

Universidade Federal de Itajubá
Instituto de Física e Química - IFQ
Programa de Pós-Graduação em Física

Uma Análise do Teorema de Singularidade de Penrose Sob a Ação de Transformações Disformes

Leandro Santana

Número de Ordem PPGCC: M001

Itajubá - MG, Agosto de 2020

Leandro Santana

Uma Análise do Teorema de Singularidade de Penrose Sob a Ação de Transformações Disformes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física pela UNIFEI (área de concentração: Física), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Universidade Federal de Itajubá - MG

Instituto de Física e Química - IFQ

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Eduardo Henrique Silva Bittencourt

Coorientador: Iarley Pereira Lobo

Itajubá - MG

Agosto de 2020

Leandro Santana

Uma Análise do Teorema de Singularidade
de Penrose Sob a Ação de Transformações Disformes/ Leandro Santana. – Itajubá
- MG, Agosto de 2020-

48 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Eduardo Henrique Silva Bittencourt

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá - MG
Instituto de Física e Química - IFQ
Programa de Pós-Graduação em Física, Agosto de 2020.

1. Teorema de Singularidade de Penrose. 2. Transformações disformes. I.
Eduardo Henrique Silva Bittencourt. II. Universidade Federal de Itajubá. III.
Instituto de Física e Química. IV. Uma Análise do Teorema de Singularidade
de Penrose Sob a Ação de Transformações Disformes.

CDU 02:141:005.7

Leandro Santana

Uma Análise do Teorema de Singularidade de Penrose Sob a Ação de Transformações Disformes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física pela UNIFEI (área de concentração: Física), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Itajubá - MG, 24 de Agosto de 2020:

Eduardo Henrique Silva Bittencourt
Orientador

Iarley Pereira Lobo
Co-Orientador

Carlos Augusto Romero Filho
Convidado 1

Gabriel Guimarães Carvalho
Convidado 2

Bráulio Augusto Garcia
Convidado 3

Itajubá - MG
Agosto de 2020

Aos meus pais.

Agradecimentos

- À paciência exaustiva do meu orientador Eduardo Bittencourt, que mesmo tendo todos os motivos necessários não desistiu de trabalhar comigo.
- Ao meu coorientador Iarley P. Lobo, que mesmo sem me conhecer pessoalmente, meu deu ótimos conselhos e me ensinou muito.
- Ao Janderson Oliveira e Edson Souza que mostraram ser amigos e mostraram que eu não estava sozinho.
- Ao Daniel Cruz (Robozinho) e a Eliane Morais, me mostrando que eu poderia fazer amizades novas no mestrado
- Ao Everson H. Rodrigues que mostrou que a amizade as vezes é diferente, e que conflitos acontecem e nos deixam mais fortes.
- Aos professores Agenor P. da Silva e Eduardo Resek que mesmo sem dar aulas no mestrado não perderam sua ligação comigo.
- Aos professores Renato Klippert, Vitorio Alberto De Lorenci e Edison Moreira, que fortaleceram meus conhecimentos e me prepararam para o futuro.
- À Anna Inacio por ser minha companheira e me dar força para seguir em frente.
- Aos meus pais, que mesmo sem entender o meu trabalho me incentivam e me aguentaram por meses em casa em plena pandemia.
- À minha memória de mim mesmo no passado, que não me deixou desistir.
- À CAPES pela bolsa concedida.

“O melhor ainda está por vir.”
(Autor Desconhecido)

Resumo

Nessa dissertação, após uma breve revisão dos elementos presentes na geometria diferencial, apresentamos o Teorema de Singularidade de Penrose (1965) e o reescrevemos sob a ótica das transformações disformes. Sem a intenção de usar um aparato matemático completo e sofisticado, vamos apresentar um esboço da prova do Teorema de Singularidade e uma forma resumida alternativa a este.

Em seguida, separando as transformações disformes em duas classes complementares, mais especificamente o caso conforme e as transformações do tipo Kerr-Schild, apresentaremos uma análise do Teorema de Singularidade de acordo com essas transformações. Por fim, conseguimos fazer uma análise de espaços-tempos que se relacionam por meio das transformações disformes e assim descrever as hipóteses necessárias para o surgimento ou remoção de singularidades.

Palavras-chave: Teoremas de singularidade, transformações disformes.

Abstract

In this dissertation, after a brief review of the elements present in differential geometry, we present Penrose's Singularity Theorem (1965) and rewrite it from the perspective of disformal transformations. Without intending to use a complete and sophisticated mathematical apparatus, we are going to present an outline of the proof of the Singularity Theorem and a brief alternative to it.

Then, separating the disformal transformations into two complementary classes, more specifically the conformal case and the Kerr-Schild type transformations, we will present an analysis of the Singularity Theorem according to these transformations. Finally, we were able to make an analysis of space-times that relate through the disformal transformations and thus describe the hypotheses necessary for the addition or removal of singularities.

Keywords: Singularity theorems, disformal transformations.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Evolução do vetor desvio geodésico. (Figura retirada da referencia (POISSON, 2004))	8
Figura 2 – Deformação bidimensional (Figura retirada da referencia (POISSON, 2004))	10
Figura 3 – As regiões sombreadas indicam onde a condição de convergência nula é válida. À esquerda, foi considerado $C_0 > 0$ e $C_1 < 0$. Ao centro, foi escolhido $C_0, C_1 > 0$. À direita, foi considerado $C_0 < 0$ e $C_1 > 0$. O caso em que ambos $C_0, C_1 < 0$, $f(r)$ is puramente imaginária.	38

Lista de tabelas

Tabela 1 – Os possíveis casos de superfícies de aprisionamento futuras	23
--	----

Sumário

1	NOTAÇÃO	1
2	INTRODUÇÃO	3
3	ELEMENTOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL	5
3.1	Curvas, vetores e tensores	5
3.1.1	Derivada Covariante	6
3.1.2	Equação da geodésica	7
3.1.3	Tensor de Curvatura	8
3.1.4	Desvio geodésico	8
3.2	Congruências de geodésicas	10
3.2.1	Cinemática em um meio deformável	10
3.2.2	Congruência de geodésicas tipo-tempo	11
3.2.3	Congruência de geodésicas tipo nulo	13
3.3	Condições de energia	16
3.3.1	Tensor Momento-Energia	16
3.3.2	Condição de energia fraca (CEFR)	17
3.3.3	Condição de energia nula (CEN)	18
3.3.4	Condição de energia forte (CEFO)	18
3.3.5	Condição de energia dominante (CED)	19
3.3.6	Aplicação das condições de energia na equação de Raychaudhuri	20
3.4	Caracterização de superfícies de aprisionamento	21
3.4.1	Quantidades intrínsecas	21
3.4.2	Vetor de curvatura média	23
3.4.3	Análise matemática alternativa	24
4	O TEOREMA DE SINGULARIDADE DE PENROSE	25
4.1	O Teorema em si	25
4.2	Análise do Teorema	27
5	TRANSFORMAÇÕES DISFORMES	29
5.1	Transformações conformes	30
5.2	Transformações Kerr-Schild	31
6	EFEITOS DE UMA TRANSFORMAÇÃO DISFORME NO TEOREMA DE SINGULARIDADE	33
6.1	Efeitos de uma transformação conforme	33

6.2	Efeitos de uma transformação disforme	34
6.3	Aplicações	36
7	CONCLUSÃO	41
	APÊNDICES	43
	APÊNDICE A – TRANSFORMAÇÃO DO TIPO KERR-SCHILD EM MÉTRICA AXIALMENTE SIMÉTRICA	45
	REFERÊNCIAS	47

1 Notação

Nessa seção, serão apresentadas as definições das quantidades utilizadas ao longo de todo texto e se houver modificações elas serão previamente avisadas. As definições aqui presentes seguem o livro-texto (POISSON, 2004).

- Índices gregos: $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 0,1,2,3$;
- Índices latinos: $i,j,k,\dots=1,2,3$;
- Derivada parcial de um vetor A^β em relação às coordenadas x^α ,

$$A^\beta_{,\alpha} = \frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha} ; \quad (1.1)$$

- Métrica de Minkowski em coordenadas cartesianas,

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1) ; \quad (1.2)$$

- Delta de Kronecker,

$$\delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \neq \beta, \\ 1, & \text{se } \alpha = \beta. \end{cases} \quad (1.3)$$

- Símbolo de Christoffel construído com uma métrica $g_{\alpha\beta}$,

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} (g_{\nu\beta,\gamma} + g_{\nu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\nu}) ; \quad (1.4)$$

- Derivada covariante de um vetor A^α ,

$$A^\alpha_{;\beta} = A^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\nu} A^\nu ; \quad (1.5)$$

- Tensor de Riemann,

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \equiv \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\delta\beta,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\mu\delta} \Gamma^\mu_{\beta\gamma} ; \quad (1.6)$$

- Tensor de Ricci,

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^\nu_{\alpha\nu\beta} ; \quad (1.7)$$

- Tensor momento-energia,

$$T^{\alpha\beta} = \rho \hat{e}_0^\alpha \hat{e}_0^\beta + p_1 \hat{e}_1^\alpha \hat{e}_1^\beta + p_2 \hat{e}_2^\alpha \hat{e}_2^\beta + p_3 \hat{e}_3^\alpha \hat{e}_3^\beta, \quad (1.8)$$

onde $\{\hat{e}_0^\alpha, \hat{e}_1^\alpha, \hat{e}_2^\alpha, \hat{e}_3^\alpha\}$ são os vetores diretores de um determinado sistema de coordenadas, ρ é a densidade de energia e p_i é a pressão na direção de \hat{e}_i^α ;

- Equação de campo de Einstein,

$$G^\alpha{}_\beta \equiv R^\alpha{}_\beta - \frac{1}{2}R\delta^\alpha{}_\beta = \kappa T^\alpha{}_\beta ; \quad (1.9)$$

onde κ é dado por $(8\pi G)/c^4$. Ao longo do texto, será usado um sistema de unidades tal que $c = G = 1$;

- Operação de simetrização dos índices (α, β) de um tensor $A_{\alpha\beta}$,

$$A_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}) ; \quad (1.10)$$

- Operação de antissimetrização dos índices (α, β) de um tensor $A_{\alpha\beta}$,

$$A_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}) ; \quad (1.11)$$

- Tensor métrico sob a ação de uma transformação disforme na direção do vetor d_μ (métrica disforme),

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + d_\mu d_\nu ; \quad (1.12)$$

- Símbolo de Christoffel construído com uma métrica disforme $\hat{g}_{\alpha\beta}$,

$$\hat{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2}\hat{g}^{\alpha\nu}(\hat{g}_{\nu\beta,\gamma} + \hat{g}_{\nu\gamma,\beta} - \hat{g}_{\beta\gamma,\nu}) ; \quad (1.13)$$

- Derivada covariante do vetor A^α construída a partir da métrica disforme,

$$A^\alpha{}_{;\beta} = A^\alpha{}_{,\beta} + \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\nu} A^\nu. \quad (1.14)$$

2 Introdução

Buracos Negros e Big Bang são exemplos de singularidades que são facilmente encontradas em mídias de comunicação, pois instigam a curiosidade pelo fato de tratarem dos instantes iniciais do universo e do destino final de estrelas muito massivas.

A teoria da Relatividade Geral, proposta por Albert Einstein em 1915, descreve tais fenômenos através de distribuições de matéria e energia, os quais, sob certos limites, deixam de ser bem descritos matematicamente e passam a apresentar um comportamento singular.

No início dos anos sessenta, houve profundas discussões sobre os limites de validade da Relatividade Geral devido ao surgimento das singularidades. Primeiramente, foram analisadas as vizinhanças das singularidades procurando-se por soluções bem comportadas, o que pode ser revisto em (BELINSKI, 2014). Tais técnicas não são opções satisfatórias, pois escrever singularidades a partir da divergência da curvatura resulta em várias possibilidades de comportamentos patológicos, envolvendo a própria curvatura e os escalares relacionados a ela. Encontrar uma maneira de classificar as singularidades de forma mais clara não é tarefa simples e ainda não há uma resposta concreta para isso (ver Ref. (REIRIS; PERAZA, 2019) para mais detalhes sobre o assunto).

Já no final dos anos sessenta, Hawking e Penrose demonstraram em seus teoremas (HAWKING; ELLIS, 1973; PENROSE, 1965) baseados na ideia de incompletude geodésica de um determinado espaço-tempo que, sob certas circunstâncias, as singularidades espaço-temporais são inevitáveis. Tal técnica consiste em: dada uma família de curvas orientadas, se ao menos uma dessas curvas tiver o parâmetro afim o qual não possa ser estendido livremente dentro de seu domínio, significa que a curva (bem definida, em princípio) encontrou um “obstáculo”, que pode ser interpretado como um ponto singular. À vista disto, nomearemos o espaço na qual esta curva reside de um espaço-tempo geodesicamente incompleto. Assim como dito em (HAWKING; ELLIS, 1973), essa maneira de mapear singularidades é sujeita a críticas e existem exemplos na literatura de espaços-tempos que são geodesicamente completos, mas tais que a linha de Universo descrita por um dado observador acelerado é incompleta. A análise feita neste trabalho, defenderá o ponto de vista em que se apenas uma das curvas causais de um dado espaço-tempo não puder ser estendida de forma ilimitada, tal espaço-tempo será dito singular.

Em especial estudaremos neste trabalho a versão do Teorema de Penrose apresentado em (HAWKING; ELLIS, 1973) e vamos analisar, em particular, os pré-requisitos necessários para que um dado espaço-tempo seja singular. À vista disto, será feito um estudo do mesmo por meio das chamadas transformações disformes, que terá o objetivo de rescrever

o Teorema de Singularidade de Penrose e analisar casos específicos de espaços-tempos.

As transformações disformes levam um par (\mathcal{M}, g) em outro par (\mathcal{M}', \hat{g}) , onde \mathcal{M} e \mathcal{M}' são variedades e g e \hat{g} seus respectivos tensores métricos. É importante observar que uma transformação disforme determina a relação entre os eventos de \mathcal{M} e \mathcal{M}' , de modo que as variedades possam ser iguais matematicamente, porém, do ponto de vista físico, vale a pena distinguí-las.

Na prática, o objetivo deste trabalho, além de fazer uma revisão sobre as quantidades cinemáticas relacionadas a uma dada congruência de curvas definida numa variedades com duas métricas distintas, é descobrir quais são as condições necessárias para o surgimento ou remoção de singularidades num dado espaço-tempo e assim entender a diferença de métricas como as de Schwarzschild, Kerr e Minkowski, que estão relacionadas por transformações disformes e são soluções das mesmas Equações de Einstein.

3 Elementos de geometria diferencial

Este capítulo tem o intuito de definir as ferramentas matemáticas que serão usadas neste trabalho. Na primeira seção iremos definir os objetos matemáticos básicos da nossa discussão como curvas, vetores e tensores. Na segunda seção, iremos trabalhar com o tensor momento-energia e as condições de energia. Na terceira seção, vamos definir as quantidades cinemáticas que serão usadas na mesma seção para a obtenção da equação de Raychaudhury. Por fim, apresentaremos uma classificação para superfícies de aprisionamento que será muito útil quando estivermos tratando do Teorema de Singularidade de Penrose. Os conceitos e toda a base matemática apresentada neste capítulo foram baseados na Ref. (POISSON, 2004), exceto a última seção que tem como base a Ref. (SENOVILLA, 2002).

3.1 Curvas, vetores e tensores

Seja uma curva γ em uma variedade M parametrizada por um parâmetro λ e descrita em um dado sistema de coordenadas através das relações $x^\alpha(\lambda)$. A derivada de uma função $f(x^\alpha)$ em relação a λ , será caracterizado como um vetor dual e pode ser descrita como

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = f_{,\alpha} u^\alpha. \quad (3.1)$$

Tal operação gera dois tipos de objetos na variedade: u^α que é o vetor tangente à curva γ e o vetor $f_{,\alpha}$ que pode ser visto como o gradiente da função f e é o vetor dual. Tais objetos se transformam de um sistema de coordenadas x para outro \bar{x} de acordo com a regra

$$\bar{f}_{,\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} f_{,\beta}, \quad (3.2)$$

e da mesma maneira

$$\bar{u}^\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \lambda} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta} u^\beta. \quad (3.3)$$

Com isso, a quantidade

$$\bar{f}_{,\alpha} \bar{u}^\alpha = f_{,\alpha} u^\alpha, \quad (3.4)$$

é a contração entre os objetos $\bar{f}_{,\alpha}$ e \bar{u}^α e é invariante sob transformações de coordenadas, pois é um escalar.

Desta maneira, temos que o objeto \bar{A}^α , que será chamado de vetor, se transforma da seguinte forma

$$\bar{A}^\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta, \quad (3.5)$$

enquanto que o objeto p_α , que será chamado de vetor dual, se transforma segundo a regra

$$\bar{p}_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} p_\beta. \quad (3.6)$$

Generalizando as transformações acima, definimos um objeto conhecido como tensor, $\bar{T}_{\gamma\dots\delta}^{\alpha\dots\beta}$, que se transforma da seguinte maneira

$$\bar{T}_{\gamma\dots\delta}^{\alpha\dots\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\rho} \cdots \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial \bar{x}^\gamma} \cdots \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\delta} T_{\epsilon\dots\lambda}^{\rho\dots\sigma}, \quad (3.7)$$

tal tensor é conhecido como tensor misto.

3.1.1 Derivada Covariante

Seja A^α um campo vetorial definido sobre γ . Seja P um ponto da curva com coordenadas x^α e Q um ponto infinitesimalmente próximo com coordenadas $x^\alpha + dx^\alpha$. A operação que define a variação no espaço cartesiano do vetor A^α do ponto P ao ponto Q é descrita por

$$dA^\alpha = A^\alpha(Q) - A^\alpha(P) = A^\alpha(x^\beta + dx^\beta) - A^\alpha(x^\beta) = A^\alpha_{;\beta}(x^\beta)dx^\beta, \quad (3.8)$$

onde o termo $A^\alpha(Q)$ foi expandindo em série de Taylor. Tal operação não é uma operação tensorial, pois não é invariante por transformação de coordenadas e considera a variação do espaço em questão. Para obter tal requisito, a operação necessita ser de tal forma que

$$DA^\alpha = dA^\alpha + \delta A^\alpha, \quad (3.9)$$

onde o termo δA^α corresponde à variação necessária para garantir seu caráter tensorial. Isto posto, a variação do campo vetorial A^α fica dada por

$$DA^\alpha = A^\alpha_{;\beta}dx^\beta + \Gamma^\alpha_{\nu\beta}A^\nu dx^\beta, \quad (3.10)$$

onde $\Gamma^\alpha_{\nu\beta}$ corresponde à conexão afim, que se transforma, como

$$\tilde{\Gamma}^\alpha_{\nu\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\mu} \Gamma^\alpha_{\mu\beta} - \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\mu}. \quad (3.11)$$

No caso específico em que os índices covariantes da conexão são simétricos, ou seja

$$\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}, \quad (3.12)$$

e impondo que $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$, isto implica em

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu}(g_{\nu\beta;\gamma} + g_{\nu\gamma;\beta} - g_{\beta\gamma;\nu}). \quad (3.13)$$

Assim, a conexão é totalmente determinada pela métrica e $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ são chamados de símbolos de Christoffel.

Neste caso, a derivada total de A_α em relação a uma curva γ parametrizada por um parâmetro afim λ é

$$\frac{DA^\alpha}{d\lambda} = A^\alpha_{;\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \quad (3.14)$$

onde

$$A^\alpha{}_{;\beta} = A^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} A^\nu, \quad (3.15)$$

é a derivada covariante de um campo vetorial A^α .

É interessante notar que no caso de escalares, a derivada covariante se resume à derivada ordinária

$$(A^\alpha p_\alpha)_{;\beta} = (A^\alpha p_\alpha)_{,\beta} \quad (3.16)$$

usando a regra de Leibniz, trazemos

$$(A^\alpha p_\alpha)_{;\beta} = (A^\alpha{}_{;\beta}) p_\alpha + A^\alpha (p_{\alpha;\beta}). \quad (3.17)$$

Substituindo a equação (3.15) na equação (3.17) conseguimos definir a derivada covariante de um vetor dual p_α

$$p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - \Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} p_\nu. \quad (3.18)$$

A partir daí, podemos estudar o caso da derivada covariante de vetores sem que haja contração, ou seja

$$(A^\alpha p_\beta)_\nu = (A^\alpha p_\beta)_{;\nu} = (A^\alpha{}_{;\nu}) p_\beta + A^\alpha (p_{\beta;\nu}). \quad (3.19)$$

Rescrevendo $A^\alpha p_\beta = T^\alpha{}_\beta$ e substituindo as equações (3.15) e (3.18) na equação (3.19) temos a definição da derivada covariante do tensor misto

$$T^\alpha{}_{\beta;\gamma} = T^\alpha{}_{\beta,\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma} T^\mu{}_\beta - \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} T^\alpha{}_\mu. \quad (3.20)$$

A regra é que existe um termo de conexão para cada índice tensorial, de modo que o termo adicionado é positivo se o termo é contravariante e negativo no caso covariante.

3.1.2 Equação da geodésica

Para determinar a distância entre dois pontos P e Q sobre uma curva γ , realizamos o seguinte cálculo

$$l = \int_P^Q \sqrt{\pm g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} d\lambda, \quad (3.21)$$

onde a derivada das coordenadas em relação ao parâmetro λ é dada por $\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$. Onde o sinal é positivo quando a curva é tipo-espaço e negativo quando é tipo-tempo, de forma que o integrando é sempre positivo.

Tal curva será extremal quando o integrando for solução das equações de Lagrange, no caso $L(\dot{x}^\alpha, x^\alpha) = (\pm g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{1/2}$, assim

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (3.22)$$

a qual assume a seguinte forma

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = \kappa(\lambda) \dot{x}^\alpha \quad (3.23)$$

onde $\kappa(\lambda) = d \ln L / d\lambda$. A expressão acima é chamada *equação da geodésica*. Por uma reparametrização da curva, na qual $l \equiv 1$, podemos colocar a equação da geodésica na sua forma padrão

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0. \quad (3.24)$$

3.1.3 Tensor de Curvatura

O tensor de Riemann pode ser definido pela relação

$$A^\nu_{;\alpha;\beta} - A^\nu_{;\beta;\alpha} = -R^\nu_{\mu\alpha\beta} A^\mu, \quad (3.25)$$

que representa a antissimetria da derivada covariante de um tensor A^ν . Explicitamente, o tensor de Riemann pode ser representado por

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\delta\beta,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\nu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\mu\delta} \Gamma^\nu_{\beta\gamma}. \quad (3.26)$$

Usando a simetria de índices do tensor de Riemann e possível escrever sua forma covariante como

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta}), \quad (3.27)$$

e com isso é possível escrever a seguinte relação tensorial

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0. \quad (3.28)$$

Agora, usando a equação (3.28) e a definição de derivada covariante para um tensor misto, é possível escrever

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\nu} + R_{\alpha\delta\nu\gamma;\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\nu;\gamma} = 0, \quad (3.29)$$

que é conhecida como Identidade de Bianchi.

3.1.4 Desvio geodésico

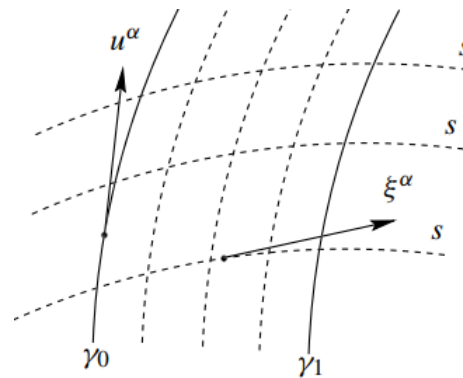


Figura 1 – Evolução do vetor desvio geodésico. (Figura retirada da referencia (POISSON, 2004))

Considerando agora duas geodésicas vizinhas γ_0 e γ_1 , cada uma delas descritas pelas coordenadas $x^\alpha(\tau)$, onde τ é um parâmetro afim e u^α é o vetor tangente a geodésica γ_0 , vamos desenvolver o conceito do vetor *desvio geodésico* ξ^α entre duas geodésicas e determinar a variação desse vetor em relação ao parâmetro afim τ . Para esse fim, vamos introduzir, no espaço entre γ_0 e γ_1 , uma família inteira de geodésicas interpoladas, de forma que para cada uma das geodésica atribuiremos um rótulo $s \in [0, 1]$, de forma que em $s = 0$ temos γ_0 e em $s = 1$ temos γ_1 , como ilustrado na Figura (1).

Vamos descrever coletivamente essas geodésicas como $x^\alpha(s, \tau)$, em que s especifica a geodésica e τ percorre uma dada geodésica. Sendo $x^\alpha(s, \tau)$ uma geodésica, temos que $u^\alpha_{;\beta}u^\beta = 0$. Se mantivermos o parâmetro τ fixo e variarmos s , obteremos outra família de curvas, rotuladas por τ e parametrizadas por s . Em geral, essas curvas não serão geodésicas. Tal família possui $\xi^\alpha = \partial x^\alpha / \partial s$ como campo vetorial tangente com a restrição que para γ_0 , $\xi^\alpha|_s = 0$ isso fornece uma noção significativa de desvio entre γ_0 e γ_1 .

Com o objetivo de mostrar a relação entre o vetor desvio geodésico e tensor de Riemann, vamos derivar uma expressão para a “aceleração” do vetor de desvio, ou seja, a sua derivada segunda em relação ao parâmetro τ

$$\frac{D^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = (\xi^\alpha_{;\beta}u^\beta)_{;\gamma}u^\gamma = (\xi^\alpha_{;\beta})u_\alpha u^\beta + \xi^\alpha(u_{\alpha;\beta})u^\beta, \quad (3.30)$$

usando as definições de u^α e ξ^α , podemos deduzir que $\partial u^\alpha / \partial s = \partial \xi^\alpha / \partial \tau$. Sabendo que $u^\alpha \xi_\alpha = \text{const.}$, podemos escrever

$$\xi^\alpha_{;\beta}u^\beta = u^\alpha_{;\beta}\xi^\beta \quad (3.31)$$

Substituindo a equação (3.31) na (3.30) e usando a definição do tensor de Riemann, temos

$$\begin{aligned} \frac{D^2\xi^\alpha}{d\tau^2} &= (\xi^\alpha_{;\beta}u^\beta)_{;\gamma}u^\gamma = (u^\alpha_{;\beta}\xi^\beta)_{;\gamma}u^\gamma = u^\alpha_{;\beta\gamma}\xi^\beta u^\gamma + u^\alpha_{\beta}\xi^\beta_{;\gamma}u^\gamma \\ &= (u^\alpha_{;\beta\gamma} - R^\alpha_{\mu\beta\gamma}u^\mu)\xi^\beta u^\gamma + u^\alpha_{\beta}u^\beta_{;\gamma}\xi^\gamma \\ &= (u^\alpha_{;\gamma}u^\gamma)_{;\beta}\xi^\beta - u^\alpha_{;\gamma}u^\gamma_{;\beta}\xi^\beta - R^\alpha_{\mu\beta\gamma}u^\mu\xi^\beta u^\gamma + u^\alpha_{\beta}u^\beta_{;\gamma}\xi^\gamma. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Com um pequena manipulação de índices, é fácil observar que o segundo e quarto termo se cancelam e pela equação da geodésica o primeiro termo também é nulo, de forma que

$$\frac{D^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = -R^\alpha_{\mu\beta\gamma}u^\mu\xi^\beta u^\gamma, \quad (3.33)$$

a qual é conhecida como equação do desvio geodésico. No caso particular de um espaço plano, as geodésicas γ_0 e γ_1 são retas e embora possa variar com τ , essa variação será sempre linear de forma que $D^2\xi^\alpha/d\tau^2 = 0$.

3.2 Congruências de geodésicas

Neste trabalho, estamos interessados particularmente no caso de congruências de geodésicas tipo nulo. Porém, para fins didáticos, iremos primeiro apresentar um caso bidimensional simples e, em seguida, tratar o caso de geodésicas tipo-tempo.

3.2.1 Cinemática em um meio deformável

Nesta seção iremos estudar o movimento interno de um meio deformável bidimensional, numa perspectiva totalmente cinemática e newtoniana.

Considere um deslocamento suficientemente pequeno ξ^a , a partir de um ponto de referência O , conforme a [Figura 2](#). Com isso, podemos escrever

$$\frac{d\xi^a}{dt} = B^a_b \xi^b + \mathbf{O}(\xi^2), \quad (3.34)$$

onde B^b_a é um tensor misto.

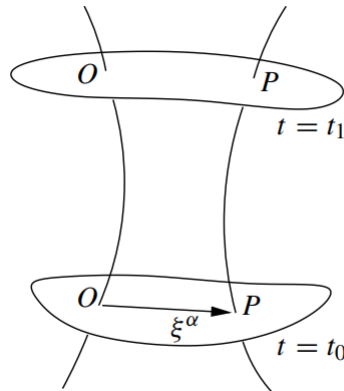


Figura 2 – Deformação bidimensional (Figura retirada da referencia ([POISSON, 2004](#)))

Para intervalos de tempo suficiente pequenos, podemos usar o teorema do valor médio

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(X_m), \quad (3.35)$$

onde X_m é o valor médio, de forma que a equação (3.34) pode ser integrada resultado em

$$\xi^a(t_1) - \xi^a(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (B^b_a \xi^a + \mathbf{O}(\xi^2)) dt. \quad (3.36)$$

Desprezando os termos de ordem 2 ou maior, temos

$$\xi^a(t_1) = \xi^a(t_0) + B^b_a(t_m)\xi^a(t_m). \quad (3.37)$$

Expandindo em série de Taylor e novamente desprezando os termos de ordem 2 ou maior, encontramos

$$\xi^a(t_1) = \xi^a(t_0) + \Delta\xi^a(t_0), \quad (3.38)$$

onde $\Delta\xi^a(t_0) = B^a_b(t_0)\xi^b(t_0)$.

O campo tensorial B^b_a pode ser decomposto como a combinação linear de outros três campos, que podem ser expressos por matrizes da seguinte forma

$$B^b_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_+ & \sigma_x \\ \sigma_x & -\sigma_+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

ou, na forma tensorial, como

$$B^b_a = \frac{1}{2}\theta\delta^b_a + \sigma^b_a + \omega^b_a, \quad (3.40)$$

onde θ é o fator de expansão, σ^b_a é um tensor simétrico de traço nulo, chamado de cisalhamento (*shear*) e ω^b_a é o tensor antissimétrico de rotação. Tais quantidades são conhecidas como quantidades cinemáticas relacionadas à congruência de curvas em questão e podem ser descritas por

$$\omega_{ab} = B_{[ab]}, \quad (3.41)$$

$$\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{2}\theta\delta_{ab}, \quad (3.42)$$

$$\theta = \delta^{ab}u_{a;b} = u^a_{;a}, \quad (3.43)$$

onde os índices são levantados e abaixados com a métrica Euclidiana bidimensional.

3.2.2 Congruência de geodésicas tipo-tempo

Seja \mathcal{O} um aberto no espaço-tempo quadridimensional. Uma congruência em \mathcal{O} é uma família de curvas que interceptam o aberto \mathcal{O} , sendo que cada uma dessas curvas passa por um ponto do aberto de forma a não se cruzarem entre si.

No caso em que a congruência é formada por geodésicas do tipo-tempo, que evoluem de acordo com um parâmetro afim τ , podemos estabelecer uma série de relações entre o vetor tangente às curvas u^α e o vetor de desvio ξ^α entre duas geodésicas vizinhas da congruência usando os resultados da seção 3.1.4, a saber

$$u^\alpha u_\alpha = -1, \quad u^\alpha_{;\beta} u^\beta = 0, \quad u^\alpha_{;\beta} \xi^\beta = \xi^\alpha_{;\beta} u^\beta, \quad u^\alpha \xi_\alpha = 0. \quad (3.44)$$

Nessa situação, a métrica do espaço-tempo pode ser decomposta em sua parte longitudinal e uma transversal, de forma que

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta, \quad (3.45)$$

onde $h_{\alpha\beta}$ é a métrica induzida no hiper-espaço tridimensional ortogonal u^α , sendo definida por

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta. \quad (3.46)$$

Vamos agora introduzir o campo tensorial

$$B_{\alpha\beta} = u_{\alpha;\beta}. \quad (3.47)$$

Usando as relações (3.44) podemos mostrar que $B_{\alpha\beta}$ é ortogonal ao vetor tangente u^α , isto é

$$u^\alpha B_{\alpha\beta} = u^\alpha u_{\alpha;\beta} = \frac{1}{2}(u_\alpha u^\alpha)_{;\beta} = 0, \quad u^\beta B_{\alpha\beta} = u^\beta u_{\alpha;\beta} = 0, \quad (3.48)$$

onde a segunda relação é obtida pela equação da geodésica. Também com o auxílio do conjunto de propriedades (3.44), a atuação de $B_{\alpha\beta}$ sobre o vetor de desvio geodésico pode ser vista como uma medida da “falha” do vetor ξ^α ao se propagar ao longo da congruência.

Com o objetivo de desenvolver uma equação de evolução para o fator de expansão θ , que será de grande importância quando discutirmos os teoremas de singularidade, iremos analisar a derivada covariante do campo tensorial $B_{\alpha\beta}$. Assim

$$B_{\alpha\beta;\mu} u^\mu = u_{\alpha;\beta\mu} u^\mu. \quad (3.49)$$

Usando a definição do tensor de Riemann, encontramos

$$u_{\alpha;\beta\mu} u^\mu = (u_{\alpha;\mu\beta} - R_{\alpha\nu\beta\mu} u^\nu) u^\mu. \quad (3.50)$$

Rescrevendo a derivada covariante de segunda ordem pela regra do produto,

$$(u_{\alpha;\mu\beta} - R_{\alpha\nu\beta\mu} u^\nu) u^\mu = (u_{\alpha;\mu} u^\mu)_{;\beta} - u_{\alpha;\mu} u^\mu_{;\beta} - R_{\alpha\nu\beta\mu} u^\nu u^\mu, \quad (3.51)$$

e usando a equação de geodésica, além da definição do tensor $B_{\alpha\beta}$, temos

$$B_{\alpha\beta;\mu} u^\mu = -B_{\alpha\mu} B^\mu_\beta - R_{\alpha\nu\beta\mu} u^\nu u^\mu. \quad (3.52)$$

Tomando o traço e usando a definição do fator de expansão, podemos escrever

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -B^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} - R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta, \quad (3.53)$$

sendo que

$$B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\theta^2 + \sigma^2 - \omega^2, \quad (3.54)$$

e, enfim, usando a expressão (3.54), encontramos

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{3}\theta^2 + \sigma^2 - \omega^2 = -R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \quad (3.55)$$

onde $\sigma^2 = \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}$ e $\omega^2 = \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}$. Esta é a chamada equação de Raychaudhuri para vetores tipo-tempo e descreve a evolução, em termos do tempo próprio, da expansão da congruência geodésica. Note que a evolução depende da natureza do espaço-tempo no qual a congruência está definida, através do termo com o tensor de Ricci.

Exemplo: como caso ilustrativo, consideremos uma congruência de linhas de mundo em um universo em expansão com métrica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.56)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala. O campo vetorial tangente a essas linhas é $u_\alpha = -\partial_\alpha t$. Com isso, podemos calcular

$$B_{\alpha\beta} = u_{\alpha;\beta} = \frac{\dot{a}}{a} h_{\alpha\beta}, \quad (3.57)$$

onde o ponto indica diferenciação em relação a t . Isso mostra que os tensores de cisalhamento e rotação são nulos para esta congruência. O coeficiente de expansão, por outro lado, é dado por

$$\theta = 3 \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} (a^3), \quad (3.58)$$

ilustrando que o fator de expansão mede a taxa fracionária de alteração do volume da seção transversal da congruência.

3.2.3 Congruência de geodésicas tipo nulo

De suma importância para o andamento deste trabalho, o estudo de geodésicas tipo nulo será feito usando a mesma configuração geométrica da seção anterior, exceto que o vetor tangente à geodésica, agora nulo, será denotado por k^α e as geodésicas que compõem a congruência serão parametrizadas por λ . O vetor desvio geodésico será novamente denotado por ξ^α , e considerado ortogonal ao vetor tangente k^α . Assim, as seguintes relações são válidas:

- Pela definição do vetor tipo nulo:

$$k^\alpha k_\alpha = 0; \quad (3.59)$$

- Pela equação da geodésica:

$$k^\alpha{}_{;\beta} k^\beta = 0; \quad (3.60)$$

- Transporte paralelo de k^α na direção de ξ^α será igual ao transporte de ξ^α na direção de k^α :

$$k^\alpha{}_{;\beta} \xi^\beta = \xi^\alpha{}_{;\beta} k^\beta; \quad (3.61)$$

- k^α ortogonal a ξ^α :

$$k^\alpha \xi_\alpha = 0. \quad (3.62)$$

Para definir o tensor de projeção $h_{\mu\nu}$ no espaço ortogonal a k^μ , é conveniente introduzir um outro vetor tipo nulo auxiliar N^μ , tal que

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + k_\alpha N_\beta + N_\alpha k_\beta, \quad (3.63)$$

de forma que as seguintes relações são satisfeitas

$$h_{\alpha\beta}k^\beta = 0, \quad h_{\beta\alpha}N^\beta = 0, \quad h^\alpha_\alpha = 2, \quad h^\alpha_\mu h^\mu_\beta = h^\alpha_\beta, \quad (3.64)$$

que confirmam que $h_{\alpha\beta}$ é puramente ortogonal a k^α e N^α e, efetivamente, bidimensional. Evidentemente, as condições $N^\alpha N_\alpha = 0$ e $k^\alpha N_\alpha = -1$ não determinam N^α de forma unívoca. Isso implica que a métrica transversal não é exclusiva. Como veremos, no entanto, quantidades como a expansão da congruência serão as mesmas para todas as opções do vetor nulo auxiliar.

Como no caso das geodésicas tipo nulo, o campo tensorial

$$B_{\alpha\beta} = k_{\alpha;\beta}, \quad (3.65)$$

que também pode ser visto como uma medida da falha de ξ^α ser transportado paralelamente ao longo da congruência, isto é,

$$\xi^\alpha_{;\beta}k^\beta = B^\alpha_\beta \xi^\beta, \quad (3.66)$$

é ortogonal ao campo vetorial tangente: $k^\alpha B_{\alpha\beta} = 0 = B_{\alpha\beta}k^\beta$. No entanto, $B_{\alpha\beta}$ não é ortogonal a N^α e a equação (3.66) tem uma componente não transversal que deve ser removida. Assim, começamos isolando a parte puramente transversal do vetor de desvio geodésico ξ^α . Como $h_{\alpha\beta}$ é puramente transversal, é fácil ver que

$$\tilde{\xi}^\alpha \equiv h^\alpha_\nu \xi^\nu = \xi^\alpha + (N_\mu \xi^\mu)k^\alpha, \quad (3.67)$$

é o objeto desejado. Sua derivada covariante na direção de k^α representa a velocidade relativa de duas geodésicas vizinhas. Isto é dado por,

$$\tilde{\xi}^\mu_{;\beta}k^\beta = h^\mu_\nu B^\nu_\beta \xi^\beta + (N_{\nu;\beta} \xi^\nu k^\beta)k^\mu, \quad (3.68)$$

onde inserimos a Eq. (3.66) no primeiro termo do lado direito. O cálculo do segundo termo fornece,

$$\tilde{\xi}^\mu_{;\beta}k^\beta = h^\mu_\nu B^\nu_\beta \xi^\beta + (N_{\nu;\beta} \xi^\nu k^\beta)k^\mu, \quad (3.69)$$

e vemos que o vetor $\tilde{\xi}^\nu$ tem uma componente ao longo de k^μ . Mais uma vez, removemos isso projetando com h^α_μ . Usando a equação (3.66), obtemos,

$$\begin{aligned} (\tilde{\xi}^\alpha k^\beta)\gamma &\equiv h^\alpha_\mu (\tilde{\xi}^\mu k^\beta) = h^\alpha_\mu B^\mu_\nu \xi^\nu \\ &= h^\alpha_\mu B^\mu_\nu \tilde{\xi}^\nu \\ &= h^\alpha_\mu h^\nu_\beta B^\mu_\nu \tilde{\xi}^\beta, \end{aligned} \quad (3.70)$$

para os componentes transversais da velocidade relativa. Na primeira linha, podemos substituir ξ^ν por $\tilde{\xi}^\nu$, pois $B^\mu_\nu k^\nu$. Na terceira linha, inserimos a relação $\tilde{\xi}^\nu = h^\nu_\beta \tilde{\xi}^\beta$ já que $\tilde{\xi}^\nu$ é puramente transversal. Com isso, obtivemos

$$(\tilde{\xi}^\alpha k^\beta)\gamma = \tilde{B}^\alpha_\beta \tilde{\xi}^\beta, \quad (3.71)$$

onde,

$$\tilde{B}_{\alpha\beta} = h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta B_{\mu\nu}, \quad (3.72)$$

é a parte puramente transversal de $B_{\mu\nu} = k_{\mu;\nu}$. Isso pode ser expresso de uma forma mais explícita usando a equação (3.63):

$$\tilde{B}_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} + k_\alpha N^\mu B_{\mu\beta} + k_\beta B_{\alpha\mu} N^\mu + k_\alpha k_\beta B_{\mu\nu} N^\mu N^\nu. \quad (3.73)$$

A equação (3.73) governa o comportamento puramente transversal da congruência nula, e o vetor $\tilde{B}^\alpha{}_\beta \tilde{\xi}^\beta$ pode ser interpretado como a velocidade relativa transversal entre duas geodésicas vizinhas. Como fizemos antes, vamos decompor o tensor $\tilde{B}_{\alpha\beta}$ em suas partes irreduzíveis,

$$\tilde{B}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\theta h_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}, \quad (3.74)$$

onde $\theta = \tilde{B}^\alpha{}_{;\alpha}$ é o escalar de expansão, $\sigma_{\alpha\beta} = \tilde{B}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2}\theta h_{\alpha\beta}$ o tensor de cisalhamento e $\omega_{\alpha\beta} = \tilde{B}_{[\alpha\beta]}$ o tensor de rotação. A expansão é dada mais explicitamente por,

$$\theta = g^{\alpha\beta} \tilde{B}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta},$$

que segue da equação (3.73) e o fato de $B_{\alpha\beta}$ ser ortogonal a k^α . A partir disso, obtemos,

$$\theta = k^\alpha{}_{;\alpha}. \quad (3.75)$$

Vemos explicitamente que θ não depende da escolha do vetor nulo auxiliar N^α , ou seja, a expansão está univocamente definida. O significado geométrico da expansão será considerado em detalhes abaixo, onde mostraremos que θ é a taxa fracionária de mudança por distância do parâmetro afim da unidade da área da seção transversal da congruência. É interessante notar que, o espaço transversal é bidimensional.

Por fim, a versão para geodésicas nulas da equação de Raychaudhuri pode ser obtida a partir de,

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -B^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} - R_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta, \quad (3.76)$$

que segue da mesma série de etapas feitas no caso tipo-tempo. Substituindo a equação (3.54) na equação (3.76) chegamos em

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \omega^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta, \quad (3.77)$$

a qual é a equação de Raychaudhuri para uma congruência de geodésicas tipo nulo.

Exemplo: como caso ilustrativo, consideremos a congruência que forma um cone nulo no espaço-tempo plano. As geodésicas emanam de um único ponto P que colocamos na origem do sistema de coordenadas e elas irradiam em todas as direções. Em coordenadas

esféricas, a geodésica é descrita pelas relações $t = \lambda$, $r = \lambda$, $\theta = \text{constante}$ e $\phi = \text{constante}$, em que λ é o parâmetro afim. O campo vetorial tangente é,

$$k_\alpha = -(t - r)_{,\alpha}. \quad (3.78)$$

Agora, devemos encontrar um campo vetorial auxiliar N^α que satisfaça $k_\alpha N^\alpha = -1$. Se escolhermos N^α para estar no plano (t, r) , a solução única será $N_\alpha = (t + r)_{,\alpha}$. Com essa escolha, descobrimos que a métrica transversal é dada por,

$$h_{\alpha\beta} = \text{diag}(0, 0, r^2, r^2 \text{sen}^2 \theta), \quad (3.79)$$

e com um cálculo simples, temos

$$B_{\alpha\beta} = k_{\alpha;\beta} = \frac{1}{r} h_{\alpha\beta}. \quad (3.80)$$

É fácil observar que $B_{\alpha\beta}$ é perpendicular a N^α e que os tensores de cisalhamento e rotação são zero para esta congruência.

A expansão, por outro lado, é dada por

$$\theta = \frac{2}{r} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d}{d\lambda} (4\pi r^2), \quad (3.81)$$

onde a última igualdade mostra como o fator de expansão é a taxa fracionária de mudança da área da seção transversal da congruência.

3.3 Condições de energia

Analisaremos agora as chamadas condições de energia: considerando apenas o lado direito da equação (3.55) e as equações de Einstein, iremos estabelecer condições para que o sinal daquele termo possa ser controlado através de hipóteses sobre a distribuição de matéria e energia.

3.3.1 Tensor Momento-Energia

Na Relatividade Geral, a distribuição de momento e energia de qualquer campo não gravitacional é descrita pelo tensor momento-energia $T_{\alpha\beta}$. Uma vez que este tensor está vinculado à curvatura através das equações de Einstein, $T_{\alpha\beta}$ deve satisfazer certas condições para que o lado direito da equação (3.55) tenha um sinal fixo. Estas restrições são conhecidas como condições de energia.

Para descrever as condições de energia, vamos assumir que o tensor momento-energia admita a seguinte decomposição

$$T^{\alpha\beta} = \rho \hat{e}_0^\alpha \hat{e}_0^\beta + p_1 \hat{e}_1^\alpha \hat{e}_1^\beta + p_2 \hat{e}_2^\alpha \hat{e}_2^\beta + p_3 \hat{e}_3^\alpha \hat{e}_3^\beta, \quad (3.82)$$

onde ρ representa a densidade de energia e p_1, p_2, p_3 correspondem às pressões em cada direção espacial. Os vetores $\{\hat{e}_A^\alpha\}$, com $A = 0, 1, 2, 3$, formam uma base ortonormal e satisfazem a seguinte relação

$$g_{\alpha\beta}\hat{e}_A^\alpha\hat{e}_B^\beta = \hat{e}_{\beta A}\hat{e}_B^\beta = \eta_{AB}, \quad (3.83)$$

onde η_{AB} é identificado com a métrica de Minkowski em coordenadas cartesianas. De maneira análoga, podemos escrever uma relação entre a métrica inversa $g^{\alpha\beta}$ e os escalares constantes η^{AB} como sendo

$$g^{\alpha\beta}\hat{e}_\alpha^A\hat{e}_\beta^B = \eta^{AB}, \quad (3.84)$$

onde $\hat{e}_A^\alpha\hat{e}_\beta^A = \delta_\beta^\alpha$ e $\hat{e}_A^\alpha\hat{e}_\alpha^B = \delta_A^B$. Com isso, podemos rescrever o tensor momento-energia da forma

$$T_{\alpha\beta} = \rho\hat{e}_\alpha^0\hat{e}_\beta^0 + p_1\hat{e}_\alpha^1\hat{e}_\beta^1 + p_2\hat{e}_\alpha^2\hat{e}_\beta^2 + p_3\hat{e}_\alpha^3\hat{e}_\beta^3. \quad (3.85)$$

Para a descrição das condições de energia, precisamos decompor vetores do tipo-tempo e vetores do tipo nulo em termos da base $\{\hat{e}_A^\alpha\}$. No caso do vetor tipo-tempo, temos

$$v^\alpha = \gamma(\hat{e}_0^\alpha + a\hat{e}_1^\alpha + b\hat{e}_2^\alpha + c\hat{e}_3^\alpha), \quad \gamma^2 = (1 - a^2 - b^2 - c^2), \quad (3.86)$$

onde γ é uma constante de normalização de tal maneira que a, b e c são constantes e obedecem a condição $a + b + c < 1$.

Já o vetor tipo nulo pode ser decomposto como

$$k^\alpha = \rho\hat{e}_0^\alpha + A\hat{e}_1^\alpha + B\hat{e}_2^\alpha + C\hat{e}_3^\alpha, \quad (3.87)$$

onde A, B e C são constantes de normalização e seguem o vínculo $A^2 + B^2 + C^2 = 1$.

Desta forma, temos os aparatos necessários para a análise das condições de energia.

3.3.2 Condição de energia fraca (CEFR)

A condição de energia fraca afirma que a densidade de energia de qualquer distribuição de matéria, medida por um observador tipo-tempo no espaço-tempo, não deve ser negativa, ou seja,

$$T_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta \geq 0. \quad (3.88)$$

Usando a forma covariante da equação (3.85) e a equação (3.86), chegamos em

$$\rho + a^2 p_1 + b^2 p_2 + c^2 p_3 \geq 0. \quad (3.89)$$

Agora, temos que analisar essa inequação. Como a, b e c são constantes arbitrárias, podemos estudar casos específicos respeitando o vínculo $a + b + c < 1$. Desta maneira, fazendo $a = b = c = 0$ na equação (3.89), temos que

$$\rho \geq 0. \quad (3.90)$$

Para a segunda parte da análise, vamos escolher $b = c = 0$, de modo que $\rho + a^2 p_1 \geq 0$ e como $a^2 < 1$, chegamos em

$$\rho + p_1 \geq 0. \quad (3.91)$$

De forma similar, podemos fazer escolhas para b (com $a = c = 0$) e c (com $a = b = 0$), tal que unindo os 3 casos, podemos escrever a condição de energia fraca como

$$\rho \geq 0, \quad \rho + p_i \geq 0, \quad (3.92)$$

onde $i = 1, 2, 3$.

3.3.3 Condição de energia nula (CEN)

A condição de energia nula é semelhante à condição de energia fraca, exceto que v^α é substituído por um vetor tipo nulo arbitrário k^α . Portanto, a condição de energia nula pode ser expressa por

$$T_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta \geq 0. \quad (3.93)$$

Novamente, usando a definição covariante do tensor momento energia, (3.85) e o definição do vetor nulo (3.87), temos que

$$\rho + A^2 p_1 + B^2 p_2 + C^2 p_3 \geq 0. \quad (3.94)$$

Da mesma maneira que no caso anterior, vamos analisar a condição de vínculo da constante de normalização, que neste caso deve obedecer $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Escolhendo $B = C = 0$, implica que $A = 1$, de modo que obtemos $\rho + p_1 \geq 0$. Analogamente, podemos fazer para B e C . Com isso, chegamos à conclusão que a condição de energia nula implica em

$$\rho + p_i \geq 0. \quad (3.95)$$

Como já foi dito, a CEN é um caso especial da CEFER e representa uma restrição mais leve sobre a matéria.

3.3.4 Condição de energia forte (CEFO)

As condições de energia anteriores restringiram que a densidade de energia fosse maior ou igual a zero, porém não se preocupavam com o traço do tensor momento energia. Com auxílio das Equações de campo de Einstein, em um sistema de unidades em que ($c = G = 1$), temos que,

$$T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} = \frac{R_{\alpha\beta}}{8\pi}. \quad (3.96)$$

Contraindo com um vetor tipo-tempo v^α , podemos escrever

$$\left(T_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta + \frac{1}{2} T \right) = \frac{1}{8\pi} R_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta. \quad (3.97)$$

A condição de energia forte consiste em exigir que o traço do tensor momento energia T não seja negativo o suficiente ao ponto de superar as contribuições de energia, ou seja,

$$T_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta \geq -\frac{1}{2}T, \quad (3.98)$$

desta maneira $R_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta$ será sempre positivo. Da mesma maneira que nos casos anteriores, usando as equações (3.85) e (3.86), temos o seguinte vínculo,

$$\gamma^2(\rho + a^2p_1 + b^2p_2 + c^2p_3) \geq \frac{1}{2}(\rho - p_1 - p_2 - p_3), \quad (3.99)$$

na qual devemos também analisar as constantes. Fazendo com que $a = b = c = 0$, implica na condição de vínculo $\gamma = 1$ e, com isso, temos,

$$\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq 0. \quad (3.100)$$

Por outro lado, escolhendo $b = c = 0$, implica em

$$\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq a^2(p_2 + p_3 - \rho - p_1), \quad (3.101)$$

com a condição de vínculo $\gamma^2 = 1/(1 - a^2)$. Desse modo, podemos reescrever a equação de forma que

$$\rho + p_1 + (p_2 + p_3)\frac{1 - a^2}{1 + a^2} \geq 0, \quad (3.102)$$

e tomando o limite $a \rightarrow 1$, chegamos na conclusão que

$$\rho + p_1 \geq 0. \quad (3.103)$$

De forma análoga podemos descrever relações para p_2 e p_3 a fim de descrever a condição de energia forte como

$$\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq 0, \quad \rho + p_i \geq 0. \quad (3.104)$$

Vale ressaltar que a violação da condição de energia fraca implica de forma direta na violação da condição de energia forte.

3.3.5 Condição de energia dominante (CED)

A condição de energia dominante (CED) descreve a noção de que a matéria deve fluir ao longo de curvas, que devem ser do tipo-tempo ou nulo, ou seja, devem permanecer dentro do cone de luz e respeitar a causalidade.

No caso tipo-tempo a condição de energia dominante pode ser vista como uma extensão da condição de energia fraca, de modo que além de requisitar que $T_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta \geq 0$, para qualquer v^α tipo-tempo, também exige que a quadricorrente vinculada ao vetor v^α , $-T^\alpha_\beta v^\beta$, não seja do tipo-espaço, ou seja,

$$T^\alpha_\beta v^\beta T_{\gamma\alpha} v^\gamma \leq 0, \quad (3.105)$$

o que implica diretamente que,

$$\gamma(\rho^2 - a^2 p_1^2 - b^2 p_2^2 - c^2 p_3^2) \geq 0. \quad (3.106)$$

Para analisar como nos casos anteriores, vamos fazer $a = b = c = 0$ e, como isso, chegamos em $\rho^2 \geq 0$. Assim, teremos dois resultados possíveis para ρ e usando o fato que $-T_{\beta}^{\alpha} v^{\beta}$ tem que ser direcionado para o futuro, podemos selecionar o ramo positivo $+\rho$. Com isso podemos escrever a primeira parte da condição como

$$\rho \geq 0. \quad (3.107)$$

Alternativamente, escolhendo $b = c = 0$ chegamos em $\rho^2 \geq a^2 p_1^2$. Como isso deve valer para qualquer $a < 1$, então, concluímos que $\rho \geq |p_1|$. Raciocínio semelhante pode ser feito com b e c de modo que a condição de energia dominante para vetores tipo nulo pode ser expressa como

$$\rho^2 \geq 0, \quad \rho \geq |p_1|. \quad (3.108)$$

3.3.6 Aplicação das condições de energia na equação de Raychaudhuri

Agora vamos analisar a equação de Raychaudhuri para congruências de curvas cujo vetor tangente é tipo-tempo, no caso específico das Equações de Einstein.

Usando as equações de campo de Einstein no lado direito da equação de Raychaudhuri (3.55), obtemos

$$R_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = 8\pi \left(T_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} + \frac{1}{2} T \right). \quad (3.109)$$

Com o auxílio da seção anterior, é possível dizer que a equação (3.97) é sempre maior ou igual a zero, se o espaço-tempo em questão respeitar a condição de energia forte. Com isso, podemos reescrever a equação de Raychaudhuri no formato de uma inequação

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{3}\theta^2 + \sigma^2 - \omega^2 \leq 0. \quad (3.110)$$

No caso de congruências irrotacionais ($\omega = 0$), podemos reescrever a inequação da seguinte forma,

$$\frac{d\theta}{d\tau} \leq -\frac{1}{3}\theta^2. \quad (3.111)$$

que pode ser facilmente integrada, levando ao seguinte resultado

$$\frac{1}{\theta}(\tau) \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{\tau}{3}, \quad (3.112)$$

onde θ_0 é a constante oriunda da integração.

Para a análise da equação, vamos que se $\theta_0 \rightarrow 0$, então existe um $\tau_0 = 1/3|\theta_0|$, finito, tal que $1/\theta(\tau) = 0^-$, ou seja $\theta \rightarrow \infty$. Fisicamente, podemos dizer que no tempo $\tau = 1/3|\theta_0|$ as geodésicas da congruência se aproximam infinitamente.

3.4 Caracterização de superfícies de aprisionamento

Usando como base o trabalho de Senovilla (SENOVILLA, 2011; SENOVILLA, 2002), vamos descrever o conceito de superfície de aprisionamento fechada, ou simplesmente superfície de aprisionamento. Tais superfícies são espaciais e fechadas com a propriedade de que sua área tende a diminuir localmente para uma dada direção.

3.4.1 Quantidades intrínsecas

Seja \mathcal{M} uma variedade quadridimensional e S uma superfície contida em \mathcal{M} . A equação paramétrica que representa a restrição das coordenadas de \mathcal{M} a S é descrita por,

$$x^\alpha = \Phi^\alpha(\lambda^a), \quad (3.113)$$

onde x^α são as coordenadas em \mathcal{M} e λ^a as coordenadas em S . Nesta dissertação vamos considerar ($a = 2, 3$).

Para o desenvolvimento desta teoria precisamos encontrar o que será chamado de primeira forma fundamental de S . Para isso vamos restringir o elemento de linha a deslocamentos confinados à superfície S , de forma que o vetor tangente a uma curva em S é dado por,

$$e_a^\alpha = \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \lambda^a}. \quad (3.114)$$

Assim, usando a equação (3.113), podemos escrever o elemento de linha sobre S como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}|_\Sigma dx^\mu dx^\nu \quad (3.115)$$

$$= g_{\mu\nu}|_\Sigma \frac{d\Phi^\mu}{d\lambda^a} \frac{d\Phi^\nu}{d\lambda^b} d\lambda^a d\lambda^b \quad (3.116)$$

$$= \gamma_{ab} d\lambda^a d\lambda^b, \quad (3.117)$$

onde vamos definir a métrica induzida em S , ou *primeira forma fundamental*, como

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu, \quad (3.118)$$

de modo que sua inversa é dada a por

$$\gamma^{ab} \gamma_{bc} = \delta_b^a. \quad (3.119)$$

Como S é uma superfície puramente espacial, podemos decompor a métrica $g_{\alpha\beta}$ da seguinte maneira:

$$g_{\alpha\beta} = \gamma^{ab} e_{a\alpha} e_{b\beta} - n_\alpha n_\beta, \quad (3.120)$$

com inversa dada por

$$g^{\alpha\beta} = \gamma^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta - n^\alpha n^\beta, \quad (3.121)$$

de forma que a sua forma mista pode ser expressa por

$$g^\alpha_\beta = \gamma^{ab} e^\alpha_a e_{b\beta} - n^\alpha n_\beta, \quad (3.122)$$

onde n^α é um vetor normal a superfície, tal que $n^\alpha n_\alpha = -1$ e sua projeção em $g_{\alpha\beta}$, vem dada por

$$g_{\alpha\beta} n^\alpha = n_\beta. \quad (3.123)$$

A derivada intrínseca de $A_{a|b}$ em relação a superfície S é definida pela expressão

$$A_{a|b} \equiv A_{\alpha;\beta} e^\alpha_a e^\beta_b, \quad (3.124)$$

de maneira que

$$A_{a|b} = A_{a,b} - \Gamma_{ab}^c A_c, \quad (3.125)$$

onde a conexão Γ_{ab}^c pode ser escrita em termos das derivadas de γ_{ab} como

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} \gamma^{dc} (\gamma_{ca,b} + \gamma_{cb,a} - \gamma_{ab,c}). \quad (3.126)$$

De maneira similar ao caso do campo vetorial A_a , a derivada intrínseca da métrica induzida γ é definida da seguinte maneira:

$$\gamma_{ab|c} \equiv \gamma_{\alpha\beta;\gamma} e^\alpha_a e^\beta_b e^\gamma_c, \quad (3.127)$$

a partir da qual pode ser facilmente mostrado que

$$\gamma_{ab|c} = 0. \quad (3.128)$$

Com isso, podemos rescrever a derivada covariante de um campo tensorial A^α

$$A^\alpha_{;\beta} e^\beta_b = g^\alpha_\nu A^\nu_{;\beta} e^\beta_b, \quad (3.129)$$

usando a equação (3.122),

$$g^\alpha_\nu A^\nu_{;\beta} e^\beta_b = (-n^\alpha n_\nu + \gamma^{ac} e^\alpha_a e_{c\nu}) A^\nu_{;\beta} e^\beta_b \quad (3.130)$$

$$= -(n_\nu a^\nu_{;\beta} e^\beta_b) n^\alpha + \gamma^{ab} (A_{\nu;\beta} e^\nu_c e^\alpha_a) e^\beta_b, \quad (3.131)$$

onde vamos definir a projeção de $A_{\nu;\beta}$ na superfície Σ como sendo

$$A_{\nu;\beta} e^\nu_c e^\beta_b \equiv A_{c|b}, \quad (3.132)$$

a qual será denominada *derivada covariante intrínseca* do vetor A^α . Desta maneira, usando o fato que n^α é ortogonal a $A^\alpha = A^a e^\alpha_a$, podemos rescrever a equação

$$A^\alpha_{;\beta} e^\beta_b = -(n_{\nu;\beta} A^\nu e^\beta_b) + \gamma^{cb} A_{c|b} e^\alpha_a, \quad (3.133)$$

usando a equação (3.128) e a relação $A^\mu = A^a e^\mu_a$, como sendo

$$A^\alpha_{;\beta} e^\beta_b = A^a_{|b} e^\alpha_a + A^a (n_{\mu;\beta} e^\mu_a e^\beta_b). \quad (3.134)$$

A partir daí, vamos definir

$$K_{ab} \equiv n_{\alpha;\beta} e^\alpha_a e^\beta_b, \quad (3.135)$$

como sendo a *segunda forma fundamental* da superfície Σ e, enfim, encontramos

$$A^\alpha_{;\beta} e^\beta_b = A^a_{|b} e^\alpha_a + A^a K_{ab} n^\alpha. \quad (3.136)$$

3.4.2 Vetor de curvatura média

Sendo S uma superfície bidimensional, compacta e espacial, definida em uma variedade quadridimensional \mathcal{M} , podemos sempre encontrar dois vetores do tipo nulo linearmente independentes e escolhê-los direcionados para o futuro em toda superfície S . Denotemos esses vetores nulos como l^\pm , com as seguintes propriedades,

$$l_\mu^+ e_a^\mu = 0, \quad l_\mu^- e_a^\mu = 0, \quad l_\mu^+ l^{+\mu} = 0, \quad l_\mu^- l^{-\mu} = 0, \quad (3.137)$$

e de forma que a contração entre eles seja

$$l_\mu^+ l^{-\mu} = -1. \quad (3.138)$$

Esses vetores vão caracterizar a superfície de aprisionamento, uma vez que a região confinada por essa superfície tem a propriedade de limitar os raios de luz. Com auxílio destes vetores, podemos decompor a segunda forma fundamental de S , da seguinte maneira:

$$\vec{K}_{ab} = -K_{ab}(l^-)l^{\vec{+}} - K_{ab}(l^+)l^{\vec{-}}, \quad (3.139)$$

e com isso definir o *vetor de curvatura média*,

$$\vec{H} \equiv \gamma^{ab} \vec{K}_{ab} = -\theta^- l^{\vec{+}} - \theta^+ l^{\vec{-}}, \quad (3.140)$$

onde θ^\pm são os fatores de expansão na direção de vetores nulos e tais que

$$\theta^\pm = \gamma^{ab} K_{ab}(l^\pm). \quad (3.141)$$

De acordo com o sinal dos respectivos fatores de expansão, podemos descrever características da superfície em questão, de forma que alguns casos estão descritos na [Tabela 1](#).

Tabela 1 – Os possíveis casos de superfícies de aprisionamento futuras

Fator de expansão	Tipo de superfície
$\theta^+ = \theta^- = 0$	estacionária ou mínima
$\theta^+ < 0, \theta^- < 0$	aprisionamento futura (af)
$\theta^+ = 0, \theta^- \leq 0$	marginalmente af
$\theta^+ \leq 0, \theta^- = 0$	marginalmente af
$\theta^+ \leq 0, \theta^- \leq 0$	fracamente af

Enfim, para uma análise mais direta de uma superfície, podemos expressar o seguinte escalar

$$\xi = -(\vec{H})^2 = -H^\mu H_\mu = 2\theta^+ \theta^-, \quad (3.142)$$

de forma que se $\xi \geq 0$, então a superfície em questão é uma superfície de aprisionamento.

3.4.3 Análise matemática alternativa

O cálculo direto da equação (3.142) já dá informação suficiente para a análise da superfície de aprisionamento em questão. Porém, neste trabalho também vamos analisar outra via e mostrar uma análise matemática alternativa para chegar nos mesmos resultados. Tal análise é de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Seja a superfície de aprisionamento S , descrita pela condição $x^A = \text{constante}$, onde $(A = 0, 1)$. Dessa maneira, assumimos que podemos escrever o quadrado do elemento de linha do espaço-tempo como

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b + 2g_{aA}dx^a dx^A + g_{AB}dx^A dx^B, \quad (3.143)$$

onde as coordenadas (2,3) são representadas por x^a e $\det g_{ab} > 0$. A parametrização pode ser feita da seguinte maneira,

$$x^A = \phi^A(\lambda) = X^A = \text{constante}, \quad x^a = \phi^a(\lambda) = \lambda^a. \quad (3.144)$$

Assim, podemos descrever a métrica induzida a superfície S da forma

$$\gamma_{ab} = g_{ab}(X, \lambda), \quad (3.145)$$

e os vetores nulos como

$$\kappa^\pm = l_A^\pm dx^A, \quad g^{AB}l_A^\pm l_B^\pm = 0, \quad g^{AB}l_A^+ l_B^- = -1. \quad (3.146)$$

Por consequência, podemos definir as seguintes funções auxiliares,

$$G \doteq e^{U(x)} \doteq \sqrt{\det \gamma}, \quad \vec{g}_A = g_{Aa} dx^a, \quad (3.147)$$

e assim reescrever os fatores de expansão dados pela Eq. (3.141) como sendo

$$\theta^\pm = \kappa^{\pm a} [U_{,a} - e^{-U} (e^U \gamma^{ab} g_{Aa})_{,b}]. \quad (3.148)$$

Com a ajuda da identidade

$$\text{div } \mathbf{g}_A = \gamma^{ab} g_{Aa|B} = \frac{1}{\sqrt{\det \gamma}} (\sqrt{\det \gamma} \gamma^{ab} g_{Aa})_{,b}, \quad (3.149)$$

podemos reescrever o vetor de curvatura média

$$H_\mu = \delta_\mu^A (U_{,A} - \text{div } \mathbf{g}_A). \quad (3.150)$$

e, desta maneira, escrever o escalar de Senovilla como

$$\xi = -g^{BC} H_B H_C |_\Sigma. \quad (3.151)$$

No que segue, essa expressão alternativa para ξ será bastante útil quando analisarmos o Teorema de Singularidade de Penrose sob a ação de transformações disformes.

4 O Teorema de Singularidade de Penrose

Neste capítulo serão apresentados os conceitos matemáticos necessários para o entendimento das hipóteses do Teorema de Singularidade de Penrose (1965) e sua respectiva prova. No capítulo anterior, em particular, trabalhamos com definições operacionais de superfície de aprisionamento. Porém, neste capítulo, iremos retomar esse conceito de maneira mais formal, com o intuito de elaborar um esboço da prova do Teorema de Singularidade. É importante ressaltar que este trabalho não tem o objetivo de fazer um estudo detalhado da estrutura matemática do Teorema de singularidade, como forma de completeza sugerimos as seguintes referências (LOBO, 2013; PENROSE, 1965; SENOVILLA, 2011; SENOVILLA, 2002).

4.1 O Teorema em si

O Teorema de Penrose que será analisado neste trabalho possui várias versões, de forma que todas tem o mesmo objetivo, mas com hipóteses ligeiramente distintas. Assim, vamos inicialmente apresentar a forma descrita em (PENROSE, 1965), que pode ser traduzida livremente como:

Teorema 1 (*Teorema de Singularidade*) *Se um espaço-tempo respeita a condição de convergência nula, contém uma superfície de Cauchy não compacta Σ e uma superfície de aprisionamento S , então o espaço-tempo é geodesicamente-nulo incompleto.*

As condições impostas pelo Teorema 1 podem ser definidas da seguinte forma:

Definição 1 *Uma superfície de aprisionamento futura é uma superfície espacial S na qual o traço das formas fundamentais tenham o mesmo sinal. Quando ambos os traços são negativos, a superfície fica presa no futuro, enquanto que se os mesmos são positivos, a superfície é aprisionada ao passado.*

Definição 2 *Um espaço-tempo satisfaz a condição de convergência nula se $R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta > 0$ para todo vetor tipo-nulo k^α .*

Definição 3 *Uma superfície de Cauchy Σ é um conjunto sem referência a tempo e na qual todas as curvas causais a intersectam uma única vez e cuja união do passado e futuro dessas curvas a partir de Σ consiste em toda a variedade.*

A superfície de Cauchy é uma superfície de condições iniciais, pois todas as curvas causais “passam” por ela sendo esta acronal, no sentido que observadores na superfície registram o mesmo valor de tempo.

Agora vamos apresentar os chamados conjuntos básicos da teoria da causalidade, onde não será feita uma definição propriamente dita, mas apenas vamos citá-los para efeito de completeza com o que seguirá no esboço da demonstração. Vamos usar como Refs. (LUZ, 2000; SENOVILLA, 1998; SENOVILLA, 2002; SENOVILLA, 2011)

Seja um espaço-tempo, quadridimensional, \mathcal{M} , onde para cada ponto $p \in \mathcal{M}$ vamos definir os seguintes conjuntos:

- $I^+(p) \equiv \{ x \in \mathcal{M} \mid \text{onde existe uma curva tipo-tempo direcionada para o futuro de } p \text{ até } x \}$.
- $J^+(p) \equiv \{ x \in \mathcal{M} \mid \text{onde existe uma curva causal (tipo-tempo ou nulo) direcionada para o futuro de } p \text{ até } x \}$.
- $E^+(p) \equiv \{ J^+(p) - I^+(p) \}$.

Sendo que para cada conjunto ζ , tal que $\zeta \subseteq \mathcal{M}$, podemos escrever

$$I^+(\zeta) \equiv \bigcup_{p \in \zeta} I^+(p), \quad J^+(\zeta) \equiv \bigcup_{p \in \zeta} J^+(p), \quad E^+(\zeta) \equiv J^+(\zeta) - I^+(\zeta), \quad (4.1)$$

a *grosso modo* podemos dizer que, o conjunto $J^+(S)$ é o futuro das curvas causais, $I^+(S)$ das curvas tipo-tempo e $E^+(S)$ o futuro dos raios de luz emanados da superfície S .

Agora, vamos apresentar algumas definições:

Definição 4 Um conjunto $\zeta \subseteq \mathcal{M}$ é limite achronal se $I^+(\zeta) \cap \zeta = \emptyset$.

Definição 5 Um conjunto $\zeta \subseteq \mathcal{M}$ é chamado um conjunto futuro $I^+(\zeta) \subseteq \zeta$.

Definição 6 Uma fronteira acronal própria é uma fronteira de um conjunto futuro.

Definição 7 Um conjunto é dito compacto se para toda cobertura aberta do conjunto existe uma subcobertura finita.

As seguintes proposições também serão úteis no que segue e podem ser encontradas em (SENOVILLA, 1998).

Proposição 1 Se a condição de convergência nula for mantida, existe uma superfície de aprisionamento futura S fechada, onde qualquer conjunto $E^+(S)$ é compacto ou o espaço-tempo é geodesicamente-nulo incompleto para o futuro ou os dois casos.

Proposição 2 *Um espaço-tempo é globalmente hiperbólico se e somente se contém uma superfície de Cauchy.*

Proposição 3 *Um espaço-tempo é causalmente simples se e somente se $\partial J^+(p) = E^+(p)$ e $\partial J^-(p) = E^-(p)$ para todo $p \in \mathcal{M}_4$.*

Proposição 4 *Qualquer espaço-tempo globalmente hiperbólico é causalmente simples.*

Proposição 5 *Qualquer fronteira achronal própria B é uma subvariedade C^1 tridimensional mergulhada. Em outras palavras, B é uma superfície acronal sem fronteira.*

A partir de agora, vamos seguir apresentando a demonstração por absurdo, mostrando uma incompatibilidade entre as hipóteses do Teorema e a completude geodésica.

Prova 1 *Seja uma superfície de aprisionamento futura S . Se o espaço-tempo for geodesicamente-nulo completo, então pela Proposição 1 o conjunto $E^+(S)$ é compacto. Por outro lado, para um espaço-tempo globalmente hiperbólico, pela Proposição 2, ele é causalmente simples, de modo que $E^+(S) = \partial J^+(S)$, devido a Proposição 4. Então, pela Definição 6, $E^+(S)$ seria uma fronteira acronal própria compacta. Escolhendo qualquer congruência de curvas tipo-nulo no espaço-tempo, cada curva da congruência cruza a superfície de Cauchy Σ exatamente uma vez (por definição), e encontra $E^+(S)$ pelo menos uma vez. Então, seguindo as curvas da congruência, podemos definir um mapa contínuo de $E^+(S)$ em Σ . Se $E^+(S)$ é compacto, e como Σ não é, a imagem de $E^+(S)$ neste mapa contínuo deve ter uma fronteira em Σ . Mas isso é impossível devido à Proposição 5.*

4.2 Análise do Teorema

Para a interpretação do Teorema, vamos analisar a sua prova de forma a detalhar e esclarecer algumas peculiaridades. Assumindo que a condição de convergência nula é válida (Definição 2), pela Proposição 1 chegamos num empasse entre o cenário do conjunto $E^+(S)$ ser compacto e o espaço-tempo em questão ser incompleto. Assim, se o conjunto $E^+(S)$ não for compacto, chegamos na conclusão que temos um espaço-tempo incompleto. A demonstração do teorema foi feita baseando-se neste fato.

Desta maneira, nosso objetivo é traçar um caminho e mostrar que o conjunto $E^+(S)$ não é compacto. Começamos pela Proposição 2 que diz que um espaço-tempo é globalmente hiperbólico se e somente se possuir uma Superfície de Cauchy (Definição 3) e, sendo globalmente hiperbólico, também é causalmente simples. Enfim, sendo causalmente simples, pela Proposição 3 temos que o limite do conjunto $J^+(S)$, denotado por $\partial J^+(S)$, é igual ao conjunto $E^+(S)$ e, portanto, $E^+(S)$ é uma fronteira acronal própria.

Escolhendo uma congruência de curvas tipo-nulo, temos que cada curva dessa congruência irá atravessar a superfície de Cauchy exatamente uma vez, de forma a encontrar o conjunto $E^+(S)$ apenas uma vez. Neste contexto vamos definir uma mapa contínuo (uma função contínua) de $E^+(S)$ em Σ . Esse mapa que define uma subvariedade que não poderia ter, fronteira de acordo com a Proposição 5. Logo voltando até o início da demonstração, vemos que o problema está em $E^+(S)$ ser compacto. Fugir desta condição significa ter um espaço-tempo geodesicamente nulo incompleto.

Porém, Σ não é um conjunto compacto, logo um mapa de $E^+(S)$ definido em Σ não terá um limite e, conseqüentemente, o conjunto $E^+(S)$ não deve ser compacto.

Em poucas palavras, podemos dizer que existem três requisitos para que o espaço-tempo seja incompleto,

- Condição de convergência nula;
- Superfície de Cauchy não compacta;
- Superfície de aprisionamento.

De forma que o espaço-tempo em questão tem que admitir as três hipóteses.

A condição de convergência nula está inteiramente relacionada com a condição de energia do espaço-tempo em questão, analisadas na Seção 3 do Capítulo 2, de forma que estamos especificando o caso de vetores nulos. O caso de campos vetoriais tipo-tempo pode ser visto em (LOBO, 2013) e o caso tipo-espaço não tem apelo físico. Por fim, vamos reescrever o Teorema de Penrose com o objetivo de especificar seus requisitos e dar os elementos a serem utilizados no caso das transformações disformes. Da mesma maneira como feito em (BITTENCOURT et al., 2020), o Teorema de Penrose (1965) pode ser escrito como:

Teorema 2 *Seja \mathcal{M} um espaço-tempo munido de uma métrica g , de tal modo que admita uma superfície de Cauchy não compacta. Seja $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci vinculado ao par (\mathcal{M}, g) com vetor tangente k^μ . Se:*

1. *Existe uma Superfície de Cauchy não compacta em (\mathcal{M}, g)*
2. *$R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu > 0$, para todo k^μ ;*
3. *Existe uma superfície de aprisionamento S , de tal maneira que $\xi > 0$,*

então, (\mathcal{M}, g) é geodesicamente-nulo incompleto.

Tomando como base o Teorema 2, nos capítulos seguintes, vamos novamente reescrever o Teorema de Penrose, agora sob a ótica das *Transformações Disformes*.

5 Transformações disformes

Transformações disformes foram inicialmente definidas como transformações geométricas atuantes na métrica do espaço-tempo. Recentemente, foi mostrado que essas transformações permitem representações algébricas e de grupos como pode ser visto na Refs. (GOULART; FALCIANO, 2013; CARVALHO; LOBO; BITTENCOURT, 2016).

Neste trabalho, vamos usar as transformações disformes exclusivamente para a análise do Teorema de Singularidade de Penrose. Porém, como visto em (CARVALHO; LOBO; BITTENCOURT, 2016), existem outras aplicações a partir do ponto de vista físico. O interesse nas transformações disformes vem crescendo devido às suas aplicações em várias teorias gravitacionais, por exemplo, as teorias bimétricas de gravitação (CLIFTON et al., 2012), teorias escalares (NOVELLO et al., 2013), inflação disforme (KALOPER, 2004) e modelos análogos à gravitação (NOVELLO; BITTENCOURT, 2012; NOVELLO; BITTENCOURT, 2013).

Assim como apresentado na Ref. (CARVALHO; LOBO; BITTENCOURT, 2016), uma transformação disforme de um único vetor de uma determinada métrica, que chamaremos simplesmente de transformação disforme, é uma aplicação de funções escalares α e β , um tensor métrico g e um campo vetorial V , em um espaço-tempo \mathcal{M} e os associa a uma métrica \hat{g} por meio da seguinte transformação

$$\hat{g}(*, \cdot) = \alpha g(*, \cdot) + \beta g(V, *) \otimes g(V, \cdot). \quad (5.1)$$

Daqui em diante, vamos nomear g como métrica de fundo e V vetor disforme associado a direção da transformação. O mapa que define a transformação disforme é bem definido se $\alpha > 0$ e $\alpha + \beta > 0$ em toda a variedade. Se essa definição for respeitada, podemos dizer que a métrica construída \hat{g} é uma métrica pseudo-riemanniana com a mesma assinatura de g . Os escalares α e β não são necessariamente funcionais dependendo apenas dos pontos da variedade, mas funções arbitrárias que também poderiam ter uma dependência funcional em V e suas derivadas.

Neste capítulo, será analisado o caso em que o campo vetorial V é do tipo-nulo e vamos representá-lo por d . Assim, podemos escrever explicitamente as componentes covariantes da métrica disforme em um determinado sistema de coordenadas como

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \alpha g_{\mu\nu} + \beta d_\mu d_\nu, \quad (5.2)$$

e por meio da definição do delta de Kronecker δ^μ_ν , chegamos em sua forma contravariante

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha} g^{\mu\nu} - \frac{\beta}{\alpha^2} d^\mu d^\nu. \quad (5.3)$$

A derivada covariante de um campo vetorial covariante l_μ relacionada à métrica disforme é definida como

$$l_{\hat{\mu};\hat{\nu}} = l_{\mu,\nu} + \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha l_\alpha, \quad (5.4)$$

onde $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ são os símbolos de Christoffel construídos a partir da métrica transformada \hat{g} e pode ser representado da seguinte maneira,

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + C^\alpha_{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ é a conexão de Levi-Civita construída com a métrica de fundo g e $C^\alpha_{\mu\nu}$ é um tensor dado pela seguinte equação

$$C^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \hat{g}^{\alpha\beta} \left(\hat{g}_{\nu\beta;\mu} + \hat{g}_{\mu\beta;\nu} + \hat{g}_{\mu\nu;\beta} \right). \quad (5.6)$$

Com auxílio das Eqs. (5.2) e (5.3), além do software Mathematica[©], podemos expressá-lo explicitamente através de

$$\begin{aligned} C^\epsilon_{\mu\nu} = & \frac{1}{\alpha} \left[\delta_{(\mu}^\epsilon \alpha_{;\nu)} + \beta d^\epsilon d_{(\nu;\mu)} + d^\epsilon d_{(\mu}\beta_{;\nu)} + \beta d_{(\mu} d^\epsilon_{;\nu)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\epsilon\lambda} \alpha_{;\lambda} - \beta d_{(\mu} d^\epsilon_{\nu)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} d_\mu d_\nu g^{\epsilon\lambda} \beta_{;\lambda} \right] + \frac{\beta d^\epsilon}{2\alpha^2} \left[g_{\mu\nu} d^\lambda \alpha_{;\lambda} - 2d_{(\mu} \alpha_{;\nu)} + \beta d^\lambda (d_\mu d_\nu)_{;\lambda} + d_\mu d_\nu d^\lambda \beta_{;\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Por fim, usando a equação (5.4), podemos escrever o tensor de curvatura de Riemann

$$\hat{R}_{\mu\nu\alpha}{}^\beta l_\beta = 2l_{\alpha[\hat{\nu};\hat{\mu}]}, \quad (5.8)$$

onde $\hat{\nabla}$ é a derivada covariante com respeito a métrica \hat{g} e, conseqüentemente, o tensor de Ricci da métrica disformes como

$$\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 2C^\alpha_{\nu[\alpha;\mu]} + 2C^\beta_{\nu[\mu} C^\alpha_{\alpha]\beta}, \quad (5.9)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci construído com a métrica de fundo. A seguir, vamos discutir dois casos particulares de transformações disformes que são de grande interesse na física: transformações conformes e transformações do tipo Kerr-Schild.

5.1 Transformações conformes

Transformações conformes são mudanças isotrópicas na geometria que podem ser vistas como um caso específico das transformações disformes, quando $\beta = 0$. Vamos considerar um espaço-tempo \mathcal{M} , descrito por uma métrica g e outro espaço-tempo definido pelo par (\mathcal{M}, \hat{g}) , cuja relação entre os dois pode ser expressa por

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \alpha g_{\mu\nu}, \quad (5.10)$$

onde α é uma função positiva. Tendo definido a transformação, é interessante a apresentação de alguns resultados. Sendo k^μ um vetor tangente a uma dada curva na métrica g , é possível mostrar que \hat{k}^μ satisfaz a equação geodésica na métrica \hat{g} , onde $\hat{k}^\mu = k^\mu/\alpha$.

Desta maneira temos a equação da geodésica referente a métrica \hat{g} descrita por

$$k^\mu \hat{g}_{;\nu} k^\nu = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} k^\mu, \quad (5.11)$$

onde denotamos $\dot{\alpha} \doteq \alpha_{;\mu} k^\mu$. Sendo λ e $\tilde{\lambda}$ os parâmetros afins das curvas nulas com respeito a $g_{\mu\nu}$ e $\hat{g}_{\mu\nu}$, respectivamente, podemos escrevê-los em termos do parâmetro α da seguinte maneira

$$\tilde{\lambda}(\lambda) = \int_0^\lambda \alpha(p) dp, \quad (5.12)$$

e, assim, usando a definição de \hat{k} , recuperamos a forma padrão da equação da geodésica

$$\hat{k}^\mu \hat{g}_{;\nu} \hat{k}^\nu = 0. \quad (5.13)$$

Como forma de completeza, o fator de expansão em relação à métrica disforme é dado por

$$\hat{\theta} \doteq \hat{k}^\mu \hat{g}_{;\mu} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}. \quad (5.14)$$

O tensor de Ricci para a métrica \hat{g} pode ser calculado usando a equação (5.9), resultando em

$$\hat{R}_{\mu\nu} \hat{k}^\mu \hat{k}^\nu = \left[R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu + \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 - \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} \right], \quad (5.15)$$

que com o auxílio da função $u = 1/\sqrt{\alpha}$ e substituindo-a na equação acima podemos escrever

$$\hat{R}_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu + 2 \frac{\ddot{u}}{u}. \quad (5.16)$$

Com isso, temos as expressões de como o fator de expansão e o termo de convergência geodésica ficam modificados por uma transformação conforme.

5.2 Transformações Kerr-Schild

As transformações Kerr-Schild podem ser vistas como um caso particular das transformações disformes quando $\alpha = 1$ e $\beta = \epsilon = \pm 1$. Desta maneira, podemos representá-las em coordenadas por

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \epsilon d_\mu d_\nu, \quad (5.17)$$

onde sua forma covariante

$$\hat{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \epsilon d^\mu d^\nu, \quad (5.18)$$

onde o vetor disforme d^μ será considerado do tipo nulo, isto é $d^\mu d_\mu = 0$.

Seja k^μ um vetor tipo-nulo na métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$, ou seja

$$\hat{g}_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0. \quad (5.19)$$

O vetor k^μ não necessariamente será nulo na métrica $g_{\mu\nu}$, pois

$$\hat{g}_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu + \epsilon (d_\mu k^\mu) (d_\nu k^\nu) = 0. \quad (5.20)$$

Na verdade, teremos

$$g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = -\epsilon\phi^2, \quad (5.21)$$

onde definimos a contração de d^μ com k_μ como ϕ . Desta maneira, temos que se $\phi = 0$, então k^μ é ortogonal a d^μ e, deste modo, k^μ é um vetor nulo nas duas métricas.

O tensor de Ricci relacionado à métrica \hat{g} pode ser escrito em termos da métrica g , do vetor disforme e suas derivadas como

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\mu\nu}k^\mu k^\nu &= \left(R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}d'_\mu d'_\nu + \epsilon D^\alpha{}_\alpha D_{\mu\nu} + \epsilon D'_{\mu\nu} - 2\epsilon D_{[\nu\alpha]}D_\mu{}^\alpha \right) k^\mu k^\nu + \\ &2\phi k^\mu \left[d^\nu D'_{[\mu\nu]} + D^\nu{}_{[\nu}d'_{\mu]} - \epsilon g^{\nu\alpha}(D_{[\mu\nu]};\alpha] \right] + \frac{\phi^2}{2} \left(g^{\mu\nu}d'_\nu d'_\mu + 2D^{\mu\nu}D_{[\mu\nu]} \right), \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde $d_{\mu;\nu} = D_{\mu\nu}$, $d_{\nu;\mu}d^\mu = d'_\nu$, $D_{\mu\nu;\alpha}d^\alpha = D'_{\mu\nu}$. Tendo de posse a Eq. (5.22), já temos o resultado necessária para a adaptação do Teorema de Singularidade para o caso conforme.

Quando $\phi = 0$, ou seja, d^μ e k^μ são paralelos, essa equação assume uma forma mais simples dada por

$$\hat{R}_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = \left(R_{\mu\nu} - \epsilon d'_{\mu;\nu} \right) k^\mu k^\nu. \quad (5.23)$$

É interessante observar que a condição de convergência nula não é satisfeita nas duas métricas simultaneamente, ou seja, se $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu > 0$ não necessariamente garante que $\hat{R}_{\mu\nu}k^\mu k^\nu > 0$.

Como forma de análise das superfícies de aprisionamento caracterizadas pelos vetores l_μ^\pm , vamos agora descrever o fator de expansão em relação a métrica (5.17). Usando a configuração descrita no capítulo 3, podemos descrever o fator de expansão em relação a métrica \hat{g} da seguinte forma

$$\hat{\theta}^\pm = \theta^\pm + \kappa^\pm + \epsilon d^\mu l_\mu^\pm d'^\nu{}_{;\mu} + \epsilon (d^\mu l_\mu^\pm)_{;\nu} d'^\nu. \quad (5.24)$$

Definindo a função auxiliar $d^\mu l_\mu = \psi$, podemos integrar esta equação para ψ fazendo $\hat{\theta}^\pm = 0$ (definição de superfície de aprisionamento), obtendo

$$\psi^\pm = \left\{ C - \epsilon \int (\theta^\pm + \kappa^\pm)(u) e^{[\int_u d^\mu(\bar{u})_{;\mu} d\bar{u}]} d\bar{u} \right\} e^{-\int d^\mu(v)_{;\mu} dv}, \quad (5.25)$$

onde C é uma constante. A equação (5.25) tem pouca utilidade no nosso contexto, porém vale ressaltar sua grande semelhança com os problemas funcionais que encontramos em teoria geométrica da medida. Todavia, discutir esse assunto está fora do escopo deste trabalho.

6 Efeitos de uma transformação disforme no Teorema de Singularidade

Neste capítulo, vamos reunir os conceitos apresentados nos capítulos anteriores com o intuito de formular uma nova técnica para a análise das singularidades em um dado espaço-tempo. Nosso objetivo agora é analisar os efeitos de uma transformação disforme no Teorema de Singularidade de Penrose (1965). Para isso, vamos separar esta análise em duas partes uma vez que podemos ver uma transformação disforme como sendo uma transformação conforme numa métrica do tipo Kerr-Schild. Assim, podemos analisar esses dois casos em separado e compô-los no final.

6.1 Efeitos de uma transformação conforme

Como forma de análise, vamos usar a versão compacta do Teorema de Singularidade (*Teorema 2*), particularmente os três requisitos. O primeiro deles menciona a condição de convergência nula e, como dito anteriormente, só é satisfeita se a contração do tensor de Ricci (de um dado espaço-tempo) com um par de campos vetoriais nulos seja maior que zero. A equação (5.15) designa o tensor de Ricci para espaços-tempo vinculados a métrica \hat{g} e, com isso, podemos adaptar a condição de convergência nula para métricas conformes apenas substituindo o tensor de Ricci por sua forma conforme. Assim,

$$\hat{R}_{\mu\nu}k^\mu k^\nu > 0 \longrightarrow R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu > -\frac{3}{2}\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right) + \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}. \quad (6.1)$$

A superfície de aprisionamento relacionada ao espaço-tempo vinculado com \hat{g} está diretamente relacionada ao fator do escalar (3.142) ser maior ou igual a zero. Porém, tal escalar foi calculado usando uma métrica simples, no sentido que o mesmo tem que ser adaptado para o caso conforme. Isto posto, vamos usar a mesma estrutura usada no capítulo 3, porém devemos redefinir alguns parâmetros.

O conjunto de funções auxiliares (3.147) podem ser reescrito em função da métrica conforme como

$$G(\alpha, g) = e^{U(\alpha, g)} = \sqrt{\alpha\gamma}, \quad \vec{g}_A(\alpha, g) = \alpha\vec{g}_A(g), \quad (6.2)$$

onde a derivada da função $U(\alpha, g)$ pode ser escrita como

$$U_{,A}(\alpha, g) = \alpha U_{,A}(g) + \alpha_{,A}U(g), \quad (6.3)$$

e o divergente de $\vec{g}_A(\alpha, g)$ da seguinte maneira

$$\text{div } \mathbf{g}_A(\alpha, g) = \text{div } \mathbf{g}_A(g) + \frac{1}{\alpha}(\alpha_{,A} - \gamma^{ab}\alpha_{,b}g_{Aa}). \quad (6.4)$$

Com um cálculo simples, usando as equações (6.3) e (6.4), podemos escrever as componentes do vetor de curvatura média como sendo

$$H_\mu(\alpha, g) = H_\mu(g) + \frac{1}{\alpha} \delta_\mu^A (\alpha_{,A} - \gamma^{ab} \alpha_{,b} g_{Aa}), \quad (6.5)$$

e, assim, podemos apresentar o escalar de Senovilla (SENOVILLA, 2011) como

$$\xi(\alpha, g) = H_\mu(\alpha, g) H^\mu(\alpha, g). \quad (6.6)$$

Assim sendo, seguindo a Referência (BITTENCOURT et al., 2020), podemos enunciar o Teorema de Singularidade para o caso conforme:

Teorema 3 *Seja uma transformação conforme com \hat{g} dada pela equação (5.10), de tal modo que (\mathcal{M}, \hat{g}) admita uma superfície de Cauchy não compacta. Seja $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci vinculado ao par (\mathcal{M}, g) e λ o parâmetro afim de uma curva tipo-nulo com vetor tangente k^μ . Se,*

1. $R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - \frac{3}{2} \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$, para todo k^μ ;
2. Existe uma superfície compacta S , tal que $\hat{\xi}(\alpha, g) > 0$,

então (\mathcal{M}, \hat{g}) é geodesicamente-nulo incompleto.

6.2 Efeitos de uma transformação disforme

Seja (\mathcal{M}, \hat{g}) um espaço-tempo e S uma superfície de aprisionamento contida nesse espaço-tempo. As coordenadas do espaço-tempo podem ser descritas por $\{x^\mu\}$ e na superfície por $\{x^a\}$. De forma que índices latinos maiúsculos A, B, \dots estão associados às componentes (0, 1) e índices latinos minúsculos a, b, \dots às componentes (2, 3).

Fazendo uma decomposição 2+2 no espaço-tempo \mathcal{M} , podemos escrever o elemento de linha associado da seguinte maneira

$$ds^2 = (g_{ab} + \epsilon d_a d_b) dx^a dx^b + 2(g_{aA} + \epsilon d_a d_A) dx^a dx^A + (g_{AB} + \epsilon d_A d_B) dx^A dx^B, \quad (6.7)$$

onde usamos que

$$\begin{aligned} \hat{g}_{ab} &= g_{ab} + \epsilon d_a d_b, \\ \hat{g}_{aA} &= g_{aA} + \epsilon d_a d_A, \\ \hat{g}_{AB} &= g_{AB} + \epsilon d_B d_B. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Usando a definição de métrica induzida na superfície S , apresentada no Capítulo 3, podemos escrever

$$\hat{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} + \epsilon d_a d_b, \quad (6.9)$$

onde sua inversa é dada por

$$\hat{\gamma}^{ab} = \gamma^{ab} + f d^a d^b, \quad (6.10)$$

de forma que

$$\hat{\gamma}^{ac} \hat{\gamma}_{cb} = \delta_b^a. \quad (6.11)$$

Porém, a equação (6.11) só será válida se $f = -\epsilon (1 + \epsilon d^b d_b)^{-1} = -\epsilon/F^2$, de maneira que podemos escrever a métrica induzida

$$\hat{\gamma}^{ab} = \gamma^{ab} - \frac{\epsilon}{F^2} d^a d^b \quad (6.12)$$

A partir da equação (6.10) podemos escrever seu determinante usando a fórmula de Sherman-Morrison como

$$\det \hat{\gamma} = (1 + \epsilon d^a d_a) \det \gamma. \quad (6.13)$$

e rescrever as equações (3.147) no caso Kerr-Schild como

$$\hat{U}_{,A}(g, d) = U_{,A}(g) + \frac{F_{,A}}{F}. \quad (6.14)$$

Da definição

$$\widehat{\text{div}} \mathbf{g}_A(g, d) = \frac{(\sqrt{\det \hat{\gamma}} \hat{\gamma}^{ab} \hat{g}_{Aa})_{,b}}{\sqrt{\det \hat{\gamma}}}, \quad (6.15)$$

e usando a relação

$$\hat{\gamma}^{ab} \hat{g}_{Aa} = \gamma^{ab} g_{Aa} + \frac{\epsilon}{F^2} d^B (d_a - d^A g_{aA}), \quad (6.16)$$

podemos escrever que

$$\widehat{\text{div}} \mathbf{g}_A = \text{div} \mathbf{g}_A + \gamma^{ab} g_{Aa} \frac{F_{,b}}{F} + \frac{\epsilon}{F} \text{div} \mathbf{I}_A, \quad (6.17)$$

onde foi definida a função auxiliar

$$\mathbf{I}_A(g, \alpha) \equiv I_{Ac} dx^c = \frac{1}{F} (d_A - d^a g_{Aa}) d_c dx^c. \quad (6.18)$$

Assim, podemos escrever o vetor de curvatura média em função da métrica disforme

$$\hat{H}_\mu = \delta_\mu^A (\hat{U}_{,A} - \widehat{\text{div}} \mathbf{g}_A) = H_\mu(g) - \delta_\mu^A (\gamma^{ab} g_{Aa} \frac{F_{,b}}{F} + \frac{\epsilon}{F} \text{div} \mathbf{I}_A), \quad (6.19)$$

e, enfim, o escalar de Senovilla

$$\hat{\xi} = -\hat{g}^{AB} \hat{H}_A \hat{H}_B = \xi(g) - \kappa(g, d) \quad (6.20)$$

onde

$$\kappa = -g^{AB} (\gamma^{ab} g_{Aa} \frac{F_{,b}}{F} + \frac{\epsilon}{F} \text{div} \mathbf{I}_A) \left[(\gamma^{ab} g_{Bb} \frac{F_{,a}}{F} + \frac{\epsilon}{F} \text{div} \mathbf{I}_B) - 2H_B \right] + d^A d^B \hat{H}_A \hat{H}_B. \quad (6.21)$$

A equação (6.20) mostra a relação entre o escalar ξ calculado com a métrica de fundo e aquele calculado com a métrica disforme, onde κ pode mudar o sinal de ξ , causando

assim uma mudança na classificação da superfície S . Desta forma, fica claro as mudanças causadas pela transformação neste caso.

Novamente, usando a Referência (BITTENCOURT et al., 2020), podemos enunciar o Teorema de Singularidade para o caso das transformações do tipo Kerr-Schild:

Teorema 4 *Seja $(\mathcal{M}, g) \mapsto (\mathcal{M}, \hat{g})$ uma transformação disforme com \hat{g} dada pela equação (5.17), de tal modo que o (\mathcal{M}, \hat{g}) admita uma superfície de Cauchy não compacta. Seja $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci vinculado ao par (\mathcal{M}, g) e k^μ o vetor tangente de uma curva tipo-nulo. Se,*

1. $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq - \left[\frac{1}{2}d'_\mu d'_\nu + \epsilon D^\alpha{}_\alpha D_{\mu\nu} + \epsilon D'_{\mu\nu} - 2\epsilon D_{[\nu\alpha]} D_\mu{}^\alpha \right] k^\mu k^\nu + 2\phi k^\mu \left[d^\nu D'_{[\mu\nu]} + D^\nu{}_{[\nu} d'_{\mu]} - \epsilon g^{\nu\alpha} (D_{[\mu\nu]};\alpha) \right] + \frac{\phi^2}{2} \left(g^{\mu\nu} d'_\nu d'_\mu + 2D^{\mu\nu} D_{[\mu\nu]} \right)$, para todo k^μ ;
2. *Existe uma superfície de aprisionamento compacta S , tal que $\hat{\xi} > 0$,*

então (\mathcal{M}, \hat{g}) é geodesicamente-nulo incompleto.

6.3 Aplicações

Agora, vamos enfim cumprir o objetivo deste trabalho. Usaremos os resultados obtidos anteriormente em aplicações a um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, de forma que respeite a condição de convergência nula e não tenha superfícies de aprisionamento. A escolha específica destes espaço-tempo veio naturalmente após os estudos apresentados em referências como (POISSON, 2004; SENOVILLA, 2002; SENOVILLA, 2011; CHANDRASEKHAR, 2016), pois estes espaço-tempos são estudados no contexto de colapso gravitacional e de formação de buracos negros, ou seja, as aplicações mais comuns dos Teorema de singularidade. Com isto, os estudos previamente realizados podem ser usados para entender melhor os resultados obtidos, sendo a análise feita aqui totalmente baseada na Ref. (BITTENCOURT et al., 2020).

Uma vez selecionado o objeto de estudo, vamos escolher um espaço-tempo que possa ser descrito pela transformação Kerr-Schild (Capítulo 4, Seção 2). Assim, fixando a métrica de Minkowski como sendo a métrica de fundo, que pode ser escrita em coordenada esféricas (u, r, θ, φ) por

$$ds^2 = -dv^2 + 2 dv dr + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2, \quad (6.22)$$

com u sendo uma coordenada temporal e o vetor disforme satisfazendo as seguintes propriedades

$$d^\mu = f(r)\delta_r^\mu, \quad d_\mu = f(r)\delta_\mu^v, \quad d^\mu d_\mu = 0, \quad (6.23)$$

onde $f(r)$ é uma função arbitrária, a métrica disforme é dada por

$$ds^2 = -dv^2 + 2 dv dr + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2 + \epsilon f^2(r) dv^2. \quad (6.24)$$

Como nosso objetivo é verificar o Teorema 3, para isso devemos calcular a derivada covariante do vetor disforme d^μ com respeito à métrica de Minkowski. É fácil verificar que o vetor disforme d^μ satisfaz a equação da geodésica para a métrica $\eta_{\mu\nu}$ e, neste caso, sua derivada covariante pode ser escrita em forma matricial como

$$[D^\mu{}_\nu] = [d^\mu{}_{;\nu}] = \text{diag} \left(0, \frac{df}{dr}, \frac{f}{r}, \frac{f}{r} \right), \quad (6.25)$$

Assim podemos calcular as quantidades necessárias para verificar a primeira hipótese do Teorema 3, como a derivada covariante de D^μ_ν com respeito a métrica de Minkowski na direção do vetor disforme

$$[D^\mu{}_\nu] = [d^\alpha(d^\mu{}_{;\nu});_\alpha] = f(r) \text{diag} \left(0, \frac{d^2 f}{dr^2}, \frac{r \frac{df}{dr} - f}{r^2}, \frac{r \frac{df}{dr} - f}{r^2} \right), \quad (6.26)$$

e sua divergência com respeito ao índice contravariante

$$D^\mu{}_{\nu;\mu} = \left(0, \frac{r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - 2f}{r^2}, 0, 0 \right). \quad (6.27)$$

De posse dos resultados acima, podemos reescrever o termo de foco (5.22) da forma

$$\hat{R}_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = \phi^2 \left[f \frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{df}{dr} \right)^2 + \frac{2f}{r} \frac{df}{dr} \right], \quad (6.28)$$

onde o vetor k^μ satisfaz a equação (5.20).

Se impusermos a igualdade (limite inferior) na condição de convergência nula, isto é, $\hat{R}_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0$, podemos reescrever a equação (6.28) como uma equação diferencial para $f(r)$:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = -\frac{1}{f} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 - \frac{2}{r} \frac{df}{dr}. \quad (6.29)$$

Integrando duas vezes em relação a variável r , obtemos a seguinte solução

$$f_0^\pm(r) = \pm \sqrt{C_0 + \frac{C_1}{r}}, \quad (6.30)$$

onde C_0 e C_1 são constantes de integração e seus valores podem alterar o significado físico de f_0 e, conseqüentemente, da métrica (6.24). Vamos analisar aqui os casos análogos a Ref. (BITTENCOURT et al., 2020), de modo a determinar o papel das constantes na família de funções $f_0^\pm(r)$. Se fizermos $C_0 \neq 0$, então teremos uma classe de métrica assintoticamente não planas, cuja componente $0 - 0$ do tensor de Einstein é nulo, de forma a não ter

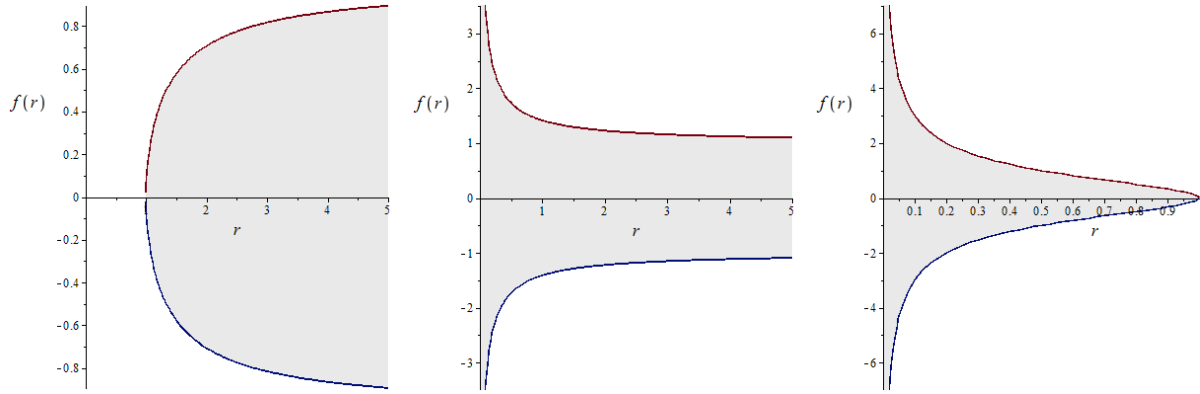


Figura 3 – As regiões sombreadas indicam onde a condição de convergência nula é válida. À esquerda, foi considerado $C_0 > 0$ e $C_1 < 0$. Ao centro, foi escolhido $C_0, C_1 > 0$. À direita, foi considerado $C_0 < 0$ e $C_1 > 0$. O caso em que ambos $C_0, C_1 < 0$, $f(r)$ is puramente imaginária.

correspondência no domínio da relatividade geral. Os gráficos da Fig. 3 mostram os casos em que a função f_0^\pm satisfaz a igualdade da condição de convergência nula, para certo valores das constantes C_0 e C_1 .

Assim, como nos capítulos anteriores, a análise da superfície de aprisionamento será feita pela abordagem de Senovilla (SENOVILLA, 2011; SENOVILLA, 2002). Em poucas palavras, vamos recalculer o escalar (6.20) no nosso contexto. Primeiramente, é conveniente apresentar a métrica de Minkowski da seguinte maneira

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ [\eta_{AB}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\eta_{ab}] \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.31)$$

onde

$$[\eta_{AB}] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad [\eta_{ab}] = [\gamma_{ab}] = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

Por sua vez, a métrica inversa pode ser escrita como

$$[\eta^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

Com um cálculo simples, a função auxiliar $U(e)$, pode ser escrita como

$$U(r) = \ln \left(\frac{1}{r^2} \right) \quad (6.34)$$

e assim sua derivada em relação a coordenada radial

$$U_{,A}(r) = -\frac{2}{r}\delta_A^r. \quad (6.35)$$

Por outro lado, a função auxiliar $\text{div } \mathbf{g}_A$ é nula, devido a componente $\eta_{Aa} = 0$. Assim, o escalar ξ pode ser escrito como

$$\xi(r) = -\eta^{rr}U_{,r}U_{,r} = -\frac{4}{r^2} < 0. \quad (6.36)$$

Note que ξ é sempre negativo e não admite superfícies de aprisionamento como esperado para o espaço-tempo de Minkowski.

Agora, vamos calcular a influência da transformação disforme sobre a métrica de Minkowski por meio do escalar κ . No nosso caso, temos

$$\kappa(d) = (d^r U_{,r})^2, \quad (6.37)$$

e, dessa maneira, o escalar $\hat{\xi}$ pode ser escrito como

$$\hat{\xi}(\eta, d) = -\frac{4[1 - f^2(r)]}{r^2}, \quad (6.38)$$

o qual admite toda uma região não negativa, quando $f^2(r) \geq 1$.

Em resumo, se o espaço-tempo dado pela métrica (6.24) possui uma superfície de Cauchy não compacta, for tal que o lado esquerdo da equação (6.29) for sempre maior ou igual ao lado direito para todo r e, além disso, temos $f^2(r) \geq 1$ para algum valor de r , então esse espaço-tempo apresenta uma singularidade.

7 Conclusão

Nessa dissertação, abordamos alguns elementos da geometria diferencial com o objetivo de entender, descrever e provar o Teorema de Singularidade de Penrose (1965) para campos vetoriais tipo-nulo. Em paralelo a isso, estudamos as transformações disformes. À vista de todas as ferramentas matemáticas definidas, mostramos que se aplicarmos uma transformação disforme a um espaço-tempo não singular (\mathcal{M}, g) , satisfazendo a condição de convergência nula e sem superfícies de aprisionamento, a presença de singularidades no espaço-tempo resultante (\mathcal{M}, \hat{g}) pode ser verificada através da reescrita, sob a ótica das transformações disformes, da condição de convergência nula e do escalar de Senovilla, desde que (\mathcal{M}, \hat{g}) admita uma superfície de Cauchy não compacta, como citado anteriormente.

Existem muitas implicações de nossos resultados para teorias alternativas da gravitação. Em especial, o caso que foi estudado na seção anterior, mostra que a condição de convergência de uma métrica disforme estática e esfericamente simétrica pode ser testada diretamente usando a Eq. (6.28), e a formação de superfície aprisionamento fechada ocorre se $f(r)$ admitir raízes reais para r positivo, assim como mostrado na Figura 3. Essas condições tornaram testáveis espaço-temos que admitem superfícies de Cauchy. Em poucas palavras, podemos dizer que a formulação proposta aqui torna testável duas de três hipóteses do Teorema de Singularidade de Penrose.

Para perspectiva futuras, podemos trabalhar com o caso tipo-tempo do Teorema de Singularidade, assim como os outros Teoremas de Penrose e outras teorias alternativas da gravitação. Especificando um pouco mais, podemos estudar a dependência da condição de convergência nos teoremas de singularidade e, usando um tratamento análogo ao trabalhado com as transformações disformes, introduzir outras simetrias como no caso de espaços-tempos axialmente simétricos. Por estes não admitirem superfícies de Cauchy, talvez isso seja uma boa motivação para novos estudos.

Apêndices

APÊNDICE A – Transformação do tipo Kerr-Schild em métrica axialmente simétrica

Como é de conhecimento na literatura, as métricas de Kerr e Minkowski, além de serem solução da equação de Einstein (com as mesmas condições iniciais) podem ser relacionadas por transformações disformes. Aqui vamos apresentar a relação entre as métricas e posteriormente usar a técnica desenvolvida neste trabalho para a análise de singularidades.

Podemos escrever a métrica de Minkowski em coordenadas cartesianas, como

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (\text{A.1})$$

aplicando uma transformação de coordenadas do tipo

$$\begin{aligned} (x + iy) &= (r + ia) \sin \theta e^{i\phi} \\ z &= r \cos \theta \\ t &= v - r, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

podemos reescrevê-la como

$$ds^2 = -dv^2 + 2 dv dr - 2a \sin^2 \theta dr d\varphi + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \rho^2 d\theta^2. \quad (\text{A.3})$$

Usando como vetor disforme do tipo-nulo

$$d_\mu = \frac{\sqrt{2Mr}}{\rho} (-1, 0, 0, a \sin^2 \theta), \quad (\text{A.4})$$

e após aplicar uma transformação do tipo Kerr-Schild na métrica (A.3), obtemos a métrica de Kerr

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dv^2 + 2 dv dr - 2a \sin^2 \theta dr d\varphi + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ &\quad + \frac{2Mr}{\rho^2} (dv^2 - a \sin^2 \theta d\varphi)^2, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Sabendo as métricas de Kerr e Minkowski admitem superfície de Cauchy e respeitam a condição de convergência nula, resta apenas testar se o espaço-tempo em questão tem ou não superfície de aprisionamento. Retomando o formalismo apresentado no final do Capítulo 2, onde tínhamos a métrica do espaço-tempo decomposta em suas partes intrínsecas e

extrínsecas com respeito a uma dada superfície tipo-espaço compacta S , aqui vamos apresentar na forma matricial, como

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} & [\eta_{AB}] & 0 & 0 \\ & & 0 & -a \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & & \\ 0 & -a \sin^2 \theta & & [\eta_{ab}] \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

onde

$$[\eta_{AB}] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [\eta_{ab}] = [\gamma_{ab}] = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

e a matriz inversa dada por

$$[\eta^{\mu\nu}] = \rho^{-2} \begin{pmatrix} a^2 \sin^2 \theta & a^2 + r^2 & 0 & a \\ a^2 + r^2 & a^2 + r^2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & a & 0 & \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

assim o escalar de Senovilla, pode ser calculado, como

$$\xi = -\eta^{rr} U_{,r} U_{,r} = -r^2 \left[\frac{\rho^2 + r^2 + a^2}{\rho^2(r^2 + a^2)} \right]^2 \frac{r^2 + a^2}{\rho^2} < 0, \quad (\text{A.9})$$

dessa maneira ξ é negativo, e a métrica de Minkowski não tem superfície de aprisionamento, como esperado e calculado na secção 5.3. Agora vamos calcular a influência da transformação disforme, pelo escalar κ

$$\kappa = d^r d^r \hat{U}_{,r} \hat{U}_{,r} = \frac{2Mr}{\rho^2} \left[\frac{2r\rho^2 + (r+M)a^2 \sin^2 \theta}{(r^2 + a^2)\rho^2 + 2Mra^2 \sin^2 \theta} \right]^2 \quad (\text{A.10})$$

e, por fim, calcular o escalar $\hat{\xi}$

$$\hat{\xi} = -\frac{r^2 - 2Mr + a^2}{\rho^2} \left[\frac{2r\rho^2 + (r+M)a^2 \sin^2 \theta}{(r^2 + a^2)\rho^2 + 2Mra^2 \sin^2 \theta} \right]^2. \quad (\text{A.11})$$

Notamos que para a região $r^2 - 2Mr + a^2 \leq 0$, que foi inserida graças a transformação disforme, $\hat{\xi}$ é não negativo, caracterizando uma região de aprisionamento.

Referências

- BELINSKI, V. On the cosmological singularity. *Int. J. Mod. Phys. D*, p. 1430016, 23 2014. Citado na página 3.
- BITTENCOURT, E. et al. On the hypotheses of penrose's singularity theorem under disformal transformations. *Eur. Phys. J. C* 80, p. 265, 2020. Citado 4 vezes nas páginas 28, 34, 36 e 37.
- CARVALHO, G. G.; LOBO, I. P.; BITTENCOURT, E. Extended disformal approach in the scenario of rainbow gravity. *Phys. Rev. D*, 93, 2016. Citado na página 29.
- CHANDRASEKHAR, S. The mathematical theory of black holes. *Oxford University Press, Revised ed.*, 2016. Citado na página 36.
- CLIFTON, T. et al. Modified gravity and cosmology. *Gen. Rel. Grav.*, 45, p. 1–189, 2012. Citado na página 29.
- GOULART, E.; FALCIANO, F. Disformal invariance mawxell equations. *Quantum Grav.* 30, 2013. Citado na página 29.
- HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. The large scale structure of space-time. *Cambridge University Press, Cambridge, 1973*, 1973. Citado na página 3.
- KALOPER, N. Disformal inflation. *Phys. Lett. B*, p. 583, 2004. Citado na página 29.
- LOBO, I. Singularidades do espaço-tempo em variedades de weyl. *dissertação de mestrado, João Pessoa-PB*, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 28.
- LUZ, S. M. da. Conjuntos compactos. *Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC*, 2000. Citado na página 26.
- NOVELLO, M.; BITTENCOURT, E. Gordon metric revisited. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 86, p. 124024, Dec 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.124024>>. Citado na página 29.
- NOVELLO, M.; BITTENCOURT, E. Dragged metrics. *Gen. Rel. Grav.*, 45, 2013. Citado na página 29.
- NOVELLO, M. et al. Geometric scalar theory of gravity. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, *JCAP06 014.*, 2013. Citado na página 29.
- PENROSE, R. Gravitational collapse and space-time singularities 14. *Phys. Rev. Lett.*, p. 57, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 25.
- POISSON, E. A relativist's toolkit, cambridge, uk. *Cambridge University Press*, 2004. Citado 6 vezes nas páginas 15, 1, 5, 8, 10 e 36.
- REIRIS, M.; PERAZA, J. A complete classification of s1-symmetric static vacuum black holes, 36. *Class. Quantum Grav.*, 2019. Citado na página 3.

SENOVILLA, J. Trapped surfaces, horizons and exact solutions in higher dimensions. *Class. Quant. Grav.*, *19*, 2002. Citado 6 vezes nas páginas [5](#), [21](#), [25](#), [26](#), [36](#) e [38](#).

SENOVILLA, J. M. M. Singularity theorems and their consequences. *Cambridge University Press*, *30*, p. 701–848, 1998. Citado na página [26](#).

SENOVILLA, J. M. M. Trapped surfaces. *J. Phys. D*, *20*, 2011. Citado 6 vezes nas páginas [21](#), [25](#), [26](#), [34](#), [36](#) e [38](#).