

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

Contornos e Defeitos em Teorias de Campos
Conformes.

Rodrigo Galhardo Rana

Itajubá, 15 de janeiro de 2021

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA**

Rodrigo Galhardo Rana

**Contornos e Defeitos em Teorias de Campos
Conformes.**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física.

Área de Concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Gabriel Flores Hidalgo

Coorientador: Prof. Dr. Alexis Roa Aguirre

15 de janeiro de 2021

Itajubá

Agradecimentos

À minha família, em especial, meus pais, Ieda e Nelson, minha eterna gratidão por todo amor, apoio e crença em mim depositados desde o início da minha jornada acadêmica. Meus sinceros agradecimentos a todo esforço no investimento da minha educação.

Aos Professores Gabriel Hidalgo e Alexis Aguirre, agradeço profundamente todo o tempo e trabalho investidos em mim. Foi muito gratificante poder aprender tanto com vocês.

Aos amigos Janaína Madruga, Lucas Moraes, João Paulo da Silva, Rodolfo Fonseca, Renan Carvalho, amigos do mestrado, amigos da graduação, amigos do ensino médio, agradeço por estarem presentes (mesmo que não fisicamente) compartilhando as frustrações e alegrias da vida.

À minha namorada, Maria Luiza Vezzaro de Paula, minha gratidão por todo amparo, incentivo e amor em cada momento.

Ao cachorro que mais ouviu sobre física (que eu uso como desculpa para divagar), Truco, obrigado por ouvir mesmo sem entender.

À Universidade pública e de qualidade que proporciona o desenvolvimento da minha (e a de tantos mais) carreira acadêmica.

Às agências de fomento, CAPES e FAPEMIG, pelo apoio financeiro parcial durante a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudamos as principais propriedades e estruturas algébricas das teorias de campos conformes. Em particular, consideramos teorias de campos clássicos e quânticos para sistemas de bósons e férmions livres em diferentes situações de contornos. Além disso, estudamos os aspectos clássicos e quânticos considerando defeitos e a permutação de branas na teoria de Liouville.

Palavras-chaves: Simetria Conforme. Teorias de Campos Conformes. Contornos e Defeitos Conformes. Teoria Quântica de Campos.

Abstract

In this work we study the main properties and algebraic structures of the conformal field theories. In particular, we consider classical and quantum field theories for free bosonic and fermionic systems with different boundary conditions. In addition, we study the classical and quantum aspects considering defects and the permutation of branes in the Liouville theory.

Key-words: Conformal Symmetry. Conformal Field Theories. Conformal Boundaries and Defects. Quantum Field Theory.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de uma transformação conforme	13
Figura 2 – Representação do mapeamento através de esferas de Riemann	32
Figura 3 – Representação do mapeamento no cilindro	51
Figura 4 – Representação do mapeamento do cilindro no plano complexo	51
Figura 5 – Comutador como diferença de contornos	54
Figura 6 – Ondas parciais diagramaticamente	80
Figura 7 – Representação do bloco conforme em diagrama	91

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	INVARIÂNCIA CONFORME GLOBAL	12
2.1	O grupo conforme	12
2.1.1	Transformações conformes	12
2.1.2	Álgebra do grupo conforme	17
2.1.3	Construindo invariantes conformes	19
2.2	Invariância conforme numa teoria clássica de campos	20
2.2.1	Representações do grupo conforme em d dimensões	20
2.2.2	Correntes conservadas e o tensor momento-energia	22
2.3	Invariância conforme numa teoria quântica de campos	24
2.3.1	Funções de correlação	25
2.3.2	Identidades de Ward	28
3	INVARIÂNCIA CONFORME EM DUAS DIMENSÕES	30
3.1	O grupo conforme em duas dimensões	30
3.1.1	Mapeamentos conformes	30
3.1.2	Transformações globais conformes	32
3.1.3	Geradores conformes	33
3.1.4	Campos primários	35
3.1.5	Funções de correlação	36
3.2	Identidades de Ward	36
3.3	Expansão de produtos de operadores (OPE)	43
3.3.1	O bóson livre	44
3.3.2	O férmion livre	46
3.4	A carga central e significado físico	48
4	O FORMALISMO DE OPERADORES	50
4.1	O formalismo de operadores de uma teoria de campos conforme	50
4.1.1	Quantização radial	50
4.1.2	Ordenamento radial e expansão de produtos de operadores	53
4.2	A álgebra de Virasoro	54
4.2.1	Geradores conformes	54
4.2.2	Espaço de Hilbert	56
4.3	O bóson livre	58
4.3.1	Quantização canônica no cilindro	58

4.3.2	O operador de vértice	61
4.3.3	O espaço de Fock	62
4.3.4	Condição de contorno antiperiódica	63
4.3.5	O bóson compacto	65
4.4	O férmion livre	66
4.4.1	Quantização canônica no cilindro	66
4.4.2	Mapeamento no plano	67
4.4.3	Energias de vácuo	69
4.5	Um novo ordenamento normal	70
4.6	A álgebra de operadores e as famílias conformes	73
4.6.1	Campos descendentes	73
4.6.2	Famílias conformes	75
4.6.3	Álgebra de operadores	76
4.6.4	Blocos conformes	79
5	DEFEITOS EM TEORIAS DE CAMPOS CONFORMES	81
5.1	A teoria de Liouville	81
5.2	Defeitos na teoria de Liouville	84
5.2.1	Aspectos clássicos: defeitos e permutação de branas	84
5.2.2	Aspectos quânticos: defeitos e permutação de branas	88
6	CONCLUSÕES	95
	BIBLIOGRAFIA	97

1 Introdução

Desde o princípio do pensamento humano, quando se começou a análise de fenômenos naturais de modo racional, padrões são importantes para a compreensão da natureza da realidade a qual estamos inseridos. Da formalização da física através do método científico e da padronização matemática na elaboração de modelos, construímos teorias sobre paradigmas. Uma teoria que tem o seu limite de validade definido, isto é, sobre os limites físicos os quais os fenômenos podem ser compreendidos e previstos com precisão acurada, de certa forma, pode definir os limites do paradigma. Um conjunto de fenômenos que não são explicados e/ou previstos pela teoria vigente, indica caminhos para que se rompa o paradigma e o substitua por outro, através da possibilidade de criação de novas teorias.

No quesito de construir teorias e modelos, simetrias têm um papel muito importante, pois são capazes de simplificar a análise. Aliado a isso, ainda mais profundamente, com o Teorema de Noether e todo o desenvolvimento da teoria de grupos na física, vemos que existe uma relação intrínseca entre os mecanismos da Natureza e as simetrias. As simetrias tiveram sua relevância demonstrada explicitamente no forte poder de previsão acerca das diversas partículas subatômicas, através da mecânica quântica e teoria quântica de campos desenvolvidas no século passado. O contexto era descobrir a natureza fundamental da matéria, o que nos mostrou através do modelo padrão de partículas, que a Natureza pode ter uma predileção para simetrias, o que levou a uma investigação mais profunda sobre uma unificação das teorias. Desde então, não há uma teoria unificada ainda, fato que talvez seja uma consequência de considerar condições que, de certa forma, são ideais. Uma teoria quântica de campos menos idealizada poderia, a princípio, conter limites de fronteira. Ainda mais, poderia conter defeitos no espaço-tempo, na qual é descrita, isto é, condições de contorno internas ou numa região finita.

Consideramos que numa teoria de campos podemos encontrar a estrutura de simetrias procurando a álgebra associada ao grupo de transformações da teoria. No contexto de transformações locais, uma extensão direta da invariância de escala é a invariância conforme [1]. Sendo uma teoria de campos conformes em duas dimensões o objeto de estudo principal desta dissertação, podemos afirmar que a álgebra nos fornece um grande poder de análise por métodos algébricos exatos, o que vai de encontro com o tratamento perturbativo usual em teoria quântica de campos. As teorias conformes se mostraram aplicáveis a diversas áreas da física como matéria condensada, mecânica estatística, teoria quântica de campos, teoria de cordas, teorias de gravitação, AdS/CFT e holografia [2, 3, 4, 5]. Em teoria quântica de campos, as principais quantidades a serem determinadas são as funções de correlação. Em duas dimensões, as funções de correlação de dois pontos são inteiramente determinadas pela imposição da invariância conforme, enquanto a função de

mais pontos podem ser reduzidas a função de dois pontos por certos mecanismos. Neste trabalho, iremos tratar de maneira geral a teoria de campos conformes a fim de elucidar suas principais características [6, 7, 8], e fazer uma aplicação na teoria de Liouville com defeitos [10, 13, 14, 15, 16, 20, 22]. Ainda que não tratado nesta dissertação, esta pode servir como base para os trabalhos sobre módulo de Verma, determinante de Kac, modelos minimais, entre outros, os quais são resultados importantes que envolvem teorias conformes [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37].

Esta dissertação está organizada como segue. No capítulo 2 procuraremos compreender o grupo das transformações das simetrias conformes, bem como a álgebra associada, assim detalhando os aspectos da invariância global. No capítulo 3 (e em diante), particularizaremos o estudo para espaço-tempo de duas dimensões, analisando as propriedades gerais e consequências da simetria conforme sobre os campos clássicos e quânticos. Em particular, estudamos os sistemas com bósons e férmions livres após introduzir a expansão de produtos de operadores. No capítulo 4, analisaremos de maneira estrutural a teoria quântica de campos conformes, introduzindo o formalismo de operadores através da chamada álgebra de Virasoro. Além disso, exemplificaremos alguns sistemas físicos com contornos. No capítulo 5, aplicaremos os métodos de teorias conformes a uma teoria de Liouville com defeitos. Em particular, vamos calcular a função de correlação de dois pontos na teoria na presença de defeito. Este trabalho encerra-se com algumas conclusões e perspectivas no capítulo 6.

Além de revisar e apresentar de uma forma pedagógica os principais aspectos de uma teoria de campos conformes e algumas aplicações, esta dissertação tem como um dos principais objetivos, o de destacar e disseminar a importância das teorias de campos conformes nos trabalhos de pesquisa atuais. Almejamos que a mesma possa contribuir futuramente com o aprendizado de outras pessoas interessadas no assunto.

2 Invariância conforme global

Nesse capítulo e nos dois próximos são apresentados os tópicos necessários para uma boa compreensão do desenvolvimento deste trabalho. Iniciamos com uma breve revisão sobre o grupo conforme, seguindo com a invariância numa teoria clássica de campos, abordando as representações do grupo conforme em d dimensões e o tensor momento-energia. Em seguida, abordaremos a invariância conforme numa Teoria Quântica de Campos (TQC), onde apresentaremos as funções de correlação e as identidades de Ward.

2.1 O grupo conforme

A estrutura de grupo pressupõe um conjunto $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ munido de uma operação “ $*$ ” entre os elementos do conjunto, nas quais se satisfazem quatro propriedades básicas, sendo elas:

- $\forall g_i, g_j \in G, \quad g_i * g_j \in G.$
- $\forall g_i, g_j, g_k \in G, \quad g_i * (g_j * g_k) = (g_i * g_j) * g_k.$
- Existe o elemento identidade $e \in G$, tal que $e * g_j = g_j * e = g_j, \forall g_j \in G$.
- $\forall g_i \in G$, existe o elemento inverso $g_i^{-1} \in G$, tal que $g_i * g_i^{-1} = g_i^{-1} * g_i = e.$

Assim, definimos o grupo conforme como o conjunto de transformações inversíveis $x \rightarrow x'$ dadas em um produto escalar num espaço vetorial \mathbb{R}^n , com assinatura qualquer, na qual o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ em d dimensões permanece invariante a menos de um fator de escala, isto é:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (2.1)$$

O conjunto de transformações tal que (2.1) é satisfeito, são chamadas de transformações conformes. Essas transformações não afetam o ângulo entre duas linhas arbitrárias que se cruzam no espaço d -dimensional.

2.1.1 Transformações conformes

Para caracterizar as transformações finitas, é importante entender as transformações infinitesimais na definição da eq. (2.1). Uma transformação infinitesimal das coordenadas é escrita como,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x), \quad (2.2)$$

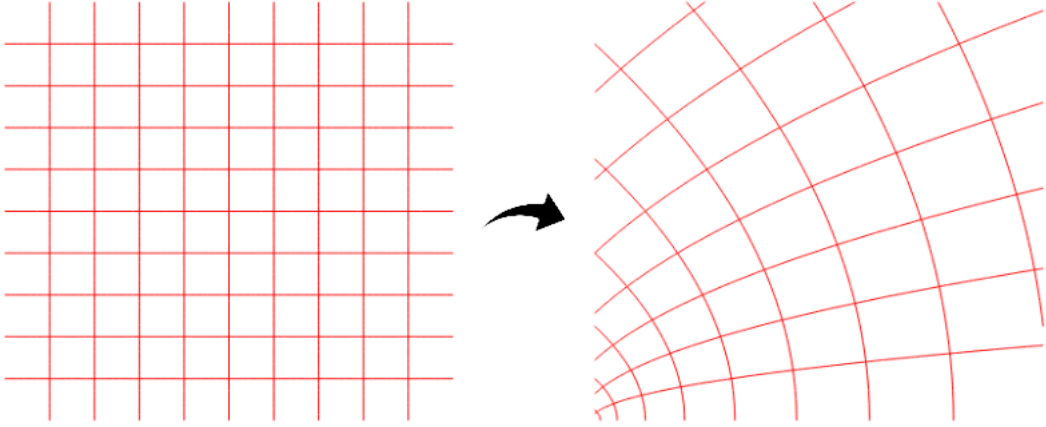


Figura 1 – Exemplo de uma transformação conforme

em que o termo $\epsilon^\mu(x)$ é um conjunto de infinitesimais dependentes das coordenadas. Fazendo a substituição na eq. (2.1), temos explicitamente,

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} = (\delta_\mu^\alpha - \partial_\mu \epsilon^\alpha) (\delta_\nu^\beta - \partial_\nu \epsilon^\beta) g_{\alpha\beta}, \quad (2.3)$$

de onde em primeira ordem em ϵ , obtemos para a relação acima,

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu). \quad (2.4)$$

A condição para a eq. (2.4) ser conforme é a métrica transformada ser proporcional a métrica anterior, isto é, a restrição imposta sobre a eq. (2.4) lê-se como,

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(x) g_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Vamos determinar $f(x)$ tomando o traço em ambos os lados da equação anterior, de forma que,

$$f(x) = \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho. \quad (2.6)$$

Em seguida, procuramos a dependência explícita de ϵ com as coordenadas x^μ . Aplicando uma segunda derivada na eq. (2.5), resulta em,

$$\partial_\rho \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\rho \partial_\nu \epsilon_\mu = \partial_\rho f(x) g_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

onde a partir da última passagem, a métrica é considerada independente das coordenadas, isto é, vamos nos limitar daqui para a frente a esse caso. Fazendo as seguintes permutações na eq. (2.7),

$$g_{\rho\mu} \partial_\nu f(x) = \partial_\nu \partial_\rho \epsilon_\mu + \partial_\nu \partial_\mu \epsilon_\rho, \quad (2.8)$$

$$g_{\nu\rho} \partial_\mu f(x) = \partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho + \partial_\mu \partial_\rho \epsilon_\nu. \quad (2.9)$$

Somando a primeira à segunda equação anterior e subtraindo a eq. (2.7), obtemos,

$$2\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\rho = g_{\mu\rho}\partial_\nu f(x) + g_{\nu\rho}\partial_\mu f(x) - g_{\mu\nu}\partial_\rho f(x). \quad (2.10)$$

Agora, aplicando a contração com a métrica no resultado anterior, encontramos,

$$2\partial^2\epsilon_\mu = (2-d)\partial_\mu f(x), \quad (2.11)$$

onde definimos ∂^2 como $g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$. Procedemos com a aplicação de ∂_ν na equação acima e ∂^2 na eq. (2.5). Após comparação desses resultados, obtemos,

$$(2-d)\partial_\mu\partial_\nu f(x) = g_{\mu\nu}\partial^2 f(x). \quad (2.12)$$

de onde, contraindo com a métrica, resulta em,

$$(d-1)\partial^2 f(x) = 0. \quad (2.13)$$

Da equação acima, vemos que no caso unidimensional, $d = 1$, a função $f(x)$ é arbitrária em relação às coordenadas. A noção de ângulo não existe, como intuitivamente podemos pensar, portanto, qualquer transformação suave é conforme em uma dimensão.

Vamos exemplificar a dependência da transformação infinitesimal ϵ_μ com as coordenadas considerando $d \geq 3$. O caso bidimensional, $d = 2$, será tratado com mais detalhes posteriormente. Usando a eq. (2.13) na eq. (2.12), chegamos, para $d \geq 3$, na condição sobre $f(x)$,

$$\partial_\mu\partial_\nu f(x) = 0. \quad (2.14)$$

Da equação acima, obtemos que $f(x)$ depende linearmente com as coordenadas do espaço, ou seja,

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu, \quad (2.15)$$

em que A e B_μ são constantes. Usando a relação de ϵ_μ com $f(x)$ dada pela eq. (2.10) e o resultado anterior, obtemos a seguinte limitação para ϵ_μ ,

$$\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\rho \equiv \text{constante}. \quad (2.16)$$

Do resultado anterior, vemos que ϵ_μ é pelo menos quadrático nas coordenadas, ou seja,

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu + C_{\mu\nu\rho}x^\mu x^\rho, \quad (2.17)$$

onde a_μ é uma constante arbitrária, a qual corresponde a uma translação. Como as condições de restrição são válidas para todo x , podemos tratar os termos de ϵ_μ potência a potência. Substituindo o termo linear $b_{\mu\nu}x^\nu$ na eq. (2.7),

$$\partial_\mu(b_{\nu\alpha}x^\alpha) + \partial_\nu(b_{\mu\alpha}x^\alpha) = \frac{2}{d}g^{\alpha\rho}\partial_\rho(b_{\alpha\lambda}x^\lambda). \quad (2.18)$$

Abrindo as derivadas,

$$\partial_\mu(b_{\nu\alpha})x^\alpha + b_{\nu\alpha}\delta_\mu^\alpha + \partial_\nu(b_{\mu\alpha})x^\alpha + b_{\mu\alpha}\delta_\nu^\alpha = \frac{2}{d}g^{\alpha\rho}[\partial_\rho(b_{\alpha\lambda})x^\lambda + b_{\alpha\lambda}\delta_\rho^\lambda]. \quad (2.19)$$

Reorganizando os fatores,

$$b_{\nu\mu} + b_{\mu\nu} + [\partial_\mu b_{\nu\alpha} + \partial_\nu b_{\mu\alpha}] x^\alpha = \frac{2}{d} g^{\alpha\rho} \partial_\rho (b_{\alpha\lambda}) x^\lambda + \frac{2}{d} g^{\alpha\rho} b_{\alpha\rho}, \quad (2.20)$$

que resulta em,

$$b_{\nu\mu} + b_{\mu\nu} = \frac{2}{d} b^\lambda{}_\lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.21)$$

A equação acima implica que $b_{\mu\nu}$ é a soma de um termo antissimétrico e de um termo de traço. Assim, podemos reescrever a condição como,

$$b_{\mu\nu} = \theta g_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

em que $m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu}$, a qual representa uma transformação ortogonal. O termo de traço representa uma transformação infinitesimal de escala.

Segue-se com a substituição do termo quadrático da eq. (2.17) na condição da eq. (2.10),

$$2\partial_\mu \partial_\nu (C_{\rho\alpha\beta} x^\alpha x^\beta) = \frac{2}{d} \left[g_{\mu\rho} \partial_\nu \partial_\alpha (C_{\delta\alpha\beta} x^\alpha x^\beta) g^{\lambda\delta} + g_{\nu\rho} \partial_\mu \partial_\lambda (C_{\delta\alpha\beta} x^\alpha x^\beta) g^{\lambda\delta} - g_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda (C_{\delta\alpha\beta} x^\alpha x^\beta) g^{\lambda\delta} \right], \quad (2.23)$$

de onde obtemos,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\nu (C_{\rho\alpha\beta} x^\alpha x^\beta) &= \frac{1}{d} g^{\lambda\delta} (g_{\mu\rho} \partial_\nu \partial_\lambda + g_{\nu\rho} \partial_\mu \partial_\lambda - g_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda) (C_{\delta\alpha\beta} x^\alpha x^\beta) \\ C_{\rho\alpha\beta} [\partial_\mu (x^\beta) \delta^\alpha{}_\nu + \partial_\nu (x^\alpha) \delta^\beta{}_\mu] &= \frac{1}{d} C_{\delta\alpha\beta} [g_{\mu\rho} (\delta^\alpha{}_\lambda \partial_\nu x^\beta + \delta^\beta{}_\lambda \partial_\nu x^\alpha) + g_{\nu\rho} (\delta^\alpha{}_\lambda \partial_\mu x^\beta + \delta^\beta{}_\lambda \partial_\mu x^\alpha) \\ &\quad - g_{\mu\nu} (\delta^\alpha{}_\lambda \partial_\rho x^\beta + \delta^\beta{}_\lambda \partial_\rho x^\alpha)] \\ C_{\rho\nu\beta} \partial_\mu x^\beta + C_{\rho\alpha\nu} \partial_\mu x^\alpha &= \frac{1}{d} g^{\lambda\delta} [g_{\mu\rho} (C_{\delta\lambda\beta} \partial_\nu x^\beta + C_{\delta\alpha\lambda} \partial_\nu x^\alpha) \\ &\quad + g_{\nu\rho} (C_{\delta\lambda\beta} \partial_\mu x^\beta + C_{\delta\alpha\lambda} \partial_\mu x^\alpha) \\ &\quad - g_{\mu\nu} (C_{\delta\lambda\beta} \partial_\rho x^\beta + C_{\delta\alpha\lambda} \partial_\rho x^\alpha)]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Renomeando os índices mudos α e β como $\alpha = \beta = \gamma$, obtemos,

$$\begin{aligned} 2C_{\rho\nu\gamma} \partial_\mu x^\gamma &= \frac{2}{d} g^{\lambda\delta} [g_{\mu\rho} \partial_\nu x^\gamma + g_{\nu\rho} \partial_\mu x^\gamma - g_{\mu\nu} \partial_\rho x^\gamma] C_{\delta\lambda\gamma} \\ C_{\rho\nu\mu} \delta^\gamma{}_\mu &= \frac{1}{d} C^\sigma{}_{\sigma\gamma} (g_{\mu\rho} \delta^\gamma{}_\nu + g_{\nu\rho} \delta^\gamma{}_\mu - g_{\mu\nu} \delta^\gamma{}_\rho) \\ C_{\rho\nu\mu} &= \frac{1}{d} (g_{\mu\rho} C^\sigma{}_{\sigma\nu} + g_{\mu\nu} C^\sigma{}_{\sigma\rho} - g_{\nu\rho} C^\sigma{}_{\sigma\mu}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Podemos reescrever a equação anterior como,

$$C_{\mu\nu\rho} = g_{\mu\rho} b_\nu + g_{\mu\nu} b_\rho - g_{\nu\rho} b_\mu \quad (2.26)$$

em que $b_\mu = \frac{1}{d} C^\sigma{}_{\sigma\mu}$. A referente transformação infinitesimal é encontrada ao substituir os termos de primeira (2.22) e segunda ordem (2.26) em ϵ , equação (2.17), e depois na transformações de coordenadas $x' \rightarrow x$, na qual resulta em,

$$x'_\mu = x_\mu + a_\mu + \theta x_\mu + m_{\mu\nu} x^\nu + 2(x.b)x_\mu - b_\mu x^2 \quad (2.27)$$

e considera-se a notação $y \cdot w = y_\alpha w^\alpha$. As transformações infinitesimais no espaço-tempo em questão estão todas contidas na equação acima, podendo ser identificadas. São elas:

Translações:

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (2.28)$$

Dilatações:

$$x'^\mu = x^\mu + \theta x^\mu \quad (2.29)$$

Ortogonais:

$$x'^\mu = x^\mu + m^\mu{}_\nu x^\nu \quad (2.30)$$

Conforme especial:

$$x'^\mu = x^\mu + 2(x \cdot b)x^\mu - b^\mu x^2 \quad (2.31)$$

Podemos calcular a dimensão do grupo conforme contabilizando os geradores das transformações. Para translações e conforme especial temos d geradores para cada, para dilatações temos um gerador e para as ortogonais são $\frac{d(d-1)}{2}$ geradores. Portanto, a dimensão do grupo conforme é $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$.

As correspondentes transformações são usualmente obtidas a partir de sucessivas transformações infinitesimais, isto é, define-se operadores lineares e aplica-se sucessivamente para compor a transformação. No entanto, tal procedimento não se aplica ao caso das transformações conformes especiais, uma vez que a transformação infinitesimal não é linear. Pode-se, entretanto, tratar pela evolução da transformação, isto é, para a transformação conforme especial podemos definir o seguinte campo vetorial,

$$X^\mu(x) = 2(b \cdot x)x^\mu - x^2 b^\mu, \quad (2.32)$$

tal que $X^\mu(x) = X^\mu(x(\tau)) = \dot{x}^\mu(\tau)$. Explicitamente, a equação diferencial a ser resolvida é,

$$\dot{x}^\mu = 2(b \cdot x)x^\mu - x^2 b^\mu. \quad (2.33)$$

Realizando uma mudança de variáveis da forma

$$y^\mu = \frac{x^\mu}{x^2} \quad (2.34)$$

temos, então,

$$\dot{y}^\mu = \frac{x^2 \dot{x}^\mu - x^\mu (2x \cdot \dot{x})}{(x^2)^2}. \quad (2.35)$$

Substituindo (2.33) na equação diferencial acima, ou seja,

$$\dot{y}^\mu = \frac{x^2(2(b \cdot x)x^\mu - x^2 b^\mu) - x^\mu(2x \cdot (2(b \cdot x) \cdot x - x^2 b))}{(x^2)^2} \quad (2.36)$$

assim,

$$\dot{y}^\mu = -b^\mu \quad (2.37)$$

A solução da equação acima, portanto, é dada por,

$$y^\mu = y_0^\mu - \tau b^\mu \quad (2.38)$$

em que $y_0 = \frac{x_0}{(x_0)^2}$ é o termo da constante de integração. A partir de tal resultado, retornamos à variável x ,

$$\frac{x^\mu}{x^2} = \frac{x_0^\mu}{(x_0)^2} - \tau b^\mu. \quad (2.39)$$

A equação acima, para fins de resolução pode ser escrita como,

$$\frac{x^\mu}{x^2} = A^\mu. \quad (2.40)$$

Portanto, a solução para x é proporcional à A^μ , isto é,

$$x^\mu = \lambda A^\mu \quad (2.41)$$

e ao retornar à equação (2.40) encontramos que

$$\lambda = \frac{1}{A^2} \quad (2.42)$$

e como resultado final,

$$x^\mu = \frac{A^\mu}{A^2}. \quad (2.43)$$

Substituindo A^μ explicitamente, obtemos,

$$x'^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2(b \cdot x) + b^2 x^2}. \quad (2.44)$$

A equação acima é, portanto, a transformação conforme especial, ou seja, se fizermos uma expansão em b em ordem linear no resultado acima, obtemos a transformação infinitesimal (2.31).

2.1.2 Álgebra do grupo conforme

Uma vez determinadas as transformações do grupo conforme, busca-se a compreensão da relação entre as transformações de simetria, ou seja, a estrutura do grupo. Entender tais relações estruturalmente significa obter a álgebra associada ao grupo. A estrutura algébrica do grupo conforme pode ser obtida através da determinação explícita dos geradores conformes em função de operadores diferenciais. Estes são encontrados pelo teorema de Noether para transformações infinitesimais. Podemos considerar para transformações infinitesimais nas coordenadas do espaço tempo,

$$x'^\mu = x^\mu + \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a}, \quad (2.45)$$

e para transformações infinitesimais de um campo no espaço tempo

$$\phi'(x') = \phi(x) + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}(x)}{\delta \omega_a}, \quad (2.46)$$

em que ω_a é um conjunto de parâmetros infinitesimais, no qual se considera apenas em primeira ordem e $\mathcal{F}(x)$ é uma função do campo $\phi(x)$. Um gerador G_a de uma transformação de simetria pode ser definido infinitesimalmente através da seguinte expressão

$$\delta_\omega \phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x) \equiv -i\omega_a G_a \phi(x), \quad (2.47)$$

onde é estabelecido, portanto, que a variação do campo num mesmo ponto x do espaço tempo é proporcional aos geradores G_a . Podemos relacionar a definição acima com as transformações dadas em (2.45) e (2.46). Substituindo a primeira na segunda da seguinte forma

$$\phi' \left(x + \omega_a \frac{\delta x^\mu(x)}{\delta \omega_a} \right) = \phi(x) + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}(x)}{\delta \omega_a}. \quad (2.48)$$

Considerando até primeira ordem em ω_a , obtemos

$$\phi'(x) - \phi(x) = \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}(x)}{\delta \omega_a} - \omega_a \frac{\delta x^\mu(x)}{\delta \omega_a} \partial_\mu \phi(x). \quad (2.49)$$

Comparando com equação (2.47), temos,

$$iG_a \phi(x) = \frac{\delta x^\mu(x)}{\delta \omega_a} \partial_\mu \phi(x) - \frac{\delta \mathcal{F}(x)}{\delta \omega_a}. \quad (2.50)$$

De posse da definição dos geradores em função das transformações infinitesimais e com o conhecimento das próprias transformações, pode-se obter as representações. Considerando, no momento, que o campo $\phi(x)$ não é afetado pelas transformações, isto é, $\mathcal{F}(\phi) = 0$. A título de exemplo, ao aplicar a definição acima às transformações especiais conformes infinitesimais dada em (2.31), temos,

$$\begin{aligned} iK_\nu \phi(x) &= \frac{\delta x^\mu}{\delta b^\nu} \partial_\mu \phi(x) \\ &= 2x_\nu x^\mu \partial_\mu \phi(x) - x^2 \partial_\nu \phi(x), \end{aligned} \quad (2.51)$$

de onde o gerador das transformações especiais conformes K_ν é,

$$K_\nu = -i(2x_\nu x^\mu \partial_\mu - x^2 \partial_\nu). \quad (2.52)$$

O mesmo procedimento pode ser adotado para encontrar as representações dos geradores associadas às outras transformações conformes. Dessa forma, obtemos,

Translação:

$$P_\mu = -i\partial_\mu. \quad (2.53)$$

Dilatação:

$$D = -ix^\mu \partial_\mu. \quad (2.54)$$

Rotação:

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu). \quad (2.55)$$

Os geradores acima estão na representação de operadores diferenciais, mas não é estritamente necessário que os mesmos estejam nessa representação, no entanto, é possível construir a estrutura algébrica a partir deles. Usando as representações específicas encontradas acima, temos as seguintes relações de comutação entre os geradores,

$$\begin{aligned}
 [D, P_\mu] &= iP_\mu, \\
 [D, K_\mu] &= -iK_\mu, \\
 [K_\mu, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}), \\
 [K_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu), \\
 [P_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu), \\
 [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}).
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Para exprimir as relações acima em uma forma mais compacta e simples, definimos os seguintes geradores

$$\begin{aligned}
 J_{\mu\nu} &= L_{\mu\nu}, \\
 J_{-1,0} &= D, \\
 J_{-1,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu), \\
 J_{0,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu),
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

de onde obtemos as relações de comutação,

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(\eta_{ad}J_{bc} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}), \tag{2.58}$$

onde $a, b \in \{-1, \mu\}$ e $J_{ab} = -J_{ba}$. Se o espaço é euclidiano η_{ab} é $diag(-1, 1, 1, 1, \dots, 1)$. Notemos que das relações (2.58) temos a álgebra de Lorentz em $d + 2$ dimensões.

2.1.3 Construindo invariantes conformes

Compreendidas as transformações que compõem o grupo conforme e sua estrutura algébrica, é possível construir invariantes conformes a partir de certas imposições. Tais invariantes serão funções $\Gamma(x_i)$, de N pontos x_i , que não se alteram sob transformações conformes a seguir: as translações impõem que somente diferenças entre pontos distintos, ou seja, do tipo $x_i - x_j$ sejam invariantes. Já as rotações implicam que a invariância origina-se da consideração de módulos, isto é, quantidades do tipo $|x_i - x_j|$, considerada já um invariante por translações. Associada às transformações de escala, ou dilatações, a invariância surge de razões da forma,

$$\frac{|x_i - x_j|}{|x_k - x_l|}, \tag{2.59}$$

e já computadas as invariâncias anteriores. Pelas transformações especiais conformes, obtemos,

$$|x'_i - x'_j| = \frac{|x_i - x_j|}{(1 - 2b \cdot x_i + b^2 x_i^2)^{1/2} (1 - 2b \cdot x_j + b^2 x_j^2)^{1/2}}. \tag{2.60}$$

As formas de transformação acima serão importantes para as definições dos requisitos em que as funções de correlação deverão ser construídas.

2.2 Invariância conforme numa teoria clássica de campos

A fim de entender as consequências das simetrias conformes numa teoria de campos, pode-se iniciar pelo estudo dos efeitos em modelos de campos clássicos. Quando se diz que uma teoria lagrangeana possui simetria conforme, o que se quer dizer é que a ação de tal teoria é invariante sob transformações conformes. A invariância implica que a lagrangiana transforma, com, no máximo, o acréscimo de uma derivada total. Entende-se aqui que a invariância conforme no nível clássico não necessariamente implica a preservação da invariância no nível quântico. A seguir, serão tratadas as representações do grupo conforme para d dimensões e as consequências no conteúdo de matéria e energia das simetrias conformes, isto é, uma descrição do tensor momento-energia.

2.2.1 Representações do grupo conforme em d dimensões

Para construir as representações do grupo conforme, precisa-se entender, se e como, as transformações infinitesimais afetam os campos. Dado um campo $\phi(x)$, o grupo conforme atua da seguinte forma,

$$\phi'(x') = e^{-i\omega_g T_g} \phi(x). \quad (2.61)$$

Sob transformações infinitesimais, obtemos em primeira ordem nos parâmetros ω_g , a seguinte expressão,

$$\phi'(x') = (1 - i\omega_g T_g) \phi(x), \quad (2.62)$$

onde T_g são os geradores do grupo conforme. Vamos procurar primeiro a forma desses geradores estudando o subgrupo de Poincaré que deixa invariante o ponto $x = 0$, ou seja, o grupo de Lorentz. Definimos a ação das transformações infinitesimais do grupo de Lorentz no campo $\phi(0)$ pela representação matricial $S_{\mu\nu}$ da seguinte forma

$$L_{\mu\nu} \phi(0) = S_{\mu\nu} \phi(0) \quad (2.63)$$

em que $S_{\mu\nu}$ é o operador de spin associado ao campo ϕ . A equação acima é equivalente a,

$$L_{\mu\nu} e^{-ix^\lambda P_\lambda} \phi(x) = S_{\mu\nu} e^{-ix^\lambda P_\lambda} \phi(x), \quad (2.64)$$

onde usamos que,

$$\phi(x) = e^{ix^\lambda P_\lambda} \phi(0). \quad (2.65)$$

A fim de encontrar a ação do grupo de Lorentz para qualquer valor de x , realizamos uma translação pelo respectivo operador na equação (2.64) pela esquerda, resultando para o

lado esquerdo,

$$e^{ix^\lambda P_\lambda} L_{\mu\nu} e^{-ix^\lambda P_\lambda} \phi(x). \quad (2.66)$$

Para desenvolver, utilizamos um caso especial da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff da forma,

$$e^{-B} A e^B = A + [A, B] + \frac{1}{2!} [[A, B], B] + \frac{1}{3!} [[[A, B], B], B] + \dots \quad (2.67)$$

em que A e B são operadores. Substituindo a identidade anterior na equação (2.66), a mesma se reduz a seguinte equação,

$$\begin{aligned} e^{ix^\lambda P_\lambda} L_{\mu\nu} e^{-ix^\lambda P_\lambda} &= L_{\mu\nu} - ix^\lambda [L_{\mu\nu}, P_\lambda] \\ &= L_{\mu\nu} - x_\mu P_\nu + x_\nu P_\mu. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Utilizando a representação (2.53) e a equação (2.64), obtemos,

$$L_{\mu\nu} \phi(x) = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \phi(x) + S_{\mu\nu} \phi(x). \quad (2.69)$$

Agora, utilizaremos a mesma ideia para definir a ação de cada gerador do grupo conforme, isto é, inicialmente estudar as transformações que deixam o ponto $x = 0$ invariante e logo após realizar uma translação para um ponto x arbitrário. Assim, para os geradores das dilatações, a ação sobre o campo $\phi(x)$ é dada por,

$$D\phi(x) = (-ix^\nu \partial_\nu + \tilde{\Delta}) \phi(x), \quad (2.70)$$

e similarmente, para as transformações especiais conformes,

$$K_\mu \phi(x) = (\kappa_\mu + 2x_\mu \tilde{\Delta} - x^\nu S_{\mu\nu} - 2ix_\mu x^\nu \partial_\nu + ix^2 \partial_\mu) \phi(x), \quad (2.71)$$

onde $\tilde{\Delta}$ e κ_μ são os valores dos geradores D e K_μ , respectivamente, para $x = 0$, assim como $S_{\mu\nu}$ em relação a $L_{\mu\nu}$. De tal forma, encontramos uma estrutura algébrica reduzida para tais geradores em $x = 0$ a partir de (2.56),

$$\begin{aligned} [\tilde{\Delta}, S_{\mu\nu}] &= 0, \\ [\tilde{\Delta}, \kappa_\mu] &= -i\kappa_\mu, \\ [\kappa_\nu, \kappa_\mu] &= 0, \\ [\kappa_\rho, S_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu} \kappa_\nu - \eta_{\rho\nu} \kappa_\mu), \\ [S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho} S_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} S_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho} S_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} S_{\mu\rho}). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Se consideramos que o campo $\phi(x)$ pertence a uma representação irredutível do grupo de Lorentz, isto é, uma representação que não possui subespaços invariantes, e pelo lema de Schur, qualquer matriz que comute com tal representação (no caso, $S_{\mu\nu}$) deve ser um múltiplo da identidade. Sendo este o caso descrito acima, pela álgebra (2.72) identificamos a matriz proporcional à identidade pelo comutador nulo entre um gerador e $S_{\mu\nu}$, ou

seja, o gerador das transformações de escala (ou dilatações), denotado por $\tilde{\Delta}$. Logo, $\tilde{\Delta}$ é simplesmente um número, explicitamente igual a $-i\Delta$, em que Δ é a dimensão de escala do campo $\phi(x)$, como definido a seguir pela transformação de escala das coordenadas,

$$x' = e^\epsilon x^\mu \quad (2.73)$$

e do campo por,

$$\phi'(x') = e^{-\epsilon\Delta}\phi(x). \quad (2.74)$$

Ao considerar $\lambda = e^\epsilon$, obtemos,

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x \\ \phi'(\lambda x) &= \lambda^{-\Delta}\phi(x). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Da transformação das coordenadas pelo fator de escala λ , temos também que,

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \lambda \delta^\mu_\nu \quad (2.76)$$

de forma tal que o Jacobiano das transformações conformes é dado por,

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \lambda^d, \quad (2.77)$$

onde d é o número de dimensões do espaço-tempo. Assim, podemos retornar na relação de transformação de escala do campo ϕ e descrevê-la como,

$$\phi'(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta/d} \phi(x), \quad (2.78)$$

que é relacionado ao fator de escala ($\Lambda(x)$) entre as métricas definido em (2.1), como,

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \Lambda(x)^{-d/2}. \quad (2.79)$$

A forma como o campo se transforma dada em (2.78) define uma categoria de campos, denominados campos quasi-primários.

2.2.2 Correntes conservadas e o tensor momento-energia

Até este ponto, a preocupação foi em entender as simetrias do grupo conforme, a associação com operadores com significado físico, sua estrutura algébrica, bem como as consequências para as coordenadas do espaço-tempo e para um campo escalar. O Teorema de Noether foi utilizado para obter os geradores das simetrias, e agora, a atenção se volta para as consequências dessas simetrias. Pelo Teorema, para cada gerador do grupo conforme existe uma corrente conservada que segue uma equação de continuidade. Por síntese, para cada simetria existe uma lei de conservação associada. Para construir a

corrente associada às transformações conformes, primeiramente precisamos descrever o funcional da ação da teoria. Consideramos o funcional da ação dado por,

$$S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)). \quad (2.80)$$

Definimos a variação da ação como,

$$\delta S[\phi] = S[\phi'(x')] - S[\phi(x)], \quad (2.81)$$

onde $S[\phi'(x')]$ é a ação calculada no campo e nas coordenadas transformadas, a qual será referida simplesmente como S' . Para S' , temos,

$$S' = \int d^d x' \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')). \quad (2.82)$$

Como visto nos capítulos acima, $\phi'(x') = \mathcal{F}(\phi(x))$, a transformação de coordenadas de x' para x carrega um Jacobiano da forma $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|$, e $\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu$. Assim, a equação (2.82) torna-se,

$$\begin{aligned} S' &= \int d^d x \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \mathcal{L} \left(\mathcal{F}(\phi(x)), \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \mathcal{F}(\phi(x)) \right) \\ &= \int d^d x \left(1 + \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \right) \right) \mathcal{L} \left(\phi + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}, \left[\delta^\nu_\mu - \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} \right) \right] \left[\partial_\nu \phi + \partial_\nu \left(\omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a} \right) \right] \right). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Agora, expandimos a lagrangeana até primeira ordem em ω_a ,

$$\begin{aligned} S' &= \int d^d x \left\{ \mathcal{L} + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a} - \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} \partial_\nu \phi \right) + \mathcal{L} \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \right] \partial_\mu \omega_a \right\} \\ &\quad + \int d^d x \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \left[\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a} \right) - \partial_\nu \phi \partial_\mu \left(\frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} \right) \right] + \mathcal{L} \partial_\mu \left(\frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \right) \right\} \omega_a. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Assumindo que a ação seja invariante por transformações rígidas, somente o termo proporcional às derivadas de ω_a são não nulos, de forma que para a variação da ação, isto é,

$$\delta S = S' - S \quad (2.85)$$

obtemos,

$$\delta S = - \int dx j_a^\mu \partial_\mu \omega_a \quad (2.86)$$

em que

$$j_a^\mu = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right] \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}. \quad (2.87)$$

A quantidade acima é chamada de corrente. É associada às transformações infinitesimais das coordenadas dadas em (2.45) e do campo em (2.46). Após realizar uma integração por partes na equação (2.86), encontramos,

$$\delta S = \int d^d x (\partial_\mu j_a^\mu) \omega_a. \quad (2.88)$$

Se a ação for invariante sob essas transformações de simetria, então a variação se anula para qualquer parâmetro ω_a e portanto obtemos uma lei de conservação. Como podemos ver da equação logo acima, se a ação for invariante sob às transformações infinitesimais, então, a variação da ação (2.88) se anula para qualquer ω_a , obtendo, assim, a seguinte lei de conservação,

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0. \quad (2.89)$$

Em poucas palavras, esse é enunciado o teorema de Noether, que diz que toda simetria contínua implica na existência de uma corrente, na qual é classicamente conservada. A corrente que corresponde à invariância por translações é conhecida como tensor momento-energia, a possui a informação das densidades e fluxos de energia e momento. Ao considerar uma translação arbitrária $x'^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu$ no espaço-tempo, $\frac{\delta x^\nu}{\delta \epsilon^\mu} = \delta_\mu^\nu$ e $\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \epsilon^\mu} = 0$, logo, a corrente é o tensor momento-energia:

$$T_c^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.90)$$

O subíndice “c” no tensor momento-energia indica canônico. Como era esperado, o tensor momento-energia canônico é o comumente encontrado para as teorias de campo. Podemos encontrar os requisitos sobre o tensor momento-energia mais geral para que este seja invariante conforme, isto é, invariante por transformações infinitesimais que compõem o grupo conforme. De maneira geral, a variação da ação por um termo arbitrário de transformação das coordenadas do espaço-tempo, dado por ϵ^μ , é considerada, e temos,

$$\delta S = \int d^d x T_c^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu, \quad (2.91)$$

ou

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^d x T_c^{\mu\nu} (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu). \quad (2.92)$$

Ao utilizar as restrições sobre as variações encontradas em (2.5) e (2.6), obtemos

$$\delta S = \frac{1}{d} \int d^d x T_{c\mu}^\mu \partial_\rho \epsilon^\rho. \quad (2.93)$$

As restrições acima usadas são as condições para que haja invariância conforme. Logo, para que a variação da ação (2.93) seja nula, $T_{c\mu}^\mu$ precisa ser nulo, ou seja, o tensor momento-energia precisa ter traço igual a zero. Para o contrário, a condição é necessária, mas não suficiente, uma vez que $\partial_\rho \epsilon^\rho$ não é uma função arbitrária. É importante destacar que considerando um tensor momento-energia de Belinfante (construído a partir do tensor momento-energia canônico considerando a contribuição de spin), a condição de traço nulo se preserva.

2.3 Invariância conforme numa teoria quântica de campos

Uma vez compreendidas as consequências físicas da invariância conforme em uma teoria clássica de campos, o interesse se volta às consequências de tais invariâncias numa

teoria quântica de campos. Da mesma forma que a corrente e as consequências de sua invariância conforme se mostraram importantes e foram analisadas no regime clássico anteriormente, as funções de correlação e as identidades de Ward serão importantes para uma compreensão dos aspectos quânticos.

2.3.1 Funções de correlação

Em uma teoria quântica de campos, as funções de correlação desempenham um papel de protagonismo, pois são necessárias para o cálculo de amplitudes de espalhamento, propagadores e amplitudes de transição, por exemplo. Por abuso de linguagem e analogia, elas dizem respeito aos observáveis de uma teoria quântica de campos. Fisicamente, as funções de correlação podem ser interpretadas como “funções de Green quânticas”, isto é, funções que determinam a evolução de um sistema quântico. Se associada a uma partícula, pode-se compreender a função de correlação como uma integral ponderada pela ação clássica dos possíveis caminhos que a partícula poderia fazer entre pontos determinados, isto é, correlaciona dois pontos no espaço-tempo através das condições e restrições físicas às quais estão sujeitas. Explicitamente, temos,

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-S[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}}. \quad (2.94)$$

O lado esquerdo da equação acima é a função de correlação, isto é, um valor esperado para uma coleção de campos regidos pela ação $S[\phi]$, a qual consideramos invariante sob transformações,

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' \\ \phi(x) &\rightarrow \phi'(x'), \end{aligned} \quad (2.95)$$

onde as coordenadas e os campos transformados são funções das coordenadas e campos não transformados. Considera-se que há um ordenamento temporal nos campos, cujo formalismo operatorial será discutido posteriormente. As integrais do lado direito são integrais funcionais, isto é, são tomadas sobre os caminhos $\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)$, portanto $\mathcal{D}\phi$ (medida da integração funcional) é um produto que varre todos os $d\phi(x_n)$. A integral no denominador surge da normalização da função de correlação e é denominado como funcional de vácuo Z .

Assim como as simetrias contínuas estão associadas à existência de correntes conservadas numa teoria clássica, no nível quântico, tais simetrias estão associadas às restrições relacionando diferentes funções de correlação. Aqui é considerado que os diferenciais de integração funcional são invariantes às transformações em consideração, embora não o sejam para todos os casos. Buscamos a relação entre as funções de correlação sobre as transformações (2.95),

$$\langle \phi(x'_1) \dots \phi(x'_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi(x'_1) \dots \phi(x'_n) e^{-S[\phi]}. \quad (2.96)$$

Renomeando a variável de integração de ϕ para ϕ' , podemos reescrever como,

$$\langle \phi(x'_1) \dots \phi(x'_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi' \phi'(x'_1) \dots \phi'(x'_n) e^{-S[\phi']}. \quad (2.97)$$

Expressando $\phi'(x')$ em termos de $\phi(x)$ através da variação funcional descrita por \mathcal{F} e assumindo que tal mudança de variável não depende do campo, isto é, o Jacobiano não depende do campo, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \phi(x'_1) \dots \phi(x'_n) \rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{F}(\phi(x_1)) \dots \mathcal{F}(\phi(x_n)) e^{-S[\phi]}, \\ &= \langle \mathcal{F}(\phi(x_1)) \dots \mathcal{F}(\phi(x_n)) \rangle. \end{aligned} \quad (2.98)$$

A hipótese acima assumida é um problema no que diz respeito a invariância conforme em simetrias quânticas, pois a ação pode ser construída de maneira a ser invariante por escala, mas a medida não o é, pela necessidade de defini-la por processos de regularização. As funções de correlação para dois e três campos tem formas específicas, as quais são determinadas de maneira geral exatamente como consequências das invariâncias conformes. Inicialmente o trataremos a função de correlação de dois campos, ou também conhecida como função de dois pontos,

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) e^{-S[\phi]}, \quad (2.99)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são campos quasi-primários, não necessariamente distintos. Ao considerar (2.78) e (2.98) a função de dois pontos acima torna-se,

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_1}^{\Delta_1/d} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_2}^{\Delta_2/d} \langle \phi_1(x'_1) \phi_2(x'_2) \rangle. \quad (2.100)$$

Assumindo invariância rotacional e translacional, teremos que a função de dois pontos deve ser alguma função do módulo de uma distância entre dois pontos x_1 e x_2 , isto é,

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = f(|x_1 - x_2|). \quad (2.101)$$

Considerando transformações de escala $x \rightarrow \lambda x$, obtemos,

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} \langle \phi_1(\lambda x_1) \phi_2(\lambda x_2) \rangle, \quad (2.102)$$

o que implica que a função f deve satisfazer a seguinte relação,

$$f(x) = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} f(\lambda x). \quad (2.103)$$

Logo, ao compilar os resultados encontrados acima, temos,

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}, \quad (2.104)$$

onde C_{12} é uma constante. No caso da transformação conforme especial, usamos a relação,

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \frac{1}{(1 - 2b \cdot x + b^2 x^2)^d}, \quad (2.105)$$

e a equação (2.60) para encontrar o seguinte resultado,

$$\frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} = \frac{C_{12}}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2}} \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^{(\Delta_1 + \Delta_2)/2}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}, \quad (2.106)$$

onde os γ_i são dados por,

$$\gamma_i = 1 - 2b \cdot x_i + b^2 x_i^2. \quad (2.107)$$

A covariância conforme implica que, necessariamente, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$, para obter um resultado não nulo, ou seja, as dimensões de escala relacionadas aos campos ϕ_1 e ϕ_2 devem ser iguais para haver correlação entre os tais campos. Ao juntar os resultados obtidos, temos,

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta}} & \text{se } \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta \\ 0 & \text{se } \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases}. \quad (2.108)$$

O procedimento para encontrar a função de três pontos é similar. Pela covariância sob translações, rotações e dilatações, para uma função de três pontos genérica terá a forma,

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}^{(abc)}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c}, \quad (2.109)$$

onde $x_{ij} = |x_i - x_j|$, $C_{123}^{(abc)}$ é uma constante e,

$$a + b + c = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3. \quad (2.110)$$

Aplicando as transformações conformes especiais, temos,

$$\frac{C_{123}^{(abc)}}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2} \gamma_3^{\Delta_3}} \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^{a/2} (\gamma_2 \gamma_3)^{b/2} (\gamma_1 \gamma_3)^{c/2}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c}. \quad (2.111)$$

Sob a condição de covariância, as seguintes relações são obtidas,

$$\frac{a + c}{2} = \Delta_1, \quad \frac{a + b}{2} = \Delta_2, \quad \frac{b + c}{2} = \Delta_3. \quad (2.112)$$

Como solução do sistema linear acima, obtemos,

$$\begin{aligned} a &= \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3, \\ b &= \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1, \\ c &= \Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Logo a função de três pontos terá a seguinte forma,

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}^{(abc)}}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} x_{23}^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} x_{13}^{\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2}}. \quad (2.114)$$

A partir de quatro campos as covariâncias referentes às transformações conformes como um todo não fixam uma forma genérica (a menos de constantes) como para as funções de dois e três pontos encontradas acima.

2.3.2 Identidades de Ward

Como encontrado acima, as funções de correlação de dois e três pontos têm suas formas genéricas fixadas pelas consequências da covariância devido às transformações conformes. Foi visto também, anteriormente, que existem simetrias associadas às transformações e pelo teorema de Noether, uma corrente conservada relacionada a tais simetrias. Existe uma outra forma que expressa as consequências das simetrias da ação e da medida das funções de correlação, dada pelas chamadas identidades de Ward.

As identidades de Ward são quantidades que expressam a relação entre simetrias a nível clássico com simetrias a nível quântico. Para o caso a ser tratado, considera-se uma teoria de campos conformes clássica, a qual possui uma ação específica $S[\phi]$ e uma corrente conservada j^μ . Por outro lado, procura-se os geradores das simetrias conformes a nível quântico e espera-se que tais geradores estejam associados a uma teoria quântica de campos conformes. As identidades de Ward são, justamente, as pontes de um para o outro, isto é, de simetrias clássicas, pode-se extrair as simetrias quânticas ao encontrar as identidades de Ward. Considera-se uma coleção de campos $\phi(x_1)\dots\phi(x_n)$ como foi considerado nas funções de correlação anteriormente, denotados por Y , nos quais estão sob ordenamento temporal. O valor esperado de tal coleção de campos é a função de correlação de n campos definida anteriormente, isto é,

$$\langle Y \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi Y e^{-S[\phi]}. \quad (2.115)$$

Para uma variação dos campos, $Y' = Y + \delta Y$, e a sua correspondente corrente conservada j_a^μ , temos,

$$\langle Y' \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi(Y + \delta Y) e^{-(S[\phi] + \int d^d x (\partial_\mu j_a^\mu) \omega_a(x))}. \quad (2.116)$$

O termo de expansão δY depende dos parâmetros infinitesimais $\omega_a(x)$, dados pela transformação do campo em (2.62). Portanto, ao expandir em primeira ordem de $\omega_a(x)$ a equação acima, encontramos,

$$\begin{aligned} \langle Y' \rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi(Y + \delta Y) e^{-S[\phi]} \left(1 + \int d^d x (\partial_\mu j_a^\mu) \omega_a(x) \right) \\ &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi Y e^{-S[\phi]} + \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \delta Y e^{-S[\phi]} + \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi Y e^{-S[\phi]} \left(\int d^d x (\partial_\mu j_a^\mu) \omega_a(x) \right). \end{aligned} \quad (2.117)$$

Reescrevendo a equação acima,

$$\delta \langle Y \rangle = \langle Y' \rangle - \langle Y \rangle = \langle \delta Y \rangle - \int d^d x (\partial_\mu \langle j_a^\mu Y \rangle) \omega_a(x), \quad (2.118)$$

e assumindo a invariância das funções de correlação, isto é, $\delta \langle Y \rangle = 0$, obtemos,

$$\langle \delta Y \rangle = \int d^d x (\partial_\mu \langle j_a^\mu Y \rangle) \omega_a(x). \quad (2.119)$$

Para encontrar a expressão explícita, considera-se a equação (2.62) para os n campos, isto é,

$$Y' = \prod_{j=1}^n \left(\phi(x_j) - i\omega_a(x_j) G_a \phi(x_j) \right). \quad (2.120)$$

Em primeira ordem em ω_a , temos,

$$Y' = \phi(x_1)\dots\phi(x_n) - i\omega_a(x_1)G_a\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) - i\omega_a(x_2)\phi(x_1)G_a\phi(x_2)\dots\phi(x_n) - \dots - i\omega_a(x_n)\phi(x_1)\dots G_a\phi(x_n), \quad (2.121)$$

ou de forma compacta

$$Y' = \phi(x_1)\dots\phi(x_n) - i \sum_{j=1}^n \left(\phi(x_1)\dots(G_a\phi(x_j))\dots\phi(x_n) \right) \omega_a(x_j), \quad (2.122)$$

de onde identificamos o termo de perturbação até primeira ordem,

$$\delta Y = -i \sum_{j=1}^n \left(\phi(x_1)\dots G_a\phi(x_j)\dots\phi(x_n) \right) \omega_a(x_j). \quad (2.123)$$

A fim de encontrar a relação direta com o valor esperado, usamos uma delta de Dirac para reescrever a equação acima,

$$\delta Y = -i \int d^d x \omega_a(x) \sum_{j=1}^n \left(\phi(x_1)\dots G_a\phi(x_j)\dots\phi(x_n) \right) \delta(x - x_j). \quad (2.124)$$

Comparando com a equação (2.119), obtemos,

$$\partial_\mu \langle j_a^\mu Y \rangle = -i \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) \langle \phi(x_1)\dots G_a\phi(x_j)\dots\phi(x_n) \rangle, \quad (2.125)$$

ou explicitamente,

$$\partial_\mu \langle j_a^\mu(x) \phi(x_1)\dots\phi(x_n) \rangle = -i \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) \langle \phi(x_1)\dots G_a\phi(x_j)\dots\phi(x_n) \rangle. \quad (2.126)$$

A equação acima é denominada como identidades de Ward, e como dito no início, relaciona simetrias clássicas locais através da corrente conservada a simetrias quânticas pelos geradores G_a .

3 Invariância conforme em duas dimensões

Nesse capítulo são tratados de maneira mais detalhada os conceitos apresentados no capítulo anterior, particularizando para duas dimensões. Na primeira seção deste capítulo, discute-se sobre o grupo conforme em duas dimensões, discutindo acerca dos mapas, transformações globais e geradores conformes, seguindo com a definição de campos primários e a forma das funções de correlação. Na segunda seção, explora-se as identidades de Ward em duas dimensões. Na terceira seção, desenvolve-se a **OPE** (expansão em produtos de operadores), tratando os campos livres de bósons e férmions. Na quarta e última seção do capítulo, aborda-se a carga central e seu significado físico.

3.1 O grupo conforme em duas dimensões

A importância de considerar uma teoria de campos conformes em duas dimensões está baseada na existência de infinitas simetrias locais, o que permite soluções exatas da teoria. Matematicamente, existem infinitos mapas do plano complexo em si mesmo, ainda que as transformações nas coordenadas não sejam bem definidas em todo os pontos, são localmente conformes. Tais mapeamentos são chamados de mapeamentos holomorfos.

3.1.1 Mapeamentos conformes

Para começar o estudo das teorias de campos conformes em duas dimensões, precisamos entender as variáveis a serem utilizadas, as quais surgem de maneira intuitiva ao caracterizar as transformações conformes, ou seja, das imposições das transformações conformes podemos determinar a natureza das variáveis, bem como a forma de mapeamento. Inicialmente vamos considerar as coordenadas (z^0, z^1) no plano. Dada uma transformação de coordenadas da forma $z^\mu \rightarrow w^\mu$, a métrica transforma pela seguinte relação,

$$g'^{\mu\nu}(w) = \left(\frac{\partial w^\mu}{\partial z^\alpha} \right) \left(\frac{\partial w^\nu}{\partial z^\beta} \right) g^{\alpha\beta}(z). \quad (3.1)$$

A restrição para as transformações serem conformes é de que haja proporcionalidade entre a métrica transformada e a não transformada, isto é, $g'^{\mu\nu}(w) \propto g_{\mu\nu}(z)$. Podemos identificar o lado direito da equação acima com o lado direito da condição dada em (2.1), de forma que, em componentes, a equação (3.1) torna-se,

$$g^{\mu\nu}\Lambda = g^{00} \frac{\partial w^\mu}{\partial z^0} \frac{\partial w^\nu}{\partial z^0} + g^{11} \frac{\partial w^\mu}{\partial z^1} \frac{\partial w^\nu}{\partial z^1} + g^{01} \frac{\partial w^\mu}{\partial z^0} \frac{\partial w^\nu}{\partial z^1} + g^{10} \frac{\partial w^\mu}{\partial z^1} \frac{\partial w^\nu}{\partial z^0}. \quad (3.2)$$

Ao considerar a métrica euclidiana, a diagonal gera a seguinte equação,

$$\left(\frac{\partial w^0}{\partial z^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w^0}{\partial z^1}\right)^2 = \left(\frac{\partial w^1}{\partial z^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w^1}{\partial z^1}\right)^2, \quad (3.3)$$

e fora da diagonal, temos,

$$\frac{\partial w^0}{\partial z^0} \frac{\partial w^1}{\partial z^0} + \frac{\partial w^0}{\partial z^1} \frac{\partial w^1}{\partial z^1} = 0. \quad (3.4)$$

Da equação acima, obtemos as seguintes condições,

$$\frac{\partial w^1}{\partial z^0} = \pm \frac{\partial w^0}{\partial z^1}, \quad e \quad \frac{\partial w^0}{\partial z^0} = \mp \frac{\partial w^1}{\partial z^1}, \quad (3.5)$$

As quais correspondem às equações de Cauchy-Riemann para funções antiholomórficas (primeiro caso) e holomórficas (segundo caso). Sem perda de generalidade, consideremos a segunda possibilidade na equação (3.5). Nesse caso, podemos usar variáveis complexas e suas derivadas, definidas da seguinte forma,

$$z = z^0 + iz^1, \quad e \quad \bar{z} = z^0 - iz^1, \quad (3.6)$$

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1), \quad e \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1). \quad (3.7)$$

As relações inversas são,

$$z^0 = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad e \quad z^1 = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad (3.8)$$

$$\partial_0 = \partial_z + \partial_{\bar{z}} \quad e \quad \partial_1 = i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}). \quad (3.9)$$

Para as novas variáveis, o tensor métrico é da forma,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

onde μ e ν toma valores de z e \bar{z} , nessa ordem. Tal métrica permite que um índice covariante holomórfico seja transformado em um índice contravariante antiholomórfico e vice-versa. Um tensor antissimétrico $\epsilon_{\mu\nu}$ é definido como,

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

De posse de tais definições, as equações de Cauchy-Riemann (3.5) tornam-se simplesmente,

$$\partial_{\bar{z}} w(z, \bar{z}) = 0. \quad (3.12)$$

Da equação acima, podemos notar que qualquer mapeamento independente da variável antiholomórfica \bar{z} , isto é, $z \rightarrow w(z)$ é uma solução. Esta solução é chamada de mapeamento holomorfo.

3.1.2 Transformações globais conformes

O mapeamento encontrado na seção anterior através da equação (3.5) diz respeito a condições conformes locais, uma vez que não há restrições quanto às definições em todos os pontos. Para se ter uma característica global conforme, deve existir a inversibilidade e um mapeamento do plano em si mesmo. Pode-se visualizar tal mapeamento considerando esferas de Riemann, que são planos complexos acrescidos de um ponto no infinito. Pode-se visualizar o mapeamento da seguinte forma:

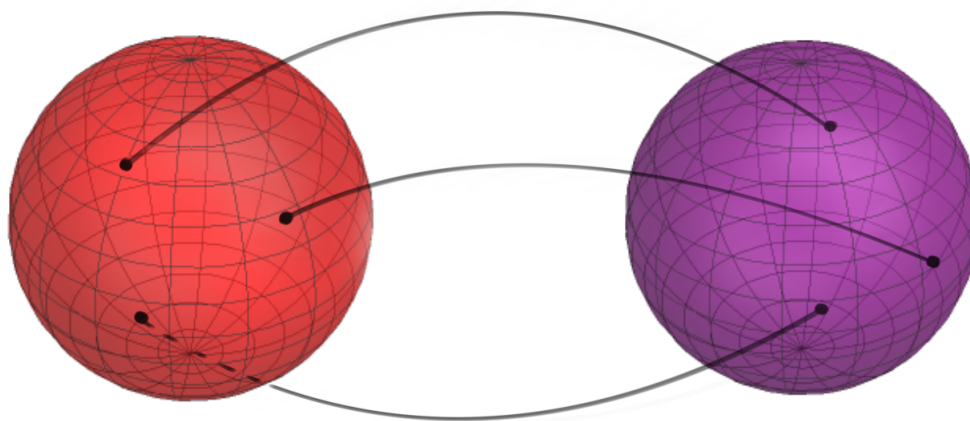


Figura 2 – Representação do mapeamento através de esferas de Riemann

Portanto as transformações conformes são consideradas globais se existir o mapeamento acima e este for bijetivo. Tal mapeamento $f(z)$ pode ser determinado de forma explícita através das restrições acima. Se $f(z)$ tem descontinuidade em uma certa vizinhança de um ponto ou singularidades essenciais, isto é, singularidades que não podem ser removidas, as restrições de mapeamento são violadas. Quando há descontinuidades, existe uma ambiguidade no mapeamento, enquanto que para a vizinhança de uma singularidade essencial, a função $f(z)$ varre todo plano complexo, portanto não é inversível. Para ilustrar, se $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, para $z = 0$, tem-se uma singularidade essencial.

De tal forma, as singularidades aceitáveis se reduzem aos polos. Dessa forma, podemos considerar uma certa classe de funções da forma:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (3.13)$$

onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios com raízes distintas. Se $P(z)$ tem diversas raízes, então a imagem inversa do zero não está definida unicamente, e portanto, $f(z)$ não será inversível. Por outro lado, se o polinômio $P(z)$ possuir uma única raiz z_0 com multiplicidade maior que 1, a imagem de uma vizinhança de z_0 é indexada n vezes em torno do zero e assim, a função $f(z)$ também não é inversível. Logo, $P(z)$ só pode ser linear em z , da seguinte forma,

$$P(z) = \alpha z + \beta, \quad (3.14)$$

onde α e β são números complexos. Os mesmos argumentos usados acima podem ser considerados para a função $Q(z)$ analisando o comportamento de $f(z)$ perto do ponto no infinito. Assim, esse polinômio é escrito como,

$$Q(z) = \gamma z + \delta, \quad (3.15)$$

onde os coeficientes são também números complexos. Compilados os resultados, obtemos,

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}. \quad (3.16)$$

A forma da função $f(z)$ encontrada acima está relacionada a um tipo especial de transformações, denominadas de transformações de Möbius. Podemos associar uma matriz aos coeficientes da seguinte maneira,

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Em tal forma, podemos visualizar mais claramente que para satisfazer a última restrição, isto é, a inversibilidade, o determinante desta matriz C deve ser não nulo,

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \quad (3.18)$$

Dado que um fator global multiplicando os coeficientes não modifica f , pode-se adotar como normalização que o determinante acima seja 1.

A composição de dois mapas distintos pelos coeficientes, mas que respeitem as restrições de $f(z)$, corresponde a multiplicação matricial entre as respectivas matrizes dos coeficientes. Então, o chamado grupo conforme global em duas dimensões é isomorfo ao grupo de matrizes complexas inversíveis 2×2 com determinante unitário, denominado por $SL(2, \mathbb{C})$. Sabemos também que $SL(2, \mathbb{C})$ é o grupo de espin do grupo de Lorentz em quatro dimensões, ao qual é denominado por $SO(3, 1)$.

3.1.3 Geradores conformes

A partir das propriedades globais foram deduzidas as formas específicas de mapeamento, no entanto, conhecer as transformações infinitesimais locais geralmente são de grande utilidade na física por fornecer informações que não necessariamente estão contidas nos aspectos globais. Nesta seção, vamos procurar os geradores conformes das transformações infinitesimais locais. Consideremos uma transformação infinitesimal da coordenada holomorfa z , dada por,

$$z' = z + \epsilon(z), \quad (3.19)$$

onde $\epsilon(z)$ é um acréscimo infinitesimal que conecta a coordenada transformada z' a coordenada não transformada z . Por hipótese, assume-se que o mapeamento pode ser feito

considerando o termo infinitesimal $\epsilon(z)$ expandido em séries de Laurent em torno de $z = 0$ da seguinte forma,

$$\epsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^{n+1}. \quad (3.20)$$

onde C_n são os coeficientes da expansão. Tais considerações acima possuem um análogo antiholomórfico. Na sequência, consideramos os efeitos da transformação num campo $\phi(z, \bar{z})$ adimensional, sem spin, definido no plano z, \bar{z} . A transformação a ser considerada não afeta o campo de maneira funcional, isto é,

$$\phi'(z', \bar{z}') = \phi(z, \bar{z}). \quad (3.21)$$

No entanto, sob uma transformação infinitesimal nas coordenadas, temos,

$$\phi'(z', \bar{z}') = \phi(z' - \epsilon(z'), \bar{z}' - \bar{\epsilon}(\bar{z}')). \quad (3.22)$$

Expandindo em primeira ordem em $\epsilon(z')$ e $\bar{\epsilon}(\bar{z}')$, obtemos,

$$\phi'(z', \bar{z}') = \phi(z', \bar{z}') - \epsilon(z') \partial' \phi(z', \bar{z}') - \bar{\epsilon}(\bar{z}') \bar{\partial}' \phi(z', \bar{z}'), \quad (3.23)$$

onde definimos $\partial = \partial_z$ e $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$. Podemos definir a partir da equação acima, a seguinte variação,

$$\delta\phi = \phi'(z', \bar{z}') - \phi(z', \bar{z}'), \quad (3.24)$$

como

$$\delta\phi = -\epsilon(z') \partial' \phi(z', \bar{z}') - \bar{\epsilon}(\bar{z}') \bar{\partial}' \phi(z', \bar{z}'). \quad (3.25)$$

Ao substituir a expansão em séries de Laurent (3.20), encontramos,

$$\delta\phi = \sum_n \left\{ -C_n z^{n+1} \partial\phi - \bar{C}_n \bar{z}^{n+1} \bar{\partial}\phi \right\} \quad (3.26)$$

o qual pode ser reescrito com os geradores,

$$\delta\phi = \sum_n \left\{ C_n l_n \phi + \bar{C}_n \bar{l}_n \phi \right\}, \quad (3.27)$$

onde os operadores l_n e \bar{l}_n estão definidos por,

$$\begin{aligned} l_n &= -z^{n+1} \partial \\ \bar{l}_n &= -\bar{z}^{n+1} \bar{\partial}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

os quais satisfazem as seguintes relações de comutação,

$$\begin{aligned} [l_n, l_m] &= z^{n+1} \partial(z^{m+1} \partial) - z^{m+1} \partial(z^{n+1} \partial) \\ &= z^{n+1} \left\{ (m+1) z^m \partial + z^{m+1} \partial^2 \right\} - z^{m+1} \left\{ (n+1) z^n \partial + z^{n+1} \partial^2 \right\} \\ &= (m-n) z^{m+n+1} \partial \\ &= (n-m) l_{m+n}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

De forma similar, podemos obter,

$$\begin{aligned} [\bar{l}_n, \bar{l}_m] &= (n - m)\bar{l}_{n+m} \\ [l_n, \bar{l}_m] &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

O conjunto das três relações de comutação encontradas formam a álgebra conforme, também chamada de álgebra de Witt [41]. Podemos notar também que tal álgebra é a soma de duas álgebras isomórficas de dimensão infinita, as quais possuem uma subálgebra finita gerada pelos operadores l_{-1} , l_0 e l_1 , dados por,

$$\begin{aligned} l_{-1} &= -\partial, \\ l_0 &= -z\partial, \\ l_1 &= -z^2\partial, \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde l_{-1} gera as translações, l_0 as transformações de escala e rotações e l_1 as transformações especiais conformes. Tal subálgebra finita é identificada como a representação do grupo conforme global.

3.1.4 Campos primários

Compreendidos os aspectos globais, locais e a relação entre ambos através dos geradores, seguimos com a definição, ou classificação dos campos tratados. Definimos campos por quantidades satisfazendo determinadas leis de transformação sob variações das coordenadas, por exemplo, o campo $\phi(z, \bar{z})$, a derivada do campo ϕ , o tensor momento-energia. Entendemos por campo primário uma quantidade que se transforma como as componentes de um tensor. Sob um mapeamento conforme $z \rightarrow w(z)$ e $\bar{z} \rightarrow \bar{w}(\bar{z})$, ϕ transforma da seguinte maneira,

$$\phi'(w, \bar{w}) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-h} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z}), \quad (3.32)$$

onde h e \bar{h} são as dimensões conformes holomórficas e antiholomórficas, respectivamente. Explicitamente, as dimensões conformes são dadas por,

$$h = \frac{1}{2}(\Delta + s), \quad \bar{h} = \frac{1}{2}(\Delta - s), \quad (3.33)$$

onde Δ é denominada dimensão de escala e s é o espin planar. A transformação do campo ϕ dada em (3.32) é uma generalização da transformação encontrada em (2.78), no qual é referenciada como a definição de um campo quasi-primário. Então, pode-se afirmar que um campo quasi-primário de dimensões conformes (h, \bar{h}) transforma como componentes de um tensor de rank $h + \bar{h}$, com um número h de z índices e um número \bar{h} de \bar{z} índices. Ao considerar o mapeamento,

$$w = z + \epsilon(z), \quad \bar{w} = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}), \quad (3.34)$$

onde $\epsilon(z)$ e $\bar{\epsilon}(\bar{z})$ são fatores infinitesimais, obtemos a variação de ϕ até primeira ordem,

$$\begin{aligned}\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}}\phi &\equiv \phi'(z, \bar{z}) - \phi(z, \bar{z}) \\ &= -(h\phi\partial\epsilon + \epsilon\partial\phi) - (\bar{h}\phi\bar{\partial}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\bar{\partial}\phi).\end{aligned}\quad (3.35)$$

Um campo é chamado de quasi-primário se satisfaz as relações de transformações locais (3.32) globalmente. Portanto, todo campo primário é também quasi-primário. No entanto, o contrário não é verdade.

3.1.5 Funções de correlação

As relações encontradas na subseção (2.3.1) referente ao cálculo das funções de correlação e as consequências das invariâncias conformes são descritas em termos das coordenadas holomórficas e antiholomórficas. A generalização da equação (2.98) para n campos primários ϕ_i com dimensões conformes h_i e \bar{h}_i é dada por,

$$\langle \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \dots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \rangle = \prod_{i=1}^n \left(\frac{dw}{dz} \right)_{w=w_i}^{-h_i} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \right)_{\bar{w}=\bar{w}_i}^{-\bar{h}_i} \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle. \quad (3.36)$$

As formas das funções de dois e três pontos desenvolvidas em (2.108) e (2.114) são válidas para duas dimensões com o adendo de ser possível que o espin seja não nulo, o qual se expressa pelas dimensões conformes h_i e \bar{h}_i . As distâncias $x_{ij} = |x_i - x_j|$ em termos das variáveis complexas tornam-se $x_{ij} = (z_{ij}\bar{z}_{ij})^{1/2}$. Logo, para a função de dois pontos, temos,

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{C_{12}}{(z_1 - z_2)^{2h} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\bar{h}}}, \quad (3.37)$$

para $h_1 = h_2 = h$ e $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = \bar{h}$. Se as dimensões conformes dos dois campos são diferentes, não há correlação entre os campos. Uma condição sobre as dimensões conformes é que numa função de correlação a soma dos espins deve ser nula. De forma similar, a função de três pontos dada por (2.114) é, em coordenadas complexas por,

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \phi_3(z_3, \bar{z}_3) \rangle = C_{123} \frac{\left[\frac{z_{12}^{\bar{h}_1 + \bar{h}_2 - \bar{h}_3} z_{23}^{\bar{h}_2 + \bar{h}_3 - \bar{h}_1} z_{13}^{\bar{h}_3 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2}}{z_{12}^{h_1 + h_2 - h_3} z_{23}^{h_2 + h_3 - h_1} z_{13}^{h_3 + h_1 - h_2}} \right]^{-1}}{z_{12}^{h_1 + h_2 - h_3} z_{23}^{h_2 + h_3 - h_1} z_{13}^{h_3 + h_1 - h_2}}. \quad (3.38)$$

Como encontrado anteriormente, as invariâncias conformes globais não fixam a forma das funções de correlação de quatro campos em diante.

3.2 Identidades de Ward

As identidades de Ward foram calculadas no capítulo anterior de forma genérica, as quais manifestam as relações entre simetrias locais clássicas e quânticas. Procuraremos, agora, a forma explícita de tais identidades para as transformações do grupo conforme, no intuito de se expressar as relações das simetrias com possíveis imposições restritivas

nas funções de correlação. Ainda mais específico, faremos o caso para duas dimensões, explicitando em coordenadas e componentes complexas.

Precisaremos, então, encontrar a forma explícita de cada corrente conservada classicamente associada a cada transformação conforme, bem como os geradores de tais transformações. A corrente conservada genérica é dada em (2.87) e os geradores foram calculados na seção (2.2.1). Para as translações, o gerador P_μ toma a forma,

$$P_\mu = -i\partial_\mu. \quad (3.39)$$

e como as translações não alteram o campo de forma funcional, a corrente relacionada a translações é dada pelo tensor momento-energia,

$$T^\mu{}_\nu = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \eta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \right]. \quad (3.40)$$

Substituindo na identidade de Ward geral (2.126), encontramos,

$$\partial_\mu \langle T^\mu{}_\nu \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = -i \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) \langle \phi(x_1) \dots - i\partial_\nu \phi(x_j) \dots \phi(x_n) \rangle. \quad (3.41)$$

Podemos extrair o gerador do lado direito da equação da função de correlação ao utilizar a delta de Dirac, isto é,

$$\partial_\mu \langle T^\mu{}_\nu \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = - \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) \frac{\partial}{\partial x_j^\nu} \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle. \quad (3.42)$$

Para as dilatações, o gerador é dado por,

$$D = -ix^\mu \partial_\mu - i\Delta \quad (3.43)$$

e a corrente,

$$j^\mu = T^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (3.44)$$

Da mesma maneira, utilizando a expressão genérica para as identidades encontramos,

$$\partial_\mu \langle T^\mu{}_\nu x^\nu \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = - \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) \left\{ x_j^\nu \frac{\partial}{\partial x_j^\nu} + \Delta_j \right\} \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle. \quad (3.45)$$

Podemos simplificar a expressão acima ao abrir explicitamente a derivada do lado esquerdo da equação, isto é,

$$\delta_\mu^\nu \langle T^\mu{}_\nu Y \rangle + x^\nu \partial_\mu \langle T^\mu{}_\nu Y \rangle = - \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) \left\{ x_j^\nu \frac{\partial}{\partial x_j^\nu} + \Delta_j \right\} \langle Y \rangle, \quad (3.46)$$

onde Y é a coleção de campos $\phi(x_1) \dots \phi(x_n)$. Notamos que o segundo o termo do lado esquerdo da equação é a identidade de Ward referente às translações contraído com x^ν , o que cancela o termo da direita. Logo, a equação acima reduz-se a,

$$\langle T^\mu{}_\mu \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = - \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) \Delta_j \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle. \quad (3.47)$$

Para as rotações, o gerador $L_{\mu\nu}$ vem dado por,

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) - S_{\mu\nu}, \quad (3.48)$$

e a corrente associada tem a seguinte expressão,

$$j^{\mu\nu\rho} = T_B^{\mu\nu} x^\rho - T_B^{\mu\rho} x^\nu, \quad (3.49)$$

onde $T_B^{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia de Belinfante, dado por,

$$T_B^{\mu\nu} = T_c^{\mu\nu} + \partial_\rho B^{\rho\mu\nu}, \quad (3.50)$$

onde,

$$B^{\rho\mu\nu} = \frac{i}{4} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\phi)} S^{\nu\mu}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} S^{\rho\nu}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)} S^{\rho\mu}\phi \right). \quad (3.51)$$

Pelo mesmo procedimento realizado acima, para as outras simetrias, o resultado encontrado é,

$$\langle (T_B^{\rho\nu} - T_B^{\nu\rho})Y \rangle = -i \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) S_j^{\nu\rho} \langle Y \rangle. \quad (3.52)$$

Em duas dimensões, podemos escrever o operador de espin $S_j^{\nu\rho}$ como $\epsilon^{\nu\rho} s_j$, onde $\epsilon^{\nu\rho}$ é um tensor antissimétrico definido em (3.11) e s_j é o espin planar. Logo, reescrevendo a equação acima, encontramos a seguinte expressão,

$$\epsilon_{\nu\rho} \langle T_B^{\nu\rho} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = -i \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) s_j \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle. \quad (3.53)$$

As equações (3.42), (3.47) e (3.53) são as identidades de Ward relacionadas às simetrias conformes. O interesse recai em escrever estas identidades em termos das coordenadas e componentes complexas introduzidas no começo do presente capítulo. Fazendo uso do tensor métrico para duas dimensões definido em (3.10), do tensor antissimétrico definido em (3.11), e também da seguinte representação para a delta de Dirac,

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \partial_{\bar{z}} \frac{1}{z} = \frac{1}{\pi} \partial_z \frac{1}{\bar{z}}, \quad (3.54)$$

a equação (3.42) pode ser dividida em duas relações,

$$\partial_z \langle g^{z\bar{z}} T_{\bar{z}\bar{z}} Y \rangle + \partial_{\bar{z}} \langle g^{\bar{z}z} T_{zz} Y \rangle = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\pi} \partial_{\bar{z}} \frac{1}{z - w_j} \partial_{w_j} \langle Y \rangle \quad (3.55)$$

e

$$\partial_z \langle g^{z\bar{z}} T_{\bar{z}\bar{z}} Y \rangle + \partial_{\bar{z}} \langle g^{\bar{z}z} T_{z\bar{z}} Y \rangle = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\pi} \partial_z \frac{1}{\bar{z} - \bar{w}_j} \partial_{\bar{w}_j} \langle Y \rangle. \quad (3.56)$$

onde lembramos que o tensor métrico possui componentes não nulas fora da diagonal, ou seja, para as componentes $z\bar{z}$ e $\bar{z}z$. Usando de maneira explícita o tensor métrico $g^{\mu\nu}$, encontramos para as equações acima, respectivamente,

$$2\pi \partial_z \langle T_{\bar{z}\bar{z}} Y \rangle + 2\pi \partial_{\bar{z}} \langle T_{zz} Y \rangle = - \sum_{j=1}^n \partial_z \frac{1}{z - w_j} \partial_{w_j} \langle Y \rangle \quad (3.57)$$

$$2\pi\partial_z \langle T_{\bar{z}\bar{z}}Y \rangle + 2\pi\partial_{\bar{z}} \langle T_{zz}Y \rangle = -\sum_{j=1}^n \partial_z \frac{1}{\bar{z} - \bar{w}_j} \partial_{\bar{w}_j} \langle Y \rangle. \quad (3.58)$$

Considerando agora as dilatações, obtemos,

$$\langle g^{z\bar{z}}T_{\bar{z}\bar{z}}Y \rangle + \langle g^{\bar{z}z}T_{zz}Y \rangle = -\sum_{j=1}^n \delta(x - x_j)\Delta_j \langle Y \rangle, \quad (3.59)$$

e usando novamente o tensor métrico, obtemos,

$$2\langle T_{\bar{z}\bar{z}}Y \rangle + 2\langle T_{zz}Y \rangle = -\sum_{j=1}^n \delta(x - x_j)\Delta_j \langle Y \rangle. \quad (3.60)$$

É conveniente que o lado direito da equação acima as variáveis x não sejam substituídas pelas variáveis complexas ainda. Ao considerar as rotações, temos,

$$\epsilon^{z\bar{z}} \langle T_{\bar{z}\bar{z}}Y \rangle + \epsilon^{\bar{z}z} \langle T_{zz}Y \rangle = -i \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j)s_j \langle Y \rangle. \quad (3.61)$$

Aqui também não é conveniente substituir as variáveis ainda do lado direito da equação. Explicitamente, substituindo as componentes do tensor antissimétrico $\epsilon^{\mu\nu}$, encontramos,

$$-2\langle T_{z\bar{z}}Y \rangle + 2\langle T_{\bar{z}z}Y \rangle = -i \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j)s_j \langle Y \rangle. \quad (3.62)$$

Neste ponto, identificamos semelhanças entre o lado esquerdo das identidades relacionadas às dilatações e às rotações. Somando as equações (3.60) e (3.62), obtemos,

$$4\langle T_{zz}Y \rangle = -\sum_{j=1}^n \delta(x - x_j)(\Delta_j + s_j) \langle Y \rangle, \quad (3.63)$$

onde podemos notar que no lado direito da equação temos, a menos de um fator, a definição de dimensão conforme holomórfica,

$$h = \frac{1}{2}(\Delta + s), \quad (3.64)$$

de forma que podemos escrever (agora já utilizando das variáveis complexas no lado direito),

$$2\pi \langle T_{zz}Y \rangle = -\sum_{j=1}^n \partial_z \frac{1}{z - w_j} h_j \langle Y \rangle. \quad (3.65)$$

De forma semelhante, subtraindo as equações e usando a definição de dimensão conforme antiholomórfica,

$$\bar{h} = \frac{1}{2}(\Delta - s), \quad (3.66)$$

encontramos a seguinte equação,

$$2\pi \langle T_{\bar{z}\bar{z}}Y \rangle = -\sum_{j=1}^n \partial_{\bar{z}} \frac{1}{\bar{z} - \bar{w}_j} \bar{h}_j \langle Y \rangle. \quad (3.67)$$

Destes resultados, podemos reconhecer o lado esquerdo de cada equação com os termos das equações (3.57) e (3.58) referentes às translações. Primeiramente, substituímos (3.65) em (3.57), de forma que encontramos,

$$\partial_z \left(- \sum_{j=1}^n \partial_{\bar{z}} \frac{1}{z - w_j} h_j \langle Y \rangle \right) + 2\pi \partial_{\bar{z}} \langle T_{zz} Y \rangle = - \sum_{j=1}^n \partial_{\bar{z}} \frac{1}{z - w_j} \partial_{w_j} \langle Y \rangle, \quad (3.68)$$

onde as derivadas no primeiro termo não interferem entre si, isto é, podem ser trocadas. Ao realizar tal troca, a equação acima pode ser reescrita como,

$$\partial_{\bar{z}} \left\{ \langle T(z, \bar{z}) Y \rangle - \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{z - w_j} \partial_{w_j} + \frac{1}{(z - w_j)^2} h_j \right] \langle Y \rangle \right\} = 0, \quad (3.69)$$

onde foi introduzido um tensor momento-energia normalizado $T = -2\pi T_{zz}$. De forma análoga, substituindo a equação (3.67) em (3.58) e usando o tensor momento-energia normalizado $\bar{T} = -2\pi \bar{T}_{\bar{z}\bar{z}}$, encontramos,

$$\partial_z \left\{ \langle \bar{T}(z, \bar{z}) Y \rangle - \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\bar{z} - \bar{w}_j} \partial_{\bar{w}_j} + \frac{1}{(\bar{z} - \bar{w}_j)^2} \bar{h}_j \right] \langle Y \rangle \right\} = 0. \quad (3.70)$$

Como solução da equação (3.69) temos,

$$\langle T(z) Y \rangle = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{z - w_j} \partial_{w_j} + \frac{1}{(z - w_j)^2} h_j \right] \langle Y \rangle + \text{termos regulares}, \quad (3.71)$$

onde *termos regulares* significa termos que não divergem quando z tende a w_j . É possível escrever todas as três identidades de Ward em uma única relação. Para esse fim consideremos uma variação arbitrária infinitesimal $\varepsilon^\nu(x)$ nas coordenadas, isto é,

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu, \quad (3.72)$$

e uma transformação correspondente no campo dada por,

$$\phi'(x') = \phi(x) + \varepsilon^\nu G_\nu^a \phi(x), \quad (3.73)$$

onde G_ν^a são os geradores. Ao realizarmos o mesmos procedimentos do capítulo anterior, no qual foi encontrado uma forma geral para as identidades de Ward, isto é, sendo uma coleção de campos Y , o termo de primeira ordem em ε^ν é,

$$\delta_\varepsilon Y = \int dx \varepsilon_\nu(x) \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) [\phi(x_1) \dots G_\nu^a \phi(x_j) \dots \phi(x_n)], \quad (3.74)$$

e pelo mesmo tratamento anteriormente feito, encontramos,

$$\delta_\varepsilon \langle Y \rangle = \int dx \partial_\mu \langle j_\mu^a \varepsilon_\nu Y \rangle, \quad (3.75)$$

no qual identificamos, para as simetrias conformes, que a corrente pode ser escrita como o tensor momento-energia, ou seja, a equação acima torna-se,

$$\delta_\varepsilon \langle Y \rangle = \int dx \partial_\mu \langle T^{\mu\nu} \varepsilon_\nu Y \rangle. \quad (3.76)$$

De forma explícita, para duas dimensões, em uma região \mathcal{M} contendo os pontos da coleção de campos Y , temos

$$\delta_\varepsilon \langle Y \rangle = \int_{\mathcal{M}} d^2x \partial_\mu \langle T^{\mu\nu} \varepsilon_\nu Y \rangle. \quad (3.77)$$

Pode-se visualizar como a expressão acima, engloba as identidades de Ward simplesmente tratando $\partial_\mu(\varepsilon_\nu T^{\mu\nu})$, isto é, podemos escrever,

$$\partial_\mu(\varepsilon_\nu T^{\mu\nu}) = \varepsilon_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu) T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu) T^{\mu\nu}, \quad (3.78)$$

de forma que podemos usar as seguintes relações,

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu) = \frac{1}{2}(\partial_\rho \varepsilon^\rho) \eta_{\mu\nu}, \quad (3.79)$$

no qual vem da imposição do tensor métrico ser conforme, tratado no começo do capítulo anterior. E também, usando a seguinte identidade,

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu) = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varepsilon_\beta \epsilon_{\mu\nu}, \quad (3.80)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é um tensor antissimétrico, na equação (3.78), temos,

$$\partial_\mu(\varepsilon_\nu T^{\mu\nu}) = \varepsilon_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\rho \varepsilon^\rho) \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varepsilon_\beta \epsilon_{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \quad (3.81)$$

Na expressão acima identificamos o primeiro termo como sendo referente às translações, o segundo com as dilatações, e o último termo como sendo uma rotação local. Notemos que a equação acima é o termo que aparece no lado direito da equação (3.77). Agora, podemos trabalhar em cima desta equação no intuito de ter uma expressão em termos das variáveis holomórficas e antiholomórficas. Sendo,

$$F^\mu = \langle T^{\mu\nu} \epsilon_\nu Y \rangle, \quad (3.82)$$

e usando o teorema de Gauss, temos,

$$\int_{\mathcal{M}} d^2x \partial_\mu F^\mu = \int_{\partial\mathcal{M}} d\xi_\mu F^\mu, \quad (3.83)$$

em que parametrizamos o diferencial $d\xi_\mu$ (ortogonal à fronteira $\partial\mathcal{M}$) por $d\xi_\mu = \epsilon_{\mu\rho} ds^\rho$, em que ds^ρ é paralelo à fronteira e $\epsilon_{\mu\rho}$ o tensor antissimétrico já utilizado. Explicitamente, a equação (3.83) resulta em,

$$\int_{\mathcal{M}} d^2x \partial_\mu F^\mu = \frac{1}{2}i \int_{\partial\mathcal{M}} (d\bar{z} F^z - dz F^{\bar{z}}), \quad (3.84)$$

em que foi usado que $ds^z = dz$ e o equivalente para a parte antiholomórfica. Retornando com F^μ e usando a normalização T e \bar{T} , encontramos,

$$\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} \langle Y \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\bar{z} \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \langle \bar{T}(\bar{z}) Y \rangle - \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \varepsilon(z) \langle T(z) Y \rangle, \quad (3.85)$$

onde foi usado que $\varepsilon^z = \varepsilon$ e a correspondente para a parte antiholomórfica. É válido comentar que os termos cruzados em $T^{\mu\nu}$ não contribuem para a integral no contorno C , devido a que as mesmas são funções analíticas em C e na região limitada por esta. Para encontrar uma expressão mais visível para a equação acima, usamos o resultado encontrado em (3.71) e a correspondente parte antiholomórfica. Dessa forma temos,

$$\begin{aligned} \delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} \langle Y \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\bar{z} \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\bar{z} - \bar{w}_j} \partial_{\bar{w}_j} + \frac{1}{(\bar{z} - \bar{w}_j)^2} \bar{h}_j \right] \langle Y \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \varepsilon(z) \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{z - w_j} \partial_{w_j} + \frac{1}{(z - w_j)^2} h_j \right] \langle Y \rangle, \end{aligned} \quad (3.86)$$

onde não escrevemos os termos regulares, pois estes não contribuem às integrais. Na expressão acima temos termos do tipo $\frac{1}{(z-w_j)^n}$, o qual podemos calcular usando o teorema dos resíduos. Pelo mesmo teorema, os polos possuem uma ordem, que posteriormente é usada para calcular o resíduo associado. Sendo um termo do tipo,

$$\frac{\varepsilon(z)}{(z - w_j)^n}, \quad (3.87)$$

de ordem n , para $n > 0$. Agora, procuramos o resíduo associado usando,

$$\text{Res}f(w_j) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow w_j} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - w_j)^n f(z)]. \quad (3.88)$$

Em (3.86), o primeiro termo corresponde a $n = 1$, e o resíduo resulta em,

$$\text{Res}f(w_j) = \lim_{z \rightarrow w_j} (z - w_j) \frac{\varepsilon(z)}{(z - w_j)} = \varepsilon(w_j). \quad (3.89)$$

Já para o segundo termo $f(z) = \frac{\varepsilon(z)}{(z-w_j)^2}$, temos $n = 2$. O resíduo nesse caso é,

$$\partial_z \varepsilon(z) \Big|_{z=w_j}. \quad (3.90)$$

Então, pelo teorema dos resíduos,

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_j \{\text{Res}f(w_j)\}, \quad (3.91)$$

e usando os resultados (3.89) e (3.90) na equação (3.86), temos para a parte holomórfica,

$$\delta_\varepsilon \langle Y \rangle = - \sum_j (\varepsilon(w_j) \partial_{w_j} + \partial \varepsilon(w_j) h_j) \langle Y \rangle. \quad (3.92)$$

Para mapeamentos infinitesimais conformes em $sl(2, \mathbb{C})$, a quantidade $\delta_\varepsilon \langle Y \rangle$ deve se anular, pois constitui uma simetria da teoria. Em termos dos mapas $z \rightarrow z' = f(z)$, temos,

$$f(z) = \frac{(1 + \alpha)z + \beta}{\gamma z + 1 - \alpha} \quad (3.93)$$

em que α , β e γ são infinitesimais, de onde obtemos para a variação $\varepsilon(z) = z' - z$, em primeira ordem,

$$\varepsilon(z) = \beta + 2\alpha z - \gamma z^2. \quad (3.94)$$

Substituindo a expressão anterior em (3.92), obtemos, respectivamente, a partir dos termos de ordem zero, um e dois em $z = w_j$,

$$\begin{aligned} \sum_j \partial_{w_j} \langle \phi(w_1) \dots \phi(w_n) \rangle &= 0, \\ \sum_j (w_j \partial_{w_j}) \langle \phi(w_1) \dots \phi(w_n) \rangle &= 0, \\ \sum_j (w_j^2 \partial_{w_j} + 2w_j h_j) \langle \phi(w_1) \dots \phi(w_n) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.95)$$

no qual a primeira equação corresponde à invariância por translações, já tratada diretamente nas seções sobre funções de correlação. Essas três restrições sobre as funções de correlação sintetizam os efeitos da invariância conforme global, construídas através das identidades de Ward, e estas, encontradas a partir de simetrias locais.

3.3 Expansão de produtos de operadores (OPE)

Da seção anterior, foi mostrado que as identidades de Ward relacionadas às simetrias conformes fixam a forma do valor esperado no vácuo do tensor momento-energia com campos primários (3.71), de forma que nos preocupamos em explicitar os termos singulares, pois os termos regulares, não contribuem para as variações infinitesimais conformes (3.85). Tipicamente, as funções de correlação possuem singularidades quando as posições de dois ou mais campos coincidem, e tal fato é explicado pelas flutuações infinitas de um campo quantizado quando calculado em uma posição precisa. Sendo a média de um campo quantizado num volume V ,

$$\phi_{medio} \equiv \frac{1}{V} \int_V d^2x \phi(x), \quad (3.96)$$

a variância $\langle \phi_{medio} \phi_{medio} \rangle$ diverge quando $V \rightarrow 0$. Para tratar das singularidades, procuramos representações em termos de operadores (ou campos) locais, isto é, procuramos uma expansão de produtos de operadores quando posições espaço temporais coincidem, nos quais os operadores locais sejam regulares. Essa expansão é válida quando se diz respeito a valores esperados. A identidade de Ward holomórfica calculada em (3.71) explicita o comportamento singular (quando $z \rightarrow w_j$) do valor esperado do campo $T(z)$ com campos primários $\phi_j(w_j, \bar{w}_j)$. O OPE entre $T(z)$ e $\phi(w, \bar{w})$ é dado por,

$$T(z)\phi(w, \bar{w}) \sim \frac{h}{(z-w)^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w} \partial_w \phi(w, \bar{w}). \quad (3.97)$$

Analogamente, pode se escrever uma equação similar para a parte antiholomórfica. O símbolo “ \sim ” pode ser entendido como uma expansão assintótica, isto é, se o lado direito

for somado em número suficientemente grande, mas finito, os termos que sobram vão tender a zero quando $z \rightarrow w$ no sentido de operadores em uma função de correlação. Em geral, podemos escrever o OPE entre dois campos $A(z)$ e $B(w)$ como,

$$\sum_{n=-\infty}^N \frac{\{AB\}_n(w)}{(z-w)^n}, \quad (3.98)$$

onde os termos $\{AB\}_n(w)$ são não singulares para $z = w$. Na sequência, são tratados exemplos específicos.

3.3.1 O bóson livre

No intuito de observar e exemplificar os cálculos de OPEs, iniciamos considerando uma teoria de campos de bósons livres sem massa, descrita pela seguinte ação,

$$S = \frac{1}{2}g \int d^2x \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi, \quad (3.99)$$

onde g é um parâmetro de normalização. Afim de identificar o propagador $G(x, y)$ (ou função de dois pontos) da teoria, podemos reescrever a ação acima como,

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x d^2y \varphi(x) A(x, y) \varphi(y), \quad (3.100)$$

onde $A(x, y) = g\delta(x-y)(-\partial_x^2)$. Logo, para o propagador $G(x, y) = A^{-1}(x, y)$, temos,

$$g(-\partial_x^2)G(x, y) = \delta(x-y). \quad (3.101)$$

Considerando invariância por rotações e por translações, $G(x, y)$ deve depender somente da distância separando dois pontos, isto é, $\rho = |x - y|$. Tal condição permite escrever $G(x, y) = G(\rho)$ e assim, $\partial_x^2 = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho)$, pois ρ é uma coordenada polar. Integrando a equação (3.101) num disco de raio ρ ,

$$\begin{aligned} 1 &= g \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\rho d\rho' \rho' \left(-\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\rho' \frac{\partial G(\rho')}{\partial \rho'} \right) \right) \\ &= -2\pi g \rho \frac{dG(\rho)}{d\rho}, \end{aligned} \quad (3.102)$$

e a menos de uma constante, a solução para $G(\rho)$ é,

$$G(\rho) = -\frac{1}{2\pi g} \ln \rho, \quad (3.103)$$

ou,

$$G(x, y) = -\frac{1}{4\pi g} \ln(x-y)^2. \quad (3.104)$$

O propagador da teoria é a função de dois pontos, logo,

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle = -\frac{1}{4\pi g} \ln(x-y)^2. \quad (3.105)$$

Podemos reescrever este resultado em termos das coordenadas complexas, o que resulta em,

$$\langle \varphi(z, \bar{z}) \varphi(w, \bar{w}) \rangle = -\frac{1}{4\pi g} \{ \ln(z-w) + \ln(\bar{z}-\bar{w}) \}, \quad (3.106)$$

em que φ não é um campo primário. A parte holomórfica pode ser separada da parte antiholomórfica tomando as derivadas ∂_z e $\partial_{\bar{z}}$ na equação anterior, de forma que encontramos,

$$\begin{aligned} \langle \partial_z \varphi(z, \bar{z}) \partial_w \varphi(w, \bar{w}) \rangle &= -\frac{1}{4\pi g} \frac{1}{(z-w)^2}, \\ \langle \partial_{\bar{z}} \varphi(z, \bar{z}) \partial_{\bar{w}} \varphi(w, \bar{w}) \rangle &= -\frac{1}{4\pi g} \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})^2}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Desenvolveremos a parte holomórfica, entendendo que para a parte antiholomórfica o tratamento é análogo. Consideremos que $\partial\varphi \equiv \partial_z\varphi$ e assim o OPE pode ser reescrito por conveniência na forma,

$$\partial\varphi(z)\partial\varphi(w) \sim -\frac{1}{4\pi g} \frac{1}{(z-w)^2}, \quad (3.108)$$

de onde podemos notar a invariância da OPE sob a troca z por w , o que reflete a característica bosônica do campo.

A versão quântica do tensor momento-energia em coordenadas complexas é dado por,

$$T(z) = -2\pi g : \partial\varphi\partial\varphi :, \quad (3.109)$$

em que $:$ significa ordenamento normal. A partir da equação (3.109), podemos calcular o OPE entre o tensor $T(z)$ e o termo $\partial\varphi(w)$ usando o teorema de Wick [9],

$$\begin{aligned} T(z)\partial\varphi(w) &= -2\pi g : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) : \partial\varphi(w) \\ &\sim -4\pi g : \partial\varphi(z) \overbrace{\partial\varphi(z)} : \partial\varphi(w) \\ &\sim -4\pi g \partial\varphi(z) : \partial\varphi(z)\partial\varphi(w) : \\ &\sim \frac{\partial\varphi(z)}{(z-w)^2} \end{aligned} \quad (3.110)$$

onde podemos expandir $\partial\varphi(z)$ em torno de w , de forma que obtemos,

$$T(z)\partial\varphi(w) \sim \frac{\partial\varphi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w^2\varphi(w)}{(z-w)}. \quad (3.111)$$

O resultado acima pode ser comparado com o encontrado para a identidade de Ward cálculo em (3.71), o que mostra que $\partial\varphi$ é um campo primário com dimensão conforme $h = 1$. Podemos calcular também o OPE entre o tensor momento-energia consigo mesmo, isto é,

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= 4\pi^2 g^2 : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) : : \partial\varphi(w)\partial\varphi(w) : \\ &\sim 4\pi^2 g^2 : \overbrace{\partial\varphi(z)\partial\varphi(z)} : : \overbrace{\partial\varphi(w)\partial\varphi(w)} : : \overbrace{\partial\varphi(z)\partial\varphi(z)} : : \overbrace{\partial\varphi(w)\partial\varphi(w)} : \\ &+ 4\pi^2 g^2 : \overbrace{\partial\varphi(z)\partial\varphi(z)} : : \overbrace{\partial\varphi(w)\partial\varphi(w)} : \end{aligned} \quad (3.112)$$

onde o termo da segunda linha é uma dupla contração e o da terceira linha de quatro contrações individuais. Explicitamente,

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &\sim \frac{1}{2} \frac{1}{(z-w)^4} - \frac{4\pi g : \partial\varphi(z)\partial\varphi(w) :}{(z-w)^2} \\ &\sim \frac{1}{2} \frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)}, \end{aligned} \quad (3.113)$$

onde no segundo termo da primeira linha identificamos o tensor momento-energia e expandimos em torno de w , resultando na segunda linha. A expressão acima é a derivada *schwarziana*. Notamos que o primeiro termo $\left(\frac{1}{2} \frac{1}{(z-w)^4}\right)$ é um termo anômalo, o que nos indica que o tensor momento-energia não é um campo estritamente primário.

3.3.2 O férmion livre

Um outro caso de interesse é o férmion de Majorana livre, cuja dinâmica é regida pela seguinte ação

$$S = \frac{1}{2} g \int d^2x \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi, \quad (3.114)$$

em que γ^μ são as matrizes de Dirac, que satisfazem a seguinte álgebra,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (3.115)$$

Sendo $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1)$, obtemos a representação matricial para γ^μ ,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.116)$$

e assim, o termo $\gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu$ torna-se,

$$\gamma^0 (\gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1) = 2 \begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}} & 0 \\ 0 & \partial_z \end{pmatrix}, \quad (3.117)$$

Se considerarmos um espinor Ψ como $(\psi, \bar{\psi})$, podemos reescrever a ação S como

$$S = g \int d^2x (\bar{\psi} \partial \bar{\psi} + \psi \bar{\partial} \psi). \quad (3.118)$$

As equações de movimento clássicas são $\partial \bar{\psi} = 0$ e $\bar{\partial} \psi = 0$. Analogamente ao caso dos bósons, procuramos o propagador da teoria, isto é, o cálculo da função de correlação $\langle \Psi_i(x) \Psi_j(y) \rangle$, sendo i e j índices que assumem valores de 1 e 2. A ação, então, é reescrita como,

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x d^2y \Psi_i(x) A_{ij}(x, y) \Psi_j(y), \quad (3.119)$$

de forma que, por comparação,

$$A_{ij}(x, y) = g \delta(x - y) (\gamma^0 \gamma^\mu)_{ij} \partial_\mu. \quad (3.120)$$

Então, o propagador da teoria é dado por $K_{ij}(x, y) = (A^{-1})_{ij}(x, y)$, ou, explicitamente

$$g\delta(x - y)(\gamma^0\gamma^\mu)_{ik}\frac{\partial}{\partial x^\mu}K_{kj}(x, y) = \delta(x - y)\delta_{ij}. \quad (3.121)$$

Em termos das coordenadas complexas, a equação acima fica explicitamente como,

$$2g \begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}} & 0 \\ 0 & \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \psi(z, \bar{z})\psi(w, \bar{w}) \rangle & \langle \psi(z, \bar{z})\bar{\psi}(w, \bar{w}) \rangle \\ \langle \bar{\psi}(z, \bar{z})\psi(w, \bar{w}) \rangle & \langle \bar{\psi}(z, \bar{z})\bar{\psi}(w, \bar{w}) \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}}\frac{1}{z-w} & 0 \\ 0 & \partial_z\frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} \end{pmatrix}, \quad (3.122)$$

onde $x \rightarrow (z, \bar{z})$ e $y \rightarrow (w, \bar{w})$. Foi usado também a representação para a delta de Dirac em variáveis complexas. De maneira direta, como soluções da equação acima, temos,

$$\begin{aligned} \langle \psi(z, \bar{z})\psi(w, \bar{w}) \rangle &= \frac{1}{2\pi g} \frac{1}{z - w}, \\ \langle \bar{\psi}(z, \bar{z})\bar{\psi}(w, \bar{w}) \rangle &= \frac{1}{2\pi g} \frac{1}{\bar{z} - \bar{w}}, \\ \langle \psi(z, \bar{z})\bar{\psi}(w, \bar{w}) \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (3.123)$$

onde podemos observar que a parte holomórfica do OPE do férmion consigo mesmo é dado por,

$$\psi(z)\psi(w) \sim \frac{1}{2\pi g} \frac{1}{z - w}, \quad (3.124)$$

onde podemos notar que trocando z por w há uma troca no sinal da OPE, demonstrando a natureza antissimétrica de férmions. Da mesma forma que foi feito para os bósons, procuramos a OPE do tensor momento-energia com ψ e também consigo mesmo. Podemos calcular explicitamente as componentes do tensor momento-energia a partir da equação (2.90), com as devidas modificações para as variáveis complexas. Em componentes, temos,

$$\begin{aligned} T^{\bar{z}\bar{z}} &= 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\partial}\phi}\partial\phi = 2g\psi\partial\psi \\ T^{zz} &= 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial\phi}\bar{\partial}\phi = 2g\bar{\psi}\bar{\partial}\bar{\psi} \\ T^{z\bar{z}} &= 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial\phi}\partial\phi - 2\mathcal{L} = -2g\psi\bar{\partial}\bar{\psi} \end{aligned} \quad (3.125)$$

onde podemos notar que o tensor momento-energia não é explicitamente simétrico. No entanto, sempre se pode levar para uma forma simétrica, de forma que as equações de movimento clássicas sejam preservadas. Portanto, não nos preocuparemos com este termo. Usando a forma normalizada do tensor momento-energia, isto é,

$$\begin{aligned} T(z) &= -2\pi T_{zz} \\ &= -\frac{1}{2}\pi T^{\bar{z}\bar{z}} \\ &= -\pi g : \psi(z)\partial\psi(z) : \end{aligned} \quad (3.126)$$

temos,

$$\begin{aligned}
 T(z)\psi(w) &= -\pi g : \psi(z)\partial\psi(z) : \psi(w) \\
 &\sim \pi g : \overbrace{\psi(z)\partial\psi(z)} : \psi(w) \\
 &\sim \frac{1}{2} \frac{\partial\psi(z)}{(z-w)} + \frac{1}{2} \frac{\psi(z)}{(z-w)^2} \\
 &\sim \frac{1}{2} \frac{\psi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\psi(w)}{z-w},
 \end{aligned} \tag{3.127}$$

onde na terceira linha, referentes a contração de $\psi(w)$ com $\psi(z)$, um termo de $(-)$ foi introduzido para satisfazer a ordenamento normal. Da terceira linha para quarta, fizemos uma expansão em torno de w . Prosseguimos com o cálculo da OPE do tensor momento-energia consigo mesmo, isto é,

$$\begin{aligned}
 T(z)T(w) &= \pi^2 g^2 : \psi(z)\partial\psi(z) :: \psi(w)\partial\psi(w) : \\
 &\sim \frac{1/4}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)}
 \end{aligned} \tag{3.128}$$

calculada da mesma forma que as anteriores. Notamos novamente (como para os bósons) a presença de um termo anômalo $\left(\frac{1/4}{(z-w)^4}\right)$, diferindo somente por um valor numérico se comparado ao caso bosônico.

3.4 A carga central e significado físico

Dos dois sistemas acima tratados, notamos a presença de termos anômalos, isto é, termos que não são encontrados a partir das identidades de Ward calculadas neste capítulo. De maneira geral, a OPE do tensor momento-energia consigo mesmo é dado por,

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)}, \tag{3.129}$$

em que c é uma constante. Se compararmos com as OPEs para bósons e férmions livres calculadas em (3.113) e (3.128), c assume 1 e $\frac{1}{2}$, respectivamente. Logo, podemos inferir que c depende do modelo tratado. Essa constante é chamada de carga central. A OPE acima exemplifica que a carga central não pode ser obtida de considerações condicionais acerca de simetrias, uma vez que surge o termo anômalo $\frac{c/2}{(z-w)^4}$ em ambas as considerações de campos (bósons e férmions). A determinação de seu valor é expressada pelo comportamento a curtas distâncias de uma determinada teoria, como tratados pelo teorema de Wick para as teorias de campo acima. Para teorias desacopladas (livres entre si) consideradas, o tensor momento-energia total é simplesmente a soma dos tensores momento-energia de cada campo e em termos da carga central *total* é intuitivamente a soma de cada carga central associada. Já que cada teoria é caracterizada por uma carga central, esta é, de certa forma, uma medida dos graus de liberdade.

Sob às transformações de Ward encontradas em (3.85) vamos analisar a variação do tensor momento-energia. A variação, considerando a parte holomórfica, é dada por,

$$\delta_\varepsilon T(w) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \varepsilon(z) T(z) T(w), \quad (3.130)$$

onde podemos usar a OPE acima, de forma que,

$$\delta_\varepsilon T(w) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \varepsilon(z) \left\{ \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)} \right\}, \quad (3.131)$$

no qual podemos resolver usando o teorema dos resíduos exemplificado acima. Encontrando as ordens dos polos, seus respectivos resíduos e usando o teorema, encontramos a seguinte expressão para a variação conforme de $T(w)$,

$$\delta_\varepsilon T(w) = -\frac{1}{12} c \partial_w^3 \varepsilon(w) - 2T(w) \partial_w \varepsilon(w) - \varepsilon(w) \partial_w T(w), \quad (3.132)$$

em que podemos considerar a transformação $z \rightarrow w(z)$, resultando em,

$$T'(w) = \left(\frac{dw}{dz} \right)^{-2} \left[T(z) - \frac{c}{12} \{w; z\} \right], \quad (3.133)$$

onde o termo proporcional a carga central é chamado de *derivada de Schwarz* definida como,

$$\{w; z\} = \frac{d^3 w/dz^3}{dw/dz} - \frac{3}{2} \left(\frac{d^2 w/dz^2}{dw/dz} \right), \quad (3.134)$$

e por essa transformação finita do tensor momento-energia podemos compreender as consequências físicas da carga central. Consideremos uma teoria de campos conformes genérica no plano complexo, o qual mapeamos num cilindro de circunferência L pela transformação,

$$z \rightarrow w = \frac{L}{2\pi} \ln z. \quad (3.135)$$

Logo, estabelecemos a relação entre o tensor momento-energia no cilindro ($T_{cilindro}(w)$) com o corresponde no plano ($T_{plano}(z)$) pela equação (3.133) e encontramos,

$$T_{cilindro}(w) = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \left[T_{plano}(z) z^2 - \frac{c}{24} \right]. \quad (3.136)$$

Se assumimos que a densidade de energia no vácuo no plano é nula, isto é, $\langle T_{plano}(z) \rangle = 0$, então, para a densidade de energia no vácuo no cilindro, encontramos,

$$\langle T_{cilindro}(w) \rangle = -\frac{c\pi^2}{6L^2}, \quad (3.137)$$

o que nos incita a pensar que a carga central pode ser vista como sendo proporcional a energia de Casimir [38, 39], na qual a mudança no espaço em consideração (plano para cilindro) causou uma mudança na medida da densidade de energia no vácuo, ou seja, uma fronteira no sistema causou uma alteração. Podemos entender, então, que a carga central descreve como um sistema reage a introdução de uma escala macroscópica de comprimento e ainda que tal escala quebra fracamente a simetria conforme. Por essas questões, a carga central também é chamada de anomalia conforme.

4 O Formalismo de operadores

Anteriormente, vimos que as consequências da simetria conforme em teorias de campos em duas dimensões estão contidas nas imposições sobre as funções de correlação da teoria, extraídas ao considerar as identidades de Ward associadas. Comumente, escrevemos tais identidades como uma expansão em produtos de operadores locais, isto é, as OPEs. A fim de estudar os operadores, precisamos estudar a álgebra destes operadores. No caso da mecânica quântica, descrevemos os estados de um sistema num espaço de Hilbert, e em particular procuramos uma base que diagonaliza os operadores. Sabemos, ainda, que ao considerar um sistema para o qual os observáveis estão relacionados a operadores, estamos escolhendo, por consequência, um referencial específico, isto é, perdendo a manifestação explícita da invariância de Lorentz, o que equivale a escolher um eixo temporal num espaço-tempo. Numa teoria euclidiana, a direção temporal é, de certa maneira, arbitrária. Em particular, vamos escolher a direção radial, partindo da origem.

4.1 O formalismo de operadores de uma teoria de campos conforme

Como dito, descrever um sistema por operadores possibilita o uso de métodos algébricos interessantes, e além disso é intrínseco ao tratamento (explicitamente visto em Minkowski) uma escolha de uma direção temporal. No caso euclidiano, essa escolha pode ser feita de forma arbitrária, uma vez que as coordenadas não se distinguem em relação ao sinal que compõem a assinatura da métrica associada ao espaço-tempo em consideração, isto é, nesse caso, consideraremos uma coordenada radial para ser o parâmetro de evolução temporal.

4.1.1 Quantização radial

Iniciamos definindo a teoria num cilindro, onde a coordenada temporal t vai de $-\infty$ a $+\infty$ ao longo do eixo axial no cilindro e a coordenada espacial x compactificada indo de 0 a L , em que os pontos $(0, t)$ e (L, t) são identificados como mesmo ponto. Tal mapeamento pode ser visualizado na Figura (3). No espaço euclidiano, podemos descrever o cilindro por apenas uma variável complexa ξ , sendo $\xi = t + ix$ (o complexo conjugado é equivalente). A descrição é feita através da seguinte equação,

$$z = e^{2\pi\xi/L}, \quad (4.1)$$

o qual podemos identificar que para $t \rightarrow -\infty$ a coordenada complexa se encontra na origem, ou seja, $z = 0$. Já para $t \rightarrow +\infty$, z se encontra também no infinito (ver Fig. 4). Agora, vamos construir o espaço de Hilbert dos estados da teoria. A partir da existência

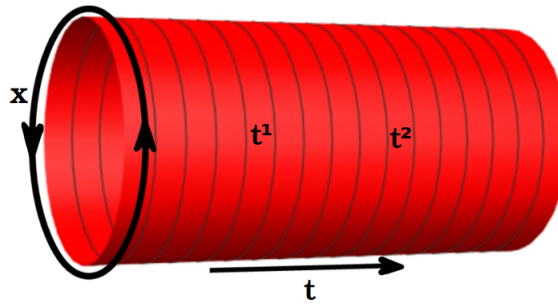


Figura 3 – Representação do mapeamento no cilindro

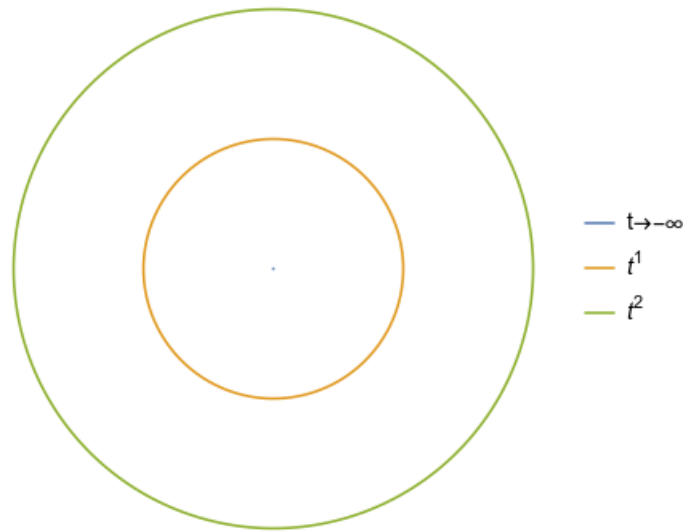


Figura 4 – Representação do mapeamento do cilindro no plano complexo

de um estado de vácuo, o espaço de Hilbert de todos os estados dos sistema pode ser criado da ação dos chamados operadores de criação. Em teorias livres, o vácuo pode ser definido como o estado aniquilado pela parte da frequência positiva do campo (quando consideramos a quantização do campo por operadores de criação e aniquilação). Já numa teoria com interação, assumimos que o espaço de Hilbert é o mesmo com a diferença de que os autoestados de energia são diferentes. Podemos procurar um estado de vácuo “equivalente”, isto é, um estado para o qual os campos de interação se comportam como campos livres. Sendo a interação para $t \rightarrow \mp\infty$ atenuada, assintoticamente temos,

$$\phi_{in} \propto \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(x, t), \tag{4.2}$$

o qual é um campo livre. Na quantização radial, esse campo assintótico se reduz a somente um operador, que atuando no estado $|0\rangle$, gera um único estado $|\phi_{in}\rangle$, isto é,

$$|\phi_{in}\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \phi(z, \bar{z}) |0\rangle. \tag{4.3}$$

Definimos agora, um produto bilinear no espaço de Hilbert, o que é feito indiretamente definindo um estado $\langle\phi_{out}|$, juntamente com o efeito da aplicação de conjugação

hermitiana em campos conformes. No espaço de Minkowski, a conjugação hermitiana não afeta as coordenadas espaço-temporais. Entretanto, no espaço euclidiano o tempo conjugado ($\tau = it$) deve passar a $-\tau$ numa conjugação hermitiana, afim de que t não se altere. Na quantização considerada isso corresponde ao mapeamento de $z \rightarrow \frac{1}{z^*}$. Definimos então, a conjugação hermitiana como,

$$\phi^\dagger(z, \bar{z}) = \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \phi(1/\bar{z}, 1/z), \quad (4.4)$$

onde ϕ é um campo quasi-primário de dimensão h e \bar{h} . Fazendo com que o estado assintótico $\langle \phi_{out} |$ seja,

$$\langle \phi_{out} | = | \phi_{in} \rangle^\dagger, \quad (4.5)$$

para o qual podemos definir um produto interno da forma,

$$\begin{aligned} \langle \phi_{out} | \phi_{in} \rangle &= \lim_{z, \bar{z}, w, \bar{w} \rightarrow 0} \langle 0 | \phi^\dagger(z, \bar{z}) \phi(w, \bar{w}) | 0 \rangle \\ &= \lim_{z, \bar{z}, w, \bar{w} \rightarrow 0} \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \langle 0 | \phi(1/\bar{z}, 1/z) \phi(w, \bar{w}) | 0 \rangle \\ &= \lim_{\eta, \bar{\eta} \rightarrow \infty} \bar{\eta}^{-2h} \eta^{2\bar{h}} \langle 0 | \phi(\bar{\eta}, \eta) \phi(0, 0) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

De acordo com a função de dois pontos conformemente covariante, dada em (3.37) e repetida abaixo,

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{C_{12}}{(z_1 - z_2)^{2h} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\bar{h}}}, \quad (4.7)$$

o produto interno $\langle \phi_{in} | \phi_{out} \rangle$ se reduz a,

$$\langle \phi_{in} | \phi_{out} \rangle = \lim_{\xi, \bar{\xi} \rightarrow \infty} C_{12}, \quad (4.8)$$

e logo, não depende de ξ , o que justifica os fatores $\bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}}$ na conjugação hermitiana, uma vez que se não estivessem, o produto interno acima não estaria bem definido para $\xi \rightarrow \infty$.

Para o decorrer deste trabalho, é interessante expandir o campo conforme $\phi(z, \bar{z})$ em modos, isto é,

$$\phi(z, \bar{z}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-m-h} \bar{z}^{-n-\bar{h}} \phi_{m,n}, \quad (4.9)$$

o inverso está definido por,

$$\phi_{m,n} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint dz z^{m+h-1} \oint d\bar{z} \bar{z}^{n+\bar{h}-1} \phi(z, \bar{z}), \quad (4.10)$$

Para calcular o campo conjugado hermitiano $\phi(z, \bar{z})^\dagger$ podemos pensar que, intuitivamente, seria simplesmente tomar o conjugado no lado direito da equação (4.9), de forma que obtemos,

$$\phi^\dagger(z, \bar{z}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{z}^{-m-h} z^{-n-\bar{h}} \phi_{m,n}^\dagger, \quad (4.11)$$

Entretanto, usando a definição do conjugado hermitiano dada em (4.4),

$$\begin{aligned}
\phi^\dagger(z, \bar{z}) &= \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \phi(1/\bar{z}, 1/z) \\
&= \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_{m,n} \bar{z}^{m+h} z^{n+\bar{h}} \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_{-m, -n} \bar{z}^{-m-h} z^{-n-\bar{h}}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Portanto, percebemos que para haver equivalência deve ser satisfeito que $\phi_{m,n}^\dagger = \phi_{-m, -n}$. Sob às condições dos estados assintóticos, e por construção do estado de vácuo, devemos ter que,

$$\phi_{m,n} |0\rangle = 0, \tag{4.13}$$

desde que $m > -h$ e $n > -\bar{h}$. Na sequência, afim de simplificar, podemos ocultar a parte holomórfica, ou seja, vamos usar,

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{-m-h} \phi_m, \\
\phi_m &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{m+h-1} \phi(z).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Podemos fazer isso porque as partes holomórfica e antiholomórfica estão desacopladas em relação aos graus de liberdade e a reinserção, quando necessária, é imediata.

4.1.2 Ordenamento radial e expansão de produtos de operadores

Como estamos utilizando a quantização radial, o ordenamento temporal usado nas funções de correlação torna-se um ordenamento radial, definido da seguinte forma,

$$\mathcal{R}\phi_1(z)\phi_2(w) = \begin{cases} \phi_1(z)\phi_2(w) & \text{se } |z| > |w| \\ \phi_2(w)\phi_1(z) & \text{se } |z| < |w| \end{cases} \tag{4.15}$$

e no caso de campos fermiônicos, um sinal negativo é adicionado para o caso $|z| < |w|$. Naturalmente, as OPEs terão que estar radialmente ordenadas, sendo o primeiro caso ($|z| > |w|$) considerado nos cálculos anteriores. Como as OPEs têm um grau de operador, é intuitivo que se procure os comutadores. Considerando $a(z)$ e $b(w)$ dois campos holomórficos, temos,

$$\oint_w dz a(z)b(w) = \oint_{C_1} dz a(z)b(w) - \oint_{C_2} dz b(w)a(z), \tag{4.16}$$

onde C_1 e C_2 são contornos de raio infinitesimalmente próximos a w , como representado na Figura (5). Então, temos a seguinte definição de comutador,

$$\oint_w dz a(z)b(w) = [A, b(w)], \tag{4.17}$$

onde o operador A é,

$$A = \oint_w dz a(z) \tag{4.18}$$

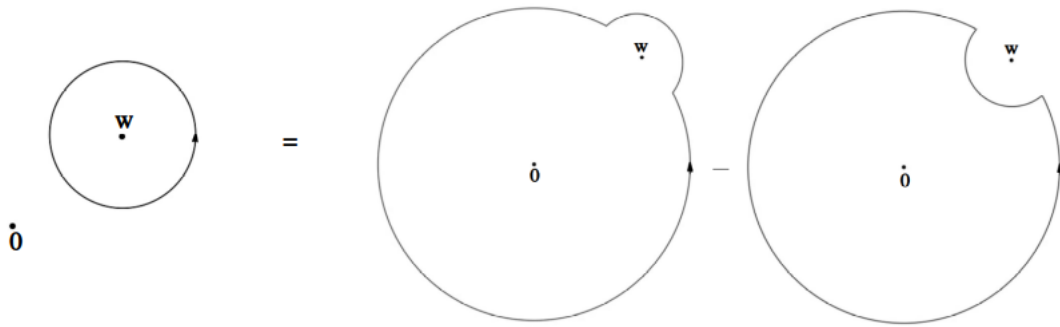


Figura 5 – Comutador como diferença de contornos

e onde a integração é feita em sentido antihorário em torno de w . Importante mencionar que a separação do contorno em outros somente é válido se $b(w)$ é o único campo que possui OPE singular com $a(z)$. Podemos usar a definição acima para calcular o comutador do operador A com outro operador B , da seguinte forma,

$$[A, B] = \oint_0 dw \oint_w dz a(z)b(w), \quad (4.19)$$

onde B é dado por,

$$B = \oint dz b(z). \quad (4.20)$$

A integração em z é feita em torno de w e a integração em w em torno da origem. A equação acima tem sua relevância por estabelecer uma forma de decodificar em termos de operadores e suas relações bilineares, as dinâmicas e simetrias contidas nas OPEs.

4.2 A álgebra de Virasoro

Na seção anterior encontramos uma definição do comutador dos operadores em termos das OPEs. Através dela, podemos buscar uma álgebra que descreverá a dinâmica dos operadores e a estrutura de simetria da teoria. Em particular, encontraremos que tal álgebra corresponde a uma álgebra de Lie complexa chamada álgebra de Virasoro. Existe uma relação entre a álgebra de Witt (estudada no capítulo anterior) e a álgebra de Virasoro. A segunda é uma extensão central da primeira, a qual é o cociclo não-trivial de Gelfand-Fuchs [40].

4.2.1 Geradores conformes

Definimos a carga conforme como,

$$Q_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \varepsilon(z)T(z). \quad (4.21)$$

onde $\varepsilon(z)$ é o componente holomórfico de uma transformação de coordenadas. Considerando somente a parte holomórfica da identidade de Ward conforme dada em (3.85), i.e.,

$$\delta_\varepsilon \langle Y \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \varepsilon(z) \langle T(z)Y \rangle, \quad (4.22)$$

e da definição de comutadores estabelecida anteriormente, podemos escrever,

$$\delta_\varepsilon \phi(w) = -[Q_\varepsilon, \phi(w)], \quad (4.23)$$

o que nos mostra que Q_ε pode ser visto como gerador das transformações conformes. Expandindo o tensor momento-energia de acordo com a expansão em modos dada em (4.14), temos as seguintes expressões,

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n, \quad L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z), \quad (4.24)$$

e analogamente para a parte antiholomórfica, temos,

$$\bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{z}^{-n-2} \bar{L}_n, \quad \bar{L}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}). \quad (4.25)$$

Agora, expandindo também a variação conforme $\varepsilon(z)$,

$$\varepsilon(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n+1} \varepsilon_n, \quad (4.26)$$

obtemos a seguinte expressão para a carga conforme,

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n+1} \varepsilon_n T(z) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_n L_n \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde podemos observar que os operadores L_n (válido também para \bar{L}_n) do tensor momento-energia são os geradores das transformações locais conformes no espaço de Hilbert. Buscamos agora, a álgebra dos operadores L_n e \bar{L}_n usando a definição de comutadores. Iniciamos com o comutador entre L_n e L_m .

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left[\oint dz z^{n+1} T(z), \oint dz z^{m+1} T(z) \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_0 dw w^{m+1} \oint_w dz z^{n+1} T(z) T(w). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Agora, vamos usar a OPE do tensor momento-energia consigo mesmo, dada em (3.129), i.e.,

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)}, \quad (4.29)$$

e o teorema dos resíduos anteriormente exemplificado para calcular as integrais. A primeira integral (a menos de fatores independente de z) a ser calculada é,

$$\oint_w dz \frac{z^{n+1}}{(z-w)^4} = 2\pi i \sum \{ \text{Resíduos do polo } w \}, \quad (4.30)$$

onde a ordem do polo w é 4, pois,

$$\lim_{z \rightarrow w} (z - w)^4 \frac{z^{n+1}}{(z - w)^4} = w^{n+1}, \quad (4.31)$$

a qual é diferente de zero pois $w \neq 0$. Logo, o resíduo associado é dado por,

$$\begin{aligned} \text{Res}f(w) &= \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow w} \frac{d^3}{dz^3} \left[(z - w)^4 \frac{z^{n+1}}{(z - w)^4} \right] \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(n-1)w^{n-2}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

Então, o resultado da primeira integral é,

$$\oint_w dz \frac{z^{n+1}}{(z - w)^4} = (2\pi i) \left(\frac{n(n+1)(n-1)}{6} \right) w^{n-2}. \quad (4.33)$$

De maneira análoga, para os outros dois termos da OPE temos

$$\begin{aligned} \oint_w dz \frac{z^{n+1}}{(z - w)^2} &= 2\pi i(n+1)w^n, \\ \oint_w dz \frac{z^{n+1}}{(z - w)} &= 2\pi iw^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Retornando com os resultados no comutador, temos,

$$[L_n, L_m] = \frac{1}{2\pi i} \oint_0 dw w^{m+1} \left[\frac{c}{12} n(n+1)(n-1)w^{n-2} + 2(n+1)w^n T(w) + w^{n+1} \partial T(w) \right] \quad (4.35)$$

Podemos observar que os termos em w possuem polo na origem, de forma que precisaremos somente analisar termo a termo as condições para n e m . Feita tal análise, concluímos que,

$$[L_n, L_m] = \frac{c}{12} n(n^2 - 1) \delta_{n+m,0} + (n - m) L_{m+n}, \quad (4.36)$$

onde usamos uma integração por partes no último termo $\partial T(w)$. O símbolo δ no resultado indica um delta de Kronecker, isto é, $\delta_{n+m,0} = 1$ somente quando $n + m = 0$. De forma similar, podemos encontrar os seguintes resultados,

$$\begin{aligned} [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= \frac{c}{12} n(n^2 - 1) \delta_{n+m,0} + (n - m) \bar{L}_{n+m}, \\ [L_n, \bar{L}_m] &= 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

O conjunto destas relações de comutação entre os operadores L_n e \bar{L}_n formam a denominada álgebra de Virasoro.

4.2.2 Espaço de Hilbert

Uma vez estabelecidos os geradores e as relações de comutação da teoria, procuramos estudar os aspectos gerais do espaço de Hilbert onde estão definidos. Primeiramente,

o estado de vácuo $|0\rangle$ deve ser invariante sob transformações conformes globais. Os operadores L_{-1} , L_0 e L_1 e seus homólogos antiholomórficos devem aniquilar o estado, o que significa que o estado fundamental é fixado com energia zero. Isso se traduz também por $T(z)|0\rangle = 0$ (e analogamente para a parte antiholomórfica). Em termos de operadores, temos,

$$L_n |0\rangle = 0, \quad \bar{L}_n |0\rangle = 0, \quad (4.38)$$

onde $n \geq -1$. Logo, temos para o tensor momento-energia,

$$\langle 0|T(z)|0\rangle = \langle 0|\bar{T}(\bar{z})|0\rangle = 0. \quad (4.39)$$

O efeito de campos primários atuando no vácuo pode ser visto considerando a OPE entre o tensor momento-energia e o campo $\phi(z, \bar{z})$, dado em (3.97), no comutador com L_n ,

$$\begin{aligned} [L_n, \phi(w, \bar{w})] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz z^{n+1} T(z) \phi(w, \bar{w}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz z^{n+1} \left[\frac{h\phi(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w, \bar{w})}{(z-w)} \right] \\ &= h(n+1)w^n \phi(w, \bar{w}) + w^{n+1} \partial\phi(w, \bar{w}), \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde a integral dos termos regulares da OPE se anulam. Tal resultado é feito usando o teorema dos resíduos utilizado anteriormente e é válido para $n \geq -1$. Equivalentemente, para a parte antiholomórfica, temos,

$$[\bar{L}_n, \phi(w, \bar{w})] = \bar{h}(n+1)\bar{w}^n \phi(w, \bar{w}) + \bar{w}^{n+1} \bar{\partial}\phi(w, \bar{w}), \quad (4.41)$$

sob a mesma condição para n . Notemos que $L_0 + \bar{L}_0$ representa dilatações, as quais na quantização radial correspondem a translações temporais, portanto $L_0 + \bar{L}_0$ é proporcional a hamiltoniana do sistema. Aplicando L_0 no estado assintótico $|h, \bar{h}\rangle \equiv \phi(0, 0)|0\rangle$, temos,

$$\begin{aligned} L_0 |h, \bar{h}\rangle &= L_0 \phi(0, 0) |0\rangle \\ &= ([L_0, \phi(w, \bar{w})] + \phi(w, \bar{w})L_0) |_{w, \bar{w} \rightarrow 0} |0\rangle \\ &= [L_0, \phi(w, \bar{w})] |_{w, \bar{w} \rightarrow 0} |0\rangle \\ &= (hw^0 \phi(w, \bar{w}) + w\partial\phi(w, \bar{w})) |_{w, \bar{w} \rightarrow 0} |0\rangle \\ &= h\phi(0, 0) |0\rangle \\ &= h |h, \bar{h}\rangle, \end{aligned} \quad (4.42)$$

que a dimensão conforme h é um autovalor de L_0 , sendo o autoestado de energia $|h, \bar{h}\rangle$. Analogamente, podemos chegar a,

$$\bar{L}_0 |h, \bar{h}\rangle = \bar{h} |h, \bar{h}\rangle, \quad (4.43)$$

para a parte antiholomórfica. Estados excitados em relação ao estado $|h, \bar{h}\rangle$ podem ser obtidos a partir da aplicação de operadores “escada”. Podemos encontrar tais operadores

considerando a expansão em modos, i.e., os ϕ_m . Usando a expressão para ϕ_m , a OPE entre o tensor momento-energia e o campo ϕ , e o teorema dos resíduos, encontramos,

$$[L_n, \phi_m] = \{n(h-1) - m\} \phi_{m+n}, \quad (4.44)$$

de forma que para $n = 0$, temos,

$$[L_0, \phi_m] = -m\phi_m, \quad (4.45)$$

o que significa que ϕ_m atua como operador de *subida* e *descida* para os autoestados de L_0 , ou seja, cada ϕ_{-m} aplicado ($m \geq 0$) aumenta por m a dimensão conforme do estado. Por outro lado, a partir da álgebra de Virasoro, temos,

$$[L_0, L_{-m}] = mL_{-m}. \quad (4.46)$$

Portanto, os geradores L_{-m} para $m \geq 0$ também aumentam a dimensão conforme. Isto nos leva a concluir que os estados excitados podem ser obtidos a partir de sucessivas aplicações de tais operadores no estado assintótico $|h\rangle$ (parte holomórfica), isto é,

$$L_{-k_1} L_{-k_2} \dots L_{-k_n} |h\rangle \quad (4.47)$$

sendo a condição ($1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_n$). Tal estado excitado é um autoestado de L_0 com autovalor dado por,

$$h' = h + k_1 + k_2 + \dots + k_n \equiv h + N, \quad (4.48)$$

onde N é o nível dos estados excitados, que por sua vez, são chamados de estados descendentes do estado assintótico $|h\rangle$.

4.3 O bóson livre

Neste contexto da quantização radial (o que intuitivamente nos leva a pensar na quantização do cilindro considerando o mapeamento (4.1)), bem como na expansão em modos, na álgebra e nos estados físicos, é interessante considerar inicialmente teorias livres, por serem as teorias mais simples, nas quais complexidades podem ser adicionadas. Iniciamos considerando o bóson livre.

4.3.1 Quantização canônica no cilindro

Considerando um campo $\varphi(x, t)$ bosônico livre definido num cilindro de circunferência L , sob a condição periódica $\varphi(x+L, t) \equiv \varphi(x, t)$. Expandindo em séries de Fourier,

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \sum_n e^{2\pi i n x / L} \varphi_n(t), \\ \varphi_n(t) &= \frac{1}{L} \int dx e^{-2\pi i n x / L} \varphi(x, t). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Podemos escrever a lagrangiana do campo livre,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g \int dx \left\{ (\partial_t \varphi)^2 - (\partial_x \varphi)^2 \right\}, \quad (4.50)$$

onde substituindo a expansão (4.49), obtemos,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}gL \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \dot{\varphi}_n \dot{\varphi}_{-n} - \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 \varphi_n \varphi_{-n} \right\}, \quad (4.51)$$

na qual usamos que,

$$\int_0^L dx e^{2\pi i(n+m)x/L} = L\delta_{n,-m}. \quad (4.52)$$

Para o momento conjugado a φ_n temos,

$$\pi_n = gL\dot{\varphi}_{-n}, \quad (4.53)$$

com comutador sendo o usual dado por,

$$[\varphi_n, \pi_m] = i\delta_{nm}, \quad (4.54)$$

e portanto, a hamiltoniana é escrita como,

$$H = \frac{1}{2gL} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \pi_n \pi_{-n} + (2\pi ng)^2 \varphi_n \varphi_{-n} \right\}, \quad (4.55)$$

onde $\varphi_{-n} = \varphi_n^\dagger$ e $\pi_{-n} = \pi_n^\dagger$, as quais vem pelo fato do campo φ ser hermitiano. A hamiltoniana acima representa a soma de osciladores harmônicos desacoplados de frequências $\omega_n = \frac{2\pi|n|}{L}$. Os operadores de criação e aniquilação \tilde{a}_n e \tilde{a}_n^\dagger são dados por,

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{\sqrt{4\pi|n|}} (2\pi g|n|\varphi_n + i\pi_{-n}), \quad n \neq 0, \quad (4.56)$$

no qual \tilde{a}_n^\dagger é obtido da equação acima. Os operadores satisfazem, de acordo a (4.54), as relações usuais de comutação,

$$[\tilde{a}_n, \tilde{a}_m] = 0 \quad [\tilde{a}_n, \tilde{a}_m^\dagger] = \delta_{nm}, \quad (4.57)$$

o qual não se aplica ao modo zero (φ_0). A partir de (4.56), definimos os seguintes operadores,

$$a_n = \begin{cases} -i\sqrt{n} \tilde{a}_n & \text{para } (n > 0) \\ i\sqrt{-n} \tilde{a}_{-n}^\dagger & \text{para } (n < 0) \end{cases} \quad \bar{a}_n = \begin{cases} -i\sqrt{n} \tilde{a}_{-n} & \text{para } (n > 0) \\ i\sqrt{-n} \tilde{a}_n^\dagger & \text{para } (n < 0) \end{cases} \quad (4.58)$$

com as relações de comutação,

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n+m} \quad [a_n, \bar{a}_m] = 0 \quad [\bar{a}_n, \bar{a}_m] = n\delta_{n+m}. \quad (4.59)$$

Em termos dos novos operadores, podemos reescrever a hamiltoniana (4.55) como,

$$H = \frac{1}{2gL}\pi_0^2 + \frac{2\pi}{L} \sum_{n \neq 0} (a_{-n}a_n + \bar{a}_{-n}\bar{a}_n), \quad (4.60)$$

no qual usando as relações de comutação acima chegamos a,

$$[H, a_{-m}] = \frac{2\pi}{L} m a_{-m}, \quad (4.61)$$

o que significa que a_{-m} , para $m > 0$ produz um outro autoestado com energia $E + \frac{2m\pi}{L}$ quando aplicado a um autoestado de H com energia E . Invertendo a equação (4.56) e usando (4.58), podemos escrever,

$$\varphi_n = \frac{i}{n\sqrt{4\pi g}}(a_n - \bar{a}_{-n}), \quad (4.62)$$

e substituindo na expansão para $\varphi(x)$ com $t = 0$, obtemos,

$$\varphi(x) = \varphi_0(0) + \frac{i}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} e^{2\pi i n x / L} (a_n - \bar{a}_{-n}) \quad (4.63)$$

onde a_n e \bar{a}_n estão avaliados em $t = 0$. Usando as equações de Heisenberg para a evolução temporal dos operadores, obtemos,

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \varphi_0(0) + \frac{1}{gL}\pi_0 t \\ a_n(t) &= a_n(0)e^{-2\pi i n t / L} \\ \bar{a}_n(t) &= \bar{a}_n(0)e^{-2\pi i n t / L}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Então, retornando ao campo $\varphi(x, t)$, substituindo as expansões, temos,

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 + \frac{1}{gL}\pi_0 t + \frac{i}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (a_n e^{2\pi i n (x-t)/L} - \bar{a}_{-n} e^{2\pi i n (x+t)/L}). \quad (4.65)$$

Podemos trocar a coordenada temporal da forma $t \rightarrow i\tau$, isto é, transformar para o espaço-tempo euclidiano. Além disso, passamos para as coordenadas conformes,

$$z = e^{2\pi(\tau - ix)/L}, \quad \bar{z} = e^{2\pi(\tau + ix)/L}. \quad (4.66)$$

Logo, usando tais coordenadas, o campo é escrito como,

$$\varphi(z, \bar{z}) = \varphi_0 - \frac{i}{4\pi g}\pi_0 \ln(z\bar{z}) + \frac{i}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (a_n z^{-n} + \bar{a}_n \bar{z}^{-n}). \quad (4.67)$$

A condição de periodicidade sobre o campo é a responsável por desacoplar os estados excitados da parte holomórfica daqueles da parte antiholomórfica. Logo, os operadores a_n criam ou aniquilam excitações do tipo *direita* (*right moving*) e, por consequência, \bar{a}_n são relacionados a excitações do tipo *esquerda* (*left moving*).

4.3.2 O operador de vértice

O campo bosônico $\varphi(z, \bar{z})$ não possui uma dimensão de escala, o que permite uma infinidade de campos locais relacionados a φ serem construídos, sem a introdução de uma escala. Isso significa que podemos construir os denominados operadores de vértice a seguir,

$$\mathcal{V}_\alpha(z, \bar{z}) =: e^{i\alpha\varphi(z, \bar{z})} : \quad (4.68)$$

no qual o sentido do ordenamento normal fica explícito ao usar a expressão para $\varphi(z, \bar{z})$ encontrada em (4.67).

$$\mathcal{V}_\alpha(z, \bar{z}) = e^{\left\{ i\alpha\varphi_0 + \frac{\alpha}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{n>0} \frac{1}{n} (a_{-n}z^n + \bar{a}_{-n}\bar{z}^n) \right\}} e^{\left\{ \frac{\alpha}{4\pi g}\pi_0 - \frac{\alpha}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{n>0} \frac{1}{n} (a_nz^{-n} + \bar{a}_n\bar{z}^{-n}) \right\}}. \quad (4.69)$$

A fim de saber o significado de α em termos do que já conhecemos e a natureza do operador de vértice (campo primário ou não), podemos calcular algumas OPEs. Primeiro, consideramos a OPE de $\partial\varphi$ com \mathcal{V}_α .

$$\begin{aligned} \partial\varphi(z)\mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} \partial\varphi(z) : \varphi(w, \bar{w})^n : \\ &\sim -\frac{1}{4\pi g} \frac{1}{(z-w)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{(n-1)!} : \varphi(w, \bar{w})^{n-1} : \\ &\sim -\frac{i\alpha}{4\pi g} \frac{\mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w})}{(z-w)}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Para o OPE com o tensor momento-energia, usando (3.109), temos,

$$\begin{aligned} T(z)\mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w}) &= -2\pi g \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) :: \varphi(w, \bar{w})^n : \\ &\sim -\frac{1}{8\pi g} \frac{1}{(z-w)^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{(n-2)!} : \varphi(w, \bar{w})^{n-2} : \\ &\quad + \frac{1}{(z-w)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} n : \partial\varphi(z)\varphi(w, \bar{w})^{n-1} : \\ &\sim \frac{\alpha^2}{8\pi g} \frac{\mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w \mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w})}{(z-w)}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

em que identificamos a forma das OPEs e concluímos que \mathcal{V}_α se comporta como campos primários, com dimensões holomórfica e antiholomórfica dadas por,

$$h(\alpha) = \bar{h}(\alpha) = \frac{\alpha^2}{8\pi g} \quad (4.72)$$

pois a OPE com \bar{T} tem a mesma forma. Para calcular produtos de operadores de vértice, usamos a seguinte relação (veja o apêndice 6.A em [6]),

$$: e^{a\varphi_1} :: e^{b\varphi_2} :=: e^{a\varphi_1 + b\varphi_2} : e^{ab\langle\varphi_1\varphi_2\rangle}, \quad (4.73)$$

com o qual obtemos,

$$\mathcal{V}_\alpha(z, \bar{z})\mathcal{V}_\beta(w, \bar{w}) \sim |z-w|^{2\alpha\beta/4\pi g} \mathcal{V}_{\alpha+\beta}(w, \bar{w}) + \dots \quad (4.74)$$

A restrição sobre os parâmetros α e β surgem da consideração do valor esperado do produto de operadores de vértice, isto é, de $\langle \mathcal{V}_\alpha(z, \bar{z}) \mathcal{V}_\beta(w, \bar{w}) \rangle$. Lembramos que a condição sobre a função de dois pontos ser não nula é de que as dimensões conformes dos campos sejam iguais. Similarmente, a restrição para o caso dos operadores de vértice é $\alpha\beta < 0$, o que leva a $\alpha = -\beta$, de forma que (4.74) fica,

$$\mathcal{V}_\alpha(z, \bar{z}) \mathcal{V}_{-\alpha}(w, \bar{w}) \sim |z - w|^{-2\alpha^2/4\pi g} + \dots \quad (4.75)$$

Podemos ver que os operadores de vértice fornecem uma base algébrica na teoria nas quais podemos construir o vácuo conforme e extrair as diversas quantidades fisicamente significativas.

4.3.3 O espaço de Fock

Para tratar os sistemas de campos precisamos entender o espaço de estados físicos associados em que vivem. Tal espaço é chamado de espaço de Fock. Começamos notando que a hamiltoniana H dada por (4.60) não depende de φ_0 , o que mostra que o autovalor de π_0 pode etiquetar os diferentes conjuntos de autoestados de H . Como π_0 comuta com os operadores de criação e aniquilação, possíveis estados excitados relacionados não alteram o valor de π_0 e o espaço de Fock criado é dependente de um parâmetro α , no qual é o autovalor contínuo relacionado a π_0 . Introduzindo o operador a_0 como,

$$a_0 = \frac{\pi_0}{\sqrt{4\pi g}}, \quad (4.76)$$

etiquetamos o vácuo pelo parâmetro α , i.e., $|\alpha\rangle$, de forma tal que α seja autoestado do operador a_0 ,

$$a_0 |\alpha\rangle = \bar{a}_0 |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (4.77)$$

As implicações sobre a energia podem ser vistas a partir tensor momento-energia, que é dado por,

$$\begin{aligned} T(z) &= -2\pi g : \partial\varphi(z) \partial\varphi(z) : \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} z^{-n-m-2} : a_n a_m : \end{aligned} \quad (4.78)$$

no qual foi usada a expansão em modos, tratada anteriormente. Podemos extrair os operadores L_n , de forma que obtemos,

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n-m} a_m, \quad (4.79)$$

e como procuramos pelas implicações na energia, e esta é proporcional a $L_0 + \bar{L}_0$, temos,

$$L_0 = \sum_{n>0} a_{-n} a_n + \frac{a_0^2}{2} \quad (4.80)$$

e similarmente para os modos antiholomórficos. Dessa forma, a hamiltoniana pode ser escrita como,

$$H = \frac{2\pi}{L}(L_0 + \bar{L}_0). \quad (4.81)$$

Das expressões (4.80) e (4.81), podemos ver que o vácuo $|\alpha\rangle$ tem dimensão conforme $\frac{\alpha^2}{8\pi g}$. Os estados no espaço de Fock são obtidos pela aplicação dos operadores de criação a_{-n} e \bar{a}_{-n} , para $n > 0$, isto é,

$$a_{-1}^{n_1} a_{-2}^{n_2} \dots \bar{a}_{-1}^{m_1} \bar{a}_{-2}^{m_2} \dots |\alpha\rangle, \quad (4.82)$$

sendo $(n_i, m_j \geq 0)$. Esses estados são autoestados de L_0 com as dimensões conformes dadas por,

$$h = \frac{\alpha^2}{8\pi g} + \sum_j j n_j \quad \bar{h} = \frac{\alpha^2}{8\pi g} + \sum_j j m_j \quad (4.83)$$

Pode ser mostrado que cada estado de vácuo $|\alpha\rangle$ pode ser obtido da aplicação do operador de vértice anteriormente considerado no vácuo absoluto $|0\rangle$, isto é,

$$|\alpha\rangle = \mathcal{V}_\alpha(0) |0\rangle, \quad (4.84)$$

o que reforça a importância do operador de vértice e explicita seu papel numa teoria de campos conformes. A seguir, vamos tratar de outras condições de contorno para campos bosônicos.

4.3.4 Condição de contorno antiperiódica

No início do estudo do bóson livre, consideramos uma condição de fronteira periódica. Agora, vamos considerar uma condição antiperiódica, isto é, $\varphi(x+L, t) = -\varphi(x, t)$. Essa condição de fronteira implica que ao mapear o campo φ (recobrimento duplo do cilindro) ao plano, estamos definindo a teoria em um par de folhas de Riemann, pois precisamos realizar duas voltas em torno do cilindro para obter o mesmo valor do campo. De tal condição de fronteira, o interesse recai nas consequências sobre a densidade de energia de vácuo. A expansão em modos é mantida, com o adendo de que o modo zero agora desaparece e o índice de soma n deve tomar valores semi-inteiros. As relações de comutação dos operadores de criação e aniquilação continuam as mesmas. Da condição de fronteira, temos que o estado fundamental é duplamente degenerado, ou seja, para cada folha de Riemann temos os estados de vácuo $|0_+\rangle$ e $|0_-\rangle$, os quais são autovetores de um certo operador que leva o campo φ em $-\varphi$.

Prossequimos com o cálculo da função de dois pontos $\langle \partial\varphi(z)\partial\varphi(w) \rangle$. Da expansão em modos obtemos,

$$\langle \varphi(z)\partial\varphi(w) \rangle = \sum_{m, n \neq 0} \frac{1}{n} \langle a_n a_m \rangle z^{-n} w^{-m-1}, \quad (4.85)$$

em que consideramos $g = 1/4\pi$. Sendo $\langle a_n a_m \rangle = n\delta_{n+m}$, se $n > 0$, e zero, caso contrário, temos,

$$\langle \varphi(z) \partial \varphi(w) \rangle = \frac{1}{w} \sum_{n>0} \left(\frac{w}{z} \right)^n. \quad (4.86)$$

Até então, as condições de fronteira não foram usadas. Para o caso periódico, n toma valores positivos inteiros, de forma que obtemos,

$$\langle \varphi(z) \partial \varphi(w) \rangle = \frac{1}{w} \frac{w/z}{(1 - w/z)} = \frac{1}{z - w}, \quad (4.87)$$

no qual podemos derivar em relação a z , o que resulta em,

$$\langle \partial \varphi(z) \partial \varphi(w) \rangle = -\frac{1}{(z - w)^2}. \quad (4.88)$$

Notamos que o resultado obtido é o mesmo daquele calculado usando o método de integrais de caminho. No caso antiperiódico, como dito, o índice de soma n toma valores semi inteiros, iniciando em $n = \frac{1}{2}$. O valor esperado no vácuo é tomado em um dos vácuos ou em alguma combinação deles, resultando para a função de dois pontos em,

$$\begin{aligned} \langle \varphi(z) \partial \varphi(w) \rangle &= \frac{1}{w} \left(\frac{w}{z} \right)^{1/2} \frac{1}{(1 - w/z)} \\ &= \sqrt{\frac{z}{w}} \frac{1}{(z - w)}, \end{aligned} \quad (4.89)$$

de forma que podemos derivar em z e obter,

$$\langle \partial \varphi(z) \partial \varphi(w) \rangle = -\frac{1}{2} \left[\frac{(z/w)^{1/2} + (w/z)^{1/2}}{(z - w)^2} \right]. \quad (4.90)$$

No limite em que $z \rightarrow w$, as funções de correlação para as condições periódicas e anti-periódicas coincidem, o que significa que a curtas distâncias o comportamento da teoria não é influenciado pelas condições de fronteira. Já para os valores esperados que envolvem derivadas dos campos, isso não é necessariamente verdade, dessa forma obteremos, por exemplo, valores distintos para o tensor momento-energia.

A densidade de energia do vácuo pode ser calculada a partir da seguinte expressão,

$$\langle T(z) \rangle = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\langle \partial \varphi(z + \epsilon) \partial \varphi(z) \rangle + \frac{1}{\epsilon^2} \right), \quad (4.91)$$

em que para o caso periódico no plano, usando (4.88), temos $\langle T(z) \rangle = 0$. Já para o caso antiperiódico, usando (4.90), resulta em,

$$\langle T(z) \rangle = \frac{1}{16z^2}. \quad (4.92)$$

Podemos identificar L_0 na expansão em modos do tensor momento-energia como sendo o coeficiente de $\frac{1}{z^2}$, no qual esse fator não nulo do valor esperado implica um termo constante em L_0 , isto é,

$$L_0 = \sum_{n>0} a_{-n} a_n + \frac{1}{16}. \quad (4.93)$$

No cilindro, podemos usar a equação (3.136) que relaciona o tensor momento-energia em ambos os cenários, isto é,

$$T_{\text{cilindro}}(w) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left[T_{\text{plano}}(z)z^2 - \frac{c}{24} \right], \quad (4.94)$$

no qual, em termos de valores esperados no vácuo encontramos,

$$\langle T_{\text{cilindro}} \rangle = \begin{cases} -\frac{1}{24} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 & \text{caso periódico} \\ \frac{1}{48} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 & \text{caso antiperiódico} \end{cases} \quad (4.95)$$

onde podemos usar esses resultados para fixar as constantes adicionadas ao expressar a hamiltoniana em termos dos modos da expansão no cilindro. Sendo a hamiltoniana,

$$H = \frac{2\pi}{L} (L_{0\text{cilindro}} + \bar{L}_{0\text{cilindro}}) \quad (4.96)$$

logo temos,

$$\begin{aligned} L_{0\text{cilindro}} &= \sum_{n>0} a_{-n}a_n - \frac{1}{24} && \text{caso periódico} \\ L_{0\text{cilindro}} &= \sum_{n>0} a_{-n}a_n + \frac{1}{48} && \text{caso antiperiódico} \end{aligned} \quad (4.97)$$

Tal resultado mostra explicitamente que a energia de vácuo é influenciada pelo tipo de fronteira, embora a curta distância, a fronteira não influencie no comportamento das funções de correlação.

4.3.5 O bóson compacto

Uma outra condição de fronteira pode ser considerada no estudo do campo bosônico, usando a invariância por translações $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi R$, onde R é uma constante, o que traz para φ uma característica de variável angular. Como consequência, o momento π_0 perde a arbitrariedade, que no caso, deve ser um múltiplo inteiro de $1/R$, pois caso não o seja, o operador de vértice \mathcal{V}_α não é mais bem definido. A invariância translacional leva a seguinte condição de fronteira,

$$\varphi(x + L, t) = \varphi(x, t) + 2\pi m R, \quad (4.98)$$

onde m é o número de voltas que φ realiza no cilindro. Tais modificações geram o novo campo φ expandido em modos,

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 + \frac{n}{gRL}t + \frac{2\pi Rm}{L}x + \frac{i}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \left(a_k e^{2\pi i k(x-t)/L} - \bar{a}_{-k} e^{2\pi i k(x+t)/L} \right). \quad (4.99)$$

Em termos das coordenadas complexas,

$$\begin{aligned} t &= -\frac{iL}{4\pi} (\ln z + \ln \bar{z}), \\ x &= \frac{iL}{4\pi} (\ln z - \ln \bar{z}), \end{aligned} \quad (4.100)$$

podemos reescrever o campo,

$$\varphi(z, \bar{z}) = \varphi_0 - i \left(\frac{n}{4\pi g R} + \frac{1}{2} m R \right) \ln z - i \left(\frac{n}{4\pi g R} - \frac{1}{2} m R \right) \ln \bar{z} + \frac{i}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} (a_k z^{-k} + \bar{a}_k \bar{z}^{-k}). \quad (4.101)$$

A derivada holomórfica $\partial \equiv \partial_z$ quando aplicada, resulta em,

$$i\partial\varphi(z) = \left(\frac{n}{4\pi g R} - \frac{1}{2} m R \right) \frac{1}{z} + \frac{1}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{k \neq 0} a_k z^{-k-1}, \quad (4.102)$$

e os operadores L_0 e \bar{L}_0 tomam a seguinte forma,

$$\begin{aligned} L_0 &= \sum_{n>0} a_{-n} a_n + 2\pi g \left(\frac{n}{4\pi g R} + \frac{1}{2} m R \right)^2, \\ \bar{L}_0 &= \sum_{n>0} \bar{a}_{-n} \bar{a}_n + 2\pi g \left(\frac{n}{4\pi g R} - \frac{1}{2} m R \right)^2. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Quando mapeados no plano, as configurações para o campo assumem $m \neq 0$, os quais são vórtices centrados na origem. Podemos definir um operador que gera tais configurações indexados pelo momento n e o número de volta m . O operador tem a dimensão conforme dado por,

$$h_{n,m} = 2\pi g \left(\frac{n}{4\pi g R} + \frac{1}{2} m R \right)^2. \quad (4.104)$$

Portanto, o vácuo é etiquetado por $|n, m\rangle$, com dimensão conforme $h_{n,m}$. Tal etiqueta no vácuo é, em termos dos estados, o de maior peso.

4.4 O férmion livre

Outro sistema de interesse é o campo fermiônico livre, o qual será analisado de maneira similar ao caso do bóson livre.

4.4.1 Quantização canônica no cilindro

Para usar a quantização radial relembramos a ação do férmion livre de Majorana,

$$S = \frac{1}{2} g \int d^2x \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi. \quad (4.105)$$

O campo holomórfico e antiholomórfico são dois componentes do espinor $\Psi = (\psi, \bar{\psi})$. No capítulo 2 encontramos que a OPE dos campos fermiônicos é dada por,

$$\psi(z)\psi(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad (4.106)$$

onde assumimos novamente que $g = 1/4\pi$. Logo, o tensor momento-energia holomórfico é dado por,

$$T(z) = -\frac{1}{2} : \psi(z) \partial \psi(z) : \quad (4.107)$$

em que a carga central da teoria é igual a $1/2$ e dimensão conforme $h = 1/2$. A expansão em modos de Fourier para $t = 0$ toma a forma,

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \sum_k b_k e^{2\pi i k x / L}, \quad (4.108)$$

onde os operadores b_k obedecem as relações de anticomutação,

$$\{b_k, b_q\} = \delta_{k+q,0}. \quad (4.109)$$

Analogamente, vamos considerar dois tipos de condições de fronteira para os campos fermiônicos em $t = 0$. A condição periódica, ou também conhecida como condição de Ramond (R) e a condição antiperiódica, denominada como condição de Neveu-Schwarz (NS). São elas,

$$\begin{aligned} \psi(x + 2\pi L) &= \psi(x), & (R) \\ \psi(x + 2\pi L) &= -\psi(x). & (NS) \end{aligned} \quad (4.110)$$

No caso periódico (R) o índice de soma k assume valores inteiros, enquanto que no caso antiperiódico (NS), o índice assume também valores semi-inteiros, isto é, ($k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$). Considerando a quantização numa rede, onde o espaçamento entre os nós da rede vai a zero, a hamiltoniana do férmion livre pode ser escrita como,

$$H = \sum_{k>0} \omega_k b_{-k} b_k + E_0, \quad (4.111)$$

onde E_0 é a energia do vácuo, e a frequência é dada por $\omega_k = \frac{2\pi|k|}{L}$. A evolução temporal do operador b_k no formalismo de Heisenberg é dado por,

$$b_k(t) = b_k(0) e^{-2\pi i k t / L}. \quad (4.112)$$

Assim, a expansão em modos para $t > 0$ fica,

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \sum_k b_k e^{2\pi k(\tau - ix) / L}, \quad (4.113)$$

onde foi introduzido o tempo euclidiano $\tau \rightarrow it$.

No setor R existe um modo zero b_0 que leva a uma degenerescência do vácuo $|0\rangle$, o qual é aniquilado por b_k para $k > 0$. Tal vácuo degenerado $b_0 |0\rangle$ também é aniquilado pelos b_k . Pelas relações de anticomutação $b_0^2 = \frac{1}{2}$.

4.4.2 Mapeamento no plano

O cilindro é mapeado no plano usando a coordenada $z = e^{2\pi\chi/L}$, em que $\chi = \tau - ix$. Como o campo ψ tem dimensão conforme $\frac{1}{2}$, o mapeamento influencia no campo (ao contrário do campo bosônico), isto é,

$$\begin{aligned} \psi_{\text{cilindro}}(\chi) \rightarrow \psi_{\text{cilindro}}(z) &= \left(\frac{dz}{d\chi}\right)^{1/2} \psi_{\text{plano}}(z) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi z}{L}} \psi_{\text{plano}}(z). \end{aligned} \quad (4.114)$$

No plano, o campo ψ assume a seguinte expansão,

$$\psi(z) = \sum_k b_k z^{-k-1/2}. \quad (4.115)$$

A mudança no campo ψ gerada pelo mapeamento entre o plano e o cilindro muda o significado dos dois tipos de condições de fronteira (periódica e antiperiódica) quando z é considerado ao redor da origem. A condição (NS) , antes antiperiódica, agora corresponde a um campo periódico, onde o índice de soma k assume $\mathbb{Z} + 1/2$. Por sua vez, a condição (R) , antes periódica, passa a ser para um campo antiperiódico, isto é, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \psi(e^{2\pi i} z) &= -\psi(z), & (R) \\ \psi(e^{2\pi i} z) &= \psi(z). & (NS) \end{aligned} \quad (4.116)$$

Como foi para o caso dos bósons na condição antiperiódica, o campo ψ na condição (R) é definido em duas folhas de Riemann. Vamos calcular as funções de dois pontos para ambas as condições e explicitar a diferença. Para o setor NS , a partir da expansão em modos, temos,

$$\begin{aligned} \langle \psi(z)\psi(w) \rangle &= \sum_{k,q \in \mathbb{Z} + 1/2} z^{-k-1/2} w^{-q-1/2} \langle b_k b_q \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z} + 1/2, k > 0} z^{-k-1/2} w^{k-1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \left(\frac{w}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{z-w}, \end{aligned} \quad (4.117)$$

onde usamos que $\langle b_k b_q \rangle = \delta_{k+q,0}$, e n assume valores inteiros positivos. Esse resultado está de acordo com o calculado anteriormente no capítulo 2. Já no setor (R) encontramos,

$$\begin{aligned} \langle \psi(z)\psi(w) \rangle &= \sum_{k,q \in \mathbb{Z}} z^{-k-1/2} w^{-q-1/2} \langle b_k b_q \rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{zw}} + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k-1/2} w^{k-1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{zw}} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^k \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{zw}} \frac{z+w}{z-w} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{z/w} + \sqrt{w/z}}{z-w} \end{aligned} \quad (4.118)$$

em que no limite quem $w \rightarrow z$, coincide com o resultado encontrado para o setor (NS) . O tensor momento-energia deve ser calculado a partir de,

$$\langle T(z) \rangle = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\langle \psi(z+\epsilon)\partial\psi(z) \rangle + \frac{1}{\epsilon^2} \right). \quad (4.119)$$

No setor R , temos,

$$\begin{aligned}\langle T(z) \rangle &= - \lim_{w \rightarrow z} \frac{1}{4} \partial_w \left(\frac{\sqrt{z/w} + \sqrt{w/z}}{z-w} \right) + \frac{1}{2(z-w)^2} \\ &= \frac{1}{16z^2},\end{aligned}\tag{4.120}$$

e para o setor NS temos $\langle T(z) \rangle = 0$. Como no caso bosônico, notamos que as consequências sobre a densidade de energia do vácuo são as mesmas, ou seja, para a condição periódica temos uma densidade de energia nula, enquanto que para a condição antiperiódica, temos $\frac{1}{16z^2}$.

4.4.3 Energias de vácuo

Agora vamos calcular o que e como muda a energia do vácuo para cada condição. Iniciamos desenvolvendo a expressão para os operadores L_n em termos dos operadores da expansão em modos b_k . Para o tensor momento-energia no plano temos,

$$\begin{aligned}T_{\text{plano}}(z) &= \frac{1}{2} \sum_{k,q} \left(k + \frac{1}{2} \right) z^{-q-1/2} z^{-k-3/2} : b_q b_k : \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n,k} \left(k + \frac{1}{2} \right) z^{-n-2} : b_{n-k} b_k :\end{aligned}\tag{4.121}$$

no qual podemos extrair para L_n ,

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_k \left(k + \frac{1}{2} \right) : b_{n-k} b_k : \tag{4.122}$$

Se fixamos a constante adicionada a L_0 a partir da densidade de energia do vácuo, como fizemos no caso bosônico, encontramos que,

$$\begin{aligned}L_0 &= \sum_{k>0} k b_{-k} b_k, & \text{(NS)} \\ L_0 &= \sum_{k>0} k b_{-k} b_k + \frac{1}{16}, & \text{(R)}\end{aligned}\tag{4.123}$$

onde $(k \in \mathbb{Z} + 1/2)$ no setor NS e $(k \in \mathbb{Z})$ no setor R . A partir da relação entre o tensor momento-energia no plano e no cilindro dado pela equação (3.136), obtemos os seguintes valores esperados,

$$\langle T_{\text{cilindro}} \rangle = \begin{cases} -\frac{1}{48} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 & \text{(NS)} \\ \frac{1}{24} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 & \text{(R)} \end{cases}\tag{4.124}$$

onde no setor NS $\langle T_{\text{plano}} \rangle = 0$, e para o setor R temos $\langle T_{\text{plano}} \rangle = \frac{1}{16z^2}$. Podemos escrever a hamiltoniana como,

$$H = \frac{2\pi}{L} \left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \right).\tag{4.125}$$

A constante $c/12$ garante que a energia de vácuo na hamiltoniana se anula quando $L \rightarrow \infty$ no setor NS . Podemos separar as contribuições na hamiltoniana em relação as partes holomórficas e antiholomórficas. Para a parte holomórfica temos,

$$H_H = \frac{2\pi}{L} \left(L_0 - \frac{c}{24} \right), \quad (4.126)$$

e para a parte antiholomórfica temos,

$$H_A = \frac{2\pi}{L} \left(\bar{L}_0 - \frac{c}{24} \right). \quad (4.127)$$

Para saber explicitamente a energia de vácuo E_0 comparamos a hamiltoniana H_H com a hamiltoniana dada em (4.111), de onde encontramos,

$$\frac{L}{2\pi} E_0 = \begin{cases} -\frac{1}{48} & (\text{NS}) \\ \frac{1}{24} & (\text{R}) \end{cases} \quad (4.128)$$

Se compararmos aos resultados para o campo bosônico, vemos que em relação aos resultados para férmions, as condições periódicas e antiperiódicas estão invertidas. Finalizamos aqui a análise de dois sistemas simples, porém importantes. Seguimos com a análise da álgebra.

4.5 Um novo ordenamento normal

Até então, tratamos de produtos ordenados normalmente somente para uma categoria específica de campos livres. Vimos que considerando a expansão em modos, o sentido do ordenamento normal é o mesmo que o usual, ou seja, os operadores que aniquilam o vácuo são ordenados a direita. Entretanto, isso não é válido para campos não livres (campos nos quais a OPE consigo mesmo contém mais de um termo singular). Precisamos definir, então, um novo ordenamento normal que comporte todos os tipos de campos. Para distinguir do ordenamento utilizado anteriormente, usaremos a notação $(AB)(z)$ para o ordenamento de A e B . Explicitamente, se a OPE de A com B é da forma,

$$A(z)B(w) = \sum_{n=-\infty}^N \frac{\{AB\}_n(w)}{(z-w)^n}, \quad (4.129)$$

onde N é algum inteiro positivo, temos então para o novo ordenamento normal,

$$(AB)(w) = \{AB\}_0(w). \quad (4.130)$$

Atrelado a isso, definimos a contração generalizada da seguinte forma,

$$\overline{A(z)B(w)} \equiv \sum_{n=1}^N \frac{\{AB\}_n(w)}{(z-w)^n} \quad (4.131)$$

a qual inclui todos os termos singulares da OPE. Logo, o ordenamento normal pode ser reescrito como,

$$(AB)(w) = \lim_{z \rightarrow w} \left[A(z)B(w) - \overline{A(z)B(w)} \right], \quad (4.132)$$

e a OPE de $A(z)$ com $B(w)$ resulta em,

$$A(z)B(w) = \overline{A(z)B(w)} + (A(z)B(w)), \quad (4.133)$$

onde $(A(z)B(w))$ é válido para os termos regulares, os quais podem ser extraídos de uma expansão por Taylor de $A(z)$ em torno de w ,

$$(A(z)B(w)) = \sum_{k \geq 0} \frac{(z-w)^k}{k!} (\partial^k AB)(w). \quad (4.134)$$

Podemos representar de maneira diferente usando a integral de caminho, isto é,

$$(AB)(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_w \frac{dz}{z-w} A(z)B(w). \quad (4.135)$$

Podemos checar a equivalência de tal representação. Substituímos a OPE (4.129) em (4.135),

$$\begin{aligned} (AB)(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w \frac{dz}{z-w} \sum_{n=-\infty}^N \frac{\{AB\}_n(w)}{(z-w)^n} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^N \oint_w dz \frac{\{AB\}_n(w)}{(z-w)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^N \{AB\}_n(w) 2\pi i \delta_{n+1,1} \\ &= \{AB\}_0(w). \end{aligned} \quad (4.136)$$

Até então, todas as expansões feitas em séries de Laurent foram em torno de zero, mas podemos fazer em torno de um ponto qualquer w , de forma que,

$$\phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z-w)^{-n-h} \phi_n(w), \quad (4.137)$$

e para o tensor momento-energia, temos,

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z-w)^{-n-2} L_n(w), \quad (4.138)$$

ou equivalentemente, para os operadores L_n , obtemos,

$$L_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz (z-w)^{n+1} T(z). \quad (4.139)$$

De forma que usando tais expansões, podemos calcular a OPE de $T(z)$ com um campo arbitrário $A(w)$,

$$T(z)A(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z-w)^{-n-2} (L_n A)(w), \quad (4.140)$$

o que define o campo $(L_n A)$. Comparando tal expressão com a seguinte (que vem da OPE dada em (4.133)),

$$T(z)A(w) = \dots \frac{h_A A(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial A(w)}{(z-w)} + (TA)(w) + (z-w)(\partial TA)(w) + \dots \quad (4.141)$$

identificamos,

$$\begin{aligned} (L_0 A)(w) &= h_A A(w), \\ (L_{-1} A)(w) &= \partial A(w), \\ (L_{-n-2} A)(w) &= \frac{1}{n!} (\partial^n T A)(w). \end{aligned} \quad (4.142)$$

Em particular, se A é a identidade \mathbb{I} , temos,

$$(L_{-n-2} \mathbb{I})(w) = \frac{1}{n!} \partial^n T(w). \quad (4.143)$$

O interesse recai na representação em integral de contornos (4.135), no qual procuramos expressar tal representação em uma expansão em modos. Podemos rearranjar a integral em dois contornos, isto é,

$$\oint_w \frac{dz}{z-w} A(z)B(w) = \oint_{|z|>|w|} \frac{dz}{z-w} A(z)B(w) - \oint_{|z|<|w|} \frac{dz}{z-w} B(w)A(z). \quad (4.144)$$

No primeiro termo do lado direito da equação acima, vamos considerar um ponto intermediário x , de forma que $|z| > |x| > |w|$, ao redor do qual podemos expandir $A(z)$ e $B(w)$ da seguinte forma,

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_n (z-x)^{-n-h_A} A_n(x), \\ B(w) &= \sum_p (w-x)^{-p-h_B} B_p(x). \end{aligned} \quad (4.145)$$

Sendo $z-w = z-x - (w-x)$, temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-w} &= \frac{1}{z-x - (w-x)} \\ &= \frac{1}{(z-x)} \frac{1}{1 - \frac{(w-x)}{(z-x)}} \\ &= \frac{1}{(z-x)} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(w-x)}{(z-x)} \right]^l \\ &= \sum_{l \geq 0} \frac{(w-x)^l}{(z-x)^{l+1}}. \end{aligned} \quad (4.146)$$

Voltando com estes resultados na integral,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|>|w|} \frac{dz}{z-w} A(z)B(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz \sum_{n,p} \sum_{l \geq 0} (w-x)^{l-p-h_B} (z-x)^{-n-h_A-l-1} A_n(x) B_p(x) \\ &= \sum_p \sum_{n \leq -h_A} (w-x)^{-n-p-h_A-h_B} A_n(x) B_p(x), \end{aligned} \quad (4.147)$$

onde a integral da primeira linha é $2\pi i \delta_{n+h_A+l,0}$, e usando que $l \geq 0$, chegamos a $n \leq -h_A$. De maneira similar, podemos calcular o segundo termo. Sob a expansão,

$$\frac{1}{z-w} = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(z-x)^l}{(w-x)^{l+1}}, \quad (4.148)$$

temos para o segundo termo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|<|w|} \frac{dz}{z-w} B(w) A(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n,p} \sum_{l \geq 0} (w-x)^{-l-1-p-h_B} (z-x)^{l-n-h_A} B_p(x) A_n(x) \\ &= \sum_p \sum_{n > -h_A} (w-x)^{-n-p-h_A-h_B} B_p(x) A_n(x), \end{aligned} \quad (4.149)$$

onde a integral é dada por $2\pi i \delta_{l-n-h_A,-1}$. Definindo os modos $(AB)_n$ por,

$$(AB)(z) = \sum_n z^{-n-h_A-h_B} (AB)_n, \quad (4.150)$$

podemos juntar os resultados para as integrais e chegar em,

$$(AB)_m = \sum_{n \leq -h_A} A_n B_{m-n} + \sum_{n > -h_A} B_{m-n} A_n. \quad (4.151)$$

Notemos que o resultado acima explicita a não comutatividade do novo ordenamento normal, pois se trocarmos A com B , ou seja, considerar $(BA)(z)$, o resultado altera, em geral.

4.6 A álgebra de operadores e as famílias conformes

Nas seções anteriores deste capítulo, estabelecemos as ferramentas necessárias para entender e construir estruturalmente os campos e os estados de uma teoria quântica de campos conformes. Nesta seção vamos desenvolver como podemos ver a teoria de campos conformes a partir de uma perspectiva estrutural.

4.6.1 Campos descendentes

O estado assintótico $|h\rangle = \phi(0) |0\rangle$ é criado por um campo primário de dimensão conforme h aplicado no estado de vácuo $|0\rangle$, o qual pode ser visto como o ponto inicial de infinitos estados descendentes. Cada estado descendente pode ser entendido como a aplicação de um campo descendente no vácuo. Tanto o estado $|h\rangle$ quanto seus descendentes transformam entre si quando submetidos a uma transformação conforme. Sendo o estado descendente dado por,

$$L_{-n} |h\rangle = L_{-n} \phi(0) |0\rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{1-n} T(z) \phi(0) |0\rangle. \quad (4.152)$$

Podemos usar a OPE dada em (4.140) e identificar que o estado descendente acima é simplesmente $(L_{-n}\phi)(0) |0\rangle$. Logo, estados descendentes devem ser obtidos a partir da

aplicação dos operadores da parte regular da OPE de $T(z)$ com $\phi(0)$ no vácuo. Definimos então, o campo descendente associado ao estado $L_{-n}|h\rangle$ como,

$$\phi^{(-n)}(w) \equiv (L_{-n}\phi)(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_w \frac{1}{(z-w)^{n-1}} T(z)\phi(w), \quad (4.153)$$

os quais são os campos que aparecem em (4.140), sendo $A(w) = \phi(w)$. As funções de correlação nos elucidam sobre as propriedades físicas de tais campos, as quais podem ser calculadas a partir do campo primário associado. Considerando a função de correlação,

$$\langle (L_{-n}\phi)(w)Y \rangle, \quad (4.154)$$

onde Y é uma coleção de campos primários $\phi(w_1)\dots\phi(w_N)$ com dimensões conformes h_j . Vamos calcular esta função de correlação considerando a definição de campo descendente dada (4.153), no qual o contorno engloba somente w , excluindo os pontos w_j dos campos primários. Aplicamos o teorema dos resíduos no contorno invertido, isto é, somando as contribuições do polos em w_j ,

$$\begin{aligned} \langle \phi^{(-n)}(w)Y \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz (z-w)^{1-n} \langle T(z)\phi(w)Y \rangle \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\{w_j\}} dz (z-w)^{1-n} \sum_j \left\{ \frac{1}{z-w_j} \partial_{w_j} + \frac{h_j}{(z-w_j)^2} \right\} \langle \phi(w)Y \rangle \\ &\equiv \mathbb{L}_{-n} \langle \phi(w)Y \rangle, \end{aligned} \quad (4.155)$$

onde usamos a OPE entre $T(z)$ e o campo $\phi(w)$ calculada anteriormente a partir das identidades de Ward. Definimos o operador diferencial \mathbb{L}_{-n} como,

$$\mathbb{L}_{-n} = \sum_j \left\{ \frac{(n-1)h_j}{(w_j-w)^n} - \frac{1}{(w_j-w)^{n-1}} \partial_{w_j} \right\}. \quad (4.156)$$

O resultado encontrado (4.155) nos mostra que calcular uma função de correlação de um campo descendente se reduz a aplicar um operador diferencial numa função de correlação de campos primários. Para estados mais complicados obtidos a partir de sucessivas aplicações de L_{-k} no estado de vácuo, devemos construir os campos descendentes de forma recursiva, isto é, por exemplo,

$$\begin{aligned} \phi^{(-k,-n)}(w) &= (L_{-k}L_{-n}\phi)(w) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz (z-w)^{1-k} T(z)(L_{-n}\phi)(w), \end{aligned} \quad (4.157)$$

e segue assim sucessivamente. Em geral, obtemos o seguinte resultado,

$$\langle \phi^{(-k_1, \dots, -k_n)}(w)Y \rangle = \mathbb{L}_{-k_1} \dots \mathbb{L}_{-k_n} \langle \phi(w)Y \rangle, \quad (4.158)$$

o que nos faz concluir (e reforçar) que funções de correlação com campos descendentes são reduzidas a funções de correlação de somente campos primários.

4.6.2 Famílias conformes

O conjunto de um campo primário ϕ e todos os seus descendentes é chamado de uma família conforme, o qual pode ser denotado por $[\phi]$. Como dito anteriormente, o campo primário e seus descendentes transformam entre si quando sujeitos a transformações conformes, o que significa que em uma OPE entre o tensor momento-energia $T(z)$ com qualquer membro da família, teremos somente termos de outros membros da mesma família. Podemos calcular a OPE entre $T(z)$ e o campo descendente $\phi^{(-n)}$. Pela aplicação direta das definições das seções anteriores, temos,

$$T(z)\phi^{(-n)}(w) = \sum_{k \geq 0} (z-w)^{k-2} (L_{-k}\phi^{(-n)})(w) + \sum_{k > 0} \frac{1}{(z-w)^{k+2}} (L_k\phi^{(-n)})(w). \quad (4.159)$$

O primeiro termo contém mais campos descendentes $\phi^{(-k,-n)}$ da mesma família. Já o segundo termo possui os termos mais singulares (em questão da ordem dos polos). Podemos calcular usando a OPE entre $T(z)$ consigo mesmo.

$$\begin{aligned} T(z)\phi^{(-n)}(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w dx \frac{1}{(x-w)^{n-1}} T(z)T(x)\phi(w) \\ &\sim \frac{1}{2\pi i} \oint_w dx \frac{1}{(x-w)^{n-1}} \left\{ \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(x)}{(z-x)^2} + \frac{\partial T(x)}{(z-w)} \right\} \phi(w), \end{aligned} \quad (4.160)$$

onde podemos usar a seguinte identidade,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_w \frac{dx}{(x-w)^n} \frac{F(x)}{(z-x)^m} = \frac{(n+m-2)!}{(n-1)!(m-1)!} \frac{F(w)}{(z-w)^{n+m-1}}, \quad (4.161)$$

e também a seguinte relação,

$$T(z)\phi(w) = \sum_{l=0}^{\infty} (z-w)^{l-2} \phi^{(-l)}(w), \quad (4.162)$$

no cálculo da OPE e chegamos a,

$$\begin{aligned} T(z)\phi^{(-n)}(w) &= \frac{cn(n^2-1)/12}{(z-w)^{n+2}} \phi(w) \\ &\quad + \oint_w dx \frac{1}{(x-w)^{n+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \phi^{(-l)}(w) \left\{ \frac{2(x-w)^{l-2}}{(z-w)^2} + \frac{(l-2)(x-w)^{l-3}}{z-w} \right\} \\ &= \frac{cn(n^2-1)/12}{(z-w)^{n+2}} \phi(w) + \sum_{l=0}^{n+1} \frac{2n-l}{(z-w)^{n+2-l}} \phi^{(-l)}(w) \\ &= \frac{cn(n^2-1)/12}{(z-w)^{n+2}} \phi(w) + \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{(z-w)^{k+2}} \phi^{(k-n)}(w) + \sum_{k \geq 0} (z-w)^{k-2} \phi^{(-k,-n)}(w), \end{aligned} \quad (4.163)$$

onde o índice de soma foi redefinido na passagem da penúltima para a última linha. Os campos descendentes de um campo primário são denominados como campos secundários. Num mapeamento conforme $z \rightarrow f(z)$, um campo secundário $A(z)$ transforma como,

$$A(z) \rightarrow \left(\frac{df}{dz} \right)^{h'} A(f(z)) + \text{termos extras}, \quad (4.164)$$

onde $h' = h + n$ e n sendo um inteiro positivo para um campo descendente de um primário de dimensão h . Os termos extras são singularidades (em termos de polos) com ordem maior que dois na OPE de $T(z)$ com um campo $A(w)$.

4.6.3 Álgebra de operadores

O objetivo principal de uma teoria de campos é calcular as funções de correlação, pois de certa maneira, são as quantidades físicas mensuráveis. Até então, vimos que a covariância conforme implica numa forma fechada das funções de dois e três pontos. No entanto, não é suficiente para fixar os coeficientes da função de três pontos C_{ijk} , o que se faz necessário a inserção de quantidades dinâmicas para calcular os coeficientes. É necessário, assim, determinar todos os termos de uma OPE, incluindo os termos regulares, para então descobrir todas as funções de correlação. Feito isso, podemos dizer que a teoria está resolvida. Logo, o objeto matemático que resolve uma teoria de campos é a álgebra de operadores. De fato, se aplicamos a OPE completa nas funções de correlação podemos reduzi-las a funções de dois pontos, as quais são conhecidas. Esta seção tem por objetivo especificar a forma da álgebra de operadores, a fim de que nos indique quais são os elementos fixados pela invariância conforme e quais não o são. Iniciamos entendendo os coeficientes da função de dois pontos C_{12} . Sabemos do capítulo 2 que uma função de dois pontos com dimensões conformes diferentes é nula, no entanto, se são iguais temos a seguinte expressão,

$$\langle \phi_\alpha(w, \bar{w}) \phi_\beta(z, \bar{z}) \rangle = \frac{C_{\alpha\beta}}{(w-z)^{2h} (\bar{w}-\bar{z})^{2\bar{h}}}. \quad (4.165)$$

Desde que os coeficientes $C_{\alpha\beta}$ sejam simétricos, podemos escolher uma base da forma $C_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, de maneira que qualquer fator numérico pode ser absorvido na normalização. Então, as famílias conformes associadas aos diferentes ϕ_α s são ortogonais no sentido da função de dois pontos, o que significa que para transformações conformes globais, sempre é possível levar pontos w e z de uma função de correlação para $w = \infty$ e $z = 0$. Logo, os campos são assintóticos e a função de dois pontos se torna um produto bilinear no espaço de Hilbert.

$$\lim_{w, \bar{w} \rightarrow \infty} w^{2h} \bar{w}^{2\bar{h}} \langle \phi(w, \bar{w}) \phi'(0, 0) \rangle = \langle h|h' \rangle \langle \bar{h}|\bar{h}' \rangle. \quad (4.166)$$

A ortogonalidade do estado de maior peso implica na mesma condição para todos os descendentes dos dois campos em consideração.

Por invariância de escala, temos a imposição sobre a álgebra de operadores,

$$\phi_1(z, \bar{z}) \phi_2(0, 0) = \sum_p \sum_{\{k, \bar{k}\}} C_{12}^{p\{k, \bar{k}\}} z^{(h_p - h_1 - h_2 + K)} \bar{z}^{(-\bar{h}_p - \bar{h}_1 - \bar{h}_2 + \bar{K})} \phi_p^{\{k, \bar{k}\}}(0, 0), \quad (4.167)$$

onde $K = \sum_i k_i$, $\bar{K} = \sum_i \bar{k}_i$, e $\{k\}$ significa uma coleção de índices k_i . Podemos tomar o valor esperado desta quantidade com um terceiro campo primário, sendo $\phi_r(w, \bar{w})$ de

dimensões conformes h_r e \bar{h}_r . No lado esquerdo da equação, temos,

$$\begin{aligned} \langle \phi_r | \phi_1(z, \bar{z}) | \phi_2 \rangle &= \lim_{w, \bar{w} \rightarrow \infty} w^{2h} \bar{w}^{2\bar{h}} \langle \phi_r(w, \bar{w}) \phi_1(z, \bar{z}) \phi_2(0, 0) \rangle \\ &= \frac{C_{r12}}{z^{h_1+h_2-h_r} \bar{z}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_r}}. \end{aligned} \quad (4.168)$$

Já no lado da OPE, o único termo que contribui é $p \{k, \bar{k}\} = r \{0, 0\}$, devido a ortogonalidade dos campos. Podemos concluir que,

$$C^{p\{0,0\}} \equiv C_{12}^p = C_{p12}, \quad (4.169)$$

o que significa que o termo mais singular na álgebra de operadores é o coeficiente da função de três pontos. Como vimos, a função de correlação de campos descendentes são construídos a partir de funções de correlação de campos primários, logo, esperamos a seguinte relação para os coeficientes,

$$C^{p\{k, \bar{k}\}} = C_{12}^p \beta_{12}^{p\{k\}} \bar{\beta}_{12}^{p\{\bar{k}\}}, \quad (4.170)$$

o que significa que campos descendentes podem ser correlacionados a um terceiro campo somente se o campo primário está correlacionado. Por convenção, adotamos $\beta_{ij}^{p\{0\}} = 1$. Os outros coeficientes $\beta_{ij}^{p\{k\}}$ são determinados a partir da equação (4.167) ao impor que sob uma transformação conforme, ambos os lados sejam idênticos. Tais coeficientes são funções da carga central, bem como da dimensão conforme. Podemos considerar, a título de exemplo, o caso $h_1 = h_2 = h$. Aplicando a equação (4.167) no vácuo,

$$\phi_1(z, \bar{z}) |h, \bar{h}\rangle = \sum_p C_{p12} z^{h_p-2h} \bar{z}^{\bar{h}_p-2\bar{h}} \varphi(z) \bar{\varphi}(\bar{z}) |h_p, \bar{h}_p\rangle, \quad (4.171)$$

onde definimos o operador,

$$\varphi(z) = \sum_{\{k\}} z^K \beta_{12}^{p\{k\}} L_{-k_1} \dots L_{-k_N}, \quad (4.172)$$

No setor holomórfico, definimos o estado,

$$|z, h_p\rangle \equiv \varphi(z) |h_p\rangle, \quad (4.173)$$

o qual podemos expressar em termos de séries de potências, isto é,

$$|z, h_p\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} z^N |N, h_p\rangle. \quad (4.174)$$

O estado $|N, h_p\rangle$ é um estado descendente no nível N , ou seja,

$$L_0 |N, h_p\rangle = (h_p + N) |N, h_p\rangle. \quad (4.175)$$

Aplicando o operador L_n em ambos os lados da equação (4.171) encontramos para o lado esquerdo,

$$\begin{aligned} L_n \phi_1(z, \bar{z}) |h, \bar{h}\rangle &= [L_n, \phi_1(z, \bar{z})] |h, \bar{h}\rangle \\ &= \left(z^{n+1} \partial_z + (n+1)h \right) \phi_1(z, \bar{z}) |h, \bar{h}\rangle. \end{aligned} \quad (4.176)$$

O lado direito da equação fica,

$$\begin{aligned} \sum_p C_{p12} z^{h_p-2h} \bar{z}^{\bar{h}_p-2\bar{h}} L_n |z, h_p\rangle |\bar{z}, \bar{h}_p\rangle = \\ \sum_p C_{p12} z^{h_p-2h} \bar{z}^{\bar{h}_p-2\bar{h}} \left[(h_p + h(n-1))z^n + z^{n+1}\partial_z \right] |z, h_p\rangle |\bar{z}, \bar{h}_p\rangle. \end{aligned} \quad (4.177)$$

Usando a expansão (4.174), encontramos,

$$L_n |N+n, h_p\rangle = (h_p + (n-1)h + N) |N, h_p\rangle. \quad (4.178)$$

Tal relação juntamente com a álgebra de Virasoro, permite um cálculo recursivo de todos os estados $|N, h_p\rangle$ e assim, de todos os coeficientes $\beta^{p\{k\}}_{12}$.

Agora vamos calcular o coeficiente mais baixo. Sabemos que,

$$|1, h_p\rangle = \beta_{12}^{p\{1\}} L_{-1} |h_p\rangle. \quad (4.179)$$

Considerando L_1 na equação (4.178), obtemos,

$$L_1 |1, h_p\rangle = h_p |h_p\rangle = \beta_{12}^{p\{1\}} L_1 L_{-1} |h_p\rangle. \quad (4.180)$$

Como $L_1 L_{-1} |h_p\rangle = [L_1, L_{-1}] |h_p\rangle = 2h_p |h_p\rangle$, encontramos para o coeficiente,

$$\beta_{12}^{p\{1\}} = \frac{1}{2}. \quad (4.181)$$

No nível dois, temos,

$$|2, h_p\rangle = \beta_{12}^{p\{1,1\}} L_{-1}^2 |h_p\rangle + \beta_{12}^{p\{2\}} L_{-2} |h_p\rangle \quad (4.182)$$

sobre o vamos operar com L_1 e separadamente com L_2 , usando a equação (4.178). Precisamos, então, das seguintes relações da álgebra de Virasoro,

$$\begin{aligned} L_1 L_{-1}^2 &= L_{-1}^2 L_1 + 4L_{-1} L_0 - 2L_{-2}, \\ L_1 L_{-2} &= L_{-2} L_1 + 3L_{-1}, \\ L_2 L_{-1}^2 &= L_{-1}^2 L_2 + 6L_{-1} L_1 + 6L_0, \\ L_2 L_{-2} &= L_{-2} L_2 + 4L_0 + \frac{1}{2}c. \end{aligned} \quad (4.183)$$

Em notação matricial, obtemos o seguinte resultado,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(h_p + 1) \\ h_p + h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(2h_p + 1) & 3 \\ 6h_p & \frac{1}{2}c + 4h_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{12}^{p\{1,1\}} \\ \beta_{12}^{p\{2\}} \end{pmatrix}, \quad (4.184)$$

cuja solução é dada por,

$$\begin{aligned} \beta_{12}^{p\{1,1\}} &= \frac{c - 12h - 4h_p + ch_p + 8h_p^2}{4(c - 10h_p + 2ch_p + 16h_p^2)}, \\ \beta_{12}^{p\{2\}} &= \frac{2h - h_p + 4hh_p + h_p^2}{c - 10h_p + 2ch_p + 16h_p^2}. \end{aligned} \quad (4.185)$$

Ao considerar o nível N , existem $p(N)$ coeficientes $\beta_{12}^{p\{k\}}$ a serem encontrados, ou seja, precisamos $p(N)$ equações para tais coeficientes. Essas equações são obtidas a partir da consideração de $p(N)$ maneiras de levar o estado de maior peso $|N, h_p\rangle$ para o nível zero, fazendo uso da álgebra de Virasoro, com os operadores L_n , para $n > 0$.

4.6.4 Blocos conformes

Nesta seção vamos exemplificar o que foi dito anteriormente, que funções de correlação com mais campos podem ser reduzidas em termos de campos primários, isto é, vamos mostrar que a função de quatro pontos pode ser reduzida a função de três pontos (a qual vimos na seção anterior que se relaciona com os coeficientes da função de dois pontos). Em tal abordagem, vamos explicitar o que é fixado pela invariância conforme e o que não é. Considerando a função de quatro pontos,

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \phi_3(z_3, \bar{z}_3) \phi_4(z_4, \bar{z}_4) \rangle. \quad (4.186)$$

Tais funções dependem dos chamados raios anarmônicos, que são dados por,

$$x = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}, \quad \bar{x} = \frac{(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_4)}, \quad (4.187)$$

os quais são invariantes sob transformações conformes globais. Realizamos transformações a fim de que $z_4 = 0$, $z_1 = \infty$, $z_2 = 1$, e então $z_3 = x$. A função de correlação acima se associa a um elemento de matriz entre dois estados assintóticos do produto de dois campos, isto é,

$$\lim_{z_1, \bar{z}_1 \rightarrow \infty} z_1^{2h_1} \bar{z}_1^{2\bar{h}_1} \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(1, 1) \phi_3(x, \bar{x}) \phi_4(0, 0) \rangle, \quad (4.188)$$

onde podemos definir a seguinte função,

$$G_{34}^{21}(x, \bar{x}) = \langle h_1, \bar{h}_1 | \phi_2(1, 1) \phi_3(x, \bar{x}) | h_4, \bar{h}_4 \rangle. \quad (4.189)$$

É importante ressaltar que os índices da função acima possuem uma ordem específica e trocá-los altera a função. Usamos agora a álgebra de operadores (4.135) para reduzir os produtos na função de quatro pontos.

$$\phi_3(x, \bar{x}) \phi_4(0, 0) = \sum_p C_{34}^p x^{h_p - h_3 - h_4} \bar{x}^{\bar{h}_p - \bar{h}_3 - \bar{h}_4} \Psi_p(x, \bar{x} | 0, 0), \quad (4.190)$$

onde definimos que,

$$\Psi_p(x, \bar{x} | 0, 0) = \sum_{\{k, \bar{k}\}} \beta_{34}^{p\{k\}} \bar{\beta}_{34}^{p\{\bar{k}\}} x^K \bar{x}^{\bar{K}} \phi_p^{\{k, \bar{k}\}}(0, 0). \quad (4.191)$$

Assim, a função G_{34}^{21} pode ser escrita como,

$$G_{34}^{21}(x, \bar{x}) = \sum_p C_{34}^p C_{12}^p A_{34}^{21}(p | x, \bar{x}), \quad (4.192)$$

onde a função $A_{34}^{21}(p | x, \bar{x})$ é dada por,

$$A_{34}^{21}(p | x, \bar{x}) = \frac{1}{C_{12}^p} x^{h_p - h_3 - h_4} \bar{x}^{\bar{h}_p - \bar{h}_3 - \bar{h}_4} \langle h_1, \bar{h}_1 | \phi_2(1, 1) \Psi_p(x, \bar{x} | 0, 0) | 0 \rangle. \quad (4.193)$$

Escrevemos, então, a função de quatro pontos como soma sobre as famílias conformes intermediárias rotuladas por p . A fim de trazer uma familiaridade com uma teoria de

perturbações, onde temos o procedimento por diagramas, podemos entender que as famílias conformes correspondem a diferentes estados intermediários formados durante o espalhamento de dois campos, indo de $(0, x)$ a $(1, \infty)$. Podemos representar $A_{34}^{21}(p|x, \bar{x})$ por um diagrama de árvore com quatro pernas. Vamos nos referir a tais funções como ondas parciais. Diagramaticamente, representamos pela Fig.(6). A onda parcial pode ser

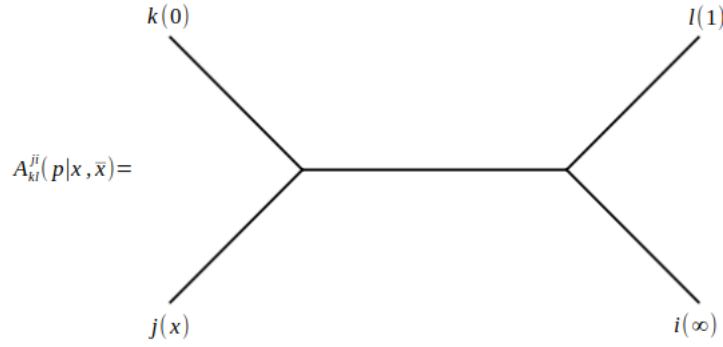


Figura 6 – Ondas parciais diagramaticamente

dividida explicitamente em parte holomórfica e antiholomórfica, da seguinte forma,

$$A_{34}^{21}(p|x, \bar{x}) = \mathcal{F}_{34}^{21}(p|x) \bar{\mathcal{F}}_{34}^{21}(p|\bar{x}), \quad (4.194)$$

onde temos que,

$$\mathcal{F}_{34}^{21}(p|x) = x^{h_p - h_3 - h_4} \sum_{\{k\}} \beta_{34}^{p\{k\}} x^K \frac{\langle h_1 | \phi_2(1) L_{-k_1} \dots L_{-k_N} | h_p \rangle}{\langle h_1 | \phi_2(1) | h_p \rangle}, \quad (4.195)$$

com $\langle h_1 | \phi_2(1) | h_p \rangle = \sqrt{C_{21}^p}$. As funções \mathcal{F} são conhecidas como blocos conformes, os quais são calculados usando a álgebra de Virasoro, ou seja, relações de comutação com o campo $\phi_2(1)$ de maneira sucessiva. Os coeficientes de normalização C_{mn}^p saem dos blocos no fim do processo. A função de quatro pontos resulta em,

$$G_{34}^{21}(x, \bar{x}) = \sum_p C_{34}^p C_{12}^p \mathcal{F}_{34}^{21}(p|x) \bar{\mathcal{F}}_{34}^{21}(p|\bar{x}), \quad (4.196)$$

onde os blocos conformes podem ser determinados pela imposição da invariância conforme e dependem dos raios anarmônicos. Entretanto, os coeficientes C_{12}^p e C_{34}^p não podem ser determinados a partir da invariância conforme, como já discutido anteriormente. Podemos escrever os blocos conformes em uma série de potências em x ,

$$\mathcal{F}_{34}^{21}(p|x) = x^{h_p - h_3 - h_4} \sum_{K=0}^{\infty} \mathcal{F}_K x^K, \quad (4.197)$$

onde os coeficientes \mathcal{F}_K dependem das dimensões conformes h_i , para $i = 1, \dots, 4$ e h_p . A normalização fixa $\mathcal{F}_0 = 1$. Os outros coeficientes são determinados pela aplicação de (4.195).

5 Defeitos em teorias de campos conformes

Considerar contornos ou fronteiras em teorias de campos significa, numa perspectiva algébrica, possivelmente quebrar simetrias, as quais podem gerar propriedades físicas interessantes. Em duas dimensões, os chamados defeitos em teorias conformes, são entendidos como fronteiras que separam duas teorias conformes distintas. Vamos desenvolver acerca de um defeito específico, no qual o tensor momento-energia é contínuo através de tal defeito [10]. Denotamos os tensores momento-energia holomórficos e antiholomórficos (*left-moving* e *right-moving*) de cada teoria como $T^{(1)}$, $\bar{T}^{(1)}$ e $T^{(2)}$, $\bar{T}^{(2)}$, sendo a etiqueta da teoria dada pelo número entre parênteses. A condição para o defeito se traduz em,

$$T^{(1)} = \bar{T}^{(1)}, \quad T^{(2)} = \bar{T}^{(2)}. \quad (5.1)$$

Introduzir os defeitos no formalismo de integrais de caminho equivale a considerar um operador D na álgebra que mapeia o espaço de Hilbert de uma teoria conforme no espaço da outra. Pela condições sobre os tensor momento-energia, temos,

$$DL_m^{(1)} = L_m^{(2)}D, \quad D\bar{L}_m^{(1)} = \bar{L}_m^{(2)}D. \quad (5.2)$$

Consideramos a teoria de Liouville para estudar os defeitos.

5.1 A teoria de Liouville

A teoria de Liouville tem a seguinte ação,

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int d^2z \left(\partial\phi\bar{\partial}\phi + \mu\pi e^{2b\phi} \right), \quad (5.3)$$

onde $z = \tau + i\sigma$ e $d^2z \equiv dzd\bar{z}$. Da ação, temos a seguinte equação de movimento,

$$\partial\bar{\partial}\phi = \pi\mu b e^{2b\phi}. \quad (5.4)$$

Podemos encontrar uma solução para o campo considerando a chamada transformação de Bäcklund através de um campo $\psi(z, \bar{z})$, da seguinte forma [11],

$$\begin{aligned} \partial(\phi + \psi) &= \sqrt{\pi\mu} e^{b(\phi-\psi)}, \\ \bar{\partial}(\phi - \psi) &= \sqrt{\pi\mu} e^{b(\phi+\psi)}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

Aplicando $\bar{\partial}$ na primeira expressão e ∂ na segunda, encontramos,

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\partial(\phi + \psi) &= \sqrt{\pi\mu} b e^{b(\phi-\psi)} \bar{\partial}(\phi - \psi) \\ \partial\bar{\partial}(\phi - \psi) &= \sqrt{\pi\mu} b e^{b(\phi+\psi)} \partial(\phi + \psi). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Substituindo as relações (5.5) nas equações acima, obtemos,

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\partial(\phi + \psi) &= \pi\mu b e^{2b\phi}, \\ \bar{\partial}\partial(\phi - \psi) &= \pi\mu b e^{2b\phi},\end{aligned}\tag{5.7}$$

de forma que podemos somar e subtrair a primeira expressão da segunda, resultando em,

$$\begin{aligned}\partial\bar{\partial}\phi &= \pi\mu b e^{2b\phi}, \\ \partial\bar{\partial}\psi &= 0,\end{aligned}\tag{5.8}$$

onde identificamos que a primeira equação corresponde a teoria de Liouville, e a segunda a uma equação de onda. A solução da equação de onda pode ser escrita da seguinte forma,

$$\psi(z, \bar{z}) = P(z) + \bar{P}(\bar{z}).\tag{5.9}$$

Retornando à transformação de Bäcklund, temos,

$$\begin{aligned}\partial(\phi + P) &= \sqrt{\pi\mu} e^{b(\phi - P - \bar{P})}, \\ \bar{\partial}(\phi - \bar{P}) &= \sqrt{\pi\mu} e^{b(\phi + P + \bar{P})},\end{aligned}\tag{5.10}$$

onde podemos incluir \bar{P} dentro da derivada na primeira equação acima, e P na segunda, possibilitando reescrever as transformações como,

$$\begin{aligned}e^{-b(\phi + P - \bar{P})}\partial(\phi + P - \bar{P}) &= \sqrt{\pi\mu} e^{-2bP}, \\ e^{-b(\phi + P - \bar{P})}\bar{\partial}(\phi + P - \bar{P}) &= \sqrt{\pi\mu} e^{2b\bar{P}},\end{aligned}\tag{5.11}$$

de onde obtemos por integração o seguinte,

$$\begin{aligned}e^{-b(\phi + P - \bar{P})} &= -\sqrt{\pi\mu} b \int e^{-2bP} dz + b\bar{B}(\bar{z}), \\ e^{-b(\phi + P - \bar{P})} &= -\sqrt{\pi\mu} b \int e^{2b\bar{P}} d\bar{z} + bA(z).\end{aligned}\tag{5.12}$$

Ao compararmos as duas expressões, vemos que as funções podem ser identificadas como sendo,

$$\begin{aligned}A(z) &= -\sqrt{\pi\mu} \int e^{-2bP} dz, \\ \bar{B}(\bar{z}) &= -\sqrt{\pi\mu} \int e^{2b\bar{P}} d\bar{z}.\end{aligned}\tag{5.13}$$

Logo, coletando os resultados, obtemos,

$$e^{-b(\phi + P - \bar{P})} = b \left(A(z) + \bar{B}(\bar{z}) \right).\tag{5.14}$$

Isolando ϕ , rearranjando os termos e usando propriedades da função logarítmica, podemos escrever como solução,

$$\phi(z, \bar{z}) = \frac{1}{2b} \ln \left[\frac{1}{\pi\mu b^2} \frac{\partial A(z) \bar{\partial} \bar{B}(\bar{z})}{\left(A(z) + \bar{B}(\bar{z}) \right)^2} \right]\tag{5.15}$$

A solução para o campo $\phi(z, \bar{z})$ é invariante se A e \bar{B} sofrem transformações de Möbius simultaneamente, isto é,

$$A \rightarrow \frac{\zeta A + \beta}{\gamma A + \delta}, \quad \bar{B} \rightarrow \frac{\zeta \bar{B} - \beta}{-\gamma \bar{B} + \delta}, \quad (5.16)$$

onde os coeficientes satisfazem a condição $\zeta\delta - \beta\gamma = 1$. O tensor momento-energia (holomórfico e antiholomórfico) clássico é dado por,

$$\begin{aligned} T &= -(\partial\phi)^2 + \frac{1}{b}\partial^2\phi, \\ \bar{T} &= -(\bar{\partial}\phi)^2 + \frac{1}{b}\bar{\partial}^2\phi, \end{aligned} \quad (5.17)$$

os quais podem ser escritos em termos da solução para o campo $\phi(z, \bar{z})$ da seguinte forma,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2b^2} \left[\frac{\partial^3 A(z)}{\partial A(z)} - \frac{3}{2} \frac{(\partial^2 A(z))^2}{(\partial A(z))^2} \right], \\ \bar{T} &= \frac{1}{2b^2} \left[\frac{\bar{\partial}^3 \bar{B}(\bar{z})}{\bar{\partial} \bar{B}(\bar{z})} - \frac{3}{2} \frac{(\bar{\partial}^2 \bar{B}(\bar{z}))^2}{(\bar{\partial} \bar{B}(\bar{z}))^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A solução para as equações de Liouville pode ser descrita também por combinações lineares de funções holomórficas e antiholomórficas. Considerando $V = e^{-b\phi}$, a equação de Liouville (5.4) torna-se,

$$V\partial\bar{\partial}V - \partial V\bar{\partial}V = -\pi\mu b^2. \quad (5.19)$$

Logo, o tensor momento-energia em função de V é dado por,

$$\begin{aligned} T &= -\frac{\partial^2 V}{b^2 V}, \\ \bar{T} &= -\frac{\bar{\partial}^2 V}{b^2 V}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Como solução da equação (5.19) para V , temos,

$$V = \sqrt{\pi\mu b^2} (a_1(z)b_1(\bar{z}) - a_2(z)b_2(\bar{z})), \quad (5.21)$$

onde as funções a_i e b_i satisfazem a seguinte condição,

$$(a_1\partial a_2 - \partial a_1 a_2)(b_1\bar{\partial} b_2 - \bar{\partial} b_1 b_2) = 1. \quad (5.22)$$

Normalizando o Wronskiano a 1, isto é,

$$\begin{aligned} a_1\partial a_2 - \partial a_1 a_2 &= 1, \\ b_1\bar{\partial} b_2 - \bar{\partial} b_1 b_2 &= 1, \end{aligned} \quad (5.23)$$

e tomando a derivada na primeira equação acima, obtemos,

$$a_1\partial^2 a_2 = a_2\partial^2 a_1. \quad (5.24)$$

Analogamente para b_i tomando $\bar{\partial}$. Isso nos permite escrever a parte holomórfica e antiholomórfica do tensor momento-energia como,

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 a_1}{a_1} = -\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 a_2}{a_2}, \\ \bar{T} &= -\frac{1}{b^2} \frac{\bar{\partial}^2 b_1}{b_1} = -\frac{1}{b^2} \frac{\bar{\partial}^2 b_2}{b_2}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Podemos relacionar as funções nas soluções para V e ϕ , usando (5.15) e (5.21), de forma que encontramos,

$$\begin{aligned} a_1(z) &= (\partial A(z))^{-1/2}, & a_2(z) &= \frac{A(z)}{(\partial A(z))^{1/2}}, \\ b_1(\bar{z}) &= \frac{\bar{B}(\bar{z})}{(\bar{\partial} \bar{B}(\bar{z}))^{1/2}}, & b_2(\bar{z}) &= -\left(\bar{\partial} \bar{B}(\bar{z})\right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Notamos das relações acima que $A = \frac{a_2}{a_1}$. Portanto, sob transformação de Möbius dada em (5.16) para A e B , as funções a_i e b_i transformam-se linearmente, isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \delta a_1 + \gamma a_2, \\ \tilde{a}_2 &= \beta a_1 + \zeta a_2, \\ \tilde{b}_1 &= \zeta b_1 + \beta b_2, \\ \tilde{b}_2 &= \gamma b_1 + \delta b_2, \end{aligned} \quad (5.27)$$

preservando por construção a invariância de V sob tais transformações, bem como a condição sobre o wronskiano.

5.2 Defeitos na teoria de Liouville

Na seção anterior, estabelecemos os aspectos gerais da teoria de Liouville, como por exemplo a solução de campo e o tensor momento-energia associado. Procuramos, agora, entender o comportamento de tais quantidades quando consideramos defeitos, isto é, condições de contorno internas não triviais. Os defeitos que serão considerados são chamados de *tipo II*, pois mantêm a continuidade do tensor momento-energia entre as CFTs, usando graus de liberdade auxiliares no defeito [12].

5.2.1 Aspectos clássicos: defeitos e permutação de branas

A ação da teoria com defeito é definida como,

$$\begin{aligned} S_D &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_1} \left(\partial \phi_1 \bar{\partial} \phi_1 + \mu \pi e^{2b\phi_1} \right) d^2 z + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_2} \left(\partial \phi_2 \bar{\partial} \phi_2 + \mu \pi e^{2b\phi_2} \right) d^2 z \\ &+ \int_{\partial \Sigma} \left[-\frac{1}{2\pi} \phi_2 \partial_\tau \phi_1 + \frac{1}{2\pi} \Lambda \partial_\tau (\phi_1 - \phi_2) + \frac{\mu}{2} e^{(\phi_1 + \phi_2 - \Lambda)b} - \frac{1}{\pi b^2} e^{\Lambda b} (\cosh(\phi_1 - \phi_2)b - \kappa) \right] \frac{d\tau}{i}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde Σ_1 é o semi-plano superior $\sigma = \text{Im}z \geq 0$, Σ_2 é semi-plano inferior, sendo $\sigma = \text{Im}z \leq 0$. O defeito se manifesta num campo auxiliar $\Lambda(\tau)$, o qual se encontra na fronteira comum aos dois semi-planos, isto é, $\sigma = 0$. Na fronteira, σ é parametrizado por $\tau = \text{Re}z$. Consideremos a seguinte variação da ação,

$$\delta S_D = S_D[\phi_1 + \delta\phi_1, \phi_2 + \delta\phi_2, \Lambda + \delta\Lambda] - S_D[\phi_1, \phi_2, \Lambda]. \quad (5.29)$$

Vamos considerar tais variações separadamente, começando com a variação $\delta\phi_1$,

$$\begin{aligned} \delta S_D[\phi_1] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_1} \left(\partial(\phi_1 + \delta\phi_1) \bar{\partial}(\phi_1 + \delta\phi_1) + \mu\pi e^{2b(\phi_1 + \delta\phi_1)} \right) d^2z \\ &+ \int_{\partial\Sigma} \left[-\frac{1}{2\pi} \phi_2 \partial_\tau(\phi_1 + \delta\phi_1) + \frac{1}{2\pi} \Lambda(\phi_1 + \delta\phi_1 - \phi_2) \right. \\ &+ \left. \frac{\mu}{2} e^{(\phi_1 + \delta\phi_1 + \phi_2 - \Lambda)b} - \frac{1}{\pi b^2} e^{\Lambda b} (\cosh(\phi_1 + \delta\phi_1 - \phi_2)b - \kappa) \right] \frac{d\tau}{i} \\ &- S_D. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Considerando apenas termos de primeira ordem, obtemos,

$$\begin{aligned} \delta S_D[\phi_1] &= \int_{\partial\Sigma} \frac{d\tau}{i} \left[\frac{1}{2\pi} (\partial\phi_1 - \bar{\partial}\phi_1) + \frac{1}{2\pi} \partial_\tau\phi_2 - \frac{1}{2\pi} \partial_\tau\Lambda + \frac{\mu b}{2} e^{(\phi_1 + \phi_2 - \Lambda)b} \right. \\ &\left. - \frac{1}{\pi b} e^{\Lambda b} \sinh(\phi_1 - \phi_2)b \right] \delta\phi_1, \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde usamos uma integração por partes e o teorema da divergência num passo intermediário, a fim de calcular a integral num mesmo domínio, isto é, na fronteira. A condição para uma ação estacionária é de que a variação $\delta S_D[\phi_1]$ seja nula. Sendo a variação $\delta\phi_1$ arbitrária, por consistência da equação, temos a seguinte equação de movimento,

$$\frac{1}{2\pi} (\partial - \bar{\partial})\phi_1 + \frac{1}{2\pi} \partial_\tau\phi_2 - \frac{1}{2\pi} \partial_\tau\Lambda + \frac{\mu b}{2} e^{(\phi_1 + \phi_2 - \Lambda)b} - \frac{1}{\pi b} e^{\Lambda b} \sinh(\phi_1 - \phi_2)b = 0. \quad (5.32)$$

Assim, encontramos a equação de movimento devido a variação no campo ϕ_1 . Similarmente, podemos encontrar outra equação de movimento, considerando agora, a variação $\delta\phi_2$ na variação da ação. Tal consideração resulta em,

$$-\frac{1}{2\pi} (\partial - \bar{\partial})\phi_2 - \frac{1}{2\pi} \partial_\tau\phi_1 + \frac{1}{2\pi} \partial_\tau\Lambda + \frac{\mu b}{2} e^{(\phi_1 + \phi_2 - \Lambda)b} + \frac{1}{\pi b} e^{\Lambda b} \sinh(\phi_1 - \phi_2)b = 0 \quad (5.33)$$

Sendo considerada a variação do campo relacionado ao defeito, ou seja, $\delta\Lambda$, obtemos a seguinte equação de movimento,

$$\frac{1}{2\pi} \partial_\tau(\phi_1 - \phi_2) - \frac{\mu b}{2} e^{(\phi_1 + \phi_2 - \Lambda)b} - \frac{1}{\pi b} e^{\Lambda b} (\cosh(\phi_1 - \phi_2)b - \kappa) = 0. \quad (5.34)$$

Sendo $\partial_\tau = \partial + \bar{\partial}$, podemos realizar algumas combinações lineares envolvendo as três equações de movimento, no intuito de reduzi-las. Primeiramente, somamos as equações (5.32) e (5.33), resultando em,

$$\bar{\partial}(\phi_1 - \phi_2) = \pi\mu b e^{(\phi_1 + \phi_2 - \Lambda)b}. \quad (5.35)$$

Subtraindo a eq. (5.35) da eq. (5.34), chegamos em,

$$\partial(\phi_1 - \phi_2) = \frac{2}{b} e^{\lambda b} (\cosh(\phi_1 - \phi_2)b - \kappa), \quad (5.36)$$

e obtemos uma terceira combinação subtraindo (5.33) de (5.32), originando,

$$\partial(\phi_1 + \phi_2) - (\partial + \bar{\partial})\Lambda = \frac{2}{b} e^{\Lambda b} \sinh(\phi_1 - \phi_2)b. \quad (5.37)$$

Para que essas equações de movimento sejam válidas para todo σ , precisamos da seguinte restrição sobre o campo Λ ,

$$\bar{\partial}\Lambda = 0, \quad (5.38)$$

isto é, o Λ deve ser um campo holomórfico. Essa restrição nos permite escrever a equação (5.37) como,

$$\partial(\phi_1 + \phi_2 - \Lambda) = \frac{2}{b} e^{\Lambda b} \sinh(\phi_1 - \phi_2)b. \quad (5.39)$$

Pode ser mostrado também que essas condições do defeito garantem a continuidade do tensor momento-energia [12],

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= T^{(2)}|_{\sigma=0}, \\ \bar{T}^{(1)} &= \bar{T}^{(2)}|_{\sigma=0}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Além disso, é possível construir um campo Ξ antiholomórfico ao considerar uma transformação de Bäcklund,

$$\Xi = e^{-b(\phi_1 + \phi_2 - \Lambda)} (\cosh(\phi_1 - \phi_2)b - \kappa), \quad (5.41)$$

tal que,

$$\partial\Xi = 0. \quad (5.42)$$

A atenção recai, no momento, nas possíveis soluções para os campos ϕ_1 , ϕ_2 e Λ , dadas as equações de movimento acima determinadas. Sabemos que os defeitos são caracterizados pela continuidade do tensor momento-energia entre as teorias, ou seja, através do defeito. Entendemos, também, que o tensor momento-energia é dado pela derivada de Schwarz (invariante a transformações de Möbius), a qual estabelece uma relação com a solução de campo ϕ dada em (5.15). Portanto, temos que as equações de movimento e suas entidades (campos ϕ_1 , ϕ_2 e tensor momento-energia) satisfazem as restrições citadas acima, o que gera, naturalmente, como solução para os campos,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2b} \ln \left(\frac{1}{\pi\mu b^2} \frac{\partial A \bar{\partial} B}{(A + B)^2} \right), \\ \phi_2 &= \frac{1}{2b} \ln \left(\frac{1}{\pi\mu b^2} \frac{\partial C \bar{\partial} D}{(C + D)^2} \right), \end{aligned} \quad (5.43)$$

onde C e D são transformações de Möbius de A e B , respectivamente.

$$C = \frac{\zeta A + \beta}{\gamma A + \delta}, \quad D = \frac{\zeta' B + \beta'}{\gamma' B + \delta'}. \quad (5.44)$$

Podemos reduzir as soluções usando o fato de que os campos são invariantes a transformações de Möbius simultâneas nas suas funções, especificadas no começo do capítulo em (5.16). Especialmente, transformando C e D simultaneamente nos permite fazer $B = D$, o que nos gera as seguintes soluções,

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2b} \ln \left(\frac{1}{\pi\mu b^2} \frac{\partial A \bar{\partial} B}{(A+B)^2} \right), \\ \phi_2 &= \frac{1}{2b} \ln \left(\frac{1}{\pi\mu b^2} \frac{\partial C \bar{\partial} B}{(C+B)^2} \right),\end{aligned}\tag{5.45}$$

onde C é dado em (5.44). Substituindo as soluções acima em (5.35), encontramos a seguinte condição,

$$e^{-\Lambda b} = \frac{A - C}{\sqrt{\partial A \bar{\partial} C}},\tag{5.46}$$

e notamos que, por construção, A e C são holomórficos e como era esperado, Λ também é um campo holomórfico. A equação (5.39) é satisfeita por tal condição acima e as soluções dos campos ϕ_i . Já substituindo ϕ_1 , ϕ_2 e a condição para Λ em (5.36), encontramos a relação para κ como sendo,

$$\kappa = \frac{\zeta + \delta}{2}.\tag{5.47}$$

O campo antiholomórfico do defeito Ξ sob as mesmas considerações acima, vem dado por,

$$\Xi = \frac{\pi\mu b^2}{2} \left(\frac{\gamma B^2 + B(\zeta - \delta) - \beta}{\bar{\partial} B} \right),\tag{5.48}$$

o que nos mostra especificamente a natureza antiholomórfica de Ξ , lembrando que, por construção, B é antiholomórfico. Podemos expressar as soluções na forma de exponenciais, como feitas para V em (5.21). Estabelecemos nesse caso que as funções que surgem transformam-se linearmente quando temos transformações de Möbius para as funções dos campos ϕ_i . Neste formato, temos as seguintes expressões,

$$\begin{aligned}e^{-b\phi_1} &= \sqrt{\pi\mu b^2} (a_1(z)b_1(\bar{z}) - a_2(z)b_2(\bar{z})), \\ e^{-b\phi_2} &= \sqrt{\pi\mu b^2} (c_1(z)b_1(\bar{z}) - c_2(z)b_2(\bar{z})),\end{aligned}\tag{5.49}$$

onde podemos visualizar melhor como a_i se relaciona com c_i , considerando a seguinte equação extraída da comparação entre as soluções para ϕ e V .

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.\tag{5.50}$$

Logo, encontramos que,

$$2\kappa = \text{Tr} D,\tag{5.51}$$

onde D é a matriz de coeficientes da transformação de Möbius, explicitamente dada na transformação entre a_i e c_i acima.

Agora, vamos considerar a seguinte ação que descreve o produto de duas teorias de Liouville no semiplano com condições de contorno dadas pela permutação de branas [10, 14, 15].

$$S_B = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \left(\partial\phi_1 \bar{\partial}\phi_1 + \mu\pi e^{2b\phi_1} + \partial\phi_2 \bar{\partial}\phi_2 + \mu\pi e^{2b\phi_2} \right) d^2z + \int_{\partial\Sigma} \left[-\frac{1}{2\pi} \phi_2 \partial_{\tau} \phi_1 + \frac{1}{2\pi} \Lambda \partial_{\tau} (\phi_1 - \phi_2) - \frac{\mu}{2} e^{(\phi_1 + \phi_2 - \Lambda)b} + \frac{1}{\pi b^2} e^{\Lambda b} (\cosh(\phi_1 - \phi_2)b - \kappa) \right] \frac{d\tau}{i}, \quad (5.52)$$

onde Σ é o semi-plano $\sigma \geq 0$ e τ parametriza a fronteira em $\sigma = 0$. Analogamente ao caso anterior (5.28), obtemos um conjunto de três equações de movimento para o sistema,

$$\begin{aligned} \partial\phi_2 - \bar{\partial}\phi_1 &= \pi\mu b e^{b(\phi_1 + \phi_2)} e^{-\Lambda b}, \\ \partial\phi_1 - \bar{\partial}\phi_2 &= -\frac{2}{b} e^{\Lambda b} (\cosh(\phi_1 - \phi_2)b - \kappa), \\ \partial\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2 - \partial_{\tau}\Lambda &= -\frac{2}{b} e^{\Lambda b} \sinh(\phi_1 - \phi_2)b. \end{aligned} \quad (5.53)$$

As condições de permutação de branas pelas equações acima implicam que,

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= \bar{T}^{(2)}|_{\sigma=0}, \\ \bar{T}^{(1)} &= T^{(2)}|_{\sigma=0}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Usamos a mesma abordagem para obter as soluções para os campos,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2b} \ln \left(\frac{1}{\pi\mu b^2} \frac{\partial A \bar{\partial} B}{(A+B)^2} \right), \\ \phi_2 &= \frac{1}{2b} \ln \left(\frac{1}{\pi\mu b^2} \frac{\partial B \bar{\partial} C}{(C+B)^2} \right), \end{aligned} \quad (5.55)$$

onde a diferença se encontra na solução para ϕ_2 , a qual pela condição sobre as branas, a função $B = B(z, \bar{z})$. O equivalente a equação (5.46) é,

$$e^{-\Lambda b} = \frac{C - A}{\sqrt{\partial A \bar{\partial} C}}, \quad (5.56)$$

onde fica explícito que, diferentemente do caso anterior, $\Lambda = \Lambda(z, \bar{z})$. Já o parâmetro κ segue a mesma relação dada em (5.47), i.e.,

$$\kappa = \frac{\zeta + \delta}{2}. \quad (5.57)$$

5.2.2 Aspectos quânticos: defeitos e permutação de branas

Nas seções anteriores vimos os aspectos gerais de uma teoria clássica de Liouville com defeitos. Nos interessa, agora, analisar as propriedades quânticas de uma teoria de Liouville com defeitos. Iniciamos considerando a álgebra de Virasoro dada por,

$$[L_m, L_n] = (m+n)L_{m+n} + \frac{c}{12} n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0} \quad (5.58)$$

onde a carga central é dada por [16],

$$c = 1 + 6Q^2, \quad Q = b + \frac{1}{b}. \quad (5.59)$$

Consideramos agora campos primários V_α da teoria, associados com exponenciais do campo de Liouville $e^{2\alpha\phi}$, os quais têm dimensão conforme,

$$\Delta_\alpha = \alpha(Q - \alpha). \quad (5.60)$$

Os campos V_α e $V_{Q-\alpha}$ representam o mesmo campo primário, pois ambos os campos possuem a mesma dimensão conforme. A relação entre eles é dada por,

$$V_\alpha = S(\alpha)V_{Q-\alpha}, \quad (5.61)$$

onde $S(\alpha)$ é a função de reflexão dada por,

$$S(\alpha) = \frac{(\pi\mu\gamma(b^2))^{(Q-2\alpha)/b}}{b^2} \frac{\Gamma(1 - b(Q - 2\alpha))\Gamma(-b^{-1}(Q - 2\alpha))}{\Gamma(b(Q - 2\alpha))\Gamma(1 + b^{-1}(Q - 2\alpha))}. \quad (5.62)$$

A função acima aparece na função de dois pontos de uma teoria de Liouville da seguinte forma,

$$\langle V_\alpha(z_1, \bar{z}_1)V_\alpha(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{S(\alpha)}{(z_1 - z_2)^{2\Delta_\alpha}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\Delta_\alpha}} \quad (5.63)$$

onde podemos associar a função $S(\alpha)$ a uma matriz S de um processo de espalhamento. Introduzindo a função ZZ [13],

$$W(\alpha) = -\frac{2^{3/4}(\pi\mu\gamma(b^2))^{-(Q-2\alpha)/2b}\pi(Q - 2\alpha)}{\Gamma(1 - b(Q - 2\alpha))\Gamma(1 - b^{-1}(Q - 2\alpha))}, \quad (5.64)$$

podemos expressar a função $S(\alpha)$ como,

$$S(\alpha) = \frac{W(Q - \alpha)}{W(\alpha)}. \quad (5.65)$$

Usando a representação de maior peso R_α da álgebra de Virasoro, temos o espectro de energia da teoria de Liouville dado por,

$$\mathcal{H} = \int_0^\infty R_{\frac{Q}{2}+iP} \otimes R_{\frac{Q}{2}+iP}. \quad (5.66)$$

Com isso, temos as ferramentas mínimas para calcular funções de correlação com defeitos. Os defeitos de interesse X possuem a seguinte relação com os geradores da álgebra de Virasoro,

$$[L_n, X] = [\bar{L}_n, X] = 0, \quad (5.67)$$

onde X é dado por,

$$X = \int_{\frac{Q}{2}+i\mathbb{R}} d\alpha \mathcal{D}(\alpha) \mathbb{P}^\alpha, \quad (5.68)$$

onde \mathbb{P}^α são projetores no subespaço $R_\alpha \otimes R_\alpha$, escritos da seguinte forma,

$$\mathbb{P}^\alpha = \sum_{N,M} (|\alpha, N\rangle \otimes \overline{|\alpha, M\rangle})(\langle\alpha, N| \otimes \overline{\langle\alpha, M|}) \quad (5.69)$$

onde os vetores $|\alpha, N\rangle$ e $\overline{|\alpha, M\rangle}$ formam uma base ortonormal para as cópias holomórficas e antiholomórficas de R_α , respectivamente. Procuramos então, determinar os autovalores do defeito X , isto é, $\mathcal{D}(\alpha)$. Fazemos isso considerando a função de dois pontos com defeito, dada por,

$$\langle V_\alpha(z_1, \bar{z}_1) X V_\alpha(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{\mathcal{D}(\alpha) S(\alpha)}{(z_1 - z_2)^{2\Delta_\alpha} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\Delta_\alpha}}. \quad (5.70)$$

Para calcular os autovalores, vamos determinar primeiramente a condição de Cardy-Lewellen para defeitos [14, 17]. Supondo uma teoria conforme racional de duas dimensões com campos primários dados por ϕ_i , com o estado de vácuo sendo associado a $i = 0$, podemos representar um defeito X por uma soma nos projetores definidos acima.

$$X = \sum_i \mathcal{D}^i \mathbb{P}^i \quad (5.71)$$

A função de dois pontos dos campos primários com um defeito X é dada por,

$$\langle \phi_i(z_1, \bar{z}_1) X \phi_i(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{D^i}{(z_1 - z_2)^{2\Delta_i} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\Delta_i}} \quad (5.72)$$

onde $D^i = \mathcal{D}^i C_{ii}$, e C_{ii} sendo a função de dois pontos. Considerando a OPE para os campos primários, temos,

$$\phi_i(z_1, \bar{z}_1) \phi_j(z_2, \bar{z}_2) = \sum_k \frac{C_{ij}^k}{(z_1 - z_2)^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k}} \phi_k(z_2, \bar{z}_2) + \text{descendentes}, \quad (5.73)$$

onde a OPE forma uma álgebra com constantes de estruturas dadas por C_{ij}^k [6, 18]. Precisamos introduzir uma quantidade para o número de ocorrências do campo ϕ_k na OPE. Consideramos que este número é dado por N_{ij}^k , também chamado de número de fusão, que neste caso assume os valores de 0 e 1. Utilizemos então, a função de quatro pontos com defeito,

$$\langle \phi_j(z_1, \bar{z}_1) \phi_i(z_2, \bar{z}_2) X \phi_i(z_3, \bar{z}_3) \phi_j(z_4, \bar{z}_4) X \rangle, \quad (5.74)$$

onde prosseguiremos de duas maneiras para realizar o cálculo. A primeira maneira é considerando a OPE para os pares $\phi_j(z_1, \bar{z}_1) \phi_i(z_2, \bar{z}_2)$ e $\phi_i(z_3, \bar{z}_3) \phi_j(z_4, \bar{z}_4)$ na função de quatro pontos com defeito, no qual encontramos o seguinte resultado,

$$\sum_k D^k D^0 \left(C_{ij}^k \mathcal{F}_k \begin{bmatrix} i & i \\ j & j \end{bmatrix} \right)^2, \quad (5.75)$$

onde \mathcal{F}_k é o bloco conforme definido no capítulo anterior (4.6.4). Podemos identificar as duas notações pela seguinte relação: $\mathcal{F}_p \begin{bmatrix} j & i \\ k & l \end{bmatrix} = \mathcal{F}_{kl}^{ji}(p|x)$. Podemos ainda, trazer mais

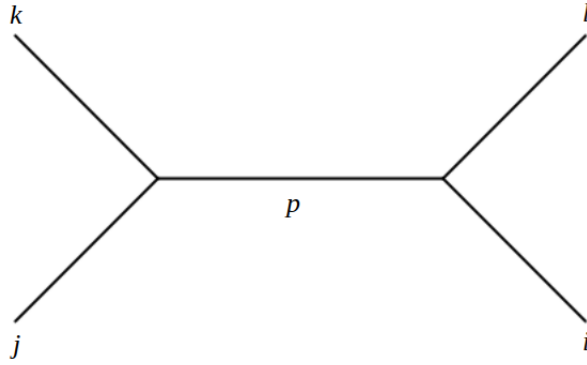


Figura 7 – Representação do bloco conforme em diagrama

familiaridade associando ao diagrama de ondas parciais do bloco conforme, que no caso é representado na Fig. (7).

A segunda maneira é levando o campo $\phi_j(z_1, \bar{z}_1)$ para o extremo direito da função de quatro pontos, isto é,

$$\langle \phi_j(z_2, \bar{z}_2) X \phi_i(z_3, \bar{z}_3) \phi_j(z_4, \bar{z}_4) X \phi_j(z_1, \bar{z}_1) \rangle \quad (5.76)$$

e dessa forma possibilitando o uso da função de dois pontos com defeito (5.72) duas vezes, encontramos,

$$D^i D^j \left(\mathcal{F}_0 \begin{bmatrix} i & j \\ i & j \end{bmatrix} \right)^2 + \dots \quad (5.77)$$

A fim de comparar (5.75) e (5.77), usamos a matriz de fusão F_{km} que transforma os blocos conformes. Para o bloco conforme que aparece em (5.72), utilizamos,

$$\mathcal{F}_k \begin{bmatrix} i & i \\ j & j \end{bmatrix} = \sum_m F_{km} \begin{bmatrix} j & j \\ i & i \end{bmatrix} \mathcal{F}_m \begin{bmatrix} i & j \\ i & j \end{bmatrix}. \quad (5.78)$$

Escolhendo $m = 0$ na equação acima, encontramos a seguinte equação,

$$\sum_k D^k D^0 \left(C_{ij}^k F_{k0} \begin{bmatrix} j & j \\ i & i \end{bmatrix} \mathcal{F}_0 \begin{bmatrix} i & j \\ i & j \end{bmatrix} \right)^2 = D^i D^j \left(\mathcal{F}_0 \begin{bmatrix} i & j \\ i & j \end{bmatrix} \right)^2 \quad (5.79)$$

de forma que é possível extrair a seguinte condição,

$$\sum_k D^k D^0 \left(C_{ij}^k F_{k0} \begin{bmatrix} j & j \\ i & i \end{bmatrix} \right)^2 = D^i D^j, \quad (5.80)$$

a qual é conhecida como a condição de Cardy-Lewellen para defeitos. Usando essa condição para teorias conformes racionais, é mostrado em [19] que as constantes de estrutura devem satisfazer a seguinte equação,

$$C_{ij}^p F_{p0} \begin{bmatrix} j & j \\ i & i \end{bmatrix} = \frac{\xi_i \xi_j}{\xi_0 \xi_p}, \quad (5.81)$$

onde $\xi_i = \sqrt{C_{ii}F_i}$ e $F_i \equiv F_{00} \begin{bmatrix} i & i \\ i & i \end{bmatrix}$. Retornando a condição de Cardy-Lewellen, encontramos,

$$\sum_k D^0 D^k N_{ij}^k \left(\frac{\xi_i \xi_j}{\xi_0 \xi_k} \right)^2 = D^i D^j. \quad (5.82)$$

Definindo um quantidade auxiliar Ψ^k como,

$$\frac{D^k}{D^0} = \Psi^k \left(\frac{\xi_k}{\xi_0} \right)^2, \quad (5.83)$$

a qual nos permite escrever a equação (5.82) em função de Ψ^k como,

$$\sum_k \Psi^k N_{ij}^k = \Psi^i \Psi^j. \quad (5.84)$$

A partir da equação acima e da definição $D^i = \mathcal{D}^i C_{ii}$ podemos encontrar o coeficiente \mathcal{D}^i . Esse processo de cálculo descrito acima foi construído usando teorias conformes racionais, no entanto, podemos usá-lo também para a teoria de Liouville (não racional), mesmo que esta possua um número infinito de campos primários. É mostrado em [15] que a condição (5.81) para as constantes de estrutura é válida também para teorias não racionais. Particularmente, para a teoria de Liouville temos,

$$\xi_\alpha = \frac{\sqrt{W(0)W(Q)}}{W(\alpha)}, \quad (5.85)$$

e assim, a condição (5.81) toma a seguinte forma,

$$C_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha_3} F_{\alpha_3 0} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} = W(0) \frac{W(\alpha_3)}{W(\alpha_1)W(\alpha_2)}, \quad (5.86)$$

onde $W(\alpha)$ é a função ZZ definida em (5.64). Analisemos o seguinte problema: a OPE entre campos primários com α_1 e α_2 arbitrários na teoria de Liouville possui um número infinito de estados primários intermediários, o qual faz com que, a primeira vista, seja problemático usar a equação (5.84), justamente pela construção e por assumir que N_{ij}^k é somente 0 ou 1. Entretanto, podemos contornar tal problema ao considerar o procedimento de Teschner [20]. Tal procedimento se baseia na existência de campos degenerados (mesma dimensão conforme) na teoria de Liouville, ou seja, campos que seguem a eq. (5.61). A OPE entre campos V_α , com α pertencendo ao conjunto,

$$\alpha_{m,n} = \frac{1-m}{2b} + \frac{1-n}{2}b, \quad (5.87)$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$, com outros outros campos, produzem um número finito de termos. O procedimento de Teschner nos diz para usar ϕ_j como um dos campos $V_{\alpha_{m,n}}$. Essa escolha faz com que o lado esquerdo da equação (5.84) tenha um número finito de termos, resolvendo

o problema. Consideremos o caso mais simples, ou seja, fazendo $m = 1$ e $n = 2$, temos $\alpha_{1,2} = -\frac{b}{2}$. O campo relacionado é $V_{-b/2}$. A OPE com um campo genérico V_α é dado por,

$$V_\alpha V_{-b/2} \sim C_{-b/2,\alpha}^{\alpha-b/2} V_{\alpha-b/2} + C_{-b/2,\alpha}^{\alpha+b/2} V_{\alpha+b/2}. \quad (5.88)$$

Fazendo $j = -b/2$, $i = \alpha$ e $k = \alpha \pm b/2$ nas equações (5.83) e (5.84), obtemos,

$$\Psi(\alpha)\Psi(-b/2) = \Psi(\alpha - b/2) + \Psi(\alpha + b/2), \quad (5.89)$$

e também,

$$\frac{D(\alpha)}{D(0)} = \Psi(\alpha) \left(\frac{W(0)}{W(\alpha)} \right)^2. \quad (5.90)$$

A solução para Ψ é encontrada [14],

$$\Psi_{m,n}(\alpha) = \frac{\sin(\pi m b^{-1}(2\alpha - Q)) \sin(\pi n b(2\alpha - Q))}{\sin(\pi m b^{-1}Q) \sin(\pi n bQ)}, \quad (5.91)$$

e usando na equação (5.90), temos,

$$D_{m,n}(\alpha) = -\frac{2\sqrt{2} \sin \pi m b^{-1}(2\alpha - Q) \sin \pi n b(2\alpha - Q)}{W^2(\alpha)}, \quad (5.92)$$

Dividindo a equação acima por $S(\alpha)$ dado em (5.65), encontramos,

$$\mathcal{D}_{m,n} = -\frac{2\sqrt{2} \sin(\pi m b^{-1}(2\alpha - Q)) \sin(\pi n b(2\alpha - Q))}{W(Q - \alpha)W(\alpha)}, \quad (5.93)$$

onde podemos usar a seguinte propriedade da função ZZ,

$$W(Q - \alpha)W(\alpha) = -2\sqrt{2} \sin(\pi b^{-1}(2\alpha - Q)) \sin(\pi b(2\alpha - Q)) \quad (5.94)$$

para finalmente chegarmos ao resultado,

$$\mathcal{D}_{m,n} = \frac{\sin(\pi m b^{-1}(2\alpha - Q)) \sin(\pi n b(2\alpha - Q))}{\sin(\pi b^{-1}(2\alpha - Q)) \sin(\pi b(2\alpha - Q))}. \quad (5.95)$$

Notemos que os índices m e n caracterizam uma família de defeitos discretos. Vamos agora, desenvolver a expressão para a família de defeitos contínua. Usando o procedimento desenvolvido no contexto de teoria de Liouville e teoria de Toda com contornos [21, 22]. No caso tratado, $D(-b/2)$ é a função de dois pontos associada ao campo degenerado $V_{-b/2}$ no contexto de defeitos, a qual é função de κ e b , onde κ parametriza o defeito. Vamos definir,

$$A(\kappa, b) = \frac{D(-b/2)}{D(0)}, \quad (5.96)$$

e,

$$D(\alpha) = \frac{\tilde{\Psi}(\alpha)}{W^2(\alpha)}. \quad (5.97)$$

Considerando o caso $j = -b/2$, $i = \alpha$, e $k = \alpha \pm b/2$, e substituindo $A(\kappa, b)$ e $\tilde{\Psi}$ em (5.82), encontramos,

$$\left(\frac{W(-b/2)}{W(0)}\right)^2 A(\kappa, b)\tilde{\Psi}(\alpha) = \tilde{\Psi}(\alpha - b/2) + \tilde{\Psi}(\alpha + b/2). \quad (5.98)$$

A solução para a equação acima é,

$$\tilde{\Psi}_\alpha(\alpha) = -\sqrt{2} \cosh(2\pi s(2\alpha - Q)), \quad (5.99)$$

onde o parâmetro s possui a seguinte relação com $A(\kappa, b)$,

$$2 \cosh(2\pi bs) = A(\kappa, b) \left(\frac{W(-b/2)}{W(0)}\right)^2. \quad (5.100)$$

Retornando a solução $\tilde{\Psi}_s(\alpha)$ em (5.97), obtemos,

$$D_s(\alpha) = -\frac{\sqrt{2} \cosh(2\pi s(2\alpha - Q))}{W^2(\alpha)}, \quad (5.101)$$

a partir do qual, podemos encontrar o coeficiente \mathcal{D} ,

$$\mathcal{D}_s(\alpha) = \frac{\cosh(2\pi s(2\alpha - Q))}{2 \sin(\pi b^{-1}(2\alpha - Q)) \sin(\pi b(2\alpha - Q))}. \quad (5.102)$$

A equação acima define uma família de defeitos contínua parametrizada pelo índice s . Portanto, a função de dois pontos com defeito (5.70) toma a seguinte forma,

$$\langle V_\alpha(z_1, \bar{z}_1) X_s V_\alpha(z_2, \bar{z}_2) \rangle = -\frac{1}{W^2(\alpha)} \frac{\sqrt{2} \cosh(2\pi s(2\alpha - Q))}{(z_1 - z_2)^{2\Delta_s} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\Delta_s}} \quad (5.103)$$

Podemos extrair uma característica interessante considerando que os estados associados a permutação das branas de fronteira $|B\rangle_{\mathcal{P}}$ no produto de duas teorias de Liouville ($L_1 \times L_2$) satisfazem as seguintes condições de continuidade [42],

$$\begin{aligned} (L_n^{(1)} - \bar{L}_{-n}^{(2)}) |B\rangle_{\mathcal{P}} &= 0, \\ (L_n^{(2)} - \bar{L}_{-n}^{(1)}) |B\rangle_{\mathcal{P}} &= 0, \end{aligned} \quad (5.104)$$

as quais podemos comparar com as condições dadas em (5.67), e notar que ao trocar as componentes holomórficas por antiholomórficas na segunda cópia, isto é, $L^{(2)}$, podemos calcular a função de dois pontos para a teoria de permutação de branas, utilizando o resultado obtido em (5.70), e simplesmente troquemos z_2 com \bar{z}_2 , resultando em,

$$\langle V_\alpha^{(1)}(z_1, \bar{z}_1) V_\alpha^{(2)}(z_2, \bar{z}_2) \rangle_{\mathcal{P}} = -\frac{1}{W^2(\alpha)} \frac{\sqrt{2} \cosh(2\pi s(2\alpha - Q))}{(z_1 - \bar{z}_2)^{2\Delta_s} (\bar{z}_1 - z_2)^{2\Delta_s}}. \quad (5.105)$$

Este resultado mostra claramente a relação dos aspectos de uma teoria de Liouville com defeitos a uma teoria de Liouville no formalismo de branas.

6 Conclusões

Nesta dissertação, estudamos as principais propriedades da teoria de campos conformes e algumas aplicações em problemas com fronteiras e defeitos. Em particular, no capítulo 2 estudamos o grupo de simetria conforme através das transformações infinitesimais e sua correspondente álgebra. Avaliamos a invariância conforme numa teoria clássica de campos através da determinação da representação de tais teorias, e analisamos como os campos se transformam conformemente em d dimensões. Classicamente, determinamos as correntes conservadas aplicando o Teorema de Noether, dando especial atenção ao tensor momento-energia. Já para analisar a invariância conforme numa teoria quântica de campos, estudamos as funções de correlação para dois e três pontos, e como a imposição da covariância conforme fixa a forma de tais funções. Em seguida, construímos as identidades de Ward, que relacionam a corrente conservada de uma teoria clássica com os possíveis geradores de uma teoria quântica.

A partir do capítulo 3, particularizamos o estudo para duas dimensões. Inicialmente, consideramos o grupo conforme e seus geradores, para determinar a forma das funções de correlação entre campos primários a partir da invariância sob o grupo. Por outro lado, analisamos a invariância global e identificamos os geradores da álgebra conforme, também chamada de álgebra de Witt. No nível quântico, separamos as identidades de Ward em uma componente holomórfica e outra antiholomórfica, o qual foi importante para definir a expansão de produtos de operadores (OPE). Na sequência, exemplificamos o bóson e o férmion livres, os quais demonstraram um termo anômalo no cálculo da OPE entre o tensor momento-energia e o campo. Esse termo ficou determinado em termos da chamada carga central de uma teoria, a qual vimos que está relacionada com a energia de Casimir do sistema.

No capítulo 4, passamos a estudar a estrutura de uma teoria quântica de campos conforme, definindo os operadores, a quantização radial, e o ordenamento radial. Encontramos, em seguida, a álgebra de Virasoro, bem como os geradores conformes e o espaço de Hilbert associado. Através de dois sistemas físicos (bóson e férmions livres), introduzimos os contornos nas teorias e investigamos por diferentes condições de contorno, as diversas implicações sobre as quantidades físicas, como os autoestados de energia e as energias de vácuo, explicitando a natureza dos campos bosônicos e fermiônicos. Concluímos que os diferentes contornos influenciam em características globais, como as energias de vácuo, no entanto, não influenciam no limite de curtas distâncias. No decorrer, fez-se necessário a definição de um novo ordenamento normal, objetivando estudar a álgebra de operadores e as famílias conformes, isto é, definindo os campos descendentes e como estes formam uma família com o campo primário associado. De maneira estrutural, foram obtidos os blocos

conformes, i.e., bases algébricas para a construção de teorias conformes. Essas estruturas têm um papel fundamental no estudo de teorias conformes na presença de contornos e defeitos.

No capítulo 5, consideramos uma aplicação na teoria de Liouville, para a qual estudamos primeiramente a teoria clássica com defeitos e com permutação de branas, e posteriormente analisamos os aspectos quânticos. Explicitamente, calculamos a contribuição do defeito para a função de correlação de dois campos primários, para o qual foi fundamental o uso do procedimento introduzido por Teshner. A partir desse resultado, usamos a equivalência da teoria de Liouville com defeitos e com permutação de branas para determinar a forma da função de dois pontos no último caso.

Por fim, podemos mencionar algumas perspectivas de continuação deste trabalho. Um assunto importante é a possível extensão da análise feita nesta dissertação na teoria de Liouville com defeitos para teorias mais gerais, como é o caso da teoria de campos de Toda com defeitos *tipo II*, as quais tem sido estudadas recentemente [43, 44, 45]. Outro assunto interessante que pode ser considerado é o estudo dos modelos fermiônicos com defeitos, e possíveis extensões supersimétricas [12].

Bibliografia

- 1 A.M. Polyakov, *Conformal symmetry of critical fluctuations*, **JETP Lett.** **12**, 381 (1970).
- 2 J.L. Cardy, *Boundary conformal field theory*, Encyclopedia of Mathematical Physics, (Elsevier, 2006), [[arXiv:hep-th/0411189](https://arxiv.org/abs/hep-th/0411189)].
- 3 I. Burić, V. Schomerus and M. Isachenkov, *Conformal group theory of tensor structures*, *J. High Energ. Phys.* **2020**, 4 (2020), [[arXiv:1910.08099](https://arxiv.org/abs/1910.08099)].
- 4 D. Grumiller, P. Parekh and M. Riegler, *Local Quantum Energy Conditions in Non-Lorentz-Invariant Quantum Field Theories*, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 121602 (2019), [[arXiv:1907.06650v2](https://arxiv.org/abs/1907.06650v2)].
- 5 N. Andrei, A. Bissi, M. Buican, J. Cardy, P. Dorey, N. Drukker, J. Erdmenger, D. Friedan, D. Fursaev, A. Konechny, C. Kristjansen, I. Makabe, Y. Nakayama, A. O'Bannon, R. Parini, B. Robinson, S. Ryu, C. Schmidt-Colinet, V. Schomerus, C. Schweigert, G. Watts, *Boundary and Defect CFT: Open Problems and Applications*, *J. Phys. A* **53**, 45 (2020), [[arXiv:1810.05697](https://arxiv.org/abs/1810.05697)].
- 6 P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, *Conformal field theory*, *Graduate Texts in Contemporary Physics*, Springer-Verlag, New York, U.S.A. (1997).
- 7 R.M. Gaberdiel, *An Introduction to conformal field theory*, *Rept. Prog. Phys.* **63** (2000), [[arXiv:hep-th/9910156](https://arxiv.org/abs/hep-th/9910156)].
- 8 M. Schottenloher, *A mathematical introduction to conformal field theory*, DOI:10.1007/978-3-540-68628-6 (2008).
- 9 M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley, Reading, U.S.A. (1995).
- 10 H. Poghosyan and G. Sarkissian, *On classical and semiclassical properties of the Liouville theory with defects*, *J. High Energ. Phys.* **2015**, 5 (2015), [<https://arxiv.org/abs/1505.00366v3>].
- 11 A.K. Das, *Finite Temperature Field Theory*, World Scientific, New York, U.S.A. (1997).
- 12 A.R. Aguirre, *Type-II defects in the super-Liouville theory*, *J. Phys. Conf. Ser.* **2013**, 474 (2013), [[arXiv:1504.07978v2](https://arxiv.org/abs/1504.07978v2)].

- 13 A.B. Zamolodchikov and A.B. Zamolodchikov, *Liouville field theory on a pseudosphere*, *Proceedings of International Workshop, Supersymmetries and quantum symmetries (SQS'05)*, Russia, (2005) [arXiv:hep-th/0101152v1].
- 14 G. Sarkissian, *Defects and permutation branes in the Liouville field theory*, *Nucl. Phys. B* **821** (2009) 607 [arXiv:0903.4422v4].
- 15 G. Sarkissian, *Some remarks on D-branes and defects in Liouville and Toda field theories*, *Int. J. Mod. Phys. A* **27** (2012) 1250181 [arXiv:1108.0242v4].
- 16 A.B. Zamolodchikov and A.B. Zamolodchikov, *Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory*, *Nucl. Phys. B* **477** (1996) 577, [arxiv.org/abs/2005.11530v2].
- 17 V.B. Petkova and J.B. Zuber, *The many faces of Ocneanu cells*, *Nucl. Phys. B* **603** (2001) 449 [arXiv:hep-th/0101151v3].
- 18 A.A. Belavin, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, *Nucl. Phys. B* **241** (1984) 333.
- 19 R.E. Behrend, P.A. Pearce, V.B. Petkova and J.B. Zuber, *Boundary conditions in rational conformal field theories*, *Nucl. Phys. B* **570** (2000) 525 [Corrigendum *ibid.* **B 579** (2000) 707] [arXiv:hep-th/9908036v3].
- 20 J. Teschner, *On the Liouville three point function*, *Phys. Lett. B* **363** (1995) 65 [arXiv:hep-th/9507109v1].
- 21 V. Fateev and S. Ribault, *Conformal Toda theory with a boundary*, *JHEP* **12** (2010) 089 [arXiv:1007.1293v4].
- 22 V. Fateev, A.B. Zamolodchikov and A.B. Zamolodchikov, *Boundary Liouville field theory. 1. Boundary state and boundary two point function*, [arXiv:hep-th/0001012v1].
- 23 V.G. Kac, A.K. Raina and N. Rozhkovskaya, *Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras*, *Advanced Series in Mathematical Physics*, **29** (2013).
- 24 V.G. Kac, *Contravariant form for infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras*, *Group Theoretical Methods in Physics. Lecture Notes in Physics*, vol 94. Springer, Berlin, Heidelberg, (1979).
- 25 B.L. Feigin and D.B. Fuks, *Invariant skew-symmetric differential operators on the line and Verma modules over the Virasoro algebra*, *Funct Anal Its Appl* **16** (1982) 114.
- 26 C.B. Thorn, *Computing the Kac Determinant Using Dual Model Techniques and More About the No - Ghost Theorem*, *Nucl. Phys. B* **248** (1984) 551.

- 27 M.E. Fisher, *Yang-Lee Edge Singularity and ϕ^3 Field Theory*, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 1610.
- 28 J.L. Cardy, *Conformal invariance and the Yang-Lee edge singularity in two dimensions*, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 1354.
- 29 D. Friedan, Z. Qiu and S.H. Shenker, *Superconformal invariance in two dimensions and the tricritical Ising model*, *Phys. Lett.* **B 151** (1985) 37.
- 30 M.A. Bershadsky, V.G. Knizhnik and M.G. Teitelman, *Superconformal symmetry in two dimensions*, *Phys. Lett.* **B 151** (1985) 31.
- 31 H. Eichenherr, *Minimal operator algebras in superconformal quantum field theory*, *Phys. Lett.* **B 151** (1985) 26
- 32 V.S. Dotsenko, *Critical behavior and associated conformal algebra of the Z_3 Potts model*, *Nucl. Phys.* **B 235** (1984) 54.
- 33 V.A. Fateev and A.B. Zamolodchikov, *Conformal quantum field theory models in two dimensions having Z_3 symmetry*, *Nucl. Phys.* **B 280** (1987) 644.
- 34 G.E. Andrews, R.J. Baxter and P.J. Forrester, *Eight-vertex SOS model and generalized Rogers-Ramanujan-type identities*, *J. Statist. Phys.* **35** (1984) 193.
- 35 B. Nienhuis, *Critical behavior of two-dimensional spin models and charge asymmetry in the Coulomb gas*, *J. Statist. Phys.* **34** (1984) 731.
- 36 P. Di Francesco, H. Saleur and J.B. Zuber, *Modular invariance in non-minimal two-dimensional conformal theories*, *Nucl. Phys.* **B 285** (1987) 454.
- 37 P. Di Francesco and J.B. Zuber, *Fusion Potentials I*, *J. Phys. A* **26** (1983) 1441 [arXiv:hep-th/9211138v1].
- 38 I. Affleck, *Universal term in the free energy at a critical point and the conformal anomaly*, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 746.
- 39 H.W.J. Bloete, J.L. Cardy, M.P. Nightingale, *Conformal Invariance, the Central Charge, and Universal Finite Size Amplitudes at Criticality*, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 742.
- 40 I.M. Gel'fand, D.B. Fuks, *The cohomologies of the lie algebra of the vector fields in a circle*, *Funct Anal Its Appl* **2** (1968) 342.
- 41 E. Cartan, *Les groupes de transformations continus, infinis, simples*, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, **26**, (1909) 93.
- 42 A. Recknagel, *Permutation branes*, *JHEP* **04** (2003) 041 [arXiv:hep-th/0208119v1].

-
- 43 P. Bowcock, E. Corrigan and C. Zambon, *Affine Toda field theories with defects*, *JHEP* **01** (2004) 056, [[arXiv:hep-th/0401020](#)].
- 44 E. Corrigan and C. Zambon, *Type II defects revisited*, *J. High Energ. Phys.* **2018**, 19 (2018), [[arXiv:1807.05747](#)].
- 45 A.R. Aguirre, T.R. Araujo, J.F. Gomes and A.H. Zimmerman, *Type-II Bäcklund transformations via gauge transformations*, *J. High Energ. Phys.* **2011**, 56 (2011), [[arXiv:1110.1589](#)].