

Universidade Federal de Itajubá

# **FORMULAÇÃO VARIACIONAL PARA O ELETROMAGNETISMO E SUAS APLICAÇÕES**

Antonio Faria Neto

Orientadores: Prof. Germano Lambert Torres

Prof. Antônio Marmo de Oliveira

Tese apresentada à Universidade  
Federal de Itajubá, para obtenção  
do título de Doutor em Engenharia  
Elétrica.

Dezembro/2005

*“Dedico este trabalho à minha esposa  
Carla e aos meus filhos Giovanna e  
Matheus, pelos momentos que furtei-  
lhes de nosso convívio.  
Dedico, também, a meus pais, pelo  
incentivo.”*

# SUMÁRIO

Resumo.....	5
Abstract .....	6
<u>Capítulo 1</u> - Introdução .....	7
<u>Capítulo 2</u> – Definições e Conceitos Fundamentais .....	11
2.1 – O Conceito de Operador e de Funcional.....	11
2.2 – O Conceito de Operador Adjunto.....	12
2.3 - O Conceito de Circulação e de Potencial no Espaço de Funções.....	12
2.4 - Diferenciabilidade em Variedades .....	13
2.5 - A Derivada de Operadores .....	14
2.6 - Generalização do Teorema de Vainberg .....	16
2.7 - Operador Potencial Linear .....	21
<u>Capítulo 3</u> – Revisão Bibliográfica do Cálculo Variacional Inverso .....	22
3.1 - Método da Modificação da Forma Bilinear .....	26
3.2 - Método da Substituição de Variáveis .....	28
<u>Capítulo 4</u> – Formulação Variacional para Equações Diferenciais .....	32
4.1 – Conceituação Básica .....	32
4.1 - Formulação Variacional para Sistemas de Equações Diferenciais.	35
<u>Capítulo 5</u> – Método da Decomposição do Operador .....	38
5.1 - Aplicação do Método de Decomposição do Operador à Equação do Circuito RLC Série .....	40
5.2 - A Decomposição do Operador $P(u) = u_t + Au_x$ .....	41
5.3 - Formulação Variacional da Equação de Modelagem de um Alto- Falante.....	41
5.4 - Formulação Variacional das Equações de Navier-Stokes .....	44
<u>Capítulo 6</u> - Formulação Variacional das Equações de Maxwell .....	48

<u>Capítulo 7</u> – Formulação Variacional das Equações de Maxwell Empregado	
Biquatérnios .....	51
7.1 - Operador Diferencial Biquaterniônico .....	52
7.2 - O Potencial Biquaterniônico .....	53
7.3 - O Campo Biquaterniônico .....	53
7.4 - A Sintetização das Equações de Maxwell .....	54
7.5 - Formulação Variacional .....	55
7.6 - A Variação do Funcional .....	56
<u>Capítulo 8</u> - Formulação Variacional das Equações de Maxwell por Meio de Formas	
Diferenciais .....	58
8.1 - Notação .....	58
8.2 - Postulado dos Potenciais $A$ e das Intensidades $F$ .....	59
8.3 - O Primeiro Par das Equações de Maxwell .....	60
8.4 - O Segundo Par das Equações de Maxwell .....	62
8.5 - Formulação Variacional .....	64
<u>Capítulo 9</u> – Conclusões .....	66
Apêndice A – Operador Adjunto .....	67
Apêndice B – Quatérnios e Biquatérnios .....	69
Bibliografia .....	73

## RESUMO

O cálculo variacional está diretamente relacionado à modelagem energética dos sistemas físicos em geral. A vantagem desta abordagem sobre as abordagens clássicas (Newtonianas), é que um sistema pode ser subdividido em vários sub-sistemas cuja modelagem pode ser mais simples que a do todo. Como a energia total de um sistema é a soma das energias das partes, é possível obter-se um resultado global a partir dos resultados parciais. Já nos métodos clássicos, baseados na força, não existe esta flexibilidade, quando muito é possível a aplicação do método da superposição de efeitos. Contudo, este método não se aplica aos sistemas não lineares. Em geral, as aplicações de engenharia estão sempre ligadas à solução de um conjunto de equações descritivas dos fenômenos. Partir dessas equações e chegar a um funcional, que as represente, é o problema inverso do cálculo variacional. Este trabalho apresenta uma descrição dos métodos que têm sido empregados para a solução deste problema, bem como generaliza o teorema de Vainberg, que foi o ponto de partida para todos esses métodos. A partir desse teorema este trabalho propõe métodos que se aplicam a uma classe mais geral de problemas, como por exemplo a formulação variacional das equações de Navier-Stokes. Este trabalho aborda, principalmente, a formulação variacional das equações de Maxwell, inclusive a formulação quaterniônica, que conduz ao lagrangeano eletromagnético clássico acrescido de um termo complexo, o qual permite que o funcional ao ser variado resulte nas quatro equações de Maxwell. Finalmente apresenta-se a formulação das equações de Maxwell por intermédio de formas diferenciais. A vantagem do método energético sobre a formulação fraca é que o primeiro fornece cotas superior e inferior para a solução numérica dos problemas.

## ABSTRACT

The variational calculus is directly related to the energetic modeling of physical systems in general. The advantage of such approach in relation to the classical approaches (Newtonians) is that a system can be subdivided in many sub-systems whose modeling can be simpler than the one of the whole. As the total energy of a system is the sum of the energy of the parts, it is possible to obtain a global result from the partial results. Nevertheless, in the classic methods, based on force, such flexibility does not exist, the most possible way is to apply the effect superposition method. However, this method does not apply to non-linear systems. In general, the engineering applications are always linked to the solution of a set of descriptive equations of the phenomena. Starting in these equations and reaching a functional, which represent them, is the inverse problem of the variational calculus. This paper presents a description of the methods which have been employed for the solution of this problem. Moreover, this paper generalize the Vainberg theorem, which was the starting point for all these methods. From this theorem, this paper proposes methods that apply to a more general class of problems, such as, for example, the variational formulation of Navier-Stokes equations. This work approaches, principally, the variational formulation of Maxwell, including the quaternionic formulation, which takes to the langrangian classic electromagnetic field added of a complex term, which allows the functional, when varied, to result in the four Maxwell equations. Finally, the formulation of Maxwell equations by means of differential forms is presented. The advantage of the energetic method on the weak formulation is that the former provides superior and inferior quotes to the numeric solution of the problems.

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

As aplicações de engenharia e da física-matemática estão sempre ligadas à solução de um conjunto de equações descritivas. O conjunto de equações descritivas inclui as equações de equilíbrio dinâmico, equações constitutivas, condições de contorno ou iniciais, e pode estar, ou não, na forma de equações diferenciais. Uma formulação alternativa ao conjunto descritivo pode ser feita em termos de um funcional, e é então, chamada de princípio variacional.

A forma de encarar um problema no cálculo variacional é procurar aqueles pontos em um espaço de função apropriado nos quais o funcional é estacionário. Procedimentos já bem conhecidos conduzem a uma ou mais equações de Euler-Lagrange, condições de contorno naturais ou “dinâmicas”, e condições iniciais. Se essas equações correspondem ao conjunto de equações descritivas, então o problema de busca dos pontos estacionários do funcional fornece uma descrição alternativa do problema físico.

A existência de um princípio variacional para uma equação diferencial ou para um sistema de equações diferenciais é um conhecimento valioso. Se existir um princípio variacional, ele será de grande ajuda na construção de uma solução para o problema físico modelado pelo conjunto de equações descritivas. O princípio variacional também fornece um veículo para um desenvolvimento teórico do problema, como a mecânica Hamiltoniana, por exemplo. Por fim, o fato de que um problema admita uma formulação variacional em muitos casos provê um apelo à interpretação física.

Cronologicamente, dado um problema físico, em geral, primeiro determina-se o conjunto de equações descritivas desse problema, em seguida, a partir desse conjunto de equações, é deduzido o princípio variacional. Uma vez que o funcional seja conhecido, há uma tendência em se apresentar o funcional primeiro, e em seguida deduzir as equações descritivas a partir dele.

A formulação variacional de um problema não-linear, além de ser uma maneira elegante de expressar as leis físicas, permite soluções através de métodos numéricos conhecidos e de rápida convergência.

O cálculo variacional fornece meios para a dedução das condições que descrevem o ponto estacionário de um funcional.

Contudo, o processo reverso não é tão simples. Determinar o funcional cuja variação resultava nas equações de equilíbrio dinâmico, como as equações de Euler-Lagrange, era o maior obstáculo. Tratava-se essencialmente de um procedimento de tentativa e erro, em alguns casos e, em outros, passível de uma abordagem metodológica e sistemática.

Deve ser dito que muito tempo e esforço foram feitos para desenvolver métodos para a construção de princípios variacionais. Descobrir um princípio variacional era como uma arte. Normalmente, aplicava-se várias transformações às equações de equilíbrio dinâmico e então usava-se o cálculo variacional para verificar se as equações de equilíbrio dinâmico reapareciam como as equações de Euler-Lagrange. Quando se era bem sucedido nessa busca, apresentava-se, na maioria das vezes, apenas o funcional, mas não o caminho e as pesquisas na busca deste.

Para tornar o assunto ainda mais difícil, deve-se dizer que há problemas para os quais não existe uma formulação variacional.

A pesquisa por um princípio variacional é o problema inverso do cálculo variacional, isto é, encontrar o funcional cujos pontos estacionários sejam descritos pelas equações descritivas. O que suscita uma questão, ainda mais fundamental, qual seja, a da existência, ou não, do funcional. Até muito recentemente ambas as questões encontravam-se em aberto.

Dentro do contexto da moderna análise funcional, contudo, a condição de existência de solução do problema inverso foi estabelecida, em princípio, por Vainberg em 1954. A resposta à questão da existência de um princípio variacional era equivalente a determinar se um operador era ou não um operador potencial. Se o operador fosse um operador potencial, o princípio variacional era dado diretamente por uma sistemática de cálculo.

Enzo Tonti apresentou um trabalho de simplificação da teoria mais abstrata de Vainberg, tornando-a mais acessível aos físicos e engenheiros. Tonti reconheceu a importância do trabalho de Vainberg, e desenvolveu um formalismo e um procedimento para deduzir várias fórmulas operacionais para determinar se um dado operador era, ou não, potencial. Finlayson usou o formalismo de Tonti e estendeu o conceito de operador



adjunto às equações não-lineares. Após o surgimento desse trabalho, disponibilizaram-se resultados para equações diferenciais ordinárias de quarta ordem, e sistemas de equações diferenciais parciais de segunda ordem.

As condições para a existência de um potencial são muito restritivas. Além disso, sabe-se que a maioria dos problemas reais são de natureza dissipativa, o que conduz a inexistência de um potencial. De fato, demonstra-se que uma equação diferencial escalar cuja derivada de mais alta ordem é de ordem ímpar, não tem potencial. Alguns operadores podem ser transformados em uma forma alternativa que satisfaça as condições para a existência de um potencial. Novamente, contudo, as condições para sua existência também são muito restritivas e as técnicas que permitem esta transformação são difíceis de serem sistematizadas.

Assim, uma série de problemas de grande importância não podiam ser formulados variacionalmente. Desta forma, o objetivo desta tese é apresentar um método simples e eficaz, capaz de efetuar a modelagem variacional de problemas originariamente não potenciais.

Neste trabalho a noção de Formulação Forte será generalizada, de modo que, na mesma, seja possível a inclusão de certos tipos de operadores que em teorias anteriores existentes eram tidos como não-potenciais (passando agora a ser potenciais). Para atingir esse objetivo, inicialmente estender-se-á o conceito de adjunto de um operador (definidos num espaço de Hilbert), relacionando o mesmo com uma forma bilinear contínua e não-degenerada, não só simétrica, como usual, mas também podendo ser anti-simétrica.

O capítulo 2 apresentará uma série de definições e conceitos necessários à compreensão do trabalho. Apresentará, também, a título de contribuição, um teorema intitulado por nós “Teorema Fundamental do Problema Inverso do Cálculo das Variações” que é a generalização do teorema de M. M.Vainberg sobre a potencialização de operadores. Este teorema fundamental será a base para boa parte deste trabalho.

Já o capítulo 3, apresentará uma curta revisão dos trabalhos feitos nesta área, classificando, no final, os principais correntes seguidas pelos pesquisadores ao longo da história.

No capítulo 4, serão apresentados aspectos importantes da formulação variacional para sistemas de equações diferenciais.

No capítulo 5, será apresentado, também como contribuição, um método de formulação variacional, denominado de “Decomposição do Operador”. Tal método é uma consequência do Teorema Fundamental apresentado no capítulo 2. Neste capítulo, além de vários exemplos que visam ilustrar o método proposto, será apresentado o método na formulação variacional das equações de Navier-Stokes, que até então vêm sendo citadas como exemplo clássico de equações que não admitem formulação variacional.

No capítulo 6, será apresentada a formulação variacional das equações de Maxwell, utilizando-se um operador anti-simétrico.

O capítulo 7 apresentará a formulação quaterniônica das equações de Maxwell, bem como a sua formulação variacional na forma de quatérnios. Esta formulação torna-se interessante na medida em que fornece como resultado, o lagrangeano clássico acrescido de uma parte complexa, de modo que a variação deste lagrangeano resulta no sistema formado pelas quatro equações de Maxwell.

O capítulo 8 apresentará a formulação das equações de Maxwell por meio de formas diferenciais e a consequente formulação variacional.

No capítulo 9 serão apresentadas as conclusões gerais do trabalho.

## Capítulo 2

### DEFINIÇÕES E CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Este capítulo tem por objetivo, além da introdução de uma série de conceitos e notações que serão empregadas no decorrer do trabalho, a apresentação e demonstração do Teorema Fundamental do Problema Inverso do Cálculo das Variações, que é a generalização do Teorema de M. M. Vainberg, que trata da potencialidade de operadores.

Os espaços vetoriais reais serão denotados por  $X$  ou por  $Y$ . Já os espaços euclidianos, no corpo dos reais, de dimensão  $n$ , serão denotados por  $\mathbb{R}^n$ . Se necessário poderão ser considerados, também, espaços euclidianos definidos no corpo dos complexos  $\mathbb{C}$ . Quando  $X$  for um espaço munido de uma forma bilinear  $\sigma$ , não-degenerada, esta forma será representada por  $\sigma\langle \cdot, \cdot \rangle$  ou  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\sigma$ , ou ainda, simplesmente, por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

#### 2.1 O Conceito de Operador e de Funcional

Uma aplicação de um subconjunto  $D$  ( $D \subset X$ ) em um outro espaço vetorial  $Y$  será chamada de operador e denotada por  $N: X \rightarrow Y$  ou por  $N: D \rightarrow Y$ , onde  $D$  é o domínio de  $N$  ( $D \equiv D(N)$ ). Ocasionalmente  $N$  poderá ser escrita como  $N(\cdot)$ . O conjunto de todos os operadores de  $X$  em  $Y$  será representado por  $[X, Y]$ .

Um operador será dito linear se for, simultaneamente, homogêneo e aditivo, isto é,  $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ , considerando  $x, y \in X$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Caso contrário o operador é dito não-linear.

Um funcional será definido como um operador membro de  $[X, \mathbb{C}]$  ou, também, como  $[X, \mathbb{C}]$ .

Se  $X$  e  $Y$ , forem espaços vetoriais topológicos, então o espaço vetorial formado por todos os operadores lineares contínuos de  $X$  em  $Y$  será indicado por  $L[X, Y]$ . É usual, na literatura, indicar  $L[X, \square]$  por  $X^*$  e chamá-lo de espaço dual de  $X$ . No caso de espaços vetoriais de dimensão  $n$ , munidos de um produto tensorial, os elementos de  $X^*$  podem ser obtidos a partir dos elementos de  $X$  por meio de um isomorfismo definido por uma métrica  $g$ .

No caso em que  $N(\cdot)$ , com domínio em  $X$ , for um operador não-linear,  $X$  será um espaço tangente a um ponto da variedade não-linear, e  $X^*$  será o espaço cotangente.

## 2.2 O Conceito de Operador Adjunto

Sejam  $X$  e  $Y$ , espaços vetoriais munidos de formas bilineares  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\sigma_X}$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\sigma_Y}$  não-degeneradas. Dado um operador linear  $N: X \rightarrow Y^*$ , há um segundo operador, denominado de operador adjunto  $\tilde{N}: Y \rightarrow X^*$ , tal que :

$$\langle v, N(u) \rangle_{\sigma_Y} = \langle u, \tilde{N}(v) \rangle_{\sigma_X} \quad (2.1)$$

para todo  $u \in X$  e  $v \in Y$ .

Para que o operador adjunto  $\tilde{N}(\cdot)$ , seja bem definido, é necessário que  $D(N)$  seja denso, em  $X$ , como está demonstrado no Apêndice A, que também apresenta uma tabela que reúne alguns operadores, e seus respectivos adjuntos.

## 2.3 O Conceito de Circulação e de Potencial no Espaço de Funções

Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços vetoriais tangentes a duas variedades  $V_X$  e  $V_Y$  (que satisfaçam os requisitos de diferenciabilidade e continuidade usuais).

Seja  $\gamma$ , uma curva parametrizada por  $\lambda \in \square$  em  $V_Y$  e  $N: X \rightarrow Y^*$ .

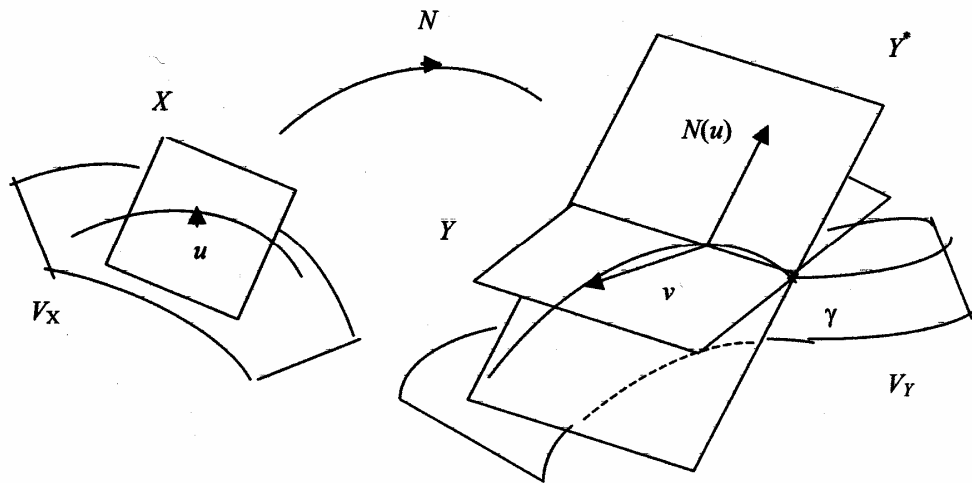


Fig. 2.1 – Circulação de um operador  $N(u)$

Define-se como circulação de  $N(u)$ , por meio de uma integral ao longo da linha  $\gamma$ , como segue

$$\Gamma = \int_{\gamma} \langle v, N(u) \rangle_Y = \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u(\lambda)}{\partial \lambda}, N(u(\lambda)) \right\rangle_Y d\lambda \quad (2.2)$$

Se o resultado de (2.2) independer da trajetória  $\gamma$ , entre esses pontos, diz-se que o operador  $N(\cdot)$  é um operador potencial.

No caso em que  $N(\cdot)$  é potencial, a integral (2.2), pode ser feita, por simplicidade ao longo de uma reta, isto é :

$$F[u] = \int_{\Omega} u \left[ \int_0^1 N(\lambda u) d\lambda \right] d\Omega \quad (2.3)$$

Vale a pena salientar que o funcional  $F[u]$  é denominado de *potencial* do operador  $N(\cdot)$ , enquanto que este último é dito gradiente do primeiro, ou seja :

$$N(u) = \text{grad}(F[u]) \quad (2.4)$$

## 2.4 Diferenciabilidade em Variedades

Falando de maneira intuitiva, uma variedade diferenciável é um espaço topológico no qual a operação de diferenciação pode ser efetuada. Tal variedade se comporta localmente como um espaço euclidiano. Um espaço topológico conveniente para tal conceito é denominado de Hausdorff, mais propriamente, um espaço separável de Hausdorff. Um espaço topológico é dito separável, se ele contiver uma base contável para a sua topologia, e será denominado Hausdorff se dado dois pontos da variedade, existirem vizinhanças disjuntas que contenham um deles. Esses espaços separáveis de Hausdorff de dimensão  $n$  apresentam estruturas diferenciáveis de classe  $k$ . No decorrer deste trabalho, ficará subentendido que quando se falar em diferenciabilidade, estará sendo considerado um espaço separável de Hausdorff de classe  $k$ . Convém salientar que todos os espaços métricos são espaços de Hausdorff.

Ressalta-se, também, que quando for mencionado espaços vetoriais topológicos estará sendo feita referência a espaços tangentes e/ou cotangentes a variedades dotadas das respectivas aparelhagens de diferenciabilidade de ordem  $k$ .

## 2.5 A Derivada de Operadores

Considere um operador  $N : X \rightarrow Y$ , onde  $X$  e  $Y$  são espaços vetoriais, sendo que  $Y$  é um espaço vetorial topológico. Dados  $u, \varphi \in X$  e  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , suponha que

$$D(N)(\varphi) = N'_u \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{N(u + \varepsilon \varphi) - N(u)}{\varepsilon} \right] \quad (2.5)$$

exista.

Em se confirmando a existência de (2.5), então pode-se afirmar que  $D(N)(\varphi) \in Y$  e que (2.5) é chamada de diferencial de Gâteaux de  $N$  em  $u$ , “na direção  $\varphi$ ”. Diz-se que  $N$  é Gâteaux-diferenciável em  $u$  quando  $N$  é Gâteaux-diferenciável em  $u$ , em todas “as direções”. O operador  $DN(u) : X \rightarrow Y$  é chamado de derivada de Gâteaux em  $u$ .

M. M. Vainberg [1], considera a definição de derivada em espaços de Banach e também introduz a notação  $DN(u, \varphi) = N'(u)\varphi$ . Neste trabalho preferiu-se indicar  $DN(u, \varphi) = N'_u\varphi$ , que se acha em conformidade com a literatura atual.

Teorema : Se  $F[u]$  é potencial, então sua derivada de Gâteaux é igual a  $N(u)$

Demonstração :

$$\begin{aligned}
F'_u\varphi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{F(u + \varepsilon\varphi) - F(u)}{\varepsilon} \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left[ (u + \varepsilon\varphi) \int_0^1 N(\lambda u + \lambda\varepsilon\varphi) d\lambda - u \int_0^1 N(\lambda u) d\lambda \right] d\Omega = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left[ u \int_0^1 N(\lambda u + \lambda\varepsilon\varphi) d\lambda + \varepsilon\varphi \int_0^1 N(\lambda u + \lambda\varepsilon\varphi) d\lambda - u \int_0^1 N(\lambda u) d\lambda \right] d\Omega = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left[ u \int_0^1 \frac{N(\lambda u + \lambda\varepsilon\varphi) - N(\lambda u)}{\varepsilon} d\lambda + \varphi \int_0^1 N(\lambda u + \lambda\varepsilon\varphi) d\lambda \right] d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \left[ u \int_0^1 N'_{\lambda u}(\lambda\varphi) d\lambda + \varphi \int_0^1 N(\lambda u) d\lambda \right] d\Omega = \int_{\Omega} \varphi \left[ \int_0^1 \tilde{N}'_{\lambda u}(\lambda u) d\lambda + \int_0^1 N(\lambda u) d\lambda \right] d\Omega
\end{aligned}$$

onde  $\tilde{N}'_{\lambda u}$  é o adjunto de  $N'_{\lambda u}$ . Como  $N$  é um operador potencial, tem-se que :

$$N'_{\lambda u} = \tilde{N}'_{\lambda u}, \text{ logo}$$

$$\int_{\Omega} \varphi \left[ \int_0^1 \tilde{N}'_{\lambda u}(\lambda u) d\lambda + \int_0^1 N(\lambda u) d\lambda \right] d\Omega = \int_{\Omega} \varphi \left[ \int_0^1 N'_{\lambda u}(\lambda u) d\lambda + \int_0^1 N(\lambda u) d\lambda \right] d\Omega \quad (2.6)$$

$$\text{Lema (L2.1)} : N'_{\lambda u}(\lambda u) = \lambda \frac{d}{d\lambda} N(\lambda u)$$

Demonstração :

$$\text{Fazendo } \lambda u = h, \text{ tem-se que : } \lambda N'_{\lambda u}(u) = \lambda N'_h(u)$$

Aplicando a definição da derivada de Gâteaux, vem :

$$N'_h(u) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} N(h + \varepsilon u) \right|_{\varepsilon=0} \quad \therefore \lambda N'_h(u) = \lambda \left. \frac{d}{d\varepsilon} N(h + \varepsilon u) \right|_{\varepsilon=0}$$

considerando  $g = h + \varepsilon u$

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{d\varepsilon} N(h + \varepsilon u) \Big|_{\varepsilon=0} &= \lambda \frac{d}{dg} N(h + \varepsilon u) \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \frac{dg}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \lambda \frac{d}{dh} N(h) \cdot u = \lambda \frac{d}{d\lambda u} N(\lambda u) \cdot u = \\ &= \lambda \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{d}{d\lambda} N(\lambda u) \cdot u = \lambda \frac{d}{d\lambda} N(\lambda u) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda N'_{\lambda u}(u) = \lambda \frac{d}{d\lambda} N(\lambda u)$$

Substituindo o lema (L2.1) em (2.6), vem

$$\int_{\Omega} \varphi \left[ \int_0^1 N'_u(\lambda u) d\lambda + \int_0^1 N(\lambda u) d\lambda \right] d\Omega = \int_{\Omega} \varphi \left[ \int_0^1 \lambda \frac{d}{d\lambda} N(\lambda u) d\lambda + \int_0^1 N(\lambda u) d\lambda \right] d\Omega$$

$$\text{tem-se que : } \lambda \frac{d}{d\lambda} N(\lambda u) = \frac{d}{d\lambda} [\lambda N(\lambda u)] - N(\lambda u)$$

$$\int_{\Omega} \varphi \left[ \int_0^1 \lambda \frac{d}{d\lambda} N(\lambda u) d\lambda + \int_0^1 N(\lambda u) d\lambda \right] d\Omega = \int_{\Omega} \varphi \left[ \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} [\lambda N(\lambda u)] d\lambda - \int_0^1 N(\lambda u) d\lambda + \int_0^1 N(\lambda u) d\lambda \right] d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} \varphi [\lambda N(\lambda u)]_0^1 d\Omega = \int_{\Omega} N(u) \varphi d\Omega$$

Ou seja,

$$\text{grad}(F[u]) = N(u)$$

## 2.6 Generalização do Teorema de Vainberg – Teorema Fundamental do Problema Inverso do Cálculo das Variações

O teorema apresentado no item 2.5, deve-se, entre a outros autores, a M. M. Vainberg [1]. O objetivo deste tópico é o de torná-lo mais genérico, incluindo o caso de operadores não-lineares  $N(\cdot)$ , não necessariamente potenciais. De um certo modo, este teorema será fundamental para a solução do problema inverso do cálculo variacional, pois mostrará outros aspectos da variação de um funcional que se perde quando se supõe que o operador é potencial.



Será demonstrado que :

$$D(F[u])(\varphi) = \int_{\Omega} N(u)\varphi d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 A'_{\lambda u}(\lambda u) d\lambda \right] \varphi d\Omega \quad (2.7)$$

onde

$$A'_{\lambda u}(\lambda u) = \tilde{N}'_{\lambda u}(\lambda u) - N'_{\lambda u}(\lambda u) \quad (2.8)$$

ou seja,

$$A'_u(u) = \tilde{N}'_u(u) - N'_u(u) \quad (2.9)$$

que é um operador anti-simétrico.

No caso em que  $A'_u(u) = 0$ , obter-se-á o teorema de Vainberg, como enunciado classicamente. Neste caso diz-se que o operador  $N(u)$  para ser potencial terá que obedecer a uma condição de simetria dada por  $A'_u(u) = 0$ . Vainberg expressa isso da seguinte maneira :

$$\int_{\Omega} \psi N'_u(\varphi) d\Omega = \int_{\Omega} \varphi N'_u(\psi) d\Omega \quad (2.10)$$

pois nesse caso a integração no parâmetro  $\lambda$  de 0 a 1 é universal, valendo para qualquer trajetória  $\gamma$ . Conseqüentemente, o teorema que será demonstrado, traz em seu bojo a condição de potencialidade ou não, do operador  $N(\cdot)$ .

É evidente que aqui tem-se como hipótese que a derivada de  $N(\cdot)$ , indicada por  $N'_u$  admite um operador adjunto  $\tilde{N}'_u$ , que seria definido por meio de (2.1), ou seja :

$$\langle \psi, N'_u(\varphi) \rangle_{\sigma_Y} = \langle \varphi, \tilde{N}'_u(\psi) \rangle_{\sigma_X} \quad (2.11)$$

Quando  $N'_u = \tilde{N}'_u$ , obtém-se a condição de simetria de Vainberg. É importante frisar que o domínio de  $N'_u$  deverá ser denso em  $X$ .

Então a seguir, dentro dessas hipóteses de diferenciabilidade e densidade de domínio apresentar-se-á a demonstração do teorema.

Demonstração :

De (2.8), tem-se

$$D(F[u])(\varphi) = \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 N(\lambda u) \varphi d\lambda \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 N'_{\lambda u}(\lambda \varphi) u d\lambda \right] d\Omega \quad (2.12)$$

De acordo com o lema (L2.1)

$$N(\lambda u) = \frac{d}{d\lambda} [\lambda N(\lambda u)] - N'_{\lambda u}(\lambda u)$$

logo (2.12), pode ser reescrita como

$$D(F[u])(\varphi) = \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 \left\{ \frac{d}{d\lambda} [\lambda N(\lambda u)] - N'_{\lambda u}(\lambda u) \right\} \varphi d\lambda \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 N'_{\lambda u}(\lambda \varphi) u d\lambda \right] d\Omega \quad (2.13)$$

mas

$$\int_{\Omega} \left[ u \int_0^1 N'_{\lambda u}(\lambda \varphi) d\lambda \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \varphi \int_0^1 \tilde{N}'_{\lambda u}(\lambda u) d\lambda \right] d\Omega$$

então (2.13), fica

$$D(F[u])(\varphi) = \int_{\Omega} N(u) \varphi d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 A'_{\lambda u}(\lambda u) d\lambda \right] \varphi d\Omega \quad (2.14)$$

Corolário:

No caso em que a forma  $\sigma$ , for anti-simétrica, o raciocínio anterior é o mesmo, resultando em

$$D(F[u])(\varphi) = \langle N(u), \varphi \rangle_{\sigma} - \left\langle \int_0^1 A'_{\lambda u}(\lambda u) d\lambda, \varphi \right\rangle_{\sigma} \quad (2.15)$$

Então, no caso geral

$$D(F[u])(\varphi) = \langle N(u), \varphi \rangle_{\sigma} \pm \langle A(u), \varphi \rangle_{\sigma} \quad (2.16)$$

onde  $A(u) = \int_0^1 A'_{\lambda u}(\lambda u) d\lambda$ , conforme  $\sigma$  seja simétrica ou anti-simétrica. Portanto,

$$\text{grad}(F[u]) = N(u) \pm A(u) \quad (2.17)$$

É importante observar que se  $N(u)$  for potencial,  $A(u)$  é zero. Logo, o presente teorema contém o respectivo teorema de Vainberg como caso particular.

Afim de melhor elucidar o teorema acima, considere o seguinte exemplo :

Seja  $H$  o espaço de Hilbert das funções  $u$  em  $L_2[\Omega, H_0^3[a, b]]$ , onde  $\Omega = [0, +\infty]$ , com derivadas parciais contínuas até a terceira ordem.

Seja  $N : H \rightarrow H$ , definido por

$$N(u) = 2uu_x - u_{xxx} + u_{xx} \quad (2.18)$$

Diferenciando (2.18), obtém-se

$$N'_u \varphi = \frac{\partial}{\partial x} [2u\varphi - \varphi_{xx} + \varphi_x] \quad (2.19)$$

para cada  $u$  fixado em  $H$ .

Considere agora a forma bilinear  $\sigma : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\langle u, v \rangle_\sigma = \int_a^b \left( \int_0^x u d\hat{x} \right) v dx \quad (2.20)$$

seja calcular  $\langle N'_u \varphi, v \rangle_\sigma$

$$\langle N'_u \varphi, v \rangle = \int_a^b \left( \int_0^x N'_u \varphi d\hat{x} \right) v dx = \int_a^b \left[ \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} (2u\varphi - \varphi_{xx} + \varphi_x) d\hat{x} \right] v dx = \int_a^b (2u\varphi - \varphi_{xx} + \varphi_x) v dx \quad (2.21)$$

integrando (2.21) por partes para colocar  $\varphi$  em evidência.

$$\langle N'_u \varphi, v \rangle_\sigma = \int_a^b (2uv - v_{xx} - v_x) \varphi dx = \langle (2uv - v_{xx} - v_x)_x, \varphi \rangle_\sigma = \langle \tilde{N}'_u v, \varphi \rangle_\sigma \quad (2.22)$$

ou seja,

$$\tilde{N}'_u v = (2uv - v_{xx} - v_x)_x \quad (2.23)$$

portanto, a diferença  $\tilde{N}'_u v - N'_u v = A'_u v$ , pode ser calculada e resulta em

$$A'_u v = -2v_{xx} \quad (2.24)$$

Logo, o operador  $N(\cdot)$ , não é potencial segundo o critério de Vainberg.

Contudo, pelo Teorema Fundamental, apresentado acima, este operador pode ser decomposto como segue :

$$N(\cdot) = P(\cdot) - A(\cdot) \quad (2.25)$$

onde

$P(\cdot)$  é simétrico em relação a  $\sigma$  (potencial em relação a  $\sigma$ );

$A(\cdot)$  é anti-simétrico em relação a  $\sigma$

Portanto,

$$N(u) = P(u) - A(u) \quad (2.26)$$

(o sinal de “-“ é devido à anti-simetria em relação à  $\sigma$ )

Assim,

$$P(u) = 2uu_x - u_{xxx} \quad (2.27)$$

$$A(u) = \int_0^1 A'_{\lambda u}(\lambda u) d\lambda = \frac{1}{2}(-2u_{xx}) = -u_{xx} \quad (2.28)$$

substituindo (2.27), (2.28) em (2.26), resulta

$$N(u) = (2uu_x - u_{xxx}) - (-u_{xx}) \quad (2.29)$$

Portanto, o funcional relativo a (2.29) é

$$F[u] = \left\langle \int_0^1 N(\lambda u) d\lambda, u \right\rangle_{\sigma} = \left\langle \frac{2}{3}uu_x, u \right\rangle_{\sigma} - \left\langle \frac{1}{2}u_{xxx}, u \right\rangle_{\sigma} + \left\langle \frac{1}{2}u_{xx}, u \right\rangle_{\sigma} \quad (2.30)$$

$$F[u] = \left\langle \frac{1}{3}u^2 - \frac{1}{2}u_{xx}u + \frac{1}{2}u_xu \right\rangle_{\sigma} \quad (2.31)$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange ao funcional (2.31), resulta

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u} = \frac{1}{3}u^2 - \frac{1}{2}u_{xx} + \frac{1}{2}u_x \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u_x} = \frac{1}{2}u \therefore \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u_x} \right) = \frac{1}{2}u_x \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u_{xx}} = -\frac{1}{2}u \therefore \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u_{xx}} \right) = -\frac{1}{2}u_{xx} \quad (2.34)$$

$$\varepsilon(\mathbf{L}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{L}(u)] + \frac{\partial^2}{\partial u^2} [\mathbf{L}(u)] \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 - \frac{1}{2}u_{xx} + \frac{1}{2}u_x - \frac{1}{2}u_{xx} \right) = \quad (2.35)$$

$$= (u^2 - u_{xx})_x = 2uu_x - u_{xxx} = P(u)$$

Neste caso, a variação do funcional produz

$$D(F[u])(\varphi) = [\varepsilon(L) - A(u)](\varphi) = [P(u) - A(u)](\varphi) \quad (2.36)$$

Observação 1 :

A equação de Euler-Lagrange só reproduz a parte  $\sigma$ -simétrica do operador  $N(\cdot)$ .

Observação 2 :

O operador  $\frac{\partial}{\partial x}$  aparece na equação de Euler-Lagrange, o que difere da equação de Euler-Lagrange clássica, devido o termo  $\int_a^x$  que está presente em  $\sigma$ .

## 2.7 Operador Potencial Linear

Considere o caso particular em que o operador  $N(\cdot)$ , seja um operador potencial e linear. Neste caso, a equação (2.5)

$$D(N)(\varphi) = N'_u \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{N(u + \varepsilon \varphi) - N(u)}{\varepsilon} \right] = N(\varphi) \quad (2.37)$$

Neste caso, a condição de simetria proposta em (2.7), pode ser escrita como

$$\int_{\Omega} \psi N(\varphi) d\Omega = \int_{\Omega} \varphi N(\psi) d\Omega \quad (2.38)$$

Portanto,  $N'_u(\cdot) = N(\cdot)$ . Aplicando-se a equação (2.3), para determinar o funcional correspondente, tem-se :

$$F[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u N(u) d\Omega \quad (2.39)$$

## Capítulo 3

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DO CÁLCULO VARIACIONAL INVERSO

A descrição matemática de um fenômeno físico é usualmente feita em função de um conjunto de equações, escrito como segue :

$$N(u) - P = 0 \tag{3.1}$$

Onde  $u$  representa uma função desconhecida, possivelmente um vetor ou um tensor;  $P$  representa uma função conhecida e  $N(\cdot)$  representa um operador genérico que transforma a função  $u$ , definida em espaço vetorial apropriado  $X$ , em outra função, definida no espaço vetorial  $Y$ , o qual inclui a função conhecida  $P$ . Daqui para frente, todas as funções e operadores podem ter o significado de vetores de funções e matrizes de operadores.

Um entendimento mais profundo do fenômeno físico pode ser obtido a partir da formulação variacional, nos casos em que tal formulação seja possível. A formulação variacional pode ser usada como ponto de partida para análises teóricas sobre a existência e unicidade da solução, ou pode ser usada como ponto de partida para a construção de métodos de solução numérica; com referência a esta última justificativa para a formulação variacional, a disponibilidade de uma formulação variacional permite o cálculo de estimativas de erro.

Entretanto, não é sempre simples dar uma formulação variacional a um problema matemático. Em particular na ausência de simetria do operador que governa o problema, com respeito a uma forma bilinear, é quase impossível construir uma formulação variacional relevante.

O problema da construção de um funcional a partir de um operador, foi primeiramente estudado por Vainberg [1]. Quando foi estabelecido que a questão da existência de um princípio variacional era equivalente a se determinar se o operador em questão era, ou não, potencial. Os resultados encontrados por Vainberg resultaram na proposição de um teorema de escopo geral e abstrato, o que o colocou em uma condição de inacessibilidade para matemáticos e engenheiros por muito tempo. No capítulo

anterior discutiu-se estes resultados e propôs-se uma generalização ainda maior deste teorema ao qual deu-se o nome de Teorema Fundamental do Problema Inverso do Cálculo das Variações.

Em seguida, Morse e Feshbach [2] propuseram o, então chamado, “Método do Operador Adjunto” como uma ferramenta para simetrizar operadores lineares não-simétricos de forma a obter a formulação variacional clássica para os problemas governados por tais operadores. Entretanto, este método requer a introdução de um novo conjunto de incógnitas, às vezes, sem significado físico. Nesse caso o funcional resulta em duas variáveis,  $u$  e  $u^*$  (variável primal e variável dual). Assim, a formulação feita deixa de ser uma formulação forte, que é o interesse principal deste trabalho, tornando-se desta forma um princípio equivalente ao princípio dos trabalhos virtuais, ou formulação fraca.

Em 1968, Tonti [3] publicou um trabalho em que reenfatizou que a simetria do operador, é para um operador diferencial, um requisito mais fraco do que o operador ser auto-adjunto. Além disso, mostrou a condição necessária para que uma equação admita uma formulação variacional e vários tipos de condições suficientes. Com essas condições tornou possível uma inspeção sistemática de todas as teorias de campo para encontrar novamente os princípios variacionais já conhecidos e outros novos com a finalidade de completar o número de princípios variacionais possíveis em cada uma dessas teorias [4, 5].

Em 1969, Tonti publicou um trabalho [6, 7] auto suficiente em que desenvolveu um formalismo para se determinar quando uma equação não-linear, ou um sistema de equações não-lineares admitem uma formulação variacional e como encontrar o funcional correspondente.

Em 1972, Finlayson [8] estendeu o trabalho de Morse e Feshbach [2] para o caso geral não-linear. Contudo não abrangeu todas as classes de equações não-lineares, como por exemplo as equações de Navier-Stokes.

Em 1973, Atherton e Homsy [9] apresentaram um trabalho que elucidava muitas conseqüências do teorema de Vainberg [1]. Deduziram fórmulas operacionais para o caso de operadores diferenciais de quarta ordem e para o caso escalar geral. Aplicaram essas fórmulas para algumas equações diferenciais não-lineares que surgem no estudo de ondas interfaciais. Trataram, também, o caso de vetores de operadores. Construíram fórmulas operacionais para determinar se existe, ou não, um potencial para um sistema de equações diferenciais de tamanho arbitrário, ordem arbitrária, e em um

número arbitrário de variáveis. Em resumo, fizeram uma revisão dos trabalhos dos autores já mencionados anteriormente.

Também em 1973, Tonti [10] estudou o caso de problemas lineares, dependentes do tempo, tais como, por exemplo, o caso da dinâmica do contínuo com condições iniciais que destroem a simetria com respeito às formas clássicas bilineares. Suas formulações variacionais são, portanto, não-clássicas e, em geral, difíceis de serem aplicadas a propósitos práticos.

Em 1978, Reiss e Haug [13] também estudaram os problemas lineares, dependentes do tempo, estendendo o estudo de Tonti [10].

Magri [14], em 1974, propôs uma técnica para obter formulações variacionais associadas com operadores lineares não-potenciais, modificando convenientemente as formas bilineares em jogo.

Tonti [15], em 1984, e Ortiz [16], em 1985, com base na referência anterior propuseram um método para obter formulações variacionais associadas a vários problemas não-lineares. Este método é baseado na escolha de uma função kernel linear, inversível e simétrica  $K(\cdot)$ , a qual permite a construção, em uma maneira sistemática, de funcionais estendidos associados a classes de problemas não-lineares. O uso prático desse método repousa na escolha da função kernel, e pouca indicação é dada, pela teoria geral, em como escolhê-la dentre o número infinito de possíveis kernels. De uma forma bastante resumida, o funcional estendido proposto por Tonti é o seguinte:

$$F[u] = \frac{1}{2} \langle N(u), KN(u) \rangle - \langle P, KN(u) \rangle \quad (3.2)$$

Auchmuty [17], em 1988, desenvolveu as idéias de Tonti. Os resultados obtidos por Auchmuty podem ser vistos como baseados na divisão do operador não-linear  $N(\cdot)$  em uma parte linear positivo definida  $S(\cdot)$ , e uma parte residual  $R(\cdot)$ :

$$N(\cdot) = S(\cdot) + R(\cdot) \quad (3.3)$$

Explorando as conseqüências dessa divisão, Auchmuty pode estender a teoria original de Tonti, considerando como a função kernel  $K(\cdot)$ , o operador  $S^{-1}(\cdot)$ ; isto leva a reformulação do funcional (3.2) a uma única função desconhecida  $u$ .



Mais interessante ainda, do ponto de vista de aplicação, é que Auchmuty pôde escrever, explorando a teoria da dualidade não-convexa, um funcional dual estendido, começando a partir de um funcional Lagrangeano definido em termos de duas funções desconhecidas, a original  $u$  e uma auxiliar  $v$ . Assim de forma resumida o funcional Lagrangeano introduzido por Auchmuty é o seguinte :

$$A[u, v] = \langle (v - u), [R(u) - P] \rangle - \frac{1}{2} \langle u, Su \rangle + \frac{1}{2} \langle v, Sv \rangle \quad (3.4)$$

A equação (3.4), pode ser interpretada como um trabalho virtual somado a uma formulação energética em  $u$  e outra em  $v$ .

Desta forma a solução da equação (3.1) é encontrada primeiro, calculando o mínimo em relação a  $u$  do funcional  $A[u, v]$  (obtendo assim, como mencionado acima, o funcional dual estendido em uma única função desconhecida  $v$ ), e o máximo em relação a  $v$ .

Todavia, Auchmuty escreveu o problema estendido somente para o caso linear. Além disso, não fez nenhum comentário sobre o significado da função auxiliar desconhecida  $v$ , em relação a significado da função real  $u$ .

Independentemente do trabalho de Auchmuty, Carini [18 - 23], desenvolveu essa técnica, em relação a várias aplicações específicas no campo da mecânica do contínuo. Todavia, convém salientar que não se tem uma formulação energética, mas sim uma formulação fraca.

Convém salientar que neste trabalho será empregado o neologismo “potencializar” um dado operador no sentido de achar uma formulação energética conveniente para ele.

A trajetória histórica de tentativas de solução do problema inverso do cálculo variacional poderia ser resumida da seguinte forma :

A definição de potencialidade de um operador é feita em função de uma forma bilinear, ou seja, dada uma forma bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\sigma_1}$ , um operador pode, ou não, ser potencial em relação a ela. No caso de não ser, uma das técnicas desenvolvidas é a definição de uma outra forma bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\sigma_2}$ , segundo à qual o operador torna-se

potencial. Outra possibilidade seria a substituição de variáveis ou do operador. E finalmente, existe a possibilidade de se combinar as duas técnicas.

### 3.1 Método da Modificação da Forma Bilinear

Seguindo a trilha deixada por Tonti, Magri e outros, Neste item serão apresentados alguns exemplos de modificação do forma bilinear, com o objetivo de se potencializar um operador.

#### Exemplo 1:

Considere a seguinte equação associada a um circuito RLC série, onde  $q$  é a carga elétrica do circuito.

$$Lq_{tt} + Rq_t + \frac{1}{C}q = 0 \quad (3.5)$$

Da equação (3.5) pode-se destacar o seguinte operador

$$P(q) = \left( LD_{tt} + RD_t + \frac{1}{C} \right) q \quad (3.6)$$

O operador  $P(\cdot)$  é um operador linear e pode ser facilmente verificado que não é simétrico em relação à forma bilinear apresentada por (2.38).

Assim, o operador em questão não é potencial, e portanto não possui uma formulação variacional. Contudo, se a forma bilinear for redefinida convenientemente, o operador  $P(\cdot)$  torna-se potencial em relação a essa nova forma bilinear.

Considere a seguinte modificação na equação (3.5) desse exemplo:

$$Lq_{tt} + Rq_t + \frac{1}{C}q = 0 \therefore q_{tt} + \frac{R}{L}q_t + \frac{1}{LC}q = 0 \quad (3.7)$$

Portanto, o operador fica redefinido da seguinte forma :

$$P(q) = \left( D_{tt} + \frac{R}{L}D_t + \frac{1}{LC} \right) q \quad (3.8)$$

Redefine-se a forma bilinear da forma usual para a seguinte :

$$\langle u, v \rangle = \int_t^R uv e^{\frac{R}{L}t} dt \quad (3.9)$$

Fazendo  $\omega = e^{\frac{R}{L}t}$   $\alpha = \frac{R}{L}$   $\beta = \frac{1}{LC}$  (3.9) pode ser reescrita como,

$$\langle \psi, P(q) \rangle = \langle \psi, P(q)\omega \rangle = \langle \psi, D_t(\omega D_t)q + \beta\omega q \rangle = \langle q, P(\psi) \rangle + \gamma \quad (3.10)$$

Portanto, pode-se observar que o operador tornou-se potencial, e portanto, permite a formulação variacional.

$$F[q] = \int_0^1 \langle P(\lambda q), q \rangle d\lambda = \left\langle \frac{1}{2} (q_t^2 + \beta q^2) e^{\alpha t} \right\rangle \quad (3.11)$$

Aplicando-se a equação de Euler-Lagrange em (3.11), obtém-se (3.5).

### Exemplo 2:

Considere a seguinte equação diferencial não-linear :

$$u_{tt} + \frac{2}{t}u_t + u^5 = 0 \therefore P(u) = u_{tt} + \frac{2}{t}u_t + u^5 = 0 \therefore P(u) = \left( D_{tt} + \frac{2}{t}D_t + D_0^5 \right) u \quad (3.12)$$

O operador  $P$ , acima é um operador não-linear e não é simétrico segundo a forma bilinear definida em (2.10). Portanto, o operador não é potencial.

Contudo, se a forma bilinear for redefinida, como mostrado a seguir, em (3.13), verifica-se que a condição de simetria é alcançada

$$\langle u, v \rangle = \int_t^R u \cdot vt^2 dt \quad (3.13)$$

$$\langle \psi, P'_u(\varphi) \rangle = \langle \psi, \varphi_{tt} + 2\varphi_t + 5u^4\varphi t^2 \rangle = \langle \psi, D_t(t^2 D_t)\varphi + 5u^4 t^2 \varphi \rangle = \langle \varphi, P'_u(\psi) \rangle + \gamma \quad (3.14)$$

Desta forma, com a redefinição da forma bilinear, o operador permite uma formulação variacional.

$$F[u] = \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 uP(\lambda u)t^2 d\lambda \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2}uu_u t^2 + uu_t + \frac{1}{6}u^6 t^2 \right] d\Omega \quad (3.15)$$

que é equivalente a

$$F[u] = \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{6}u^6 \right) t^2 d\Omega \quad (3.16)$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange em (3.16), retorna-se a (3.12).

### 3.2 Método da Substituição de Variáveis

Na linha de trabalhos apresentados por Finlayson e outros, dado um operador e verificando-se que não se trata de um operador potencial, pode-se tentar uma substituição de variáveis de modo a torná-lo potencial. A seguir serão apresentados alguns exemplos desta técnica.

#### Exemplo 1:

Considere o seguinte operador :

$$P(u) = u_t + Au_x \quad (3.17)$$

Observa-se que se trata de um operador linear e não-potencial visto que não é simétrico segundo a forma bilinear explicitada por (2.38).

Porém, substituindo  $u$  por  $v_x$ , o operador torna-se potencial :

$$P(v) = v_{xt} + Av_{xx} = (D_{xt} + AD_{xx})v \quad (3.18)$$

Observa-se, claramente, que o operador  $P$  apresentado em (3.18) é potencial, permitindo assim formulação variacional.

$$F[v] = \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 v \cdot (\lambda v_{xt} + \lambda A v_{xx}) d\lambda \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} v v_{xt} + \frac{1}{2} A v v_{xx} \right) d\Omega \quad (3.19)$$

ou, ainda

$$F[v] = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} v_t v_x + \frac{1}{2} A (v_x)^2 \right) d\Omega \quad (3.20)$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange a (3.19) ou a (3.20), retorna-se ao operador inicial.

### Exemplo 2:

Considere o operador :

$$P(u) = u_t + uu_x \quad (3.21)$$

Observa-se que se trata de um operador não-linear e não-potencial, visto que a derivada de Gâteaux desse operador não é simétrica, não se verificando, portanto, a equação (2.10).

Porém se a variável  $u$  for substituída por  $v_x$  o mesmo operador torna-se potencial. Assim, fazendo a substituição proposta, a equação (3.21) torna-se

$$P(v) = v_{xt} + v_x v_{xx} \quad (3.22)$$

A derivada de Gâteaux de (3.22) fica

$$P'_v(\psi) = \psi_{xt} + v_x \psi_{xx} + v_{xx} \psi_x = (D_{xt} + v_x D_{xx} + v_{xx} D_x) \psi \quad (3.23)$$

Observa-se que (3.23) satisfaz a eq. (2.10), de modo que o operador tornou-se potencial, permitindo uma formulação variacional.

$$F[v] = \int_{\Omega} \left( \int_0^1 v \cdot (\lambda v_{xt} + \lambda^2 v_x v_{xx}) d\lambda \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} v v_{xt} + \frac{1}{3} v v_x v_{xx} \right) d\Omega \quad (3.24)$$

ou ainda,

$$F[v] = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} v_x v_t + \frac{1}{6} (v_x)^3 \right) d\Omega \quad (3.25)$$

Aplicando-se a equação de Euler-Lagrange em (3.24) ou (3.25) obtém-se (3.21).

As substituições de variáveis feitas acima, não têm um caráter óbvio e imediato como pode ter transparecido. Assim, por exemplo, se ao invés de substituir-se  $u$  por  $v_x$ , mas  $u$  por  $v_t$ , em (3.21) o operador em questão não se teria tornado potencial, conforme mostrado a seguir

$$P(v) = v_{tt} + v_t v_{tx} \quad (3.26)$$

Assim, a derivada de Gâteaux desse operador fica

$$P'_v(\psi) = \psi_{tt} + v_t \psi_{tx} + v_{tx} \psi_t = (D_{tt} + v_t D_{tx} + v_{tx} D_t) \psi \quad (3.27)$$

Verificando que essa derivada de Gâteaux não é simétrica, pois não verifica nem a equação (2.10). Portanto, a substituição proposta não foi adequada para tornar potencial o operador.

### Exemplo 3:

Considere a equação de Korteweg de Vries, conhecida como equação KDV

$$P(u) = u_t + u_{xxx} - 6uu_x \quad (3.28)$$

Já se sabe, da literatura especializada, que este operador não é potencial. Porém, se for feita a substituição da variável  $u$  por  $v_x$ , o operador torna-se potencial.

$$P(v) = v_{xt} + v_{xxx} - 6v_x v_{xx} \quad (3.29)$$

A derivada de Gâteaux de (3.29) resulta em

$$P'_v(\psi) = \psi_{xt} + \psi_{xxx} - 6v_x \psi_{xx} - 6v_{xx} \psi_x = (D_{xt} + D_{xxx} - 6v_x D_{xx} - 6v_{xx} D_x) \psi \quad (3.30)$$

Verifica-se que essa derivada é simétrica, o que indica que o operador tornou-se potencial, permitindo, assim uma formulação variacional.

$$F[v] = \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 v (\lambda v_{xt} + \lambda v_{xxx} - 6\lambda^2 v_x v_{xx}) d\lambda \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} v v_{xt} + \frac{1}{2} v v_{xxx} - 2v v_x v_{xx} \right) d\Omega \quad (3.31)$$

A eq. (3.31) pode ser reescrita como

$$F[v] = \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2} v_t v_x + \frac{1}{2} v_{xx}^2 + v_x^3 \right) d\Omega \quad (3.32)$$

Assim, com esses exemplos, encerra-se a apresentação de exemplos ilustrativos de potencialização de operadores, segundo as principais que contribuíram para a solução do problema inverso do cálculo das variações.

## Capítulo 4

### FORMULAÇÃO VARIACIONAL PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Muitas leis físicas podem ser formuladas em uma forma local, isto é, relacionando o valor de uma ou mais variáveis em um ponto com os valores das mesmas, ou outras, variáveis nas vizinhanças, resultando daí as variações das variáveis.

Assim, a forma local de uma lei física é descrita matematicamente por meio de equações diferenciais. Isto explica porque as equações diferenciais são tão freqüentes na física e na engenharia.

As equações diferenciais diferem, no mínimo, em dois aspectos das outras equações. Primeiro, os operadores diferenciais podem operar somente sobre funções que possuam requisitos mínimos de derivabilidade. O segundo aspecto que as diferencia das demais equações, é que se deve atribuir a elas condições adicionais que podem ser: condições iniciais, condições de contorno, ou ainda, condições de regularidade. Condições essas que devem ser satisfeitas pelas funções.

Por isso faz-se uma distinção entre operador diferencial formal, que é o conjunto de símbolos de derivação com seus coeficientes, formando a equação propriamente dita e que é denotado por  $N$  (itálico maiúsculo), e o operador diferencial que é o operador diferencial formal mais as condições adicionais, que é representado por  $N$ .

#### 4.1 Conceituação Básica

As funções que satisfazem os requisitos de derivabilidade e condições adicionais, formam um conjunto chamado de domínio do operador, e será representado por  $D(N)$ .

Assim, uma equação diferencial será denotada por :

$$N(u) = 0 \tag{4.1}$$

Quando associa-se às equações diferenciais algumas condições adicionais que devam ser satisfeitas pelas funções  $u$ , prescreve-se um domínio. A equação juntamente



com essas condições adicionais formam um problema, que pode ser representado por uma das seguintes notações :

$$N(u) = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} N(u) = 0 \\ u \in D(N) \end{cases} \quad (4.2)$$

Um operador diferencial formal não pode operar sobre todas as funções de um espaço de funções, mas somente no subespaço daquelas funções que tenham os requisitos de derivabilidade suficientes. Por exemplo, o operador diferencial formal  $N$  definido por  $N(u) = \ddot{u}^2$  opera somente sobre as funções que possuem derivada segunda.

O subespaço formado por aquelas funções tendo os requisitos mínimos de derivabilidade será chamado de espaço ambiente do operador formal  $N$ .

Cada domínio é um subespaço do espaço ambiente. Assim, o espaço ambiente pode ser considerado como o “ambiente” no qual cada domínio pode ser acomodado.

Considere agora, uma relação diferencial não-linear :

$$v = N(u) \quad (4.3)$$

Onde  $u$  é uma função ou um conjunto de funções tais como um vetor, um tensor, etc. Denotar-se-á por  $x$ , concisamente, as variáveis independentes, portanto,  $u = u(x)$ . Deve-se considerar apenas operadores formais tais que  $u$  e  $v$  sejam da mesma ordem tensorial.

Exemplo de operadores diferenciais formais desse tipo são:

- $N(u) = m\ddot{u}(t) + h\dot{u}(t) + ku(t) = y(t) \quad (4.4)$

que aparece nas oscilações. Ele transforma uma função  $u(t)$  em uma função  $y(t)$ .

- $N(u) = \sum_k \left[ -\frac{\partial}{\partial x^k} \left( \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x^k} \right) \right] = v(x) \quad (4.5)$

que aparece na condução térmica para coeficientes de condutividade não lineares. Ele transforma uma função  $u(x)$  em uma função  $v(x)$ .

- $$N(u) = \sum_k \left[ u^h \frac{\partial u^k}{\partial x^h} + \frac{\partial u^k}{\partial t} \right] = a^k(x, t) \quad (4.6)$$

que aparece na fluido-dinâmica. Ele transforma um vetor  $u^1(x, y, z, t)$  (velocidade), em um vetor  $a^k(x, y, z, t)$  (aceleração).

- $$A(u) = \frac{1}{2} (g_{ht} \nabla_k + g_{kt} \nabla_h) u^t = e_{hk} \quad (4.7)$$

que aparece na mecânica do contínuo. Ele transforma um vetor (que é um tensor de primeiro posto)  $u^1$  em um tensor de segundo posto  $e_{hk}$ .

- $$D(g) = \frac{1}{2} \left( \delta_\alpha^\mu \delta_\rho^\nu \frac{\partial}{\partial x^\beta} + \delta_\beta^\mu \delta_\rho^\nu \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \frac{\partial}{\partial x^\rho} \right) g_{\mu\nu} = \Gamma_{\alpha\beta\rho} \quad (4.8)$$

que aparece na geometria diferencial. Ele transforma um tensor de segundo posto em um conjunto de funções com três índices, que são os símbolos de Christoffel (neste caso de natureza não tensorial).

Todo lagrangeano pode ser concebido como um operador formal não linear, agindo sobre o campo de funções  $q^k$ ,

$$L(q^k, \dot{q}^k, t) = L(q) \quad (4.9)$$

Como usual, qualquer que seja a ordem tensorial de  $u$  e  $v$ , pode-se associar  $u$  e  $v$  como dois vetores em dois espaços de função. O operador formal associa um vetor do espaço  $u$  a um vetor do espaço  $v$ . Quando  $u$  e  $v$  são da mesma ordem tensorial esta correspondência define um campo vetorial no espaço  $u$ .

Assim, um operador mapeando um tensor  $u$  em tensor  $v$  da mesma ordem descreve um espaço vetorial no espaço de funções.

Essa interpretação reúne a teoria de operadores e a teoria de campos vetoriais. Assim, muitos conceitos de campos vetoriais podem ser estendidos a operadores. Analogamente, um funcional, tal como :

$$F[u] = \iint_S \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy \quad (4.10)$$

associa a cada vetor  $u$  do espaço  $u$ , um número  $F$ , assim, um funcional descreve um campo escalar no espaço de função.

Assim, estabelecida a relação entre operador e funcional, e usando as definições estabelecidas acima, pode-se resumir os conceitos apresentados no capítulo anterior da seguinte forma:

Dado um operador  $N$ , que seja potencial, a condição necessária e suficiente para que as soluções da equação  $N(u) = 0$ , pertencentes ao domínio  $D(N)$ , faça um funcional estacionário entre todas as funções vizinhas é que o operador possua a derivada de Gâteaux simétrica.

Se o operador  $N$  for formalmente potencial, a condição necessária e suficiente para que as soluções da equação  $N(u) = 0$ , pertencentes ao espaço ambiente, faça um funcional estacionário entre algumas funções vizinhas é que o operador possua a derivada de Gâteaux formalmente simétrica.

## 4.2 Formulação Variacional para Sistemas de Equações Diferenciais

Como dito anteriormente,  $N(u)$  não significa somente uma equação, mas também um sistema de equações diferenciais. Neste caso,  $N$  significa a matriz ou o tensor do operador diferencial formal do sistema inteiro. Contudo, como acontece freqüentemente, em muitas aplicações práticas, tem-se dois sistemas de equações diferenciais cujas matrizes ou operadores tensoriais tem uma estrutura diferente, como por exemplo, em eletromagnetismo, os dois conjuntos das equações de Maxwell. Assim, deduz-se a partir da regra geral de potencialidade formal a condição explícita para deduzir dois sistemas de equações diferenciais a partir da estacionaridade de um único funcional.

Dados os dois sistemas :

$$\begin{cases} N(u, v) = 0 \\ M(u, v) = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

onde  $u$  e  $v$  são vetores ou tensores, ainda que de uma ordem tensorial diferente (por exemplo, uma função  $u$  e um vetor  $v$ ),  $N$  e  $M$  são operadores formais de estruturas diferentes. Pode-se denotar o sistema global por :

$$R(u, v) = \begin{bmatrix} N(u, v) \\ M(u, v) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Fazendo  $(u, v) = w$ , a equação (4.11), fica

$$R(w) = \begin{bmatrix} N(w) \\ M(w) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Variando os operadores  $M$  e  $N$ , vem

$$\delta N(u, v) = \frac{\delta N}{\delta u} \delta u + \frac{\delta N}{\delta v} \delta v \quad (4.13)$$

$$\delta M(u, v) = \frac{\delta M}{\delta u} \delta u + \frac{\delta M}{\delta v} \delta v$$

Assim, em notação matricial, pode-se escrever que:

$$\delta R(w) = \delta \begin{bmatrix} N(u, v) \\ M(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta N}{\delta u} & \frac{\delta N}{\delta v} \\ \frac{\delta M}{\delta u} & \frac{\delta M}{\delta v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

fazendo

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta N}{\delta u} & \frac{\delta N}{\delta v} \\ \frac{\delta M}{\delta u} & \frac{\delta M}{\delta v} \end{bmatrix} = J \quad (4.15)$$

pode-se escrever a equação (4.14) da seguinte forma:

$$\delta R(w) = J \delta \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = J \delta w \quad (4.16)$$

Assim,

$$\langle \delta R(w), w^* \rangle = \langle J \delta w, w^* \rangle = \langle \delta w, (J^*)^T R^* \rangle + \gamma \quad (4.17)$$

onde  $w^*$  é a variável dual de  $w$ .

Definindo

$$(J^*)^T = \tilde{J}; \quad \frac{\delta N}{\delta u} = N'_u; \quad \frac{\delta N}{\delta v} = N'_v; \quad \frac{\delta M}{\delta u} = M'_u; \quad \frac{\delta M}{\delta v} = M'_v \quad (4.18)$$

Desta forma, pode-se escrever que :

$$J = \begin{bmatrix} N'_u & N'_v \\ M'_u & M'_v \end{bmatrix} \Rightarrow J^* = \begin{bmatrix} (N'_u)^* & (N'_v)^* \\ (M'_u)^* & (M'_v)^* \end{bmatrix} \Rightarrow (J^*)^T = \begin{bmatrix} (N'_u)^* & (M'_u)^* \\ (N'_v)^* & (M'_v)^* \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

ou ainda,

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} \tilde{N}'_u & \tilde{M}'_u \\ \tilde{N}'_v & \tilde{M}'_v \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Assim, pode-se observar que a condição de potencialidade é :

$$N'_u = \tilde{N}'_u \quad M'_v = \tilde{M}'_v \quad N'_v = \tilde{M}'_u \quad (4.21)$$

Portanto, pode-se concluir que o sistema de equações diferenciais (4.10), vem de um único funcional estacionário.

Para achar o funcional opera-se da seguinte forma :

$$l[u, v] = l[R] = \int_0^1 wR(\lambda w)d\lambda = \int_0^1 [uM(\lambda u, \lambda v) + vN(\lambda u, \lambda v)]d\lambda \quad (4.22)$$

## Capítulo 5

### MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DO OPERADOR

O método aqui proposto permitirá a potencialização de um operador  $N(\cdot)$ , por meio da aplicação do Teorema Fundamental do Problema Inverso do Cálculo das Variações (2.6). Este método consiste na decomposição do operador proposto em duas partes: uma simétrica e outra anti-simétrica, cada uma resultando em lagrangeano. Para que isto seja possível o operador dado tem que satisfazer as hipóteses do referido teorema.

A parte simétrica de um operador hipotético  $N(u)$ , pode ser determinada da seguinte forma :

$$N_s(u) = \frac{N(u) + \tilde{N}(u)}{2} \quad (5.1)$$

Já a parte anti-simétrica de  $N(u)$ , obtém-se assim :

$$N_a(u) = \frac{N(u) - \tilde{N}(u)}{2} \quad (5.2)$$

Convém ressaltar que o Lagrangeano da parte simétrica do operador corresponde à parte conservativa do sistema, enquanto que o Lagrangeano da parte anti-simétrica corresponde à parte dissipativa do sistema.

Torna-se necessário, também a definição de duas formas bilineares a serem empregados no método, um para a parte simétrica do operador e outro para a parte anti-simétrica do operador.

Para a parte simétrica do operador, define-se :

$$\langle u, v \rangle_s = \int_{\Omega} u \cdot v d\Omega = \langle v, u \rangle_s \quad (5.3)$$

Já para a parte anti-simétrica, define-se, um produto anti-simétrico, que pode ser, por exemplo :

$$\langle u, v \rangle_a = \int_{\Omega} u \cdot \frac{dv}{d\Omega} d\Omega = -\langle v, u \rangle_a \quad (5.4)$$

Assim, o funcional para esse operador fica assim, definido

$$F[u] = \int_0^1 \langle N_s(\lambda u), u \rangle_s + \int_0^1 \langle N_a(\lambda u), u \rangle_a \quad (5.5)$$

Uma vez que se conheça o funcional, pode-se voltar ao operador aplicando-se a equação de Euler-Lagrange. Porém nessa formulação a equação de Euler-Lagrange deve ser aplicada em separado, aplica-se para o Lagrangeano da parte simétrica ( $L_s$ ) e em seguida para o Lagrangeano da parte anti-simétrica ( $L_a$ ), conforme indicado a seguir.

Para a parte simétrica a equação de Euler-Lagrange é aplicada assim :

$$E^I [L_s] = \frac{\partial L_s}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L_s}{\partial \dot{u}} \right] + \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{\partial L_s}{\partial \ddot{u}} \right] - \dots = 0 \quad (5.6)$$

Para a parte anti-simétrica, tem-se :

$$E^{II} [L_a] = \frac{\partial L_a}{\partial \dot{u}} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L_s}{\partial \ddot{u}} \right] + \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{\partial L_s}{\partial \ddot{u}} \right] - \dots = 0 \quad (5.7)$$

Portanto, a equação de Euler-Lagrange resultante seria:

$$\text{Equação de Euler-Lagrange} = E^I + E^{II} = 0 \quad (5.8)$$

A seguir será apresentada uma série de exemplos que ilustram a aplicação do método.

## 5.1 Aplicação do Método de Decomposição do Operador à Equação do Circuito RLC Série

Afim de ilustrar o método exposto acima, considere o operador  $P(q) = Lq_{tt} + Rq_t + \frac{1}{C}q$ . Como já se sabe, trata-se de um operador não-potencial. E sua parte simétrica é :

$$P_s(q) = \left( LD_{tt} + \frac{1}{C} \right) q \quad (5.10)$$

Já a parte anti-simétrica desse operador é :

$$P_a(q) = (RD_t) q \quad (5.11)$$

Portanto, usando-se as formas bilineares (5.3) e (5.4), a formulação variacional desse operador fica

$$F[q] = \frac{1}{2} \langle P_s(\lambda q), q \rangle_s + \frac{1}{2} \langle P_a(\lambda q), q \rangle_a = \frac{1}{2} \int_t \left( Lq_{tt}q + \frac{1}{C}q^2 \right) dt + \frac{1}{2} \int_t Rq_t^2 dt \quad (5.12)$$

Integrando (5.12) por partes, pode-se chegar a outra configuração de funcional.

$$F[q] = \frac{1}{2} \int_t \left( -Lq_t^2 + \frac{1}{C}q^2 \right) dt + \frac{1}{2} \int_t Rq_t^2 dt \quad (5.13)$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange ao funciona (5.13), resulta em :

$$E^I [L_s] + E^{II} [L_a] = 0 \therefore Lq_{tt} + Rq_t + \frac{q}{C} = 0 \quad (5.14)$$



Portanto, pode-se observar que a aplicação da equação de Euler-Lagrange ao funcional (5.13), obtém-se, o operador dado inicialmente.

## 5.2 A Decomposição do Operador $P(u) = u_t + Au_x$

Ainda com o intuito de ilustrar melhor o método proposto, considere o operador  $P(u) = u_t + Au_x$  que como já se sabe, trata-se de um operador não-potencial. Por inspeção vê-se que se trata de um operador não possui parte simétrica. Assim, tem-se :

$$P_a(u) = (D_t + AD_x)u \quad (5.15)$$

Logo, a representação variacional desse operador fica :

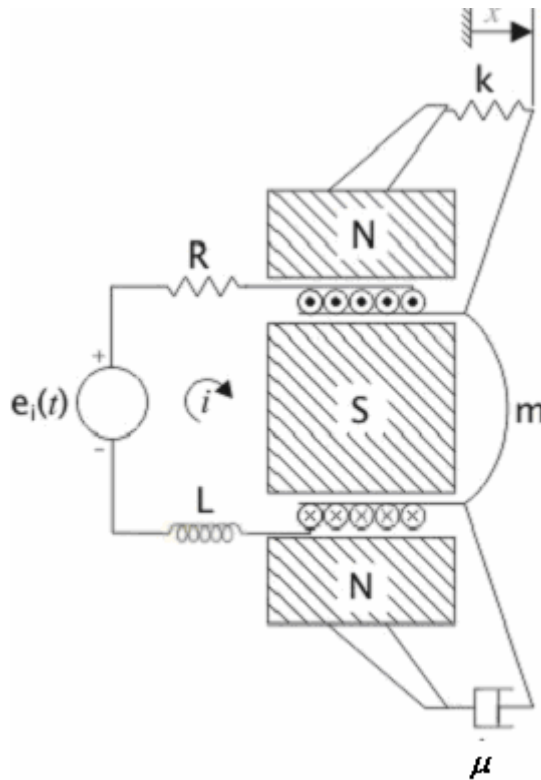
$$\begin{aligned} F[u] &= \int_0^1 \langle P_a(\lambda u), u \rangle_a d\lambda = \frac{1}{2} \langle P_a(u), u \rangle = \frac{1}{2} \int_t u_t \cdot \frac{du}{dt} dt + \frac{1}{2} \int_x Au_x \cdot \frac{du}{dx} dx = \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} Au_x^2 \right) d\Omega \end{aligned} \quad (5.16)$$

Aplicando-se a equação de Euler-Lagrange apropriada à (5.16), resulta o operador dado.

## 5.3 Formulação Variacional da Equação de Modelagem de um Alto - Falante

Outro exemplo interessante, não só pela aplicação do método proposto, mas que também ilustra a facilidade de interpretação física oferecida pela formulação variacional é a modelagem de um autofalante.

Para tanto, considere o seguinte diagrama.



Onde,

L	Indutância
R	Resistência
K	Rigidez do Diafragma
$\mu$	Atrito Viscoso
$e_i(t)$	Tensão Aplicada
m	Massa
i	Corrente

Fig. 5.1 – Modelo físico de um alto-falante

Depois de linearizada a equação que rege este sistema pode ser escrita, como

$$N(u) = A\ddot{u} + G\dot{u} + Su + Cu = E(t) \quad (5.17)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & \phi' \\ -\phi' & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad E(t) = \begin{bmatrix} e_i(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$u = \begin{bmatrix} q(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

- $x(t)$  é a coordenada do diafragma do autofalante;
- $\phi(x)$  é o fluxo magnético no indutor

$$\phi \cong \phi_0 + \phi' \quad (5.18)$$

O operador  $N(u)$  pode ser decomposto em parte simétrica e anti-simétrica, que são, respectivamente :

$$N_s(u) = A\ddot{u} + G\dot{u} + Cu \quad (5.19)$$

$$N_a(u) = S\dot{u} \quad (5.20)$$

As formas bilineares simétricas e anti-simétricas, adotadas, são, respectivamente:

$$\langle u, v \rangle_s = \int uv dt \quad (5.21)$$

$$\langle u, v \rangle_a = \int u\dot{v} dt \quad (5.22)$$

Assim, pode-se formar o seguinte funcional

$$F[u] = F_s[u] + F_a[u] \quad (5.23)$$

$$F[u] = \int (E_p + E_\phi - E_I - E_C - E_M) dt + \int (D_R + D_\mu) dt \quad (5.24)$$

onde

- $E_p = \frac{1}{2}kx^2$  Energia potencial da membrana;

- $E_\phi = \frac{1}{2} q \phi' \dot{x}$  Trabalho da força induzida pelo gerador;
- $E_l = \frac{1}{2} L \dot{q}^2$  Energia armazenada no indutor;
- $E_C = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$  Energia cinética da membrana;
- $E_M = \frac{1}{2} x \dot{q} \phi'$  Trabalho da força magnética;
- $D_R = \frac{1}{2} R \dot{q}^2$  Dissipação de Rayleigh;
- $D_\mu = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2$  Dissipação por atrito viscoso.

#### 5.4 Formulação Variacional das Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes têm sido apresentadas como um exemplo clássico de um sistema de equações diferenciais não-potenciais, e que portanto, não admitem formulação variacional. Tal afirmativa é confirmada nos trabalhos de Finlayson [8] e Atheton [9]. Contudo, o método proposto neste trabalho é capaz de conduzir à formulação variacional dessas equações.

Para tanto, considere um escoamento compressível bidimensional, em regime permanente, isotérmico com viscosidade  $\mu = \mu(x, y)$  e coeficiente de viscosidade  $\xi = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ ; com velocidade  $\vec{u} = (u, v)$ ; pressão  $P$  e massa específica  $\rho$ , descrito pelas equações de Navier-Stokes.

$$\begin{cases} -\mu(u_{xx} + u_{yy}) - \xi(u_{xx} + v_{xy}) + P_x + \rho(u_x u + u_y v) = 0 \\ -\mu(v_{xx} + v_{yy}) - \xi(u_{xy} + v_{yy}) + P_y + \rho(v_x u + v_y v) = 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

Pode-se associar o sistema de equações (5.25), ao operador não-linear  $N(\cdot)$ , como segue

$$N(\vec{u}) = -\nabla^2(\mu\vec{u}) - \vec{\nabla}(\xi\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \vec{\nabla}P + \rho(\vec{\nabla}\vec{u} \cdot \vec{u}) \quad (5.26)$$

onde,

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}; \quad \vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad \vec{\nabla}\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}; \quad \vec{\nabla}P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix}$$

Agora, considere as seguintes formas bilineares, simétricas e anti-simétricas

$$\left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle_s = \int_{\Omega} (u_1v_1 + u_2v_2) d\Omega \quad (5.27)$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle_a = \int_{\Omega} (u_1v_2 - u_2v_1) d\Omega \quad (5.28)$$

Pode-se observar que o operador  $N(\cdot)$  é um operador não-linear, que pode ser decomposto em uma parte simétrica e em outra parte anti-simétrica, respectivamente :

$$N_s(\vec{u}) = -\nabla^2(\mu\vec{u}) - \vec{\nabla}(\xi\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \vec{\nabla}P \quad (5.29)$$

$$N_a(\vec{u}) = \rho(\vec{\nabla}\vec{u} \cdot \vec{u}) \quad (5.30)$$

Obviamente, pode-se escrever que

$$N(\bar{u}) = N_s(\bar{u}) + N_a(\bar{u}) \quad (5.31)$$

Naturalmente, a formulação variacional de (5.31) conduz ao seguinte funcional

$$F[\bar{u}] = F_s[\bar{u}] + F_a[\bar{u}] \quad (5.32)$$

A parte simétrica de (5.32), pode ser determinada como

$$\begin{aligned} F_s[\bar{u}] &= \left\langle \int_0^1 T_s(\lambda \bar{u}) d\lambda, \bar{u} \right\rangle_s = \sigma_1 \left\langle \int_0^1 \left( -\nabla^2(\mu \lambda \bar{u}) - \bar{\nabla}(\xi \bar{\nabla} \cdot \lambda \bar{u}) + \bar{\nabla} P \right) d\lambda, \bar{u} \right\rangle_s = \\ F_s[\bar{u}] &= \frac{1}{2} \left\langle -\nabla^2(\mu \bar{u}), \bar{u} \right\rangle_s - \bar{\nabla}(\xi \bar{\nabla} \cdot \bar{u}), \bar{u} \right\rangle_s + \left\langle \bar{\nabla} P \cdot \bar{u} \right\rangle_s \\ F_s[\bar{u}] &= \frac{1}{2} \left\langle -\nabla^2(\mu \bar{u}), \bar{u} \right\rangle_s + \frac{1}{2} \left\langle -\bar{\nabla}(\xi \bar{\nabla} \cdot \bar{u}), \bar{u} \right\rangle_s + \left\langle \bar{\nabla} P \cdot \bar{u} \right\rangle_s = \\ F_s[\bar{u}] &= \frac{1}{2} \left\langle -\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}(\mu \bar{u}), \bar{u} \right\rangle_s + \frac{1}{2} \left\langle -\bar{\nabla}(\xi \bar{\nabla} \cdot \bar{u}), \bar{u} \right\rangle_s + \left\langle \bar{\nabla} P \cdot \bar{u} \right\rangle_s = \\ F_s[\bar{u}] &= \frac{1}{2} \left\langle \mu \bar{\nabla} \bar{u}, \bar{\nabla} \bar{u} \right\rangle_s + \frac{1}{2} \left\langle \xi (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}), (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) \right\rangle_s + \left\langle \bar{\nabla} P \cdot \bar{u} \right\rangle_s \end{aligned}$$

Portanto, o funcional representativo de (5.29), fica

$$F_s[\bar{u}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \mu (\bar{\nabla} \bar{u})^2 + \xi (\bar{\nabla} \cdot \bar{u})^2 \right) d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\nabla} P \cdot \bar{u} d\Omega \quad (5.33)$$

Já o funcional representativo de (5.30), pode ser obtido da seguinte maneira

$$F_a[\bar{u}] = \left\langle \int_0^1 T_{SKEW}(\lambda \bar{u}) d\lambda, \bar{u} \right\rangle_a = \left\langle \int_0^1 \rho(\bar{\nabla}(\lambda \bar{u}) \cdot (\lambda \bar{u})) d\lambda, \bar{u} \right\rangle_a = \frac{1}{3} \left\langle \rho(\bar{\nabla}(\bar{u}) \cdot (\bar{u})), \bar{u} \right\rangle_a$$

de acordo com a definição da forma bilinear apresentada em (5.28), resulta

$$F_a[\vec{u}] = \frac{1}{3} \left\langle \rho \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_a = \frac{1}{3} \left\langle \begin{bmatrix} \rho(u_x u + u_y v) \\ \rho(v_x u + v_y v) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_a$$

$$F_a[\vec{u}] = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \rho [u_x u v + u_y v^2 - v_x u^2 - v_y v u] d\Omega$$

Integrando por partes, resulta

$$F_a[\vec{u}] = \int_{\Omega} \rho u v (u_x - v_y) dx dy \quad (5.34)$$

Assim, substituindo (5.33) e (5.34) em (5.32), vem

$$F[\vec{u}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \mu (\vec{\nabla} \vec{u})^2 + \xi (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}, \vec{\nabla} \vec{u}) \right) d\Omega + \int_{\Omega} (\vec{\nabla} P \cdot \vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \rho u v (u_x - v_y) d\Omega \quad (5.35)$$

Do ponto de vista da interpretação física, em  $F_s[\vec{u}]$ , encontra-se as parcelas responsáveis pela energia mecânica e pela energia devida à P.

Em  $F_a[\vec{u}]$ , encontra-se a energia dissipada devido à vorticidade.

## Capítulo 6

### FORMULAÇÃO VARIACIONAL DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Considere o seguinte sistema de equações, o qual é parte do sistema geral das equações de Maxwell.

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0 \\ \text{rot}\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{J} \end{cases} \quad (6.1)$$

Para que (6.1), possa ser escrita na forma matricial, faz-se necessário as seguintes definições

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \vec{D} \\ \vec{B} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{J} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

pode-se, também, escrever, que

$$\begin{bmatrix} \partial_t\vec{B} \\ -\partial_t\vec{D} \end{bmatrix} = \partial_t \begin{bmatrix} \vec{B} \\ -\vec{D} \end{bmatrix} = \partial_t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{D} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \partial_t \mathbf{J} \mathbf{B}, \text{ onde } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Desta forma, o sistema de equações (6.1), pode ser escrito como segue

$$\text{rot}\mathbf{F} + \partial_t\mathbf{J} \mathbf{B} = \mathbf{K} \quad (6.4)$$

Seja o operador  $\mathbf{M}(\mathbf{F}, \mathbf{B})$ , definido como

$$\mathbf{M}(\mathbf{F}, \mathbf{B}) = \text{rot}\mathbf{F} + \partial_t\mathbf{J} \mathbf{B} \quad (6.5)$$

lembrando que  $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{F}$ , então (6.5), pode ser reescrita como



$$M(F) = \text{rot}F + \partial_t J U F \quad (6.6)$$

desta forma a o sistema (6.1), pode ser resumido da seguinte maneira

$$M(F) = K \quad (6.7)$$

Considere agora, a seguinte forma bilinear

$$\langle A, B \rangle_s = \int_{\Omega} \int_t A \cdot B dt d\Omega \quad (6.8)$$

pode-se observar que o operador (6.7) é potencial em relação à expressão (6.8).

Portanto,  $\langle M(F), A \rangle_s = \langle A, M(F) \rangle_s$ , logo pode-se concluir que é possível uma formulação variacional deste operador, resultando no seguinte funcional

$$T[F] = \frac{1}{2} \langle M(F), F \rangle_s - \langle K, F \rangle_s \quad (6.9)$$

Existe uma outra possibilidade de formulação variacional, que será apresentada a seguir, que é através da definição de um operador anti-simétrico. Portanto, define-se, a seguir, o operador  $L$  de natureza anti-simétrica.

$$L(F) = J^T M(F) \therefore L(F) = J^T \text{rot}(F) - U \partial_t(F) \quad (6.10)$$

O operador acima é anti-simétrico em relação à forma bilinear apresentada em (6.8). Porém, esse mesmo operador torna-se, obviamente, potencial em relação à seguinte forma bilinear

$$\langle A, B \rangle_a = \int_{\Omega} \int_t \{J A \cdot B\} dt d\Omega \quad (6.11)$$

onde o sub-índice “a” indica que se trata de uma forma bilinear anti-simétrica.

Assim, de (6.11), resulta o seguinte funcional

$$T[\mathbf{F}] = \frac{1}{2} \langle \mathbf{J}^T \mathbf{M}(\mathbf{F}), \mathbf{F} \rangle_a - \langle \mathbf{J}^T \mathbf{K}, \mathbf{F} \rangle_a \quad (6.12)$$

Antes que o funcional (6.12) seja expandido, considere os seguintes lemas:

Lema 1:  $J^T \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{F} = \text{div} \vec{\mathbf{S}}$ , onde  $\vec{\mathbf{S}}$  é o vetor de Poynting

$$\begin{aligned} J^T \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{rot} \vec{\mathbf{E}} \\ \text{rot} \vec{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{E}} \\ \vec{\mathbf{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{rot} \vec{\mathbf{H}} \\ \text{rot} \vec{\mathbf{E}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{E}} \\ \vec{\mathbf{H}} \end{bmatrix} = -\text{rot} \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \text{rot} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{H}} = \\ &= \text{div}(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) = \text{div} \vec{\mathbf{S}} \end{aligned}$$

Lema 2:  $\partial_t(\mathbf{U}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{F} = \partial_t W$

$$\text{onde } W = \mathbf{U}\mathbf{F}^2 = \varepsilon E^2 + \mu H^2 = \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{H}}$$

Lema 3:  $\mathbf{J}^T \mathbf{K} \cdot \mathbf{F} = -\vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$

$$\mathbf{J}^T \mathbf{K} \cdot \mathbf{F} = \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\mathbf{J}} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{E}} \\ \vec{\mathbf{H}} \end{bmatrix} = -\vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$$

Substituindo os lemas acima na equação (6.12), resulta em

$$T[\mathbf{F}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \int ( \text{div} \vec{\mathbf{S}} + \partial_t W ) dt d\Omega + \int_{\Omega_t} \int ( \vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{E}} ) dt d\Omega \quad (6.13)$$

No lagrangeano do funcional expresso em (6.13), pode-se identificar além do vetor de Poynting, cujo significado já é bastante conhecido, encontra-se o termo  $W$  que representa a densidade de energia dos campos  $\vec{\mathbf{E}}$  e  $\vec{\mathbf{H}}$ . Já o termo  $\vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$  corresponde à potência dissipada dentro da região  $\Omega$ .

## Capítulo 7

### FORMULAÇÃO VARIACIONAL DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL EMPREGANDO BIQUATÉRNIOS

Matematicamente os quatérnios representam uma extensão natural dos números complexos, formando uma álgebra sob a adição e a multiplicação. Esta entidade matemática foi criada por Sir William Rowan Hamilton e o nome quatérnio foi empregado para denotar uma expressão quadrimomial. A forma geral de um quatérnio  $q$  é  $q = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3$ , onde  $\{a_0, a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{R}$ . O termo  $a_0$  é chamado de parte real, enquanto os três outros termos formam juntos um trinômio,  $a_1i + a_2j + a_3k$ , chamado de parte imaginária ou parte vetorial do quatérnio  $q$ . Os fatores  $i, j, k$  constituem-se em unidades imaginárias, ou símbolos sujeitos às leis de combinação apresentadas na tabela B.1, do apêndice B.

Os biquatérnios têm a mesma estrutura dos quatérnios, porém as constantes  $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ , que antes eram reais agora pertencem ao conjunto dos números complexos, e o termo  $a_0$ , passa a se chamar de parte escalar.

Os biquatérnios tem uma aplicação bastante notável nas teorias de campo. A modelagem biquaterniônica para a descrição de campos consiste em um operador na forma de biquatérnio, normalmente referido como operador biquaterniônico, e um campo também expresso na forma de um biquatérnio.

Os campos clássicos, enfocados do ponto de vista da álgebra biquaterniônica, podem ser classificados em três tipos :

- *Campos gerais* – descritos por biquatérnios em que tanto a parte escalar, como a parte vetorial são diferentes de zero;
- *Campos vetoriais* – descritos por biquatérnios em que apenas a parte vetorial é diferente de zero. Este é o caso, por exemplo, do campo eletromagnético, onde o biquatérnio que o representa apresenta apenas a parte vetorial diferente de zero;

- *Campos escalares* – descritos por biquatérnios em que apenas a parte escalar é diferente de zero.

As equações de Maxwell são uma das mais espetaculares demonstrações do poder da álgebra biquaterniônica. As equações de Maxwell podem ser escritas em diferentes formas matemáticas, a maioria delas por meio do cálculo vetorial. Nos tópicos a seguir será apresentada a formulação variacional das equações de Maxwell sob a álgebra biquaterniônica.

Na forma diferencial, e no sistema CGS, as equações de Maxwell podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \cdot \bar{E} &= 4\pi\rho & \bar{\nabla} \times \bar{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{B} &= 0 & \bar{\nabla} \times \bar{B} &= \frac{4\pi}{c} \bar{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{7.1}$$

Também na forma diferencial, porém no sistema MKS, as equações de Maxwell podem ser escritas da seguinte maneira.

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \cdot \bar{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \bar{\nabla} \times \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{B} &= 0 & \bar{\nabla} \times \bar{H} &= \bar{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{7.2}$$

## 7.1 O Operador Diferencial Biquaterniônico

O operador diferencial biquaterniônico, tal como no caso dos quatérnios reais, é o operador derivativo parcial  $\bar{\nabla}$  e mais a derivada temporal.

$$\bar{\nabla} = \frac{\mathbf{i}}{c} \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} = \left( \frac{\mathbf{i}}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \bar{\nabla} \right), \text{ onde } \mathbf{i} = \sqrt{-1}\tag{7.3}$$

Conforme definido no apêndice A, o conjugado quaterniônico de (7.3), pode ser representado por

$$\bar{\nabla} = \frac{\mathbf{i}}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} - k \frac{\partial}{\partial z} = \left( \frac{\mathbf{i}}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (7.4)$$

Aplicando a definição de multiplicação para álgebra quaterniônica, apresentada no apêndice A, define-se o operador D'Alembertiano.

$$\nabla \bar{\nabla} = \bar{\nabla} \nabla = \square^2 = \left( \frac{\mathbf{i}}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \left( \frac{\mathbf{i}}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) = \left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + |\vec{\nabla}|^2, 0 \right) \quad (7.5)$$

Note que o operador acima é um operador escalar real e simétrico.

## 7.2 O Potencial Biquaterniônico

Trata-se de um biquatérnio que integra o potencial elétrico ( $\varphi$ ) e o potencial magnético  $\vec{A}$ , ambos já definidos na teoria eletromagnética clássica. Portanto, o biquatérnio potencial fica assim definido

$$A = (\mathbf{i}\varphi, \vec{A}) \quad (7.6)$$

## 7.3 O Campo Biquaterniônico

Uma vez definidos o operador diferencial e o biquatérnio potencial, o biquatérnio campo resulta da aplicação do primeiro sobre o segundo, como segue

$$\nabla A = \left( \frac{\mathbf{i}}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) (\mathbf{i}\varphi, \vec{A}) = \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \mathbf{i}\vec{\nabla} \varphi + \frac{\mathbf{i}}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \quad (7.7)$$

Portanto, aplicando a condição de Lorentz e também as identidades do eletromagnetismo clássico, (7.6), pode ser reescrita como

$$F = \nabla A = (0, -\mathbf{i}\vec{E} + \vec{B}) \quad (7.8)$$

#### 7.4 A Sintetização das Equações de Maxwell

Nesta etapa fica evidente uma das grandes vantagens dos quatérnios, que é a capacidade de sintetização das equações de campo. Será mostrado a seguir, que todo o conjunto das equações (7.1), pode ser representado em uma única equação quaterniônica.

Para tanto, considere a seguinte operação

$$\bar{\nabla} F = \left( \frac{\mathbf{i}}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\bar{\nabla} \right) (0, -\mathbf{i}\vec{E} + \vec{B}) = \left[ -\mathbf{i}\bar{\nabla} \cdot \vec{E} + \bar{\nabla} \cdot \vec{B}, \left( -\bar{\nabla} \times \vec{B} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \mathbf{i} \left( \bar{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right] \quad (7.9)$$

repare que (7.9), pode ser reescrita como

$$\bar{\nabla} F = \bar{\nabla} \nabla A = \square^2 A = \square^2 (\mathbf{i}\varphi, \vec{A}) = (\square^2 \varphi, \square^2 \vec{A}) = \left( -\mathbf{i}4\pi\rho, -\frac{4\pi}{c} \vec{J} \right) \quad (7.10)$$

definindo-se um quatérnio fonte ou densidade de corrente J, tal que

$$J = \square^2 A = \left( -\mathbf{i}4\pi\rho, -\frac{4\pi}{c} \vec{J} \right) \quad (7.11)$$

observa-se que todo o conjunto de equações (7.1) fica resumido à seguinte expressão

$$\bar{\nabla} F = J \quad (7.12)$$

o que fica evidente quando se compara o segundo membro das equações (7.9) e (7.10).

## 7.5 Formulação Variacional

O processo de formulação biquaterniônica descrito nos itens acima pode ser representado através do seguinte diagrama.

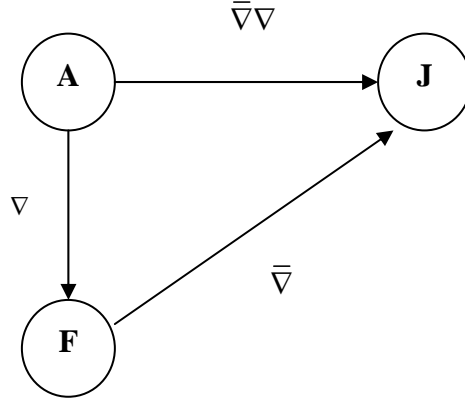


Fig. 7.1 – Diagrama de Tonti para a formulação biquaterniônica das Eq. de Maxwell

$$\text{Seja a seguinte forma bilinear : } \langle A, B \rangle = \iint_{\Omega_t} (A \cdot \bar{B}) dt d\Omega \quad (7.13)$$

Conforme mencionado anteriormente, o operador  $\bar{\nabla}\nabla$  é simétrico, em relação à (7.13), portanto permite a formulação variacional. Assim,

$$T[F] = \frac{1}{2} \langle \bar{\nabla}\nabla A, A \rangle - \langle J, A \rangle = \frac{1}{2} \langle \nabla A, \nabla A \rangle - \langle J, A \rangle = \frac{1}{2} \langle F, F \rangle - \langle J, A \rangle \quad (7.14)$$

Considere os seguintes lemas

$$\underline{\text{Lema 1:}} \quad F \cdot \bar{F} = \left( |\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2 \right) + 2\mathbf{i}\vec{E} \cdot \vec{B}$$

$$\underline{\text{Lema 2:}} \quad J \cdot A = \left( 4\pi\rho\varphi, -\frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \vec{A} \right)$$

$$J \cdot A = \left( -\mathbf{i}4\pi\rho, -\frac{4\pi}{c} \vec{J} \right) \cdot (\mathbf{i}\varphi, -\vec{A}) = \left( 4\pi\rho\varphi, -\frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \vec{A} \right)$$

Portanto, (7.14), pode ser expandida da seguinte forma

$$T[F] = \left\langle \frac{(E^2 - B^2)}{2} + i\vec{E} \cdot \vec{B} - 4\pi\rho\varphi + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \vec{A} \right\rangle \quad (7.15)$$

Observando-se o lagrangeano de (7.15), pode-se destacar que o termo  $\frac{(E^2 - B^2)}{2}$ , representa a energia do campo eletromagnético enquanto que os termos  $-4\pi\rho\varphi + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \vec{A}$  representam as interações entre os campos e as cargas. Já o termo  $i\vec{E} \cdot \vec{B}$  representa a uma densidade de potência do campo eletromagnético dissipada na fronteira.

## 7.6 Variação do Funcional

A variação do funcional (7.15), quando igualada a zero, resulta nas equações de Maxwell, conforme mostrado a seguir

$$\delta T[F] = \delta \left\langle \frac{(E^2 - B^2)}{2} + i\vec{E} \cdot \vec{B} - 4\pi\rho\varphi + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \vec{A} \right\rangle = 0 \quad (7.16)$$

$$\delta T[F] = 0 \Rightarrow \frac{(\delta E^2 - \delta B^2)}{2} + i\delta(\vec{E} \cdot \vec{B}) - \delta(4\pi\rho\varphi) + \delta\left(\frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \vec{A}\right) = 0$$

Considere os seguintes lemas :

Lema 3: 
$$\frac{(\delta E^2 - \delta B^2)}{2} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} \right) (\delta \vec{A}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{E} (\delta \varphi)$$

$$\delta E^2 = 2\vec{E} \cdot \delta \vec{E} = 2\vec{E} \cdot \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial (\delta \vec{A})}{\partial t} - \vec{\nabla} (\delta \varphi) \right) = 2 \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} (\delta \vec{A}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{E} (\delta \varphi) \right)$$

$$\delta B^2 = 2\vec{B} \cdot \delta \vec{B} = 2\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times (\delta \vec{A})) = 2\vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot (\delta \vec{A})$$



Lema 4: 
$$\delta(\vec{E} \cdot \vec{B}) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) (\delta \vec{A}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{B} (\delta \varphi)$$

$$\delta(\vec{E} \cdot \vec{B}) = \delta \vec{E} \cdot \vec{B} + \delta \vec{B} \cdot \vec{E} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) (\delta \vec{A}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{B} (\delta \varphi)$$

Desta forma, pode-se reescrever (7.16), como segue

$$\delta T[F] = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \right) (\delta \vec{A}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - 4\pi\rho) (\delta \varphi) + 2i \left\{ \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) (\delta \vec{A}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{B} (\delta \varphi) \right\} = 0$$

(7.17)

Pode-se observar que (7.17), reúne as equações (7.1)

## Capítulo 8

### FORMULAÇÃO VARIACIONAL DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL POR MEIO DE FORMAS DIFERENCIAIS

Neste capítulo pretende-se formular as equações de Maxwell por intermédio da álgebra das formas diferenciais. Para tanto, admite-se dois postulados :

- A existência de uma 1-forma, que represente os potenciais elétrico e magnético  
 $A = A_i \sigma^i$ ;
- A existência de uma 3-forma que represente a densidade de corrente e a densidade de carga.

Esses postulados implicam em idéias que serão expressas em termos de formas diferenciais em uma variedade quadri-dimensional

#### 8.1 Notação

Considere  $\square$  o campo dos números reais e  $L$  um espaço vetorial  $n$ -dimensional sobre  $\square$  com elementos  $\alpha, \beta, \dots$ . Para cada  $p = 0, 1, 2, \dots, n$ , constrói-se um novo espaço vetorial  $\wedge^p L$  sobre  $\square$ , chamado de espaço de  $p$ -vetores em  $L$ . Começa-se com  $\wedge^0 L = \square$ ,  $\wedge^1 L = L, \dots$ . Daqui em diante será analisado o espaço vetorial das  $p$ -formas,  $\wedge^p L$ .

Os elementos  $\sigma^H$  de uma base de  $\wedge^p L$  pode ser construído a partir de  $p$  elementos  $\sigma^{h_j}, j = 1, 2, \dots, p, (h_j \in \square)$  de uma base de  $\wedge^1 L$ , como segue :

$$\sigma^H = \sigma^{h_1} \wedge \sigma^{h_2} \wedge \dots \wedge \sigma^{h_p} \quad (8.1)$$

Então,  $\wedge^p L (2 \leq p \leq n)$ , consiste de todas as combinações lineares dos  $p$ -vetores  $\sigma^H$ , sujeitos somente às seguintes restrições :

- $(a\alpha + b\beta) \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = a(\alpha \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) + b(\beta \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p)$ , válido também se qualquer  $\alpha_i$  for substituído por uma combinação linear;
- $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = 0$ , se para qualquer par de índices  $i \neq j$ ,  $\alpha_i = \alpha_j$
- $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$  muda de sinal se quaisquer dois  $\alpha_i$  forem intercambiados.

Assim, se  $A \in \wedge^p L$ , então  $A$  pode ser reescrito como uma combinação linear de  $\sigma^H$ , como indicado a seguir

$$A = \sum A_H \sigma^H, \text{ onde } H = (h_1, h_2, \dots, h_p) \quad (8.2)$$

A diferencial de uma  $p$ -forma  $A = A_{J_p} \sigma^{J_p}$ , para  $J_p = (j_1, j_2, \dots, j_p)$ , é uma  $(p+1)$ -forma

$$(dA)_{I_{p+1}} = \varepsilon_{I_{p+1}}^{j_1 \dots j_p} \frac{\partial}{\partial x^j} (A_{J_p}) \quad (8.3)$$

onde  $\varepsilon_I^H$  é o tensor de permutação de Levi-Civita, usualmente definido como

$$\varepsilon_I^H = \begin{cases} +\sqrt{g} & \text{se } H \text{ for uma permutação par de } I \\ -\sqrt{g} & \text{se } H \text{ for uma permutação ímpar de } I \\ 0 & \end{cases}$$

$g$  é o módulo do valor do determinante da métrica considerada.

Em particular, para uma 1-forma,  $J_p = J_1 = (j_1)$  e  $I_{p+1} = I_2 = (i_1, i_2)$ , então

$$dA = (dA)_{i_1, i_2} \sigma^{i_1} \wedge \sigma^{i_2} = \frac{\partial A_{j_1}}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \quad (8.4)$$

## 8.2 Postulado dos Potenciais $A$ e das Intensidades $F$

Considere uma 1-forma  $A = A_i \sigma^i$ , denominada de potencial. Deste potencial, pode ser obtida uma 2-forma denominada intensidade eletromagnética  $F = F_{ij} \sigma^{ij}$ , tal

que  $F = dA$ . Portanto, o ponto de partida para o eletromagnetismo clássico é a especificação de uma 1-forma que represente uma função potencial,  $A$ . Por outro lado, dada a função  $F$  (2-forma), existem muitas 1-formas  $A$  que poderiam produzir o mesmo  $F$ . Esta não unicidade é a base das teorias de restrição (restrição de Coulomb, restrição de Lorentz, etc.).

Da forma dual de  $F$ ,  $G = G_{ij}\sigma^{ij}$ , é possível construir uma 3-forma que represente a densidade de carga e de corrente  $J = J_{ijk}\sigma^{ijk}$ , tal que  $J = dG$ . Também, aqui, existem muitas 2-formas  $G$ , que produzem o mesmo  $J$ .

Do primeiro postuldo, obtém-se um tensor covariante de segunda ordem, a partir do qual, é possível obter-se um primeiro par das equações de Maxwell, aquele que relaciona as intensidades de campo  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ .

$$\text{rot}\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0; \quad \text{div}\vec{B} = 0 \quad (8.5)$$

Do segundo postuldo, determina-se uma 2-forma que relaciona as excitações de campo,  $\vec{D}$  e  $\vec{H}$  a partir da qual torna-se possível a obtenção de um segundo par das equações de Maxwell.

$$\text{rot}\vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}; \quad \text{div}\vec{D} = 4\pi\rho \quad (8.6)$$

### 8.3 O Primeiro Par das Equações de Maxwell

Se  $V$  for um espaço quadri-dimensional com coordenadas curvilíneas gerais, não orto-normais, os vetores  $\vec{g}_i (i=1,2,3,4)$ , são tangentes a essas coordenadas e  $\sigma^j (j=1,2,3,4)$ , são elementos da base dual de  $\vec{g}_i$ . Contudo, considere o espaço de Minkowski, com uma base ortonormal e com assinatura  $(+++ -)$ . Neste espaço a 1-forma que representa o potencial pode ser escrita como

$$A = A_i\sigma^i = A_1dx^1 + A_2dx^2 + A_3dx^3 - A_4dx^4 \quad (8.7)$$

onde,  $\vec{A} = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3$  corresponde ao potencial magnético, enquanto que  $\varphi = \frac{A_4}{c} dx^4$  corresponde ao potencial elétrico. A diferencial de (8.7), de acordo com

(8.4), pode ser escrita como

$$F = dA = \frac{\partial A_1}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 + \frac{\partial A_2}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^2 + \frac{\partial A_3}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^3 - \frac{1}{c} \frac{\partial A_4}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^4$$

$$(i_1 = 1, 2, 3, 4) \quad (8.8)$$

desenvolvendo a equação (8.8), resulta

$$F =$$

$$+ \left( \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left( \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left( \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 +$$

$$- \frac{1}{c} \frac{\partial A_1}{\partial x^4} dx^1 \wedge dx^4 - \frac{1}{c} \frac{\partial A_2}{\partial x^4} dx^2 \wedge dx^4 - \frac{1}{c} \frac{\partial A_3}{\partial x^4} dx^3 \wedge dx^4 +$$

$$- \frac{\partial A_4}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^4 - \frac{\partial A_4}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^4 - \frac{\partial A_4}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^4$$

$$(8.9)$$

Considerando a densidade de fluxo magnético  $\mathbf{B}$  como uma 2-forma, do tipo

$$B = B_{23} dx^2 \wedge dx^3 + B_{31} dx^3 \wedge dx^1 + B_{12} dx^1 \wedge dx^2 \quad (8.10)$$

e a intensidade de campo elétrico  $\mathbf{E}$  como uma 1-forma, do tipo

$$E = E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3 \quad (8.11)$$

e comparando as equações (8.9), (8.10), (8.11) e ainda as identidades do eletromagnetismo clássico, pode-se reescrever (8.9) da seguinte forma

$$F = dA = B_{23} dx^2 \wedge dx^3 + B_{31} dx^3 \wedge dx^1 + B_{12} dx^1 \wedge dx^2 + E_1 dx^1 \wedge dx^4 + E_2 dx^2 \wedge dx^4 + E_3 dx^3 \wedge dx^4$$

$$(8.12)$$

Portanto, pode-se observar que (8.12) define os campos elétrico e magnético.

De acordo com o lemma de Poincaré, pode-se escrever

$$dF = ddA = 0 \quad (8.13)$$

portanto,

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial B_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial B_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{12}}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \\
& + \frac{1}{c} \frac{\partial B_{23}}{\partial x^4} dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{1}{c} \frac{\partial B_{31}}{\partial x^4} dx^4 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \frac{1}{c} \frac{\partial B_{12}}{\partial x^4} dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \\
& + \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + \left( \frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^4 + \left( \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 = 0
\end{aligned} \tag{8.14}$$

Observando-se a equação (8.14), e usando os elementos do cálculo vetorial, pode-se reescreve-la da seguinte maneira

$$dF = \text{div}_3 \bar{B} dV_3 + dx^4 \wedge \left( \text{rot} \bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) = 0 \tag{8.15}$$

Assim, observa-se em (8.15) o primeiro par das equações de Maxwell retratado em (8.5).

## 8.4 O Segundo Par das Equações de Maxwell

Considere um espaço vetorial  $V$ , e dois conjuntos de índices  $H = (h_1, h_2, \dots, h_p)$  e  $M = (m_1, m_2, \dots, m_{n-p})$ . O primeiro, pode ser associado a qualquer  $p$ -forma,  $F = F_H \sigma^H$ , e o último associa-se a uma  $(n-p)$ -forma  $*F$ , que é definida como segue

$$*F = G_M \sigma^M = \varepsilon_{HM} F^H \quad (M \neq H) \tag{8.16}$$

onde  $*F$  é chamado de dual de Hodge de  $F$ . Por exemplo, o dual de Hodge de uma 0-forma, ou seja, de um escalar é um elemento de volume do espaço considerado, conforme mostrado a seguir

$$*F = *1 = \varepsilon_{12 \dots n} \sigma^{12 \dots n} = \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = dV$$

Para uma dada lei constitutiva,  $\chi$ , pode-se associar a uma  $p$ -forma  $F$ , uma  $(n-p)$ -forma  $G$ , dual de Hodge, da seguinte maneira

$$G = \chi *F \tag{8.17}$$

Para o caso em que  $F$  é uma 2-forma e  $n = 4$ , resulta em  $H = (i, j)$  e, assim

$$G_{kr} = \varepsilon_{ijk} F^{ij} \text{ e } G = \chi G_{kr} \sigma^k \wedge \sigma^r \quad (8.18)$$

Desta forma, o dual de Hodge da equação (8.12), é o seguinte

$$G = H_1 dx^1 \wedge dx^4 + H_2 dx^2 \wedge dx^4 + H_3 dx^3 \wedge dx^4 - D_1 dx^2 \wedge dx^3 + D_2 dx^1 \wedge dx^3 - D_3 dx^1 \wedge dx^2 \quad (8.19)$$

Conforme estabelecido pelo segundo postulado, a diferenciação exterior de (8.19), resulta em uma 3-forma, que pode ser explicitada como

$$J = \frac{4\pi}{c} J_{ij} \sigma^{ij} \wedge dx^4 - 4\pi \rho_{ijk} \sigma^{ijk} \quad (i \neq 4; j \neq 4; k \neq 4) \quad (8.20)$$

portanto, ainda de acordo com o segundo postulado, pode-se escrever que  $dG = J$

$$\begin{aligned} dG = & \\ & + \left( \frac{\partial H_3}{\partial x^2} - \frac{\partial H_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + \left( \frac{\partial H_1}{\partial x^3} - \frac{\partial H_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^4 + \\ & + \left( \frac{\partial H_2}{\partial x^1} - \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 - \left( \frac{\partial D_1}{\partial x^1} + \frac{\partial D_2}{\partial x^2} + \frac{\partial D_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \\ & - \frac{\partial D_1}{\partial x^4} dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \frac{\partial D_2}{\partial x^4} dx^4 \wedge dx^3 \wedge dx^1 - \frac{\partial D_3}{\partial x^4} dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned} \quad (8.22)$$

Considerando  $H$  como uma 1-forma

$$H = H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3 \quad (8.23)$$

e  $D$ , como uma 2-forma

$$D = D_{23} dx^2 \wedge dx^3 + D_{31} dx^3 \wedge dx^1 + D_{12} dx^1 \wedge dx^2 \quad (8.24)$$

comparando-se (8.22), (8.23) e (8.24), pode-se escrever que

$$dG = \left( \text{curl} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial x^4} \right) \wedge dx^4 - \text{div} \vec{D} \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \frac{4\pi}{c} J_{ij} dx^{ij} \wedge dx^4 - 4\pi \rho \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (8.25)$$

desta forma, observando-se (8.25), reconhece-se o segundo par das equações de Maxwell, apresentado em (8.6).

## 8.5 Formulação Variacional

Nesta seção, pretende-se investigar brevemente, as implicações variacionais da formulação das equações de Maxwell, quando estas são apresentadas como formas diferenciais. Para tanto, considere o seguinte diagrama.

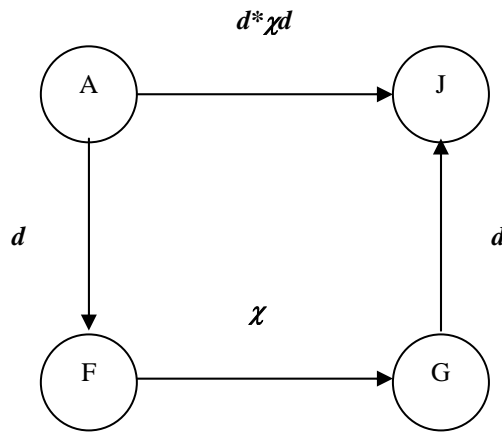


Fig. 8.1 – Diagrama de Tonti para a formulação das Eq. de Maxwell por meio de formas diferenciais

$$\text{Definindo-se a seguinte forma bilinear : } \langle \alpha, \beta \rangle = \int_{\Omega} \alpha \wedge * \beta d\Omega \quad (8.26)$$

onde

$$\beta \text{ é uma } (p+1)\text{-forma e } \tilde{d}\beta = -\frac{1}{p}(\partial^j \beta_{jM})\sigma^M, \quad M = i_1, i_2, \dots, i_p$$

Assim, com base no diagrama acima, e na forma bilinear (8.26), pode-se escrever o seguinte funcional

$$F[A, J] = \frac{1}{2} \langle F, \chi F \rangle + \langle A, J \rangle \quad (8.27)$$

a equação (8.27), pode ser reescrita como

$$F[A, J] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (F \wedge G) d\Omega + \int_{\Omega} (A \wedge * J) d\Omega \quad (8.28)$$

Lembrando que  $A_4 = \varphi$ , é o potencial elétrico o funcional (8.28) pode ser expandido da seguinte forma



$$F [A, J] = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\vec{B} \cdot \vec{H} - \vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \right) - \vec{A} \cdot \vec{J} + \rho\varphi \right] d\Omega \quad (8.29)$$

O Lagrangeano de (8.29) quando variado resulta no par de equações de Maxwell representado por (8.6).

## Capítulo 9

### CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma generalização para o teorema de Vainberg, que aqui foi referido como Teorema Fundamental do Problema Inverso do Cálculo das Variações. Um resultado importante que permitiu a criação de um método de potencialização de operadores, que ainda não havia sido apresentado na literatura.

Foi dada uma formulação variacional para as equações de Navier-Stokes aplicando o método proposto. Caso em que todos os métodos existentes falharam.

Também foram apresentadas três formulações distintas para as equações de Maxwell, a saber :

- A formulação usando um operador anti-simétrico, que conduziu ao lagrangeano (6.13);
- A formulação biquaterniônica, que conduziu ao lagrangeano (7.15);
- A formulação usando formas diferenciais, que conduziu ao lagrangeano (8.29).

Tais funcionais diferem entre si, embora produzam as equações de Euler-Lagrange desejadas. Foi mostrado, também que a formulação biquaterniônica, do ponto de vista variacional, é a mais completa, pois reproduz as quatro equações de Maxwell.

No caso das formas diferenciais, o primeiro par das equações de Maxwell é uma consequência direta da forma  $F$  ser exata ( $dF = 0$ ). Por outro lado também, o uso de formas diferenciais permite, facilmente, a generalização para outras métricas diferentes da métrica de Minkowski, bem como para o caso de variedades  $n$ -dimensionais.

Uma pesquisa futura poderia se concentrar no desenvolvimento da formulação biquaterniônica associada a variedades  $n$ -dimensionais com métricas genéricas.

## Apêndice A

### OPERADOR ADJUNTO

#### A.1 Definição do Operador Adjunto

Considere que  $N : X \rightarrow Y$  seja um operador linear,  $X$  e  $Y$  espaços com produtos internos  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_y$ , respectivamente.  $D(F)$  é o domínio de  $F$  denso em  $X$  e  $D^*$  o subconjunto de  $Y$  seguinte:

$$D^* = \left\{ y \in Y \mid \exists z \in X, \langle Fx, y \rangle_y = \langle x, z \rangle_x \right\} \quad (\text{A.1})$$

#### A.2 Definição de Adjunto Linear de F

Seja a aplicação  $\tilde{F} : X \rightarrow Y$ , com domínio igual a  $D^*$ , tal que

$$\tilde{F}(y) = z \quad \forall y \in D^* \quad (\text{A.2})$$

seja o “adjunto linear” de  $F$ . Resulta imediatamente de (A.1), que

$$\langle Fx, y \rangle_y = \langle x, \tilde{F}y \rangle_x \quad \forall x \in \text{Dom}(F)$$

**Lema 1:** O adjunto linear de  $F$  é bem definido

Demonstração :

Sejam  $y$  e  $z$  relacionados em (A.2) e suponha que, para todo  $x \in \text{Dom}(F)$  exista um  $w$  tal que :

$$\langle Fx, y \rangle_y = \langle x, w \rangle_x \quad (\text{A.3})$$

Mostrar-se-á que  $z = w$

De (A.2) e (A.3) concluí-se que  $\langle x, z \rangle_x = \langle x, w \rangle_x, \forall x \in D(F)$ , ou seja,  $\langle x, z - w \rangle_x = 0, \forall x \in D(F)$ .

Logo  $z - w \perp D(F)$  e conseqüentemente  $z - w \perp \overline{D(F)} = X$ , pois  $D(F)$  é denso em  $X$ , portanto

$$z - w = 0, \text{ isto é, } z = w$$

**Teorema 1:**  $D^*$  é um subespaço vetorial de  $Y$

Demonstração :

Seja  $\{y_1, y_2\} \subset D^*$ , isto é  $\tilde{F}(y_1) = z_1$  e  $\tilde{F}(y_2) = z_2$ ;  $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{R}$

Então

$$\langle F(x), \alpha_i y_i \rangle = \alpha_i \langle F(x), y_i \rangle = \alpha_i \langle x, \tilde{F}(y_i) \rangle = \langle x, \alpha z_i \rangle$$

Logo

$$\langle Fx, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \langle x, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \rangle$$

Conseqüentemente

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in D^*$$

e

$$\tilde{F}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \tilde{F}(y_1) + \alpha_2 \tilde{F}(y_2)$$

A tabela a seguir apresenta alguns operadores com seus respectivos adjuntos.

CASO	OPERADOR	OPER. ADJUNTO	TERMO DE CONTORNO
1	$T = \frac{d}{dx}$	$\tilde{T} = -\frac{d}{dx}$	$\gamma(u, \phi) = [u(x)\phi(x)]_a^b$
2	$T = w(x) \frac{d}{dx}$	$\tilde{T} = -\frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx}$	$\gamma(u, \phi) = [w(x)u(x)\phi(x)]_a^b$
3	$T = \nabla(\cdot)$	$\tilde{T} = -(\nabla \cdot (\cdot))$	$\gamma(u, \phi) = \int_S (\vec{u} \cdot \vec{n} \phi) dS$
4	$T = \nabla \times (\cdot)$	$\tilde{T} = \nabla \times (\cdot)$	$\gamma(u, \phi) = \int_S \vec{u} \cdot (\vec{n} \times \vec{\phi}) dS$
5	$T = M$	$\tilde{T} = M^T$	Não há

Tabela A.1 – Operadores e seus operadores adjuntos

## Apêndice B

### QUATÉRNIOS E BIQUATÉRNIOS

#### B.1 Quatérnios

Matematicamente os quatérnios representam uma extensão natural dos números complexos, formando uma álgebra sob a adição e a multiplicação. Esta entidade matemática foi criada por Sir William Rowan Hamilton e o nome quatérnios foi empregado para denotar uma expressão quadrimomial. A forma geral de um quatérnio  $q$  é  $q = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3$ , onde  $\{a_0, a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{R}$ . O termo  $a_0$  é chamado de parte real, enquanto os três outros termos formam juntos um trinômio,  $a_1i + a_2j + a_3k$ , chamado de parte imaginária ou parte vetorial do quatérnio  $q$ . Os fatores  $i, j, k$  constituem-se em unidades imaginárias, ou símbolos sujeitos às leis de combinação apresentadas na tabela AB-1, abaixo.

	$1$	$i$	$j$	$k$
$1$	$1$	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	$-1$	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	$-1$	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	$-1$

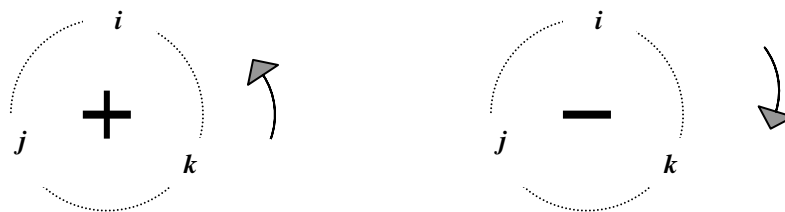


Tabela B.1 – O Anel dos Quatérnios

Alternativamente, o quatérnio  $q$  pode ser representado como  $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ , ou na forma  $q = (a_0, \vec{q})$ , onde  $\vec{q} = a_1i + a_2j + a_3k$ . As unidades complexas  $i, j, k$ , podem ser representadas por matrizes complexas de ordem 2, como segue:

$$i = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, o quatérnio  $q$  pode ser escrito como

$$q = \begin{bmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & q_0 - iq_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}$$

Considerando os quatérnios  $q_1 = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ ,  $q_2 = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ , a tabela AB-2 apresenta algumas operações comuns definidas sob a álgebra dos quatérnios.

OPERAÇÃO	
Conjug. quaterniônico de $q_1$	$\bar{q}_1 = a_0 - a_1\vec{i} - a_2\vec{j} - a_3\vec{k} = (a_0, -a_1, -a_2, -a_3) = (a_0, -\vec{u})$
Norma de $q_1$	$norm(q_1) = q_1 \times \bar{q}_1 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
Valor absoluto de $q_1$	$ q_1  = Abs(q_1) = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
Adição	$q_1 + q_2 = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$ $q_1 + q_2 = a_0 + b_0 + (\vec{u} + \vec{v})$
Escalonamento	$\alpha q_1 = \alpha a_0 + (\alpha a_1)\vec{i} + (\alpha a_2)\vec{j} + (\alpha a_3)\vec{k}$ $\alpha q_1 = \alpha a_0 + \alpha \vec{u}$

OPERAÇÃO	
Multiplicação	$q_1 q_2 = (a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3) \times (b_0 + ib_1 + jb_2 + kb_3) =$ $= (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) +$ $= +i(a_1 b_0 + a_0 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3) +$ $= +j(a_2 b_0 + a_3 b_1 + a_0 b_2 - a_1 b_3) +$ $= +k(a_3 b_0 - a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3)$ $q_1 q_2 = (a_0, \vec{u})(b_0, \vec{v}) = (a_0 b_0 - \vec{u} \cdot \vec{v}, a_0 \vec{v} + b_0 \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v})$
Produto Escalar	$q_1 \cdot q_2 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$
Quadrado de $q_1$	$q_1^2 = q_1 q_1 = (a_0^2 - \vec{u} \cdot \vec{u}, 2a_0 \vec{u})$
Inverso de $q_1$	$inv(q_1) = \frac{1}{q_1} = \frac{q_1^*}{\ q_1\ }$
Divisão	$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}_L = \frac{1}{q_2} q_1 \quad \text{divisão à esquerda}$ $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}_R = q_1 \frac{1}{q_2} \quad \text{divisão à direita}$

Tabela B.2 – Operações comuns com quatérnios

## B.2 Quatérnios Complexos ou Biquatérnios

Os biquatérnios são um anel que apresenta propriedades que permitem que certas leis físicas sejam apresentadas de uma forma elegante e compacta. Os biquatérnios tem uma aplicação bastante notável nas teorias clássicas de campos.

A álgebra biquaterniônica permite que várias entidades matemáticas, tais como esclares complexos, vetores complexos, vetores reais entre outras, possam ser integradas em uma única e consistente representação. A notação empregada nessa representação é simplesmente uma generalização daquela usada em análise complexa.

Um biquatérnio  $Z$  é definido como  $Z = z_0 + z_1i + z_2j + z_3k$ , onde  $z_\sigma$  são números complexos,

$z_\sigma = x_\sigma + \sqrt{-1}x_\sigma = x_\sigma + ix_\sigma$ . A tabela AB-3 ilustra alguns aspectos da operação de conjugação dos quatérnios.

OPERAÇÃO	
Conjug. Quaterniônico de $z$	$\bar{z} = z_0 - z_1i - z_2j - z_3k$
Conjugado Complexo	$z^* = z_0^* + z_1^*i + z_2^*j + z_3^*k$
$(z \times w)^* = w^* \times z^*$	$\overline{(z \times w)} = \bar{w} \times \bar{z}$

Tabela B.3 – Conjugados Biquaterniônicos



## BIBLIOGRAFIA

- 1- Vainberg, M.M., Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators, Holden-Day, San Francisco, 1964.
- 2- Morse, M. ; Feshbach, H., Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York, 1953.
- 3- Tonti, E., Variational Formulation for Linear Equations of Mathematical Physics, Rend. Acc. Naz. Lincei, Serie VIII, Vol. XLIV, 75, 1968.
- 4- Tonti, E., Variational Principles in Elastostatics, Meccanica, Vol. II, N<sup>o</sup> 4, 201, 1967
- 5- Tonti, E., Variational Principles in Electromagnetism, Rendiconti Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Vol. 102, 845 , 1968.
- 6- Tonti, E., Variational Formulation of Nonlinear Differential Equations I, Acad. Roy. Belg (Classe des Sci.) 55, 137 – 165, 1969.
- 7- Tonti, E., Variational Formulation of Nonlinear Differential Equations II, Acad. Roy. Belg (Classe des Sci.) 55, 137 – 165, 1969.
- 8- Finlayson, B. A., The Method of Weighted Residuals and Variational Principles with Applications in Fluid Mechanics, Heat and Mass Transfer, Academic Press, New York, 1972.
- 9- Atherton, R. W., Homsy, G. M., On the Existence and Formulation of Variational Principles for Nonlinear Differential Equations, Studies in Applied Mathematics, Vol LIV, N<sup>o</sup> 1, March 1973, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts

- 10-Tonti, E., On the Variational Formulation for Linear Initial Value Problems. *Annali di Matematica Pura ed Applicata, Serie Quarta XCV*, pp. 331-359, MathSciNet, 1973.
- 11-Oden, J. T., Reddy, J. N., *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg New York, 1976.
- 12-Maugin, G. A., *The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics*, Acta Mechanica, Wien, 1980.
- 13-Reiss, R., Haug, E.J., Extremum Principles for Linear Initial Value Problems of Mathematical Physics, *Int. J. Engng. Sci.* 16, pp. 1230-1240, MathSciNet.
- 14-Magri, F., Variational Formulation for Every Linear Equation, *Int. J. Engng. Sci.* 12, pp 537-549, MathSciNet, 1974.
- 15-Tonti, E., Variational Formulation for Every Nonlinear Problem, *Int. J. Engng. Sci.* 22 11- 12, pp 1343-1371, MathSciNet, 1984.
- 16-Ortiz, M., A Variational Formulation for Convection-Diffusion Problems. *Int. J. Engng. Sci.* 23 – 7, pp 717-731, MathSciNet, 1985.
- 17-Auchmuty, G., Variational Principles for Operator Equations and Initial Values Problems. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* 12 5, pp 561-564, MathSciNet, 1988.
- 18-Carini, A., Colonnetti's Minimum Principle Extension to Generally Nonlinear Material. *Int. J. Solids Struct.* 33, pp 121-144, MathSciNet, 1996.
- 19-Carini, A., Saddle Point Principles for General Nonlinear Material Continua. *ASME J. Appl. Mech.* 64, pp 1010-1014, MathSciNet, 1997.

- 20- Carini, A.; Castiglioni, L.; Genna, F., Extremal Formulation in Nonlinear Dynamics. Proceedings ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Atlanta, Georgia, 17-22, November 1996.
- 21- Carini, A.; De Donato, O., A Comprehensive Energy Formulation for General Nonlinear Material Continua. ASME J. Appl. Mech. 64, pp 353-360, MathSciNet, 1997
- 22- Carini, A. ; Genna, F., Some Variational Formulation for Continuum Nonlinear Dynamics, J. Mech. Phys. Solids 46 7, pp 1253-1277, MathSciNet, 1998.
- 23- Carini, A.; Genna, F., Saddle-Point Principles and Numerical Integration Methods for Second Order Hyperbolic Equation. Comput. Methods Appl. Mech. Engng, 2
- 24- Rutherford, D. E., New Transformation Equations and the Electric Field Four-Vector. [www.softcom.net/users/der555/newtransform.pdf](http://www.softcom.net/users/der555/newtransform.pdf)
- 25- Komkov. V, Quaternions, Frèchet Differentiation and Some Equations of Mathematical Physics , Journal of Mathematical Analysis and Applications 71, pp 187 – 209, 1979.
- 26- Woodside, D. A., Classical four-vector Fields in the Relativistic longitudinal Gauge, Journal of Mathematical Physics, Vol. 41, N<sup>o</sup> 7, pp 4622-4653, July 2000.
- 27- Gottlieb, D. H., Maxwell's Equations, arXiv:math-ph/0409001, Vol 1, August 2004.
- 28- Majerník, V., Quaternionic Formulation of the Classical Fields, Advances in Applied Clifford Algebras 9 N<sup>o</sup> 1, pp 119-130, 1999.
- 29- Scott, J., Complex Four-vector Algebra, August 1998.

30- Flanders, H., Differential Forms with Applications to the Physical Sciences, 1963,1989.