad (5.69)$$

onde o potencial U_0 possui somente o autovalor $E_0 = 0$. Os potenciais U_\pm podem ser modelados por uma ligeira modificação do potencial Rosen-Morse II (A.1), da forma

$$U_\pm(x) = A_\pm^2 + \frac{B_\pm^2}{A_\pm^2} - A_\pm(A_\pm + \kappa) \operatorname{sech}^2[\kappa(x - x_0^\pm)] + 2B_\pm \tanh[\kappa(x - x_0^\pm)], \quad (5.70)$$

sendo $\kappa = \alpha(1 - a_4)$, e os parâmetros

$$A_+ = 2\alpha(1 - a_4), \quad B_+ = 0, \quad x_0^+ = \frac{1}{2\alpha(a_4 - 1)} \ln(1 - a_4), \quad (5.71)$$

e

$$\begin{aligned} A_- &= -2\alpha e^\pi a_4, & B_- &= -2\alpha^2 e^\pi a_4(1 + 2e^\pi a_4), \\ x_0^- &= \frac{1}{2\alpha(a_4 - 1)} \ln \left(\frac{(1 + 4e^\pi)^2 a_4^2 (1 - a_4)}{(2 - a_4)^2} \right). \end{aligned} \quad (5.72)$$

De modo que podemos ver que U_+ possui os autovalores $E_0 = 0$, e $E_1 = 3\alpha^2(1 - a_4)^2$, enquanto o potencial U_- possui somente o autovalor $E_0 = 0$, quando tivermos

$$-\frac{e^{-\pi}}{2} < a_4 < -\frac{e^{-\pi}}{4}. \quad (5.73)$$

Portanto, esta solução particular é estável apenas se o parâmetro a_4 satisfizer a restrição (5.73), pelo menos para nossa escolha de parâmetros. Seguindo um procedimento análogo, a análise de estabilidade da solução $\phi^{(+)}$ nos levará a resultados semelhantes.

5.4 Modelo acoplado $(\phi^4 + \mathbf{sG}_1 + \mathbf{sG}_2)$ e estabilidade

Neste momento iremos acoplar a teoria ϕ^4 com dois sG distintos (denotando um deles por χ e outro por ψ) pelo método de extensão, onde temos as expressões descritas na seção 3.2. Os superpotenciais que consideraremos aqui são

$$W_\phi^{(1)}(\phi) = \alpha(1 - \phi^2), \quad (5.74)$$

$$\widetilde{W}_\chi^{(1)}(\chi) = \frac{\alpha}{\beta} \cos(\beta\chi), \quad (5.75)$$

$$\widehat{W}_\psi^{(1)}(\psi) = \frac{\alpha}{\gamma} \cos(\gamma\psi), \quad (5.76)$$

cujas respectivas configurações estáticas são

$$\phi(x) = \tanh(\alpha x), \quad \chi(x) = \frac{1}{\beta} \arctan(\sinh(\alpha x)), \quad \psi(x) = \frac{1}{\gamma} \arctan(\sinh(\alpha x)). \quad (5.77)$$

Vimos que as funções de deformação conectando os três modelos são da forma

$$\phi = f_1(\chi) = \sin(\beta \chi), \quad (5.78a)$$

$$\phi = f_2(\psi) = \sin(\gamma \psi), \quad (5.78b)$$

$$\chi = f_3(\psi) = f_1^{-1}(f_2(\psi)) = \frac{\gamma}{\beta} \psi, \quad (5.78c)$$

possibilitando escrever as seguintes expressões equivalentes para (5.74)

$$\begin{aligned} W_\phi^{(1)}(\phi) &= \alpha(1 - \phi^2), & W_\phi^{(1)}(\phi, \chi) &= \alpha(1 - \phi \sin(\beta \chi)), \\ W_\phi^{(1)}(\chi) &= \alpha \cos^2(\beta \chi), & W_\phi^{(1)}(\chi, \psi) &= \alpha(1 - \sin(\beta \chi) \sin(\gamma \psi)), \\ W_\phi^{(1)}(\psi) &= \alpha \cos^2(\gamma \psi), & W_\phi^{(1)}(\phi, \psi) &= \alpha(1 - \phi \sin(\gamma \psi)), \\ W_\phi^{(1)}(\phi, \chi, \psi) &= \alpha \left(1 - 2\phi \sin\left(\frac{\beta \chi}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma \psi}{2}\right) \right), \end{aligned} \quad (5.79)$$

também para (5.75) nas formas equivalentes

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_\chi^{(1)}(\chi) &= \frac{\alpha}{\beta} \cos(\beta \chi), & \widetilde{W}_\chi^{(1)}(\chi, \phi) &= \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{1 - \phi \sin(\beta \chi)}, \\ \widetilde{W}_\chi^{(1)}(\phi) &= \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{1 - \phi^2}, & \widetilde{W}_\chi^{(1)}(\phi, \psi) &= \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{1 - \phi \sin(\gamma \psi)}, \\ \widetilde{W}_\chi^{(1)}(\psi) &= \frac{\alpha}{\beta} \cos(\gamma \psi), & \widetilde{W}_\chi^{(1)}(\chi, \psi) &= \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{1 - \sin(\beta \chi) \sin(\gamma \psi)}, \\ \widetilde{W}_\chi^{(1)}(\phi, \chi, \psi) &= \frac{\alpha}{\beta} \left(\cos(\beta \chi) \cos^2(\gamma \psi) - \phi^2 \cos(\beta \chi) + 2\phi \sin(\beta \chi) \cos(\gamma \psi) \right), \end{aligned} \quad (5.80)$$

e ainda (5.76) como

$$\begin{aligned} \widehat{W}_\psi^{(1)}(\psi) &= \frac{\alpha}{\gamma} \cos(\gamma \psi), & \widehat{W}_\psi^{(1)}(\psi, \phi) &= \frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{1 - \phi \sin(\gamma \psi)}, \\ \widehat{W}_\psi^{(1)}(\phi) &= \frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{1 - \phi^2}, & \widehat{W}_\psi^{(1)}(\phi, \chi) &= \frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{1 - \phi \sin(\beta \chi)}, \\ \widehat{W}_\psi^{(1)}(\chi) &= \frac{\alpha}{\gamma} \cos(\beta \chi), & \widehat{W}_\psi^{(1)}(\chi, \psi) &= \frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{1 - \sin(\beta \chi) \sin(\gamma \psi)}, \\ \widehat{W}_\psi^{(1)}(\phi, \chi, \psi) &= \frac{\alpha}{\gamma} \left(\cos(\gamma \psi) \cos^2(\beta \chi) - \phi^2 \cos(\gamma \psi) + 2\phi \sin(\gamma \psi) \cos(\beta \chi) \right). \end{aligned} \quad (5.81)$$

Substituindo as eqs.(5.79)-(5.81) em (5.10), obtemos (ver apêndice B.3)

$$W_\phi^{(3)}(\phi, \chi, \psi) = \alpha(1 - \phi^2) + \alpha a_1 (\phi^2 - \sin^2(\beta \chi)) + \alpha a_2 \phi (\phi - \sin(\beta \chi)) \\ + \alpha a_4 (\phi^2 - \sin^2(\gamma \psi)) + \alpha a_5 \phi (\phi - \sin(\gamma \psi)), \quad (5.82)$$

$$W_\chi^{(3)}(\phi, \chi, \psi) = \frac{\alpha}{\beta}(1 - b_4) \cos(\beta \chi) + \alpha \beta \left(2a_1 + \frac{a_2}{2}\right) \sin^2(\beta \chi) \cos(\beta \chi) + \frac{\alpha b_4}{\beta} \cos(\gamma \psi) \\ - \alpha \beta a_1 \phi \sin(2\beta \chi) - \frac{\alpha \beta a_2}{2} \phi^2 \cos(\beta \chi), \quad (5.83)$$

$$W_\psi^{(3)}(\phi, \chi, \psi) = \frac{\alpha}{\gamma} \cos(\gamma \psi) + \alpha \gamma \left(2a_4 + \frac{a_5}{2}\right) \sin^2(\gamma \psi) \cos(\gamma \psi) - \alpha \gamma a_4 \phi \sin(2\gamma \psi) \\ - \frac{\alpha \gamma a_5}{2} \phi^2 \cos(\gamma \psi) + \frac{\alpha \gamma b_4}{\beta^2} (\gamma \psi - \beta \chi) \sin(\gamma \psi). \quad (5.84)$$

Ao integrarmos as expressões acima, obtemos o superpotencial de três campos

$$W^{(3)}(\phi, \chi, \psi) = \alpha \phi - \alpha(1 - a_1 - a_2 - a_4 - a_5) \frac{\phi^3}{3} - \alpha a_1 \phi \sin^2(\beta \chi) - \frac{\alpha a_2}{2} \phi^2 \sin(\beta \chi) \\ - \alpha a_4 \phi \sin^2(\gamma \psi) - \frac{\alpha a_5}{2} \phi^2 \sin(\gamma \psi) + \frac{\alpha}{3} \left(2a_1 + \frac{a_2}{2}\right) \sin^3(\beta \chi) \\ + \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - b_4) \sin(\beta \chi) + \frac{\alpha b_4}{\beta^2} (\beta \chi - \gamma \psi) \cos(\gamma \psi) \\ + \frac{\alpha}{\gamma^2} \left(1 + \frac{b_4 \gamma^2}{\beta^2}\right) \sin(\gamma \psi) + \frac{\alpha}{3} \left(2a_4 + \frac{a_5}{2}\right) \sin^3(\gamma \psi). \quad (5.85)$$

Este novo superpotencial estendido ($\phi^4 + sG_1 + sG_2$) acopla os respectivos campos ϕ^4 com os dois sG. As configurações estáticas (5.77) são soluções BPS de suas equações de primeira ordem, conectando os mínimos $m_1 = \left(-1, -\frac{\pi}{2\beta}, -\frac{\pi}{2\gamma}\right)$ e $m_2 = \left(1, \frac{\pi}{2\beta}, \frac{\pi}{2\gamma}\right)$, com energia

$$E_{BPS} = 2\alpha \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right). \quad (5.86)$$

Para verificarmos a estabilidade utilizemos o superpotencial (5.85) e as configurações estáticas BPS (5.77) na matriz do operador (5.24), obtendo

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -2\alpha \tanh(\alpha x) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(b_4 - 1) \tanh(\alpha x) & -\frac{\alpha \gamma b_4}{\beta} \tanh(\alpha x) \\ 0 & -\frac{\alpha \gamma b_4}{\beta} \tanh(\alpha x) & \alpha \left(\frac{\gamma^2 b_4}{\beta^2} - 1\right) \tanh(\alpha x) \end{pmatrix}, \quad (5.87)$$

onde escolhemos $a_5 = -2a_4$, e $a_2 = -2a_1$, por simplicidade. Ao diagonalizarmos a matriz acima, encontraremos os autovalores

$$u_0 = -2\alpha \tanh(\alpha x), \quad u_+ = -\alpha \tanh(\alpha x), \quad u_- = -\mu \tanh(\alpha x), \quad (5.88)$$

em que $\mu = \alpha - \alpha b_4 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)$. Deste modo obtemos os seguintes potenciais mecânico-quânticos

$$U_0 = 4\alpha^2 - 6\alpha^2 \operatorname{sech}^2(\alpha x), \quad (5.89)$$

$$U_+ = \alpha^2 - 2\alpha^2 \operatorname{sech}^2(\alpha x), \quad (5.90)$$

$$U_- = \mu^2 - \mu(\mu + \alpha) \operatorname{sech}^2(\alpha x), \quad (5.91)$$

os quais correspondem novamente o potencial Rosen-Morse II (A.1). Note que o potencial U_0 já foi estudado em (5.40), onde vimos que possui os autovalores $E_0 = 0$, e $E_1 = 3\alpha^2$. Os parâmetros para o potencial U_+ são $A = \alpha$, e $B = 0$, com um único autovalor $E_0 = 0$. O potencial U_- possui como parâmetros $A = \mu$, e $B = 0$, contudo neste caso teremos que o número de autovalores será dado pela condição $0 \leq k < 1 - b_4 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)$, de forma que devemos exigir que $b_4 < \frac{\beta^2}{(\beta^2 + \gamma^2)}$, a fim de garantirmos a estabilidade. Além disso, vemos que para valores $0 < b_4 < \frac{\beta^2}{(\beta^2 + \gamma^2)}$, haverá somente um autovalor $E_0 = 0$. Enquanto para $b_4 < 0$, notemos que o número de estados ligados aumenta quando b_4 diminui, de modo que o potencial poderá ter mais do que um autovalor não negativo, garantindo desta forma a estabilidade das soluções BPS.

5.4.1 Projeção do potencial V

Podemos usufruir ainda mais do novo modelo adquirido nesta seção. Por exemplo, se derivarmos o potencial a partir de (5.85), e projetarmos no plano (χ, ψ) , obtemos

$$\begin{aligned} V(0, \chi, \psi) = \frac{\alpha^2}{2} & \left[\frac{1}{\beta^2} \left(1 - b_4 + 2a_1 \beta^2\right)^2 \cos^2(\beta \chi) + \left(\frac{b_4^2}{\beta^2} + \frac{(1 + 2\gamma^2(1 - a_1))^2}{\gamma^2} \right) \cos^2(\gamma \psi) \right. \\ & + \frac{2b_4}{\beta^2} \left(1 - b_4 + 2a_1 \beta^2\right) \cos(\beta \chi) \cos(\gamma \psi) \\ & + 2a_1(1 - a_1) \cos^2(\beta \chi) \cos^2(\gamma \psi) \\ & - 4a_1 b_4 \cos^3(\beta \chi) \cos(\gamma \psi) + a_1 \left(a_1 + 4(b_4 - 1) - 8a_1 \beta^2 \right) \cos^4(\beta \chi) \\ & + (1 - a_1) \left((1 - a_1)(1 - 8\gamma^2) - 4 \right) \cos^4(\gamma \psi) + 4a_1^2 \beta^2 \cos^6(\beta \chi) \\ & - \frac{b_4}{\beta^2} (\beta \chi - \gamma \psi) \sin(2\gamma \psi) \left(1 + 2(1 - a_1) \gamma^2 \sin^2(\gamma \psi) \right) \\ & \left. + 4\gamma^2(1 - a_1)^2 \cos^6(\gamma \psi) + \frac{\gamma^2 b_4^2}{\beta^4} (\beta \chi - \gamma \psi)^2 \sin^2(\gamma \psi) \right], \quad (5.92) \end{aligned}$$

onde temos considerado $a_2 = a_5 = 0$, e $a_4 = 1 - a_1$, sem perda de generalidade. Contudo, devemos esclarecer que este potencial não é mais BPS e não possui as configurações sine-Gordon como soluções estáticas, apesar de seus mínimos estejam localizadas em

$$m_k = \left(\frac{\pi}{2\beta}(2k - 1), \frac{\pi}{2\gamma}(2k - 1) \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.93)$$

Embora ser um potencial interessante (ver figura 13), não conseguimos encontrar nenhuma solução analítica explícita para ele. Seria interessante procurar pelo menos soluções numéricas e também explorar mais esse potencial.

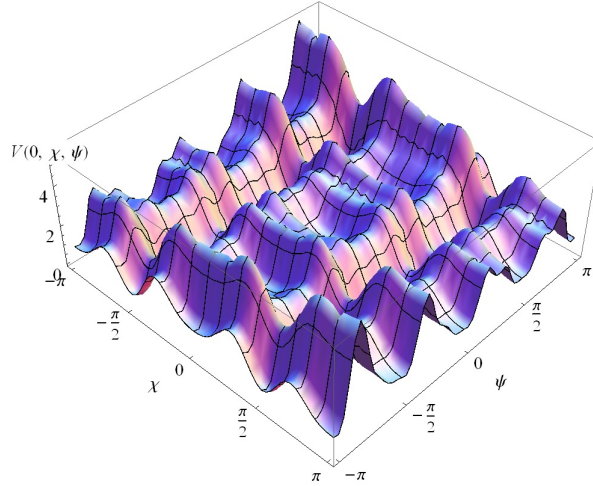


Figura 13 – Gráfico da projeção do potencial $V(0, \chi, \psi)$ para os valores $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $a_1 = 2$, e $b_4 = 0.1$.

5.4.2 Projeção do superpotencial W

Como outro exemplo, consideremos agora $\phi = \pm 1$ na expressão (5.85) com $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$, obtemos um superpotencial efetivo para dois campos e seu correspondente potencial V , da forma

$$W_{\text{ef}}^{(2)}(\chi, \psi) = \frac{\alpha(1 - b_4)}{\beta^2} \sin(\beta\chi) + \alpha \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{b_4}{\beta^2} \right) \sin(\gamma\psi) + \frac{\alpha b_4}{\beta^2} (\beta\chi - \gamma\psi) \cos(\gamma\psi), \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned} V_{\text{ef}}(\chi, \psi) = & \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{1}{\beta^2} (1 - b_4)^2 \cos^2(\beta\chi) + \left(\frac{b_4^2}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) \cos^2(\gamma\psi) \right. \\ & + \frac{\gamma^2 b_4^2}{\beta^4} (\beta\chi - \gamma\psi)^2 \sin^2(\gamma\psi) - \frac{b_4}{\beta^2} (\beta\chi - \gamma\psi) \sin(2\gamma\psi) \\ & \left. + \frac{2b_4}{\beta^2} (1 - b_4) \cos(\beta\chi) \cos(\gamma\psi) \right], \quad (5.95) \end{aligned}$$

como ilustrado nos gráficos da figura 14. Observe que, embora esse potencial esteja de alguma forma contido na projeção $V(0, \chi, \psi)$, eles são realmente diferentes, mesmo se definirmos $a_1 = 0$ na eq.(5.92). As soluções estáticas para os campos sine-Gordon, dados em (5.77), são soluções BPS da equação de primeira ordem para o superpotencial efetivo (5.94). É importante notar também que o simples acoplamento entre os dois campos sine-Gordon contidos no último termo da eq.(5.94), difere de alguns modelos previamente construídos na literatura. Em particular, se eliminarmos o termo de acoplamento definindo $b_4 = 0$, então nosso potencial assumirá a forma do modelo sine-Gordon de duas frequências não integrável considerado em [52], onde os autores estudaram como o espectro de partículas do modelo muda considerando a segunda interação como uma perturbação do modelo original sine-Gordon integrável. Além disso, após redefinições adequadas do superpotencial (5.94), também com $b_4 = 0$, podemos ver como um caso limite do pré-potencial

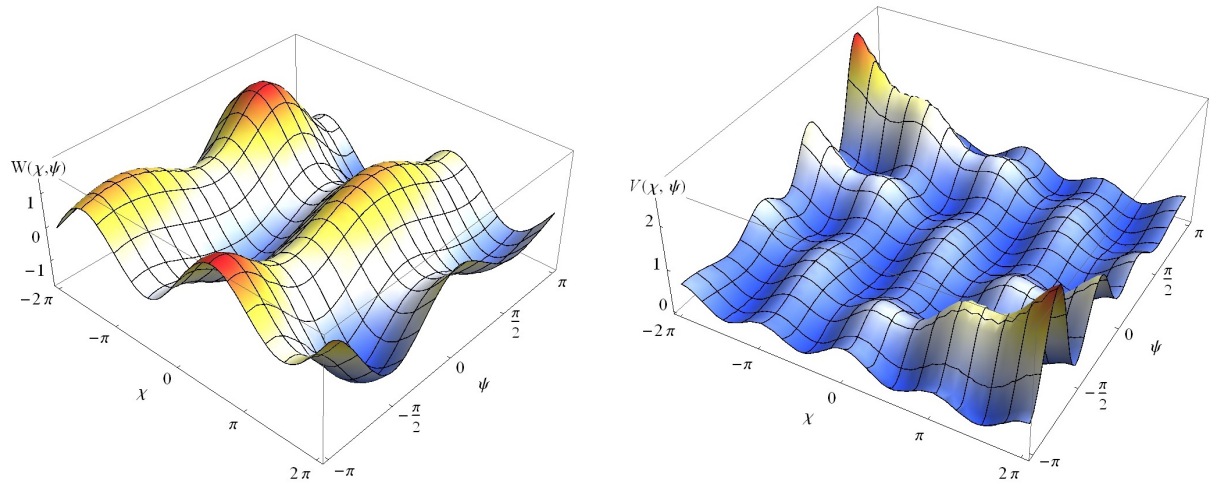


Figura 14 – Superpotencial efetivo de dois campos (na esquerda) e seu potencial associado (na direita) para os dois campos sine-Gordon acoplados. Para ambos, temos plotado os valores $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, and $b_4 = 0.1$.

FKZ (Ferreira, Klimas e Zakrewski) baseado na algebra de Lie $su(3)$ ¹ [30]. No entanto, seu potencial V será bastante diferente, uma vez que uma matriz constante, real e definida positiva η_{ab} , que é basicamente uma versão modificada da matriz Cartan associada, está diretamente envolvida na definição dos modelos FKZ. Apesar dessas diferenças, seria interessante analisar se existem pontos comuns entre os dois métodos de construção de teorias de múltiplos campos escalares.

¹ Na verdade, o modelo contém três parâmetros γ_1, γ_2 , e γ_3 , e então a equivalência exata exigirá que o último desapareça.

6 Conclusões e perspectivas

Nesta dissertação, temos construído novos modelos acoplados de dois e três campos escalares reais que possuem soluções BPS em $(1+1)$ dimensões, utilizando para tal fim um método introduzido recentemente, chamado de método de extensão [26, 29]. No cenário de dois campos escalares, este método consiste em iniciarmos com quaisquer dois modelos (não necessariamente diferentes) de um campo escalar que suportam configurações BPS, as quais são conectadas por um mapeamento conhecido como função de deformação [34, 36]. Utilizando esta função de deformação, e sua inversa, podemos expressar as respectivas derivadas dos superpotenciais em relação aos campos nas equações de primeira em três diferentes expressões, as quais são equivalentes para cada modelo. O novo método então consiste em estender a teoria para o cenário de dois campos acoplados pelos ansatz (4.5) e (4.6), com os parâmetros arbitrários satisfazendo (4.7), onde as funções g são introduzidas a fim de garantirmos a suavidade do superpotencial pela condição (4.8). A generalização para o cenário de três campos escalares acoplados é direta, ao considerarmos o ansatz na forma dada pelas eqs.(5.6)-(5.8) com os parâmetros satisfazendo (5.9), onde a condição de suavidade do superpotencial será agora dada por (5.10). Além disso, verificamos que os modelos estendidos construídos são de fato BPS, possuindo como soluções as correspondentes configurações já conhecidas para as respectivas teorias de um campo escalar.

No desenvolvimento deste trabalho temos considerado algumas teorias BPS de um campo escalar bem conhecidas na literatura, tais como a teoria ϕ^4 , a teoria tipo φ^6 , o modelo sine-Gordon, o modelo-E, e a teoria ζ^{4f} invertida não-BPS. Obtemos pelo método de extensão novas teorias interessantes de dois e três campos escalares BPS, onde temos acoplado respectivamente dois e três dos campos definidos acima. Vimos que, em geral, é possível que o superpotencial estendido apresentem setores topológicos adicionais podendo eles serem BPS ou não. Como exemplo podemos citar as novas soluções BPS (5.64) derivadas do modelo estendido $(\phi^4 + sG + E)$, e a projeção não-BPS (5.92) derivada do modelo $(\phi^4 + sG_1 + sG_2)$. Notamos também que existe diversas possibilidades nas escolhas dos parâmetros e arranjo dos termos, que podem ou não gerar resultados finais distintos, assim como os vastos números de modelos distintos para além dos que temos desenvolvido aqui. Em cada modelo BPS estendido que obtivemos, buscamos desenvolver o estudo da estabilidade linear, onde nossa proposta foi simplificar ao máximo os problemas de autovalores com a finalidade de descrevermos explícita e analiticamente os potenciais mecânico-quânticos. Para os nossos modelos desenvolvidos, tanto no cenário de dois campos quanto no de três campos escalares, observamos que em geral foi possível cumprir com este objetivo escolhendo convenientemente alguns valores finitos para os

parâmetros arbitrários, onde concluímos serem todos estáveis. Contudo, esta simplificação não foi possível de ser realizada nos casos dos modelos que acoplam a teoria sine-Gordon com o modelo-E, de modo que para alguns valores finitos dos parâmetros podemos somente garantir que os potenciais associados apresentam uma configuração qualitativa que sugere a existência da estabilidade (ver figura 11). Nesses casos ao considerarmos valores pequenos dos parâmetros (ver figura 12) foi possível realizarmos um tratamento perturbativo, garantindo no máximo a estabilidade no caso de acoplamento fraco ($\lambda \lesssim 10^{-2}$), onde consideramos correções de até primeira ordem. Assim, se desejarmos desenvolver qualquer estudo mais geral precisaremos de um tratamento numérico mais rigoroso. Vale a pena destacar também que a maioria dos potenciais mecânico-quânticos obtidos apresentaram a configuração dos potenciais exatamente solúveis Rosen-Morse II e Scarf II, os quais são estes bem conhecidos na literatura, o que facilitou grandemente o estudo da estabilidade.

Existe ainda uma diversidade de propostas e questões que não foram tratadas neste trabalho. Como já citado, podemos investigar outras possíveis soluções analíticas ou numéricas para os novos potenciais estendidos, bem como um estudo mais rigoroso do problema da estabilidade. Também pode ser estudado o comportamento e a dinâmica das colisões entre as soluções dos modelos estendidos [54]-[66], principalmente dos defeitos topológicos como solitons, derivados do modelo sine-Gordon. Além disso, podemos investigar a possibilidade de construir novos modelos estendidos de multcampos a partir dos modelos desenvolvidos neste trabalho, usando o método de deformação para múltiplos campos [23, 24].

Almejamos abordar essas questões, e outras relacionadas, em trabalhos futuros.

APÊNDICE A – Potenciais associados exatamente solúveis

O potencial exatamente solúvel Rosen-Morse II (ou potencial Pöschl-Teller modificado) é bem conhecido e pode ser escrito da seguinte forma [39],

$$U(x) = A^2 + \frac{B^2}{A^2} - A(A + \alpha) \operatorname{sech}^2(\alpha x) + 2B \tanh(\alpha x), \quad (\text{A.1})$$

onde $\alpha > 0$, sendo A e B parâmetros reais arbitrários. Os estados ligados possuem os seguintes autovalores,

$$E_k = A^2 + \frac{B^2}{A^2} - (A - k\alpha)^2 - \frac{B^2}{(A - k\alpha)^2}, \quad 0 \leq k < \frac{(A - \sqrt{|B|})}{\alpha}, \quad (\text{A.2})$$

sendo $k \in \mathbb{N}$. Ao impor a condição de estabilidade, descobrimos que

$$A > 0, \quad \text{and} \quad |B| < A^2. \quad (\text{A.3})$$

Além disso, as correspondentes autofunções de onda são dadas por

$$\psi_k(x) = (1 - \tanh(\alpha x))^{(s+t-k)/2} (1 + \tanh(\alpha x))^{(s-t-k)/2} P_k^{(s+t-k, s-t-k)}(\tanh(\alpha x)), \quad (\text{A.4})$$

onde $P_k^{(\alpha, \beta)}$ são os polinômios de Jacobi, e

$$s = A/\alpha, \quad t = \frac{B}{\alpha^2(s-k)}. \quad (\text{A.5})$$

Agora, vamos considerar outro potencial perfeitamente solúvel bem conhecido, chamado de potencial de Scarf II [39],

$$U(x) = A^2 + (B^2 - A(A + \alpha)) \operatorname{sech}^2(\alpha x) + B(2A + \alpha) \operatorname{sech}(\alpha x) \tanh(\alpha x), \quad (\text{A.6})$$

onde α , A , e B são parâmetros reais. Seus estados ligados correspondentes possuem autovalores de energia dados por

$$E_k = A^2 - (A - k\alpha)^2, \quad 0 \leq k < \frac{A}{\alpha}, \quad (\text{A.7})$$

sendo $k \in \mathbb{N}$. Suas autofunções associadas podem ser escritas da seguinte forma,

$$\psi_k(x) = i^k (\operatorname{sech}(\alpha x))^s e^{-u \arctan(\sinh(\alpha x))} P_k^{(iu-s-1/2, -iu-s-1/2)}(i \sinh(\alpha x)), \quad (\text{A.8})$$

onde $P_k^{(\alpha, \beta)}$ são novamente os polinômios de Jacobi, $s = A/\alpha$, e $u = B/\alpha$. Podemos notar que ambos os potenciais (A.1) e (A.6) coincidem quando $B = 0$.

APÊNDICE B – Cálculo das funções g para sistemas de três campos

Aqui, apresentaremos as derivações explícitas da funções g para os modelos de três campos construídos no capítulo 5. Em princípio, são funções arbitrárias construídas de forma semelhante ao superpotencial, usando as funções de deformação e as suas inversas correspondentes. A forma específica é determinada pelas seguintes restrições (5.10)

$$W_{\phi\phi}^{(3)} = W_{\phi\phi}^{(3)}, \quad W_{\phi\chi}^{(3)} = W_{\chi\phi}^{(3)}, \quad W_{\varphi\chi}^{(3)} = W_{\chi\varphi}^{(3)}, \quad (\text{B.1})$$

que são basicamente condições de consistência, garantindo uma função superpotencial contínua e bem definida, dada pelos ansatz (5.6) - (5.8).

B.1 O modelo estendido $(\phi^4 + \varphi_l^6 + \zeta^{4I})$

Vamos começar com a derivação das funções g para o modelo estendido $(\phi^4 + \varphi_l^6 + \zeta^{4I})$. Das condições de consistência eq.(B.1), e usando as eqs.(5.32)-(5.34) com o ansatz (5.6)-(5.8), nós obtemos as seguintes restrições

$$\begin{aligned} 0 = & p_1 g_\varphi(\varphi) + p_2 g_\varphi(\phi, \varphi) + p_6 g_\varphi(\varphi, \zeta) + p_7 g_\varphi(\phi, \varphi, \zeta) - q_5 \tilde{g}_\phi(\phi, \zeta) - q_3 \tilde{g}_\phi(\phi) - q_2 \tilde{g}_\phi(\phi, \varphi) \\ & - q_7 \tilde{g}_\phi(\phi, \varphi, \zeta) - \alpha \epsilon (a_2 - 2b_3) \phi + \frac{\alpha \epsilon b_5}{\beta} \frac{\phi \zeta}{\sqrt{1 - \phi^2}} + \alpha b_2 \varphi + 2 \alpha \epsilon a_1 (1 - |\varphi|) \\ & + \frac{\alpha \epsilon a_6}{\beta} \frac{\zeta (1 - |\varphi|)}{\sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2}} - \frac{\alpha \epsilon b_7}{2\beta} \frac{\zeta (1 - |\varphi|)}{\sqrt{1 - \phi (|\varphi| - 1)}} - \frac{\alpha \epsilon a_7}{2\beta} \frac{\phi \zeta}{\sqrt{1 - \phi (|\varphi| - 1)}}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

e

$$\begin{aligned} 0 = & p_4 g_\zeta(\zeta) + p_5 g_\zeta(\phi, \zeta) + p_6 g_\zeta(\varphi, \zeta) + p_7 g_\zeta(\phi, \varphi, \zeta) - r_5 \hat{g}_\phi(\phi, \zeta) - r_3 \hat{g}_\phi(\phi) \\ & - r_2 \hat{g}_\phi(\phi, \varphi) - r_7 \hat{g}_\phi(\phi, \varphi, \zeta) + \alpha \left(\frac{2a_4}{\beta^2} + c_5 \right) \zeta + \frac{\alpha}{\beta} (a_5 + \beta^2 c_3) \sqrt{1 - \phi^2} \\ & + \frac{\alpha a_7}{\beta} \sqrt{1 - \phi (|\varphi| - 1)} - \alpha \beta c_3 \frac{\phi^2}{\sqrt{1 - \phi^2}} + \frac{\alpha}{\beta} (a_6 + \beta^2 c_2) \sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2} \\ & - \frac{\alpha \beta \omega c_7}{2} \frac{(|\varphi| - 1)}{\sqrt{1 - \phi (|\varphi| - 1)}} \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

e ainda,

$$\begin{aligned}
 0 = & r_1 \hat{g}_\varphi(\varphi) + r_2 \hat{g}_\varphi(\phi, \varphi) + r_6 \hat{g}_\varphi(\varphi, \zeta) + r_7 \hat{g}_\varphi(\phi, \varphi, \zeta) - q_4 \tilde{g}_\zeta(\zeta) - q_5 \tilde{g}_\zeta(\phi, \zeta) - q_6 \tilde{g}_\zeta(\varphi, \zeta) \\
 & - q_7 \tilde{g}_\zeta(\phi, \varphi, \zeta) - \alpha \epsilon \left(c_6 + \frac{2}{\beta^2} b_4 \right) \zeta - \frac{\alpha \epsilon b_7}{\beta} \sqrt{1 - \phi(|\varphi| - 1)} \\
 & + \alpha \beta \epsilon c_2 \frac{\phi(|\varphi| - 1)}{\sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2}} - \frac{\alpha \epsilon}{\beta} (b_6 + \beta^2 c_1) \sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2} - \frac{\alpha \epsilon b_5}{\beta} \sqrt{1 - \phi^2} \\
 & + \alpha \beta \epsilon c_1 \frac{(|\varphi| - 1)^2}{\sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2}} + \frac{\alpha \beta \omega \epsilon c_7}{2} \frac{\phi}{\sqrt{1 - \phi(|\varphi| - 1)}} \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}}. \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

A fim de resolver o sistema de eqs.(B.2)-(B.4), escolhemos $p_2 = p_5 = p_6 = p_7 = q_2 = q_5 = q_6 = q_7 = r_1 = r_3 = r_5 = r_6 = r_7 = 0$, e $a_6 = a_7 = b_7 = c_2 = c_7 = 0$. A partir disso, obtemos

$$p_1 g_\varphi(\varphi) = 2\alpha \left(a_1 - \frac{b_2}{2} \right) \varphi - 2\alpha \epsilon a_1, \tag{B.5a}$$

$$p_4 g_\zeta(\zeta) = -\alpha \left(\frac{2a_4}{\beta^2} + c_5 \right) \zeta, \tag{B.5b}$$

e

$$q_3 \tilde{g}_\phi(\phi) = \alpha \epsilon (2b_3 - a_2) \phi, \tag{B.5c}$$

$$q_4 \tilde{g}_\zeta(\zeta) = -\alpha \epsilon \left(c_6 + \frac{2}{\beta^2} b_4 \right) \zeta, \tag{B.5d}$$

e também

$$r_2 \hat{g}_\phi(\phi, \varphi) = \frac{\alpha}{\beta} (a_5 + \beta^2 c_3) \sqrt{1 - \phi^2} - \alpha \beta c_3 \frac{\phi^2}{\sqrt{1 - \phi^2}} + \alpha \beta c_2 \sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2}, \tag{B.5e}$$

$$\begin{aligned}
 r_2 \hat{g}_\varphi(\phi, \varphi) = & -\alpha \beta \epsilon c_2 \frac{\phi(|\varphi| - 1)}{\sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2}} + \frac{\alpha}{\beta} \epsilon (b_6 + \beta^2 c_1) \sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2} \\
 & - \alpha \beta \epsilon c_1 \frac{(|\varphi| - 1)^2}{\sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2}}. \tag{B.5f}
 \end{aligned}$$

Então, integrando essas expressões respectivamente, encontraremos

$$p_1 g(\varphi) = \alpha \left(a_1 - \frac{b_2}{2} \right) \varphi^2 - 2 \alpha \epsilon a_1 \varphi, \quad (\text{B.6a})$$

$$p_4 g(\zeta) = -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{2a_4}{\beta^2} + c_5 \right) \zeta^2, \quad (\text{B.6b})$$

$$q_3 \tilde{g}(\phi) = \frac{\alpha}{2} \epsilon (2b_3 - a_2) \phi^2, \quad (\text{B.6c})$$

$$q_4 \tilde{g}(\zeta) = -\frac{\alpha}{2} \epsilon \left(c_6 + \frac{2}{\beta^2} b_4 \right) \zeta^2 + C, \quad (\text{B.6d})$$

$$\begin{aligned} r_2 \hat{g}(\phi, \varphi) &= \frac{\alpha}{2\beta} \left((a_5 + 2\beta^2 c_3) \phi \sqrt{1 - \phi^2} + a_5 \arcsin(\phi) \right) \\ &\quad + \alpha \beta c_2 \phi \sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.6e})$$

$$\begin{aligned} r_2 \hat{g}(\phi, \varphi) &= \frac{\alpha}{2\beta} \left((b_6 + 2\beta^2 c_1) (|\varphi| - 1) \sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2} + b_6 \arcsin(|\varphi| - 1) \right) \\ &\quad + \alpha \beta c_2 \phi \sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.6f})$$

onde os parâmetros satisfazem as seguintes restrições,

$$a_1 = \frac{p_1}{p_4} \left(a_4 + \frac{\beta^2}{2} c_5 \right), \quad a_5 = b_6, \quad b_2 = 0, \quad c_1 = c_3, \quad (\text{B.7a})$$

$$\left(c_6 + \frac{2}{\beta^2} b_4 \right) = \frac{q_4}{q_3} \left(\frac{2b_3 - a_2}{\beta^2} \right), \quad C = \frac{\alpha q_4}{2 q_3} \epsilon (2b_3 - a_2). \quad (\text{B.7b})$$

Agora, as funções de deformação nos permitem escrever as funções g da seguinte maneira,

$$p_3 g(\phi) = -\frac{\alpha p_3}{p_4} \left(a_4 + \frac{\beta^2}{2} c_5 \right) (1 - \phi^2), \quad (\text{B.8a})$$

$$q_1 \tilde{g}(\varphi) = \frac{\alpha \epsilon}{2} (2b_3 - a_2) (|\varphi| - 1)^2, \quad (\text{B.8b})$$

$$r_4 \hat{g}(\zeta) = -\alpha \epsilon \left[\left(c_2 + c_3 + \frac{a_5}{2\beta^2} \right) \zeta \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}} + \frac{a_5}{2\beta} \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}} \right) \right]. \quad (\text{B.8c})$$

Usando os resultados acima na eqs.(6.11)-(6.13), teremos

$$\begin{aligned} W_\phi^{(3)}(\phi, \varphi, \zeta) &= -\frac{\alpha c_5}{2} \zeta^2 + \frac{\alpha}{\beta} a_5 \zeta \sqrt{1 - \phi^2} + \alpha \left(1 - a_2 + \frac{\beta^2}{2} c_5 \right) (1 - \phi^2) \\ &\quad + \alpha a_1 (1 - (|\varphi| - 1)^2) + \alpha a_2 (1 - \phi (|\varphi| - 1)) \\ &\quad + \frac{\alpha p_1}{p_4} \left(a_4 + \frac{\beta^2}{2} c_5 \right) \left[(1 - \phi^2) + \varphi^2 - 2|\varphi| \right], \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} W_\varphi^{(3)}(\phi, \varphi, \zeta) &= \frac{\alpha \epsilon b_4}{\beta^2} \zeta^2 + \frac{\alpha \epsilon \beta^2}{2} \frac{q_4}{q_3} \left(\frac{2b_3 - a_2}{\beta^2} \right) \left(1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2} \right) + \alpha \epsilon b_3 (1 - \phi^2) \\ &\quad + \alpha b_1 \varphi (2 - |\varphi|) + \frac{\alpha \epsilon a_5}{\beta} \zeta \sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2} \\ &\quad + \frac{\alpha \epsilon}{2} (2b_3 - a_2) (\phi^2 + (|\varphi| - 1)^2), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned}
 W_\zeta^{(3)}(\phi, \varphi, \zeta) &= -\alpha \epsilon \left(c_2 + c_3 + c_4 + \frac{a_5}{2\beta^2} \right) \zeta \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}} - \frac{\alpha \epsilon a_5}{2\beta} \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2}} \right) \\
 &+ \frac{\alpha a_5}{2\beta} \left(\phi \sqrt{1 - \phi^2} + \arcsin(\phi) \right) - \alpha \beta c_3 (|\varphi| - 1) \sqrt{1 - (|\varphi| - 1)^2} \\
 &- \alpha c_6 \zeta (|\varphi| - 1) - \alpha c_5 \phi \zeta.
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Ao integrar e comparar, vemos que também devemos ter $a_1 = a_5 = b_6 = c_1 = c_3 = 0$, e $p_1 = 0$. Além disso, isso exigirá que $q_4 = -2q_3$. Finalmente, podemos escrever o superpotencial da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 W^{(3)}(\phi, \varphi, \zeta) &= \frac{\alpha \beta^2}{3} \epsilon (1 - c_5 - c_6) \left(1 - \frac{\zeta^2}{\beta^2} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\alpha c_5}{2} \phi \zeta^2 - \frac{\alpha}{6} \left(b_4 + \frac{\beta^2}{2} c_6 \right) (|\varphi| - 1)^3 \\
 &+ \alpha \left(1 - a_2 + \frac{\beta^2}{2} c_5 \right) \phi \left(1 - \frac{\phi^2}{3} \right) - \frac{\alpha c_6}{2} \zeta^2 (|\varphi| - 1) \\
 &+ \alpha a_2 \phi \left[1 - \frac{\phi}{2} (|\varphi| - 1) \right] + \alpha \left(1 - b_1 + \frac{\beta^2}{2} c_6 \right) |\varphi| \\
 &+ \alpha b_1 \varphi^2 \left(1 - \frac{|\varphi|}{3} \right).
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Aqui, a fim de evitar expoentes racionais que podem gerar algumas dificuldades adicionais na análise da estabilidade linear do modelo, também escolheremos $c_5 = 1 - c_6$. Colocando todos esses resultados de volta, finalmente obteremos

$$\begin{aligned}
 W_\phi^{(3)}(\phi, \varphi, \zeta) &= \alpha(1 - \phi^2) + a_2 \phi (1 + \phi - |\varphi|) - \frac{1}{2}(1 - c_6) (\zeta^2 - \beta^2(1 - \phi^2)), \\
 W_\varphi^{(3)}(\phi, \varphi, \zeta) &= \frac{\alpha \epsilon}{2} \left((2 + c_6 \beta^2) (1 - (|\varphi| - 1)^2) - a_2 (\phi^2 - (|\varphi| - 1)^2) - c_6 \zeta^2 \right), \\
 W_\zeta^{(3)}(\phi, \varphi, \zeta) &= -\alpha \zeta (\phi - c_6 (1 + \phi - |\varphi|)).
 \end{aligned}$$

Após a integração, finalmente obtemos o seguinte superpotencial de três campos

$$\begin{aligned}
 W^{(3)}(\phi, \varphi, \zeta) &= \alpha \left(1 - a_2 + \frac{\beta^2}{2} (1 - c_6) \right) \phi \left(1 - \frac{\phi^2}{3} \right) - \frac{\alpha}{2} (1 - c_6) \phi \varphi^2 + \frac{\alpha a_2}{2} |\zeta| \\
 &- \frac{\alpha}{2} c_6 \varphi^2 (|\zeta| - 1) + \alpha a_2 \phi \left(1 - \frac{\phi}{2} (|\zeta| - 1) \right) + \frac{\alpha}{12} (2b_4 + c_6 \beta^2) \\
 &+ \frac{\alpha}{2} (2 - a_2 + \beta^2 c_6) \zeta^2 \left(1 - \frac{|\zeta|}{3} \right).
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

B.2 O modelo estendido ($\phi^4 + \text{sG} + \text{E}$)

Aqui, apresentamos a derivação explícita do superpotencial de três campos para o acoplamento de ϕ^4 , sine-Gordon e o modelo-E. A partir da eq.(B.1), e usando as eqs.(5.46)-(5.48), obtemos respectivamente

$$\begin{aligned}
 0 = & p_1 g_\chi(\chi) + p_2 g_\chi(\phi, \chi) + p_6 g_\chi(\eta, \chi) + p_7 g_\chi(\phi, \eta, \chi) - q_2 \tilde{g}_\phi(\phi, \chi) - q_3 \tilde{g}_\phi(\phi) - q_5 \tilde{g}_\phi(\phi, \eta) \\
 & - q_7 \tilde{g}_\phi(\phi, \eta, \chi) - 2 \alpha \beta a_1 \cos(\beta \chi) \sin(\beta \chi) + \frac{\alpha}{\beta} b_3 \frac{\phi}{\sqrt{1 - \phi^2}} - \alpha \beta a_2 \phi \cos(\beta \chi) \\
 & - \alpha \beta a_6 \cos(\beta \chi) \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) - \alpha \beta a_7 \phi \cos\left(\frac{\beta \chi}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right) \\
 & + \frac{2 \alpha b_2}{\beta} \left[2 \phi \cos(\beta \chi) + \frac{\phi^2}{\sqrt{1 - \phi^2}} \sin(\beta \chi) - \sqrt{1 - \phi^2} \sin(\beta \chi) \right] \\
 & + \frac{2 \alpha b_5}{\beta^2} \left[2 \phi \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) + \frac{\phi^2}{\sqrt{1 - \phi^2}} \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) \right. \\
 & \quad \left. - \sqrt{1 - \phi^2} \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) \right] \\
 & + \frac{2 \alpha b_7}{\beta} \sin\left(\frac{\beta \chi}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right) + \frac{\phi}{\sqrt{1 - \phi^2}} \sin\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right) \right], \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 0 = & p_4 g_\eta(\eta) + p_5 g_\eta(\phi, \eta) + p_6 g_\eta(\eta, \chi) + p_7 g_\eta(\phi, \eta, \chi) - r_2 \hat{g}_\phi(\phi, \chi) - r_3 \hat{g}_\phi(\phi) \\
 & - r_5 \hat{g}_\phi(\phi, \eta) - r_7 \hat{g}_\phi(\phi, \eta, \chi) - 2 \alpha a_4 \frac{1}{(1 + \eta)} \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) \\
 & + \alpha c_5 \frac{\phi}{\sqrt{1 - \phi^2}} (1 + \eta) - \alpha c_3 \left(1 - \frac{\phi}{\sqrt{1 - \phi^2}} \right) e^{\arcsin(\phi)} \\
 & - \alpha a_6 \frac{1}{(1 + \eta)} \sin(\beta \chi) \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) + \alpha c_2 \frac{\phi}{\sqrt{1 - \phi^2}} e^{\beta \chi} \\
 & - \alpha a_5 \frac{\phi}{(1 + \eta)} \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) + \alpha a_7 \frac{\phi}{(1 + \eta)} \sin\left(\frac{\beta \chi}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right) \\
 & + 2 \alpha c_7 (1 + \eta) \left[\sin\left(\frac{\beta \chi}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\phi}{\sqrt{1 - \phi^2}} \sin\left(\frac{\beta \chi}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right) \right], \tag{B.15}
 \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}
 0 = & q_4 \tilde{g}_\eta(\eta) + q_5 \tilde{g}_\eta(\phi, \eta) + q_6 \tilde{g}_\eta(\eta, \chi) + q_7 \tilde{g}_\eta(\phi, \eta, \chi) - r_1 \hat{g}_\chi(\chi) - r_2 \hat{g}_\chi(\phi, \chi) \\
 & - r_6 \hat{g}_\chi(\eta, \chi) - r_7 \hat{g}_\chi(\phi, \eta, \chi) + \alpha \beta c_6 (1 + \eta) \sin(\beta \chi) \\
 & - \frac{\alpha b_4}{\beta} \frac{1}{(1 + \eta)} \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) - \alpha \beta c_1 e^{\beta \chi} (\cos(\beta \chi) - \sin(\beta \chi)) \\
 & - \alpha \beta c_2 \sqrt{1 - \phi^2} e^{\beta \chi} - \frac{\alpha b_6}{\beta} \frac{1}{(1 + \eta)} \cos\left(\frac{\beta \chi}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right) \\
 & + \frac{\alpha b_5}{\beta} \left[\frac{(2\phi^2 - 1)}{(1 + \eta)} \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) + \frac{2\phi \sqrt{1 - \phi^2}}{(1 + \eta)} \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) \right] \\
 & + \frac{\alpha b_7}{\beta} \left[\frac{\phi}{(1 + \eta)} \sin\left(\frac{\beta \chi}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\sqrt{1 - \phi^2}}{(1 + \eta)} \sin\left(\frac{\beta \chi}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right) \right] \\
 & - \alpha \beta c_7 (1 + \eta) \left[\sqrt{1 - \phi^2} \cos\left(\frac{\beta \chi}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right) \right. \\
 & \quad \left. - \phi \cos\left(\frac{\beta \chi}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right) \right]. \tag{B.16}
 \end{aligned}$$

Escolhendo $p_1 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_7 = r_1 = r_2 = r_3 = r_6 = r_7 = 0$, e $a_6 = a_7 = b_5 = b_7 = c_2 = c_7 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
 p_2 g_\chi(\phi, \chi) = & \alpha \beta a_1 \sin(2\beta \chi) + \alpha \beta a_2 \phi \cos(\beta \chi) - \frac{\alpha b_3}{\beta} \frac{\phi}{\sqrt{1 - \phi^2}} \\
 & - \frac{2\alpha b_2}{\beta} \left[2\phi \cos(\beta \chi) + \frac{\phi^2}{\sqrt{1 - \phi^2}} \sin(\beta \chi) - \sqrt{1 - \phi^2} \sin(\beta \chi) \right], \tag{B.17a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_6 \tilde{g}_\eta(\eta, \chi) = & \frac{\alpha b_4}{\beta} \frac{1}{(1 + \eta)} \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) + \alpha \beta c_1 e^{\beta \chi} (\cos(\beta \chi) - \sin(\beta \chi)) \\
 & - \alpha \beta c_6 (1 + \eta) \sin(\beta \chi) + \frac{\alpha b_6}{\beta} \frac{1}{(1 + \eta)} \cos\left(\frac{\beta \chi}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{4} \ln(1 + \eta)^2\right), \tag{B.17b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_5 \hat{g}_\phi(\phi, \eta) = & -2\alpha a_4 \frac{1}{(1 + \eta)} \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) \\
 & - \alpha a_5 \frac{\phi}{(1 + \eta)} \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) - \alpha c_3 \left(1 - \frac{\phi}{\sqrt{1 - \phi^2}}\right) e^{\arcsin(\phi)} \\
 & + \alpha c_5 \frac{\phi}{\sqrt{1 - \phi^2}} (1 + \eta). \tag{B.17c}
 \end{aligned}$$

Agora, ao realizar as integrações, encontramos

$$g(\phi, \chi) = -\frac{\alpha a_1}{2 p_2} \cos(2\beta \chi) - \frac{\alpha b_3}{\beta p_2} \frac{\phi \chi}{\sqrt{1-\phi^2}} + \alpha \frac{a_2}{p_2} \phi \sin(\beta \chi) - \frac{2\alpha b_2}{\beta^2 p_2} \left[2\phi \sin(\beta \chi) + \sqrt{1-\phi^2} \cos(\beta \chi) - \frac{\phi^2}{\sqrt{1-\phi^2}} \cos(\beta \chi) \right], \quad (\text{B.18a})$$

$$\tilde{g}(\eta, \chi) = -\frac{\alpha b_4}{\beta q_6} \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1+\eta)^2\right) + \alpha \beta \frac{c_1}{q_6} \eta e^{\beta \chi} (\cos(\beta \chi) - \sin(\beta \chi)) - \frac{2\alpha b_6}{\beta q_6} \cos\left(\frac{\beta \chi}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{4} \ln(1+\eta)^2\right) - \alpha \beta \frac{c_6}{q_6} \left(\eta + \frac{\eta^2}{2}\right) \sin(\beta \chi), \quad (\text{B.18b})$$

$$\hat{g}(\phi, \eta) = -2\alpha \frac{a_4}{r_5} \frac{\phi}{(1+\eta)} \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1+\eta)^2\right) \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1+\eta)^2\right) - \alpha \frac{c_3}{r_5} \sqrt{1-\phi^2} e^{\arcsin(\phi)} - \frac{\alpha a_5}{2 r_5} \frac{\phi^2}{(1+\eta)} \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1+\eta)^2\right) - \alpha \frac{c_5}{r_5} \sqrt{1-\phi^2} (1+\eta). \quad (\text{B.18c})$$

Além disso, podemos usar as funções de deformação, bem como suas funções inversas, para escrever

$$g(\phi) = -\frac{\alpha a_1}{2 p_2} \cos\left(2 \arcsin(\phi)\right) - \frac{\alpha b_3}{\beta^2 p_2} \frac{\phi}{\sqrt{1-\phi^2}} \arcsin(\phi) + \alpha \frac{a_2}{p_2} \phi^2 - \frac{2\alpha b_2}{\beta^2 p_2}, \quad (\text{B.19a})$$

$$\tilde{g}(\chi) = -\frac{\alpha b_4}{\beta q_6} \cos(\beta \chi) - \frac{2\alpha b_6}{\beta q_6} \cos^2\left(\frac{\beta \chi}{2}\right) - \frac{\alpha \beta c_6}{2 q_6} (e^{2\beta \chi} - 1) \sin(\beta \chi) + \alpha \beta \frac{c_1}{q_6} e^{\beta \chi} (e^{\beta \chi} - 1) (\cos(\beta \chi) - \sin(\beta \chi)), \quad (\text{B.19b})$$

$$\hat{g}(\eta) = -\frac{\alpha (4a_4 + a_5)}{2 r_5} \frac{1}{(1+\eta)} \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1+\eta)^2\right) \sin^2\left(\frac{1}{2} \ln(1+\eta)^2\right) - \alpha \frac{(c_3 + c_5)}{r_5} (1+\eta) \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1+\eta)^2\right). \quad (\text{B.19c})$$

Aqui, a fim de evitar possíveis divergências nas equações de primeira ordem nos mínimos do campo ϕ^4 , optamos por definir $b_2 = b_3 = 0$. Também vale a pena apontar que a aparente divergência no valor $\eta = -1$ é uma questão inerente do superpotencial do modelo-E, e no que diz respeito às soluções estáticas (5.44), este valor nunca será alcançado. Juntando todos esses resultados, finalmente conseguimos

$$W_\phi^{(3)}(\phi, \eta, \chi) = \alpha(1 - a_4 - a_5)(1 - \phi^2) + \alpha a_4 \cos^2\left(\frac{1}{2} \ln(1+\eta)^2\right) + \alpha a_5 \left[1 - \phi \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1+\eta)^2\right) \right], \quad (\text{B.20})$$

$$W_\chi^{(3)}(\phi, \eta, \chi) = \frac{\alpha}{\beta} \cos(\beta \chi) + \alpha \beta c_1 e^{\beta \chi} (1 + \eta - e^{\beta \chi}) (\cos(\beta \chi) - \sin(\beta \chi)), - \frac{\alpha \beta c_6}{2} \sin(\beta \chi) ((1 + \eta)^2 - e^{2\beta \chi}), \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned}
 W_\eta^{(3)}(\phi, \eta, \chi) = & \alpha c_1 e^{\beta \chi} \cos(\beta \chi) + \alpha c_6(1 + \eta) \cos(\beta \chi) \\
 & + \alpha(1 - c_1 - c_6)(1 + \eta) \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) \\
 & + \frac{\alpha a_4}{(1 + \eta)} \sin\left(\ln(1 + \eta)^2\right) \left[\sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) - \phi\right] \\
 & + \frac{\alpha a_5}{2(1 + \eta)} \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) \left[\sin^2\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) - \phi^2\right], \quad (\text{B.22})
 \end{aligned}$$

que depois de integrados nos conduzem ao superpotencial de três campos

$$\begin{aligned}
 W^{(3)}(\phi, \eta, \chi) = & \alpha(1 - a_4 - a_5) \left(\phi - \frac{\phi^3}{3}\right) + \frac{\alpha}{\beta^2} \sin(\beta \chi) \\
 & + \frac{\alpha}{5}(1 - c_1 - c_6)(1 + \eta)^2 \left[2 \cos\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) + \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right)\right] \\
 & + \alpha a_4 \left[\phi \cos^2\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) + \frac{2}{3} \sin^3\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right)\right] \\
 & + \alpha a_5 \left[\phi - \frac{\phi^2}{2} \sin\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right) + \frac{1}{6} \sin^3\left(\frac{1}{2} \ln(1 + \eta)^2\right)\right] \\
 & + \frac{\alpha c_1}{5} e^{\beta \chi} \left[(5(1 + \eta) - 3e^{\beta \chi}) \cos(\beta \chi) + e^{\beta \chi} \sin(\beta \chi)\right] \\
 & + \frac{\alpha c_6}{10} \left[(5(1 + \eta)^2 - e^{2\beta \chi}) \cos(\beta \chi) + 2e^{2\beta \chi} \sin(\beta \chi)\right]. \quad (\text{B.23})
 \end{aligned}$$

B.3 O modelo estendido $(\phi^4 + \mathbf{sG}_1 + \mathbf{sG}_2)$

Apresentaremos a derivação explícita do superpotencial de três campos para o acoplamento do modelo ϕ^4 com dois modelos sine-Gordon diferentes. A partir da eq.(B.1), e usando as eqs.(5.46)-(5.48), obtemos respectivamente

$$\begin{aligned}
 0 = & p_1 g_\chi(\chi) + p_2 g_\chi(\phi, \chi) + p_6 g_\chi(\chi, \psi) + p_7 g_\chi(\phi, \chi, \psi) - q_2 \tilde{g}_\phi(\phi, \chi) - q_3 \tilde{g}_\phi(\phi) \\
 & - q_5 \tilde{g}_\phi(\phi, \psi) - q_7 \tilde{g}_\phi(\phi, \chi, \psi) - 2 \alpha \beta a_1 \cos(\beta \chi) \sin(\beta \chi) - \alpha \beta \left(a_2 - \frac{2b_7}{\beta^2}\right) \phi \cos(\beta \chi) \\
 & + \frac{\alpha b_3}{\beta} \frac{\phi}{\sqrt{1 - \phi^2}} + \frac{\alpha b_2}{2\beta} \frac{\sin(\beta \chi)}{\sqrt{1 - \phi \sin(\beta \chi)}} + \frac{\alpha b_5}{2\beta} \frac{\sin(\gamma \psi)}{\sqrt{1 - \phi \sin(\gamma \psi)}} \\
 & + \alpha \beta a_7 \phi \left(2 \phi \sin(\beta \chi) \cos(\gamma \psi) + \cos(\beta \chi) \cos^2(\gamma \psi) - 2 \sin(\gamma \psi) \sin(\beta \chi) \cos(\beta \chi)\right) \\
 & - \alpha \beta a_6 \cos(\beta \chi) \sin(\gamma \psi) - \frac{2 \alpha b_7}{\beta} \sin(\beta \chi) \cos(\gamma \psi), \quad (\text{B.24})
 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
 0 = & p_4 g_\psi(\psi) + p_5 g_\psi(\phi, \psi) + p_6 g_\psi(\chi, \psi) + p_7 g_\psi(\phi, \chi, \psi) - r_2 \hat{g}_\phi(\phi, \chi) - r_3 \hat{g}_\phi(\phi) \\
 & - r_5 \hat{g}_\phi(\phi, \psi) - r_7 \hat{g}_\phi(\phi, \chi, \psi) + \frac{\alpha c_2}{2\gamma} \frac{\sin(\beta \chi)}{\sqrt{1 - \phi \sin(\beta \chi)}} + \frac{2\alpha c_7}{\gamma} \phi \cos(\beta \chi) \\
 & - \alpha \gamma \left(a_6 + \frac{2c_7}{\gamma^2} \right) \sin(\beta \chi) \cos(\gamma \psi) + \frac{\alpha c_3}{\gamma} \frac{\phi}{\sqrt{1 - \phi^2}} - 2\alpha \gamma a_4 \sin(\gamma \psi) \cos(\gamma \psi) \\
 & + \alpha \gamma a_7 \phi \left(2\phi \cos(\beta \chi) \sin(\gamma \psi) - 2\sin(\beta \chi) \sin(\gamma \psi) \cos(\gamma \psi) - \cos(\gamma \psi) \sin^2(\beta \chi) \right) \\
 & + \frac{\alpha c_5}{2\gamma} \frac{\sin(\gamma \psi)}{\sqrt{1 - \phi \sin(\gamma \psi)}} - \alpha \gamma a_5 \phi \cos(\gamma \psi), \tag{B.25}
 \end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
 0 = & q_4 \tilde{g}_\psi(\psi) + q_5 \tilde{g}_\psi(\phi, \psi) + q_6 \tilde{g}_\psi(\chi, \psi) + q_7 \tilde{g}_\psi(\phi, \chi, \psi) - r_1 \hat{g}_\chi(\chi) - r_2 \hat{g}_\chi(\phi, \chi) \\
 & - r_6 \hat{g}_\chi(\chi, \psi) - r_7 \hat{g}_\chi(\phi, \chi, \psi) + \frac{\alpha \beta c_1}{\gamma} \sin(\beta \chi) + \frac{\alpha \beta c_2}{2\gamma} \frac{\phi \cos(\beta \chi)}{\sqrt{1 - \phi \sin(\beta \chi)}} \\
 & - \frac{\alpha \beta c_7}{\gamma} \phi^2 \sin(\beta \chi) - \frac{\alpha \gamma b_4}{\beta} \sin(\gamma \psi) - \frac{\alpha \gamma b_5}{2\beta} \frac{\phi \cos(\gamma \psi)}{\sqrt{1 - \phi \sin(\gamma \psi)}} \\
 & + \frac{\alpha \beta c_6}{2\gamma} \frac{\cos(\beta \chi) \sin(\gamma \psi)}{\sqrt{1 - \sin(\beta \chi) \sin(\gamma \psi)}} - \frac{\alpha \gamma b_6}{2\beta} \frac{\sin(\beta \chi) \cos(\gamma \psi)}{\sqrt{1 - \sin(\beta \chi) \sin(\gamma \psi)}} \\
 & + \frac{\alpha \beta c_7}{\gamma} \sin(\beta \chi) \cos^2(\gamma \psi) - \frac{2\alpha \gamma b_7}{\beta} \sin(\gamma \psi) \cos(\gamma \psi) \cos(\beta \chi) \\
 & - \frac{2\alpha \beta c_7}{\gamma} \phi \cos(\beta \chi) \cos(\gamma \psi) - \frac{2\alpha \gamma b_7}{\beta} \phi \sin(\gamma \psi) \sin(\beta \chi). \tag{B.26}
 \end{aligned}$$

Agora, escolhendo $p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = p_7 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = q_7 = r_1 = r_2 = r_3 = r_5 = r_6 = 0$, e $a_7 = b_2 = b_3 = b_5 = b_6 = c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = 0$, obtemos

$$p_6 g_\chi(\chi, \psi) = \alpha \beta a_6 \cos(\beta \chi) \sin(\gamma \psi) + \frac{2\alpha b_7}{\beta} \sin(\beta \chi) \cos(\gamma \psi), \tag{B.27a}$$

$$p_6 g_\chi(\chi, \psi) = \alpha \gamma \left(a_6 + \frac{2c_7}{\gamma^2} \right) \cos(\gamma \psi) \sin(\beta \chi), \tag{B.27b}$$

$$q_2 \tilde{g}_\phi(\phi, \chi) = -2\alpha \beta a_1 \sin(\beta \chi) \cos(\beta \chi) - \alpha \beta \left(a_2 - \frac{2b_7}{\beta^2} \right) \phi \cos(\beta \chi), \tag{B.27c}$$

$$r_7 \hat{g}_\phi(\phi, \chi, \psi) = \frac{2\alpha c_7}{\gamma} \phi \cos(\beta \chi) - 2\alpha \gamma a_4 \sin(\gamma \psi) \cos(\gamma \psi) - \alpha \gamma a_5 \phi \cos(\gamma \psi), \tag{B.27d}$$

$$\begin{aligned}
 r_7 \hat{g}_\chi(\phi, \chi, \psi) = & \frac{\alpha \beta c_1}{\gamma} \sin(\beta \chi) - \frac{\alpha \beta c_7}{\gamma} \phi^2 \sin(\beta \chi) + \frac{\alpha \beta c_7}{\gamma} \sin(\beta \chi) \cos^2(\gamma \psi) \\
 & - \frac{\alpha \gamma b_4}{\beta} \sin(\gamma \psi) - \frac{2\alpha \gamma b_7}{\beta} \sin(\gamma \psi) \cos(\gamma \psi) \cos(\beta \chi) \\
 & - \frac{2\alpha \beta c_7}{\gamma} \phi \cos(\beta \chi) \cos(\gamma \psi) - \frac{2\alpha \gamma b_7}{\beta} \phi \sin(\gamma \psi) \sin(\beta \chi). \tag{B.27e}
 \end{aligned}$$

Então, realizando as integrações encontramos

$$p_6 g(\chi, \psi) = \alpha a_6 \sin(\beta \chi) \sin(\gamma \psi), \quad (\text{B.28a})$$

$$q_2 \tilde{g}(\phi, \chi) = -2 \alpha \beta a_1 \phi \sin(\beta \chi) \cos(\beta \chi) - \frac{\alpha \beta}{2} a_2 \phi^2 \cos(\beta \chi), \quad (\text{B.28b})$$

$$\begin{aligned} r_7 \hat{g}(\phi, \chi, \psi) &= -\frac{\alpha c_1}{\gamma} \cos(\beta \chi) - 2 \alpha \gamma a_4 \phi \sin(\gamma \psi) \cos(\gamma \psi) - \frac{\alpha \gamma a_5}{2} \phi^2 \cos(\gamma \psi) \\ &\quad - \frac{\alpha \gamma b_4}{\beta} \chi \sin(\gamma \psi), \end{aligned} \quad (\text{B.28c})$$

onde é necessário ter $b_7 = c_7 = 0$ por consistência. Além disso, usando as funções de deformação e suas funções inversas, obtemos

$$p_3 g(\phi) = -\alpha a_6 \phi^2, \quad (\text{B.29a})$$

$$q_1 \tilde{g}(\chi) = \alpha \beta \left(2a_1 + \frac{a_2}{2} \right) \sin^2(\beta \chi) \cos(\beta \chi), \quad (\text{B.29b})$$

$$r_4 \hat{g}(\psi) = \frac{\alpha c_1}{\gamma} \cos(\gamma \psi) + \alpha \gamma \left(2a_4 + \frac{a_5}{2} \right) \sin^2(\gamma \psi) \cos(\gamma \psi) + \frac{\alpha \gamma^2 b_4}{\beta^2} \psi \sin(\gamma \psi). \quad (\text{B.29c})$$

Juntando todos esses resultados, obtemos

$$\begin{aligned} W_\phi^{(3)}(\phi, \chi, \psi) &= \alpha(1 - \phi^2) + \alpha a_1 (\phi^2 - \sin^2(\beta \chi)) + \alpha a_2 \phi (\phi - \sin(\beta \chi)) \\ &\quad + \alpha a_4 (\phi^2 - \sin^2(\gamma \psi)) + \alpha a_5 \phi (\phi - \sin(\gamma \psi)), \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned} W_\chi^{(3)}(\phi, \chi, \psi) &= \frac{\alpha}{\beta} (1 - b_4) \cos(\beta \chi) + \alpha \beta \left(2a_1 + \frac{a_2}{2} \right) \sin^2(\beta \chi) \cos(\beta \chi) + \frac{\alpha b_4}{\beta} \cos(\gamma \psi) \\ &\quad - \alpha \beta a_1 \phi \sin(2\beta \chi) - \frac{\alpha \beta a_2}{2} \phi^2 \cos(\beta \chi), \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} W_\psi^{(3)}(\phi, \chi, \psi) &= \frac{\alpha}{\gamma} \cos(\gamma \psi) + \alpha \gamma \left(2a_4 + \frac{a_5}{2} \right) \sin^2(\gamma \psi) \cos(\gamma \psi) - \alpha \gamma a_4 \phi \sin(2\gamma \psi) \\ &\quad - \frac{\alpha \gamma a_5}{2} \phi^2 \cos(\gamma \psi) + \frac{\alpha \gamma b_4}{\beta^2} (\gamma \psi - \beta \chi) \sin(\gamma \psi), \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

os quais ao serem integrados nos fornece o seguinte superpotencial

$$\begin{aligned} W^{(3)}(\phi, \chi, \psi) &= \alpha \phi - \alpha (1 - a_1 - a_2 - a_4 - a_5) \frac{\phi^3}{3} - \alpha a_1 \phi \sin^2(\beta \chi) - \frac{\alpha a_2}{2} \phi^2 \sin(\beta \chi) \\ &\quad - \alpha a_4 \phi \sin^2(\gamma \psi) - \frac{\alpha a_5}{2} \phi^2 \sin(\gamma \psi) + \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - b_4) \sin(\beta \chi) \\ &\quad + \frac{\alpha}{3} \left(2a_1 + \frac{a_2}{2} \right) \sin^3(\beta \chi) + \frac{\alpha b_4}{\beta^2} (\beta \chi - \gamma \psi) \cos(\gamma \psi) \\ &\quad + \frac{\alpha}{\gamma^2} \left(1 + \frac{b_4 \gamma^2}{\beta^2} \right) \sin(\gamma \psi) + \frac{\alpha}{3} \left(2a_4 + \frac{a_5}{2} \right) \sin^3(\gamma \psi). \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Referências

- 1 A.R. Aguirre and E.S. Souza, *Extended multi-scalar field theories in (1+1) dimensions*, Eur. Phys. J. C 80 (2020) no.12, 1143 [arXiv:hep-th/2008.11307].
- 2 J.S. Russell, *Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science*, 311-390, Plates XLVII-LVII (1845).
- 3 R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam, (1982).
- 4 Y. M. Shnir, *Topological and Non-topological Solitons in Scalar Field Theories*, Cambridge University Press, (2018).
- 5 N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*, Cambridge University Press (2004).
- 6 A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic strings and other topological defects*, Cambridge University Press (2000).
- 7 P. H. R. S. Moraes and J. R. L. Santos, *Two scalar field cosmology from coupled one-field models*, Phys. Rev. D 89 (2014) 8, 083516 [arXiv:gr-qc/1403.5009].
- 8 J. R. L. Santos, A. De Souza Dutra, O. C. Winter and R. A. C. Correa, *A General Method for Transforming Nonphysical Configurations in BPS States*, Adv. High Energy Phys. 2019, (2019) 5431067 [arXiv:hep-th/1809.04661].
- 9 A. Paliathanasis, G. Leon and S. Pan, *Exact Solutions in Chiral Cosmology*, Gen. Rel. Grav. 51, no.9, (2019) 106 [arXiv:gr-qc/1811.10038].
- 10 N. Dimakis, A. Paliathanasis, P. A. Terzis and T. Christodoulakis, *Cosmological Solutions in Multiscalar Field Theory*, Eur. Phys. J. C 79, no.7, (2019) 618 [arXiv:gr-qc/1904.09713].
- 11 F. A. Brito, L. Losano and J. R. L. Santos, *The Extension Method for Bloch Branes*, [arXiv:1911.00191 [hep-th]].
- 12 N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Phys. Rev. Lett. 15(6) (1965) 240.
- 13 W. Su, J. R. Schrieffer and A. J. Heeger, *Solitons in polyacetylene*, Phys. Rev. Lett. 42(25) (1979) 1698.
- 14 D. Walgraef, *Spatio-temporal pattern formation: with examples from physics, chemistry, and materials science*, Springer Science & Business Media (2012).

- 15 Y. V. Kartashov, B. A. Malomed and L. Torner, *Solitons in nonlinear lattices*, Rev. Mod. Phys. 83(1) (2011) 247.
- 16 E. B. Bogomolny, *Stability of Classical Solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. 24 (1976) 449.
- 17 M. Prasad and C. M. Sommerfield, *An Exact Classical Solution for the t-Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*, Phys. Rev. Lett. 35 (1975) 760.
- 18 D. Bazeia and M. M. Santos, *Classical stability of solitons in systems of coupled scalar fields*, Phys. Lett. 217A (1996) 28.
- 19 D. Bazeia, M. J. Santos, R. F. Ribeiro, *Solitons in systems of coupled scalar fields*, Phys. Lett. A 208 (1995) 84 [arXiv:hep-th/0311265v1].
- 20 D. Bazeia, R. F. Ribeiro, and M. M. Santos, *Solitons in a class of systems of two coupled real scalar fields*, Phys. Rev. E 54 (1996) 2943.
- 21 D. Bazeia, J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro, and D. Toledo, *Soliton stability of two real scalar fields*, J. Phys. A: Math. Gen. 30 (1997) 8157 [arXiv:hep-th/9705224].
- 22 D. Bazeia, W. Freire, L. Losano, and R. F. Ribeiro, *Topological Defects and the Trial Orbit Method*, Mod. Phys. Lett. A17 (2002) 1945 [arXiv:hep-th/0205305].
- 23 V. I. Afonso, D. Bazeia, M. A. Gonzalez Leon, L. Losano, and J. Mateos Guilarte, *Orbit-based deformation procedure for two-field models*, Phys. Rev. D 76 (2007) 025010 [arXiv:hep-th/0704.2424].
- 24 J. Sadeghi, A. R. Amani, and A. Pourdarvish, *The Orbit method solution for the deformed three coupled scalar fields*, Can. J. Phys. 86 (2008) 1-4 [arXiv:math-ph/0810.0822].
- 25 G. P. de Brito and A. de Souza Dutra, *Orbit based procedure for doublets of scalar fields and the emergence of triple kinks and other defects*, Phys. Lett. B 736 (2014) 438 [arXiv:hep-th/1405.5458].
- 26 D. Bazeia, L. Losano, J. R. L. Santos, *Kinklike structures in scalar field theories: From one-field to two-field models*, Phys. Lett. A 377 (2013) 1615 [hep-th/1304.6904].
- 27 A. Alonso-Izquierdo, D. Bazeia, L. Losano and J. Mateos Guilarte, *New Models for Two Real Scalar Fields and Their Kink-Like Solutions*, Adv. High Energy Phys. 2013, 183295 (2013) [arXiv:hep-th/1308.2724].
- 28 V. A. Gani, M. A. Lizunova and R. V. Radomskiy, *Scalar triplet on a domain wall: an exact solution*, JHEP 04 043 (2016) [arXiv:hep-th/1601.07954].
- 29 J. R. L. Santos, P. H. R. S. Moraes, D. A. Ferreira, D.C. Vilar Neta, *Building analytical three-field cosmological models*, Eur. Phys. J. C 78 (2018) 169 [hep-th/1707.02611].

-
- 30 L. A. Ferreira, P. Klimas, and W. J. Zakrzewski, *Self-dual sectors for scalar field theories in (1+1) dimensions*, JHEP 01 (2019) 020 [arXiv:hep-th/1808.10052].
- 31 G. Luchini and T. Tassis, *BPS states for scalar field theories based on g_2 and $su(4)$ algebras*, JHEP 05 (2020) 011 [arXiv:hep-th/1909.04467].
- 32 A. Alonso-Izquierdo, *Non-topological kink scattering in a two-component scalar field theory model*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 85, 105251 (2020) [arXiv:hep-th/1906.05040].
- 33 D. Bazeia, L. Losano and J. M. C. Malbouisson, *Deformed defects*, Phys. Rev. D 66 (2002) 101701 [hep-th/0209027].
- 34 C. A. Almeida, D. Bazeia, L. Losano and J. M. C. Malbouisson, *New results for deformed defects*, Phys. Rev. D 69 (2004) 067702 [hep-th/0405238].
- 35 D. Bazeia, A. S. Inácio, and L. Losano, *Kinks and domain walls in models for real scalar fields*, Int. J. Mod. Phys. A19 (2004) 575.
- 36 D. Bazeia, *Defects Structures in Field Theory*, (2005) [hep-th/0507188].
- 37 G. Flores-Hidalgo, *One loop renormalization of soliton quantum mass correction in (1+1)-dimensional scalar field theory models*, Phys. Lett. B 542 (2002) 282 [hep-th/0206047].
- 38 A. R. Aguirre and G. Flores-Hidalgo, *A supersymmetric exotic field theory in (1+1) dimensions. One loop soliton quantum mass corrections*, JHEP 1812 (2018) 082 [arXiv:1609.07341].
- 39 F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, *Supersymmetry and Quantum Mechanics*, Phys. Rep. 251 (1995) 267.
- 40 N. Lemos, *Mecânica Analítica*, Livraria da física (2007).
- 41 I. Cho and A. Vilenkin, *Vacuum defects without a vacuum*, Phys. Rev. D 59 (1999) 021701 [arXiv:hep-th/9808090].
- 42 D. Bazeia, *Topological solitons in a vacuumless system*, Phys. Rev. D 60 (1999) 067705 [arXiv:hep-th/9905184].
- 43 C. Adam, L.A. Ferreira, E. da Hora, A. Wereszczynski, and W. J. Zakrzewski, *Some aspects of self-duality and generalised BPS theories*, JHEP 08 (2013) 062 [arXiv:1305.7239].
- 44 A. de Souza Dutra and P.E.D. Goulart, *Nonlinear two-field models from orbit equation deformations*, Phys. Rev. D 84 (2011) 105001.

- 45 D. Bazeia, J. Menezes, and M. M. Santos, *Complete factorization of equations of motion in Wess-Zumino theory*, Phys. Lett. B 521 (2001) 418 [arXiv:hep-th/0110111].
- 46 D. Bazeia, J. Menezes, and M. M. Santos, *Complete Factorization of Equation of Motion in Supersymmetric Field Theories*, Nucl. Phys. B 636 (2002) 132 [arXiv:hep-th/0103041].
- 47 H. Katsura, *Composite-kink solutions of coupled nonlinear wave equations*, Phys. Rev. D 89, (2014) 085019 [arXiv:1312.4263]
- 48 M. L. Glasser, *Determining the energy levels of composite potential wells*, Am. J. Phys. 47 (1979) 738.
- 49 M. L. Glasser and L. M. Nieto, *The energy level structure of a variety of one-dimensional confining potentials and the effects of a local singular perturbation*, Can. J. Phys. 93 (2015) 1588 [arXiv:quant-ph/1505.04362].
- 50 F. Garcia-Moliner and J. Rubio, *The quantum theory of one-electron states at surfaces and interfaces*, Proc. R. Soc. A 324 (1971) 257.
- 51 H. Kleinert and I. Mustapic, *Summing the spectral representations of Pöschl-Teller and Rosen-Morse fixed energy amplitudes*, J. Math. Phys. 33 (1992) 643.
- 52 G. Delfino and G. Mussardo, *Non-integrable aspects of the multi-frequency sine-Gordon model*, Nucl. Phys. B 516 (1998) 675 [arXiv:hep-th/9709028].
- 53 A. Alonso-Izquierdo, *Kink dynamics in a system of two coupled scalar fields in two spacetime dimensions*, Physica D 365, 12-26 (2018) [arXiv:hep-th/1711.08784].
- 54 P. G. Kevrekidis and J. Cuevas-Maraver (eds.), *A dynamical perspective on the ϕ^4 model: Past, present and future*, Part of the Nonlinear Systems and Complexity book series (vol.26), Springer, Cham (2019).
- 55 J. Cuevas-Maraver, P. G. Kevrekidis, and F. Williams (eds.), *The sine-Gordon model and its applications*, Part of the Nonlinear Systems and Complexity book series (vol. 10), Springer, Cham (2014).
- 56 D. K. Campbell, J. F. Schonfeld and C. A. Wingate, *Resonance structure in kink-antikink interaction in ϕ^4 theory*, Physica D 9 (1983) 1.
- 57 R. H. Goodman and R. Haberman, *Kink-Antikink Collisions in the ϕ^4 Equation: The n-Bounce Resonance and the Separatrix Map*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 4 (2005) 1195.
- 58 D. K. Campbell, M. Peyrard and P. Sodano, *Kink-antikink interactions in the double sine-Gordon equation*, Physica D 19 (1986) 165.

-
- 59 A. Moradi Marjaneh, A. Askari, D. Saadatmand and S. V. Dmitriev, *Extreme values of elastic strain and energy in sine-Gordon multi-kink collisions*, Eur. Phys. J. B 91 (2018) 22 [arXiv:1710.10159].
- 60 F. C. Simas, A. R. Gomes, K. Z. Nobrega and J. C. R. E. Oliveira, *Suppression of two-bounce windows in kink-antikink collision*, JHEP 09 (2016) 104 [arXiv:1605.05344].
- 61 D. Bazeia, E. Belendryasova and V. A. Gani, *Scattering of kinks of the sinh-deformed ϕ^4 model*, Eur. Phys. J. C 78 (2018) 340 [arXiv:1710.04993].
- 62 T. S. Mendonça and H. P. de Oliveira, *The collision of two-kinks defects*, JHEP 09, 120 (2015) [arXiv:hep-th/1502.03870].
- 63 R. Arthur, P. Dorey and R. Parini, *Breaking integrability at the boundary: the sine-Gordon model with Robin boundary conditions*, J. Phys. A 49, no.16, 165205 (2016) [arXiv:hep-th/1509.08448].
- 64 P. Dorey, A. Halavavau, J. Mercer, T. Romanczukiewicz and Y. Shnir, *Boundary scattering in the ϕ^4 model*, JHEP 05, 107 (2017) [arXiv:hep-th/1508.02329].
- 65 V. A. Gani, A. M. Marjaneh, A. Askari, E. Belendryasova and D. Saadatmand, *Scattering of the double sine-Gordon kinks*, Eur. Phys. J. C 78, no.4, 345 (2018) [arXiv:hep-th/1711.01918].
- 66 C. Adam, T. Romanczukiewicz and A. Wereszczynski, *Two ϕ^4 model with the BPS preserving defect*, JHEP 03, 131 (2019) [arXiv:hep-th/1812.04007].