Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Teoremas do tipo Korovkin e aproximação por operadores positivos

Daniela Aparecida Mafra

Orientador: Profa. Dra. Márcia Sayuri Kashimoto

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

Itajubá, 18 de dezembro de 2015

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Teoremas do tipo Korovkin e aproximação por operadores positivos

Daniela Aparecida Mafra

Orientador: Profa. Dra. Márcia Sayuri Kashimoto

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Matemática

Itajubá – MG
18 de dezembro de 2015

Dedico este trabalho a minha querida filha Rayssa Mafra Carvalho Silva.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me iluminado neste caminho cheio de espinhos e obstáculos.

Aos meus pais, Francisca e José Antônio, pelo apoio durante toda minha vida e por não medirem esforços para cuidarem da minha filha, para que eu pudesse me dedicar ao mestrado.

A minha linda, carinhosa e amada filha Rayssa que apesar de seus 8 anos de idade, muito compreendeu minha ausência. Você filha é a razão da minha vida, é por você que eu luto cada dia, muitas vezes pensei não continuar e foram suas palavras "quando eu crescer vou estudar igual a senhora mamãe" que me deram força nos momentos mais difíceis.

A todos os meus professores e em especial à minha orientadora, professora Dra. Márcia Sayuri Kashimoto, pelo carinho, respeito, paciência, empenho, dedicação e competência com que conduziu a orientação deste trabalho.

Ao meu namorado Alisson, pelo carinho, amor, paciência e palavras firmes de apoio, não me deixando abater pelo desânimo e cansaço. O seu companheirismo foi essencial para me ajudar a concluir este trabalho.

Agradeço aos meus colegas Marcos Alexandre, Felipe, Tatiane, Camila e Welington, com os quais eu estudei, tomei café, reclamei da vida, aprendi coisas novas, fofoquei e dei muitas risadas.

Às meninas da republica Meninas Gerais por terem me acolhido em sua família.

À banca examinadora por aceitarem o nosso convite e pelas ricas contribuições ao nosso trabalho.

À CAPES, pela bolsa de fomento à pesquisa.

"Apenas nas equações misteriosas do amor é que podemos encontrar a lógica."

(John Nash)

Resumo

Em 1953, P. P. Korovkin estabeleceu um critério simples para determinar se uma sequência $\{L_n\}_{n\geq 1}$ de operadores lineares positivos no espaço das funções reais contínuas $C[0,1]$ converge para o operador identidade na topologia da convergência pontual de operadores. Mais precisamente, ele verificou que se $L_n g \to g$ uniformemente em $[0,1]$ para toda $g \in \{1, x, x^2\}$, então $L_n f \to f$ uniformemente em $[0,1]$ para toda $f \in C[0,1]$.

Neste trabalho, abordaremos alguns teoremas tipo Korovkin para operadores lineares positivos no espaço $C_0(X)$ das funções reais contínuas que se anulam no infinito, quando X é um espaço de Hausdorff localmente compacto. Também apresentaremos uma versão do teorema de Korovkin via processo $\mathcal{A}$-soma.

Palavras–chave: *Korovkin, operadores positivos, processo $\mathcal{A}$-soma.*

Abstract

In 1953, P. P. Korovkin established a simple criterion to determine if a sequence $\{L_n\}_{n\geq 1}$ of positive linear operators in the space of real continuous functions $C[0,1]$ converges to the identity operator in the topology of pointwise convergence of operators. More precisely, he verified that if $L_n g \to g$ uniformly in $[0,1]$ for all $g \in \{1, x, x^2\}$, then $L_n f \to f$ uniformly in $[0,1]$ for all $f \in C[0,1]$.

In this work, we will discuss some Korovkin-type theorems for positive linear operators in the space $C_0(X)$ of the real continuous functions that vanish at infinity, when X is a locally compact Hausdorff space. Also we will present a version of the Korovkin theorem via $\mathcal{A}$-summation process.

Keywords: *Korovkin, positive operator, $\mathcal{A}$-summation process.*

Sumário

Introdução

Os Teoremas do tipo Korovkin fornecem critérios simples e úteis para determinar se uma sequência de operadores lineares positivos, definidos em certos espaços de funções é um processo de aproximação, isto é, se a sequência de operadores converge para a identidade na topologia da convergência pontual de operadores. Basicamente, estes teoremas apresentam subconjuntos de funções teste cujas propriedades de aproximação garantem a de todo espaço, simplificando o processo de aproximação.

O termo "teoremas do tipo Korovkin" é devido a P. P. Korovkin que em 1953 descobriu que as funções 1, $e_1 = x$ e $e_2 = x^2$ são funções teste no espaço das funções reais contínuas $C([0,1])$. Tal resultado ficou conhecido como Primeiro Teorema de Korovkin e estabelece que se $\{L_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de operadores lineares positivos em $C([0,1])$, tais que, para cada $g \in \{1, e_1, e_2\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(g) = g$ uniformemente em $[0,1]$ então, para toda $f \in C([0,1])$, $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(f) = f$ uniformemente em $[0,1]$. H. Bohman [12] demonstrou um resultado como este considerando sequências de operadores lineares positivos em $C[0,1]$ da forma $L(f) = \sum\limits_{i\in I} f(a_i)\varphi_i(x)$, $0 \leq x \leq 1$, onde $\{a_i\}_{i\in I}$ é uma família finita em $[0,1]$ e $\varphi_i \in C[0,1]$, $i \in I$. Outro predecessor de Korovkin foi T. Popoviciu [37] que publicou um resultado similar num artigo escrito em romeno. Em 1959, P. P. Korovkin afirma em seu Segundo Teorema que $\{1, \cos x, \sin x\}$ é um conjunto teste no espaço $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ das funções 2π-periódicas contínuas na reta.

Vários matemáticos estenderam os teoremas de Korovkin em muitos aspectos e configurações, incluindo outros espaços de funções, espaços funcionais, reticulados de Banach, álgebras de Banach, espaços de Banach e assim por diante. Tais investigações deram origem a uma nova teoria que hoje é conhecida como Teoria da Aproximação tipo Korovkin.

Esta teoria tem fortes ligações com a Teoria da Aproximação, Análise Funcional, Análise Harmônica, Teoria da Probabilidade e Equações Diferenciais Parciais.

O presente trabalho foi dividido em quatro capítulos, organizados da seguinte forma:

O primeiro capítulo inicia-se com um resumo das propriedades de operadores lineares positivos juntamente com algumas notações. Em seguida, passamos para os espaços localmente compactos e o espaço $C_0(X)$ de todas funções reais contínuas que se anulam no infinito em um espaço X localmente compacto. Abordamos, inclusive, alguns conceitos de medidas positivas limitadas de Radon, medidas finitas de Borel entre outros, essenciais para a compreensão dos demais capítulos.

O Capítulo 2 contém os clássicos Primeiro e Segundo Teoremas de Korovkin. Ao longo deste capítulo, apresentamos diversos processos de aproximação clássicos dados pelos operadores Bernstein sobre $[0, 1]$ e sobre o hipercubo, operadores Kantorovich, operadores de convolução de Fejér, operadores Szász- Mirakjan e operadores de convolução de Gauss-Weierstrass. Também veremos que o Primeiro e o Segundo Teoremas de Korovkin são equivalentes as versões algébrica e trigonométrica, respectivamente, do clássico Teorema de Aproximação de Weierstrass.

O Capítulo 3 descreve os teoremas tipo Korovkin e operadores lineares positivos no espaço $C_0(X)$. Neste capítulo, apresentamos caracterizações de subconjuntos de Korovkin e finalizamos com alguns aplicações para o operador identidade.

O Capítulo 4 trata de uma versão do teorema de Korovkin em $C(X)$, X compacto de Hausdorff, estabelecida por O. G. Atlihan e E. Tas. Os clássicos Primeiro e Segundo Teoremas de Korovkin são casos particulares desse resultado. A demonstração é baseada num método de somabilidade de sequências de matrizes infinitas regulares.

Capítulo 1

Preliminares e notações

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições, notações e resultados que serão utilizados na dissertação. Utilizamos a referência [3] de Altomare.

1.1 Conceitos básicos

Dado um espaço métrico (X, d), para cada $x_0 \in X$ e $r > 0$, denotaremos por $B(x_0, r)$ e $B'(x_0, r)$ a bola aberta e a bola fechada de centro x_0 e raio r, respectivamente:

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\} \tag{1.1}$$

$$B'(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}. \tag{1.2}$$

O símbolo $F(X)$ representa o espaço vetorial de todas as funções reais definidas em X.

Se M é um subconjunto de $F(X)$, então designamos por $span(M)$ o subespaço vetorial gerado por M. Denotamos por $B(X)$ o subespaço vetorial de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$ que são limitadas, munido da norma da convergência uniforme (norma do supremo) definida por:

$$||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \qquad (f \in B(X)). \tag{1.3}$$

$(B(X), ||.||_\infty)$ é um espaço de Banach. Os símbolos $C(X)$ e $C_b(X)$ denotam os subespaços vetoriais de todas as funções contínuas, respectivamente contínuas e limitadas em $F(X)$. Finalmente, denotaremos por $UC_b(X)$ o subespaço vetorial de todas as funções uniformemente contínuas e limitadas em $F(X)$. Ambos os espaços $C_b(X)$ e $UC_b(X)$ são fechados em $B(X)$ e portanto, dotados com a norma do supremo são espaços de Banach.

Um subespaço vetorial E de $F(X)$ é um subespaço reticulado se

$$|f| \in E \qquad \forall f \in E. \tag{1.4}$$

Por exemplo, os espaços $B(X)$, $C(X)$, $C_b(X)$ e $UC_b(X)$ são subespaços reticulados. Note que a partir de (1.4), segue que $\sup(f,g)$, $\inf(f,g) \in E$ para cada $f, g \in E$, onde

$$\sup(f,g)(x) = \sup(f(x), g(x)) \qquad (x \in X) \tag{1.5}$$

$$\inf(f,g)(x) = \inf(f(x), g(x)) \qquad (x \in X). \tag{1.6}$$

Disso decorre imediatamente as identidades elementares

$$\sup(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \qquad \text{e} \qquad \inf(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}. \tag{1.7}$$

Mais geralmente, se $f_1, \ldots, f_n \in E, n \geq 3$, então

$$\sup_{1\leq i\leq n} f_i \in E \qquad \text{e} \qquad \inf_{1\leq i\leq n} f_i \in E.$$

Dizemos que um subespaço vetorial E de $F(X)$ é uma subálgebra se

$$f \cdot g \in E \qquad \forall f, g \in E, \tag{1.8}$$

ou equivalentemente, se $f^2 \in E$ para toda $f \in E$. Neste caso, se $f \in E$ e $n \geq 1$, então $f^n \in E$ e, portanto, para cada polinômio real $Q(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n (x \in \mathbb{R})$ que se anula em 0, a função

$$Q(f) = \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + \ldots + \alpha_n f^n \tag{1.9}$$

pertence a E. Se E contém as funções constantes, então $P(f) \in E$ para cada polinômio real P. Note que uma subálgebra não é necessariamente um subespaço reticulado

($C^1([a,b])$ é um contra-exemplo). No entanto, toda subálgebra fechada de $C_b(X)$ é um subespaço reticulado (veja Lema 3.2.3).

Dado um subespaço vetorial E de $F(X)$, um funcional linear $\mu : E \to \mathbb{R}$ é positivo se

$$\mu(f) \geq 0 \qquad \forall f \in E, f \geq 0. \tag{1.10}$$

O exemplo mais simples de um funcional linear positivo é o funcional chamado avaliação num ponto $a \in X$ definida por

$$\delta_a(f) = f(a) \qquad (f \in E). \tag{1.11}$$

Se (Y, d') é outro espaço métrico, dizemos que um operador linear $T : E \to F(Y)$ é positivo se

$$T(f) \geq 0 \qquad \forall f \in E, f \geq 0. \tag{1.12}$$

Cada operador linear positivo $T : E \to F(Y)$ dá origem a uma família $(\mu_y)_{y \in Y}$ de funcionais lineares positivos em E definidos por

$$\mu_y(f) = T(f)(y) \qquad (f \in E). \tag{1.13}$$

Listaremos algumas propriedades elementares de funcionais lineares positivos.

O símbolo $\mathbb{F}$ pode representar o corpo $\mathbb{R}$ ou um espaço $F(Y)$, sendo Y um espaço métrico arbitrário. Considere um subespaço vetorial E de $F(X)$ e um operador linear positivo $T : E \to \mathbb{F}$. Então:

(i) Para quaisquer $f, g \in E, f \leq g$,

$$T(f) \leq T(g). \tag{1.14}$$

(ii) Se E é um subespaço reticulado então

$$|T(f)| \leq T(|f|) \quad (f \in E). \tag{1.15}$$

(iii) (Desigualdade de Cauchy- Schwarz) Se E é um subespaço reticulado e uma subálgebra, então

$$T(|f \cdot g|) \leq \sqrt{T(f^2) \cdot T(g^2)} \qquad (f, g \in E). \tag{1.16}$$

Em particular, se $1 \in E$, então

$$T(|f|) \leq \sqrt{T(1) \cdot T(f^2)} \qquad (f \in E). \tag{1.17}$$

(iv) Se X é compacto, $1 \in E$ e $\mathbb{F}$ é $\mathbb{R}$ ou $B(Y)$, então T é contínuo e

$$||T|| = ||T(1)||. \tag{1.18}$$

Assim, se $\mu : E \to \mathbb{R}$ é um funcional linear positivo, então μ é contínuo e $||\mu|| = \mu(1)$.

1.2 O espaço $C_0(X)$

Apresentaremos algumas definições básicas e resultados sobre o espaço das funções reais que se anulam no infinito, definidas num espaço de Hausdorff localmente compacto. Para obter mais detalhes, sugerimos ([8], Capítulo IV) ou ([18], Capítulo 3).

Começamos recordando que um espaço topológico X é compacto se toda cobertura aberta de X tem uma subcobertura finita. Um subconjunto de um espaço topológico é compacto se é compacto na topologia relativa. Um espaço topológico é localmente compacto, se cada um dos seus pontos possui uma vizinhança compacta.

Se X é localmente compacto e Hausdorff (ou seja, para cada par de pontos distintos x_1, $x_2 \in X$ existem vizinhanças U_1 e U_2 de x_1 e x_2, respectivamente, tal que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$), então cada ponto de X tem um sistema fundamental de vizinhanças compactas.

Todo espaço compacto é localmente compacto. Os espaços $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, são exemplos fundamentais de espaços localmente compactos (não compactos). Além disso, se X é localmente compacto, então todo subconjunto aberto de X e todo subconjunto fechado de X, dotado com a topologia relativa, é localmente compacto. De modo mais geral, um subconjunto de um espaço de Hausdorff localmente compacto, dotado com a topologia relativa, é localmente compacto se, e somente se, ele é a interseção de um subconjunto aberto de X com um subconjunto fechado de X (veja [18], Corolário 3.3.10]). Portanto, todo intervalo real é localmente compacto.

Um espaço topológico X é dito ser metrizável se a sua topologia é induzida por uma métrica em X. Neste caso, dizemos que X é completo se uma tal métrica é completa.

Note que todo espaço compacto metrizável é completo e separável (isto é, contém um subconjunto enumerável e denso).

Um papel especial na teoria da medida em espaços topológicos e na teoria da aproximação tipo Korovkin é atribuído aos espaços de Hausdorff localmente compactos com uma base enumerável, ou seja, com uma família enumerável de subconjuntos abertos de tal forma que cada subconjunto aberto é a união de elementos dessa família. Tais espaços são metrizáveis, completos e separáveis. Um espaço metrizável tem uma base enumerável se, e somente se, for separável. Os espaços $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, e cada subconjunto deles aberto ou fechado são espaços de Hausdorff localmente compactos com uma base enumerável. A partir de agora, vamos fixar X como sendo um espaço de Hausdorff localmente compacto. Denotaremos por $\mathcal{K}(X)$ o subespaço vetorial de todas as funções reais contínuas sobre X com suporte compacto, isto é,

$$\mathcal{K}(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : \, supp(f) \text{ é compacto}\}$$

onde,

$$supp(f) = \{\overline{x \in X : \, f(x) \neq 0}\}.$$

Note que $\mathcal{K}(X) \subset C_b(X)$ pois se $f \in \mathcal{K}(X)$ então

$$f|_{supp(f)} : supp(f) \to \mathbb{R}$$

é limitada, uma vez que toda aplicação contínua real de domínio compacto é limitada. E por outro lado, se $x \notin supp(f)$ então $f(x) = 0$ e portanto limitada.

Ademais, $\mathcal{K}(X)$ é um subespaço reticulado de $C_b(X)$.

O próximo resultado mostra que há um número suficiente de funções em $\mathcal{K}(X)$. (Para uma prova, veja [8], Corolário 27.3).

Teorema 1.2.1. (*Lema de Urysohn*) *Para todo subconjunto compacto K de X e para todo subconjunto aberto U contendo K, existe $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ em K e $supp(\varphi) \subset U$ (e portanto $\varphi = 0$ em $X - U$).*

Outro espaço de funções fundamental é o espaço $C_0(X)$, que é definido como o fecho de $\mathcal{K}(X)$ em $C_b(X)$ em relação à norma supremo ($||.||_\infty$), em símbolos iremos denotar por

$$C_0(X) := \overline{\mathcal{K}(X)}.$$

$C_0(X)$ é um subespaço fechado de $C_b(X)$ e, portanto , munido com a norma $(||.||_\infty)$, é um espaço de Banach .

Por meio do lema de Urysohn, não é difícil provar a seguinte caracterização de funções que encontram-se em $C_0(X)$.

Teorema 1.2.2. *Suponha que X não é compacto. Para uma função $f \in C(X)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $f \in C_0(X)$;

(ii) para todo $\epsilon > 0$ existe um subconjunto K compacto de X tal que $|f(x)| < \epsilon$ para cada $x \in X - K$;

(iii) $\{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}$ *é compacto para todo* $\epsilon > 0$.

Por causa do teorema anterior, as funções em $C_0(X)$ são ditas funções que se anulam no infinito. Se X é compacto, então $C_0(X) = C(X)$. Além disso, $C_0(X)$ é um subespaço reticulado de $C_b(X)$ e, dotado com a norma do supremo, é separável desde que X tenha uma base enumerável.

Outra caracterização das funções em $C_0(X)$ envolve sequências de pontos de X que convergem para o ponto no infinito de X. Mais precisamente, assumindo que X não é compacto, uma sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$ em X converge para o ponto no infinito de X se para cada subconjunto compacto K de X existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in X - K$ para todo $n \geq n_0$. Para tal sequência e para toda $f \in C_0(X)$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0. \tag{1.19}$$

Por outro lado, uma função $f \in C(X)$ que satisfaz (1.19) para cada sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$ convergindo para o ponto no infinito de X encontra-se necessariamente em $C_0(X)$, desde que X seja enumerável no infinito, isto é, X é união de uma sequência de subconjuntos compactos de X. Note também que X é enumerável no infinito se, e somente, existe $f_0 \in C_0(X)$ tal que $f_0(x) > 0$ para cada $x \in X$. Por outro lado, se X tem uma base enumerável, então X é enumerável no infinito.

Recordemos que um reticulado Banach E é um espaço vetorial dotado com uma norma $||.||$ e uma ordem $\leq$ em E tal que

(i) $(E, ||.||)$ é um espaço de Banach;

(ii) $(E, \leq)$ é um reticulado vetorial;

(iii) Se $f, g \in E$ e $|f| \leq |g|$ então $||f|| \leq ||g||$.

sendo $|f| = \sup(-f, f)$ para toda $f \in E$.

Os espaços $C_0(X)$ e $C(K)$, (K compacto), dotados com a ordem usual e a norma do supremo, são reticulados Banach. Da mesma forma $L^p(X, \widetilde{\mu})$, dotado com a norma natural $||.||_p$ e ordem $\leq$,

$$f \leq g \text{ se } f(x) \leq g(x) \text{ para } x \in X \text{ quase sempre,}$$

é um reticulado Banach.

Se E e F são reticulados Banach, um operador linear $L : E \to F$ é positivo se

$$L(f) \geq 0 \text{ para toda } f \in E,\ f \geq 0.$$

Todo operador linear positivo $L : E \to F$ é contínuo, (veja, por exemplo, [1], Teorema 12.3). Além disso, se $E = C(X)$, X compacto então $||L|| = ||L(1)||$.

Uma ferramenta útil que desempenha um papel importante na Teoria da Aproximação tipo Korovkin são as medidas de Radon. Vamos trabalhar com medidas de Radon positivas e limitadas, que são, por definição, funcionais lineares positivos em $C_0(X)$. O conjunto de todos eles será denotado por $\mathcal{M}_b^+(X)$.

Cada $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$, isto é, cada funcional linear positivo: $\mu : C_0(X) \to \mathbb{R}$, é contínuo (com respeito à norma do supremo), e a sua norma

$$||\mu|| = \sup\{|\mu(f)| : f \in C_0(X), ||f|| \leq 1\}, \tag{1.20}$$

é chamada a massa total de μ.

Um exemplo simples de medida de Radon positiva é a medida de Dirac em um ponto $a \in X$, que é definida por

$$\delta_a(f) = f(a) \qquad (f \in C_0(X)). \tag{1.21}$$

Uma combinação linear positiva das medidas de Dirac é chamada de medida discreta (positiva).

Em outras palavras, uma medida de Radon $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ é discreta se existe um número finito de elementos $a_1, ..., a_n \in X$, $n \geq 1$, e um número finito de números reais positivos $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tais que

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{a_i}, \tag{1.22}$$

isto é,

$$\mu(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i), \tag{1.23}$$

para toda $f \in C_0(X)$.

Neste caso, $||\mu|| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ e μ também é dita ser suportada sobre $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Em seguida, apresentaremos uma caracterização de medidas de Radon discretas. Normalmente, essa caracterização é provada usando a noção de suporte de medidas Radon (veja, por exemplo, [13], Capítulo III, Seção 2 e [16], Vol. I, Seção 11). Uma demonstração simples e direta pode ser encontrada no artigo de Altomare [3].

Começamos com o seguinte resultado.

Teorema 1.2.3. *Seja $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ e considere um subconjunto fechado Y de X tal que*

$$\mu(\varphi) = 0, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{K}(X), supp(\varphi) \subset X - Y. \tag{1.24}$$

Então $\mu(f) = \mu(g)$ para toda $f, g \in C_0(X)$ tal que $f = g$ em Y.

Demonstração. Veja ([3], Teorema 11.5). □

Ressaltamos que existe um subconjunto fechado Y de X satisfazendo (1.24). O menor deles é chamado suporte da medida μ (veja as referências dadas antes do Teorema 1.2.3). Um exemplo importante de um subconjunto Y satisfazendo (1.24) é dado abaixo.

Corolário 1.2.1. *Seja $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ e considere uma família arbitrária $(f_i)_{i\in I}$ de funções positivas em $C_0(X)$ tal que $\mu(f_i) = 0$ para todo $i \in I$. Então*

$$Y = \{x \in X : f_i(x) = 0 \text{ para todo } i \in I\}$$

satisfaz (1.24).

Portanto, se f, $g \in C_0(X)$ e se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in Y$, então $\mu(f) = \mu(g)$.

Demonstração. Veja ([3], Corolário 11.6). □

Teorema 1.2.4. *Dados $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ e elementos distintos $a_1, \cdots, a_n \in X$, $n \geq 1$, as seguintes afirmações são equivalentes*

(i) Existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, +\infty[$ tal que $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{a_i}$, (veja (1.23));

(ii) Se $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ e $supp(\varphi) \cap \{a_1, \cdots, a_n\} = \emptyset$, então $\mu(\varphi) = 0$;

(iii) para todo $x \in X - \{a_1, \cdots, a_n\}$ existe $f \in C_0(X)$, $f \geq 0$ tal que $f(x) > 0$, $f(a_i) = 0$ para cada $i = 1, \cdots, n$ e $\mu(f) = 0$.

Demonstração. Veja ([3], Teorema 11.7). □

Terminamos o capítulo, com um resultado de convergência vaga de medidas de Radon. Para mais detalhes, consultar, por exemplo, ([8], § 30), ([16], Vol. I, §12) ou ([21]).

Uma sequência $\{\mu_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{M}_b^+(X)$ é dita convergir vagamente para $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ se

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = \mu(f) \text{ para toda } f \in C_0(X). \tag{1.25}$$

Assim, (1.25) significa simplesmente que $\mu_n \to \mu$ fracamente estrela no espaço dual de $C_0(X)$. O termo "vagamente" é comum em Teoria da Probabilidade.

Teorema 1.2.5. *Se X tem uma base enumerável, então cada sequência em $\mathcal{M}_b^+(X)$ que é limitada com respeito à norma (1.20), tem uma subsequência que converge vagamente para algum $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$.*

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em ([39], pág. 68).

Capítulo 2

Teoremas Clássicos

Neste capítulo, apresentaremos os teoremas clássicos de Korovkin e suas aplicações. Nos baseamos na referência [3] de Altomare.

2.1 Primeiro Teorema de Korovkin

O Primeiro Teorema de Korovkin fornece um critério muito útil e simples para saber se uma determinada sequência $\{L_n\}_{n\geq 1}$ de operadores lineares positivos em $C([0,1])$ é um processo de aproximação, isto é, $L_n(f) \to f$ uniformemente em $[0,1]$ para toda $f \in C([0,1])$.

Para enunciar tal teorema, introduziremos as funções

$$e_m(t) = t^m, \qquad t \in [0,1] \text{ e } m \geq 1. \tag{2.1}$$

Teorema 2.1.1. (*Korovkin - 1953, [27]) Seja* $\{L_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de operadores lineares positivos de* $C([0,1])$ *em* $F([0,1])$*, tais que, para cada* $g \in \{1, e_1, e_2\}$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(g) = g \text{ uniformemente em } [0,1].$$

Então, para toda $f \in C([0,1])$*,*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f \text{ uniformemente em } [0,1].$$

Demonstração. Para cada $x \in [0,1]$, considere a função auxiliar

$$\eta_x(t) = |t-x| \qquad (0 \leq t \leq 1). \tag{2.2}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\eta_x^2(t) &= (|t-x|)^2 \\
\eta_x^2(t) &= t^2 - 2tx + x^2 \\
\eta_x^2 &= e_2 - 2xe_1 + x^2 \cdot 1.
\end{aligned}$$

Seja $\{L_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de operadores lineares positivos satisfazendo as hipóteses do Teorema, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} L_n(g) = g \text{ uniformemente em } [0,1],$$

para cada $g \in \{1, e_1, e_2\}$.

Daí, para todo $x \in [0,1]$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\eta_x^2) = \lim_{n\to\infty} L_n(e_2 - 2xe_1 + x^2 \cdot 1) = \lim_{n\to\infty} [L_n(e_2) - 2xL_n(e_1) + x^2 L_n(1)]$$
$$= e_2 - 2xe_1 + x^2 \cdot 1 = \eta_x^2.$$

Em particular,

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\eta_x^2)(x) = x^2 - 2x^2 + x^2 = 0. \tag{2.3}$$

Seja $f \in C([0,1])$. Como f é uniformemente contínua, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|t-y| < \delta$ implica $|f(t) - f(y)| < \epsilon$.

Fixe um ponto arbitrário x de $[0,1]$. Se $\eta_x(t) < \delta$ então $|f(x) - f(t)| < \epsilon$.

Se $\eta_x(t) \geq \delta$ então

$$|f(x) - f(t)| \leq 2||f||_\infty \leq \frac{2||f||_\infty}{\delta^2}\eta_x^2(t).$$

Assim, para todo $t \in [0,1]$ temos,

$$|f(x) - f(t)| \leq \epsilon + \frac{2||f||_\infty}{\delta^2}\eta_x^2(t).$$

Escrevendo em termos de funções temos que,

$$|f(x) \cdot 1 - f| \leq \epsilon \cdot 1 + \frac{2||f||_\infty}{\delta^2}\eta_x^2.$$

Pela linearidade e positividade de L_n segue que,

$$\begin{aligned} |f(x)L_n(1)(x) - L_n(f)(x)| &\leq \epsilon L_n(1)(x) + \frac{2||f||_\infty}{\delta^2} L_n(\eta_x^2)(x) \\ &\leq \epsilon ||L_n(1)|| + \frac{2||f||_\infty}{\delta^2} L_n(\eta_x^2)(x). \end{aligned}$$

Como $L_n(1) \to 1$ e $L_n(\eta_x^2)(x) \to 0$ o resultado acima já garante a prova do teorema uma vez que,

$$\begin{aligned} |f(x) - L_n(f)(x)| &\leq |f(x) - f(x)L_n(1)(x)| + |f(x)L_n(1)(x) - L_n(f)(x)| \\ &\leq |f(x)||1 - L_n(1)(x)| + \epsilon ||L_n(1)|| + \frac{2||f||_\infty}{\delta^2} L_n(\eta_x^2)(x) \\ &\leq ||f||_\infty ||1 - L_n(1)|| + \epsilon + \epsilon ||1 - L_n(1)|| + \frac{2||f||_\infty}{\delta^2} L_n(\eta_x^2)(x) \\ &= \epsilon + (||f||_\infty + \epsilon)||1 - L_n(1)|| + \frac{2||f||_\infty}{\delta^2} L_n(\eta_x^2)(x). \end{aligned}$$

Podemos tomar n suficientemente grande de forma que $(||f||_\infty + \epsilon)||1 - L_n(1)|| < \epsilon$ e $\frac{2||f||_\infty}{\delta^2} L_n(\eta_x^2)(x) < \epsilon$ e assim, $|f(x) - L_n(f)(x)| < 3\epsilon$ para todo $x \in [0, 1]$. □

Observações 2.1.1.

1. *O Teorema 2.1.1 também é válido para qualquer intervalo compacto* $[a, b]$.

2. *Não existe conjunto teste para* $C[a, b]$ *formado somente por duas funções. Veja Korovkin [27].*

Considere agora um espaço métrico (X, d). Estendendo (2.2), para qualquer $x \in X$ denotamos por $\eta_x \in C(X)$ a função

$$\eta_x(y) = d(x, y) \qquad (y \in X). \tag{2.4}$$

O próximo resultado é uma generalização do Teorema de Korovkin e pode ser encontrado em [3].

Teorema 2.1.2. *Seja* (X, d) *um espaço métrico e considere um subespaço reticulado* E *de* $F(X)$ *contendo as funções constantes e todas as funções* $\eta_x^2 \quad (x \in X)$. *Seja* $\{L_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de operadores lineares positivos de* E *em* $F(X)$ *e* Y *um subconjunto de* X *tal que,* *(i)* $\lim_{n\to\infty} L_n(1) = 1$ *uniformemente em* Y.

(ii) $\lim_{n\to\infty} L_n(\eta_x^2)(x) = 0$ *uniformemente em relação a* $x \in Y$.

Então, para toda $f \in E \cap UC_b(X)$,

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f \text{ uniformemente em } Y.$$

Demonstração. Considere $f \in E \cap UC_b(X)$ e $\epsilon > 0$. Uma vez que f é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que,

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon, \text{ para quaisquer } x, y \in X \text{ tal que } d(x,y) < \delta. \tag{2.5}$$

Por outro lado, se $d(x,y) \geq \delta$, então $\dfrac{d(x,y)}{\delta} \geq 1$ e assim,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2||f||_\infty \leq \frac{2||f||_\infty}{\delta^2} d^2(x,y). \tag{2.6}$$

Portanto, para $x \in X$ fixo, obtemos de (2.5) e (2.6) que

$$|f - f(x) \cdot 1| \leq \frac{2||f||_\infty}{\delta^2} \eta_x^2 + \epsilon$$

e portanto, usando (1.14) e (1.15), temos que para qualquer $n \geq 1$

$$|L_n(f)(x) - f(x)L_n(1)(x)| \leq L_n(|f - f(x) \cdot 1|)(x) \leq L_n\left(\frac{2||f||_\infty}{\delta^2} \eta_x^2 + \epsilon\right)(x).$$

Assim,

$$|L_n(f)(x) - f(x)L_n(1)(x)| \leq L_n(|f - f(x)|)(x) \leq \frac{2||f||_\infty}{\delta^2} L_n(\eta_x^2)(x) + \epsilon L_n(1)(x).$$

Portanto, pelas hipóteses (i) e (ii) segue que

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f \text{ uniformemente em } Y.$$

□

O Teorema 2.1.2 tem uma generalização natural para espaços completamente regulares (para mais detalhes, indicamos [5]). Além disso, a prova acima pode ser adaptada para mostrar o Teorema 2.1.3.

Lema 2.1.1. *Seja (X,d) um espaço métrico localmente compacto. Então, para cada subconjunto compacto K de X e para cada $\epsilon > 0$, existem $0 < \overline{\epsilon} < \epsilon$ e um subconjunto compacto K_ϵ de X tal que*

$$B'(x,\overline{\epsilon}) \subset K_\epsilon, \text{ para todo } x \in K.$$

Demonstração. Dados $x \in K$ e $\epsilon > 0$, existe $0 < \epsilon(x) < \epsilon$ tal que $B'(x,\epsilon(x))$ é compacta.

Como $K \subset \bigcup_{x\in K} B\left(x, \frac{\epsilon(x)}{2}\right)$, e K é compacto, existem $x_1,\ldots,x_p \in K$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B\left(x_i, \frac{\epsilon(x_i)}{2}\right).$$

Sejam $\overline{\epsilon} := \min_{1\le i\le p} \frac{\epsilon(x_i)}{2} < \epsilon$ e $K_\epsilon := \bigcup_{i=1}^{p} B'(x_i,\epsilon(x_i))$.

Seja $x \in K$ e $y \in X$ com $y \in B'(x,\overline{\epsilon})$, isto é $d(x,y) \le \overline{\epsilon}$.

Como $K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B\left(x_i, \frac{\epsilon(x_i)}{2}\right)$ então existe $i \in \{1,\ldots,p\}$ tal que $d(x,x_i) < \frac{\epsilon(x_i)}{2}$ e portanto,

$$d(y,x_i) \le d(y,x) + d(x,x_i) < \overline{\epsilon} + \frac{\epsilon(x_i)}{2} \le \epsilon(x_i).$$

Logo $y \in K_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{p} B'(x_i,\epsilon(x_i))$. □

Teorema 2.1.3. *Seja (X,d) um espaço métrico localmente compacto e considere um subespaço reticulado E de $F(X)$ contendo as funções constantes e todas as funções η_x^2 $(x \in X)$. Seja $\{L_n\}_{n\ge 1}$ uma sequência de operadores lineares positivos de E em $F(X)$ e assuma que*

(i) $\lim_{n\to\infty} L_n(1) = 1$ *uniformemente em subconjuntos compactos de X.*

(ii) $\lim_{n\to\infty} L_n(\eta_x^2)(x) = 0$ *uniformemente em subconjuntos compactos de X.*

Então, para toda $f \in E \cap C_b(X)$,

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f \text{ uniformemente em subconjuntos compactos de } X.$$

Demonstração. Fixe $f \in E \cap C_b(X)$ e considere um subconjunto compacto K de X. Dado $\epsilon > 0$, considere $0 < \overline{\epsilon} < \epsilon$ e um subconjunto compacto K_ϵ de X como no Lema 2.1.1. Como f é uniformemente contínua em K_ϵ, existe $0 < \delta < \overline{\epsilon}$ tal que para todo $x, y \in K_\epsilon$ com $d(x,y) < \delta$ temos

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Dados $x \in K$ e $y \in X$, se $d(x,y) < \delta$ então $y \in B'(x, \overline{\epsilon}) \subset K_\epsilon$ e portanto $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Se $d(x,y) \geq \delta$ então

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2||f||_\infty \leq \frac{2||f||_\infty}{\delta^2} d^2(x,y).$$

Portanto, para $x \in X$ fixado, obtemos

$$|f - f(x) \cdot 1| \leq \frac{2||f||_\infty}{\delta^2} \eta_x^2 + \epsilon \cdot 1$$

e assim, usando (1.14) e (1.15), para todo $n \geq 1$,

$$|L_n(f)(x) - f(x) L_n(1)(x)| \leq L_n(|f - f(x) \cdot 1|)(x) \leq L_n \left(\frac{2||f||_\infty}{\delta^2} \eta_x^2 + \epsilon \cdot 1 \right)(x).$$

Assim,

$$|L_n(f)(x) - f(x) L_n(1)(x)| \leq L_n(|f - f(x)|)(x) \leq \frac{2||f||_\infty}{\delta^2} L_n(\eta_x^2)(x) + \epsilon L_n(1)(x).$$

Portanto, pelas hipóteses (i) e (ii) segue que

$$\lim_{n \to \infty} L_n(f)(x) = f(x) \text{ uniformemente em relação a } x \in K.$$

$\square$

O Teorema de Korovkin 2.1.1 muitas vezes chamado Primeiro Teorema de Korovkin tem muitas aplicações importantes no estudo do processo de aproximações positivas em $C([0,1])$.

Uma delas está relacionada com os operadores de Bernstein em $C([0,1])$ que são definidos por

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.7}$$

com $n \geq 1, f \in C([0,1])$ e $0 \leq x \leq 1$.

Cada $B_n(f)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n. Eles foram introduzidos por S.N. Bernstein para dar a primeira prova construtiva do teorema de aproximação de Weistrass.

Na verdade temos que:

Teorema 2.1.4. *Para cada* $f \in C([0,1])$,

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f) = f \text{ uniformemente em } [0,1].$$

Demonstração. Cada B_n é um operador linear positivo em $C([0,1])$. Ademais, para qualquer $n \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned} B_n(1) &= 1 \\ B_n(e_1) &= e_1 \\ B_n(e_2) &= \frac{n-1}{n}e_2 + \frac{1}{n}e_1. \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} B_n(1)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (1-x+x)^n \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n(e_1)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)}. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $i = k-1$, temos que

$$\begin{aligned}
B_n(e_1)(x) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{i+1} (1-x)^{(n-1)-(i)} \\
&= x \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{i} (1-x)^{(n-1)-(i)} \\
&= x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n(e_2)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{k}{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)}.
\end{aligned}$$

Tomando novamente $i = k-1$, temos que

$$\begin{aligned}
B_n(e_2)(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \binom{n-1}{i} x^{i+1} (1-x)^{(n-1)-(i)} \\
&= x \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \binom{n-1}{i} x^{i} (1-x)^{(n-1)-(i)} \\
&= x \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \binom{n-1}{i} x^{i} (1-x)^{(n-1)-(i)} \\
&\quad + x \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \binom{n-1}{i} x^{i} (1-x)^{(n-1)-(i)} \\
&= x \cdot \frac{n-1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} \binom{n-1}{i} x^{i} (1-x)^{(n-1)-(i)} \\
&\quad + x \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{i} (1-x)^{(n-1)-(i)} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot x^2 + \frac{1}{n} \cdot x
\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} B_n(1) = 1$, $\lim_{n\to\infty} B_n(e_1) = e_1$ e $\lim_{n\to\infty} B_n(e_2) = e_2$ uniformemente em $[0,1]$, segue do Teorema 2.1.1 que $\lim_{n\to\infty} B_n(f) = f$ uniformemente em $[0,1]$. $\square$

O Teorema 2.1.4 fornece uma prova construtiva do Teorema de aproximação de Weierstrass, que enunciaremos abaixo.

Teorema 2.1.5. *Para cada $f \in C([0,1])$, existe uma sequência de polinômios algébricos uniformemente convergente para f em $[0,1]$.*

Note que pelo Teorema 2.1.4 temos que o Teorema da aproximação de Weierstrass pode ser obtido do Teorema de Korovkin. Veremos a seguir que a partir do Teorema de Weierstrass é possível obter uma versão especial do Teorema de Korovkin que envolve somente operadores lineares positivos $L_n, n \geq 1$, tais que $L_n(C([0,1])) \subset B([0,1])$ para todo $n \geq 1$. Essa versão especial é chamada versão restrita do Teorema de Korovkin.

Teorema 2.1.6. *A versão restrita do Teorema de Korovkin e o Teorema de aproximação de Weierstrass são equivalentes.*

Demonstração. Temos que fornecer uma prova da versão restrita do Teorema de Korovkin baseada somente no Teorema de Weierstrass.

Considere uma sequência de operadores lineares positivos $\{Ln\}_{n\geq 1}$ de $C([0,1])$ em $B([0,1])$ tal que $\lim_{n\to\infty} L_n(g) = g$ uniformemente em $[0,1]$ para cada $g \in \{1, e_1, e_2\}$.

Como na demonstração do Teorema 2.1.1 obtemos

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\eta_x^2)(x) = 0,$$

uniformemente em relação a $x \in [0,1]$.

Ademais, para cada $m \geq 1$, $x, y \in [0,1]$ e c entre x e y, temos pelo Teorema do Valor Médio que

$$|x^m - y^m| = |mc^{m-1}(x-y)| = mc^{m-1}|x-y| \leq m|x-y|.$$

Assim, usando a função $e_m(x) = x^m$ $(0 \leq x \leq 1)$, obtemos

$$|e_m - y^m 1| \leq m|e_1 - y1| \qquad (y \in [0,1]).$$

Portanto, aplicando as Propriedades 1.14, 1.15 e 1.16 de operadores lineares positivos, para quaisquer $n \geq 1$ e $y \in [0,1]$, obtemos

$$\begin{aligned}|L_n(e_m) - y^m L_n(1)| &= |L_n(e_m - y^m 1)| \leq L_n(|e_m - y^m 1|) \leq L_n(m|e_1 - y1|) = mL_n(|1(e_1 - y1)|) \\ &\leq m\sqrt{L_n(1^2)L_n(e_1 - y1)^2} = m\sqrt{L_n(1)L_n(e_2 - 2ye_1 + y^2 1)} = m\sqrt{L_n(1)}\sqrt{L_n(\eta_y^2)}.\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{n\to\infty} L_n(e_m) = e_m$ uniformemente em $[0,1]$ para qualquer $m \geq 1$ e portanto $\lim_{n\to\infty} L_n(P) = P$ uniformemente em $[0,1]$ para qualquer polinômio algébrico P em $[0,1]$.

Tome $M = \sup_{n\geq 1} ||L_n||$. Por 1.18 temos que

$$M = \sup_{n\geq 1} ||L_n|| = \sup_{n\geq 1} ||L_n(1)||.$$

Como a sequência $\{L_n(1)\}_{n\geq 1}$ é convergente temos que ela é limitada, ou seja, existe $A > 0$ tal que $||L_n(1)|| \leq A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\sup_{n\geq 1} ||L_n(1)|| < \infty$.

Logo, podemos concluir nossa prova. Fixando $f \in C([0,1])$ e $\epsilon > 0$ existe um polinômio algébrico P em $[0,1]$ tal que $||f - P|| < \epsilon$ e um número inteiro r tal que, $||L_n(P) - P|| < \epsilon$ para todo $n \geq r$, de modo que

$$\begin{aligned}||L_n(f) - f|| &\leq ||L_n(f) - Ln(P)|| + ||L_n(P) - P|| + ||P - f|| \\ &\leq ||L_n||\,||(f - P)|| + ||L_n(P) - P|| + ||P - f|| \leq M\epsilon + \epsilon + \epsilon = \epsilon(M+2).\end{aligned}$$

□

Apresentaremos uma outra aplicação do Teorema de Korovkin que diz respeito à aproximação de funções em $L^p([0,1]), 1 \leq p < +\infty$, por meio de operadores lineares positivos.

O espaço $C([0,1])$ é denso em $L^p([0,1])$ com respeito à norma usual

$$||f||_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (f \in L^p([0,1])) \tag{2.8}$$

e

$$||f||_p \leq ||f||_\infty \qquad \text{se } f \in C([0,1]). \tag{2.9}$$

Portanto, a subálgebra de todos os polinômios algébricos sobre $[0,1]$ é densa em $L^p([0,1])$.

Os operadores de Bernstein não são adequados para aproximar funções integravéis de Lebesgue, veja, por exemplo, [32], Seção 1.9). Para tal aproximação utilizaremos os polinômios Kantorovich introduzidos por L.V. Kantorovich. Estes polinômios fornecem a primeira prova construtiva do resultado mencionado acima.

Os polinômios Kantorovich são definidos por

$$K_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[(n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.10}$$

com $n \geq 1, f \in L^p([0,1])$ e $0 \leq x \leq 1$.

Cada $K_n(f)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n e cada K_n é um operador linear positivo de $L^p([0,1])$ (e, em particular de $C([0,1])$ em $C([0,1])$).

Teorema 2.1.7. *Se $f \in C([0,1])$, então*

$$\lim_{n\to\infty} K_n(f) = f \text{ uniformemente em } [0,1].$$

Demonstração. Cada K_n é um operador linear positivo em $C([0,1])$. Ademais, para qualquer $n \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned}
K_n(1) &= 1 \\
K_n(e_1) &= \frac{n}{n+1} \cdot e_1 + \frac{1}{2(n+1)} \\
K_n(e_2) &= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} e_2 + \frac{2n}{(n+1)^2} e_1 + \frac{1}{3(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
K_n(1)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left[(n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} dt \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[(n+1) \left(\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n+1} \right) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_n(e_1)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left[(n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} t\, dt \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{n+1}{2} \left(\left(\frac{k+1}{n+1} \right)^2 - \left(\frac{k}{n+1} \right)^2 \right) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{n+1}{2} \left(\frac{k^2+2k+1}{(n+1)^2} - \frac{k^2}{(n+1)^2} \right) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2(n+1)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n+1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(n+1)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n}{n+1} \cdot e_1(x) + \frac{1}{2(n+1)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_n(e_2)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left[(n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} t^2\, dt \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{n+1}{3} \left(\left(\frac{k+1}{n+1} \right)^3 - \left(\frac{k}{n+1} \right)^3 \right) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{n+1}{3} \left(\frac{k^3+3k^2+3k+1}{(n+1)^3} - \frac{k^3}{(n+1)^3} \right) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{3k^2+3k+1}{3(n+1)^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{(n+1)^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(n+1)^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3(n+1)^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n^2}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{n}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad + \frac{1}{3(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n^2}{(n+1)^2} \left[\frac{n-1}{n} \cdot e_2 + \frac{1}{n} \cdot e_1 \right] + \frac{n}{(n+1)^2} \cdot e_1 + \frac{1}{3(n+1)^2} \\
&= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \cdot e_2(x) + \frac{2n}{(n+1)^2} \cdot e_1(x) + \frac{1}{3(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} K_n(1) = 1$, $\lim_{n\to\infty} K_n(e_1) = e_1$ e $\lim_{n\to\infty} K_n(e_2) = e_2$ uniformemente em $[0,1]$, segue do Teorema 2.1.1 que $\lim_{n\to\infty} K_n(f) = f$ uniformemente em $[0,1]$. $\square$

Antes de mostrar um resultado semelhante ao Teorema 2.1.7 para funções em $L^p[0,1]$, recordaremos algumas propriedades de funções convexas.

Considere um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A função $\varphi : I \to \mathbb{R}$ é convexa se:

$$\varphi(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y)$$

para todo $x, y \in I$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. Se I é aberto e φ é convexa, então, para cada família finita $\{x_k\}_{1\leq k\leq n}$ em I e $\{\alpha_k\}_{1\leq k\leq n} \in [0,1]$ tal que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, temos que

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi(x_k). \qquad \text{(Desigualdade de Jensen)}$$

A função $|t|^p \quad (t \in \mathbb{R}), 1 \leq p < \infty$, é convexa. Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, um intervalo aberto I de $\mathbb{R}$ e uma função μ-integrável $f : \Omega \to I$, então

$$\int_\Omega f \, d\mu \in I.$$

Além disso, se $\varphi : I \to \mathbb{R}$ é convexa e $\varphi \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ é μ-integrável, então

$$\varphi\left(\int_\Omega f \, d\mu\right) \leq \int_\Omega \varphi \circ f \, d\mu. \qquad \text{(Desigualdade de Jensen para Integral)}$$

Após essas preliminares, procedemos agora para mostrar a propriedade de aproximação de $\{K_n\}_{n\geq 1}$ em $L^p([0,1])$.

Teorema 2.1.8. *Se $f \in L^p([0,1])$, então*

$$\lim_{n\to\infty} K_n(f) = f \ \textit{em} \ L^p([0,1]).$$

Demonstração. Para cada $n \geq 1$, denotamos por $||K_n||$ a norma do operador K_n de $L^p([0,1])$ em $L^p([0,1])$.

Para provar este resultado, é suficiente mostrar que existe $M \geq 0$ tal que $||K_n|| \leq M$ para cada $n \geq 1$.

Depois disso o resultado segue imediatamente, pois, dado $\epsilon > 0$, existe $g \in C([0,1])$ tal que $||f-g||_p < \epsilon$. E como $g \in C([0,1])$ pelo Teorema 2.1.7 existe $r \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq r$

$$||K_n(g) - g||_\infty < \epsilon.$$

Mas como $g \in C([0,1])$ temos

$$||K_n(g) - g||_p \leq ||K_n(g) - g||_\infty.$$

Deste modo,

$$||K_n(f) - f||_p \leq ||K_n(f) - K_n(g)||_p + ||K_n(g) - g||_p + ||g - f||_p \leq$$
$$||K_n||\,||f-g||_p + ||K_n(g) - g||_p + ||g - f||_p < M\epsilon + \epsilon + \epsilon = (M+2)\epsilon.$$

Agora, a fim de obter a estimativa desejada, iremos utilizar a Desigualdade de Holder, a convexidade da função $|t|^p$ em $\mathbb{R}$ e a Desigualdade de Jensen. Dado $f \in L^p([0,1])$, para todo $n \geq 1$ e $0 \leq k \leq n$, temos pela desigualdade de Holder que

$$\begin{aligned}
\left((n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|\,dt\right)^p &= \left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |(n+1)f(t)|\,dt\right)^p \\
&\leq \left(\left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |(n+1)|^{\frac{p}{p-1}}\,dt\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \\
&= \left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} (n+1)^{\frac{p}{p-1}}\,dt\right)^{p\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|^p\,dt\right)^{p\cdot\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} (n+1)^{\frac{p}{p-1}}\,dt\right)^{p-1} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|^p\,dt \\
&= \left(\frac{k+1}{n+1}(n+1)^{\frac{p}{p-1}} - \frac{k}{n+1}(n+1)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|^p\,dt \\
&= \left(\frac{(n+1)^{\frac{p}{p-1}}}{n+1}\right)^{p-1} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|^p\,dt \\
&= \frac{(n+1)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}}{(n+1)^{p-1}} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|^p\,dt \\
&= \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p-1}} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|^p\,dt \\
&= (n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|^p\,dt
\end{aligned}$$

isto é,

$$\left((n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|\,dt\right)^p \leq (n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|^p\,dt. \tag{2.11}$$

E como $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 1$, segue da Desigualdade de Jensen e (2.11) que

$$\begin{aligned}
|K_n(f)(x)|^p &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left[(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|^p \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left[(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt\right]\right|^p \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt\right|^p \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left[(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|\,dt\right]^p \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|^p\,dt.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
||K_n(f)||_p^p &= \int_0^1 |K_n(f)(x)|^p dx \\
&\leq \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|^p dt\right] dx \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx\right)\left((n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|^p\,dt\right).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$||K_n(f)||_p^p \leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx\right)\left((n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|^p\,dt\right).$$

Por outro lado, considere a função beta

$$\beta(u,v) := \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt \qquad (u>0, v>0).$$

Temos que,

$$\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx = \beta(k+1, n-k+1) = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
||K_n(f)||_p^p &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx \right) \left((n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|^p \, dt \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|^p \, dt = \int_0^1 |f(t)|^p \, dt \\
&= ||f||_p^p.
\end{aligned}$$

Assim, $||K_n(f)||_p \leq ||f||_p$ para toda $f \in L^p([0,1])$ e portanto $||K_n|| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tome $M = 1$. □

Observação 2.1.1. *Se $f \in C([0,1])$ é continuamente diferenciável em $[0,1]$, e fazendo referência novamente aos operadores de Bernstein,*

$$B_n(f)(x) = \sum_{h=0}^{n} f\left(\frac{h}{n}\right) \binom{n}{h} x^h (1-x)^{n-h}, \tag{2.12}$$

temos que para todo $n \geq 1$ e $x \in [0,1]$,

$$B_{n+1}(f)'(x) = \sum_{h=0}^{n} (n+1) \left[f\left(\frac{h+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{h}{n+1}\right) \right] \binom{n}{h} x^h (1-x)^{n-h} = K_n(f')(x).$$

Portanto, pelo Teorema 2.1.7, temos que

$$\lim_{n \to \infty} B_n(f)' = f' \text{ uniformemente em } [0,1]. \tag{2.13}$$

De modo mais geral, se $f \in C([0,1])$ possui derivadas contínuas em $[0,1]$ até ordem $m \geq 1$, então para cada $1 \leq k \leq m$,

$$\lim_{n \to \infty} B_n(f)^{(k)} = f^{(k)} \text{ uniformemente em } [0,1]. \tag{2.14}$$

(veja [32], seção 1.8).

2.2 Segundo Teorema de Korovkin

Seja $C_{2\pi}(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : \, f \text{ tem período } 2\pi\}$ munido da norma do supremo.

Apresentamos a seguir o Segundo Teorema de Korovkin cuja demonstração pode ser encontrada em Korovkin [28].

Teorema 2.2.1. (*Korovkin - 1959, [28]) Seja* $\{L_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de operadores lineares positivos de* $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ *em* $F(\mathbb{R})$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(g) = g \text{ uniformemente em } \mathbb{R}$$

para toda $g \in \{1, \cos, \sin\}$. *Então*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f \text{ uniformemente em } \mathbb{R}$$

para toda $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Nesta seção, vamos considerar o espaço $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ dotado com a norma euclidiana

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (x = (x_i)_{1\leq i\leq d} \in \mathbb{R}^d). \tag{2.15}$$

Para todo $j = 1, \ldots, d$, vamos denotar por

$$pr_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

a função definida por

$$pr_j(x) = x_j \qquad (x = (x_i)_{1\leq i\leq d} \in \mathbb{R}^d). \tag{2.16}$$

onde, x_j é a j-ésima coordenada de x.

Se X é um subconjunto de $\mathbb{R}^d$, por abuso de notação, denotaremos a restrição de cada pr_j a X por pr_j também. Neste contexto, para as funções η_x $(x \in X)$ definidas por 2.4, temos

$$\eta_x^2 = ||x||^2 1 - 2\sum_{i=1}^{d} x_i pr_i + \sum_{i=1}^{d} pr_i^2. \tag{2.17}$$

Portanto, do Teorema 2.1.3, obtemos

Teorema 2.2.2. *Seja* X *um subconjunto localmente compacto de* $\mathbb{R}^d$ *e considere um subespaço reticulado* E *de* $F(X)$ *contendo* $\{1, pr_1, \ldots, pr_d, \sum_{i=1}^{d} pr_i^2\}$. *Seja* $\{L_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de operadores lineares positivos de* E *em* $F(X)$ *e assuma que para toda* $g \in \{1, pr_1, \ldots, pr_d, \sum_{i=1}^{d} pr_i^2\}$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(g) = g \text{ uniformemente em subconjuntos compactos de } X.$$

Então, para toda $f \in E \cap C_b(X)$,

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f \text{ uniformemente em subconjuntos compactos de } X.$$

O caso especial do Teorema 2.2.2, quando X é compacto segue do Teorema 2.1.2 e vale a pena ser apresentado separadamente.

Teorema 2.2.3. *Seja X um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$ e considere uma sequência $\{L_n\}_{n\geq 1}$ de operadores lineares positivos de $C(X)$ em $F(X)$ tal que para toda $g \in \{1, pr_1, \ldots, pr_d, \sum_{i=1}^{d} pr_i^2\}$*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(g) = g \text{ uniformemente em } X.$$

Então, para toda $f \in C(X)$,

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f \text{ uniformemente em } X.$$

Note, que se X está contido em alguma esfera de $\mathbb{R}^d$, isto é, $\sum_{i=1}^{d} pr_i^2$ é constante sobre X, então o subconjunto teste no Teorema 2.2.3 se reduz a $\{1, pr_1, \ldots, pr_d\}$.

Esta observação aplica-se, em particular, para o circulo unitário de $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 = 1\}. \tag{2.18}$$

Por outro lado, o espaço $C(\mathbb{T})$ é isometricamente isomorfo ao espaço $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ (dotado com a norma do supremo e a ordem usual) por meio do isomorfismo $\phi : C(\mathbb{T}) \to C_{2\pi}(\mathbb{R})$ definido por

$$\phi(F)(t) = F(\cos t, \sin t) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{2.19}$$

Além disso,

$$\phi(1) = 1, \qquad \phi(pr_1) = \cos, \qquad \phi(pr_2) = \sin. \tag{2.20}$$

Assim, obtemos o Segundo Teorema de Korovkin para sequências de operadores lineares positivos de $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ em $F_{2\pi}(\mathbb{R})$, onde $F_{2\pi}(\mathbb{R}) = \{f \in F(\mathbb{R}) : \, f \text{ tem período } 2\pi\}$.

Teorema 2.2.4. *Seja* $\{L_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de operadores lineares positivos de* $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ *em* $F_{2\pi}(\mathbb{R})$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(g) = g \text{ uniformemente em } \mathbb{R}$$

para toda $g \in \{1, \cos, \sin\}$. *Então*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f \text{ uniformemente em } \mathbb{R}$$

para toda $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Demonstração. Dada uma função $g \in F_{2\pi}(\mathbb{R})$, defina $g^{\#} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ por

$$g^{\#}(x,y) = g(t), \quad (x,y) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Claramente a função

$$\begin{array}{rccc} \psi : & F_{2\pi}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & F(\mathbb{T}) \\ & g & \longmapsto & g^{\#} \end{array}$$

é linear, positiva e bijetora e para cada $n \in \mathbb{N}$, $\psi \circ L_n \circ \phi : C(\mathbb{T}) \to F(\mathbb{T})$ é linear e positivo.

Temos

$$\begin{aligned} (i) \qquad & |(\psi \circ L_n \circ \phi)(1)(\cos t, \sin t) - 1| \\ &= |\psi \circ L_n(1)(\cos t, \sin t) - 1| \\ &= |[L_n(1)]^{\#}(\cos t, \sin t) - 1| \\ &= |L_n(1)(t) - 1|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \qquad & |(\psi \circ L_n \circ \phi)(pr_1)(\cos t, \sin t) - (pr_1)(\cos t, \sin t)| \\ &= |\psi \circ L_n(\cos)(\cos t, \sin t) - (pr_1)(\cos t, \sin t)| \\ &= |[L_n(\cos)]^{\#}(\cos t, \sin t) - (pr_1)(\cos t, \sin t)| \\ &= |L_n(\cos)(t) - \cos t|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) \qquad & |(\psi \circ L_n \circ \phi)(pr_2)(\cos t, \sin t) - (pr_2)(\cos t, \sin t)| \\ &= |\psi \circ L_n(\sin)(\cos t, \sin t) - (pr_2)(\cos t, \sin t)| \\ &= |[L_n(\sin)]^{\#}(\cos t, \sin t) - (pr_2)(\cos t, \sin t)| \\ &= |L_n(\sin)(t) - \sin t|. \end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} L_n(g) = g$ uniformemente em $\mathbb{R}$ para toda $g \in \{1, \cos, \sin\}$ segue de (i), (ii) e (iii) que $\lim_{n\to\infty} (\psi \circ L_n \circ \phi)(G) = G$ uniformemente em $\mathbb{T}$ para toda $G \in \{1, pr_1, pr_2\}$.

Logo, pelo Teorema 2.2.3,

$$\lim_{n\to\infty} (\psi \circ L_n \circ \phi)(H) = H \tag{2.21}$$

uniformemente em $\mathbb{T}$ para toda $H \in C(\mathbb{T})$.

Seja $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Existe $\varphi \in C(\mathbb{T})$ tal que $\phi(\varphi) = f$.

Assim, segue de (2.21) que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ tem-se,

$$\begin{aligned} |(L_n f)(t) - f(t)| &= |[L_n f]^\#(\cos t, \sin t) - f^\#(\cos t, \sin t)| \\ &= |\psi(L_n f)(\cos t, \sin t) - \psi(f)(\cos t, \sin t)| \\ &= |\psi(L_n \phi(\varphi))(\cos t, \sin t) - \psi(\phi(\varphi))(\cos t, \sin t)| \\ &= |\psi(L_n \phi(\varphi))(\cos t, \sin t) - \varphi(\cos t, \sin t)| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Discutiremos algumas aplicações do Teorema 2.2.1.

Para $1 \leq p < +\infty$, vamos denotar por

$$L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$$

o espaço Banach de todas as classes de equivalência de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com a p-ésima potência Lebesgue integrável sobre $[-\pi, \pi]$ e que satisfaz $f(x + 2\pi) = f(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}$. O espaço $L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ é dotado da norma

$$||f||_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})). \tag{2.22}$$

Uma família $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ em $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ é dita ser um kernel periódico positivo se toda φ_n é positiva, isto é, $\varphi_n \geq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}$, e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) = 1. \tag{2.23}$$

Um kernel positivo $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ é chamado de identidade aproximada se para todo $\delta \in]0, \pi[$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} \varphi_n(t)\, dt + \int_{\delta}^{\pi} \varphi_n(t)\, dt \right) = 0. \tag{2.24}$$

Cada kernel positivo $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ gera uma sequência de operadores lineares positivos em $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$. Para todo $n \geq 1$, $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ e $x \in \mathbb{R}$, seja

$$L_n(f)(x) = (f * \varphi_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\varphi_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\varphi_n(x-t)\,dt. \quad (2.25)$$

Dizemos que $f * \varphi_n$ é uma convolução de f e φ_n.

Abaixo discutiremos algumas das principais propriedades envolvendo o operador convolução $L_n(f)$.

Proposição 2.2.1. *Se $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ com $1 \leq p < \infty$ então $L_n(f) \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ e*

$$||L_n(f)||_p \leq ||f||_p||\varphi_n||_1 \quad (2.26)$$

Demonstração. Temos que,

$$\begin{aligned} ||L_n(f)||_p = \left\|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot - t)\varphi_n(t)\,dt\right\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\varphi_n(t)\,dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\varphi_n(t)\,dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Minkowski para integrais temos que ,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\varphi_n(t)\,dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad\leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)\varphi_n(t)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} dt \\ &\qquad= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)\varphi_n(t)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} dt \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)\varphi_n(t)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}|\varphi_n(t)|dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}||f||_p|\varphi_n(t)|dt \\ &= ||f||_p\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n(t)|dt \\ &= ||f||_p||\varphi_n||_1. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.2.2. *Se* $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ *com* $1 \leq p < \infty$ *então* $L_n(f) \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $||f||_p \leq ||f||_\infty$.

Demonstração. Claramente se f é periódica de período 2π, então $L_n(f)$ também é. Provemos a continuidade de $L_n(f)$. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário. Temos

$$\begin{aligned} |L_n(f)(x) - L_n(f)(x_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\varphi_n(t)\,dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-t)\varphi_n(t)\,dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x_0-t))\varphi_n(t)\,dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(f(x-t) - f(x_0-t))\varphi_n(t)|\,dt \end{aligned}$$

Como f é contínua, temos que f é uniformemente contínua em qualquer intervalo compacto de $\mathbb{R}$, e sendo f periódica segue que f é uniformemente contínua em toda reta. Desta forma, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ sempre que } \quad |x - x_0| < \delta.$$

Portanto, se $|x - x_0| < \delta$ então $|(x-t) - (x_0 - t)| < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim,

$$\begin{aligned} |L_n(f)(x) - L_n(f)(x_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(f(x-t) - f(x_0-t))\varphi_n(t)|\,dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \epsilon|\varphi_n(t)|\,dt \\ &= \epsilon||\varphi_n||_1. \end{aligned}$$

Provemos agora que $||f||_p \leq ||f||_\infty$.

Temos

$$\begin{aligned} ||f||_p^p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\,dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \right)^p\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ||f||_\infty^p\,dt \\ &= ||f||_\infty^p. \end{aligned}$$

Logo, $||f||_p \leq ||f||_\infty$.

$\square$

Além disso, segue da Proposição 2.2.1 que se $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, então

$$||L_n(f)||_p \leq ||f||_p ||\varphi_n||_1. \tag{2.27}$$

Se $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ temos

$$||L_n(f)||_\infty \leq ||f||_\infty ||\varphi_n||_1. \tag{2.28}$$

De fato,

$$||L_n(f)||_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |L_n(f)(x)|.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
|L_n(f)(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\varphi_n(t)\, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)\varphi_n(t)|\, dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s)| \varphi_n(t)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ||f||_\infty \varphi_n(t)\, dt \\
&= ||f||_\infty \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\, dt \right) \\
&= ||f||_\infty ||\varphi_n||_1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$||L_n(f)||_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |L_n(f)(x)| \leq ||f||_\infty ||\varphi_n||_1.$$

Teorema 2.2.5. *Considere um Kernel positivo $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ em $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ e a correspondente sequência de operadores lineares positivos definidos por (2.25). Para todo $n \geq 1$, seja*

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) \sin^2 \frac{t}{2}\, dt. \tag{2.29}$$

Então as seguintes propriedades são equivalentes

(i) Para todo $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \to \infty} L_n(f) = f \ \text{em}\ L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$$

e além disso,

$$\lim_{n \to \infty} L_n(f) = f \ \text{em}\ C_{2\pi}(\mathbb{R})$$

para $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0.$

(iii) $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ *é uma identidade aproximada.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$

Para todo $x \in \mathbb{R}$ considere a função auxiliar $\omega_x(t) = x - t\,(t \in \mathbb{R})$. Temos que, $\omega_x(x-t) = x - (x-t) = t$ daí,

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega_x(x-t)\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\sin^2\frac{t}{2}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega_x(x-t)\right)dt \\
&= L_n\left(\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega_x\right)\right)(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x-t)\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega_x(t)\right)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x-t)\sin^2\left(\frac{x-t}{2}\right)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x-t)\frac{1}{2}(1-\cos(x-t))\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x-t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x-t)\cos(x-t)\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x-t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x-t)[\cos(x)\cos(t)+\sin(x)\sin(t)]\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x-t)\,dt - \cos(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x-t)\cos(t)\,dt\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\sin(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x-t)\sin(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}[L_n(1)(x) - \cos(x)L_n(\cos)(x) - \sin(x)L_n(\sin)(x)].
\end{aligned}$$

Mas como $\{1, \sin, \cos\} \subset C_{2\pi}(\mathbb{R})$, temos por hipótese que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} L_n(1) = 1 \text{ em } C_{2\pi}(\mathbb{R}) \\
&\lim_{n\to\infty} L_n(\sin) = \sin \text{ em } C_{2\pi}(\mathbb{R}) \\
&\lim_{n\to\infty} L_n(\cos) = \cos \text{ em } C_{2\pi}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Suponha que (ii) é válido. Então, para $0 < \delta < \pi$ e $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
0 \quad &\leq \frac{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} \varphi_n(t)\,dt + \int_{\delta}^{\pi} \varphi_n(t)\,dt\right) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} \varphi_n(t)\sin^2\frac{t}{2}\,dt + \int_{\delta}^{\pi} \varphi_n(t)\sin^2\frac{t}{2}\,dt\right) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} \varphi_n(t)\sin^2\frac{t}{2}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t)\sin^2\frac{t}{2}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} \varphi_n(t)\sin^2\frac{t}{2}\,dt \\
&= \beta_n.
\end{aligned}$$

e portanto (iii) segue.

$(iii) \Rightarrow (i)$

Suponhamos que (iii) seja válido, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) = 1$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} \varphi_n(t)\,dt + \int_{\delta}^{\pi} \varphi_n(t)\,dt\right) = \text{ para todo } \delta \in]0,\pi[,$$

e vamos demonstrar que (i) é válido.

Mostraremos primeiramente para $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Usando o Teorema 2.2.1 basta mostrarmos que

$$\lim_{n\to\infty} L_n(g) = g \text{ uniformemente em } \mathbb{R}$$

para toda $g \in \{1, \cos, \sin\}$.

Defina $M = \sup_{n\geq 1}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\,dt$. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta \in]0,\pi[$ tal que $|\cos t - 1| < \dfrac{\epsilon}{6(M+1)}$ e $|\sin t| < \dfrac{\epsilon}{6(M+1)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ com $|t| < \delta$. Para $n \geq 1$ suficientemente grande temos que

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\,dt - 1\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

e

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \varphi_n(t)\,dt + \int_{\delta}^{\pi} \varphi_n(t)\,dt = \int_{\delta\leq|t|\leq\pi} \varphi_n(t)\,dt < \frac{\pi\epsilon}{3}.$$

Portanto, para $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|L_n(\sin)(x) - \sin x| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) \sin(x-t)\, dt - \sin x \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)[\sin(x-t) - \sin x]\, dt + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\, dt - 1 \right) \sin x \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) \left|\sin(x-t) - \sin x\right|\, dt + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\, dt - 1 \right| |\sin x| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \varphi_n(t) \left|\sin(x-t) - \sin x\right|\, dt \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\delta} \varphi_n(t) \left|\sin(x-t) - \sin x\right|\, dt + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\, dt - 1 \right| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \varphi_n(t)\, dt \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\delta} \varphi_n(t) \left|\sin x \cos t - \sin t \cos x - \sin x\right|\, dt + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \varphi_n(t)\, dt \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\delta} \varphi_n(t) \left|\sin x(\cos t - 1) - \sin t \cos x\right|\, dt + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \varphi_n(t)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\delta} \varphi_n(t) \left|\cos t - 1\right|\, dt \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\delta} \varphi_n(t) |\sin t|\, dt + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \varphi_n(t)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\delta} \varphi_n(t) \frac{\epsilon}{6(M+1)}\, dt \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\delta} \varphi_n(t) \frac{\epsilon}{6(M+1)}\, dt + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \varphi_n(t)\, dt + \frac{\epsilon}{3(M+1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\, dt + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{6\pi} + \frac{\epsilon}{3} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(\sin) = \sin$ uniformemente em $\mathbb{R}$.

O mesmo método pode ser usado para mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(\cos) = \cos$ uniformemente em $\mathbb{R}$. De fato,

$$
\begin{aligned}
|L_n(\cos)(x) - \cos x| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\cos(x-t)\,dt - \cos x \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)[\cos(x-t)-\cos x]\,dt + \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)\,dt - 1\right)\cos x \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\,|\cos(x-t)-\cos x|\;dt + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)\,dt - 1\right| |\cos x| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} \varphi_n(t)\,|\cos(x-t)-\cos x|\;dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} \varphi_n(t)\,|\cos(x-t)-\cos x|\;dt + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)\,dt - 1\right| \\
&\leq \frac{1}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} \varphi_n(t)\,dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} \varphi_n(t)\,|\cos x\cos t + \sin x \sin t - \cos x|\;dt + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} \varphi_n(t)\,dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} \varphi_n(t)\,|\cos x(\cos t - 1) - \sin x \sin t|\;dt + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq \frac{1}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} \varphi_n(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}\varphi_n(t)\,|\cos t - 1|\;dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} \varphi_n(t)|\sin t|\,dt + \frac{\epsilon}{3} \\
&< \frac{1}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} \varphi_n(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}\varphi_n(t)\frac{\epsilon}{6(M+1)}\,dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} \varphi_n(t)\frac{\epsilon}{6(M+1)}\,dt + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq \frac{1}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} \varphi_n(t)\,dt + \frac{\epsilon}{3(M+1)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)\,dt + \frac{\epsilon}{3} \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{6\pi} + \frac{\epsilon}{3} \\
&< \epsilon
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(\cos) = \cos$ uniformemente em $\mathbb{R}$.

Ademais,

$$|L_n(1)(x) - 1| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)\,dt - 1\right| < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Logo $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(1) = 1$ uniformemente em $\mathbb{R}$.

Usando o Segundo Teorema de Korovkin, Teorema 2.2.1, obtemos $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(f) = f$ uniformemente em $\mathbb{R}$ para toda $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Vamos demonstrar agora para $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Sabemos que $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ é denso em $L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, tal que $||f - g||_p < \epsilon$.

Como $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ então pelo que provamos anteriormente,

$$\lim_{n\to\infty} L_n(g) = g \text{ uniformemente em } \mathbb{R}.$$

Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$

$$||L_n(g) - g||_\infty < \epsilon.$$

Assim, segue da Proposição 2.2.2 que

$$||L_n(g) - g||_p < \epsilon \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Daí,

$$||L_n(f) - f||_p \leq ||L_n(f) - L_n(g)||_p + ||L_n(g) - g||_p + ||g - f||_p \leq ||L_n(f - g)||_p + \epsilon + \epsilon.$$

Como $f, g \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ então pela Proposição 2.2.1 segue que

$$||L_n(f) - f||_p \leq ||f - g||_p ||\varphi_n||_1 + 2\epsilon < \epsilon\frac{M}{2\pi} + 2\epsilon = \left(\frac{M}{2\pi} + 2\right)\epsilon.$$

E o resultado segue. $\square$

Para estudar uma aplicação do Teorema 2.2.5 vamos recordar que um polinômio trigonométrico de grau $n \in \mathbb{N}$ é uma função real da seguinte forma:

$$u_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{2.30}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Uma série da forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{2.31}$$

$(a_k, b_k \in \mathbb{R})$ é chamada série trigonométrica.

Se $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$, a série trigonométrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{2.32}$$

onde

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \tag{2.33}$$

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad k \geq 1 \tag{2.34}$$

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt, \quad k \geq 1 \tag{2.35}$$

é chamada de série de Fourier de f. Os coeficientes a_k e b_k, $n \in \mathbb{N}$ são chamados de coeficientes reais de Fourier de f.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $S_n(f)$ a n-ésima soma parcial da série de Fourier, isto é,

$$S_0(f) = \frac{1}{2}a_0(f) \tag{2.36}$$

e, para todo $n \geq 1$

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{2.37}$$

Cada $S_n(f)$ é um polinômio trigonométrico. Além disso, tendo em conta as funções

$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{2.38}$$

temos que,

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.39}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kx-kt)\,dt \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\cos kx\cos kt - \sin kx \sin kt]\,dt \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\cos kx\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\right) \\
&\qquad - \sum_{k=1}^{n}\sin kx\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\cos kx\, a_k(f) + \sum_{k=1}^{n}\sin kx\, b_k(f) \\
&= S_n(f).
\end{aligned}$$

A função D_n é chamada de n-ésimo kernel de Dirichlet.

Multiplicando (2.38) por $\sin\dfrac{t}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sin\frac{t}{2}D_n(t) &= \sin\frac{t}{2}\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right) \\
&= \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\cos kt \sin\frac{t}{2} \\
&= \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{t}{2}+kt\right) + \sin\left(\frac{t}{2}-kt\right)\right] \\
&= \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{1+2k}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right] \\
&= \sin\frac{t}{2} + \sin\left(\frac{1+2}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2-1}{2}t\right) + \sin\left(\frac{1+4}{2}t\right) - \sin\left(\frac{4-1}{2}t\right) \\
&\qquad + \sin\left(\frac{1+6}{2}t\right) + \ldots + \sin\left(\frac{1+2(n-1)}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2(n-1)-1}{2}t\right) \\
&\qquad + \sin\left(\frac{1+2n}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2n-1}{2}t\right) \\
&= \sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{t}{2} + \sin\frac{5t}{2} - \sin\frac{3t}{2} + \ldots + \sin\frac{(2n-1)t}{2} \\
&\qquad - \sin\frac{(2n-3)t}{2} + \sin\frac{(2n+1)t}{2} - \sin\frac{(2n-1)t}{2} \\
&= \sin\frac{(2n+1)t}{2}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sin\frac{t}{2}D_n = \sin\frac{(2n+1)t}{2}.$$

Se $t = 2m\pi$, com m inteiro, então

$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2km\pi) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 2n.$$

Logo,

$$D_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}, & \text{se } t \text{ não é múltiplo de } 2\pi \\ 1+2n, & \text{se } t \text{ é múltiplo de } 2\pi \end{cases} \tag{2.40}$$

D_n não é positivo e $\{D_n\}_{n\geq 1}$ não é uma identidade aproximada. Além disso, existe $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ tal que $\{S_n(f)\}_{n\geq 1}$ não converge uniformemente (nem pontualmente) para f, isto é, a série de Fourier de f não converge uniformemente (nem pontualmente) para f.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$F_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f). \tag{2.41}$$

$F_n(f)$ é um polinômio trigonométrico. Além disso,

$$\begin{aligned} F_n(f)(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_k(x-t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x-t)\,dt. \end{aligned}$$

Daí, segue de (2.40) que se $(x-t)$ é múltiplo de 2π então

$$\begin{aligned} F_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{n+1}\frac{(1+2n+1)(n+1)}{2}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(n+1)\,dt \end{aligned}$$

Para $(x-t)$ não múltiplo de 2π considere a seguinte identidade

$$\begin{aligned}
\left(\sin\frac{t}{2}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k+1}{2}t &= \sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k+1}{2}t\cdot\sin\frac{t}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos kt-\cos(k+1)t\\
&= \frac{1}{2}(\cos 0-\cos t+\cos t-\cos 2t\\
&\quad +\ldots+\cos(n-2)t-\cos(n-1)t+\cos(n-1)t-\cos nt)\\
&= \frac{1}{2}(1-\cos nt)\\
&= \sin^2\frac{nt}{2}
\end{aligned}$$

Portanto, se t não é múltiplo de 2π

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k+1}{2}t=\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}. \tag{2.42}$$

Daí, segue de (2.40) e da identidade acima que se $(x-t)$ não é múltiplo de 2π então

$$\begin{aligned}
F_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\frac{(2k+1)(x-t)}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\,dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\frac{\sin^2\frac{(n+1)(x-t)}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}}{\sin\frac{x-t}{2}}\,dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\sin^2\frac{(n+1)(x-t)}{2}}{\sin^2\frac{x-t}{2}}\,dt.
\end{aligned}$$

Logo,

$$F_n(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\varphi_n(x-t)\,dt$$

onde

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\sin^2\frac{(n+1)x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}, & \text{se } x \text{ não é múltiplo de } 2\pi\\ n+1, & \text{se } x \text{ é múltiplo de } 2\pi\end{cases} \tag{2.43}$$

A sequência $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ é um kernel positivo que é chamado de kernel de Fejér, e os correspondentes operadores F_n, $n\geq 1$ são chamados de operadores convolução de Fejér.

Teorema 2.2.6. *(Fejer - 1900, [20]) Para cada $f\in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$, $1\leq p<\infty$*

$$\lim_{n\to\infty}F_n(f)=f \text{ em } L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$$

e se $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(f) = f \text{ em } C_{2\pi}(\mathbb{R}).$$

Demonstração. Temos que,

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\sin^2\frac{t}{2}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin^2\frac{(n+1)t}{2}}{(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}\sin^2\frac{t}{2}\,dt + \int_0^0 (n+1)\sin^2\frac{t}{2}\,dt + \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\frac{(n+1)t}{2}}{(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}\sin^2\frac{t}{2}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\lim_{s\to 0^-}\int_{-\pi}^{s} \frac{\sin^2\frac{(n+1)t}{2}}{(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}\sin^2\frac{t}{2}\,dt + \lim_{r\to 0^+}\int_{r}^{\pi} \frac{\sin^2\frac{(n+1)t}{2}}{(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}\sin^2\frac{t}{2}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\lim_{s\to 0^-}\frac{1}{n+1}\int_{-\pi}^{s} \frac{1-\cos((n+1)t)}{2}\,dt + \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{n+1}\int_{r}^{\pi} \frac{1-\cos((n+1)t)}{2}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{4\pi(n+1)}\left[\lim_{s\to 0^-}\left[t - \frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_{-\pi}^{s} + \lim_{r\to 0^+}\left[t - \frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_{r}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi(n+1)}\left[\lim_{s\to 0^-}\left(s - \frac{\sin((n+1)s)}{n+1}\right) - \left(-\pi - \frac{\sin(-(n+1)\pi)}{n+1}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{4\pi(n+1)}\left[\lim_{r\to 0^+}\left(\pi - \frac{\sin((n+1)\pi)}{n+1}\right) - \left(r - \frac{\sin((n+1)r)}{n+1}\right)\right] \\
&= \frac{2\pi}{4\pi(n+1)} \\
&= \frac{1}{2(n+1)}.
\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$, o resultado segue do Teorema 2.2.5. □

Observação 2.2.1. *A convergência* $F_n(f) \to f$ *para toda* $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ *também pode ser provada usando o Teorema 2.2.1 pois* $F_n(1) = 1 \to 1$, $F_n(\cos) = \frac{n}{n+1}\cos \to \cos$ *e* $F_n(\sin) = \frac{n}{n+1}\sin \to \sin$ *uniformemente em* $\mathbb{R}$.

O Teorema 2.2.6 fornece uma prova construtiva do Teorema de Aproximação de Weierstrass para funções periódicas.

Teorema 2.2.7. *Para cada* $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ *existe uma sequência de polinômios trigonométricos que converge uniformemente para* f *em* $\mathbb{R}$.

Como no caso "algébrico", vamos agora mostrar que a partir do Teorema de Aproximação de Weiestrass, é possível deduzir uma versão "restrita"do Teorema 2.2.1.

Teorema 2.2.8. *A versão restrita do segundo Teorema de Korovkin 2.2.1 e o Teorema de aproximação de Weierstrass 2.2.7 são equivalentes.*

Demonstração. Pela Observação 2.2.1 concluímos que o Teorema 2.2.1 implica no Teorema 2.2.6 e portanto no Teorema de Aproximação de Weierstrass 2.2.7.

Por outro lado, suponha que o Teorema de Aproximação de Weierstrass 2.2.7 é verdadeiro e considere uma sequência $\{L_n\}_{n\geq 1}$ de operadores lineares positivos de $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ em $B(\mathbb{R})$ tal que $L_n(g) \to g$ uniformemente em $\mathbb{R}$ para toda $g \in \{1, \cos, \sin\}$.

Para todo $m \geq 1$ sejam $f_m(x) = \cos mx$ e $g_m(x) = \sin mx$ $(x \in \mathbb{R})$. Uma vez que o espaço de todos polinômios trigonométricos é denso em $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ e

$$\sup_{n\geq 1} ||L_n|| = \sup_{n\geq 1} ||L_n(1)|| < \infty,$$

é suficiente mostrar que $L_n(f_m) \to f_m$ e $L_n(g_m) \to g_m$ uniformemente em $\mathbb{R}$ para todo $m \geq 1$.

Dado $x \in \mathbb{R}$, considere o funcional

$$\Phi_x(y) = \sin\frac{x-y}{2} \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Então

$$\Phi_x^2(y) = \sin^2\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(x-y)\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos x\cos y - \sin x \sin y) \qquad (y \in \mathbb{R})$$

e portanto,

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\Phi_x^2)(x) = 0 \text{ uniformemente em relação a } x \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, para $m \geq 1$ e $x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
|f_m(x) - f_m(y)| &= |\cos mx - \cos my| \\
&= 2\left|\sin m\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot \sin m\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2\left|\sin m\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \\
&= 2\left|\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor}\binom{m}{2k+1}\cdot(-1)^k\cdot\left(\sin\frac{x-y}{2}\right)^{2k+1}\cdot\left(\cos\frac{x-y}{2}\right)^{n-(2k+1)}\right| \\
&= 2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor}\left|\binom{m}{2k+1}\cdot(-1)^k\cdot\left(\sin\frac{x-y}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{x-y}{2}\right)^{2k}\cdot\left(\cos\frac{x-y}{2}\right)^{n-(2k+1)}\right|
\end{aligned}$$

$$\leq 2\left|\sin\tfrac{x-y}{2}\right| \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor}\binom{m}{2k+1}$$
$$= C_m\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|$$

onde $C_m = 2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor}\binom{m}{2k+1}$ e $\left\lfloor\dfrac{m-1}{2}\right\rfloor =$ maior inteiro $\leq \dfrac{m-1}{2}$, e portanto aplicando as propriedades de operadores lineares positivos, obtemos

$$|f_m(x)L_n(1) - L_n(f_m)| \leq C_m L_n(|\Phi_x|) \leq C_m\sqrt{L_n(1)}\sqrt{L_n(\Phi_x^2)}.$$

Logo, $L_n(f_m)(x) \to f_m(x)$ uniformemente em relação a $x \in \mathbb{R}$.

Um raciocínio semelhante pode ser aplicado também para a função g_m, $m \geq 1$ porque

$$\begin{aligned}|g_m(x) - g_m(y)| &= |\sin mx - \sin my|\\ &= 2\left|\cos m\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin m\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\\ &\leq 2\left|\sin m\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\\ &\leq C_m\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\end{aligned}$$

e isso completa a prova. $\square$

Apresentaremos a seguir aplicações do Teorema 2.2.3.

Considere o d-dimensional simplex

$$K_d = \{x = (x_i)_{1\leq i\leq d} \in \mathbb{R}:\ x_i \geq 0, 1 \leq i \leq d,\ \text{e}\ \sum_{i=1}^{d} x_i \leq 1\}, \tag{2.44}$$

e para todo $n \geq 1$, $f \in C(K_d)$ e $x = (x_i)_{1\leq i\leq d} \in K_d$, seja

$$B_n(f)(x) = \sum_{\substack{h_1,\ldots,h_d=0,\ldots,n\\ h_1+\ldots+h_d\leq n}} f\left(\frac{h_1}{n},\ldots,\frac{h_d}{n}\right)\frac{n!}{h_1!,\ldots,h_d!(n-h_1-\ldots-h_d)!}$$
$$\times\, x_1^{h_1}\ldots x_d^{h_d}(1-x_1-\ldots-x_d)^{n-h_1-\ldots-h_d}. \tag{2.45}$$

$B_n(f)$ é um polinômio e é geralmente chamado n-ésimo polinômio de Bernstein sobre o d-dimensional simplex associado a f. Estes polinômios foram estudados pela primeira vez por Dinghas ([17]).

O próximo lema pode ser encontrado em [38], p. 102.

Lema 2.2.1. (*Teorema Multinomial*) *Seja J_n o conjunto finito de todos as d-uplas de inteiros não negativos $h = (h_1, \ldots, h_d)$ tal que $h_1 + \ldots + h_d \leq n$. Então*

$$\sum_{h \in J_n} \frac{n!}{h_1! \ldots h_d!(n - h_1 - \ldots - h_d)!} \times x_1^{h_1} \ldots x_d^{h_d}(1 - x_1 - \ldots - x_d)^{n-h_1-\ldots-h_d} = 1.$$

Teorema 2.2.9. *Para cada $f \in C(K_d)$*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f) = f \text{ uniformemente em } K_d.$$

Demonstração. Segue do Teorema de Multinomial que $B_n(1) = 1$. Considere agora a função projeção pr_i dada por (2.16). Para cada $x = (x_i)_{1\leq i\leq d} \in K_d$ e $n \geq 1$ temos que,

$$\begin{aligned}
B_n(pr_1)(x) &= \sum_{\substack{h_1,\ldots,h_d=0,\ldots,n \\ h_1+\ldots+h_d\leq n}} \frac{h_1}{n} \frac{n!}{h_1! \ldots h_d!(n - h_1 - \ldots - h_d)!} \\
&\qquad \times x_1^{h_1} \ldots x_d^{h_d}(1 - x_1 - \ldots - x_d)^{n-h_1-\ldots-h_d} \\
&= \sum_{\substack{h_1,\ldots,h_d=0,\ldots,n \\ h_1+\ldots+h_d\leq n}} \frac{(n-1)!}{(h_1-1)! \ldots h_d!(n - 1 - (h_1 - 1) - \ldots - h_d)!} \\
&\qquad \times x_1 x_1^{h_1-1} \ldots x_d^{h_d}(1 - x_1 - \ldots - x_d)^{(n-1)-(h_1-1)-\ldots-h_d}.
\end{aligned}$$

Tomando $k_1 = h_1 - 1$, temos que,

$$\begin{aligned}
B_n(pr_1)(x) &= x_1 \sum_{\substack{k_1,\ldots,h_d=0,\ldots,n \\ h_1+\ldots+h_d\leq n-1}} \frac{(n-1)!}{k_1! \ldots h_d!(n - 1 - k_1 - \ldots - h_d)!} \\
&\qquad \times x_1^{k_1} \ldots x_d^{h_d}(1 - x_1 - \ldots - x_d)^{(n-1)-k_1-\ldots-h_d} \\
&= x_1
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
B_n(pr_1^2)(x) &= \sum_{\substack{h_1,\ldots,h_d=0,\ldots,n \\ h_1+\ldots+h_d\leq n}} \frac{h_1^2}{n^2} \frac{n!}{h_1! \ldots h_d!(n - h_1 - \ldots - h_d)!} \\
&\qquad \times x_1^{h_1} \ldots x_d^{h_d}(1 - x_1 - \ldots - x_d)^{n-h_1-\ldots-h_d}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{h_1,\ldots,h_d=0,\ldots,n\\ h_1+\ldots+h_d\le n}} \frac{h_1-1+1}{n}\cdot\frac{(n-1)!}{(h_1-1)!\ldots h_d!(n-1-(h_1-1)-\ldots-h_d)!}\\
&\qquad \times x_1 x_1^{h_1-1}\ldots x_d^{h_d}(1-x_1-\ldots-x_d)^{(n-1)-(h_1-1)-\ldots-h_d}\\
&= \sum_{\substack{h_1,\ldots,h_d=0,\ldots,n\\ h_1+\ldots+h_d\le n}} \frac{n-1}{n-1}\cdot\frac{h_1-1}{n}\cdot\frac{(n-1)!}{(h_1-1)!\ldots h_d!(n-1-(h_1-1)-\ldots-h_d)!}\\
&\qquad \times x_1 x_1^{h_1-1}\ldots x_d^{h_d}(1-x_1-\ldots-x_d)^{(n-1)-(h_1-1)-\ldots-h_d}\\
&\quad + \sum_{\substack{h_1,\ldots,h_d=0,\ldots,n\\ h_1+\ldots+h_d\le n}} \frac{1}{n}\cdot\frac{(n-1)!}{(h_1-1)!\ldots h_d!(n-1-(h_1-1)-\ldots-h_d)!}\\
&\qquad \times x_1 x_1^{h_1-1}\ldots x_d^{h_d}(1-x_1-\ldots-x_d)^{(n-1)-(h_1-1)-\ldots-h_d}.
\end{aligned}
$$

tomando $k_1 = h_1 - 1$, temos que,

$$
\begin{aligned}
B_n(pr_1^2)(x) &= \frac{n-1}{n}\cdot x_1 \sum_{\substack{k_1,\ldots,h_d=0,\ldots,n\\ h_1+\ldots+h_d\le n-1}} \frac{k_1}{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{k_1!\ldots h_d!(n-1-k_1-\ldots-h_d)!}\\
&\qquad \times x_1^{k_1}\ldots x_d^{h_d}(1-x_1-\ldots-x_d)^{(n-1)-k_1-\ldots-h_d}\\
&\quad +\frac{1}{n}\cdot x_1 \sum_{\substack{k_1,\ldots,h_d=0,\ldots,n\\ h_1+\ldots+h_d\le n-1}} \frac{(n-1)!}{k_1!\ldots h_d!(n-1-k_1-\ldots-h_d)!}\\
&\qquad \times x_1^{k_1}\ldots x_d^{h_d}(1-x_1-\ldots-x_d)^{(n-1)-k_1-\ldots-h_d}\\
&= \frac{n-1}{n}\cdot x_1\cdot x_1 + \frac{1}{n}\cdot x_1\\
&= \frac{n-1}{n}\cdot x_1^2 + \frac{1}{n}\cdot x_1.
\end{aligned}
$$

Considerações semelhantes aplicam-se as outras funções coordenadas. Assim, para cada $j = 1,\ldots,d$ temos que,

$$
B_n(pr_i) = pr_i \text{ e } B_n(pr_i^2) = \frac{n-1}{n}\cdot pr_i^2 + \frac{1}{n}\cdot pr_i. \tag{2.46}
$$

Aplicando o Teorema 2.2.3 para sequência de operadores lineares positivos $\{B_n\}_{n\ge 1}$, segue o resultado. □

Outra generalização útil do polinômio de Bernstein unidimensional é discutida abaixo. Considere o hipercubo $Q_d = [0,1]^d$ e para cada $n \ge 1$, $f \in C(Q_d)$ e $x = (x_i)_{1\le i\le d}$, seja

$$
B_n(f)(x) = \sum_{h_1,\ldots,h_d=0}^{n} f\left(\frac{h_1}{n},\ldots,\frac{h_d}{n}\right)\binom{n}{h_1}\ldots\binom{n}{h_d} x_1^{h_1}(1-x_1)^{n-h_1}\ldots x_d^{h_d}(1-x_d)^{n-h_d}. \tag{2.47}
$$

O polinômio $B_n(f)$, $n \geq 1$, é chamado de n-ésimo polinômio de Bernstein sobre o hipercubo associado a f.

Eles foram primeiramente estudados por Hildebrandt e Schoenbery ([22]) e Butzer ([14]). A prova do Teorema 2.2.9 funciona também para esses operadores e novamente pelo Teorema 2.2.3, obtemos o seguinte resultado

Teorema 2.2.10. *Para cada $f \in C(Q_d)$*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f) = f \text{ uniformemente em } Q_d.$$

Demonstração. Temos que,

$$B_n(1)(x) = \sum_{h_1,\ldots,h_d=0}^{n} \binom{n}{h_1}\cdots\binom{n}{h_d} x_1^{h_1}(1-x_1)^{n-h_1}\cdots x_d^{h_d}(1-x_d)^{n-h_d}$$

Mas para cada $j = 1,\ldots,d$ temos que $\sum_{h_j=0}^{n}\binom{n}{h_j}x_j^{h_j}(1-x_j)^{n-h_j} = 1$, portanto

$$\begin{aligned}
B_n(1)(x) &= 1. \\
B_n(pr_1)(x) &= \sum_{h_1,\ldots,h_d=0}^{n} \frac{h_1}{n}\binom{n}{h_1}\cdots\binom{n}{h_d} x_1^{h_1}(1-x_1)^{n-h_1}\cdots x_d^{h_d}(1-x_d)^{n-h_d} \\
&= \sum_{h_1=0}^{n}\frac{h_1}{n}\binom{n}{h_1}x_1^{h_1}(1-x_1)^{n-h_1}\cdot \sum_{h_2,\ldots,h_d=0}^{n}\binom{n}{h_2}\cdots\binom{n}{h_d}x_1^{h_2}(1-x_2)^{n-h_2}\cdots \\
&\quad \cdots x_d^{h_d}(1-x_d)^{n-h_d} \\
&= \sum_{h_1=0}^{n}\frac{h_1}{n}\binom{n}{h_1}x_1^{h_1}(1-x_1)^{n-h_1}. \\
B_n(pr_1^2)(x) &= \sum_{h_1,\ldots,h_d=0}^{n} \frac{h_1^2}{n^2}\binom{n}{h_1}\cdots\binom{n}{h_d} x_1^{h_1}(1-x_1)^{n-h_1}\cdots x_d^{h_d}(1-x_d)^{n-h_d} \\
&= \sum_{h_1=0}^{n}\frac{h_1^2}{n^2}\binom{n}{h_1}x_1^{h_1}(1-x_1)^{n-h_1}\cdot \sum_{h_2,\ldots,h_d=0}^{n}\binom{n}{h_2}\cdots\binom{n}{h_d}x_1^{h_2}(1-x_2)^{n-h_2}\cdots \\
&\quad \cdots x_d^{h_d}(1-x_d)^{n-h_d} \\
&= \sum_{h_1=0}^{n}\frac{h_1^2}{n^2}\binom{n}{h_1}x_1^{h_1}(1-x_1)^{n-h_1}.
\end{aligned}$$

Portanto, segue da demonstração do Teorema 2.1.4 que,

$$B_n(pr_i) = pr_i \quad \text{e} \quad B_n(pr_i^2) = \frac{n-1}{n} \cdot pr_i^2 + \frac{1}{n} \cdot pr_i.$$

E o resultado segue do Teorema 2.2.3. □

Observação 2.2.2. *Os Teoremas 2.2.9 e 2.2.10 fornecem uma demonstração construtiva das versões multidimensionais do Teorema de Aproximação de Weierstrass:*

Teorema 2.2.11. *Para cada $f \in C(K_d)$ existe uma sequência de polinômios algébricos que converge uniformemente para f em K_d.*

Teorema 2.2.12. *Para cada $f \in C(Q_d)$ existe uma sequência de polinômios algébricos que converge uniformemente para f em Q_d.*

Discutiremos algumas aplicações do Teorema 2.2.2 para subconjuntos não compactos de $\mathbb{R}^d$.

A primeira aplicação está relacionada com o intervalo $[0, +\infty[$. Seja,

$$E = \{f \in C([0, +\infty[) : \text{ existe } \alpha \geq 0 \text{ e } M \geq 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq M \exp(\alpha x) \quad \forall x \geq 0\}, \tag{2.48}$$

e para cada $f \in E$, $n \geq 1$ e $x \geq 0$, defina

$$M_n(f)(x) = \exp(-nx) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k x^k}{k!}. \tag{2.49}$$

O operador M_n é linear e positivo e é chamado de n-ésimo operador de Szász- Mirakjan. A sequência $\{M_n\}_{n\geq 1}$ foi introduzida e estudada por Mirakjan ([36]), Favard ([19]) e Szász ([43]).

Teorema 2.2.13. *Para cada $f \in C_b([0, +\infty[)$*

$$\lim_{n\to\infty} M_n(f) = f$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $[0, +\infty[$.

Demonstração. Temos que,

$$M_n(1)(x) = \exp(-nx)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^k}{k!} = 1$$

$$\begin{aligned}
M_n(e_1)(x) &= \exp(-nx)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\cdot\frac{n^k x^k}{k!}\\
&= \exp(-nx)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{k-1} x x^{k-1}}{(k-1)!}\\
&= x\exp(-nx)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{k-1} x^{k-1}}{(k-1)!}\\
&= x\\
&= e_1(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_n(e_2)(x) &= \exp(-nx)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\cdot\frac{n^k x^k}{k!}\\
&= \exp(-nx)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1+1}{n}\cdot\frac{n^{k-1} x x^{k-1}}{(k-1)!}\\
&= x\exp(-nx)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{n}\cdot\frac{n^{k-1} x x^{k-1}}{(k-1)!} + x\exp(-nx)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{n^{k-1} x x^{k-1}}{(k-1)!}\\
&= x^2 + \frac{1}{n}x\\
&= e_2(x) + \frac{1}{n}e_1(x)
\end{aligned}$$

E o resultado segue do Teorema 2.2.2. □

A próxima aplicação refere-se ao caso $X = \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Para todo $n \geq 1$ e para cada função Borel- mensurável $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, seja

$$G_n(f)(x) = \left(\frac{n}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\exp\left(-\frac{n}{4}||t-x||^2\right)\, dt. \tag{2.50}$$

Devemos considerar os operadores G_n, $n \geq 1$, definidos no sub-reticulado de todas funções Borel mensurável $f \in F(\mathbb{R}^d)$ para as quais a integral (2.50) é absolutamente convergente. Eles são chamados de operadores de convolução de Gauss-Weierstrass sobre $\mathbb{R}^d$ e são utilizados no estudo da equação de calor em $\mathbb{R}^d$ (ver [4] e [29]).

Lema 2.2.2. *Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ temos as seguintes fórmulas:*

$$\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right) dt = 1.$$

$$\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} t \exp\left(-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right) dt = \alpha.$$

$$\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} t^2 \exp\left(-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right) dt = \alpha^2 + \sigma^2.$$

Demonstração. Veja [29]. □

Teorema 2.2.14. *Para cada $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{n\to\infty} G_n(f) = f$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$.*

Demonstração. Temos que,

$$\begin{aligned} G_n(f)(x) &= \left(\frac{n}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \exp\left(-\frac{n}{4}||t-x||^2\right) dt \\ &= \left(\frac{n}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \exp\left(-\frac{n}{4}\sum_{i=1}^{d}(t_j - x_j)^2\right) dt \\ &= \left(\frac{n}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \prod_{i=1}^{d} \exp\left(-\frac{n}{4}(t_j - x_j)^2\right) dt \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fubini e Lema 2.2, segue que,

$$G_n(1)(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{n}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{n}{4}(t_j - x_j)^2\right) dt_j = 1$$

$$\begin{aligned} G_n(pr_i)(x) &= \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d} \left(\frac{n}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{n}{4}(t_j - x_j)^2\right) dt_j \times \\ &\qquad \times \left(\frac{n}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} t_i \exp\left(-\frac{n}{4}(t_i - x_i)^2\right) dt_i \\ &= x_i \\ &= pr_i(x),\ i = 1\ldots, n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_n(pr_i^2)(x) &= \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d} \left(\frac{n}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\tfrac{n}{4}(t_j - x_j)^2\right) dt_j \times \\ &\qquad \times \left(\frac{n}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} t_i^2 \exp\left(-\tfrac{n}{4}(t_i - x_i)^2\right) dt_i \\ &= x_i^2 + \frac{2}{n} \\ &= pr_i^2(x) + \frac{2}{n},\ i = 1\ldots, n. \end{aligned}$$

E o resultado segue do Teorema 2.2.2. $\square$

Capítulo 3

Teoremas tipo Korovkin

Os resultados e aplicações deste capítulo foram extraídos do artigo de Altomare [3].

3.1 Teoremas tipo Korovkin para operadores lineares positivos

Após a descoberta do teorema de Korovkin, vários matemáticos tentaram estendê-lo em vários direções, por exemplo:

1. encontrar outros subconjuntos de funções que satisfaçam a mesma propriedade que $\{1, e_1, e_2\}$;

2. estabelecer resultados como o Teorema 2.1.1 em outros espaços de funções ou em espaços de Banach abstratos;

3. estabelecer resultados como o Teorema 2.1.1 para outras classes de operadores lineares.

Como consequência destas investigações, uma nova teoria foi criada, o que hoje é chamada de "Teoria da Aproximação Tipo Korovkin". Esta teoria tem ligações fortes e frutíferas não só com a Teoria da Aproximação Clássica, mas também com Análise Real, Análise Funcional, Análise Harmônica, Teoria da Probabilidade e Equações Diferenciais Parciais. Sugerimos [4] para uma descrição mais detalhada.

Vamos discutir a seguir alguns dos principais resultados em espaços $C_0(X)$ (X espaço localmente compacto, não compacto), $C(X)$ (X espaço compacto). Estes espaços desempenham um papel central na teoria e eles são os mais úteis em aplicações.

A definição a seguir, que é um dos mais importantes da teoria, é claramente motivada pelo teorema de Korovkin e foi formulada pela primeira vez por V. A. Baskakov ([7]) .

Definição 3.1.1. *Um subconjunto M de um reticulado de Banach E é dito ser um subconjunto de Korovkin de E se, para cada sequência $\{L_n\}_{n\geq 1}$ de operadores lineares positivos de E em E satisfazendo*

(i) $\sup_{n\geq 1} ||L_n|| < +\infty$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(g) = g$ *para toda* $g \in M$

tem-se

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f \text{ para toda } f \in E.$$

Note que, se $E = C(X)$, X espaço compacto, e a função constante 1 pertence ao $span(M)$, então a condição (i) é desnecessária, porque é uma consequência da condição (ii).

De acordo com a Definição 3.1.1, podemos reafirmar o Teorema de Korovkin 2.1.1, dizendo que $\{1, e_1, e_2\}$ é um subconjunto de Korovkin de $C([0,1])$.

Destacamos, ainda, que um subconjunto M é um subconjunto de Korovkin de E se, e somente se, o $span(M)$ é um subconjunto de Korovkin. Um subespaço vetorial que é um subconjunto de Korovkin será referido como um subespaço Korovkin de E.

Conjuntos de Korovkin (quando existirem) são úteis para investigar a convergência de sequências uniformemente limitadas de operadores lineares positivos para o operador identidade ou, do ponto de vista da Teoria da Aproximação, a aproximação de cada elemento $f \in E$ por meio de $\{L_n(f)\}_{n\geq 1}$.

De acordo com Lorentz ([33]), o primeiro a propor uma possível generalização, da Definição 3.1.1, parece ser igualmente interessante estudar o seguinte conceito mais geral.

Definição 3.1.2. *Sejam E e F reticulados de Banach e $T : E \to F$ um operador linear positivo. Um subconjunto M de E é dito ser um subconjunto de Korovkin de E para T se para cada sequência $\{L_n\}_{n\geq 1}$ de operadores lineares positivos de E em F satisfazendo*

(i) $\sup_{n\geq 1} ||L_n|| < +\infty$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(g) = T(g)$ *para toda* $g \in M$

tem-se

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = T(f) \text{ para toda } f \in E.$$

Assim , tais subconjuntos podem ser usados para investigar a convergência das sequências uniformemente limitadas de operadores lineares positivos para um determinado operador linear positivo $T : E \to F$ ou para aproximar T por meio de operadores lineares L_n, $n \geq 1$, em geral, mais simples.

Tendo em vista a definição acima, dois problemas surgem naturalmente:

Problema 1. Dado um operador linear positivo $T : E \to F$, encontrar condições de existência de um subconjunto M de Korovkin para T, não trivial, isto é, $span(M)$ não é denso em E. Neste caso, tentar determinar alguns ou todos eles.

Problema 2. Dado um subconjunto M de E, tentar determinar alguns ou todos os operadores lineares positivos $T : E \to F$ (caso existam) para os quais M é um subconjunto de Korovkin.

Na próxima seção, discutiremos alguns aspectos relacionados ao Problema 1 (para mais detalhes, veja [4], Seções 3.3 e 3.4). Com relação ao Problema 2, poucos resultados estão disponíveis (veja, por exemplo, [23], [24], [25],[26],[45],[44]).

O próximo resultado fornece uma caracterização completa de subconjuntos de Korovkin de operadores lineares positivos em espaços $C_0(X)$. O resultado foi obtido por :

- Yu. A. Shashkin ([41]) no caso em que $X = Y$, X um espaço métrico compacto e $T = I$ o operador de identidade;

- H. Berens e G. G Lorentz ([11]), quando $X = Y$, X espaço compacto topológico, $T = I$;

- H. Bauer e K. Donner ([9]), quando $X = Y$, X espaço localmente compacto, $T = I$;

- C. A. Micchelli ([35]) e M. D. Rusk ([40]), quando $X = Y$, X compacto;

- F. Altomare ([2]), sob a forma geral apresentada no Teorema 3.1.1.

Lema 3.1.1. *Seja E um espaço vetorial reticulado normado, Y um espaço de Hausdorff localmente compacto, $T : E \to C_0(Y)$ um operador linear positivo e H um subespaço vetorial de E. Considere as seguintes propriedades:*

(i) Se $\mu : E \to \mathbb{R}$ é um funcional linear positivo e $y \in Y$ satisfazem $\mu(g) = T(g)(y)$ para toda $g \in H$, então $\mu(f) = T(f)(y)$ para toda $f \in E$.

(ii) Para todo funcional linear positivo $\mu : E \to \mathbb{R}$ tal que $\mu = 0$ em H, tem-se $\mu = 0$.

Então a Propriedade (i) implica na Propriedade (ii).

Demonstração. Veja ([2], pág. 219). □

Teorema 3.1.1. (*Altomare - 1987, [2]*) *Sejam X e Y espaços de Hausdorff localmente compactos. Além disso, assuma que X tem uma base enumerável e Y é metrizável. Dado um operador linear positivo $T : C_0(X) \to C_0(Y)$ e um subconjunto M de $C_0(X)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) M é um subconjunto de Korovkin de $C_0(X)$ para T;

(ii) Se $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ e $y \in Y$ satisfazem $\mu(g) = T(g)(y)$ para toda $g \in M$, então $\mu(f) = T(f)(y)$ para toda $f \in C_0(X)$.

Demonstração. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) Fixe $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ e $y \in Y$ satisfazendo $\mu(g) = T(g)(y)$ para toda $g \in M$. Considere uma base enumerável decrescente $\{U_n\}_{n\geq 1}$ de vizinhanças abertas de y em Y. Pelo Lema de Urysohn, para todo $n \geq 1$ existe $\varphi_n \in \mathcal{K}(Y)$ tal que: $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\varphi_n(y) = 1$ e $supp(\varphi_n) \subset U_n$.

Defina $L_n : C_0(X) \to C_0(Y)$ por,

$$L_n(f) = \mu(f)\varphi_n + T(f)(1 - \varphi_n) \qquad (f \in C_0(X)).$$

Vamos mostrar primeiramente que a sequência $\{L_n\}_{n\geq 1}$ com cada L_n definido como acima satisfaz as condições da Definição 3.1.2.

É fácil ver que cada L_n é linear, positivo e $||L_n|| \leq ||\mu|| + ||T||$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pela continuidade de $T(g)$, $g \in M$, dado $\epsilon > 0$ existe $v \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|T(g)(z) - T(g)(y)| < \epsilon$$

para todo $z \in U_v$.

Como $\{U_n\}_{n\geq 1}$ é decrescente, para cada $n \geq v$ temos que $U_n \subset U_v$, assim para todo $z \in Y$

$$\begin{aligned}
|L_n(g)(z) - T(g)(z)| &= |\mu(g)\varphi_n(z) + T(g)(z) - T(g)(z)\varphi_n(z) - T(g)(z)| \\
&= |T(g)(y)\varphi_n(z) - T(g)(z)\varphi_n(z)| \\
&= \varphi_n(z)|T(g)(z) - T(g)(y)|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|L_n(g)(z) - T(g)(z)| \begin{cases} = 0, \text{ se } z \notin U_n \\ < \epsilon, \text{ se } z \in U_n. \end{cases}$$

Logo, $||L_n(g) - T(g)|| \leq \epsilon$ e assim

$$\lim_{n\to\infty} L_n(g) = T(g)$$

para toda $g \in M$.

Sendo M um subconjunto de Korovkin de T, segue da Definição 3.1.2 que para toda $f \in C_0(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(f) = T(f)$ e portanto,

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f)(y) = T(f)(y). \tag{3.1}$$

Mas, para todo $n \geq 1$

$$\begin{aligned} L_n(f)(y) &= \mu(f)\varphi_n(y) + T(f)(y) - T(f)(y)\varphi_n(y) \\ &= T(f)(y) + (\mu(f) - T(f)(y))\varphi_n(y) \\ &= T(f)(y) + \mu(f) - T(f)(y) \\ &= \mu(f) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f)(y) = \mu(f).$$

Segue de (3.1) e (3.2) que $\mu(f) = T(f)(y)$ para toda $f \in C_0(X)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. A partir da afirmação (ii) segue do Lema 3.1.1 aplicado ao $span(M)$ que

$$\text{se } \mu \in \mathcal{M}_b^+(X) \text{ e } \mu(g) = 0 \text{ para toda } g \in M, \text{ então } \mu = 0. \tag{3.3}$$

Além disso, uma vez que X tem uma base enumerável segue do Teorema 1.2.5 que cada sequência limitada em $\mathcal{M}_b^+(X)$ tem uma subsequência vagamente convergente.

Considere uma sequência $\{L_n\}_{n\geq 1}$ de operadores lineares positivos de $C_0(X)$ em $C_0(Y)$ satisfazendo as propriedades (i) e (ii) da Definição 3.1.2 e assuma que para alguma $f_0 \in C_0(X)$ a sequência $\{L_n(f_0)\}_{n\geq 1}$ não converge uniformemente para $T(f_0)$.

Portanto, existe $\epsilon_0 > 0$, uma subsequência $\{L_{k(n)}\}_{n\geq 1}$ de $\{L_n\}_{n\geq 1}$ e uma sequência $\{y_n\}_{n\geq 1}$ em Y tal que

$$|L_{k(n)}(f_0)(y_n) - T(f_0)(y_n)| \geq \epsilon_0 \text{ para todo } n \geq 1. \tag{3.4}$$

Vamos agora discutir separadamente dois casos possíveis, $\{y_n\}_{n\geq 1}$ converge para o ponto no infinito de Y ou não (veja Capítulo 1, pag 8).

No primeiro caso (que só ocorre quando Y não é compacto), temos que $\lim\limits_{n\to\infty} h(y_n) = 0$ para toda $h \in C_0(Y)$.

Para todo $n \geq 1$ defina $\mu_n \in \mathcal{M}_b^+(X)$ por

$$\mu_n(f) := L_{k(n)}(f)(y_n) \qquad (f \in C_0(X)).$$

Como $||\mu_n|| \leq ||L_{k(n)}|| \leq M := \sup\limits_{n\geq 1} ||L_n||$ e substituindo se necessário, a sequência $(\mu_n)_{n\geq 1}$ por uma subsequência adequada, podemos assumir que existe $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ tal que $\mu_n \to \mu$ vagamente. Mas, se $g \in M$, então

$$\begin{aligned} |\mu_n(g)| &\leq |L_{k(n)}(g)(y_n) - T(g)(y_n)| + |T(g)(y_n)| \\ &\leq ||L_{k(n)}(g) - T(g)|| + |T(g)(y_n)| \end{aligned}$$

de modo que

$$\mu(g) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(g) = 0.$$

De (3.3) segue que $\mu(f_0) = 0$ e portanto,

$$|L_{k(n)}(f_0)(y_n) - T(f_0)(y_n)| = |\mu_n(f_0) - T(f_0)(y_n)|,$$

que converge para 0 quando n tende para $+\infty$, contradizendo (3.4).

Considere agora o caso em que a sequência $\{y_n\}_{n\geq 1}$ não converge para o ponto no infinito de Y. Em seguida, substituindo-a por uma subsequência adequada, podemos assumir que ela converge para algum $y \in Y$.

Novamente, considere para cada $n \geq 1$

$$\mu_n(f) := L_{k(n)}(f)(y_n) \qquad (f \in C_0(X)).$$

Como no raciocínio anterior, podemos supor que existe $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ tal que $\mu_n \to \mu$ vagamente. Então, para $g \in M$, como

$$|\mu_n(g) - T(g)(y_n)| \leq ||L_{k(n)}(g) - T(g)||$$

e $\lim\limits_{n\to\infty} |L_{k(n)}(g) - T(g)||$, temos que $\mu(g) = T(g)(y)$.

Portanto, a afirmação (ii) implica que $\mu(f_0) = T(f_0)(y)$, ou equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} (L_{k(n)}(f_0)(y_n) - T(f_0)(y_n)) = 0$$

o que é impossível por causa de (3.4). $\square$

3.2 Teoremas tipo Korovkin para o operador identidade em $C_0(X)$

Vamos discutir agora algumas aplicações do Teorema 3.1.1 para operador identidade em $C_0(X)$. Para tal, fixaremos X um espaço de Hausdorff localmente compacto com base enumerável e portanto metrizável.

O próximo resultado segue imediatamente do Teorema 3.1.1.

Teorema 3.2.1. *Dado um subconjunto M de $C_0(X)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) M é um subconjunto de Korovkin de $C_0(X)$;

(ii) Se $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ e $x \in X$ satisfazem $\mu(g) = g(x)$ para toda $g \in M$, então $\mu(f) = f(x)$ para toda $f \in C_0(X)$, isto é, $\mu = \delta_x$.

A fim de discutirmos a primeira aplicação do Teorema 3.2.1, lembremos que uma aplicação $\varphi : Y \to X$ entre dois espaços de Hausdorff localmente compactos X e Y é dita ser própria se para cada subconjunto compacto $K \subset X$, a imagem inversa $\varphi^{-1}(K) = \{y \in Y : \varphi(y) \in K\}$ é compacto em Y. Neste caso, $f \circ \varphi \in C_0(Y)$ para toda $f \in C_0(X)$. De fato, como $f \in C_0(X)$ então pelo Teorema 1.2.2 dado $\epsilon > 0$ existe um compacto K tal que, se $x \notin K$ então $|f(x)| < \epsilon$. Mas como φ é uma aplicação própria então, $\varphi^{-1}(K) = \{y \in Y : \varphi(y) \in K\}$ é compacto em Y e se $z \notin \varphi^{-1}(K)$ então $\varphi(z) \notin K$ e daí, $|f(\varphi(z))| < \epsilon$. Logo, segue do Teorema 1.2.2 que $f \circ \varphi \in C_0(Y)$.

Corolário 3.2.1. *Seja Y um espaço de Hausdorff localmente compacto e metrizável. Se M é um subespaço de Korovkin de $C_0(X)$, então M é um subconjunto de Korovkin para qualquer operador linear positivo $T : C_0(X) \to C_0(Y)$ da forma*

$$T(f) = \psi(f \circ \varphi) \qquad (f \in C_0(X))$$

onde $\psi \in C_b(Y)$, $\psi \geq 0$, e $\varphi : Y \to X$ é uma aplicação própria.

Demonstração. De acordo com o Teorema 3.1.1 temos que mostrar que, se $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ e $y \in Y$ satisfazem $\mu(g) = \psi(y)g(\varphi(y))$ para toda $g \in M$, então $\mu(f) = \psi(y)f(\varphi(y))$ para toda $f \in C_0(X)$.

Temos dois casos a considerar, $\psi(y) = 0$ e $\psi(y) > 0$.

Se $\psi(y) = 0$, então $\mu(g) = 0$ para toda $g \in M$. Logo, pela Propriedade 3.1 da demonstração do Teorema 3.1.1 $(ii) \Rightarrow (i)$ temos que,

$$\mu(f) = \psi(y)f(\varphi(y)) = 0 \text{ para toda } f \in C_0(X).$$

Considere agora $\psi(y) > 0$. Por hipótese, M é um subconjunto de Korovkin de $C_0(X)$, então pelo Teorema 3.2.1 segue que $\mu(f) = f(x)$ para toda $f \in C_0(X)$ com $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ e $x \in X$ satisfazendo $\mu(g) = g(x)$ para toda $g \in M$.

Temos que $\dfrac{1}{\psi(y)}\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ e

$$\frac{1}{\psi(y)}\mu(g) = \frac{1}{\psi(y)}\psi(y)g(\varphi(y)) = g(\varphi(y)).$$

Logo,

$$\frac{1}{\psi(y)}\mu(f) = \frac{1}{\psi(y)}f(\varphi(y)) = f(\varphi(y)) \text{ para toda } f \in C_0(X).$$

E portanto,

$$\mu(f) = \psi(y)f(\varphi(y)) \text{ para toda } f \in C_0(X).$$

Logo, pelo Teorema 3.1.1 segue que M é um subconjunto de Korovkin para $T(f) = \psi(f \circ \varphi)$. □

Corolário 3.2.2. *Seja M um subespaço de Korovkin de $C_0(X)$. Considere uma sequência uniformemente limitada $\{L_n\}_{n\geq 1}$ de operadores lineares positivos de $C_0(X)$ em $C_0(X)$. Então as seguintes propriedades são válidas.*

(i) *Dado um subconjunto fechado Y de X e $\psi \in C_b(Y)$, $\psi \geq 0$, se $\lim_{n\to\infty} L_n(g) = \psi g$ uniformemente em Y para toda $g \in M$, então,*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \psi f \textit{ uniformemente em } Y$$

para toda $f \in C_0(X)$.

(ii) *Se $\lim_{n\to\infty} L_n(g) = g$ uniformemente em subconjuntos compactos de X para toda $g \in M$, então $\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f$ uniformemente em subconjuntos compactos de X para toda $f \in C_0(X)$.*

Demonstração. (i) Por hipótese, Y é um subconjunto fechado de X, então a aplicação canônica $\varphi : Y \to X$, definida por $\varphi(y) = y$ para todo $y \in Y$ é própria. De fato, para qualquer subconjunto compacto $K \subset X$ temos que,

$$\varphi^{-1}(K) = \{y \in Y : \varphi(y) \in K\} = K \cap Y.$$

Se $K \cap Y = \emptyset$ então é $K \cap Y$ é compacto.

Se $K \cap Y \neq \emptyset$ temos que K é fechado pois um compacto contido em um espaço de Hausdorff é fechado. Assim, $K \cap Y$ é fechado contido em K compacto e portanto compacto.

Logo $\varphi^{-1}(K)$ é compacto. E portanto a aplicação canônica $\varphi : Y \to X$ é própria.

Como M é um subconjunto de Korovkin de $C_0(X)$, então tomando $\varphi : Y \to X$ sendo a aplicação canônica no Corolário 3.2.1, segue que M é um subconjunto de Korovkin para $T : C_0(X) \to C_0(Y)$ da forma

$$T(f) = \psi(f(\varphi(y)) = \psi(f(y)) \qquad (f \in C_0(X))$$

E o resultado segue da Definição 3.1.2 de subconjuntos de Korovkin.

(ii) Sabemos que todo subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff é fechado, então o resultado segue direto da afirmação (i) tomando $\psi = 1$.

□

Passaremos agora a investigar alguns critérios úteis para determinar explicitamente subconjuntos de Korovkin de $C_0(X)$.

Proposição 3.2.1. *Seja M um subconjunto de $C_0(X)$ e assuma que para todo $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $h \in span(M)$, $h \geq 0$ tal que $h(x) = 0$ e $h(y) > 0$. Então M é um subconjunto de Korovkin de $C_0(X)$.*

Demonstração. Vamos verificar a condição (ii) do Teorema 3.2.1, portanto considere $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ e $x \in X$ satisfazendo $\mu(g) = g(x)$ para toda $g \in M$ e portanto, para toda $g \in span(M)$.

Por hipótese, se $y \in X$ com $y \neq x$ então existe $h \in span(M)$, $h \geq 0$ tal que $h(y) > 0$ e $0 = h(x) = \mu(h)$. Daí, pelo Teorema 1.2.4 temos que existe $\alpha \geq 0$ tal que $\mu = \alpha\delta_x$. Logo $\mu(f) = \alpha f(x)$ para toda $f \in C_0(X)$.

Escolhendo $f \in span(M)$ tal que $f(x) > 0$, temos que $\alpha f(x) = \mu(f) = f(x)$, assim $\alpha = 1$ e $\mu = \delta_x$. □

A seguir, apresentaremos uma consequência importante da Proposição 3.2.1. Para prosseguirmos, se M é um subconjunto de $C(X)$ e $f_0 \in C(X)$, fixemos

$$f_0M = \{f_0 \cdot f : f \in M\} \tag{3.5}$$

e

$$f_0M^2 = \{f_0 \cdot f^2 : f \in M\}. \tag{3.6}$$

Recordemos que um subconjunto M de $C(X)$ separa pontos de X se para todo par de pontos distintos $x, y \in X$, existe $g \in M$ tal que $g(x) \neq g(y)$.

Teorema 3.2.2. *Considere uma função estritamente positiva $f_0 \in C_0(X)$ e um subconjunto M de $C(X)$ que separa pontos de X. Além disso, assuma que $f_0M \cup f_0M^2 \subset C_0(X)$. Então $\{f_0\} \cup f_0M \cup f_0M^2$ é um subconjunto de Korovkin de $C_0(X)$.*

Além disso, se M é finito, isto é, $M = \{f_1, \ldots, f_n\}$, $n \geq 1$, então

$$\left\{ f_0, f_0f_1, \ldots, f_0f_n, f_0 \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \right\}$$

é um subconjunto de Korovkin de $C_0(X)$.

Demonstração. Se $x, y \in X$, $x \neq y$, então existe $f \in M$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Logo, a função $h = f_0(f - f(x))^2$ pertence a $span(\{f_0\} \cup f_0M \cup f_0M^2)$ e $h(x) = 0 < h(y)$. Assim, o resultado segue da Proposição 3.2.1.

Se $M = \{f_1, \ldots, f_n\}$, então basta considerar a função $f_0 \sum_{i=1}^{n} (f_i - f_i(x))^2$ no raciocínio anterior.

$\square$

O próximo resultado é uma consequência óbvia do Teorema 3.2.2, mas vale a pena ser enunciado explicitamente.

Teorema 3.2.3. *Considere uma função estritamente positiva $f_0 \in C_0(X)$ e um subconjunto M de $C_0(X)$ que separa pontos de X. Então $\{f_0\} \cup f_0M \cup f_0M^2$ é um subconjunto de Korovkin de $C_0(X)$.*

Além disso, se M é finito, isto é, $M = \{f_1, \ldots, f_n\}$, $n \geq 1$, então

$$\left\{ f_0, f_0 f_1, \ldots, f_0 f_n, f_0 \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \right\}$$

é um subconjunto de Korovkin de $C_0(X)$.

Finalmente, se f_0 também é injetora, então $\{f_0, f_0^2, f_0^3\}$ é um subconjunto de Korovkin de $C_0(X)$.

Note que no caso de f_0 ser injetora, basta tomar $M = \{f_0\}$ e o resultado segue da proposição anterior.

Corolário 3.2.3. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $\{e_1, e_2, e_3\}$ *é um subconjunto de Korovkin de $C_0(]0, 1])$.*

(ii) $\{e_{-1}, e_{-2}, e_{-3}\}$ *é um subconjunto de Korovkin de $C_0([1, +\infty[)$, com $e_{-k}(x) = x^{-k}$, para todo $x \in [1, +\infty[$ e $k = 1, 2, 3$.*

(iii) $\{f_1, f_2, f_3\}$ *é um subconjunto de Korovkin de $C_0([0, +\infty[)$, com $f_k(x) = \exp(-kx)$, para todo $x \in [0, +\infty[$ e $k = 1, 2, 3$.*

(iv) $\{\Phi, pr_1 \Phi, \ldots, pr_d \Phi, ||.||^2 \Phi\}$ *é um subconjunto de Korovkin de $C_0(\mathbb{R}^d)$, com $\Phi(x) = \exp(-||x||^2)$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$.*

Demonstração. (i) Tome $f_0 = e_1$, temos que $f_0 \in C_0(]0, 1])$. De fato, dado $\epsilon > 0$, existe um subconjunto compacto $K = [\epsilon, 1]$ de $]0, 1]$ tal que $|f_0(x)| = x < \epsilon$ para todo $x \in]0, \epsilon[= K^c$.

Ademais, f_0 é injetora e positiva, logo pelo Teorema 3.2.3 segue que $\{e_1, e_2, e_3\}$ é um subconjunto de Korovkin de $C_0(]0, 1])$.

(ii) Tome $f_0 = e_{-1}$, temos que $f_0 \in C_0([1, +\infty[)$. De fato, dado $\epsilon > 0$, com $\epsilon > 1$ basta tomar $K = \emptyset$ pois

$$|f_0(x)| = x^{-1} \leq 1 < \epsilon$$

para todo $x \in [1, +\infty[$.

Se $0 < \epsilon \leq 1$, então tome $K = [1, \epsilon^{-1}]$. Assim,

$$|f_0(x)| = x^{-1} \leq 1 < \epsilon$$

para todo $x \in]\epsilon^{-1}, +\infty[$. Logo, $f_0 \in C_0([1, +\infty[)$.

Além disso, f_0 é injetora e positiva, novamente pelo Teorema 3.2.3, segue que $\{e_{-1}, e_{-2}, e_{-3}\}$ é um subconjunto de Korovkin de $C_0([1, +\infty[)$.

(iii) Tome $f_0(x) = \exp(-x)$, temos que $f_0 \in C_0([0, +\infty[)$. De fato, dado $0 < \epsilon \leq 1$, basta tomar $K = [0, \ln \frac{1}{\epsilon}]$. Se $\epsilon > 1$, tome $K = \emptyset$. O resultado segue do Teorema 3.2.3.

(iv) Tome $f_0(x) = \Phi(x) = \exp(-||x||^2)$. Temos que $f_0 \in C_0(\mathbb{R}^d)$, pois dado $0 < \epsilon \leq 1$, basta tomar $K = B'(0, r)$, com raio $r = \sqrt{\ln \epsilon^{-1}}$ e se $\epsilon > 1$, tome $K = \emptyset$. Note que f_0 é estritamente positiva.

Ademais, $\{pr_1, \ldots, pr_d\}$ é um subconjunto de $C(\mathbb{R}^d)$ que separa os elementos de $\mathbb{R}^d$. Logo, o resultado segue do Teorema 3.2.2. $\square$

Uma generalização do resultado anterior é apresentada abaixo.

Proposição 3.2.2. *Dados $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, então*

(i) *$\{e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, e_{\lambda_3}\}$ é um subconjunto de Korovkin de $C_0(]0, 1])$ com $e_{\lambda_k}(x) = x^{\lambda_k}$, para todo $x \in]0, 1]$ e $k = 1, 2, 3$.*

(ii) *$\{e_{-\lambda_1}, e_{-\lambda_2}, e_{-\lambda_3}\}$ é um subconjunto de Korovkin de $C_0([1, +\infty[)$, com $e_{-\lambda_k}(x) = x^{-\lambda_k}$, para todo $x \in [1, +\infty[$ e $k = 1, 2, 3$.*

(iii) *$\{f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, f_{\lambda_3}\}$ é um subconjunto de Korovkin de $C_0([0, +\infty[)$, com $f_{\lambda_k}(x) = \exp(-\lambda_k x)$, para todo $x \in [0, +\infty[$ e $k = 1, 2, 3$.*

Demonstração. Usaremos a Proposição 3.2.1.

(i) Para $x_0 \in]0, 1]$, arbitrário, considere a função

$$h_{x_0}(x) = x^{\lambda_1} + \alpha x^{\lambda_2} + \beta x^{\lambda_3} = x^{\lambda_1} H(x)$$

onde

$$H(x) = 1 + \alpha x^{\lambda_2 - \lambda_1} + \beta x^{\lambda_3 - \lambda_1}$$

e (α, β) é a única solução do sistema

$$\begin{cases} H(x_0) = 0 \\ H'(x_0) = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\alpha = \frac{-(\lambda_3 - \lambda_1)}{\lambda_3 - \lambda_2} x_0^{\lambda_1 - \lambda_2} \quad e \quad \beta = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_3 - \lambda_2} x_0^{\lambda_1 - \lambda_3}.$$

Temos $H''(x_0) = x_0^{-2}(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) > 0$ para todo $x_0 \in]0, 1]$. Note também que, $H'(x) < 0$ se $x < x_0$ e $H'(x) > 0$ se $x > x_0$, logo x_0 é ponto de mínimo absoluto e o resultado segue da Proposição 3.2.1.

(ii) Para $x_0 \in [1, \infty[$, arbitrário, considere a função

$$h_{x_0}(x) = x^{-\lambda_1} + \alpha x^{-\lambda_2} + \beta x^{-\lambda_3} = x^{-\lambda_1} H(x)$$

onde

$$H(x) = 1 + \alpha x^{\lambda_1 - \lambda_2} + \beta x^{\lambda_1 - \lambda_3}$$

e (α, β) é a única solução do sistema

$$\begin{cases} H(x_0) = 0 \\ H'(x_0) = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\alpha = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)}{\lambda_3 - \lambda_2} x_0^{\lambda_2 - \lambda_1} \quad e \quad \beta = \frac{-(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_3 - \lambda_2} x_0^{\lambda_3 - \lambda_1}.$$

Temos $H''(x_0) = x_0^{-2}(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) > 0$ para todo $x_0 \in [1, \infty[$. Note também que, $H'(x) < 0$ se $x < x_0$ e $H'(x) > 0$ se $x > x_0$, logo x_0 é ponto de mínimo absoluto e o resultado segue da Proposição 3.2.1.

(iii) Para $x_0 \in [0, \infty[$, arbitrário, considere a função

$$h_{x_0}(x) = \exp(-\lambda_1 x) + \alpha \exp(-\lambda_2 x) + \beta \exp(-\lambda_3 x) = \exp(-\lambda_1 x) H(x)$$

onde

$$H(x) = 1 + \alpha \exp((\lambda_1 - \lambda_2)x) + \beta \exp((\lambda_1 - \lambda_3)x)$$

e (α, β) é a única solução do sistema

$$\begin{cases} H(x_0) = 0 \\ H'(x_0) = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\alpha = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)}{\lambda_3 - \lambda_2} \exp((\lambda_2 - \lambda_1)x_0) \quad e \quad \beta = \frac{-(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_3 - \lambda_2} \exp((\lambda_3 - \lambda_1)x_0).$$

Temos $H''(x_0) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) > 0$ para todo $x_0 \in [0, \infty[$. Note também que, $H'(x) < 0$ se $x < x_0$ e $H'(x) > 0$ se $x > x_0$, logo x_0 é ponto de mínimo absoluto e o resultado segue da Proposição 3.2.1. □

A seguir discutiremos uma aplicação da Proposição 3.2.2.

Vamos estudar o comportamento dos operadores de Szasz-Mirakjan em $C_0([0, +\infty[)$. Recordemos que estes polinômios são definidos por

$$M_n(f)(x) = \exp(-nx) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k x^k}{k!} \tag{3.7}$$

para todo $n \geq 1$, $x \geq 0$ e $f \in C([0, +\infty[)$ tal que $|f(x)| \leq M \exp(\alpha x) \quad (x \geq 0)$, para algum $M \geq 0$ e $\alpha > 0$.

Lema 3.2.1. *Se $f \in C_0([0, +\infty[)$, então $M_n(f) \in C_0([0, +\infty[)$ e $||M_n(f)|| \leq ||f||$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.13 temos que $\lim\limits_{n \to \infty} M_n(f) = f$ uniformemente em subconjuntos compactos de $[0, +\infty[$, portanto a função $M_n(f)$ é contínua. Além disso, para todo $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} |M_n(f)(x)| = \left| \exp(-nx) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k x^k}{k!} \right| &\leq \exp(-nx) \sum_{k=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \frac{n^k x^k}{k!} \\ &\leq \exp(-nx) \sum_{k=0}^{\infty} ||f|| \frac{n^k x^k}{k!} = ||f|| \exp(-nx) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k x^k}{k!} = ||f||. \end{aligned}$$

Logo, $|M_n(f)(x)| \leq ||f||$ e portanto, $||M_n(f)|| \leq ||f||$ para todo $n \geq 1$.

Provemos que $M_n(f) \in C_0([0,+\infty[)$. Como $f \in C_0([0,+\infty[)$ então dado $\epsilon > 0$, existe $v \in \mathbb{N}$ tal que $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \epsilon$ para todo $k \geq v$.

Ademais, existe uma constante positiva A tal que para todo $x > A$ temos

$$\exp(-nx)\sum_{k=0}^{v}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\frac{n^k x^k}{k!} < \epsilon.$$

Assim,

$$|M_n(f)(x)| \ \leq \ \exp(-nx)\sum_{k=0}^{v}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\frac{n^k x^k}{k!} + \exp(-nx)\sum_{k=v+1}^{\infty}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\frac{n^k x^k}{k!} \ < \ 2\epsilon,$$

para todo $x > A$.

Tomando o compacto $[0, A]$, concluímos que $M_n(f) \in C_0([0,+\infty[)$.

□

Lema 3.2.2. (*Teorema de Dini*) *Se a sequência de funções contínuas $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge monotonicamente para a função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ no conjunto compacto X então a convergência é uniforme.*

A demonstração do Lema 3.2.2 pode ser encontrada em ([30]).

Teorema 3.2.4. *Para toda $f \in C_0([0,+\infty[)$,*

$$\lim_{n\to\infty} M_n(f) = f \ \textit{uniformemente em} \ [0,+\infty[.$$

Demonstração. Como $\{M_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência uniformemente limitada de operadores lineares positivos de $C_0([0,+\infty[)$ em $C_0([0,+\infty[)$, pela Proposição 3.2.2, (iii), é suficiente mostrar que, para todo $\lambda > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} M_n(f_\lambda) = f_\lambda \text{ uniformemente em } [0,+\infty[.$$

com $f_\lambda(x) = \exp(-\lambda x)$ e $x \geq 0$.

Ademais, para todo $x \geq 0$, temos que

$$M_n(f_\lambda)(x) = \exp(-nx)\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left(-\lambda\frac{k}{n}\right)\frac{n^k x^k}{k!} = \exp(-nx)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\exp\left(\frac{-\lambda}{n}\right)nx\right)^k}{k!}.$$

É bem conhecido que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \exp(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo para todo $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} \exp(-nx) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\exp\left(\frac{-\lambda}{n}\right) nx\right)^k}{k!} &= \exp(-nx) \exp\left(\exp\left(\frac{-\lambda}{n}\right) nx\right) \\ &= \exp\left(-nx + nx \exp\left(\frac{-\lambda}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(-nx\left(1 - \exp\left(\frac{-\lambda}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\lambda x \left(\frac{1 - \exp\left(\frac{-\lambda}{n}\right)}{\frac{\lambda}{n}}\right)\right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} M_n(f_\lambda)(x) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\lambda x \left(\frac{1 - \exp\left(\frac{-\lambda}{n}\right)}{\frac{\lambda}{n}}\right)\right) = \exp\left(-\lambda x \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \exp\left(\frac{-\lambda}{n}\right)}{\frac{\lambda}{n}}\right)\right).$$

Aplicando a regra de L'Hopital, temos que $\lim_{n\to\infty} M_n(f_\lambda)(x) = f_\lambda(x)$.

Portanto, a sequência $\{M_n(f_\lambda)\}_{n\geq 1}$ converge pontualmente para f_λ e é decrescente. Além disso, cada $M_n(f_\lambda)$ e f_λ pertencem a $C_0([0, +\infty[)$, portanto, pelo Teorema de Dini aplicado à compactificação de $[0, +\infty[$, obtemos que $M_n(f_\lambda) \to f_\lambda$ uniformemente e o resultado segue da Proposição 3.2.2. □

A seguir, apresentaremos uma caracterização de subespaço de Korovkin em $C_0(X)$, que será muito útil para demostrarmos o Teorema de Stone-Weierstrass. Sua demostração pode ser encontrada em ([9]).

Teorema 3.2.5. *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto com uma base enumerável. Dado um subespaço linear H de $C_0(X)$, são equivalentes:*

(i) H é um subespaço de Korovkin de $C_0(X)$;

(ii) Para toda $f \in C_0(X)$ e para todo $\epsilon > 0$, existe um número finito de funções $h_0, \ldots, h_n \in H$, $k_0, \ldots, k_n \in H$ e $u, v \in C_0(X), u, v \geq 0$ tal que $||u|| \leq \epsilon$, $||v|| \leq \epsilon$ e

$$\left\| \inf_{0\leq j\leq n} k_j - \sup_{0\leq i\leq n} h_i \right\| \leq \epsilon \quad e \quad \sup_{0\leq i\leq n} h_i - u \leq f \leq \inf_{0\leq j\leq n} k_j + v.$$

Lema 3.2.3. *Toda subálgebra fechada A de $C_b(X)$ é um subespaço reticulado, isto é, $|f| \in A$ para toda $f \in A$.*

Demonstração. É bem conhecido que,

$$t^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (t-1)^k = \lim_{n\to\infty} p_n(t) \tag{1}$$

uniformemente com $t \in [0,2]$ e

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} (t-1)^k \qquad (n \geq 1, t \in [0,2]).$$

Como $\lim_{n\to\infty} p_n(0) = 0^{\frac{1}{2}} = 0$, nós temos que,

$$t^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} q_n(t) \text{ uniformemente para } t \in [0,2],$$

com $q_n = p_n - p_n(0)$, $n \geq 1$.

Por hipótese, A é uma subálgebra, então para toda $f \in A$ temos que $f^2 \in A$. Daí, para toda $f \in A$, com $f \neq 0$, obtemos $\left(\frac{f}{||f||}\right)^2 \in A$. Logo, segue de (1) que

$$|f| = ||f|| \left(\frac{f^2}{||f||^2}\right)^{\frac{1}{2}} = ||f|| \lim_{n\to\infty} q_n \left(\frac{f^2}{||f||^2}\right) \in \overline{A} = A$$

pois A é fechado. Logo, A é um subespaço reticulado. □

Antes de enunciarmos o Teorema de Aproximação de Stone, vale lembrar que, um subconjunto M de $C_0(X)$ separa fortemente os pontos de X, se separa os pontos de X e, se para cada $x \in X$ existe $f \in M$ tal que $f(x) \neq 0$.

Teorema 3.2.6. *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto com uma base enumerável e seja A uma subálgebra fechada de $C_0(X)$ que separa fortemente os pontos de X. Então $A = C_0(X)$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que existe uma função estritamente positiva f_0 para podermos aplicar o Teorema 3.2.3.

Note que A é separável pois $C_0(X)$ é separável.

Denote por $\{h_n : n \geq 1\}$ um subconjunto denso de A.

Por hipótese, A separa fortemente pontos de X, então para todo $x \in X$, existe $g \in A$ tal que $g(x) \neq 0$ e assim $|g(x)| \neq 0$.

Mas pelo Lema 3.2.3 $|g| \in A$, portanto, existe $|g| \in A$ tal que $|g(x)| \neq 0$.

Como $\overline{\{h_n : n \geq 1\}} = A$ então, para todo $\epsilon > 0$, existe h_n tal que $||h_n - |g|\,|| < \epsilon$, e assim, $|h_n(t) - |g(t)|\,| < \epsilon$ para todo $t \in X$. Tomando $\epsilon = \frac{|g(x)|}{2}$ e $t = x$ temos que, $|h_n(x) - |g(x)|\,| < \frac{|g(x)|}{2}$, ou seja, $-\frac{|g(x)|}{2} < h_n(x) - |g(x)| < \frac{|g(x)|}{2}$. Portanto,

$$0 < \frac{|g(x)|}{2} < h_n(x).$$

Logo, para todo $x \in X$, existe $n \geq 1$ tal que $h_n(x) \neq 0$. Portanto, pelo Lema 3.2.3, a função f_0 definida por

$$f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h_n|}{2^n ||h_n||}$$

está em A, e é estritamente positiva em A.

Como A é uma subálgebra de $C_0(X)$ então $\{f_0\} \cup f_0 A \cup f_0 A^2 \subset A$, portanto, segue do Teorema 3.2.3 que A é um subespaço de Korovkin de $C_0(X)$.

Considere $f \in C_0(X)$ e $\epsilon > 0$. Pelo Teorema 3.2.5 existem $h_0, \ldots, h_n \in A$, $k_0, \ldots, k_n \in A$ e $u, v \in C_0(X), u, v \geq 0$ tal que $||u|| \leq \epsilon$, $||v|| \leq \epsilon$, e

$$\left\| \inf_{0 \leq j \leq n} k_j - \sup_{0 \leq i \leq n} h_i \right\| \leq \epsilon \quad \text{ e } \quad \sup_{0 \leq i \leq n} h_i - u \leq f \leq \inf_{0 \leq j \leq n} k_j + v.$$

Então, $f - \inf\limits_{0 \leq j \leq n} k_j \leq v$ e

$$\inf_{0 \leq j \leq n} k_j - f \leq |\inf_{0 \leq j \leq n} k_j - \sup_{0 \leq i \leq n} h_i| + u.$$

Portanto,

$$|f - \inf_{0 \leq j \leq n} k_j| \leq |\sup_{0 \leq i \leq n} hi - \inf_{0 \leq j \leq n} k_j| + u + v$$

e então

$$||f - \inf_{0 \leq j \leq n} k_j|| \leq 3\epsilon.$$

Logo, $f \in \overline{A} = A$, pois pelo Lema 3.2.3 A é um subespaço reticulado e portanto, $\inf\limits_{0 \leq j \leq n} k_j \in A$. $\square$

Tal como fizemos no Teorema 2.1.6, mostrando que a versão restrita do Teorema de Korovkin e o Teorema de aproximação de Weierstrass são equivalentes para o intervalo $[0,1]$, podemos mostrar que o Teorema de Aproximação de Stone e o Teorema 3.2.3 são equivalentes.

O próximo resultado será muito útil para nosso propósito.

Teorema 3.2.7. *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto e considere um subconjunto M de $C_0(X)$ tal que o span(M) contém uma função estritamente positiva $f_0 \in C_0(X)$. Dado $x_0 \in X$, denote por $A(M,x_0)$ o subespaço de todas funções $f \in C_0(X)$ tal que $\mu(f) = f(x_0)$ para toda $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ satisfazendo $\mu(g) = g(x_0)$ para toda $g \in \{f_0\} \cup f_0M \cup f_0M^2$. Então $A(M,x_0)$ é uma subálgebra fechada de $C_0(X)$ que contém M.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente que $A(M,x_0)$ é fechado.

Seja $F \in \overline{A(M,x_0)}$. Então existe uma sequência $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset A(M,x_0)$ tal que,

$$F = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Mas por hipótese, para toda $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ satisfazendo $\mu(g) = g(x_0)$ para toda $g \in \{f_0\} \cup f_0M \cup f_0M^2$ temos que $\mu(f_n) = f_n(x_0)$. E como μ é contínua temos que

$$\mu(F) = \mu(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = F(x_0).$$

Logo, $\mu(F) = F(x_0)$ e portanto, $F \in A(M,x_0)$.

Vamos mostrar agora que $A(M,x_0)$ é uma subálgebra de $C_0(X)$. Para tal, seja

$$\begin{aligned} M(x_0) &= \{x \in X : g(x) = g(x_0) \text{ para toda } g \in M\} \\ &= \{x \in X : f_0(x)(g(x) - g(x_0))^2 = 0 \text{ para toda } g \in M\}. \end{aligned}$$

Fixe $f \in A(M,x_0)$ e $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ tal que $\mu(g) = g(x_0)$ para toda $g \in \{f_0\} \cup f_0M \cup f_0M^2$. Em particular,

$$\begin{aligned} \mu(f_0(g - g(x_0))^2) &= \mu(f_0g^2) - 2g(x_0)\mu(f_0g) + g^2(x_0)\mu(f_0) \\ &= (f_0g^2)(x_0) - 2g(x_0)(f_0g)(x_0) + g^2(x_0)(f_0)(x_0) = 0. \end{aligned}$$

para toda $g \in M$.

Por outro lado, se $x \in M(x_0)$ então $\delta_x(g) = g(x) = g(x_0)$ para toda $g \in \{f_0\} \cup f_0M \cup f_0M^2$, assim $\delta_x(f) = f(x) = f(x_0)$ uma vez que $f \in A(M, x_0)$. E portanto, $f_0(x_0)f^2 = f^2(x_0)f_0$ em $M(x_0)$. Daí, tomando $M(x_0) = Y$ no Corolário 1.2.1 temos que,

$$
\begin{aligned}
\mu(f_0(x_0)f^2) &= \mu(f^2(x_0)f_0) \\
f_0(x_0)\mu(f^2) &= f^2(x_0)\mu(f_0) = f^2(x_0)f_0(x_0).
\end{aligned}
$$

Logo $\mu(f^2) = f^2(x_0)$, assim $f^2 \in A(M, x_0)$ e portanto $A(M, x_0)$ é uma subálgebra de $C_0(X)$.

Falta mostrarmos que $A(M, x_0)$ contém M. Seja $h \in M$ então $f_0(x_0)h = h(x_0)f_0$ em $M(x_0)$. Se fixarmos novamente $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ tal que $\mu(g) = g(x_0)$ para toda $g \in \{f_0\} \cup f_0M \cup f_0M^2$, aplicando o Corolário 1.2.1 novamente, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mu(f_0(x_0)h) &= \mu(h(x_0)f_0) \\
f_0(x_0)\mu(h) &= h(x_0)\mu(f_0) = h(x_0)f_0(x_0).
\end{aligned}
$$

Logo $\mu(h) = h(x_0)$, assim $h \in A(M, x_0)$. $\square$

Teorema 3.2.8. *O Teorema 3.2.3 do Tipo Korovkin e o Teorema 3.2.6 de Stone- Weierstrass são equivalentes.*

Demonstração. Pela demonstração do Teorema 3.2.6, basta mostrarmos que o Teorema 3.2.6 implica o Teorema 3.2.3.

Considere então um subconjunto M de $C_0(X)$ que separa pontos de X e tal que o $span(M)$ contém uma função estritamente positiva $f_0 \in C_0(X)$.

Dado $x_0 \in X$, considere um subespaço $A(M, x_0)$ definido no teorema anterior. Pelo Teorema 3.2.6 e Teorema 3.2.7 temos que $A(M, x_0) = C_0(X)$. Em outras palavras, mostramos que para toda $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ e para todo $x_0 \in X$ satisfazendo $\mu(g) = g(x_0)$ para toda $g \in \{f_0\} \cup f_0M \cup f_0M^2$, temos que $\mu(f) = f(x_0)$ para toda $f \in C_0(X)$. Pelo Teorema 3.2.1 segue que $\{f_0\} \cup f_0M \cup f_0M^2$ é um subconjunto de Korovkin de $C_0(X)$. $\square$

Capítulo 4

Uma versão do Teorema de Korovkin via processo $\mathcal{A}$-soma

4.1 Introdução

Este capítulo é baseado no artigo de Atlihan e Tas ([6]). Usando o processo $\mathcal{A}$-soma apresentaremos uma versão do Teorema de Korovkin para uma sequência de operadores lineares positivos de $C(X)$ em $C(X)$, onde X é um espaço de Hausdorff compacto com pelo menos dois pontos e $C(X)$ é munido da norma do supremo.

Seja $\mathcal{A} = \{A^{(n)}\}_{n\geq 1} = \{a_{kj}^{(n)}\}_{n\geq 1}$ uma sequência de matrizes infinitas com entradas reais não negativas. Uma sequência $\{L_j\}_{j\geq 1}$ de operadores lineares positivos de $C(X)$ em $C(X)$ é chamada de processo $\mathcal{A}$-soma em $C(X)$ se $\{L_j f\}_{j\geq 1}$ é $\mathcal{A}$-convergente para f, para toda $f \in C(X)$, isto é,

$$\lim_{k\to\infty} || \sum_j a_{kj}^{(n)} L_j f - f|| = 0 \text{ uniformemente em n}, \tag{4.1}$$

onde as séries em (4.1) converge para cada k, n e f. Recordemos que uma sequência de números reais $\{x_j\}_{j\geq 1}$ é dita ser $\mathcal{A}$-convergente para $l \in \mathbb{R}$ se $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_j a_{kj}^{(n)} x_j = l$, uniformemente em n (veja [31] e [42]). O número l é denominado $\mathcal{A}$-limite de $\{x_j\}_{j\geq 1}$.

Seja $C_{\mathcal{A}}$ o conjunto de todas as sequências reais $\{x_j\}_{j\geq 1}$ tais que as séries

$$\sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} x_j$$

são convergentes para todo $k, n \in \mathbb{N}$.

Dizemos que o método $\mathcal{A} = \{A^{(n)}\}_{n\geq 1} = \{a_{kj}^{(n)}\}_{n\geq 1}$ é regular se toda sequência real $\{x_j\}_{j\geq 1}$ convergente pertence a $C_{\mathcal{A}}$ e o $\mathcal{A}$-limite é igual ao limite usual, isto é, se

$$\lim_{j\to\infty} x_j = l \text{ implica } \lim_{k\to\infty} \sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} x_j = l$$

uniformemente em n.

O método $\mathcal{A} = \{A^{(n)}\}_{n\geq 1}$ é regular (veja [10]) se, e somente se,

(i) Para cada $j = 1, 2, \ldots,$ $\lim_{k\to\infty} a_{kj}^{(n)} = 0$ uniformemente em n;

(ii) $\lim_{k\to\infty} \sum_j a_{kj}^{(n)} = 1$ uniformemente em n;

(iii) Para cada $n, k = 1, 2, \ldots,$ $\sum_j |a_{kj}^{(n)}| < \infty$, e existem inteiros N, M tais que $\sum_j |a_{kj}^{(n)}| < M$ para $k \geq N$ e todo $n = 1, 2, \ldots$.

Exemplo 4.1.1. *Se $A^{(n)} = B$ para todo $n \in \mathbb{N}$ para alguma matriz infinita B, então o método $\mathcal{A} = \{A^{(n)}\}_{n\geq 1}$ é regular se, e somente se, o método matricial com matriz B é regular. (Veja [29]).*

Claramente, se $B = I$, a matriz identidade infinita, então o método $\mathcal{A} = \{A^{(n)}\}_{n\geq 1} = \{I\}_{n\geq 1}$ é regular.

Exemplo 4.1.2. *Considere $\mathcal{A} = \{A^{(n)}\}_{n\geq 1} = \{a_{kj}^{(n)}\}_{n\geq 1}$, onde*

$$a_{kj}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{k}, \text{ se } n \leq j < n+k; \\ 0, \text{ caso contrário }. \end{cases}$$

Assim, a sequência é dada por

$$a_{kj}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

$$a_{kj}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

$$a_{kj}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

A sequência de matrizes $\mathcal{A}$ é regular. É fácil verificar as condições (i) e (ii). Note que $\sum_j |a_{kj}^{(n)}| = \sum_j a_{kj}^{(n)} = 1$ para cada $n, k \in \mathbb{N}$ e portanto a condição (iii) é verificada para quaisquer $M \geq 2$ e $N \geq 1$.

Seja $\{L_j\}_{j\geq 1}$ uma sequência de operadores lineares positivos de $C(X)$ em $C(X)$ tal que, para cada $n, k \in \mathbb{N}$

$$\sum_j a_{kj}^{(n)} ||L_j 1|| < \infty. \tag{4.2}$$

Além disso, para cada $n, k \in \mathbb{N}$ e $f \in C(X)$, seja

$$B_k^{(n)}(f;x) = \sum_j a_{kj}^{(n)} L_j(f;x), \quad (x \in X)$$

onde $B_k^{(n)}(f;x)$ e $L_j(f;x)$ denotam os valores reais $B_k^{(n)}(f)(x)$ e $L_j(f)(x)$.

Note que $B_k^{(n)}(f)$ está bem definido por (4.2) e pertence a $B(X)$. Como $\{L_j\}_{j\geq 1}$ é uma sequência de operadores lineares positivos e cada $a_{kj}^{(n)}$ é não negativo, então cada operador linear $B_k^{(n)}$ é positivo.

4.2 Uma versão do Teorema de Korovkin utilizando processo $\mathcal{A}$-soma

Assuma que $f_1, f_2, \ldots, f_m \in C(X)$ tem as seguintes propriedades:

Existem funções $g_1, g_2, \ldots, g_m \in C(X)$ tal que para todo $x, y \in X$,

$$P_x(y) = \sum_{i=1}^{m} g_i(x) f_i(y) \geq 0 \tag{4.3}$$

e

$$P_x(y) = 0 \Leftrightarrow y = x. \tag{4.4}$$

Para provar o resultado principal deste capítulo, precisaremos dos seguintes lemas.

Lema 4.2.1. *Seja $\mathcal{A} = \{A^{(n)}\}_{n\geq 1}$ uma sequência regular de matrizes infinitas com entradas reais não-negativas. Assuma que $\{L_j\}_{j\geq 1}$ é uma sequência de operadores lineares positivos de $C(X)$ em $C(X)$ tal que (4.2) é válido. Se para $i = 1, 2, \ldots, m$*

$$\lim_{k\to\infty} ||B_k^{(n)}(f_i) - f_i|| = 0 \text{ uniformemente em } n$$

então, para toda função P definida por

$$P(y) = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(y); \quad c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R} \text{ e } y \in X, \tag{4.5}$$

temos que $\{L_j P\}_{j\geq 1}$ é $\mathcal{A}$-convergente para P, isto é,

$$\lim_{k\to\infty} ||B_k^{(n)}(P) - P|| = 0 \text{ uniformemente em } n.$$

Em particular, isto implica que $\lim_{k\to\infty} ||B_k^{(n)}(P)|| = ||P||$, uniformemente em n.

Demonstração. Usando a positividade e a linearidade de $B_k^{(n)}$ para todo k, $n \in \mathbb{N}$, temos para cada $x \in X$ e k, $n \in \mathbb{N}$ que,

$$\begin{aligned} |B_k^{(n)}(P;x) - P(x)| &= \left| B_k^{(n)}\left(\sum_{i=1}^m c_i f_i; x\right) - \sum_{i=1}^m c_i f_i(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |c_i| \left| B_k^{(n)}(f_i;x) - f_i(x) \right|. \end{aligned}$$

Tomando $H = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |c_i|$, nós concluímos que

$$|B_k^{(n)}(P;x) - P(x)| \leq H \sum_{i=1}^m \left| B_k^{(n)}(f_i;x) - f_i(x) \right| \leq H \sum_{i=1}^m ||B_k^{(n)}(f_i) - f_i||.$$

Assim,

$$||B_k^{(n)}(P) - P|| \leq H \sum_{i=1}^m ||B_k^{(n)}(f_i) - f_i||.$$

Fazendo $k \to \infty$, pela hipótese, obtemos

$$\lim_{k \to \infty} ||B_k^{(n)}(P) - P|| = 0 \text{ uniformemente em n.}$$

□

Lema 4.2.2. *Sob as condições do Lema 4.2.1, temos*

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in X} |B_k^{(n)}(P_x;x)| = 0 \textit{ uniformemente em n.}$$

Demonstração. Por (4.4), $P_x(x) = \sum\limits_{i=1}^m g_i(x) f_i(x) = 0$.

Usando a positividade e a linearidade de $B_k^{(n)}$ para todo k, $n \in \mathbb{N}$, temos para cada $x \in X$ e k, $n \in \mathbb{N}$ que,

$$\begin{aligned} |B_k^{(n)}(P_x;x)| &= \left| B_k^{(n)}\left(\sum_{i=1}^m g_i(x) f_i; x\right) - \sum_{i=1}^m g_i(x) f_i(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |g_i(x)| \left| B_k^{(n)}(f_i;x) - f_i(x) \right|. \end{aligned}$$

Sendo cada g_i contínua em X compacto, temos que $B = \max\limits_{1 \leq i \leq m} ||g_i|| < \infty$. Logo,

$$\sup_{x \in X} |B_k^{(n)}(P_x;x)| \leq B \sum_{i=1}^m ||B_k^{(n)} f_i - f_i||.$$

Tomando o limite quando $k \to \infty$ o resultado segue da hipótese. □

Lema 4.2.3. *Sob as condições do Lema 4.2.1, temos que existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\sup_{\substack{k \geq k_0 \\ n \geq 1}} ||B_k^{(n)}|| < \infty.$$

Demonstração. Fixe dois pontos distintos $s, t \in X$ e defina a função Q por

$$Q(y) = P_s(y) + P_t(y), \qquad y \in X \tag{4.6}$$

onde P_s e P_t são funções dadas por (4.3). Por definição, temos que $Q \in C(X)$ e $Q(y) > 0$, assim $\dfrac{1}{Q} \in C(X)$.

Tomando $c_i := g_i(s) + g_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ onde cada g_i é uma função usada em (4.3) segue que Q é da forma (4.5).

Como $\dfrac{1}{Q(y)} \leq \left\| \dfrac{1}{Q} \right\|$ para todo $y \in X$, temos que,

$$1 \leq \left\| \frac{1}{Q} \right\| Q(y) \qquad y \in X.$$

Usando a positividade e a linearidade de $B_k^{(n)}$ para todo k, $n \in \mathbb{N}$, temos para cada $x \in X$ e k, $n \in \mathbb{N}$ que,

$$|B_k^{(n)}(1; x)| \leq \left\| \frac{1}{Q} \right\| |B_k^{(n)}(Q; x)|.$$

E portanto,

$$||B_k^{(n)}|| = ||B_k^{(n)} 1|| \leq \left\| \frac{1}{Q} \right\| ||B_k^{(n)}(Q)||.$$

Pelo Lema 4.2.1 temos que,

$$\lim_{k \to \infty} ||B_k^{(n)}(Q)|| = ||Q|| \text{ uniformemente em n},$$

isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \left| ||B_k^{(n)}(Q)|| - ||Q|| \right| < \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$k \geq k_0 \Rightarrow ||B_k^{(n)}(Q)|| < ||Q|| + \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, temos

$$k \geq k_0 \Rightarrow ||B_k^{(n)}|| < \left\| \frac{1}{Q} \right\| (||Q|| + \epsilon) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\sup_{\substack{k \geq k_0 \\ n \geq 1}} ||B_k^{(n)}|| < \infty.$$

□

Lema 4.2.4. *Seja $\mathcal{A} = \{A^{(n)}\}_{n\geq 1}$ uma sequência regular de matrizes infinitas com entradas reais não-negativas. Assuma que $\{L_j\}_{j\geq 1}$ é uma sequência de operadores lineares positivos de $C(X)$ em $C(X)$ tal que (4.2) é válido. Seja $x \in X$ fixado e seja $h_x : X \to \mathbb{R}$ contínua em X tal que $h_x(x) = 0$. Então,*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup_{x\in X} |B_k^{(n)}(h_x; x)| \right) = 0 \text{ uniformemente em } n.$$

Demonstração. Fixe $x \in X$. Como h_x é contínua no ponto x, para todo $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança aberta U de x tal que

$$|h_x(y)| < \epsilon \text{ para todo } y \in U. \tag{4.7}$$

Como X é compacto e U é aberto, então $X - U$ é compacto e podemos considerar $m = \min\limits_{y\in X-U} P_x(y)$ com P_x dada por (4.3) e $M = \max\limits_{y\in X-U} |h_x(y)|$. Note que $m > 0$. De fato, $x \in U$, $P_x \geq 0$ e $P_x(y) = 0 \Leftrightarrow y = x$.

Assim, para todo $y \in X - U$ temos que,

$$|h_x(y)| \leq M \leq \frac{M}{m} P_x(y). \tag{4.8}$$

Obtemos de (4.7) e (4.8) que para todo $y \in X$,

$$|h_x(y)| \leq \epsilon + \frac{M}{m} P_x(y).$$

Usando a positividade e a linearidade de $B_k^{(n)}$ para todo k, $n \in \mathbb{N}$, temos para cada $x \in X$ e k, $n \in \mathbb{N}$ que,

$$\begin{aligned}
|B_k^{(n)}(h_x;x)| &\leq B_k^{(n)}\left(\epsilon + \frac{M}{m}P_x;x\right) \\
&= \epsilon B_k^{(n)}(1;x) + \frac{M}{m}B_k^{(n)}(P_x;x) \\
&= \epsilon|B_k^{(n)}(1;x)| \,+\, \frac{M}{m}|B_k^{(n)}(P_x;x)| \\
&\leq \epsilon\sup_{x\in X}|B_k^{(n)}(1;x)| \,+\, \frac{M}{m}\sup_{x\in X}|B_k^{(n)}(P_x;x)| \\
&= \epsilon||B_k^{(n)}(1)|| + \frac{M}{m}\sup_{x\in X}|B_k^{(n)}(P_x;x)| \\
&= \epsilon||B_k^{(n)}|| + \frac{M}{m}\sup_{x\in X}|B_k^{(n)}(P_x;x)|
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\sup_{x\in X}|B_k^{(n)}(h_x;x)| \leq \epsilon||B_k^{(n)}|| + \frac{M}{m}\sup_{x\in X}|B_k^{(n)}(P_x;x)|.$$

Logo segue do Lema 4.2.3 que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c := \sup\limits_{\substack{k\geq k_0\\ n\geq 1}}||B_k^{(n)}|| < \infty$.

Pela Lema 4.2.2,

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in X}|B_k^{(n)}(P_x;x)| = 0 \text{ uniformemente em n},$$

isto é, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_1 \Rightarrow \sup_{x\in X}|B_k^{(n)}(P_x;x)| < \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Seja $k_2 = \max\{k_0, k_1\}$.

Para todo $k \geq k_2$, temos

$$\sup_{x\in X}|B_k^{(n)}(h_x;x)| \leq \epsilon c + \frac{M}{m}\epsilon = \left(c + \frac{M}{m}\right)\epsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{x\in X}|B_k^{(n)}(h_x;x)|\right) = 0 \text{ uniformemente em n}.$$

$\square$

Teorema 4.2.1. (*Atlihan e Tas - 2015, [6]*) *Seja* $\mathcal{A} = \{A^{(n)}\}_{n\geq 1}$ *uma sequência regular de matrizes infinitas com entradas reais não-negativas. Assuma que* $\{L_j\}_{j\geq 1}$ *é uma sequência de operadores lineares positivos de* $C(X)$ *em* $C(X)$ *tal que (4.2) é válido. Se* $f_i \in C(X)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, *satisfazem (4.3) e*

$$\lim_{k\to\infty} ||B_k^{(n)}(f_i) - f_i|| = 0 \text{ uniformemente em } n,\ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

então, $\{L_j\}_{j\geq 1}$ *é um processo* $\mathcal{A}$*-soma em* $C(X)$*, isto é, para toda* $f \in C(X)$,

$$\lim_{k\to\infty} ||B_k^{(n)}(f) - f|| = 0 \text{ uniformemente em } n.$$

Demonstração. Fixe $x \in X$ e defina a função h_x por

$$h_x(y) = f(y) - \frac{f(x)}{Q(x)}Q(y), \quad y \in X$$

com Q sendo a função dada por (4.6). É fácil verificar que h_x satisfaz todas as condições do Lema 4.2.4. Ademais, como

$$f(y) = h_x(y) + \frac{f(x)}{Q(x)}Q(y), \quad y \in X$$

segue que,

$$\begin{aligned}
|B_k^{(n)}(f;x) - f(x)| &= \left|B_k^{(n)}(h_x;x) + \frac{f(x)}{Q(x)}(Q;x) - f(x)\right| \\
&= \left|B_k^{(n)}(h_x;x) + \frac{f(x)}{Q(x)}B_k^{(n)}(Q;x) - f(x)\right| \\
&\leq |B_k^{(n)}(h_x;x)| + \left|\frac{f(x)}{Q(x)}\right| |B_k^{(n)}(Q;x) - Q(x)|.
\end{aligned}$$

Tomando $K = \max\left\{1, \left\|\frac{f}{Q}\right\|\right\}$, obtemos

$$||B_k^{(n)}(f) - f|| \leq K\left(\left[\sup_{x\in X} |B_k^{(n)}(h_x;x)|\right] + ||B_k^{(n)}(Q) - Q||\right).$$

Fazendo $k \to \infty$, pelo Lema 4.2.1 e Lema 4.2.4 obtemos para toda $f \in C(X)$ que

$$\lim_{k\to\infty} ||B_k^{(n)}(f) - f|| = 0 \text{ uniformemente em n.}$$

□

Observe que, se tomarmos $\mathcal{A} = \{A^{(n)}\}_{n\geq 1} = \{I\}_{n\geq 1}$, a matriz identidade para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a versão abstrata do clássico teorema de Korovkin [34].

Corolário 4.2.1. (*Korovkin ([34]) Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_m \in C(X)$ com as seguintes propriedades:*

Existem funções $g_1, g_2, \ldots, g_m \in C(X)$ tal que para todo $x, y \in X$,

$$P_x(y) = \sum_{i=1}^{m} g_i(x) f_i(y) \geq 0, \quad e \quad P_x(y) = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Suponha que $\{L_k\}_{k\geq 1}$ é uma sequência de operadores lineares positivos, $L_k : C(X) \to C(X)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} ||L_k(f_i) - f_i|| = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Então para toda $f \in C(X)$, temos

$$\lim_{k\to\infty} ||L_k(f) - f|| = 0.$$

Demonstração. Tomando $\mathcal{A} = \{A^{(n)}\}_{n\geq 1} = \{I\}_{n\geq 1}$, a matriz identidade para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que,

$$a_{kj}^{(n)} = \begin{cases} 1, \text{ se } k = j; \\ 0, \text{ caso contrário }. \end{cases}$$

Logo,

$$B_k^{(n)}(f; x) = \sum_j a_{kj}^{(n)} L_j(f; x) = L_k(f; x)$$

para todo $n, k \in \mathbb{N}$.

Portanto, o resultado segue diretamente do Teorema 4.2.1. $\square$

Vejamos algumas aplicações do Teorema 4.2.1.

Exemplo 4.2.1. *Seja $X = [a, b]$ e considere $\mathcal{A} = \{A^{(n)}\}_{n\geq 1} = \{I\}_{n\geq 1}$, para todo n. Escolha $f_1(y) = 1$, $f_2(y) = y$, $f_3(y) = y^2$, $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = -2x$ e $g_3(x) = 1$. Observe que,*

$$P_x(y) = (x - y)^2 \geq 0 \ e \ P_x(y) = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Logo o Teorema 4.2.1 se reduz ao Primeiro Teorema de Korovkin.

Exemplo 4.2.2. *Seja X o grupo aditivo compacto módulo 2π de $\mathbb{R}$ e considere novamente $\mathcal{A} = \{A^{(n)}\}_{n\geq 1} = \{I\}_{n\geq 1}$, para todo n. Escolha $f_1(y) = 1$, $f_2(y) = \cos y$, $f_3(y) = \sin y$, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = -\cos x$ e $g_3(x) = -\sin x$. Assim,*

$$P_x(y) = 1 - (\cos(y - x)) \geq 0 \text{ e } P_x(y) = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Neste caso, o Teorema 4.2.1 se reduz ao Segundo Teorema de Korovkin.

Exemplo 4.2.3. *Seja $\{L_j\}_{j\geq 1}$ uma sequência de operadores lineares positivos de $C(X)$ em $C(X)$ satisfazendo as hipóteses do Corolário 4.2.1 e $\mathcal{A} = \{A^{(n)}\}_{n\geq 1} = \{a_{kj}^{(n)}\}_{n\geq 1}$, onde*

$$a_{kj}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{k}, \text{ se } n \leq j < n + k; \\ 0, \text{ caso contrário }. \end{cases}$$

Para toda $f \in C(X)$ defina

$$T_j(f;x) = (1 + (-1)^j)L_j(f;x).$$

A sequência $\{T_j\}_{j\geq 1}$ satisfaz as condições do Teorema 4.2.1.

Referências Bibliográficas

[1] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, Positive Operators, Academic Press, New York, 1985.

[2] F. Altomare, Approximation of finitely defined operators in function spaces, Note Mat., 7 (1987), $211 - 229$.

[3] F. Altomare; Korovkin-type theorems and approximation by positive linear operators. Surv. Approx. Theory 5 (2010), 92-164.

[4] F. Altomare and M. Campiti, Korovkin-type Approximation Theory and its Applications, de Gruyter Studies in Mathematics, 17, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[5] F. Altomare and S. Diomede, Positive operators and approximation in function spaces on completely regular spaces, Int. J. of Math. and Math. Sci., 61 (2003), 3841-3871.

[6] O. G. Atlihan, E. Tas; An abstract version of the Korovkin theorem via A-summation process. Acta Math. Hungar. 145 (2015), 360-368.

[7] V. A. Baskakov, On various convergence criteria for linear positive operators (Russian), Usp. Mat. Nauk, 16 (1961), no. 1(97), 131-134.

[8] H. Bauer, Measure and Integration Theory, de Gruyter Studies in Mathematics, 26, W. de Gruyter & Co., Berlin, 2001.

[9] H. Bauer and K. Donner, Korovkin approximation in $C_0(X)$, Math. Ann., 236 (1978), no. 3, 225-237.

[10] H. T. Bell, Order summability and almost convergence, Proc. Amer. Math. Soc., 38 (1973), 548-552.

[11] H. Berens and G. G. Lorentz, Theorems of Korovkin type for positive linear operators on Banach lattices, in: Approximation Theory (Proc. Internat. Sympos., Univ. Texas, Austin, Tex. 1973), 1-30; Academic Press, New York, 1973.

[12] H. Bohman, On approximation of continuous and analytic functions, Ark. Math., 2 (1952-54), 43-46.

[13] N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Livre VI, Integration, Ch. 1-9, Actualités Scientifiques et Industrielles, 1343 (1969), Hermann, Paris.

[14] P. L. Butzer, On two-dimensional Bernstein polynomials, Canad. J. Math., 5 (1953), 107-113.

[15] P. L. Butzer and R. J. Nessel, Fourier Analysis and Approximation, Vol. 1, Academic Press, New York, 1971.

[16] G. Choquet, Lectures on Analysis, Vol. I and II, A. Benjamin Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[17] A. Dinghas, Über einige Identitäten von Bernsteinschem Typus, Norske Vid. Selsk. Fohr. Trondheim, 24 (1951), 96-97.

[18] R. Engelking, General Topology, Sigma Series in Pure Mathematics 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[19] J. Favard, Sur les multiplicateurs d'interpolation, J. Math. Pures Appl., 23 (9)(1944), 219-247.

[20] L. Fejér, Sur les fonctions bornées et intégrables, C. Rendus Hebdomadaires, Séances de l'Académie des Sciences Paris, 131 (1900), 984-987.

[21] G. B. Folland, Real Analysis, Wiley, New York, 1984.

[22] T. H. Hildebrandt and I. J. Schoenberg, On linear functional operations and the moment problem for a finite interval in one or several dimensions, Ann. of Math., (2), 34 (1933), 317-328.

[23] T. Ishii and K. Izuchi, BKW-operators for Chebyshev systems, Tokyo J. Math., 22 (1999), no. 2, 375-389.

[24] K. Izuchi, H. Takagi and S. Watanabe, Sequential Korovkin type theorems and weighted composition operators, Acta Sci. Math. (Szeged) 62 (1996), 161-174.

[25] K. Izuchi, H. Takagi and S. Watanabe, Sequential BKW-operators and function algebras, J. Approx. Theory, 85 (1996), no. 2, 185-200.

[26] K. Izuchi and S.-E. Takahasi, BKW-operators on the interval [0,1], Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, Tomo XLVI (1997), 477-489.

[27] P. P. Korovkin, Convergence of linear positive operators in the spaces of continuous functions (Russian), Doklady Akad. Nauk. SSSR (N.S.), 90 (1953), 961-964.

[28] P. P. Korovkin, Linear Operators and Approximation Theory, translated from the Russian ed. (1959), Russian Monographs and Texts on Advances Mathematics and Physics, Vol. III, Gordon and Breach Publishers, Inc. New York, Hindustan Publ. Corp. (India), Delhi, 1960.

[29] E. Kreyszig, Introductory functional analysis with applications, John Wiley, New York, 1978.

[30] E. L. Lima, Análise real, Funções de uma variável. Rio de Janeiro: Rio de Janeiro, 2011, v.1. (Coleção matemática universitária -IMPA).

[31] G. G. Lorentz, A contribution to the theory of divergent sequences, Acta Math., 80 (1948), 167-190.

[32] G. G. Lorentz, Bernstein Polynomials, 2nd. Ed. Chelsea Publ. Comp., New York, N. Y. 1986.

[33] G. G. Lorentz, Korovkin sets (Sets of convergence), Regional Conference at the University of California, Riverside, June 15-19, 1972, Center for Numerical Analysis, no. 58, The University of Texas at Austin, 1972.

[34] H. N. Mahskar and D. V. Pai; Fundamentals of Approximation Theory. Alpha Science Int. Ltd. (2000).

[35] C. A. Micchelli, Convergence of positive linear operators on C(X), J. Approx. Theory, 13 (1975), 305-315.

[36] G. M. Mirakjan, Approximation of continuous functions with the aid of polynomials, (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR, 31 (1941), 201-205.

[37] T. Popoviciu, Asupra demonstratiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de in-terpolare [On the proof of Weierstrass' theorem with the help of interpolation polynomials], Lucrãrile Sesiunii generale ¸stiinti?ce (2-12 Iunie 1950), 1664-1667, Editura Academiei R. P. Române, Bucuresti, 1951.

[38] J. B. Prolla, Weierstrass-Stone,The Theorem, Verlag Peter Lang, FranKfurt, 1993.

[39] W. Rudin, Funcional Analysis, McGraw-Hill, NeW York, 1973.

[40] M. D. Rusk, Korovkin type theorems for finitely defined operators, Dissertation, University of California, Riverside, 1975.

[41] Yu. A. Shashkin, The Mil'man-Choquet boundary and the theory of approximation, Functional Anal. i Prilozen., 1 (1967), no.2, 95-96.

[42] M. Stieglitz, Eine Verallgenmeinerung des Begriffs Festkonvergenz, Math. Japonica, 18 (1973), 53-70.

[43] O. Szász, Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval, J. Res. Nat. Bur. Standards, 45 (1950), 239-245.

[44] S. E. Takahasi, Bohman-Korovkin-Wulbert operators from a function space into a commutative C*-algebra for special test functions, Tôhoku Math. J., (2) 48 (1996), no. 1, 139-148.

[45] S. E. Takahasi, Bohman-Korovkin-Wulbert operators on normed spaces, J. Approx. Theory, 72 (1993), 174-184.