

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Traçado de Pás de Rotores Centrífugos  
Usando Critérios de Carregamento  
Aerodinâmico e Técnicas de Otimização**

**Autor: Fernando Marques Fernandes  
Orientador: Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho  
Co-Orientador: Prof. Dr. Waldir de Oliveira**

Itajubá, Fevereiro de 2006

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Traçado de Pás de Rotores Centrífugos  
Usando Critérios de Carregamento  
Aerodinâmico e Técnicas de Otimização**

**Autor: Fernando Marques Fernandes**

**Orientador: Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho**

**Co-Orientador: Prof. Dr. Waldir de Oliveira**

**Curso: Mestrado em Engenharia Mecânica**

**Área de Concentração: Dinâmica dos Fluidos e Máquinas de Fluxo**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Itajubá, Fevereiro de 2006  
M.G. – Brasil

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Traçado de Pás de Rotores Centrífugos  
Usando Critérios de Carregamento  
Aerodinâmico e Técnicas de Otimização**

**Autor: Fernando Marques Fernandes**

**Orientador: Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho**

**Co-Orientador: Prof. Dr. Waldir de Oliveira**

**Composição da Banca Examinadora:**

**Prof. Dr. Ramiro Gustavo Ramirez Camacho - ITA**

**Prof. Dr. Denis Rinaldi Petrucci - IEM/UNIFEI**

**Prof. Dr. Genésio José Menon - IEM/UNIFEI**

**Prof. Dr. Waldir de Oliveira - IEM/UNIFEI**

**Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho, Presidente - IEM/UNIFEI**

## **Dedicatória**

*À minha esposa, Gigi,  
e aos meus pais, Fernando e Maria Alzira.*

## **Agradecimentos**

Primeiramente, a Deus e aos seus Anjos Protetores, pois sem Eles nada seria possível.

À minha querida esposa e companheira, Gigi, que com seu carinho, sua dedicação e seu amor sempre compreendeu minha ausência, meus maus-humores e meu cansaço e foi, sem nenhuma sombra de dúvida, meu maior incentivo na realização deste trabalho.

Aos meus pais, Fernando e Maria Alzira, e minhas irmãs, Fátima e Flávia, que com seu amor e sua constante preocupação sempre me incentivaram na formação e no desenvolvimento cultural e profissional.

À minha tia, Maria Augusta, que além do carinho e da dedicação com que sempre me tratou, num ato de extremo amor doou-me uma nova vida.

À minha sogra, Nice, que com seu amor espiritual e fraternal faz com que me sinta também seu filho.

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho e Prof. Dr. Waldir de Oliveira, pela competência, dedicação, paciência e amizade.

Ao Prof. Eng. Fernando Luiz Windlin, pela confiança, quando me convidou para ministrar aulas no curso de engenharia, e pelo grande incentivo para que este mestrado fosse realizado.

Ao Prof. Manuel da Silva Valente de Almeida, grande amigo e irmão a quem serei eternamente grato pela apresentação e o encaminhamento à Universidade Federal de Itajubá.

Aos professores e amigos da Universidade Federal de Itajubá, Eli Silva, Genésio José Menon, José Juliano de Lima Júnior, Marcelo José Pirani, Osvaldo José Venturini, Ricardo Dias Martins de Carvalho, Rogério José da Silva e Sebastião Varela, pelo apoio, pela atenção, pelas aulas do curso e pelo incentivo que foram essenciais para a construção deste trabalho.

Aos queridos professores Tio Aldo Ramos Santos, Carlos Alberto Amaral Moino e Paulo Roberto Canton, pois além de ter sido seu aluno no curso de graduação, tive a oportunidade e a enorme honra de tê-los como colegas no curso de Mestrado.

Aos amigos (turma do Mestrado) Antonio Santoro, Hernandes de Souza Brandão, João Batista do Amaral Júnior, João José de Souza, Jorge Chinen, Júlio César Mendes Murat, Renato José Pinto, Marcos Galli e Ricardo Tibério, pelo permanente incentivo, colaboração, amizade, momentos de lazer e inesquecível convívio profissional e estudantil.

À Direção e aos funcionários e amigos da Universidade Santa Cecília, à Direção e aos funcionários e amigos da FEI – Fundação Educacional Inaciana Padre Sabóia de Medeiros pelo apoio e pelos maravilhosos anos de convívio profissional.

*“Ainda que eu falasse a língua dos Homens  
e falasse a língua dos Anjos, sem amor, eu nada seria”*

*Luiz Vaz de Camões*

## Resumo

**FERNANDES, F. M. (2006)**, *Traçado de Pás de Rotores Centrífugos Usando Critérios de Carregamento Aerodinâmico e Técnicas de Otimização*, Itajubá, 87p. Dissertação (Mestrado em Dinâmica dos Fluidos e Máquinas de Fluxo) - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Neste trabalho, apresenta-se um método computacional de projeto para o traçado de pás de rotores centrífugos de máquinas de fluxo geradoras. O método baseia-se na utilização de critérios de carregamento aerodinâmico e técnicas de otimização. Adota-se o modelo de escoamento bidimensional, incompressível e irrotacional, cujas soluções são obtidas numericamente através de um método de painéis retos com distribuições lineares de vórtices. As pás do rotor são consideradas infinitamente finas.

Fixados os coeficientes de pressão e de vazão do rotor, o traçado das pás resultantes é obtido pela maximização do número de Richardson local com restrições sobre um fator de forma da pá, proposto no trabalho. Tanto o número de Richardson máximo como a faixa ótima do fator de forma são calculados com as distribuições de velocidades relativas e de pressões na superfície da pá. Obteve-se uma faixa relativamente estreita do fator de forma (entre 0,8 e 0,9) para uma gama bastante variada de bombas e ventiladores centrífugos de bom desempenho com rotações específicas entre 100 e 400.

Através de diversos exemplos, verificou-se que o método proposto é capaz de recuperar o traçado das pás de rotores centrífugos reais de bom desempenho, além de modificar adequadamente aquele traçado em função de variações requeridas dos coeficientes de vazão e de pressão.

### *Palavras-chave*

Turbomáquina, Rotor Centrífugo, Traçado de Pás, Técnicas de Otimização



## **Abstract**

**FERNANDES, F. M. (2006)**, *Geometric Design of Centrifugal Impeller Blades Using Aerodynamic Loading Criteria and Optimization Techniques*, Itajubá, 87p. MSc. Dissertation - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

In this work, a computational method for the blade shape design of centrifugal impellers is presented. The method is based on the use of aerodynamic loading criteria and optimization techniques. The flow model is considered two-dimensional, incompressible and irrotational and the corresponding solutions are obtained numerically by means of a straight panel method with linear vortex distributions.

With the pressure and flow coefficients fixed, the shape design is carried out by means of the maximization of the local Richardson number subject to constraints over a shape factor, defined in this work. Both the maximum Richardson number and an optimum range for the shape factor are computed with the distributions of the relative velocities and pressures on the blade. A relatively narrow range was obtained for the shape factor (between 0,8 and 0,9) for pumps and fans with specific speeds between 100 and 400.

In various examples, one verifies that the proposed method is able to recover the blade shape of actual centrifugal impellers of good performance and also to adequately modify the blade shape in response to required variations of the flow and pressure coefficients.

### ***Keywords***

Turbomachinery, Centrifugal Impeller, Geometric Design of Blades, Optimization Techniques.

## Sumário

<b>SUMÁRIO</b>	<b>i</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>iv</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>vi</b>
<b>SIMBOLOGIA</b>	<b>vii</b>
<b>LETRAS LATINAS</b>	<b>vii</b>
<b>LETRAS GREGAS</b>	<b>viii</b>
<b>SUPERESCRITOS</b>	<b>ix</b>
<b>SUBSCRITOS</b>	<b>ix</b>
<b>ABREVIATURAS</b>	<b>x</b>
<b>SIGLAS</b>	<b>x</b>
<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUÇÃO GERAL</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução	1
1.2 Revisão Bibliográfica	3
1.3 Motivação do Trabalho	5
1.4 Objetivos do Trabalho	6
1.5 Organização do Trabalho	7
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>9</b>
<b>FORMULAÇÃO DO ESCOAMENTO POTENCIAL PARA ROTORES CENTRÍFUGOS COM PÁS INFINITAMENTE FINAS</b>	<b>9</b>
2.1 Equação do escoamento para o Plano da Grade Radial	10
2.2 Determinação do Campo de Velocidades do escoamento Potencial para o Plano da Grade Radial	12
2.3 Solução Numérica Pelo Método dos Painéis	16
2.3.1 Discretização das Pás Infinitamente Finas (PIF)	16
2.3.2 Largura $b(r)$ da Pá	18
2.3.3 Formação do Sistema de Equações Algébricas Lineares	18

2.3.4	Condição de Kutta e Condição sem Choque	20
2.3.5	Solução do Sistema de Equações Algébricas Lineares	22
2.4	Aferição do Modelo Computacional	22
<b>CAPÍTULO 3</b>		<b>23</b>
<b>PARÂMETROS DE CARREGAMENTO AERODINÂMICO</b>		<b>23</b>
3.1	Grandezas Aerodinâmicas Locais e Globais	23
3.1.1	Grandezas Aerodinâmicas Locais	24
3.1.2	Grandezas Aerodinâmicas Globais	25
3.2	Determinação do Número de Pás por Meio do Critério do Número de Richardson	27
3.2.1	Considerações Sobre o Número de Pás	27
3.2.2	Número de Richardson	29
3.3	Traçado de Pás Utilizando o Número de Richardson	34
3.4	Fator de Forma “K”	36
<b>CAPÍTULO 4</b>		<b>44</b>
<b>METODOLOGIA DE TRAÇADO DE PÁS</b>		<b>44</b>
4.1	Descrição do Problema Básico	44
4.2	Parametrização do Formato da Pá	45
4.2.1	Parâmetros de Projeto	47
4.3	Problemas Típicos de Traçado	47
4.3.1	Alguns Problemas Típicos de Traçado	48
4.3.1.1	Variar a Vazão e Fixar a Pressão	48
4.3.1.2	Variar a Pressão e Fixar a Vazão	48
4.3.1.3	Variar a Vazão e a Pressão de Forma Independente	48
4.3.1.4	Variar a Vazão e a Pressão Mantendo a Rotação Específica do Rotor (Tomando por Base a Variação da Pressão)	49
4.3.1.5	Variar a Vazão e a Pressão Mantendo o Ângulo do Escoamento Absoluto na Saída	49
4.3.1.6	Observações	49
4.4	Tratamento de Número de Pás Como Variável Real	50
4.5	Algoritmo de Otimização	51
4.6	Testes	52
<b>CAPÍTULO 5</b>		<b>66</b>
<b>RESULTADOS</b>		<b>66</b>

5.1 Resultados de Traçado de Pás-----	66
<b>CAPÍTULO 6</b> _____	<b>76</b>
<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b> _____	<b>76</b>
6.1 Conclusões-----	76
6.2 Sugestões-----	78
<b>APÊNDICE A</b> _____	<b>80</b>
<b>TÉCNICAS DE DISCRETIZAÇÃO</b> _____	<b>80</b>
A.1 Discretização das Pás-----	80
<b>APÊNDICE B</b> _____	<b>82</b>
<b>FLUXOGRAMA DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO</b> _____	<b>82</b>
B.1 Fluxograma-----	82
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> _____	<b>84</b>

## Lista de Figuras

Figura 1 - Grade radial móvel com pás de espessura desprezível e de largura variável no plano físico:(a) seção meridional e (b) seção transversal. – (retirado de Oliveira, 2001)-----	11
Figura 2 - Discretização de uma pá de referência e condição de tangência no painel j – (retirado de Oliveira, 2001)-----	17
Figura 3 - Condições de entrada (com e sem choque) e de saída (Kutta) e representação da distribuição linear de vórtices em cada painel. – (retirado de Oliveira, 2001).-----	20
Figura 4 - Forças atuando num elemento de fluido em equilíbrio dinâmico no interior de um rotor centrífugo:(a)seção meridional,(b)seção transversal (retirado de Oliveira, 2001) -----	30
Figura 5 – Esquema da distribuição radial do número de Richardson ao longo das pás de um rotor centrífugo variando o número de pás e mantendo o par $(\phi, \psi)$ na condição sem choque. (As distribuições se elevam á medida que o número de pás diminui.) -----	35
Figura 6 – Distribuição triangular hipotética da densidade de vórtices -----	39
Figura 7 – Comportamento hipotético do carregamento da pá de acordo com a variação do fator de forma -----	39
Figura 8 – Número de Richardson ( $Ri$ ) e fator de forma ( $K$ ) em função da rotação específica ( $n_{qApá}$ ) -----	43
Figura 9 – Representação esquemática de um rotor com pá infinitamente fina-----	46
Figura 10 – Funções de forma a) funções de índice par b) funções de índice ímpar-----	46
Figura 11 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}=1$ e grau polinômio 1 -----	54
Figura 12 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}=1$ e grau polinômio 2 -----	54
Figura 13 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}=1$ e grau polinômio 3 -----	55
Figura 14 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}=1$ e grau polinômio 5 -----	55
Figura 15 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}=1$ e grau polinômio 7 -----	56
Figura 16 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}=1$ e grau polinômio 9 -----	56
Figura 17 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}=1,1$ e grau polinômio 1-----	58
Figura 18 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}=1,1$ e grau polinômio 2-----	58
Figura 19 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}=1,1$ e grau polinômio 3-----	59
Figura 20 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}=1,1$ e grau polinômio 5-----	59

Figura 21 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}=1,1$ e grau polinômio 7	60
Figura 22 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}=1,1$ e grau polinômio 9	60
Figura 23 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}= 0,9$ e grau polinômio 1	62
Figura 24 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}= 0,9$ e grau polinômio 2	62
Figura 25 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}= 0,9$ e grau polinômio 3	63
Figura 26 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}= 0,9$ e grau polinômio 5	63
Figura 27 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}= 0,9$ e grau polinômio 7	64
Figura 28 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001), $f_{vp}= 0,9$ e grau polinômio 11	64
Figura 29 – Formato de pás, máquina de Kearton (1933) com $f_{vff} = 1,0$	68
Figura 30 – Pressão em função do Raio, máquina de Kearton (1933) com $f_{vff} = 1,0$	68
Figura 31 – Formato de pás, máquina de Bomes I (1963) com $f_{vff} = 1,0$	69
Figura 32 – Pressão em função do Raio, máquina de Bomes I(1963) com $f_{vff} = 1,0$	69
Figura 33 – Formato de pás, máquina de Bomes II (1963) com $f_{vff} = 1,0$	70
Figura 34 – Pressão em função do Raio, máquina de Bomes II(1963) com $f_{vff} = 1,0$	70
Figura 35 – Formato de pás, máquina de Bomes III (1963) com $f_{vff} = 1,0$	71
Figura 36 – Pressão em função do Raio, máquina de Bomes III(1963) com $f_{vff} = 1,0$	71
Figura 37 – Formato de pás, máquina de Reddy & Kar (1971) com $f_{vff} = 1,0$	72
Figura 38 – Pressão em função do Raio, máquina de Reddy&Kar (1971) com $f_{vff} = 1,0$	72
Figura 39 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001) com $f_{vff} = 1,0$	73
Figura 40 – Pressão em função do Raio, máquina de Oliveira (2001) com $f_{vff} = 1,0$	73
Figura 41 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001) com $f_{vp} = 1,0$	74
Figura 42 – Pressão em função do Raio, máquina de Oliveira (2001) com $f_{vp} = 1,0$	74

## Lista de Tabelas

Tabela 1 - Fórmulas clássicas para determinação do número de pás de rotores centrífugos (retirado de Oliveira, 2001)-----	29
Tabela 2 - Dimensões principais dos rotores centrífugos de trabalhos clássicos da literatura (retirado de Oliveira, 2001)-----	35
Tabela 3 – Número de Richardson ( $Ri$ ) para rotores centrífugos de trabalhos clássicos da literatura -----	36
Tabela 4 – Fator de forma ( $K$ ) para rotores centrífugos de trabalhos clássicos da literatura---	40
Tabela 5 – Rotação específica, número de Richardson ( $Ri$ ) e fator de forma ( $K$ ) para rotores centrífugos de trabalhos clássicos da literatura -----	42
Tabela 6 – Características das pás da máquina de Oliveira (2001) para $f_{vp} = 1$ -----	53
Tabela 7 – Características das pás da máquina de Oliveira (2001) para $f_{vp} = 1,1$ -----	57
Tabela 8 – Características das pás da máquina de Oliveira (2001) para $f_{vp} = 0,9$ -----	61
Tabela 9 – Características das pás da máquina de Kearton (1933) com $f_{vff}=1$ -----	68
Tabela 10 – Características das pás da máquina de Bommers I (1963) com $f_{vff}=1$ -----	69
Tabela 11 – Características das pás da máquina de Bommers II (1963) com $f_{vff}=1$ -----	70
Tabela 12 – Características das pás da máquina de Bommers III (1963) com $f_{vff}=1$ -----	71
Tabela 13 – Características das pás da máquina de Reddy & Kar (1971) com $f_{vff}=1$ -----	72
Tabela 14 – Características das pás da máquina de Oliveira (2001) com $f_{vff}=1$ -----	73
Tabela 15 – Características das pás da máquina de Oliveira (2001) com $f_{vp}=1$ -----	74

## Simbologia

### Letras Latinas

$A_{kj}$	Elementos da matriz de influência.
$b$	Largura da pá
$B(r)$	Função de variação da largura da pá no plano da grade radial.
$B_k$	Elementos do vetor independente.
$c$	Velocidade absoluta.
$D$	Diâmetro.
$fe_4$	Fator de estrangulamento geométrico na entrada da pá.
$fe_5$	Fator de estrangulamento geométrico na saída da pá.
$G$	Grandeza genérica de uma medida indireta.
$i$	Unidade imaginária $i = (-1)^{1/2}$ .
$\Im m$	Parte imaginária do argumento complexo.
$K$	Fator de forma.
$K(\zeta, \zeta')$	Parte imaginária da função complexa.
$\ell$	Corda do perfil (pá) no plano físico.
$n_{qA_{pá}}$	Rotação específica para o rotor.
$N$	Número de painéis.
$N_{pá}$	Número de pás.
$p$	Pressão.
$P$	Pressão adimensional.
$Q$	Vazão volumétrica.
$q_{sg}$	Quociente da série geométrica (fator de discretização).
$r$	Coordenada radial no plano $z$ , raio genérico.



R	Coordenada radial adimensional; raio de curvatura.
$\Re$	Parte real do argumento complexo.
Ri	Número de Richardson
s	Coordenada natural da pá; coordenada da linha de singularidades; espaçamento.
S	Coordenada natural adimensional.
T	Domínio; passo adimensional.
u	Velocidade circunferencial de um ponto de raio r do rotor.
w	Velocidade relativa.
W	Velocidade relativa adimensional.
x, y	Coordenadas cartesianas retangulares no plano z da grade linear.
$x_1, x_2, x_3$	Sistema de eixos coordenados da grade radial ou do rotor.
Y	Trabalho específico (energia por unidade de massa).
$Y_{pá}$	Trabalho específico do rotor.
z	Ponto no plano complexo da grade linear, $z = x + iy$ .

## Letras Gregas

$\alpha$	Ângulo do escoamento absoluto; ângulo do painel em relação ao eixo x.
$\beta$	Ângulo do escoamento relativo; ângulo geométrico da pá; ângulo do painel.
$\gamma$	Densidade de vórtices.
$\Gamma$	Circulação; densidade de vórtices adimensional.
$\delta_M$	Ângulo de montagem da pá.
$\Delta$	Ângulo.
$\Delta W$	Diferença de velocidades relativas adimensionais
$\zeta$	Variável complexa designativa da posição genérica das singularidades distribuídas.
$\eta, \xi$	Coordenadas de um ponto do contorno do perfil (pá) no plano complexo.
$\theta$	Argumento da variável complexa z; ângulo polar.
$\kappa$	Contorno (fronteira) do perfil (pá).
$\mu$	Fator de deficiência de potência ("Slip factor"); viscosidade absoluta.
$\xi$	Coordenada.

$\pi$	3,14159265...
$\rho$	Massa específica.
$\phi$	Coefficiente de vazão.
$\Phi$	Potencial de velocidades.
$\psi$	Coefficiente de pressão.
$\omega$	Velocidade angular do rotor, $\omega = 2\pi n$ .
$\Omega$	Coefficiente de pré-circulação.

## Superescritos

-	Referente ao lado de sucção.
+	Referente ao lado de pressão.
*	Referente ao número ótimo de pás, referente à grandeza adimensional.
L	Limite inferior
U	Limite superior

## Subscritos

o	Referente ao centro da grade radial.
4	Referente às condições na entrada da pá.
5	Referente às condições na saída da pá.
$\infty$	Referente à distância longe da grade, ou ao número infinito de pás.
ba	Bordo de ataque.
bf	Bordo de fuga.
B	Referente a perfil base.
c	Referente ao ponto de controle.
j	Referente ao ponto de controle genérico.
k	Referente à grade elementar genérica, ou painel correspondente.

m	Referente à componente meridional, ou à linha média.
MÍN	Referente a mínimo.
MÁX	Referente a máximo.
ÓT	Referente às condições ótimas ou de projeto.
p	Referente ao lado de pressão da pá.
pá	Referente à pá, ou ao rotor.
P	Referente a perfil perturbado.
s	Referente a induzido, ou à estagnação, ou ao lado de sucção da pá, ou à superior.
$\theta$	Referente à componente circunferencial.

## Abreviaturas

ARC	Referente à pá em formato de arco de círculo.
fvv	Fator de variação de vazão.
fvp	Fator de variação de pressão.
fvff	Fator de variação do fator de forma.
LOG	Referente à pá em formato de espiral logarítmica.
PIF	Referente à pá infinitamente fina.

## Siglas

BOM	Indica pás sem grandes inflexões de formato
IEM	Instituto de Engenharia Mecânica
PIF	Referente à pá infinitamente fina.
RUIM	Indica pás com grandes inflexões de formato

## Capítulo 1

# INTRODUÇÃO GERAL

## 1.1 INTRODUÇÃO

As turbomáquinas denominadas geradoras (bombas hidráulicas, ventiladores, sopradores e turbocompressores) são utilizadas nos mais diversos tipos de aplicações aeronáuticas, automotivas e industriais. As bombas hidráulicas e ventiladores constituem uma classe importante de turbomáquinas, em que o escoamento é considerado incompressível, sendo denominadas turbomáquinas hidráulicas.

Com relação à configuração do escoamento principal no rotor, as turbomáquinas geradoras são normalmente classificadas em radiais, diagonais e axiais, sendo que, salvo algumas exceções, nas turbomáquinas radiais geradoras, o sentido do escoamento ao passar pelo interior do rotor é centrífugo. Desta forma, por exemplo, ao se analisar uma turbomáquina geradora intitulada “ventilador radial centrífugo”, essa denominação não pode ser considerada como redundante, mas sim como indicação de terminologia completa. Contudo, o termo “rotor centrífugo” será empregado no presente trabalho para designar rotores de turbomáquinas geradoras de baixa rotação específica com fluxo predominantemente radial.

A determinação do número e formato das pás de um rotor centrífugo é um dos aspectos mais importantes do projeto. Frequentemente, na fase inicial do projeto, essa determinação se orienta por expressões empíricas (Pfleiderer e Petermann, 1979). Estas expressões relacionam parâmetros geométricos tais como ângulos e diâmetros de entrada e saída de pás e sua utilização depende fortemente da experiência do projetista na adoção de diversos parâmetros empíricos. Por outro lado, existem hoje metodologias disponíveis para o projeto de pás mais gerais, baseadas em modelagens complexas do escoamento (Kim e Park, 2000). Essas metodologias normalmente são inadequadas à fase inicial de projeto devido a dificuldades de implementação e ao seu alto custo computacional. Aparentemente, é escassa a literatura sobre métodos de traçado de pás com abordagens intermediárias entre esses dois extremos, havendo poucas opções para o projetista em termos de facilidade de implementação e custo computacional razoável.

Dentro desse contexto, o presente trabalho trata do desenvolvimento de um método de traçado de pás de rotores centrífugos que seja relativamente simples e de baixo custo computacional, mas que ainda seja capaz de tratar as interações principais entre geometria das pás e escoamento, mesmo que de maneira semi-empírica. Para isso, foi adotado um modelo do escoamento bidimensional, incompressível ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{c} = 0$ ), irrotacional (ou potencial,  $\vec{\nabla} \times \vec{c} = 0$ ) através de grades radiais de turbomáquinas com pás infinitamente finas e com variação de largura dessas pás. Como os efeitos viscosos são desconsiderados no modelo, o traçado realista do formato das pás é orientado por critérios semi-empíricos de carregamento aerodinâmico com o auxílio de técnicas de otimização.

O modelo de escoamento potencial recebe uma formulação integral, baseada no método das singularidades. As soluções do modelo são obtidas numericamente, através de um método de painéis com distribuições lineares de vórtices sobre as pás.

O principal critério de carregamento consiste em maximizar o número de Richardson ( $Ri$ ) local, que já se demonstrou adequado para identificar o número ótimo de pás com geometria fixa (Oliveira *et al.*, 2002). Buscando variar a geometria juntamente com o número de pás, impõem-se restrições sobre um certo fator de forma ( $K$ ) para caracterizar distribuições adequadas de carregamento aerodinâmico ao longo da pá. Tal fator de forma é proposto e avaliado no presente trabalho. A maximização de  $Ri$  sujeita a restrições sobre  $K$  e sobre os parâmetros de funcionamento do rotor é efetuada por intermédio de um código de otimização da biblioteca IMSL (DUMPOL).

## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O escoamento potencial em rotores centrífugos foi analisado inicialmente por Schulz (1928) e Busemann (1928) que empregaram o método da transformação conforme na solução do problema direto. Seus resultados foram apresentados para uma larga faixa de variação de parâmetros geométricos, visando à aplicação em bombas centrífugas.

Posteriormente Stauffer (1936) e Betz e Flügge-Lotz (1938) aplicaram o método das singularidades, que se mostrou mais conveniente em virtude da sua maior facilidade de aplicação a casos gerais e maior eficácia na solução. Restringindo suas análises a pás infinitamente finas, estes autores trataram o problema de determinação da forma das pás (problema indireto), utilizando uma distribuição de vórtices como função da coordenada radial.

Isay (1954) propôs soluções, cobrindo os casos de pás infinitamente finas e pás com espessura finita, sendo consideradas em ambos os casos as situações de grade móvel isolada e grade móvel precedida de sistema diretor, sendo que em todas as suas análises foi utilizada uma distribuição única de vórtices sobre o contorno da pá.

Schilhansl (1965) estendeu a teoria das grades radiais à análise de rotores de fluxo misto, considerando as superfícies de corrente do escoamento como de revolução. Analisou-se desta forma o escoamento potencial em planos mapeados por transformação conforme, cuja geometria era a de grade radiais com pás de espessura finita. Em cada plano, aplicou-se o método das singularidades.

Mais adiante, Salomon (1972) baseou-se em critérios análogos aos de Isay (1954), utilizando uma distribuição única de vórtices sobre o contorno da pá, para desenvolver um método generalizado, visando cobrir diversos casos de interesse. Em termos de aplicação, porém, Salomon (1972) se restringiu ao problema direto de grades isoladas com pás infinitamente finas, de traçado logarítmico.

Henn (1972) estudou a influência do número finito de pás nas máquinas de fluxo, e comparou diversos métodos para o cálculo do fator de deficiência de potência, incluindo entre eles o método das singularidades.

Seguindo sugestões do trabalho de Salomon (1972), Ferreira (1973) atacou o problema indireto, que seria determinar a forma das pás dadas certas características aerodinâmicas pretendidas. Considerou somente pás infinitamente finas e através de alguns exemplos, obteve formas de pás bastante próximas à forma logarítmica.

Uma das características salientes do método das singularidades, para todas as aplicações e não somente no caso de grades radiais, é o fato de que as expressões para o campo de velocidades induzidas são escritas invariavelmente na forma de integrais. Os integrandos dessas expressões constituem funções analíticas em todos os pontos do escoamento, com exceção dos pontos em que se localizam as singularidades, normalmente sobre o contorno dos obstáculos. No entanto, o cálculo das velocidades induzidas deve ser feito exatamente nestes pontos, visando à aplicação da condição de contorno. Desta forma, grandes dificuldades numéricas na computação aparecem no campo das velocidades induzidas.

Para superar as dificuldades matemáticas e aplicar o método das singularidades na solução exata do escoamento potencial sobre obstáculos de formato arbitrário, Hess-Smith (1966) desenvolveram um método numérico apropriado, chamado de “método dos painéis”. De acordo com este método, a superfície dos obstáculos é discretizada em elementos, ou painéis, sobre os quais se distribuem singularidades de intensidade a se determinar, porém de uma forma conhecida. Com este procedimento as dificuldades numéricas ficam superadas, e as intensidades das singularidades são determinadas resolvendo-se um sistema de equações lineares.

Diante do exposto, Manzanares Filho (1982) decidiu analisar o escoamento potencial em grades radiais utilizando o conceito de singularidades na formulação e estendendo o método dos painéis na solução. Posteriormente, Manzanares Filho e Amorim (1985), utilizaram distribuições de vórtices para o cálculo do escoamento em grades lineares pelo método dos painéis.

A consideração da variação de largura na formulação exata do escoamento potencial através do método das singularidades introduz termos de campo que impedem uma representação puramente de contorno do campo de velocidades, exceto em casos particulares de variação de largura. Buscando contornar essas dificuldades no caso de rotores centrífugos de largura variável, com pás infinitamente finas, Manzanares Filho e Oliveira (1992) introduziram um procedimento para aproximar a formulação exata por uma formulação integral, linear e exclusivamente de contorno, para variações arbitrárias de largura. Resultados numéricos foram comparados com resultados publicados anteriormente, concluindo-se pela eficácia do método para vazões próximas à vazão sem choque.

Oliveira *et al.* (2002) apresentaram um critério para a determinação do número ótimo de pás de rotores centrífugos de geometria arbitrária, porém fixa. Com base na distribuição de velocidades relativas na superfície da pá, definiram um parâmetro adimensional denominado número de Richardson. Variando o número de pás em diversos casos reais, observaram que o

maior valor do número de Richardson máximo local indicava com boa precisão o número de pás mais adequado para rotores com boas características hidro ou aerodinâmicas.

### 1.3 MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

Do ponto de vista tecnológico, a maior motivação para realização deste trabalho está na vasta aplicação das turbomáquinas com rotores centrífugos e na grande influência que o número e o formato das pás exerce sobre as características de funcionamento desses rotores.

Do ponto de vista metodológico, a base motivadora do presente trabalho está amparada na literatura técnica que relata a possibilidade de, em determinadas condições, o escoamento potencial pode representar adequadamente certas características reais do escoamento no interior de rotores centrífugos Adler e Krimerman (1980). Essa afirmação, bem como o estudo de trabalhos anteriores analisados (vide revisão bibliográfica), serviram de estímulo para o desenvolvimento de diversas atividades realizadas neste trabalho, visando à obtenção de um método de traçado de pás simplificado e de baixo custo computacional. Um método com tais características é típico da formulação integral de contorno via singularidades, sendo que a solução numérica pode ser obtida facilmente pelo método dos painéis.

Nesse sentido, o critério proposto por Oliveira (2001) e Oliveira *et. al.* (2002), de maximização do número de Richardson ( $Ri$ ), foi inicialmente tomado como critério de projeto para a determinação do formato das pás. Todavia, verificou-se que, apesar de se tratar de um bom critério para identificação do número ótimo de pás *com formato fixo*, a maximização do número de Richardson local *com parâmetros de funcionamento fixos* levava sempre a soluções com *uma única pá* de formato totalmente inadequado, com oscilações de curvatura e comprimentos impraticáveis. Além disso, os valores dos números de Richardson máximos calculados para rotores centrífugos reais de diferentes rotações específicas situaram-se em uma faixa muito ampla (conforme será apresentado posteriormente no capítulo 3), não sendo portanto um bom parâmetro para ser utilizado como restrição no traçado de pás. Essas evidências motivaram um estudo para definição de um novo parâmetro adimensional, denominado Fator de Forma ( $K$ ), que tivesse uma faixa mais estreita para todos os rotores reais acima mencionados e que, portanto, pudesse acompanhar a maximização do número de Richardson garantindo traçados de pás viáveis para qualquer número de pás.



## 1.4 OBJETIVOS DO TRABALHO

O principal objetivo do presente trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia para o traçado de pás de rotores centrífugos de complexidade e custo computacional relativamente baixos em relação às metodologias mais complexas baseadas em Mecânica dos Fluidos Computacional. Essa metodologia deve ser adequada a etapas preliminares de projeto e, apesar de simplificada, deve ser capaz de traduzir adequadamente as variações da geometria e do número de pás em resposta às variações dos parâmetros de funcionamento de um rotor centrífugo. Para isso, os seguintes objetivos intermediários estão contemplados no trabalho:

1) Apresentar uma formulação integral aproximada, exclusivamente de contorno e linear, para o escoamento potencial, bidimensional e incompressível em rotores centrífugos de turbomáquinas com pás infinitamente finas e de largura variável, sendo a formulação feita diretamente no plano da grade radial, evitando-se transformações intermediárias (Manzanares Filho, 1982 e Manzanares Filho e Oliveira, 1992).

2) Apresentar o procedimento de solução numérica da equação integral de Fredholm de primeira espécie, resultante da formulação, que consiste em um método de painéis retos com distribuições lineares da densidade de vórtice em cada painel (Manzanares Filho, 1982 e Manzanares Filho e Oliveira, 1992).

3) Discutir o critério de maximização do número de Richardson (Oliveira, 2001) no contexto do traçado de pás.

4) Propor e discutir um parâmetro adimensional denominado “Fator de Forma” (K) a ser utilizado como critério de carregamento aerodinâmico para o traçado de pás, na forma de uma faixa de restrição à maximização do número de Richardson.

5) Descrever a metodologia de traçado de pás, baseada em técnicas de otimização, definindo diversos problemas típicos de traçado.

6) Apresentar um procedimento simplificado de parametrização do formato de pás infinitamente finas adequado ao emprego de algoritmos de otimização.

7) Adaptar uma rotina computacional correspondente aos itens 1 e 2 acima a fim de tratar o número de pás como uma variável contínua — um número real em vez de inteiro —, de modo a considerá-lo como variável de projeto, junto com os coeficientes de parametrização geométrica, em algoritmos de otimização de variáveis contínuas. *Nota:* no presente trabalho foi utilizado um algoritmo de busca direta implementado com o uso da sub-rotina DUMPOL da biblioteca IMSL que acompanha o compilador do Fortran PowerStation - versão 4.0.

8) Apresentar testes preliminares da metodologia de traçado com o intuito de aferir um número mínimo adequado de coeficientes da parametrização geométrica.

9) Apresentar resultados de aplicação da metodologia, mostrando a influência da variação moderada ( $\leq 10\%$ ) dos coeficientes de pressão e de vazão e do fator de forma sobre o traçado das pás, no caso de um dos problemas típicos em que a rotação específica do rotor é mantida constante.

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Neste capítulo 1 — Introdução Geral —, foram apresentadas algumas considerações gerais sobre turbomáquinas radiais e o escoamento no interior de rotores centrífugos, para justificar o emprego da teoria potencial neste trabalho. É apresentada uma revisão bibliográfica sobre trabalhos desenvolvidos por diversos autores que serviram de base para o trabalho atual. Alguns comentários são feitos a respeito da motivação, os objetivos e a organização do trabalho.

No capítulo 2 — Formulação do Escoamento Potencial para Rotores Centrífugos com Pás Infinitamente Finas —, é apresentada a formulação do escoamento potencial em rotores centrífugos através do método das singularidades e o método de solução numérica — método dos painéis.

No capítulo 3 — Parâmetros de Carregamento Aerodinâmico —, são apresentadas e discutidas as grandezas aerodinâmicas locais e globais do escoamento, o critério de maximização do “Número de Richardson (Ri)”, e o “Fator de Forma (K)”, bem como algumas considerações sobre sua utilização.

No capítulo 4 — Metodologia de Traçado de Pás —, é definido o problema básico que trata da maximização do número de Richardson máximo na condição sem choque, com restrições relativas ao ponto de funcionamento (coeficiente de pressão e de vazão) e ao fator de forma descrito no capítulo anterior. É apresentada a parametrização do formato da pá e a definição dos parâmetros de projeto. Descreve-se alguns problemas típicos de traçado, a forma utilizada para tratamento de pás como variável real, os algoritmos de otimização utilizados, com códigos disponíveis na biblioteca IMSL. Testes são efetuados para definir o grau do polinômio da parametrização geométrica (número de coeficientes menos 1).

No capítulo 5 — Resultados —, são apresentados alguns resultados de traçado de pás pelo presente método com comentários referentes ao número de pás, número de Richardson ( $R_i$ ) e Fator de Forma ( $K$ ) para as máquinas relacionadas no presente trabalho.

No capítulo 6 — Conclusões e Sugestões —, são apresentadas as principais conclusões extraídas do trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros relacionados aos assuntos abordados no presente trabalho.

No Apêndice A — Técnicas de Discretização —, são apresentadas as técnicas de discretização utilizadas no presente trabalho.

No Apêndice B — Fluxograma do Processo de Otimização —, é apresentado o fluxograma que descreve os passos do processo de otimização utilizado no presente trabalho.

## Capítulo 2

# FORMULAÇÃO DO ESCOAMENTO POTENCIAL PARA ROTORES CENTRÍFUGOS COM PÁS INFINITAMENTE FINAS

Neste capítulo, é apresentada a formulação para o cálculo do escoamento potencial e incompressível em grades radiais de turbomáquinas. A formulação apresentada considera a geometria completa da grade radial, incluindo a variação de largura; todavia, as pás são consideradas infinitamente finas. O cálculo das características do escoamento é feito no próprio plano da grade (plano físico).

Devido à aproximação feita para as integrais de campo oriundas da variação de largura do rotor, a formulação integral torna-se linear e exclusivamente de contorno na forma de uma equação integral de Fredholm de primeira espécie.

A solução numérica da formulação integral é obtida pelo método dos painéis sendo que são utilizados painéis retos. Admite-se uma distribuição linear de vórtices em cada painel da linha representativa discretizada da pá.

## 2.1 EQUAÇÃO DO ESCOAMENTO PARA O PLANO DA GRADE RADIAL

A Figura 1 representa o esquema de uma grade radial móvel (rotor centrífugo) com perfis (pás) de espessura infinitamente fina e de largura,  $b(r)$ , variável. A grade é composta por um número arbitrário de perfis idênticos e igualmente espaçados entre si, com uma corda de comprimento  $\ell$  e ângulo de montagem  $\delta_M$  em relação ao eixo  $x_1$ .

O escoamento absoluto através da grade é considerado incompressível e potencial. A componente axial da velocidade absoluta,  $c_a$ , é desprezada e as superfícies de corrente, tais como aquela representada por S na Figura 1, são consideradas axialmente simétricas, de modo que o escoamento sobre essas superfícies possa ser tratado como bidimensional.

Com as hipóteses anteriormente estabelecidas para o escoamento absoluto, e considerando a equação da continuidade desse escoamento, resulta, para o plano da grade radial, uma equação diferencial do tipo Poisson para o potencial total de velocidades,  $\Phi = \Phi(r, \theta)$ , com  $\vec{\nabla}\Phi = \vec{c}$ .

Desta forma, o problema matemático em questão é colocado na seguinte forma:

### Equação diferencial:

$$\nabla^2\Phi = B(r)c_r \quad (2.1)$$

sendo

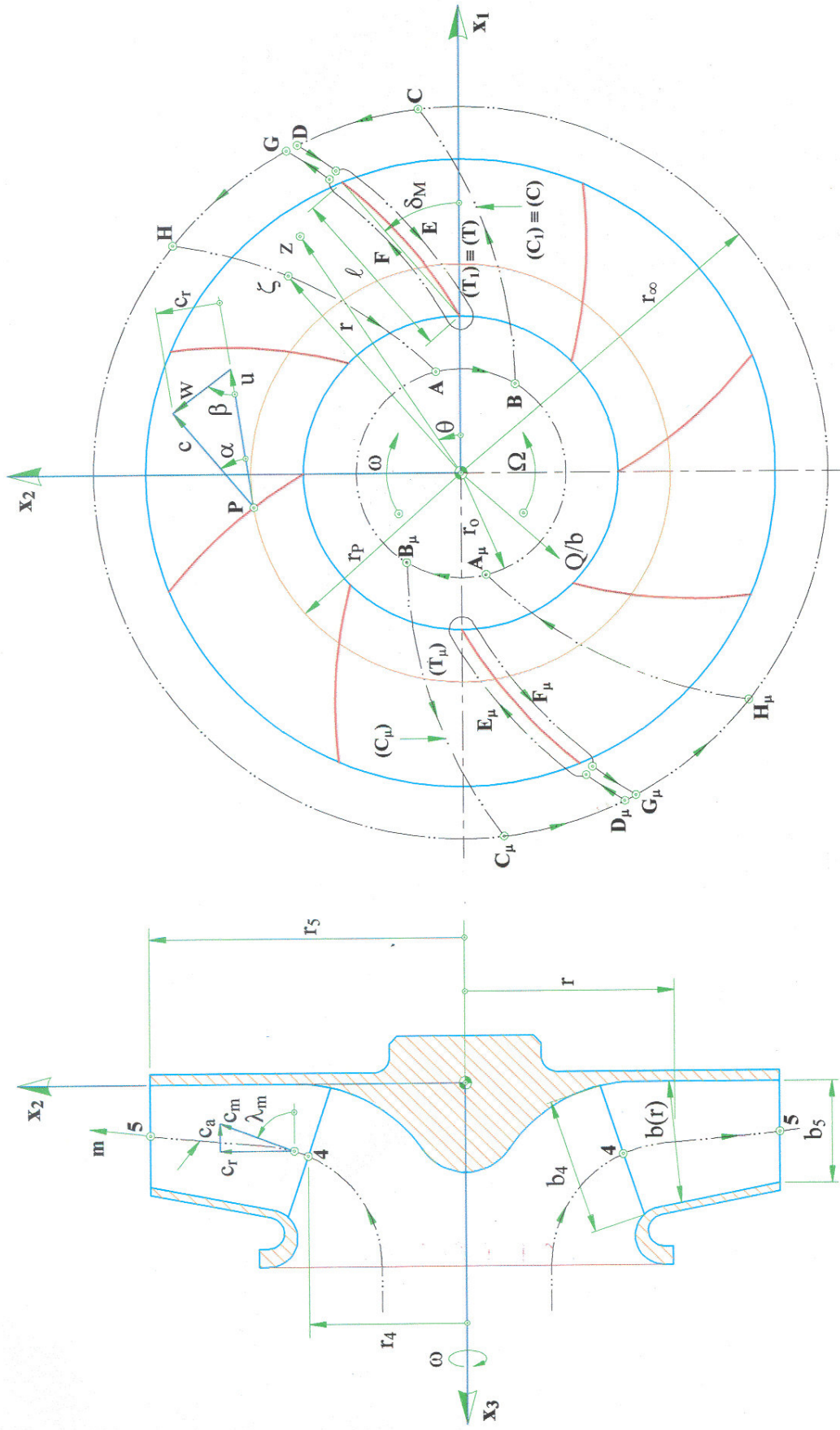
$$B(r) = -\frac{1}{b(r)} \frac{db(r)}{dr} \quad (2.2)$$

### Condições de contorno:

As condições de contorno para o potencial de velocidades,  $\Phi$ , conforme a Figura 1, são dadas por:

$$\text{Antes das pás:} \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=0} = c_{r4} \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right|_{\theta=0} = c_{\theta4} \quad (2.3)$$

$$\text{Após as pás:} \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=\infty} = c_{r5} \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right|_{\theta=\infty} = c_{\theta5} \quad (2.4)$$



(a) **(a)** seção meridional e (b) seção transversal. – (retirado de Oliveira 2001)

(b) **(b)** Grade radial móvel com pás de espessura desprezível e de largura variável no plano físico:

Do mesmo modo, para a linha representativa da pá, contorno ( $\kappa$ ), tem-se:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{(\kappa)} = w_n|_{(\kappa)} = u_n \quad (2.5)$$

As componentes das velocidades absolutas antes das pás, ( $c_{r4}, c_{\theta4}$ ), e após as pás, ( $c_{r5}, c_{\theta5}$ ), da grade linear móvel são consideradas uniformes.

Se a grade radial é estacionária em relação a um referencial inercial, e gira com uma velocidade angular  $\bar{\omega}$ , as velocidades absoluta,  $\bar{c}$ , e relativa,  $\bar{w}$ , relacionam-se por:

$$\bar{c} = \bar{u} + \bar{w} \quad (2.6)$$

onde  $\bar{u} = \bar{\omega} \times \bar{r}$  é a velocidade circunferencial (velocidade de condução) da grade radial.

## 2.2 DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADES DO ESCOAMENTO POTENCIAL PARA O PLANO DA GRADE RADIAL

Devido à periodicidade do escoamento, o plano da grade radial pode ser dividido em uma série de domínios ( $T_\mu$ ), com  $\mu = 1, 2, \dots, N_{pá}$ , idênticos ao domínio ( $T_1$ )  $\equiv$  ( $T$ ), cujo contorno ( $C_1$ )  $\equiv$  ( $C$ ) envolve uma pá de referência (Figura 1). A forma integral da equação diferencial (2.1) é determinada pela segunda identidade de Green. Para um ponto  $P$  pertencente ao domínio ( $T$ ), obtém-se, conforme Manzanares Filho e Oliveira (1992), o seguinte:

$$2\pi\bar{c}(z) = \oint_{(C)} G(z, \zeta') ds' + \iint_{(T)} F(z, z') dx' dy' \quad (2.7)$$

onde

$$G(z, \zeta') = (c_n + ic_s)K(z, \zeta') \quad (2.8)$$

$$K(z, \zeta') = \frac{N_{pá} z^{N_{pá}-1}}{z^{N_{pá}} - \zeta'^{N_{pá}}} \quad (2.9)$$

e

$$F(z, z') = B(r) c_r(r, \theta) K(z, z') \quad (2.10)$$

Nas equações anteriores,  $\bar{c}(z) = (c_r - ic_\theta)\exp(-i\theta)$  é a velocidade complexa conjugada,  $c_n$  a componente da velocidade absoluta normal ao contorno no sentido do interior do domínio (T),  $c_s$  a componente da velocidade absoluta tangente ao contorno (C) no sentido tal que o interior fica sempre à esquerda ao longo do percurso,  $z$  e  $\zeta$  os pontos de cálculo e,  $z'$  e  $\zeta'$  os pontos de integração, respectivamente, em (T) e em (C).

A integral de contorno na Equação (2.7) pode ser decomposta em integrais referentes ao seu caminho de integração. As integrais nos trechos BC e DE anulam-se, respectivamente, com as integrais nos trechos HA e FG. A integral no trecho AB é considerada no limite  $r_0 \rightarrow 0$ , obtendo-se:

$$I_{AB} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_A^B G(z, \zeta') ds' = \frac{2\pi}{Z} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 (c_r - ic_\theta) \quad (2.11)$$

As integrais nos trechos CD e GH são consideradas no limite  $r_\infty \rightarrow 0$ , resultando:

$$I_{CD} + I_{GH} = 0 \quad (2.12)$$

A integral no trecho EF (contorno ( $\kappa$ ) da pá), correspondente ao percurso na linha representativa da pá de referência, é dada por:

$$I_{EF} = \oint_{(\kappa)} G(z, \zeta') ds' \quad (2.13)$$

Considerando as Equações (2.11), (2.12) e (2.13), a integral de contorno da Equação (2.7) torna-se em:

$$\oint_{(C)} G(z, \zeta') ds' = \frac{2\pi}{Z} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 (c_r - ic_\theta) + \oint_{(\kappa)} G(z, \zeta') ds' \quad (2.14)$$



Na presente formulação, será adotado para  $c_r(z')$  o valor médio da velocidade meridional do escoamento, obtido por meio da equação integral da continuidade, para o rotor centrífugo com pás de espessura infinitamente finas, ou seja:

$$c_r(z') \cong c_m(z') = \frac{Q}{2\pi r' b(r')} \quad (2.15)$$

Com essa aproximação, e considerando os limites de (T) com  $r_o \rightarrow 0$  e  $r_\infty \rightarrow \infty$ , obtém-se o seguinte resultado:

$$\iint_{(T)} F(z, z') dx'dy' \cong \frac{Q}{z b(r)} - \frac{2\pi}{z} \lim_{r_o \rightarrow 0} r_o c_r \quad (2.16)$$

Definindo-se a pré-circulação anti-horária como sendo:

$$\Gamma_o = \lim_{r_o \rightarrow 0} 2\pi r_o c_\theta \quad (2.17)$$

e considerando as Equações (2.14), (2.16) e (2.17), a Equação (2.7) torna-se em:

$$\bar{c}(z) \cong \frac{Q/b(r) - i\Gamma_o}{2\pi z} + \frac{1}{2\pi} \oint_{(\kappa)} G(z, \zeta') ds' \quad (2.18)$$

A formulação da equação integral (2.18) é linear e com singularidades de perturbação apenas na linha da pá. A diferença entre essa formulação e o caso de grade puramente radial ( $b = \text{constante}$ ) está no termo fonte, cuja intensidade passa a variar com a largura da pá, segundo o termo  $Q/b(r)$ .

No caso de pás infinitamente finas, a integral de contorno, Equação (2.14), pode ser reduzida em uma integral de linha estendendo-se do bordo de ataque,  $s_4$ , ao bordo de fuga,  $s_5$ . Para isso, considera-se a descontinuidade na velocidade normal na linha da pá nula e a descontinuidade na velocidade tangencial equivalente à densidade de vórtices  $\gamma(\zeta)$ . Sendo  $\zeta$  um ponto de cálculo genérico sobre a pá, a velocidade média na linha da pá,  $\bar{c}(\zeta)$ , é calculada fazendo  $z = \zeta$  na Equação (2.18) e interpretando a integral no sentido do valor principal de Cauchy. Com isso, resulta:

$$\bar{c}(\zeta) \cong \frac{Q/b(r) - i\Gamma_0}{2\pi\zeta} + \frac{i}{2\pi} \int_{s_4}^{s_5} \gamma(\zeta') K(\zeta, \zeta') ds' \quad (2.19)$$

Considerando a descontinuidade na velocidade tangencial,  $\pm \gamma/2$ , típica de qualquer distribuição de vórtices, as velocidades nos lados de sucção (+) e de pressão (-) da pá são

$$\bar{c}^\pm(\zeta) = \bar{c}(\zeta) \mp i \frac{\gamma(\zeta)}{2} e^{-i(\theta-\beta)} \quad (2.20)$$

onde  $\beta$  é o ângulo da pá (Figura 1).

A velocidade relativa complexa conjugada é dada por  $\bar{w}(\zeta) = \bar{c}(\zeta) - \bar{u}(\zeta)$ , sendo  $\bar{u} = i\omega r \exp(-i\theta)$  a velocidade complexa conjugada de condução do rotor. A distribuição de vórtices,  $\gamma(\zeta)$ , é determinada pela condição de tangência da velocidade relativa média sobre a pá. Essa condição é representada por:

$$\Im \left\{ i [\bar{c}(\zeta) - \bar{u}(\zeta)] e^{i(\theta-\beta)} \right\} = 0 \quad (2.21)$$

Combinando (2.20) e (2.21), resulta:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{s_4}^{s_5} \gamma(\zeta') \Omega(\zeta, \zeta') ds' \cong \frac{Q}{2\pi r b(r)} \cos \beta - \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \sin \beta - \omega r \sin \beta \quad (2.22)$$

onde:

$$\Omega(\zeta, \zeta') = \Im \left[ K(\zeta, \zeta') e^{i(\theta-\beta)} \right] \quad (2.23)$$

A Equação (2.22) é uma equação integral de Fredholm de primeira espécie para a função incógnita  $\gamma(\zeta)$ . Os termos dessa equação representam, fisicamente, componentes de velocidades normais à pá. O termo do lado esquerdo indica o efeito normal absoluto das distribuições de vórtices sobre as pás. Os dois primeiros termos do lado direito são devidos, respectivamente, a uma fonte e a um vórtice na origem, e, o último termo, o efeito normal devido à velocidade de condução do rotor.

A solução da Equação (2.22) não é única, exigindo-se uma condição suplementar especificada no item 2.3.4. Determinada a distribuição de vórtices,  $\gamma(\zeta)$ , as velocidades absolutas sobre a pá são obtidas de (2.19) e (2.20). As velocidades relativas,  $w$ , são calculadas por composição vetorial com a velocidade de condução do rotor,  $u$ . Conhecidas essas velocidades e a distribuição de vórtices, várias grandezas locais e globais podem ser determinadas, conforme o item 3.1 do próximo capítulo.

## 2.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA PELO MÉTODO DOS PAINÉIS

A solução numérica da equação integral, (2.22), resultante da formulação apresentada no Item 2.2, será obtida pelo emprego do método dos painéis, estabelecido por Hess e Smith (1966). As pás são discretizadas, de forma apropriada, através de painéis (segmentos) retos. Os pontos extremos de cada painel são localizados na linha da pá infinitamente fina (PIF).

O ponto médio de cada painel de uma pá de referência é estabelecido como sendo o ponto de controle, para aplicação da condição de contorno. Em cada painel, admite-se uma distribuição de vórtices de densidade linear. A aplicação do método dos painéis resulta em um sistema de equações algébricas lineares, tendo por incógnitas as densidades de vórtices. Para uma determinada geometria de grade e alguns parâmetros estabelecidos, uma solução única, por meio de cada sistema, só é possível se for satisfeita certa condição suplementar abordada conforme o item 2.3.4.

Na seqüência deste item, são apresentadas as técnicas de discretização das pás, a determinação da largura das pás e as condições suplementares referentes às formulações para PIF. Os diversos termos da equação integral, (2.22), são colocados na forma discretizada e depois reunidos convenientemente para formar o sistema de equações algébricas lineares. Alguns comentários são feitos sobre as soluções desse sistema.

### 2.3.1 Discretização das Pás

Os formatos de pás a serem determinados pela metodologia de traçado descrita no Capítulo 4 são gerados por perturbações de formatos iniciais em arco de círculo ou em espiral logarítmica. Essas perturbações são introduzidas através da parametrização descrita no item 4.2. A técnica de discretização está descrita no Apêndice A.

Os pontos são ordenados de tal modo que se percorre a pá, partindo do ponto localizado no bordo de ataque,  $z_1$ , em direção ao ponto localizado no bordo de fuga,  $z_{N+1}$  (Figura 2).

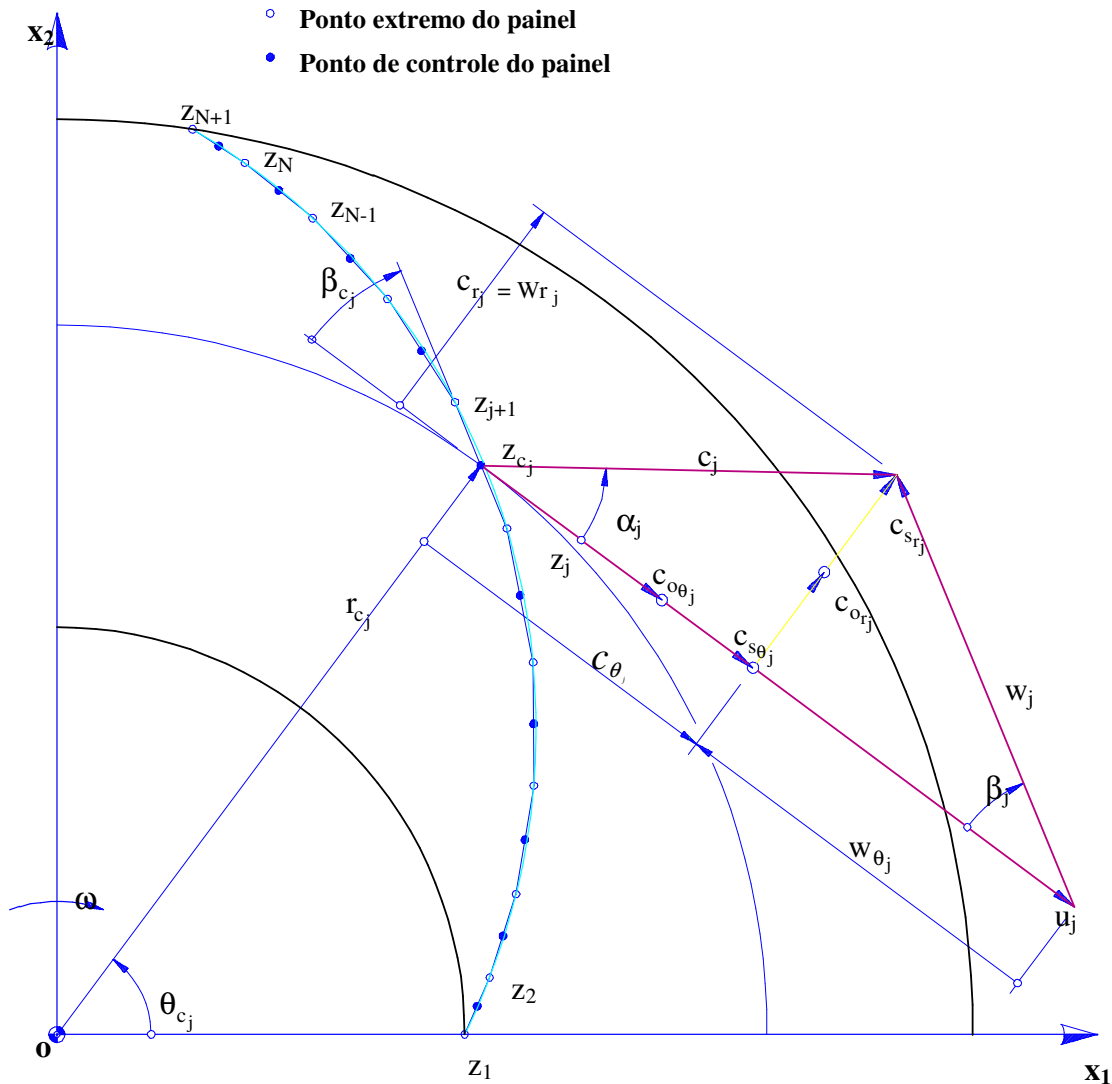


Figura 2 - Discretização de uma pá de referência e condição de tangência no painel  $j$  – (retirado de Oliveira, 2001).

Em cada painel  $j$ , admite-se uma distribuição de vórtices de densidade linear, com valores iguais a  $\gamma_j$  e  $\gamma_{j+1}$  em cada extremidade. A adoção da densidade de vórtices variando linearmente em cada painel facilita a aplicação da condição de Kutta, como comentado posteriormente no item 2.3.4.

Com relação à distribuição dos comprimentos dos painéis na linha da pá de referência, utiliza-se uma série geométrica de quociente,  $q_{sg}$ , descrita no Apêndice A. Em decorrência disso, o fator de discretização pode ser estabelecido em um certo intervalo (p. ex.,

$1 < q_{sg} < 1,2$ ). O número de painéis e o fator de discretização mais apropriados para os casos analisados neste trabalho serão apresentados no item 2.4.

### 2.3.2 Largura $b(r)$ da Pá

Na solução numérica da Equação (2.22), quando a largura da pá não é constante, o valor de  $b_{c_j} = b(r_{c_j})$  deve ser estabelecido para cada ponto de controle.

Quando as arestas de entrada e de saída são paralelas ao eixo do rotor, a variação de largura é obtida facilmente pela equação que representa o formato da largura da pá. Porém, quando, pelo menos, uma aresta não é paralela ao eixo, deve-se admitir uma lei de formação para  $b_{c_j} = b(r_{c_j})$  na região próxima à essa aresta. Em casos assim, os procedimentos para a determinação da variação da largura da pá estão descritos no trabalho de Oliveira (1999). Nos testes (Cap.4) e resultados (Cap. 5) apresentados no presente trabalho, as arestas de entrada e saída serão sempre consideradas paralelas ao eixo do rotor.

### 2.3.3 Formação do Sistema de Equações Algébricas Lineares

Na forma discretizada, a equação integral (2.22) será colocada em termos de um sistema de equações algébricas lineares, ou seja:

$$\sum_{j=1}^N A_{kj} \Gamma_j = B_k \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.24)$$

A incógnita  $\Gamma_j$  representa a densidade adimensional de vórtices, sendo:

$$\Gamma_j = \frac{\gamma_j}{u_\infty} \quad (2.25)$$

Na seqüência, todos os termos dessa equação integral será colocado na forma discretizada e, depois, reunidos convenientemente para formarem, em cada caso, a matriz dos coeficientes de influência,  $A_{kj}$ , e o vetor (coluna) independente,  $B_k$ .

Os detalhes completos da formação do sistema de equações algébricas lineares são dados por Manzanares Filho (1982), que abordou o problema de pás infinitamente finas com largura,  $b(r)$ , constante. Posteriormente, Manzanares Filho e Oliveira (1992) introduziram uma modificação na formulação original substituindo o termo fonte,  $Q$ , responsável pela vazão através do rotor, pelo termo  $Q/b(r)$  que inclui a variação da largura da pá, conforme discutido no item 2.2, Equação (2.15). A seguinte equação, que representa o sistema de equações algébricas lineares, foi então deduzida:

$$D_{k1} \Gamma_1 + \sum_{j=2}^N (D_{kj} + E_{kj-1}) \Gamma_j + E_{kN} \Gamma_{N+1} = \frac{\phi}{B_{ck}} - \text{tg } \beta_{ck} (R_{ck}^2 + \Omega) \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.26)$$

Os coeficientes  $D_{kj}$  e  $E_{kj}$  dependem apenas da geometria da pá. Suas expressões podem ser encontrados no trabalho de Manzanares Filho (1982), sob a nomenclatura  $A_{kj}$  e  $B_{kj}$ , respectivamente.  $\beta_{ck}$  é o ângulo entre o painel  $k$  e a tangente à circunferência no ponto  $z_{ck}$  (Figura 2),  $\Gamma_j = \gamma_j / \omega r_5^2$  a densidade adimensional de vórtices,  $B_{ck} = b_{ck} / b_5$  a relação adimensional de larguras e  $R_{ck} = r_{ck} / r_5$  o raio adimensional no ponto de controle do painel  $k$ . Os coeficientes de vazão,  $\phi$ , e de pré-circulação,  $\Omega$ , são definidos da seguinte forma:

$$\phi = \frac{Q}{2\pi b_5 \omega r_5^2} \quad (2.27)$$

e

$$\Omega = \frac{\Gamma_0}{2\pi \omega r_5^2} \quad (2.28)$$

onde  $\Gamma_0$  é definido em (2.17)

O sistema de equações representado em (2.26) possui  $N$  equações com  $N+1$  incógnitas,  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{N+1}$ . Para tornar o sistema determinado, deve ser aplicada uma condição suplementar que será discutida no item a seguir.

### 2.3.4 Condição de Kutta e Condição sem Choque

No item anterior, o sistema de equações algébricas lineares resulta da formulação do Item 2.2. Uma solução única só é possível através da utilização de uma certa condição suplementar, correspondente à condição de Kutta no bordo de fuga da pá.

Antes de tratar da condição de Kutta, é conveniente salientar que, do ponto de vista da teoria potencial, define-se escoamento com entrada sem choque aquele para o qual a velocidade é finita e contínua no bordo de ataque da pá. Nessa condição, para o caso de PIF e densidade linear de vórtices em cada painel, o efeito de entrada sem choque é obtido fazendo-se no bordo de ataque da pá (Figura 3):

$$\Gamma_1 = 0 \quad (2.29)$$

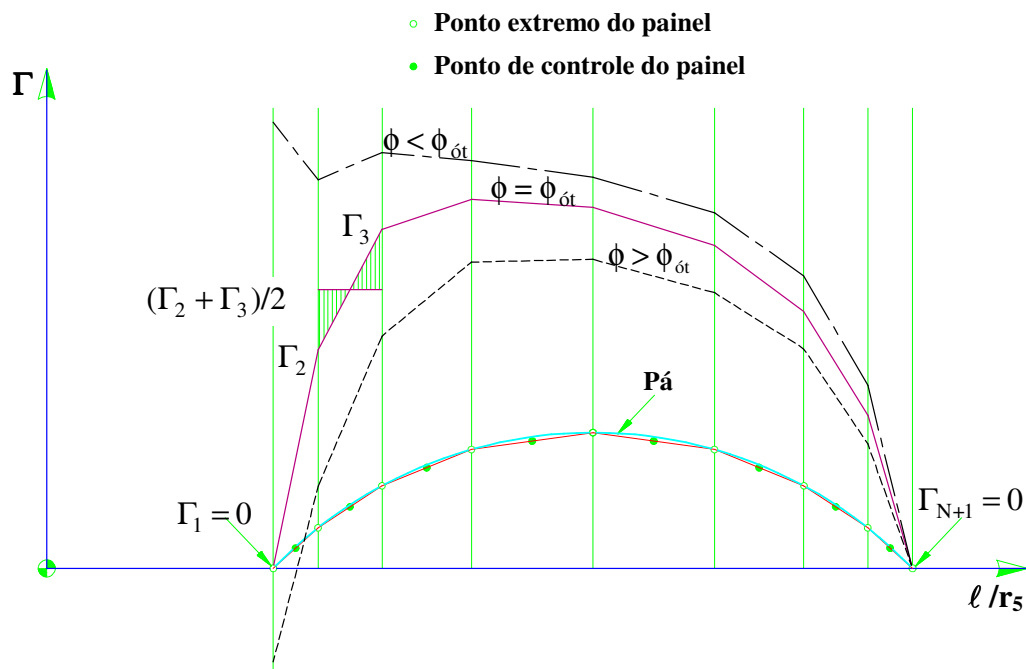


Figura 3 - Condições de entrada (com e sem choque) e de saída (Kutta) e representação da distribuição linear de vórtices em cada painel. – (retirado de Oliveira, 2001).

Do mesmo modo, do ponto de vista físico, interessa apenas o escoamento com velocidade finita e contínua no bordo de fuga da pá (condição de Kutta). Uma distribuição de vórtices sempre produz uma descontinuidade no campo de velocidades, a não ser no caso trivial em que a densidade de vórtices é nula. Portanto, a condição de saída apropriada exige que no bordo de fuga da pá (Figura 3):

$$\Gamma_{N+1} = 0 \quad (2.30)$$

Aplicando a condição de entrada sem choque (2.29) e a condição de Kutta (2.30), o sistema de equações representado em (2.26) torna-se em:

$$A_{k1} \phi_{\text{ót}} + \sum_{j=2}^N A_{kj} \Gamma_j = B_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.31)$$

sendo

$$A_{kj} = D_{kj} + E_{kj-1}, \quad j = 2, 3, \dots, N, \quad (2.32)$$

$$A_{k1} = -\frac{1}{B_{c_k}^*}, \quad j = 1 \quad (2.33)$$

e

$$B_k = -\text{tg} \beta_{c_k} (R_{c_k}^2 + \Omega), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.34)$$

$\phi_{\text{ót}}$  é definido como sendo o coeficiente de vazão ótimo ou de projeto. Como mostra o sistema de equações em (2.31), o valor de  $\phi_{\text{ót}}$  não deve ser encarado como parâmetro, mas sim como incógnita do sistema, juntamente com os valores de  $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots,$  e  $\Gamma_N$ . Quando  $\phi \neq \phi_{\text{ót}}$ , trata-se de uma situação de entrada com choque ou fora de projeto (Figura 3). Neste caso, o escoamento potencial através da grade radial com pás infinitamente finas se processa com uma velocidade infinita em torno do bordo de ataque. É importante salientar que, do ponto de vista físico, as condições de escoamento com choque também poderiam ser aceitas, cabendo a formulação mais geral expressa em (2.26) para um dado  $\phi$  e  $\Gamma_1$  tratado como incógnita, com a condição de Kutta satisfeita ( $\Gamma_{N+1} = 0$ ). Entretanto, para o método de traçado de pás descrito posteriormente, apenas a condição sem choque correspondente à Equação (2.31) será considerada.

### 2.3.5 Solução do Sistema de Equações Algébricas Lineares

O sistema de equações algébricas lineares, dado em (2.31), é resolvido pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal parcial. Utilizou-se a implementação da rotina DPSIM em dupla precisão (Segui, 1973).



## 2.4 AFERIÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL

A qualidade da solução numérica da equação integral apresentada no item 2.1 pode ser avaliada através da comparação dos seus resultados com os resultados analíticos. Em princípio, não existe solução analítica que abrange, simultaneamente, os efeitos de rotação, de variação de largura e de variação de espessura das pás, que são típicos de rotores centrífugos de turbomáquinas, mesmo para escoamento potencial e incompressível.

No caso de pás de espessura infinitamente fina (PIF), uma solução analítica foi apresentada por Murata *et al.* (1978) para grade radial móvel, com pás em formato de espiral logarítmica e de largura variável. Apesar de ser considerada exata, essa solução é restrita apenas ao caso de uma determinada variação logarítmica de largura das pás. Esta solução, apesar de não considerar a espessura das pás, serviu para a aferição do modelo computacional apresentado neste trabalho. Foram analisadas as influências do número de painéis e do fator de discretização para o caso do rotor convencional analisado por Murata *et al.* (1978). Os resultados dessas influências não serão apresentados neste trabalho. Entretanto, foi constatado que para 40 painéis e fator de discretização igual a 1,05 os resultados numéricos e analíticos referentes à distribuição de velocidades e de pressões ao longo das pás são praticamente os mesmos para a vazão sem choque (Manzanares Filho e Oliveira, 1992).

## Capítulo 3

# PARÂMETROS DE CARREGAMENTO AERODINÂMICO

Neste capítulo são apresentadas as grandezas aerodinâmicas locais e globais de interesse, resultantes do cálculo do escoamento potencial em rotores centrífugos. São apresentados e discutidos os parâmetros adimensionais de carregamento aerodinâmico e os critérios correspondentes a serem utilizados na metodologia de traçado de pás. Especificamente, trata-se da maximização do denominado “Número de Richardson (Ri)” e da definição e determinação de uma faixa para o denominado “Fator de Forma (K)”.

## 3.1 GRANDEZAS AERODINÂMICAS LOCAIS E GLOBAIS

As diversas grandezas locais e globais do escoamento potencial no plano da grade radial podem ser calculadas assim que a solução do sistema (2.31) tenha sido obtida e os valores da densidade de vórtices adimensional  $\Gamma_j$  estejam determinados.

### 3.1.1 Grandezas Aerodinâmicas Locais

Com os valores de  $\Gamma_j$  calculados através da solução do sistema de equações (2.31), as componentes adimensionais radial,  $C_{s_{rj}}^{\mp}$ , e circunferencial,  $C_{s_{\theta j}}^{\mp}$ , da velocidade absoluta podem ser determinadas em cada ponto de controle nos lados de pressão (-) e de sucção (+) da pá.

Superpondo-se os efeitos dos escoamentos não-perturbado e induzido pela grade radial, tem-se, com base na Figura 2, pág. 17, as componentes adimensionais radial,  $W_{rj}^{\mp}$ , e circunferencial,  $W_{\theta j}^{\mp}$ , da velocidade relativa, ou seja:

$$W_{rj}^{\mp} = \frac{\phi / B_{c_j}^*}{R_{c_j}} + C_{s_{rj}}^{\mp} \quad (3.1)$$

e

$$W_{\theta j}^{\mp} = R_{c_j} + \frac{\Omega}{R_{c_j}} + C_{s_{\theta j}}^{\mp} \quad (3.2)$$

O módulo da velocidade relativa resultante é determinado por:

$$W_j^{\mp} = \left[ (W_{rj}^{\mp})^2 + (W_{\theta j}^{\mp})^2 \right]^{1/2} \quad (3.3)$$

O ângulo do escoamento relativo,  $\beta_{c_j}$ , em cada ponto de controle, j, é dado por:

$$\text{tg } \beta_{c_j} = \frac{\phi / B_{c_j}^*}{\left( R_{c_j}^2 - \frac{N_{\text{pá}}}{4\pi} \sum_{j=1}^N (\Gamma_j + \Gamma_{j+1}) \right)} \quad (3.4)$$

e o ângulo do escoamento absoluto,  $\alpha_{c_j}$ , em cada ponto de controle, j, é obtido por:

$$\operatorname{ctg} \alpha_{c_j} + \operatorname{ctg} \beta_{c_j} = \frac{R_{c_j}^2 B_{c_j}^*}{\phi}. \quad (3.5)$$

### 3.1.2 Grandezas Aerodinâmicas Globais

Na formulação efetuada no Item 2.2, o efeito de cada pá da grade radial foi simulado através da distribuição de vórtices de densidade  $\gamma$ . Então, a circulação em uma pá é

$$\Gamma_{c_{pá}} = \int_{s_4}^{s_5} \gamma ds. \quad (3.6)$$

O trabalho específico é dado pela equação de Euler das máquinas de fluxo

$$Y_{páT} = \frac{\omega}{2\pi} N_{pá} \Gamma_{c_{pá}} \quad (3.7)$$

e considerando (3.6), obtém-se:

$$Y_{páT} = \frac{\omega}{2\pi} N_{pá} \int_{s_4}^{s_5} \gamma ds. \quad (3.8)$$

Considerando o coeficiente de pressão,  $\psi$ , de uma grade radial móvel dado por

$$\psi = \frac{2Y}{u_5^2} \quad (3.9)$$

resulta em

$$\psi_{páT} = \frac{N_{pá}}{\pi} \int_{s_4}^{s_5} \Gamma dS, \quad (3.10)$$

com  $\Gamma = \gamma/\omega r_5$  e  $S = s/r_5$ .

De posse dos valores de  $\Gamma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N+1$ ) obtidos numericamente em cada ponto extremo dos painéis, aproxima-se a integral em (3.10) pela “regra dos trapézios” (Figura 3, pág. 20), ou seja,

$$\Psi_{\text{pá}\Gamma} = \frac{N_{\text{pá}}}{2\pi} \sum_{j=1}^N (\Gamma_j + \Gamma_{j+1}) \Delta S_j. \quad (3.11)$$

O coeficiente de pressão para número infinito de pás,  $\Psi_{\text{pá}\infty}$ , é calculado pela seguinte equação:

$$\Psi_{\text{pá}\infty} = 2 \left( 1 - \frac{\phi}{\text{tg } \beta_5} - \Omega_\infty \right), \quad (3.12)$$

onde o coeficiente de pré-circulação para número infinito de pás,  $\Omega_\infty$ , é definido por

$$\Omega_\infty = \frac{r_4 c_{u4}}{r_5 u_5}. \quad (3.13)$$

O fator de deficiência de potência é definido por

$$\mu_\Gamma = \frac{Y_{\text{pá}\Gamma}}{Y_{\text{pá}\infty}} = \frac{\Psi_{\text{pá}\Gamma}}{\Psi_{\text{pá}\infty}} = \frac{P_{\text{pá}\Gamma}}{P_{\text{pá}\infty}}. \quad (3.14)$$

Observa-se que  $\Omega_\infty$ , dado em (3.13), pode, conceitualmente, diferir de  $\Omega$ , dado em (2.28), já que no caso unidimensional ( $N_{\text{pá}} = \infty$ ), ao contrário do caso bidimensional, a grade não afeta a direção do escoamento anterior à sua entrada. Em outras palavras, o fato de se colocar  $\Omega = 0$  no sistema de equações (2.26) não impõe que  $c_{u4}$  tenha de ser nulo, nem mesmo para entrada sem choque, pois as distribuições de vórtices afetam a direção do escoamento não-perturbado. Em contra partida, tem-se  $\Omega_\infty = 0$  em (3.13) se e somente se  $c_{u4} = 0$ . Portanto,  $\Omega$  e  $\Omega_\infty$  são ambos parâmetros independentes nas situações respectivas de número finito e de número infinito de pás. Logo, dada a geometria de uma pá e o coeficiente de vazão,  $\phi$ , a comparação entre uma grade com número finito e uma outra com número

infinito de pás só pode ser efetuada se um critério que relacione  $\Omega$  e  $\Omega_\infty$  for estabelecido. Neste trabalho, admite-se tacitamente que  $\Omega = \Omega_\infty$ . Além disso, em todos os testes e resultados a serem apresentados posteriormente, será considerado apenas o caso sem pré-circulação,  $\Omega = \Omega_\infty = 0$ .

## 3.2 DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE PÁS POR MEIO DO CRITÉRIO DO NÚMERO DE RICHARDSON

O objetivo deste item é apresentar um critério proposto por Oliveira (2001), para a determinação do número de pás de rotores centrífugos. O método baseia-se nas características do escoamento e leva em consideração a geometria completa da pá. Inicialmente, alguns comentários são feitos a respeito da importância do valor mais apropriado do número de pás nas características de desempenho da turbomáquina. Em seguida, com base na distribuição de velocidades relativas na superfície da pá, define-se um parâmetro adimensional denominado número de Richardson. Finalmente, o valor máximo desse parâmetro é utilizado como critério para se obter o número ótimo de pás de rotores com boas características hidro ou aerodinâmicas.

### 3.2.1 Considerações Sobre o Número de Pás

As pás constituem o principal componente mecânico do rotor de uma turbomáquina e, em consequência, o número de pás,  $N_{pá}$ , torna-se um importante parâmetro para estabelecer o seu desempenho. Dependendo da utilização da turbomáquina, o número de pás é obtido em função das suas próprias características e, também, das exigências impostas pelo sistema no qual ela pertence. Por exemplo, em bombas centrífugas o número de pás deve ser o maior possível a fim de minimizar os efeitos da cavitação em vazões altas, ou seja, a bomba deve apresentar o menor valor possível de  $NPSH_{req}$  (característica da turbomáquina). Por outro lado, o número de pás deve ser o menor possível para se conseguir o menor valor possível da vazão antes de atingir o seu limite de bombeamento (característica exigida pelo sistema). Situação semelhante é encontrada em turbomáquinas que operam gases (ventiladores, sopradores e turbocompressores). O número de pás também é decisivo na fase inicial de

projeto do rotor centrífugo, visto que ele estabelece o diâmetro mínimo de entrada,  $D_4$ , que é limitado pelo bloqueio geométrico das pás, caracterizado pelo seu fator de estrangulamento,  $fe_4$ .

Em termos de escoamento, um número pequeno de pás apresenta superfície de atrito reduzida e uma má condução do fluido no interior do rotor. Essa situação faz aumentar o carregamento da pá (aumenta as diferenças de pressões em ambos os lados da pá) e, em consequência, aumenta também a velocidade média do escoamento relativo, diminuindo o rendimento da turbomáquina. Esse aumento no carregamento pode diminuir a pressão no lado de sucção da pá a níveis proibitivos, fazendo com que as turbomáquinas que operam líquidos tenham sua capacidade de aspiração reduzida, devido ao fenômeno da cavitação. Ao contrário, quando o número de pás é grande, há uma melhor condução do fluido no interior do rotor, porém, a superfície de atrito é aumentada e o carregamento é diminuído, resultando novamente numa diminuição do rendimento. Portanto, torna-se necessária uma solução de compromisso baseada em critérios que levem em consideração as características da turbomáquina e as características exigidas pelo sistema, associados ao melhor rendimento possível.

Via de regra, na fase inicial de um projeto novo, o número de pás é determinado para o ponto de rendimento máximo em função de alguns parâmetros geométricos. Esses parâmetros, invariavelmente, referem-se aos ângulos geométricos de entrada,  $\beta_4$ , e de saída,  $\beta_5$ , e seus respectivos diâmetros,  $D_4$  e  $D_5$ , como observa-se nas fórmulas clássicas encontradas na literatura.

Diversas fórmulas empíricas e semi-empíricas estão disponíveis na literatura para se determinar o número de pás de rotores centrífugos. Para efeito de comparação com o valor do número de pás,  $N_{pá}^*$ , obtido pelo critério do número de Richardson máximo,  $Ri_{máx}^*$ , são apresentadas na Tabela 1 as fórmulas mais citadas na literatura técnica para esses rotores.

Dependendo dos coeficientes empíricos adotados em algumas dessas fórmulas e para uma mesma situação, o número de pás pode variar numa ampla faixa, por exemplo de 13 a 16 pás, dificultando a escolha do número mais apropriado. Pfleiderer (1960) ousou afirmar que é impossível determinar o número de pás mais adequado através de métodos teóricos levando em consideração todos os parâmetros (geométricos, de forma e de escoamento). Inevitavelmente, recorre-se às fórmulas empíricas para uma primeira estimativa, ou a projetos de turbomáquinas já construídas. O número de pás apropriado para se ter o maior rendimento,

pelo menos em princípio, deveria sempre ser estabelecido por meio de métodos experimentais.

Tabela 1 - Fórmulas clássicas para determinação do número de pás de rotores centrífugos (retirado de Oliveira, 2001)

<b>Autores</b>	<b>Fórmulas</b>	<b>Tipos de Turbomáquinas</b>
<b>Pfleiderer (1960)</b>	$N_{pá} = 6,5 \frac{D_5 + D_4}{D_5 - D_4} \text{sen} [(\beta_5 + \beta_4) / 2]$	Bomba centrífuga
<b>Eckert e Schnell (1961)</b>	$N_{pá} = \frac{2\pi \text{sen} [(\beta_5 + \beta_4) / 2]}{(0,35 \dots 0,45) \ln(D_5 / D_4)}$	Turbocompressor centrífugo
<b>Stepanoff (1962)</b>	$N_{pá} = \frac{\beta_5^0}{3}$	Bomba centrífuga
<b>Eck (1973)</b>	$N_{pá} = 8,5 \frac{\text{sen} \beta_5}{1 - D_4 / D_5}$	Ventilador centrífugo
<b>Sigloch (1984)</b>	$N_{pá} = k_{pá} \frac{D_5 + D_4}{D_5 - D_4} \text{sen} [(\beta_5 + \beta_4) / 2]$	Bomba, ventilador e turbocompressor centrífugos*

\* Bomba:  $5,0 \leq k_{pá} \leq 6,5$ , ventilador e soprador:  $6,5 \leq k_{pá} \leq 8,0$  e turbocompressor:  $k_{pá}$  até 11.

### 3.2.2 Número de Richardson

Balje (1978) sugeriu a possibilidade de o número de Richardson,  $Ri$ , que pode ser definido de várias maneiras, ser um parâmetro adequado para avaliar diversas características do escoamento em rotores centrífugos. Um modo de se obter certos números de Richardson consiste em se estabelecer às equações do movimento relativo para um elemento de fluido em escoamento no interior de um rotor centrífugo. Para essa finalidade, considera-se o escoamento relativo permanente, incompressível e invíscido. Também, considera-se a força gravitacional como sendo a única força de corpo e, ainda, o rotor centrífugo estacionário em relação a um referencial rotativo com velocidade angular constante na direção do seu eixo  $x_3$ . Com essas hipóteses, obtém-se, conforme Oliveira (2001), as seguintes equações intrínsecas do movimento relativo, escritas na forma de equilíbrio dinâmico, para as direções  $s$ ,  $n$  e  $m$  (Figura 4):



$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial s} + \omega^2 r \sin \lambda \sin \beta - \frac{Dw}{Dt} = 0 \quad (3.15)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial n} - \omega^2 r \sin \lambda \cos \beta + 2\omega w \sin \lambda - \frac{w^2}{R_n} = 0 \quad (3.16)$$

e

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial m} - \frac{c_m^2}{R_m} + \frac{c_u^2}{r} \cos \lambda = 0 \quad (3.17)$$

Separando os termos relacionados à velocidade relativa,  $w$ , do termo relacionado ao raio,  $r$ , obtém-se da Equação (3.16)

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial n} + \frac{w^2}{a} \left( \frac{2\omega a}{w} \sin \lambda - \frac{a}{R_n} \right) - \omega^2 r \sin \lambda \cos \beta = 0 \quad (3.18)$$

onde “ $a$ ” é a distância na direção  $n$  (Figura 4) entre duas pás consecutivas.

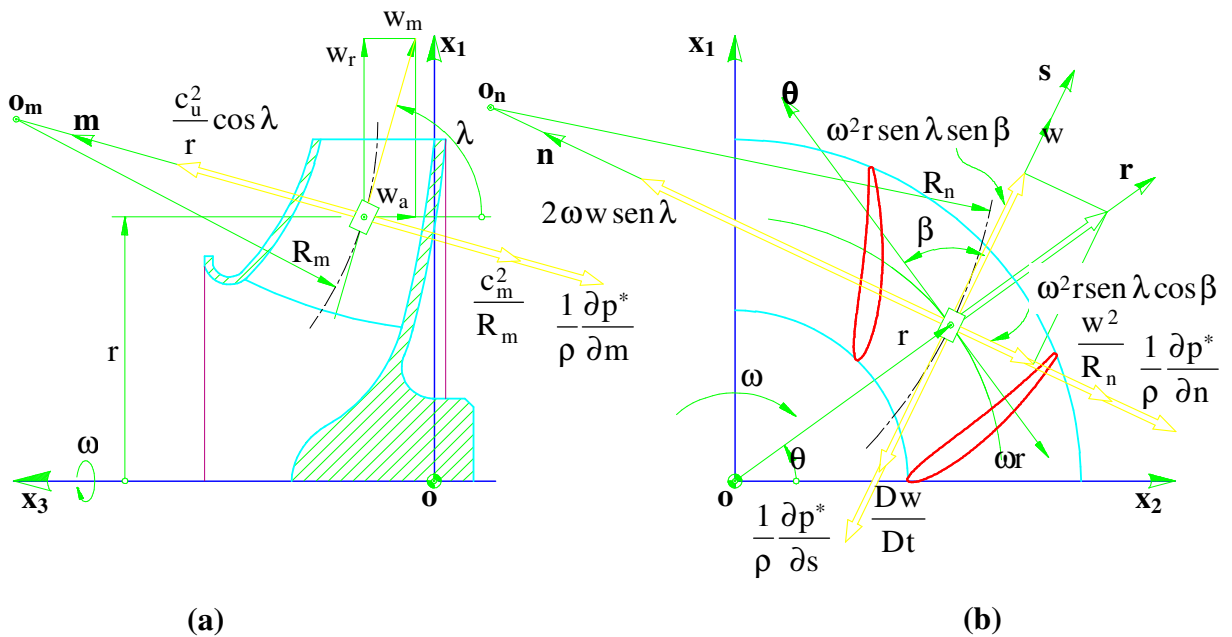


Figura 4 - Forças atuando num elemento de fluido em equilíbrio dinâmico no interior de um rotor centrífugo: (a) seção meridional (b) seção transversal (retirado de Oliveira, 2001)

Da Equação (3.15), pode-se estabelecer a equação de Bernoulli para o escoamento relativo através do rotor centrífugo, ou seja,

$$\frac{p^*}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} = Y_0 \quad (3.19)$$

onde  $Y_0$  é a energia total específica, constante em todos os pontos (escoamento absoluto irrotacional) do escoamento.

Derivando a Equação (3.19) em relação a  $n$ , e sabendo-se que  $u = \omega r$  e  $\partial n = -\partial r / \sin \lambda \cos \beta$ , obtém-se

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial n} + w \frac{\partial w}{\partial n} + \omega^2 r \sin \lambda \cos \beta = 0 \quad (3.20)$$

Comparando (3.18) com (3.20), resulta:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{w}{R_n} - 2 \omega \sin \lambda \quad (3.21)$$

que é uma equação apropriada para rotores centrífugos com  $\beta_5 < 90^\circ$ .

Denominando  $\Delta w = w_s - w_p$  a diferença de velocidades relativas entre os lados de sucção,  $w_s$ , e de pressão,  $w_p$ , da pá, obtém-se uma relação aproximada para a Equação (3.21) dada por:

$$\frac{\Delta w}{\bar{w}} = \left( \frac{2 \omega a}{\bar{w}} \sin \lambda - \frac{a}{R_n} \right) \quad (3.22)$$

sendo  $\bar{w} = (w_s + w_p) / 2$  a velocidade média do escoamento relativo.

A relação estabelecida em (3.22) foi denominada por Baljé (1978) como sendo o gradiente de velocidades relativas. Observa-se que os termos dessa relação são semelhantes àqueles contidos entre parênteses na Equação (3.18). Um desses termos refere-se ao número de Richardson devido à rotação do rotor,  $Ri_\omega = 2 \omega a \sin \lambda / w$ , e, o outro, à curvatura da pá no plano transversal,  $Ri_{C_n} = a / R_n$ . Baljé (1978) denominou  $Ri_{sp} = Ri_\omega + Ri_{C_n}$  como sendo

o número de Richardson no plano transversal (plano pá a pá) que é, na realidade, o gradiente de velocidades relativas,  $\Delta w / \bar{w}$ . Outros números de Richardson também podem ser estabelecidos para o plano meridional, conforme Oliveira (2001).

Baseando-se na Equação (3.21), Baljé (1981) determinou uma expressão para o gradiente de velocidades relativas em função da relação de raios,  $r/r_4$ , para o caso particular de pás infinitamente finas, em formato de arco de círculo e de largura constante. Seus resultados são apresentados por Oliveira (2001) para uma determinada geometria de rotor centrífugo, variando-se somente o ângulo de entrada,  $\beta_4$  (dois casos analisados), e o ângulo de saída da pá,  $\beta_5$ , este abrangendo valores menores, iguais e maiores que  $90^\circ$ .

No item 2.2, foi apresentado o método de cálculo para o escoamento potencial e incompressível em rotores centrífugos. Esse método possibilita uma determinação mais precisa das velocidades  $w_p$  e  $w_s$  na superfície da pá e, portanto, do gradiente de velocidades relativas,  $\Delta w / \bar{w}$ , equação (3.21).

Com base nas informações de Baljé (1978), Oliveira (2001) definiu o número de Richardson local em um ponto de controle  $j$  da pá discretizada como sendo

$$Ri_j = \frac{\Delta W_j}{\bar{W}_j}, \quad (3.23)$$

onde  $j = 1, 2, \dots, N$ .

As velocidades relativas,  $W_j$ , são tomadas em termos adimensionais, conforme a definição dada na Equação (3.3). A diferença entre as velocidades relativas,  $\Delta W_j$ , e a velocidade média do escoamento relativo,  $\bar{W}_j$ , ambas em cada ponto de controle,  $j$ , são representadas por

$$\Delta W_j = W_{s_j} - W_{p_j} \quad (3.24)$$

e

$$\bar{W}_j = \frac{W_{p_j} + W_{s_j}}{2}. \quad (3.25)$$

Considerando a equação de Bernoulli do escoamento relativo, pode-se estabelecer uma forma equivalente do número de Richardson local em termos do carregamento da pá,  $\Delta P_j = P_{p_j} - P_{s_j}$ , ou seja,

$$Ri_j = \frac{1}{2} \frac{\Delta P_j}{\bar{W}_j^2}. \quad (3.26)$$

Ao analisar  $\Delta w / \bar{w}$  em função de  $\varepsilon = r / r_4$ , Baljé (1981) faz apenas dois comentários: 1)  $\Delta w / \bar{w}$  é inversamente proporcional ao número de pás e 2) fixando certos parâmetros,  $\Delta w / \bar{w}$  atinge um valor máximo sempre na saída do rotor para  $\beta_5 \leq 90^\circ$  e, para  $\beta_5 > 90^\circ$ , o valor máximo de  $\Delta w / \bar{w}$  está localizado sempre no interior do canal entre os raios de entrada e de saída do rotor.

Baljé (1981) também utilizou o gradiente de velocidades relativas para determinar uma expressão aproximada que fornece o número mínimo de pás numa situação extremamente idealizada, isto é, pás retas com  $\beta_5 = 90^\circ$ ,  $\psi_{pá} = 2$  e  $\Delta w / \bar{w} = 2$ . Em seu próprio trabalho, Baljé (1981) faz críticas de suas expressões semi-empíricas. De fato, a distribuição de velocidades resultante das suas aproximações, principalmente na região do bordo de fuga, não condiz com a realidade, mesmo em se tratando de escoamento potencial.

Através da Equação (3.23), Oliveira (2001) destaca que, para uma dada geometria, o valor máximo do número de Richardson local é o maior possível se o carregamento na pá,  $\Delta W_j$ , é o maior possível e, simultaneamente, se o valor da velocidade média do escoamento relativo,  $\bar{W}_j$ , é o menor possível. Para se obter altos valores de  $\Delta W_j$ , o número de pás deve ser baixo, e, para se obter baixos valores de  $\bar{W}_j$ , o número de pás deve ser alto. O máximo valor do número de Richardson age, portanto, como uma solução de compromisso para se obter o número de pás para o maior rendimento do rotor:  $N_{pá}$  baixo diminui a superfície de atrito viscoso e  $N_{pá}$  alto conduz melhor o fluido através dos canais formados pelas pás.

De fato, variando o número de pás em diversos casos de rotores centrífugos de bom desempenho efetivamente ensaiados, Oliveira (2001) verificou a existência de um número de pás  $N_{pá}^*$  para o qual o valor máximo do número de Richardson local calculado,  $Ri_{máx}^*$ , era o maior entre todos. E, mais importante ainda, esse número de pás  $N_{pá}^*$ , na grande maioria dos casos testados, correspondia ao número de pás correspondente à melhor eficiência registrada

nos ensaios. Desse modo, ficou atestada a eficácia do critério de maximização do número de Richardson local na identificação do número ótimo de pás de rotores centrífugos.

### 3.3 TRAÇADO DE PÁS UTILIZANDO O NÚMERO DE RICHARDSON

O critério da maximização do número de Richardson ( $Ri$ ) funciona para selecionar o número de pás ótimo de máquinas de fluxo radiais, de baixa rotação específica e pás curvadas para trás (Oliveira *et al.* 2002), *com o formato fixo*. Nessa situação, porém, os parâmetros de funcionamento na condição sem choque variam à medida que se varia o número de pás.

Foi analisada neste trabalho a possibilidade de se utilizar a maximização do número de Richardson como critério para a determinação do número de pás no caso em que o traçado das mesmas varia de modo a atender a um dado par de coeficientes de vazão e de pressão ( $\phi$ ,  $\psi$ ).

Uma versão preliminar da metodologia de traçado de pás foi elaborada e testada em diversos casos de rotores com relações de raios e de larguras fixadas e um dado par ( $\phi$ ,  $\psi$ ) também fixado. Verificou-se o seguinte (Figura 5): à medida que se reduzia o número de pás, o traçado que atendia ao par ( $\phi$ ,  $\psi$ ) especificado produzia valores do  $Ri$  máximo local em posições cada vez mais próximas da saída do rotor. Inicialmente, esperava-se que, a partir de um certo número de pás, os valores do  $Ri$  máximo local fossem diminuir, identificando-se desse modo um traçado e um número de pás que pudessem produzir a melhor eficiência em um ensaio futuro. Porém, diminuindo-se o número de pás, foram obtidos traçados que aumentavam o  $Ri$  máximo sem limite. Por fim, a situação de maior número de Richardson máximo local levava a um rotor com uma única pá, de traçado duvidoso, de grande comprimento e com mudanças bruscas de curvatura (certamente ineficiente), atendendo àquele par de coeficientes de vazão e de pressão.

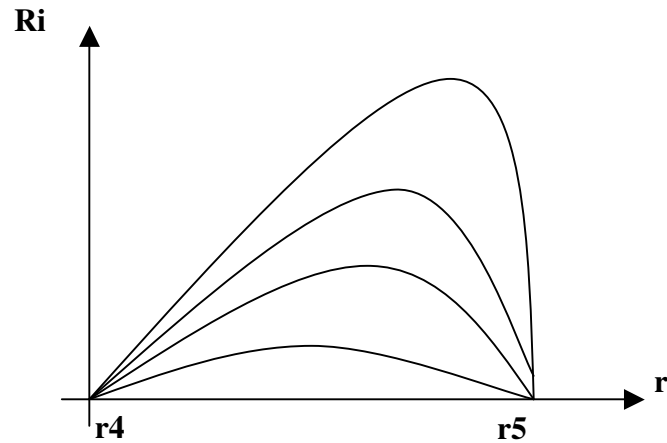


Figura 5 – Esquema da distribuição radial do número de Richardson ao longo das pás de um rotor centrífugo variando o número de pás e mantendo o par  $(\phi, \psi)$  na condição sem choque. (As distribuições se elevam à medida que o número de pás diminui.)

Tabela 2 - Dimensões principais dos rotores centrífugos de trabalhos clássicos da literatura. (retirado de Oliveira, 2001).

Convenção: ARC – pás em arco de círculo; LOG – pás em espiral logarítmica

<b>Autores</b>	<b>Formato da pá</b>	<b>D<sub>4</sub> (mm)</b>	<b>D<sub>5</sub> (mm)</b>	<b>b<sub>4</sub> (mm)</b>	<b>b<sub>5</sub> (mm)</b>	<b>β<sub>4</sub> (°)</b>	<b>β<sub>5</sub> (°)</b>
<b>Kearton (1933)</b>	ARC	215,9	381,0	50,8	50,8	30,0	40,0
<b>Varley (1961)</b>	ARC	83,82	243,84	10,7	4,5	36,0	27,0
<b>Bommes (1963) – I</b>	LOG	280,0	500,0	140,0	78,0	25,0	25,0
<b>Bommes (1963) – II</b>	LOG	280,0	560,0	140,0	70,0	25,0	25,0
<b>Bommes (1963) – III</b>	LOG	250,0	500,0	100,0	50,0	35,0	35,0
<b>Reddy e Kar (1971)</b>	LOG	68,0	208,0	22,0	7,0	30,0	30,0
<b>Oliveira (2001)</b>	ARC	204,85	419,5	60,302	32,1	31,02	50,41

Posteriormente, foram efetuados testes para uma série de rotores centrífugos de trabalhos clássicos da literatura, com dados de ensaio disponíveis, conforme a Tabela 2 (Oliveira, 2001). Estes testes mostraram uma faixa bastante ampla para o número de Richardson máximo na situação de máximo rendimento, conforme mostra a Tabela 3.

Tabela 3 – Número de Richardson (Ri) para rotores centrífugos de trabalhos clássicos da literatura.

Autores	Nº de Pás	Formato da Pá	r4/r5	b4/b5	$\beta$ (entrada)	$\beta$ (saída)	Ri <sub>MAX</sub>
<b>Kearton</b>	8	ARC	0,5667	1,0000	30,0	40,0	1,056655
<b>Kearton</b>	9	ARC	0,5667	1,0000	30,0	40,0	1,062565
<b>Bommes I</b>	6	LOG	0,56	1,79487	25,0	25,0	0,427452
<b>Bommes I</b>	7	LOG	0,56	1,79487	25,0	25,0	0,434916
<b>Bommes I</b>	8	LOG	0,56	1,79487	25,0	25,0	0,427013
<b>Bommes II</b>	6	LOG	0,5	2,0000	25,0	25,0	0,582555
<b>Bommes III</b>	7	LOG	0,5	2,0000	35,0	35,0	0,553052
<b>Reddy e Kar</b>	5	LOG	0,3269	3,14286	30,0	30,0	1,453692
<b>Reddy e Kar</b>	6	LOG	0,3269	3,14286	30,0	30,0	1,383484
<b>Reddy e Kar</b>	7	LOG	0,3269	3,14286	30,0	30,0	1,290704
<b>Oliveira</b>	8	ARC	0,4883	1,879	31,02	50,41	1,147726
<b>Oliveira</b>	10	ARC	0,4883	1,879	31,02	50,41	1,120233
<b>Varley</b>	5	ARC	0,3437	2,3378	36	27	1,130536
<b>Varley</b>	6	ARC	0,3437	2,3378	36	27	1,159936

Os resultados levaram a concluir que somente a utilização do número de Richardson máximo como parâmetro de carregamento não seria satisfatória para se obter um traçado e um número de pás adequado para o projeto de rotores centrífugos, mantidos os parâmetros de funcionamento ( $\phi$ ,  $\psi$ ) — como normalmente se deseja em um projeto típico.

Enfim, ficou clara a necessidade de se pesquisar um outro parâmetro de carregamento que se mantivesse em uma faixa mais restrita e que servisse para acompanhar a maximização do número de Richardson, produzindo traçados de pás tecnicamente viáveis.

### 3.4 FATOR DE FORMA “K”

Foi possível obter um parâmetro de carregamento denominado “fator de forma” com as características mencionadas no item anterior. Esse parâmetro baseia-se na idéia de que o carregamento aerodinâmico da parte posterior da pá deve ser quantificado em relação ao carregamento médio ao longo da pá, conforme sugerido pelas distribuições de número de Richardson ilustradas na Figura 5.

Retoma-se antes a Equação (3.8) para o trabalho específico do rotor, ou seja,

$$Y_{páT} = \frac{\omega}{2\pi} N_{pá} \int_{s_4}^{s_5} \gamma ds. \quad (3.8)$$

Define-se uma densidade de vórtices média como

$$\gamma_{\text{méd}} = \frac{1}{l_{\text{pá}}} \int \gamma ds \Rightarrow \int \gamma ds = \gamma_{\text{méd}} l_{\text{pá}}, \quad (3.27)$$

sendo  $l_{\text{pá}}$  o comprimento total da pá. Substituindo (3.27) em (3.8), obtém-se

$$Y_{\text{páT}} = \frac{\omega}{2\pi} N \gamma_{\text{méd}} l_{\text{pá}}. \quad (3.28)$$

Considerando a definição do coeficiente de pressão dada em (3.9), obtém-se

$$\psi = \frac{2 Y_{\text{páT}}}{u_5^2} = \frac{2 Y_{\text{páT}}}{(\omega r_5)^2}. \quad (3.29)$$

Substituindo (3.28) em (3.29) resulta

$$\psi = \frac{N}{\pi} \left( \frac{\gamma_{\text{méd}}}{\omega r_5} \right) \left( \frac{l_{\text{pá}}}{r_5} \right) \quad (3.30)$$

Introduzindo as grandezas adimensionais

$$\left( \frac{\gamma_{\text{méd}}}{\omega r_5} \right) = \gamma_{\text{méd}}^+ \quad (3.31)$$

e

$$\left( \frac{l_{\text{pá}}}{r_5} \right) = l_{\text{pá}}^+ \quad (3.32)$$

a Equação (3.30) assume a seguinte forma:

$$\psi = \frac{N}{\pi} \gamma_{\text{méd}}^+ l_{\text{pá}}^+ = \frac{N}{\pi} \left( \frac{\gamma_{\text{méd}}}{\gamma_{\text{máx}}} \right) l_{\text{pá}}^+ \gamma_{\text{máx}}^+ \quad (3.33)$$



ou, então,

$$\frac{\gamma_{\text{máx}}}{\gamma_{\text{méd}}} = \frac{1}{\psi} \frac{N}{\pi} l_{\text{pá}} \gamma_{\text{máx}}. \quad (3.34)$$

O raio adimensional correspondente ao valor máximo da densidade de vórtices  $\gamma_{\text{máx}}$  será representado por  $r_m$ . O fator de forma K será definido pela a relação entre uma certa medida de carregamento aerodinâmico na parte posterior da pá,  $\gamma_{\text{máx}}(r_5 - r_m)$  e uma certa medida do carregamento médio ao longo de toda a pá,  $\gamma_{\text{méd}}(r_5 - r_4)$ ,

$$K = \frac{\gamma_{\text{máx}}(r_5 - r_m)}{\gamma_{\text{méd}}(r_5 - r_4)}. \quad (3.35)$$

Substituindo a Equação (3.34) na Equação (3.35), resulta uma forma apropriada para o cálculo do fator de forma K em função de parâmetros geométricos ou oriundos do cálculo do escoamento potencial através do rotor, Istoé,

$$K = \frac{1}{\psi} \frac{N}{\pi} l_{\text{pá}} \gamma_{\text{máx}} \frac{(r_5^+ - r_m^+)}{(r_5^+ - r_4^+)}. \quad (3.36)$$

Para ilustrar o papel desempenhado pelo fator de forma, bem como antever uma certa ordem de grandeza de seus valores, considere-se um caso particular hipotético, extremamente simplificado, de uma pá puramente radial,  $l_{\text{pá}} = r_5 - r_4$ , com uma distribuição de densidade de vórtices triangular, conforme a Figura 6. Nesse caso, é fácil verificar que

$$\gamma_{\text{méd}} = \frac{(r_5 - r_4)}{(r_5 - r_4)} \frac{\gamma_{\text{máx}}}{2} \Rightarrow \frac{\gamma_{\text{máx}}}{\gamma_{\text{méd}}} = 2, \quad (3.37)$$

e de acordo com a Equação (3.35), pode-se concluir que

$$K = 2 \frac{(r_5 - r_m)}{(r_5 - r_4)}. \quad (3.38)$$

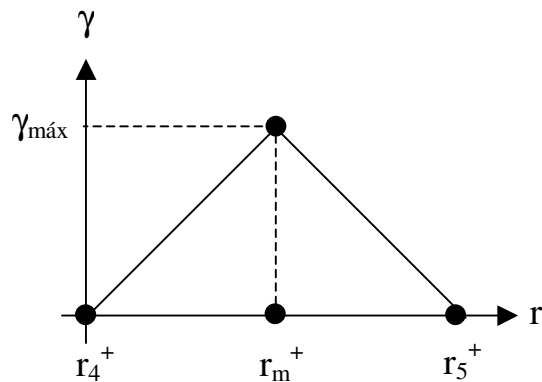


Figura 6 – Distribuição triangular hipotética da densidade de vórtices

A Equação (3.38) indica que o fator de forma varia na faixa  $0 \leq K \leq 2$ . Os casos de  $K$  igual a 2, 1 e 0 estão mostrados na Figura 7. Para  $K = 2$  ( $r_m = r_4$ ) o carregamento é mais acentuado no bordo de ataque da pá; para  $K = 1$ , o carregamento é mais acentuado no centro da pá; e para  $K = 0$  ( $r_m = r_5$ ) o carregamento é mais acentuado no bordo de fuga da pá.

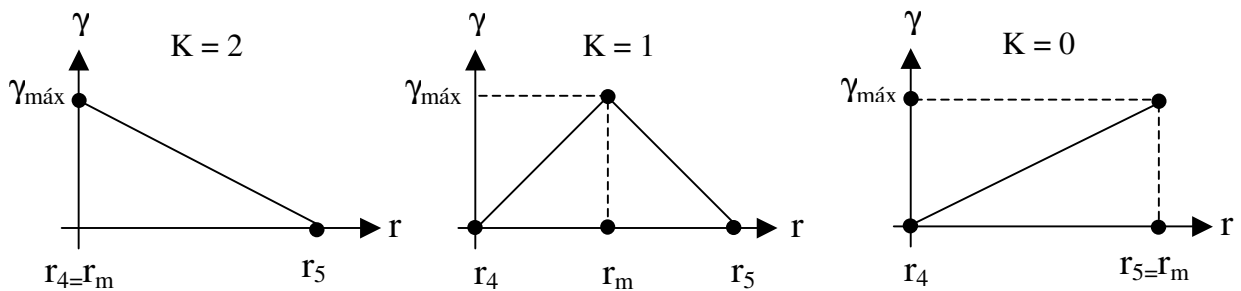


Figura 7 – Comportamento hipotético do carregamento da pá de acordo com a variação do o fator de forma

É importante salientar que, para o cálculo do fator de forma em situações reais deve-se utilizar a Equação (3.36). Contudo, a situação hipotética analisada acima leva a uma expectativa de que deve existir uma faixa de valores de  $K$  próxima de 1, representativa de formatos de pás convencionais de rotores de bom desempenho. Valores muito distantes dessa faixa indicariam situações de traçado a serem evitadas.

Nos testes realizados para o cálculo do número de Richardson apresentados na Tabela 3, os fatores de forma também foram calculados (Tabela 4). Excetuando-se os rotores de Varley (1961) — cujo formato das pás é não-convencional — e um rotor de Reddy e Kar (1971) — de eficiência relativamente baixa em função de um número de pás excessivo — ,

em todos os demais casos os valores do fator de forma calculados pela Equação (3.36) ficaram numa faixa relativamente estreita,  $0,8 \leq K \leq 0,9$ . A faixa correspondente do número de Richardson local máximo é bem mais ampla —  $0,4 \leq Ri_{\max} \leq 1,45$ .

Tabela 4 – Fator de Forma (K) para rotores centrífugos de trabalhos clássicos da literatura.

Autores	Nº de Pás	$\gamma_{\text{MAX}}$	$\frac{\gamma_{\text{MAX}}}{\text{Comp}}$	$\frac{\gamma}{\psi}$	$Ri_{\text{MAX}}$	K
<b>Kearton</b>	8	0,644381	1,472250	0,728204	1,056655	0,848554
<b>Kearton</b>	9	0,618795	1,493431	0,649088	1,062565	0,807178
<b>Bommes I</b>	6	0,285809	0,450599	0,697891	0,427452	0,845424
<b>Bommes I</b>	7	0,285830	0,450632	0,608681	0,434916	0,860248
<b>Bommes I</b>	8	0,277290	0,463536	0,536751	0,427013	0,817641
<b>Bommes II</b>	6	0,339341	0,470805	0,630250	0,582555	0,867577
<b>Bommes III</b>	7	0,363552	0,684539	0,702659	0,553052	0,831497
<b>Reddy e Kar</b>	5	0,511216	0,623352	0,664403	1,453692	0,867186
<b>Reddy e Kar</b>	6	0,468548	0,605783	0,547111	1,383484	0,808169
<b>Reddy e Kar</b>	7	0,425736	0,587644	0,462820	1,290704	0,747085
<b>Oliveira</b>	8	0,647081	1,469275	0,701747	1,147726	0,842311
<b>Oliveira</b>	10	0,575096	1,305825	0,554559	1,120233	0,832050
<b>Varley</b>	5	0,524957	0,627835	0,991750	1,130536	1,295713
<b>Varley</b>	6	0,503376	0,621683	0,800531	1,159936	1,210180

Foi também verificado para as máquinas utilizadas nos testes, sua variação em relação à rotação específica. Partindo-se da definição da rotação específica para o rotor, ou seja,

$$n_{qA_{\text{pá}}} = 1000 n \frac{Q^{1/2}}{Y_{\text{pá}}^{3/4}} \quad (3.39)$$

e sendo

$$\phi = \frac{c_{m5}}{u_5} = \frac{Q}{\pi D_5 b_5 \pi D_5 n} = \frac{Q}{\pi^2 D_5^2 b_5 n}, \quad (3.40)$$

obtém-se da Equação (3.40)

$$Q = \pi^2 D_5^2 b_5 n \phi. \quad (3.41)$$

Sendo

$$\Psi_{pá} = \frac{2 Y_{pá}}{u_5^2} = \frac{2 Y_{pá}}{\pi^2 D_5^2 n^2} \quad (3.42)$$

obtem-se

$$Y_{pá} = \frac{\Psi_{pá} \pi^2 D_5^2 n^2}{2}. \quad (3.43)$$

Substituindo (3.41) e (3.43) na Equação (3.39), obtém-se

$$n_{qA_{pá}} = 1000 n \frac{\pi D_5 b_5^{1/2} n^{1/2} \phi^{1/2} 2^{3/4}}{\pi^{3/2} D_5^{3/2} n^{3/2} \Psi_{pá}^{3/4}} \quad (3.44)$$

Simplificando a equação (3.44) resulta

$$n_{qA_{pá}} = \frac{2^{3/4} 1000}{\pi^{1/2}} \left( \frac{b_5}{D_5} \right)^{1/2} \frac{\phi^{1/2}}{\Psi_{pá}^{3/4}}. \quad (3.45)$$

Definindo uma constante C, como sendo

$$C = \frac{2^{3/4} 1000}{\pi^{1/2}} = 948,85 \quad (3.46)$$

resulta a seguinte expressão para cálculo da rotação específica:

$$n_{qA_{pá}} = 948,85 \frac{\left[ \left( \frac{b_5}{D_5} \right) \phi \right]^{1/2}}{\Psi_{pá}^{3/4}}. \quad (3.47)$$

Através da Equação (3.47), foi possível calcular as rotações específicas para as máquinas utilizadas nos testes, conforme a Tabela 5.

Tabela 5 – Rotação Específica, Número de Richardson (Ri) e Fator de Forma (K) para rotores centrífugos de trabalhos clássicos da literatura.

	Nº de Pás	b5	D5	b5/D5	$\phi$	$\Psi_{pá}$	$n_{qA_{pá}}$	Ri	K
<b>Kearton (Turbocomp.)</b>	8	50,8	381	0,133333	0,290511	0,884891	204,68	1,06	0,85
<b>Kearton (Turbocomp.)</b>	9	50,8	381	0,133333	0,277506	0,953330	189,18	1,06	0,81
<b>Bommes I (Ventilador)</b>	6	78	500	0,156	0,322144	0,409533	415,49	0,43	0,84
<b>Bommes I (Ventilador)</b>	7	78	500	0,156	0,313125	0,469590	369,68	0,44	0,86
<b>Bommes I (Ventilador)</b>	8	78	500	0,156	0,306326	0,516609	340,39	0,43	0,82
<b>Bommes II (Ventilador)</b>	6	70	560	0,125	0,290511	0,538423	287,66	0,58	0,87
<b>Bommes III (Ventilador)</b>	7	50	500	0,1	0,442596	0,517395	327,21	0,55	0,83
<b>Reddy e Kar (Bomba)</b>	5	7	208	0,033654	0,278296	0,769437	111,77	1,45	0,87
<b>Reddy e Kar (Bomba)</b>	6	7	208	0,033654	0,260807	0,856404	99,85	1,38	0,81
<b>Reddy e Kar (Bomba)</b>	7	7	208	0,033654	0,249265	0,919875	92,52	1,29	0,75
<b>Oliveira (Ventilador)</b>	8	32,1	419,5	0,076520	0,438215	0,922100	184,65	1,15	0,84
<b>Oliveira (Ventilador)</b>	10	32,1	419,5	0,076520	0,399434	1,037033	161,42	1,12	0,83
<b>Varley (Bomba 2 Entradas)</b>	5	4,5	243,84	0,018455	0,362381	0,529324	125,03	1,13	1,30
<b>Varley (Bomba 2 Entradas)</b>	6	4,5	243,84	0,018455	0,335508	0,628803	105,73	1,14	1,21

Na Tabela 5, as linhas sombreadas referem-se às máquinas com número de pás “ótimo”, definidas através do critério de maximização do número de Richardson (Ri) segundo Oliveira *et al.* 2002.

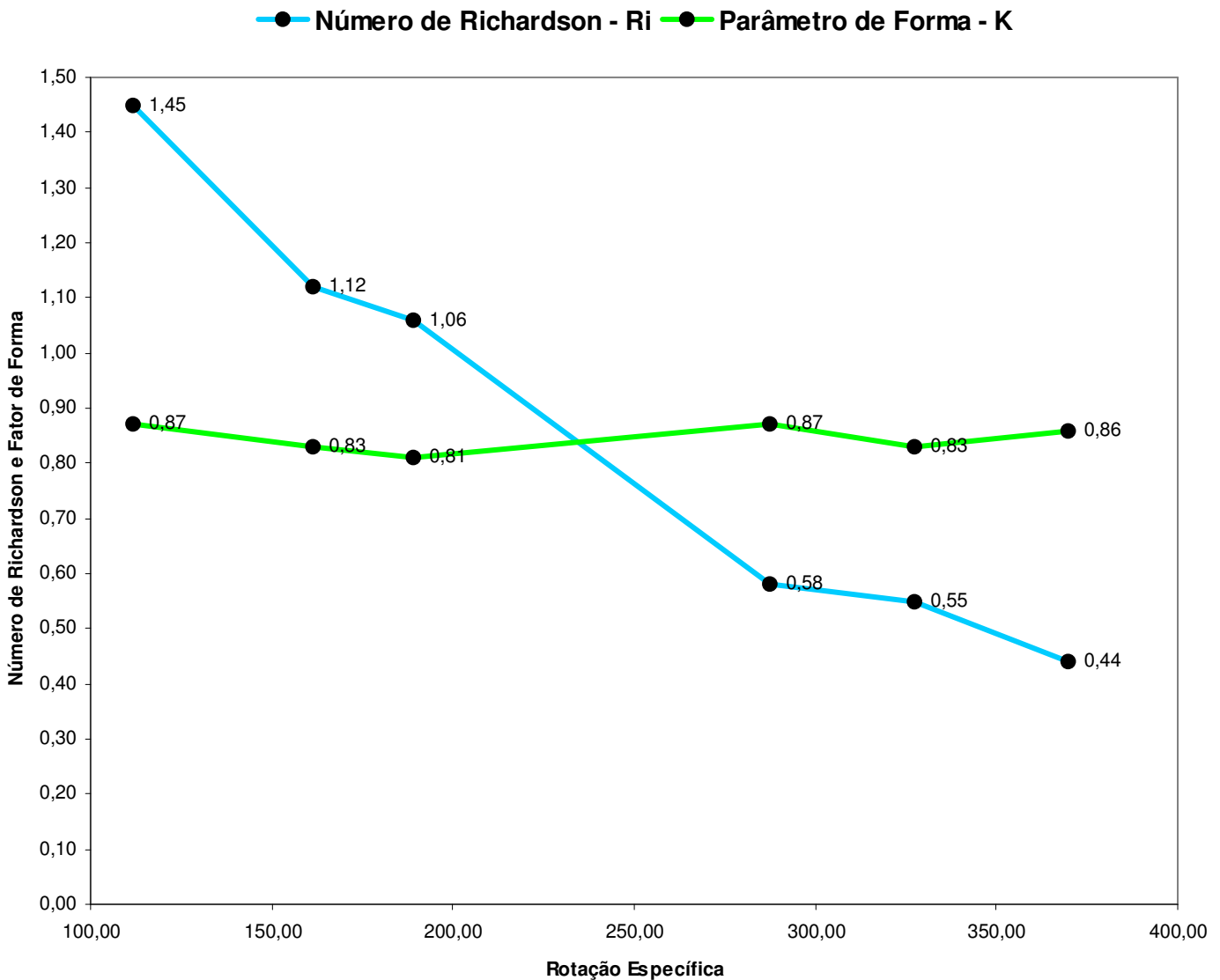


Figura 8 – Número de Richardson (Ri) e Fator de Forma (K) em função da Rotação Específica ( $n_{qA_{pá}}$ )

Na Figura 8, estão comparadas as variações do número de Richardson (Ri) e do fator de forma (K) em função da rotação específica ( $n_{qA}$ ). Pode-se concluir que o número de Richardson é mais sensível aos parâmetros geométricos globais da máquina, que variam com a rotação específica (como as relações de raios e de largura). Por outro lado, o fator de forma é bem menos sensível, e serve para caracterizar o traçado da pá. Logo, em um processo de otimização, com um par  $(\phi, \psi)$  fixado, é possível ainda buscar a maximização do número de Richardson, desde que se estabeleçam restrições dentro de uma faixa do fator de forma relativamente estreita (p. ex.,  $0,8 \leq K \leq 0,9$ ).

## Capítulo 4

# METODOLOGIA DE TRAÇADO DE PÁS

Neste capítulo, que trata da metodologia de traçado de pás, é definido o problema básico que trata da maximização do número de Richardson local máximo na condição sem choque, com restrições relativas ao ponto de funcionamento (coeficiente de pressão e de vazão) e ao fator de forma descrito no capítulo anterior.

São apresentados a parametrização do formato da pá, os parâmetros de projeto, alguns problemas típicos de traçado, a forma utilizada para tratamento de pás como variável real, o algoritmo de otimização utilizado, com código disponível na biblioteca IMSL e testes para definir o grau do polinômio da parametrização geométrica.

## 4.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA BÁSICO

No capítulo anterior foi verificado que o número de Richardson ( $Ri$ ) é útil na definição do número de pás ótimo, desde que mantenha-se livre o ponto de funcionamento. Por outro lado, ao se fixar o ponto de funcionamento, é sempre possível aumentar o  $Ri$ , porém diminuindo o número de pás e afetando brutalmente o formato das mesmas, obtendo-se formatos de pá inviáveis na prática. Ocorre também que a faixa de números de Richardson

nominais de rotores de bom desempenho, conforme visto no capítulo 3, é bastante ampla ( $0,4 \leq Ri \leq 1,4$ ).

O fator de forma ( $K$ ) foi então introduzido para amenizar essas dificuldades, pois apresenta-se numa faixa relativamente estreita ( $0,8 \leq K \leq 0,9$ ) para formatos convencionais de pás de rotores centrífugos em uma ampla faixa de rotações específicas ( $100 \leq n_{qA} \leq 400$ ).

Surge portanto uma abordagem mais natural para o problema de traçado, que consiste em maximizar o número de Richardson máximo local mantendo um valor fixo (ou uma faixa estreita) para o fator de forma, além de restrições para o ponto de funcionamento:

$$\text{Definição do problema geral} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar o } Ri_{MÁX}. \\ \text{sujeito a: } K = K_0 \text{ ou } K_{MÍN} \leq K \leq K_{MÁX} \\ \text{e restrições sobre ponto de funcionamento } (\phi \text{ e } \psi) \end{array} \right.$$

As variáveis de projeto que definem a função objetivo ( $Ri_{MÁX}$ ) e as restrições ( $K$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ , etc.) incluem os parâmetros de formato da pá, a serem definidos no próximo item, além de outros parâmetros geométricos, como número de pás, a relação de raios e a relação de larguras. Os cálculos de  $Ri$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  e  $K$  são efetuados com o modelo de escoamento potencial, descrito no capítulo 2, na condição sem choque.

## 4.2 PARAMETRIZAÇÃO DO FORMATO DA PÁ

A pá de referência será considerada infinitamente fina, sendo descrita por uma curva polar  $\theta(r)$ , com  $r_4 \leq r \leq r_5$  e com  $\theta(r_4) = 0$ , conforme a Figura 9.

O método proposto consiste em perturbar um formato básico pré-existente,  $\theta_B(r)$ , com  $\theta_B(r_4) = 0$  e considerado fixo durante os cálculos, através de uma função de perturbação  $\theta_P(r)$ , para a qual define-se também que  $\theta_P(r_4) = 0$  — dependente de parâmetros de forma a serem determinados — de modo que  $\theta(r) = \theta_B(r) + \theta_P(r)$ .



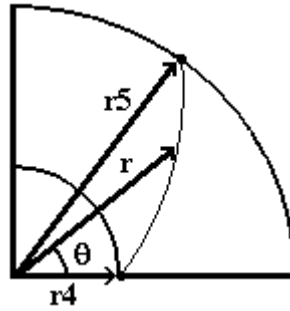


Figura 9 – Representação esquemática de um rotor com pá infinitamente fina

No presente trabalho a função  $\theta_p(r)$  será obtida por combinação linear de funções de forma  $f_j(r)$  com  $j = 0, 1, 2, 3, \dots, M$  com  $f_j(r_4) = 0$  e com  $M + 1$  coeficientes  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_M$ :

$$\theta_p(r) = \sum_{j=0}^M S_j f_j(r) \quad (4.1)$$

sendo

$$f_j(r) = \left( \frac{r - r_4}{r_5 - r_4} \right)^{j+1} \text{ para } j = 0, 2, 4, 6, \dots \quad (4.2)$$

e

$$f_j(r) = \left[ \frac{(r - r_4)(r_5 - r)}{(r_5 - r_4)^2} \right]^{j+1} \text{ para } j = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (4.3)$$

As funções de índice par,  $j = 0, 2, 4, 6, \dots$ , permitem perturbações com ênfase na região do bordo de fuga das pás, enquanto as de índice ímpar,  $j = 1, 3, 5, 7, \dots$ , perturbam a região central das pás, conforme demonstra a Figura 10.

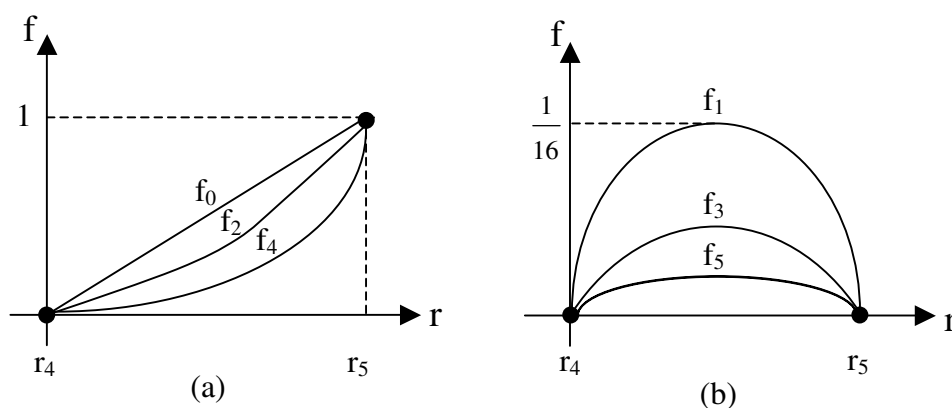


Figura 10 – Funções de forma a) funções de índice par b) funções de índice ímpar

### 4.2.1 – Parâmetros de Projeto

Além dos  $M + 1$  coeficientes  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_M$ , outros três parâmetros de projeto podem ser incluídos: o número de pás ( $N_{pá}$ ), a relação de raios ( $r_4/r_5$ ) e a relação de larguras ( $b_4/b_5$ ).

Tem-se, portanto,  $N = M + 1 + n$  (com  $n \leq 3$ ) parâmetros de projeto, sendo  $X_1, X_2, \dots, X_N$  de maneira que  $X_1 = S_0, X_2 = S_1, \dots, X_{M+1} = S_M$  e, no caso da inclusão de outros parâmetros,  $X_{M+2} = N_{pá}, X_{M+3} = r_4/r_5$  e  $X_{M+4} = b_4/b_5$ .

## 4.3 PROBLEMAS TÍPICOS DE TRAÇADO

A estratégia básica utilizada no presente trabalho para o traçado de pás inicia com o cálculo do escoamento potencial para a geometria básica  $\theta_B(r)$  da pá, com um certo conjunto básico de parâmetros do rotor:  $N_B, (r_4/r_5)_B, (b_4/b_5)_B$ .

Os resultados relevantes obtidos para a geometria básica são: coeficiente de vazão ( $\phi_B$ ) e de pressão ( $\psi_B$ ), na condição sem choque, e o fator de forma ( $K_B$ ).

O traçado da pá é feito prescrevendo-se valores fixos ou faixa de valores para os parâmetros  $\phi, \psi$  e  $K$ , pretendidos, e os correspondentes valores obtidos para a geometria básica:

$$f_{vv} = \frac{\phi}{\phi_B}, \quad f_{vp} = \frac{\psi}{\psi_B}, \quad f_{vff} = \frac{K}{K_B}. \quad (4.4)$$

Essas relações serão denominadas, respectivamente, fatores de variação de vazão, de pressão e de fator de forma.

Dada a estratégia de perturbação, é conveniente prescrever que estes fatores não se afastem de uma faixa relativamente estreita em torno de 1 (por exemplo, entre 0,9 e 1,1). Portanto, essa estratégia exige que o projetista tenha conhecimento de um projeto preliminar que não se afaste demasiadamente do projeto pretendido.

Diversos problemas típicos de traçado podem ser definidos, conforme o item a seguir.

### 4.3.1 Alguns Problemas Típicos de Traçado

Nos subitens a seguir, são apresentados cinco casos de problemas típicos de traçado com variações de parâmetros, citando as referidas faixas de variações permitidas.

#### 4.3.1.1 Variar a vazão e fixar a pressão

Maximizar o  $Ri_{MÁX}$

sujeito a:

$$fv_p = 1 ;$$

$$fv_v = fv_{v\acute{o}t} \text{ ou } fv_{vMÍN} \leq fv_v \leq fv_{vMÁX} ;$$

$$fv_{ff} = fv_{ff\acute{o}t} \text{ ou } fv_{ffMÍN} \leq fv_{ff} \leq fv_{ffMÁX} ;$$

$$X_i^L \leq X_i \leq X_i^U , \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

onde  $X_i^L$  e  $X_i^U$  representam limites inferiores e superiores para os parâmetros de projeto descritos no item 4.2.1 e os valores indicados por  $( )_{\acute{o}t}$ ,  $( )_{MÍN}$  e  $( )_{MÁX}$  devem ser adotados na faixa comentada no item anterior, de acordo com o interesse do projetista.

#### 4.3.1.2 Variar a pressão e fixar a vazão

Maximizar o  $Ri_{MÁX}$

sujeito a:

$$fv_v = 1 ;$$

$$fv_p = fv_{p\acute{o}t} \text{ ou } fv_{pMÍN} \leq fv_p \leq fv_{pMÁX} ;$$

$$fv_{ff} = fv_{ff\acute{o}t} \text{ ou } fv_{ffMÍN} \leq fv_{ff} \leq fv_{ffMÁX} ;$$

$$X_i^L \leq X_i \leq X_i^U , \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

#### 4.3.1.3 Variar a vazão e a pressão de forma independente

Maximizar o  $Ri_{MÁX}$

sujeito a:

$$fv_v = fv_{v\acute{o}t} \text{ ou } fv_{vMÍN} \leq fv_v \leq fv_{vMÁX} ;$$

$$fv_p = fv_{p\acute{o}t} \text{ ou } fv_{pMÍN} \leq fv_p \leq fv_{pMÁX} ;$$

$$fv_{ff} = fv_{ff\acute{o}t} \text{ ou } fv_{ffMÍN} \leq fv_{ff} \leq fv_{ffMÁX} ;$$

$$X_i^L \leq X_i \leq X_i^U , \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

#### 4.3.1.4 Variar a vazão e a pressão mantendo a rotação específica do rotor (tomando por base a variação da pressão)

Maximizar o  $Ri_{MÁX}$

sujeito a:

$$fvp = fvp_{ót} \text{ ou } fvp_{MÍN} \leq fvp \leq fvp_{MÁX} ;$$

$$fvv = fvp^{3/2}$$

$$fvff = fvff_{ót} \text{ ou } fvff_{MÍN} \leq fvff \leq fvff_{MÁX} ;$$

$$X_i^L \leq X_i \leq X_i^U, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

Obs: neste problema o coeficiente de vazão varia com a potência 3/2 do coeficiente de pressão, conforme (3.47).

#### 4.3.1.5 Variar a vazão e a pressão mantendo o ângulo do escoamento absoluto na saída

Maximizar o  $Ri_{MÁX}$

sujeito a:

$$fvp = fvp_{ót} \text{ ou } fvp_{MÍN} \leq fvp \leq fvp_{MÁX} ;$$

$$fvv = fvp$$

$$fvff = fvff_{ót} \text{ ou } fvff_{MÍN} \leq fvff \leq fvff_{MÁX} ;$$

$$X_i^L \leq X_i \leq X_i^U, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

Obs: neste problema o coeficiente de vazão deve ser diretamente proporcional ao coeficiente de pressão a fim de manter o ângulo do escoamento absoluto na saída.

#### 4.3.1.6 Observações

1 - Nos problemas 4.3.1.1, 4.3.1.2 e 4.3.1.3, tanto a rotação específica quanto o ângulo do escoamento absoluto na saída do rotor projetado poderão, em geral, diferir das correspondentes grandezas do rotor básico, porque são impostas variações dos coeficientes de pressão, vazão e forma.

2 - No problema 4.3.1.4, a rotação específica é mantida, mas o ângulo de escoamento absoluto irá variar, exceto no caso em que  $fvp_{ót} = 1$ . Nesse problema, tem-se  $fvv/fvp =$

$(fvp)^{1/2}$ , o que demonstra que para uma variação do coeficiente de pressão menor que 10%, a variação do ângulo será menor que 6%.

3 - No problema 4.3.1.5, o ângulo do escoamento absoluto na saída é mantido mas a rotação específica irá variar, exceto no caso em que  $fvp_{ot} = 1$ . Nesse problema, tem-se  $(fvv)^{1/2} / (fvp)^{1/4} = (fvp)^{1/4}$ , mostrando que, para uma variação do coeficiente de pressão menor que 10%, a variação da rotação específica será menor que 3%.

4 - Manter a rotação específica é adequado quando se tem confiança no posicionamento do rotor básico em relação ao diagrama de Cordier; por outro lado, manter o ângulo na saída é adequado quando houver a intenção de se aproveitar uma voluta que já tenha sido projetada para o rotor básico. Em qualquer caso, entretanto, as dimensões do rotor básico (relações de raios e de larguras) poderão ser mantidas, podendo-se variar apenas o número de pás, desde que  $fvp$  não esteja demasiadamente afastado do valor 1.

## 4.4 TRATAMENTO DO NÚMERO DE PÁS COMO VARIÁVEL REAL

Métodos tradicionais de traçado de pás comumente adotam formatos padronizados (pás em arco de círculo, logarítmicas, etc), independentemente do número de pás. Um dos aspectos salientes da metodologia de traçado proposta neste trabalho consiste na forte interdependência entre formato e número de pás resultante da própria metodologia. Para isso, será importante considerar o número de pás como variável de projeto, juntamente com os coeficientes de parametrização do formato.

Versões iniciais do código computacional de cálculo do escoamento potencial em rotores centrífugos, desenvolvidas na UNIFEI, baseavam-se numa somatória de 1 a  $N_{pá}$  do efeito das distribuições de vórtices sobre as pás (Manzanares Filho, 1982). Em outras palavras, o efeito de cada painel era adicionado de maneira independente dos demais. Esse tipo de implementação possibilitava um cálculo exato da integral representativa da velocidade induzida pela distribuição linear de vórtices em cada painel, e isso de fato era feito. Desse modo, porém, o número de pás deveria sempre ser tratado como um parâmetro inteiro (discreto), o que impediria de considerá-la como variável de projeto em algoritmos de otimização de funções de variáveis contínuas. Como esse tipo de algoritmo foi adotado no presente trabalho, tornou-se necessário modificar o cálculo das velocidades induzidas pelas distribuições de vórtices das pás, de modo a tratar o número de pás como variável real.

O procedimento é relativamente simples: ao invés de somar os efeitos dos painéis correspondentes de cada pá de modo independente, utiliza-se a Equação (2.9) na Equação (2.19) considerando  $N_{pá}$  como parâmetro real e integrando sobre uma pá de referência com um esquema de integração numérico. O esquema utilizado é semelhante ao empregado por Petrucci *et al.* (2001) no âmbito das grades lineares. Consiste em somar e subtrair o efeito da pá de referência isolada. O efeito da pá isolada é calculado analiticamente, permitindo computar de maneira direta o valor principal de Cauchy e as descontinuidades da velocidade tangencial sobre cada painel da pá de referência. O efeito de grade, isto é, o efeito das demais pás da grade, fica representado por integrais regulares (não-singulares), podendo ser calculado por esquemas tradicionais de integração. No presente trabalho, empregou-se um esquema rápido de integração, baseado no método dos trapézios, descrito por Petrucci *et al.* (2001). Esse esquema mostrou-se satisfatoriamente preciso para um número de pás moderado ( $< 20$ ), típico dos projetos de rotores com pás curvadas para trás. Com o esquema adotado, o número de pás pode ser tratado como variável de projeto em algoritmos de otimização clássicos disponíveis em bibliotecas computacionais consagradas, como aquele empregado neste trabalho (ver item 4.5). Após a determinação de um número de pás não-inteiro, é possível fixá-lo igual a um número inteiro próximo e rodar o código computacional novamente, sem considerar agora o número de pás como variável de projeto.

## 4.5 ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO

Numa fase inicial, foi utilizado a rotina de otimização `DNCONF` da biblioteca `IMSL` que acompanha o compilador `Fortran PowerStation` - versão 4.0. Essa rotina implementa um método de programação quadrática seqüencial com restrições para resolver problemas gerais de programação não-linear, podendo ser utilizadas restrições de igualdade ou de desigualdade. Para a função objetivo foram utilizadas restrições de igualdade para o número de Richardson  $R_i$ , o coeficiente de vazão  $\phi$ , o coeficiente de pressão  $\psi$  e o fator de forma  $K$ .

Verificou-se, no entanto, que a rotina `DNCONF` não foi capaz de atender às expectativas, apresentando uma alta sensibilidade às condições de variação das faixas de restrição para  $f_{vp}$ ,  $f_{vv}$  e  $f_{vff}$ . Frequentemente, não se conseguia atingir a convergência dos resultados e o programa computacional terminava de rodar sem apresentar uma solução satisfatória para o formato da pá.

Foi então utilizado a rotina de otimização DUMPOL também da biblioteca IMSL do Fortran PowerStation - versão 4.0, que minimiza uma função de  $N$  variáveis, usando um algoritmo de procura direta para localizar um ponto de mínimo de funções de variáveis contínuas. Para introduzir restrições não-lineares, no entanto, foi necessário aplicar um esquema de penalização na função objetivo, pois a rotina DUMPOL não trata restrições gerais, apenas restrições laterais para as faixas dos parâmetros de projeto.

O método de busca implementado na rotina DUMPOL baseia-se em comparações dos valores da função objetivo e começa com um conjunto de  $N+1$  pontos no espaço de solução, denominado *simplex*:  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N+1}$ . A cada iteração, um novo ponto é gerado para substituir o pior  $\mathbf{x}_j$  do ponto (aquele que tem o maior valor da função) entre estes  $N+1$  pontos. O novo ponto é localizado pela expressão  $\mathbf{x}_k = \mathbf{c} + \alpha(\mathbf{c} - \mathbf{x}_j)$  onde  $\mathbf{c} = \sum_{i \neq j} \mathbf{x}_i / N$ . Trata-se de uma reflexão do pior ponto em relação ao centróide  $\mathbf{c}$  dos demais pontos do simplex, sendo  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) o coeficiente de reflexão. Quando o novo ponto for o melhor ponto, o simplex é expandido em busca de um novo ponto mais distante do simplex atual, de modo a evitar convergência prematura. Quando o novo ponto for pior ponto, o simplex é contraído em busca de um ponto melhor. Para uma descrição completa do algoritmo, sugere-se a consulta ao artigo de Nelder e Mead (1965).

Este algoritmo apresentou-se melhor para a utilização neste trabalho pelo fato de ser mais robusto, sendo que sempre convergia e apresentava uma solução razoável para o traçado da pá. O Apêndice B apresenta o fluxograma do processo de otimização.

## 4.6 TESTES

Definido o algoritmo de otimização, na próxima etapa foram realizados testes para verificar o comportamento do método de traçado de pás pretendido.

Para definir um valor adequado do grau do polinômio da parametrização geométrica, foram feitos testes utilizando-se como geometria básica os dados do rotor centrífugo de Oliveira (2001), conforme a última linha da Tabela 2, pág. 35. Estes testes foram feitos para indicar um valor para o grau do polinômio da parametrização geométrica que fosse suficiente para indicar um traçado de pá satisfatório, atendendo a todas as restrições, e que, ao mesmo tempo, não fosse muito grande a fim de evitar um custo computacional excessivo ou mesmo inconveniente — pois além do aumento do número de variáveis de projeto e do aumento do

número de chamadas da função objetivo, um polinômio de grau muito alto também pode acarretar um traçado não convencional, com fortes variações de curvatura.

Para os testes, considerou-se o problema típico do item 4.3.1.4 em três casos com diferentes valores do fator de variação de pressão  $f_{vp}$ , mantendo-se em todos os casos a rotação específica e também o fator de forma da geometria básica ( $f_{vff} = 1$ , correspondendo a  $K = 0,832$ ). As Tabelas 6, 7 e 8 apresentam resultados dos testes para os casos de  $f_{vp} = 1$ ,  $f_{vp} = 1,1$  e  $f_{vp} = 0,9$ , respectivamente. Estão listados o número de pás original para o formato básico e também para o formato modificado, os valores de  $Ri_{MÁX}$ ,  $K$ ,  $\phi$  e  $\psi$ , o número da chamadas da função objetivo pela rotina DUMPOL em função do grau do polinômio de parametrização geométrica. Apresenta-se também uma avaliação final sobre o formato da pá resultante. O termo BOM indica pás sem grandes inflexões de formato; o termo RUIM, indica o contrário.

Para o caso  $f_{vp} = 1$ , Tabela 6, os formatos das pás geradas estão mostrados nas Figuras 11, 12, 13, 14, 15 e 16 para valores do grau do polinômio iguais a 1, 2, 3, 5, 7, 9, respectivamente. O polinômio de grau 1 praticamente reproduz o formato básico. Para os graus 2, 3 e 7, foi possível aumentar o número de Richardson em relação ao formato básico, obtendo-se ainda um formato satisfatório da pá, próximo ao básico. Para os graus 5 e 9, porém, os formatos obtidos não foram considerados satisfatórios, apesar do forte aumento verificado no número de Richardson máximo. Note-se o grande aumento verificado no número de chamadas da função objetivo quando se passa de um polinômio de grau 3 para um de grau 5.

Tabela 6 – Características das pás da máquina de Oliveira (2001) para  $f_{vp} = 1$

Nº de Pás (Base)	Nº de Pás (Modif.)	$Ri_{MÁX}$	K	$\Phi$	$\Psi$	Nº Chamadas da Função	Grau Polinôm.	Formato da Pá
10	10,00	1,1203	0,8320	0,3994	1,0370	105	1	BOM
10	9,78	1,1448	0,8320	0,3994	1,0370	298	2	BOM
10	8,99	1,2341	0,8318	0,3994	1,0370	500	3	BOM
10	7,47	1,4917	0,8320	0,3994	1,0370	1401	5	RUIM
10	9,80	1,1731	0,8320	0,3994	1,0370	1228	7	BOM
10	7,61	1,4345	0,8320	0,3994	1,0370	1865	9	RUIM



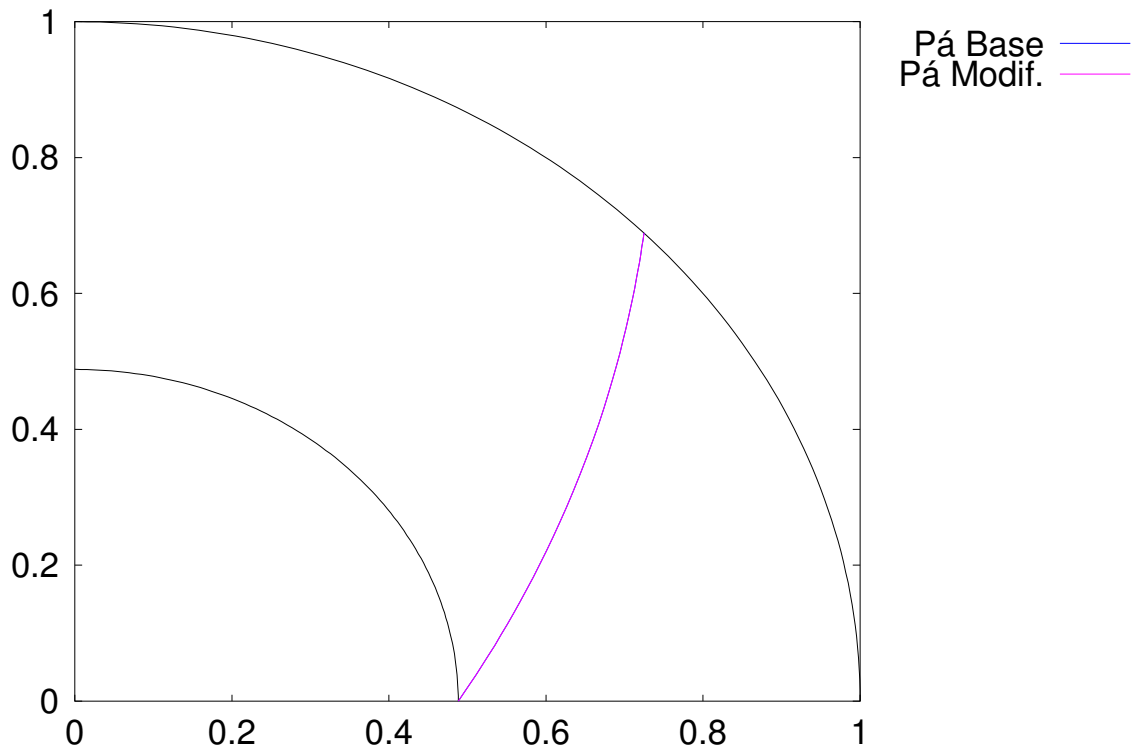


Figura 11 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=1$  e polinômio grau 1

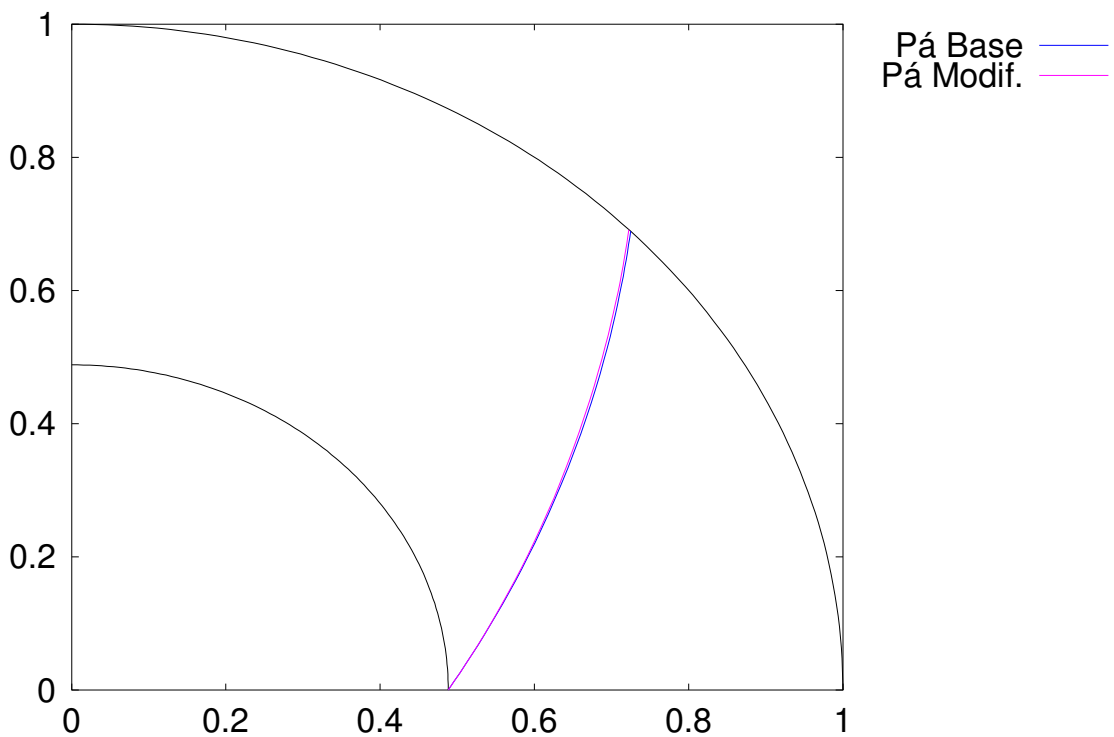


Figura 12 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=1$  e polinômio grau 2

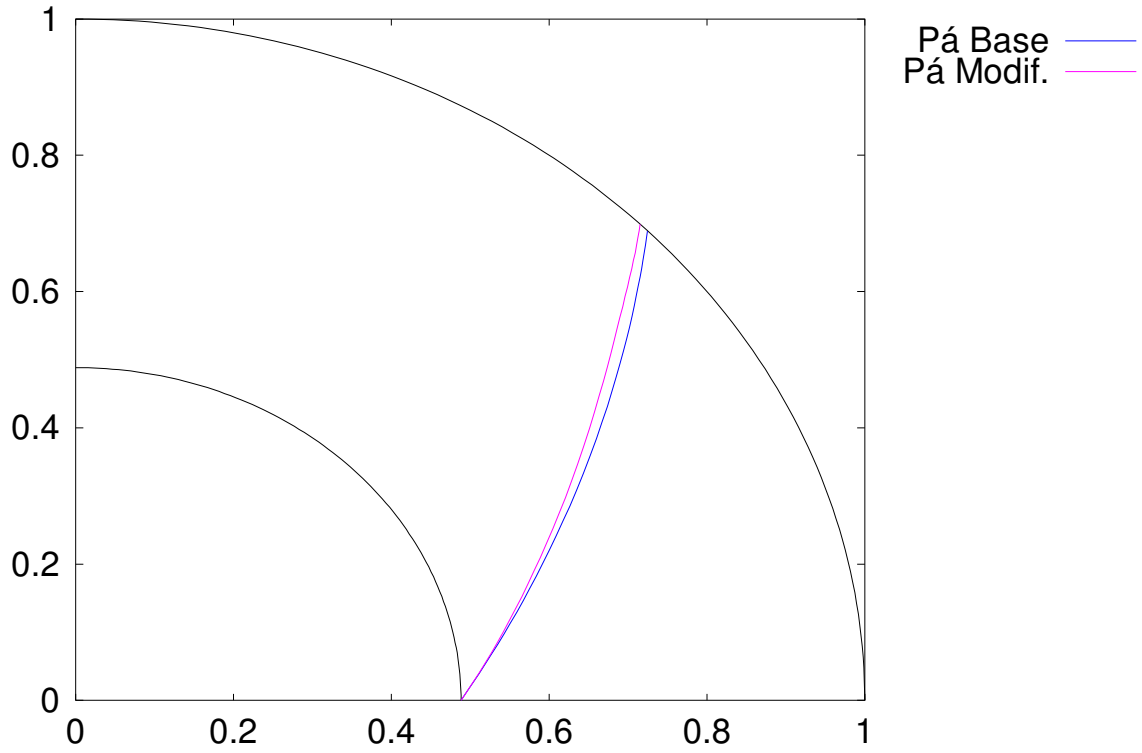


Figura 13 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=1$  e polinômio grau 3

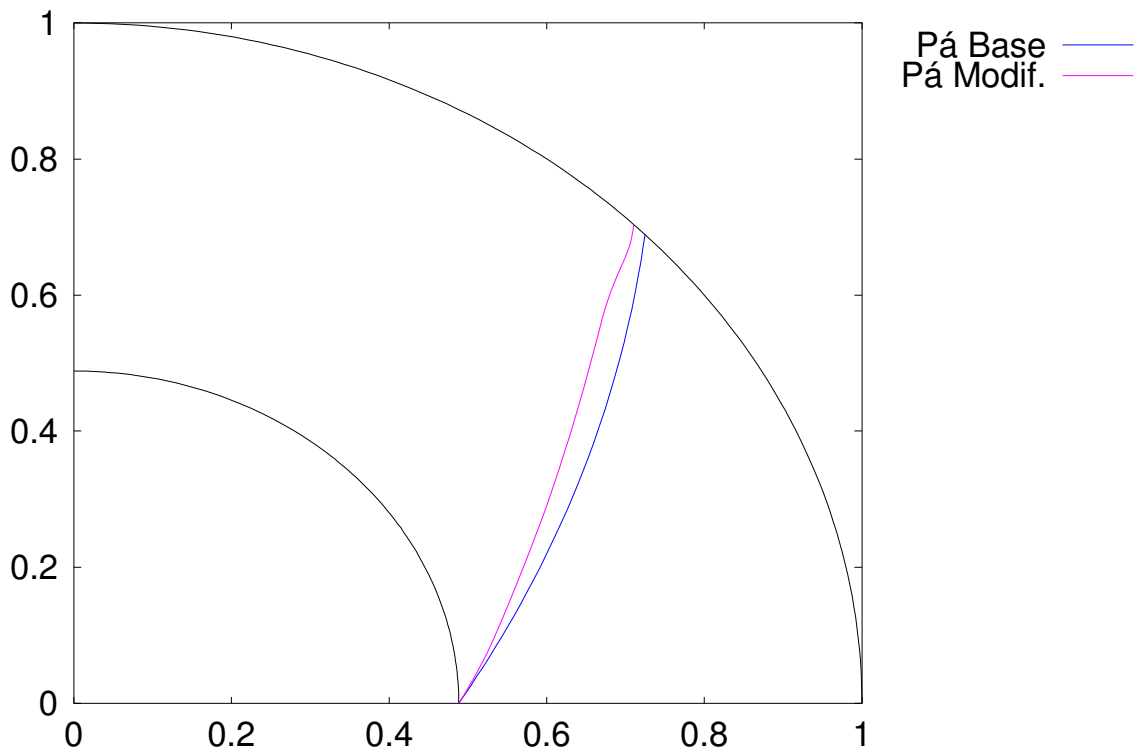


Figura 14 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=1$  e polinômio grau 5

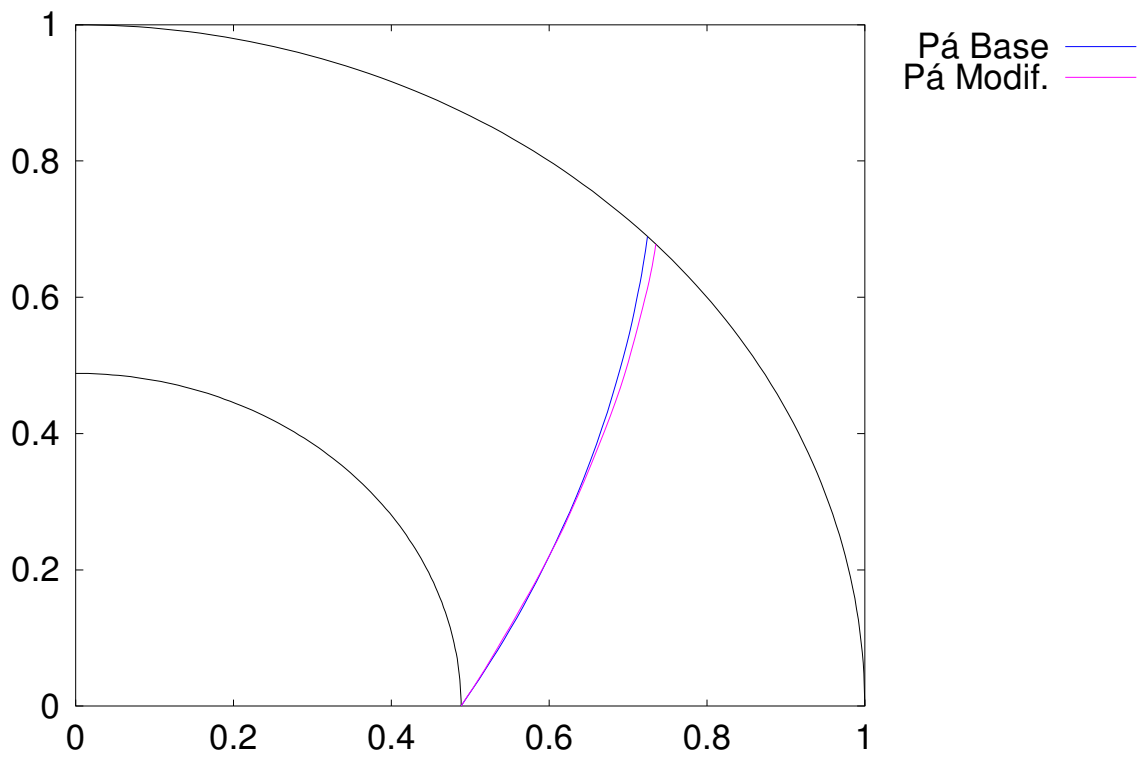


Figura 15 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=1$  e polinômio grau 7

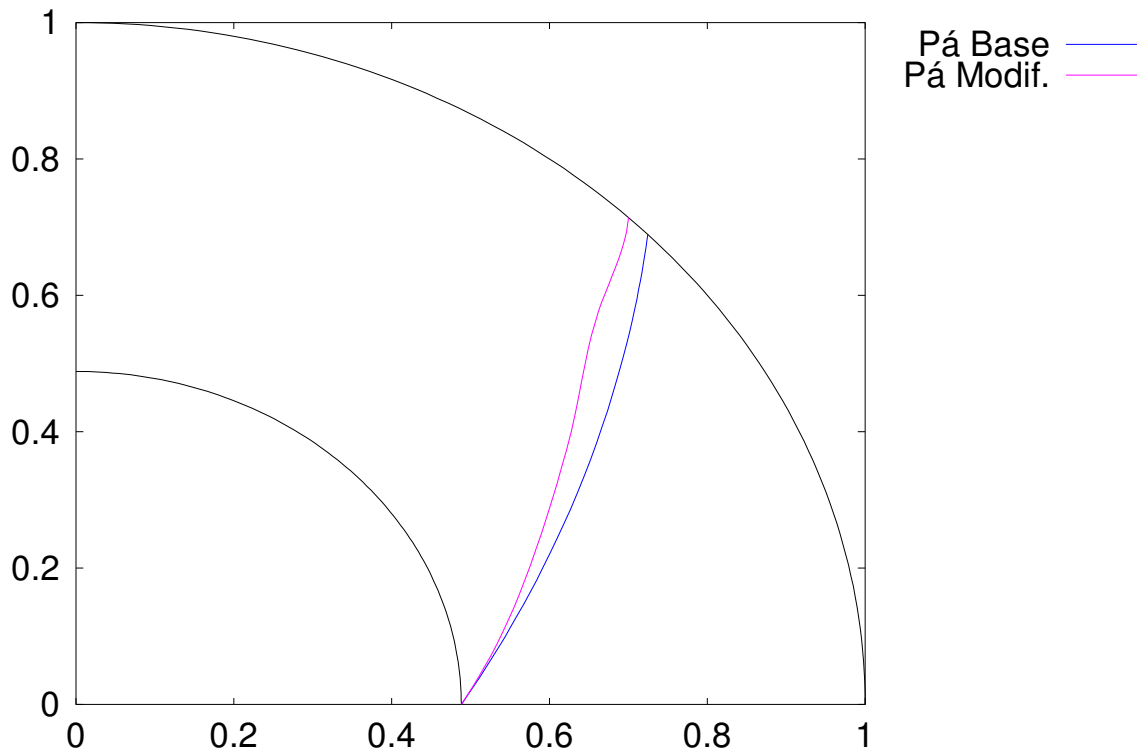


Figura 16 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=1$  e polinômio grau 9

Para o caso  $fvp = 1,1$ , Tabela 7, os formatos das pás geradas estão mostrados nas Figuras 17, 18, 19, 20, 21 e 22 para valores do grau do polinômio iguais a 1, 2, 3, 5, 7, 9, respectivamente. Nesse caso, o formato da pá resultante pôde ser considerado BOM para todos os graus do polinômio, cujo efeito foi menos pronunciado que no caso  $fvp = 1$ , tanto no formato como no número de pás. A pá modificada é sempre mais curta e com maiores ângulos ao longo de toda a pá a fim de produzir um maior coeficiente de pressão e também um maior coeficiente de vazão. O maior número de Richardson máximo local foi obtido com polinômio de grau 7, porém a custo de um elevado número de chamadas da função objetivo e com um formato de pá onde aparece uma inflexão de curvatura antes da saída. Curiosamente, para polinômio de grau 9, essa tendência é revertida e o número de chamadas da função objetivo volta a baixar. Note-se ainda que, para um grau de polinômio igual a 1, não foi possível manter o valor do fator de forma original. Isso ocorre, provavelmente, porque há poucos parâmetros de projeto para o método de otimização/penalização manter todas as restrições impostas.

Tabela 7 – Características das pás da máquina de Oliveira (2001) para  $fvp = 1,1$

Nº de Pás (Base)	Nº de Pás (Modif.)	$Ri_{MÁX}$	K	$\varphi$	$\Psi$	Nº Chamadas da Função	Grau Polinôm.	Formato da Pá
10	10,09	1,249186	0,8171	0,460880	1,1371	240	1	BOM
10	10,66	1,225337	0,8320	0,460823	1,1407	687	2	BOM
10	10,44	1,247393	0,8320	0,460822	1,1407	463	3	BOM
10	10,14	1,283846	0,8320	0,460880	1,1407	735	5	BOM
10	9,78	1,345901	0,8319	0,460814	1,1407	4091	7	BOM
10	10,12	1,292530	0,8320	0,460821	1,1407	1382	9	BOM

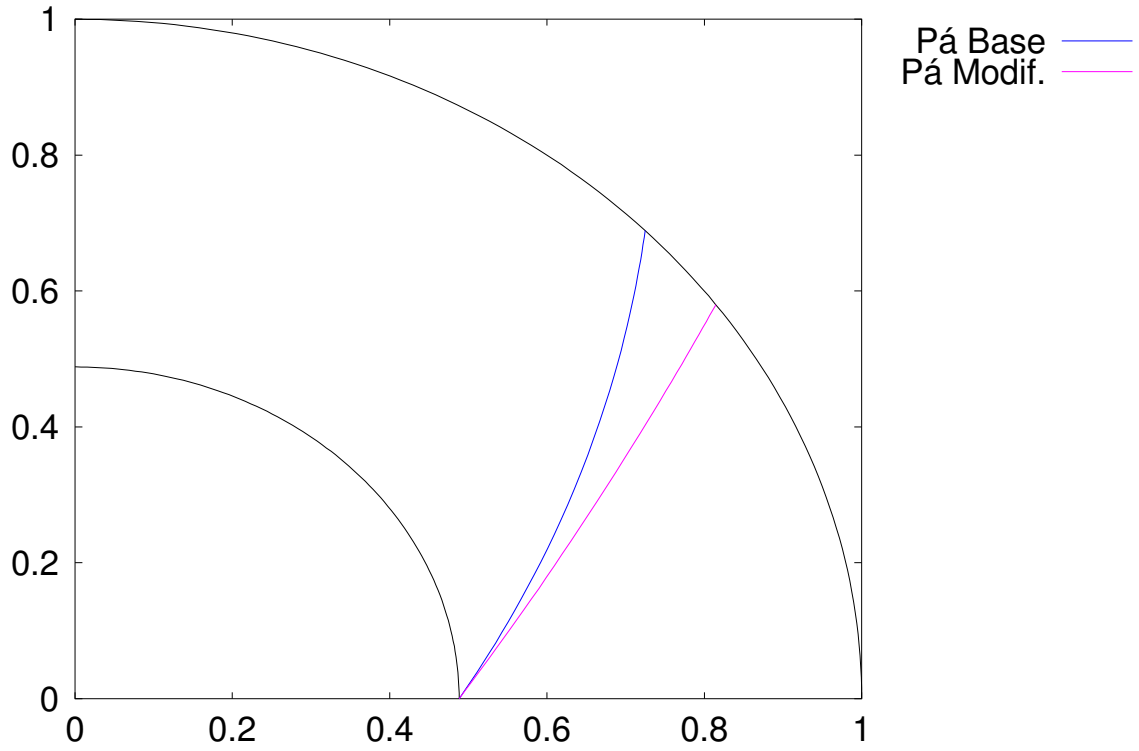


Figura 17 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=1,1$  e polinômio grau 1

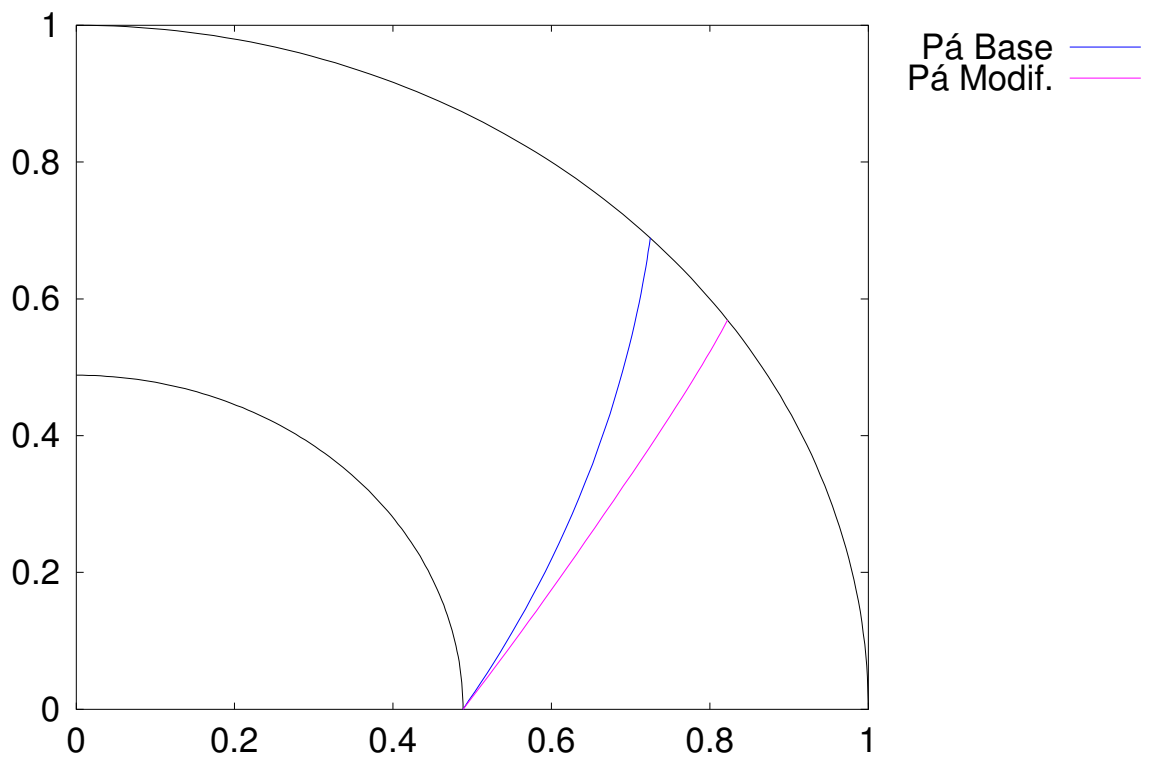


Figura 18 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=1,1$  e polinômio grau 2

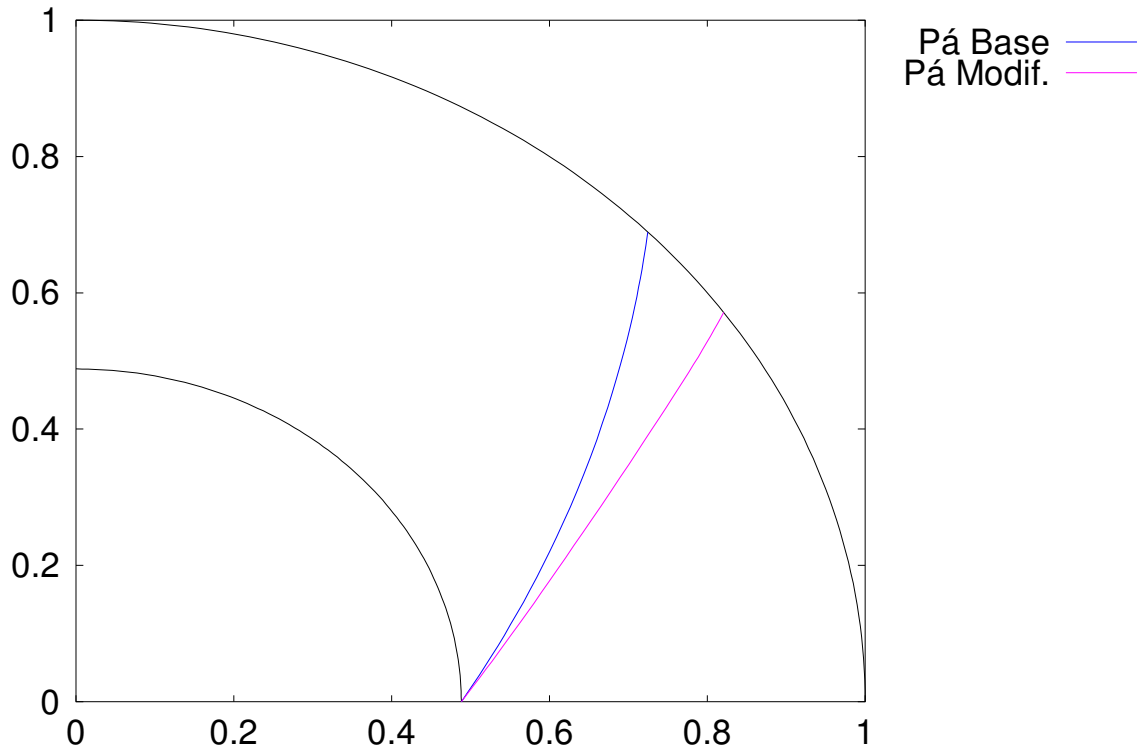


Figura 19 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=1,1$  e polinômio grau 3

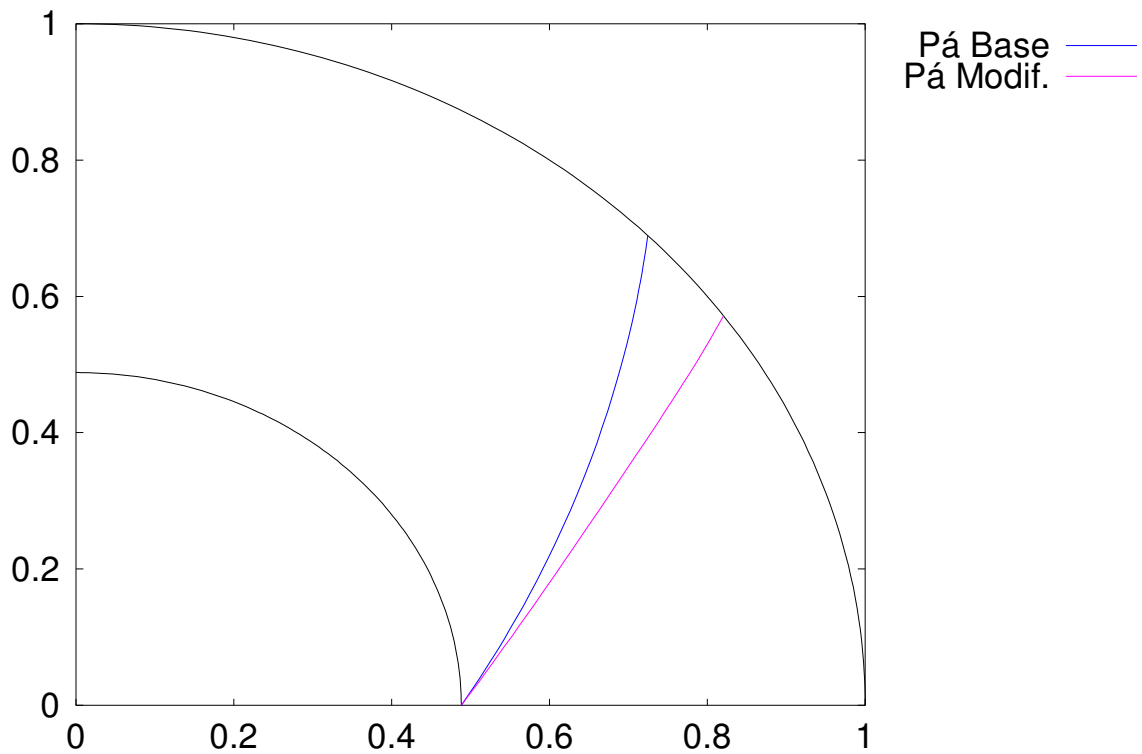


Figura 20 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=1,1$  e polinômio grau 5

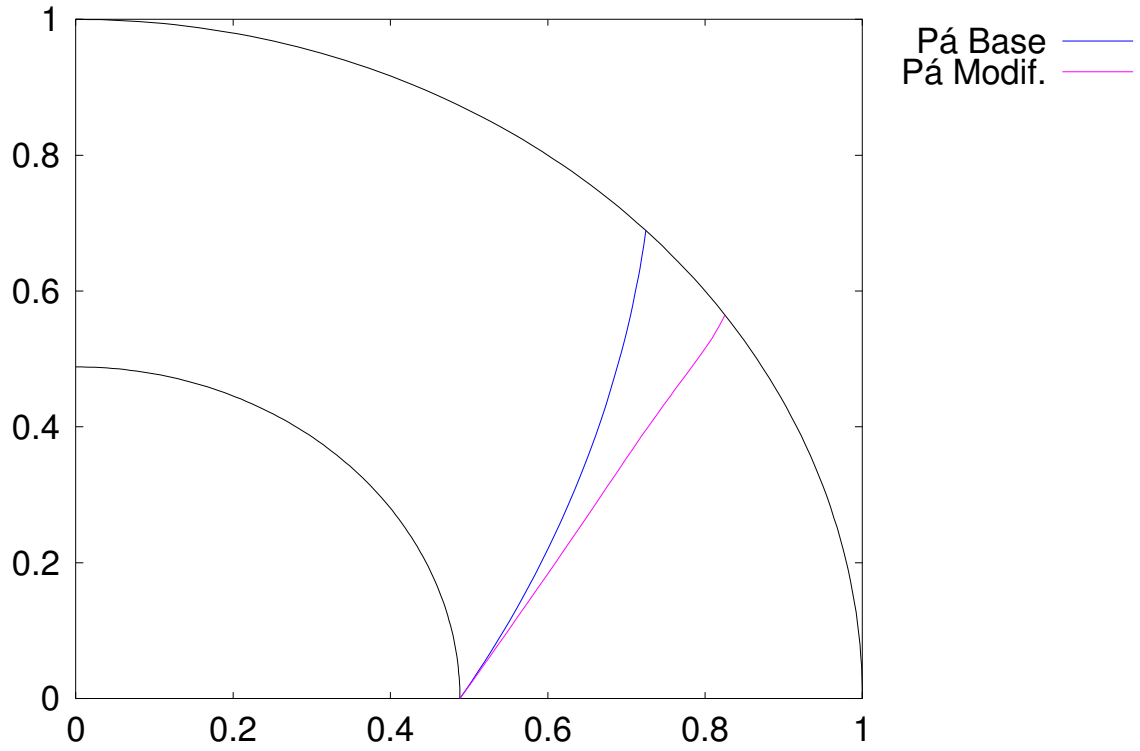


Figura 21 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=1,1$  e polinômio grau 7

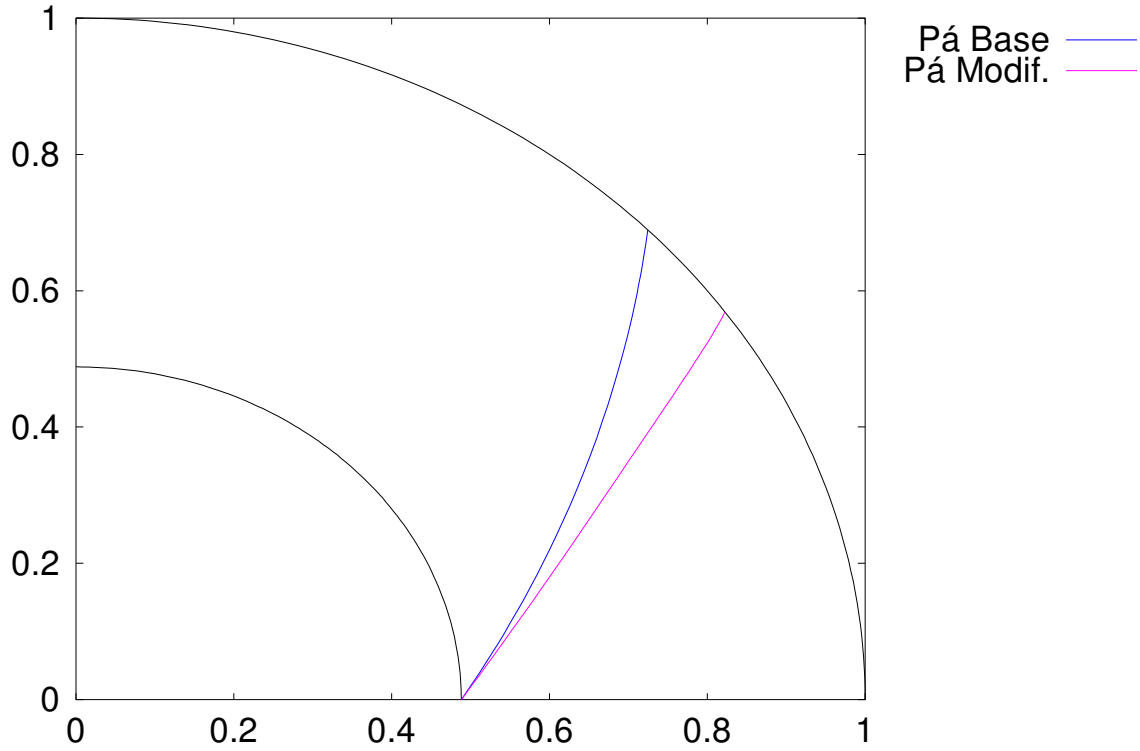


Figura 22 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=1,1$  e polinômio grau 9

Para o caso  $fvp = 0,9$ , Tabela 8, os formatos das pás geradas estão mostrados nas Figuras 23, 24, 25, 26, 27 e 28 para valores do grau do polinômio iguais a 1, 2, 3, 5, 7, 11, respectivamente. Nesse caso, o formato da pá resultante foi considerado RUIM apenas para o polinômio de grau 11, que produz uma pá mais longa e com uma severa inflexão de curvatura antes da saída do rotor, o que faz aumentar indevidamente o número de Richardson. Para os demais graus de polinômio, o formato da pá modificada não varia muito com o grau, mas o número de pás varia mais que no caso  $fvp = 1,1$ . A pá modificada é sempre mais longa e com menores ângulos ao longo de toda a pá a fim de produzir um menor coeficiente de pressão e também um menor coeficiente de vazão. Assim como no caso  $fvp = 1,1$ , não foi possível manter todas as restrições para um polinômio de grau 1. Ainda, como no caso  $fvp = 1$ , observa-se um grande aumento do número de chamadas da função objetivo quando se passa de um polinômio de grau 3 para um de grau 5.

Tabela 8 – Características das pás da máquina de Oliveira (2001) para  $fvp = 0,9$

Nº de Pás (Base)	Nº de Pás (Modif.)	$Ri_{MÁX}$	K	$\varphi$	$\Psi$	Nº Chamadas da Função	Grau Polinôm.	Formato da Pá
10	10,05	0,929171	0,8461	0,349596	0,9399	222	1	BOM
10	9,39	0,954227	0,8320	0,341045	0,9333	423	2	BOM
10	8,64	1,033882	0,8320	0,341044	0,9333	616	3	BOM
10	7,76	1,169162	0,8320	0,341040	0,9333	1897	5	BOM
10	9,52	0,996383	0,8320	0,341039	0,9333	3099	7	BOM
10	8,94	1,042447	0,8320	0,341044	0,9333	5668	9	BOM
10	5,12	1,625014	0,8320	0,341043	0,9333	4235	11	RUIM



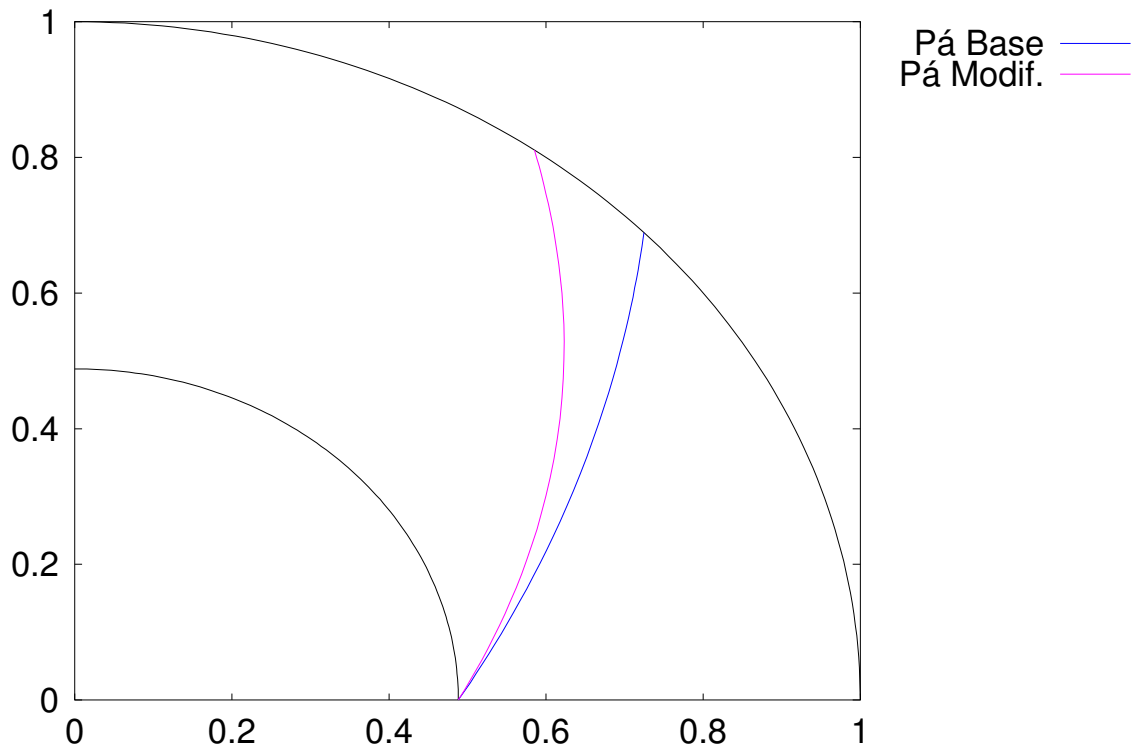


Figura 23 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=0,9$  e polinômio grau 1

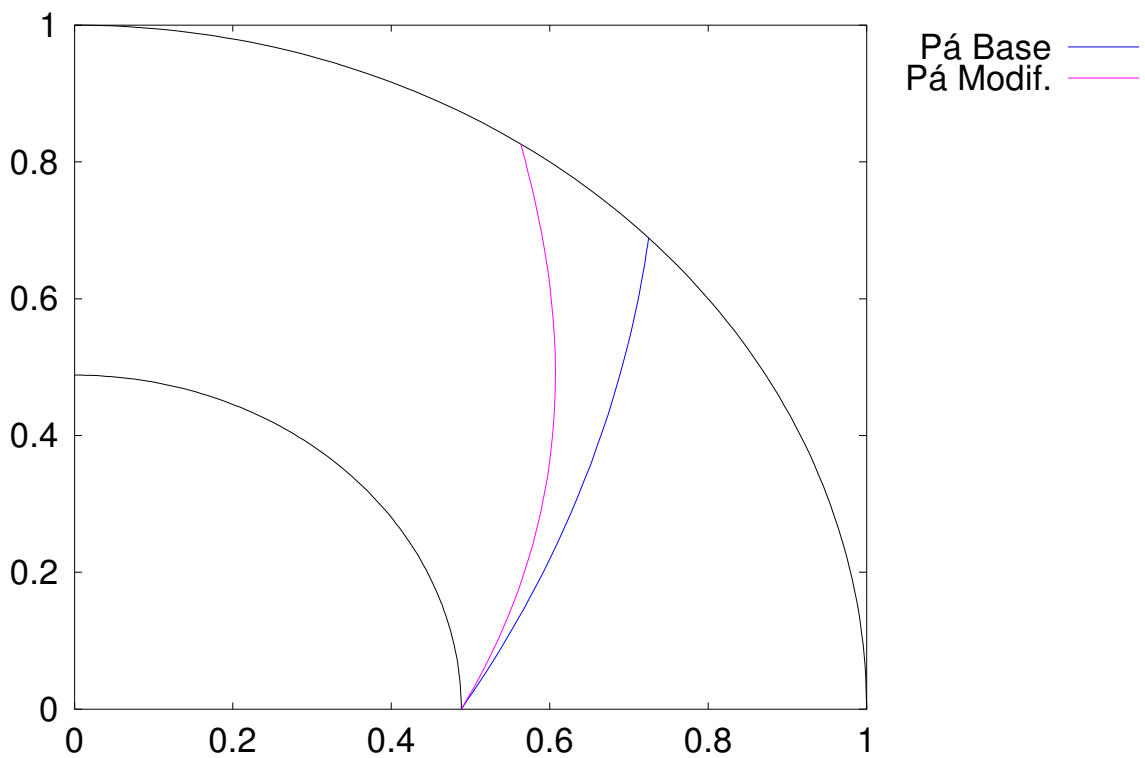


Figura 24 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=0,9$  e polinômio grau 2

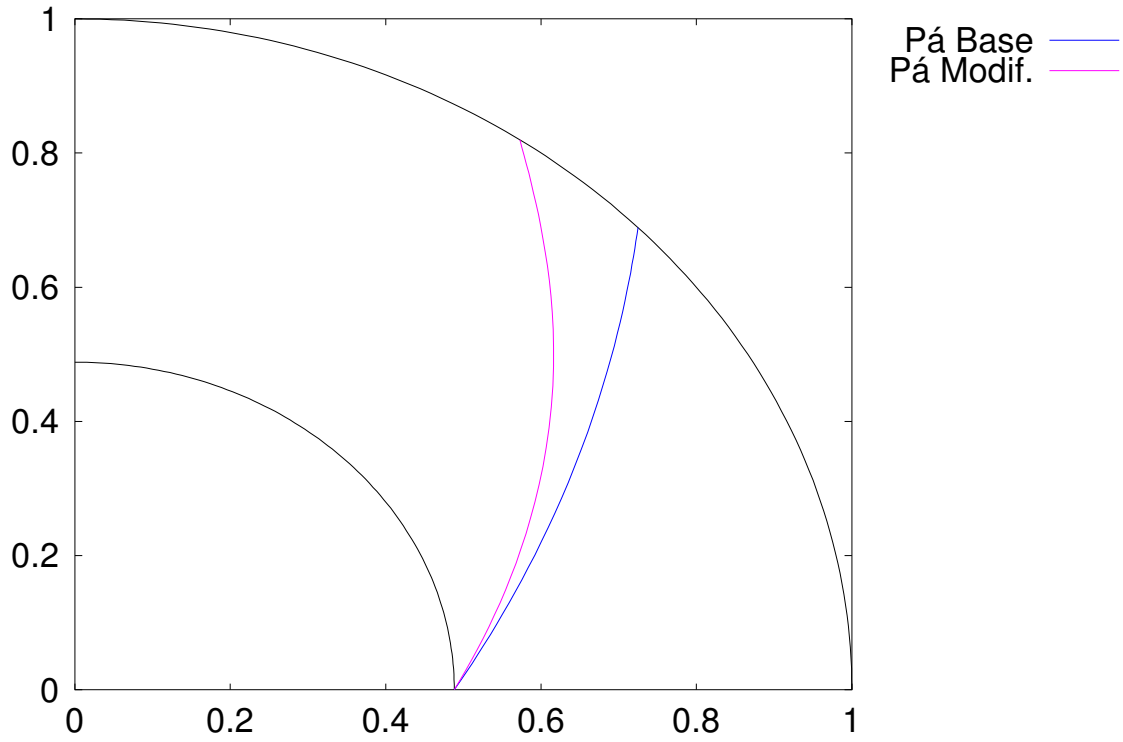


Figura 25 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $f_{vp}=0,9$  e polinômio grau 3

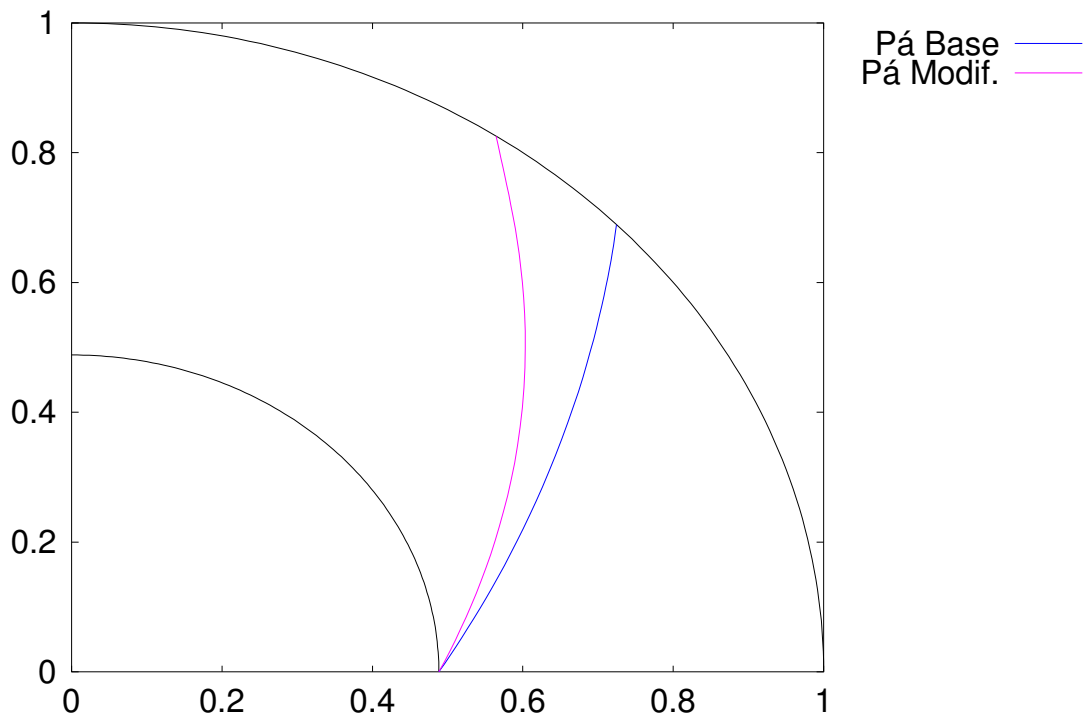


Figura 26 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $f_{vp}=0,9$  e polinômio grau 5

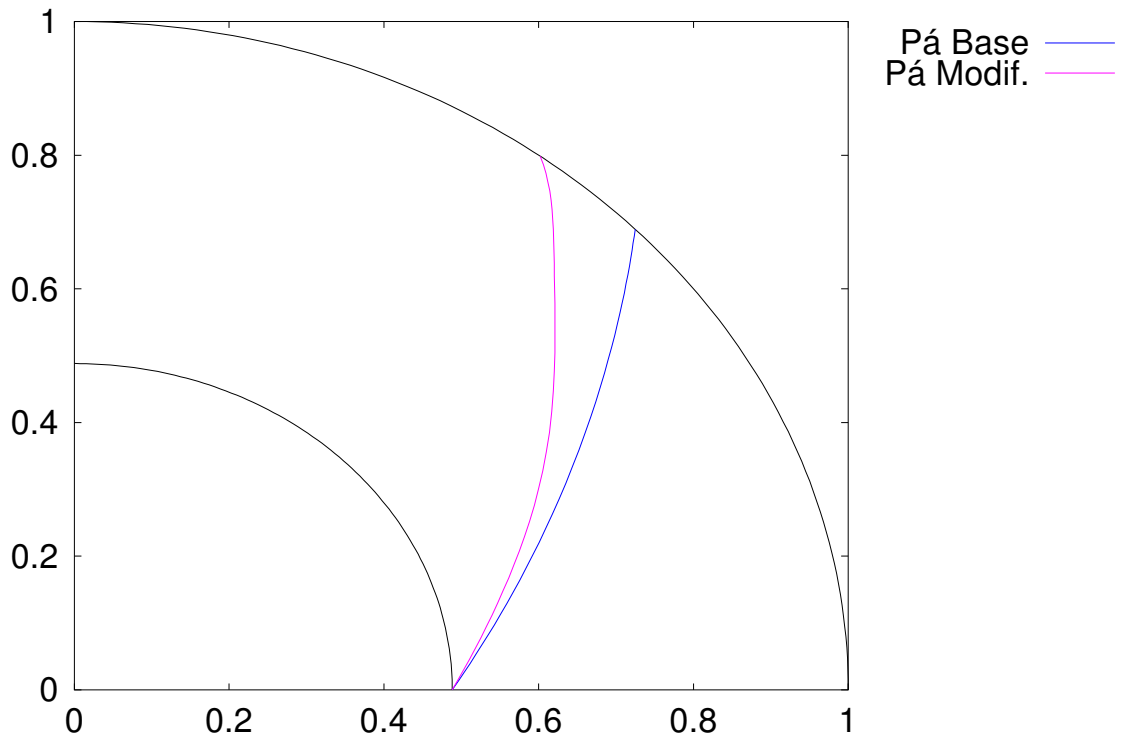


Figura 27 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=0,9$  e polinômio grau 7

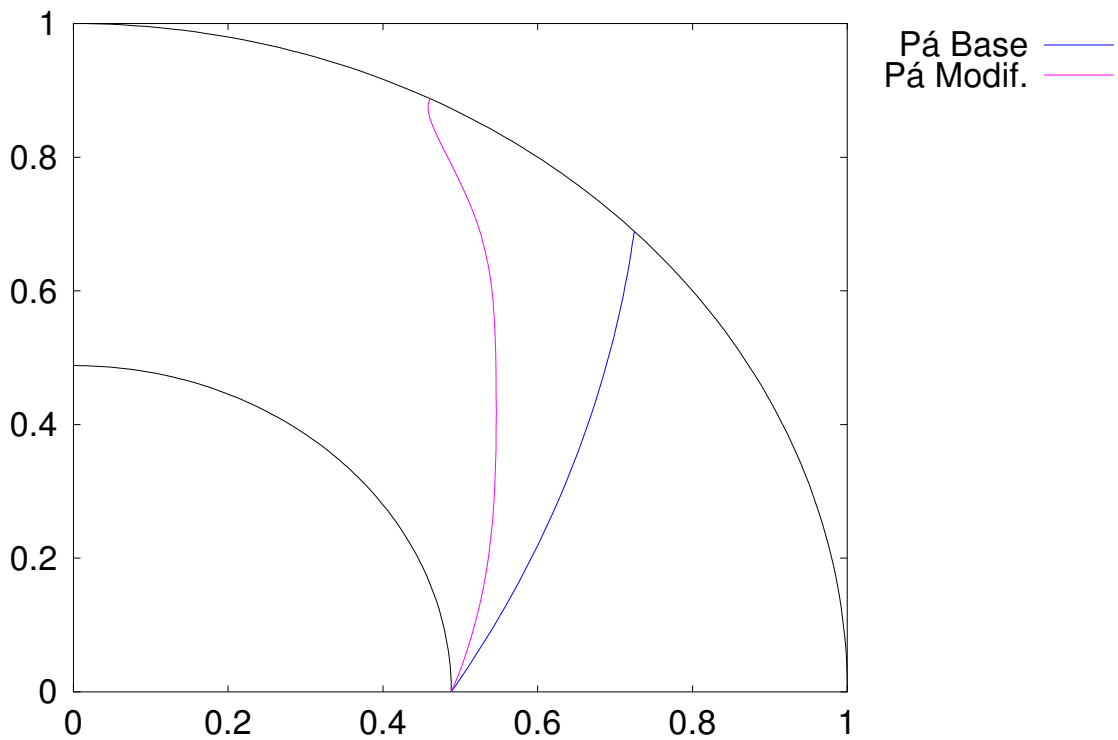


Figura 28 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001),  $fvp=0,9$  e polinômio grau 11

Pela análise efetuada sobre os resultados dos testes realizados, pode-se inferir que um polinômio de grau 3 parece adequado para atender às necessidades de robustez e custo computacional razoável. Valores menores podem trazer dificuldades na imposição das restrições necessárias, ao passo que um grau mais elevado pode ocasionar um grande número de chamadas da função objetivo, sem necessariamente conduzir a formatos considerados satisfatórios. Desse modo, os resultados a serem apresentados no próximo capítulo foram todos obtidos com um polinômio de grau 3 para a função de parametrização geométrica da pá (correspondendo a 4 coeficientes de forma).

## Capítulo 5

# RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados alguns resultados de traçado de pás pelo presente método com comentários referentes ao número de pás, número de Richardson ( $R_i$ ) e Fator de Forma ( $K$ ) para as máquinas relacionadas no presente trabalho.

### 5.1 RESULTADOS DE TRAÇADO DE PÁS

De acordo com a metodologia descrita no capítulo anterior, são apresentados a seguir alguns resultados de traçado de pás, tomando como geometrias básicas 6 casos de rotores centrífugos referentes a trabalhos clássicos da literatura: o caso de 9 pás (ARC) de Kearton (1933), os casos de 7 pás (LOG) de Bommers I e III (1963), o caso de 6 pás (LOG) de Bommers II (1963), o caso de 5 pás (LOG) de Reddy e Kar (1971) e o caso de 10 pás (ARC) de Oliveira (2001).

Em todos os casos, tratou-se de situações do problema típico do item 4.3.1.4, variando os coeficientes de pressão e de vazão e mantendo-se a rotação específica do rotor e o fator de forma iguais ao da geometria básica na condição sem choque ( $f_{vff} = 1$ ). Em todas essas 6 situações, foram considerados três valores do fator de variação do coeficiente de pressão:  $f_{vp} = 1$ ,  $f_{vp} = 1,1$  e  $f_{vp} = 0,9$ .

No caso de 10 pás (ARC) de Oliveira (2001), tratou-se ainda de mais uma situação do problema típico do item 4.3.1.4, variando o fator de forma ( $fvff = 1$ ,  $fvff = 1,1$  e  $fvff = 0,9$ ) e mantendo-se a rotação específica do rotor e os coeficientes de pressão e de vazão iguais ao da geometria básica na condição sem choque ( $fvp = 1$ ).

O polinômio de grau 3 foi escolhido para a função da parametrização geométrica em todas as situações (conforme discutido no capítulo 4).

Julgou-se desnecessário apresentar outras situações e outros problemas típicos descritos no item 4.3.1 para não sobrecarregar o trabalho e evitar perda de foco.

Para cada situação, é apresentada (i) uma tabela contendo os dados e resultados globais mais relevantes, (ii) uma primeira figura, mostrando os traçados de pá resultante e (iii) uma segunda figura mostrando as variações da pressão adimensional  $P$  sobre a pá em função do raio adimensional  $R$ ,  $P(R) = R^2 - W^2(R)$ , sendo  $W$  a velocidade relativa adimensional. Ao todo, são 7 situações:

- 1) Caso de 9 pás (ARC) de Kearton (1933) com  $fvff = 1$ , pág. 68.
- 2) Caso de 7 pás (LOG) de Bommers I (1963) com  $fvff = 1$ , pág. 69.
- 3) Caso de 6 pás (LOG) de Bommers II (1963) com  $fvff = 1$ , pág. 70.
- 4) Caso de 7 pás (LOG) de Bommers III (1963) com  $fvff = 1$ , pág. 71.
- 5) Caso de 5 pás (LOG) de Reddy e Kar (1971) com  $fvff = 1$ , pág. 72.
- 6) Caso de 10 pás (ARC) de Oliveira (2001) com  $fvff = 1$ , pág. 73.
- 7) Caso de 10 pás (ARC) de Oliveira (2001) com  $fvp = 1$ , pág. 74.

As análises e os comentários a respeito desses resultados estão apresentados na pág. 75.

Tabela 9 – Características das pás da máquina de Kearton (1933) com  $fvff=1$ 

fvp	Nº de Pás (Base)	Nº de Pás (Modif.)	Ri <sub>MÁX</sub>	K	$\phi$	$\Psi$	Nº Chamadas da Função	Grau Polinôm.
1,0	9	7,53	1,2681	0,8072	0,2775	0,9533	1208	3
1,1	9	9,24	1,2529	0,8072	0,3202	1,0486	695	3
0,9	9	8,39	0,8827	0,8072	0,2369	0,8580	935	3

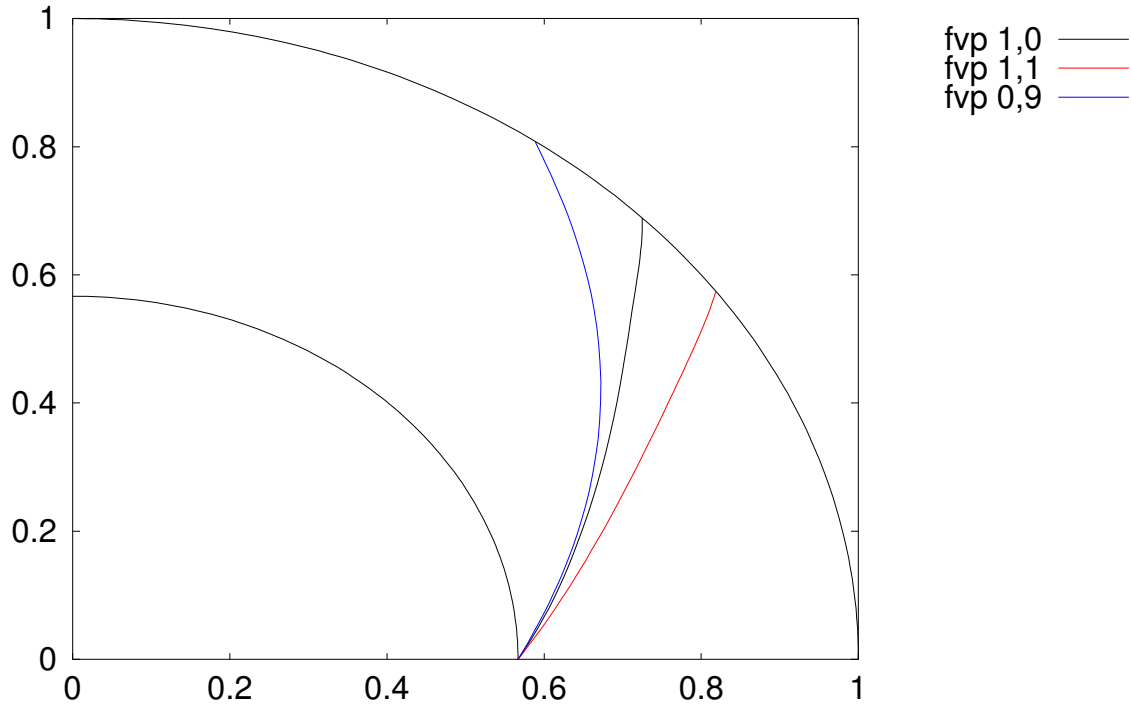
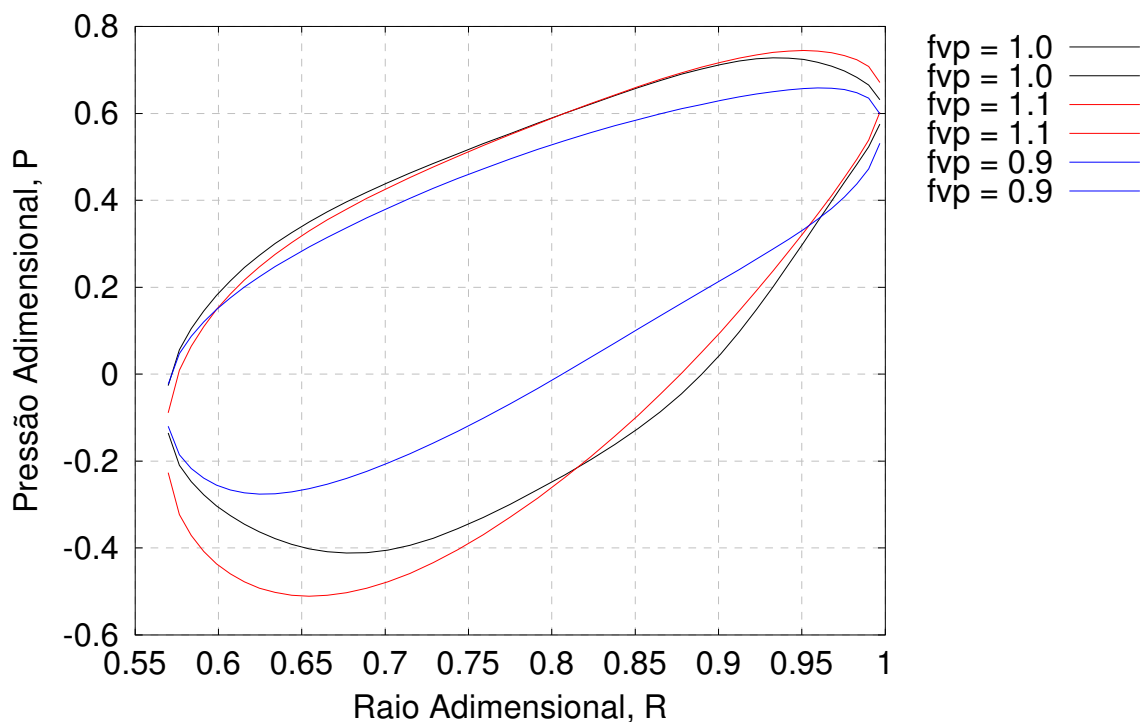
Figura 29 – Formato de pás, máquina de Kearton (1933) com  $fvff = 1,0$ Figura 30 – Pressão em função do Raio, máquina de Kearton (1933) com  $fvff = 1,0$

Tabela 10 – Características das pás da máquina de Bommers I (1963) com  $fvff=1$ 

fvp	Nº de Pás (Base)	Nº de Pás (Modif.)	Ri <sub>MÁX</sub>	K	$\varphi$	$\Psi$	Nº Chamadas da Função	Grau Polinôm.
1,0	7	7,00	0,4349	0,8603	0,3131	0,4695	269	3
1,1	7	7,65	0,4956	0,8603	0,3613	0,5164	806	3
0,9	7	6,93	0,3383	0,8603	0,2674	0,4225	463	3

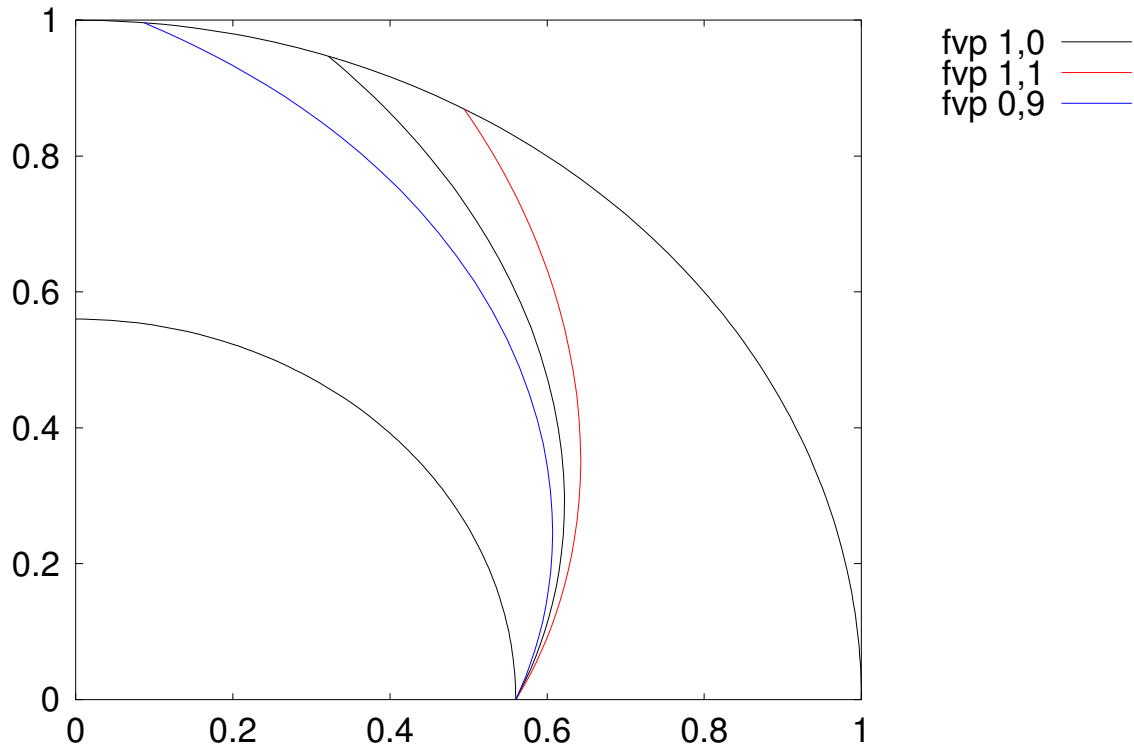
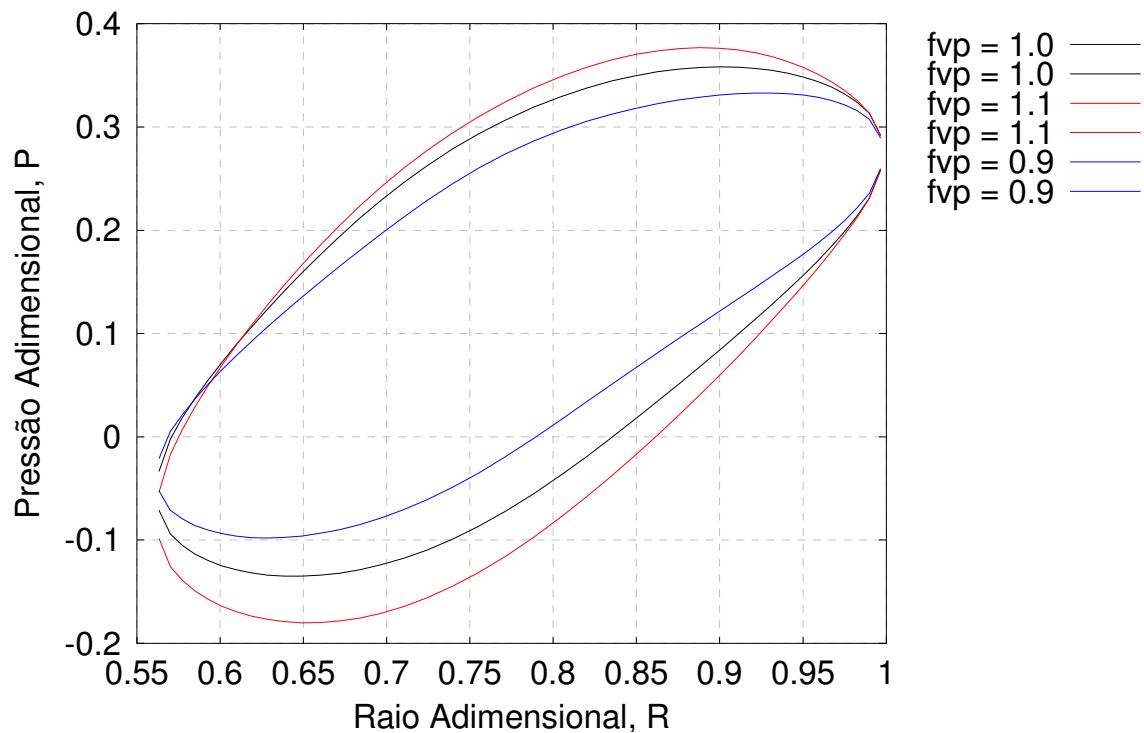
Figura 31 – Formato de pás, máquina de Bommers I (1963) com  $fvff = 1,0$ Figura 32 – Pressão em função do Raio, máquina de Bommers I (1963) com  $fvff = 1,0$



Tabela 11 – Características das pás da máquina de Bommers II (1963) com  $fvff=1$ 

fvp	Nº de Pás (Base)	Nº de Pás (Modif.)	Ri <sub>MÁX</sub>	K	$\phi$	$\Psi$	Nº Chamadas da Função	Grau Polinôm.
1,0	6	5,84	0,5980	0,8676	0,2906	0,5383	452	3
1,1	6	6,21	0,7124	0,8676	0,3352	0,5921	688	3
0,9	6	4,55	0,5947	0,8676	0,2481	0,4845	1036	3

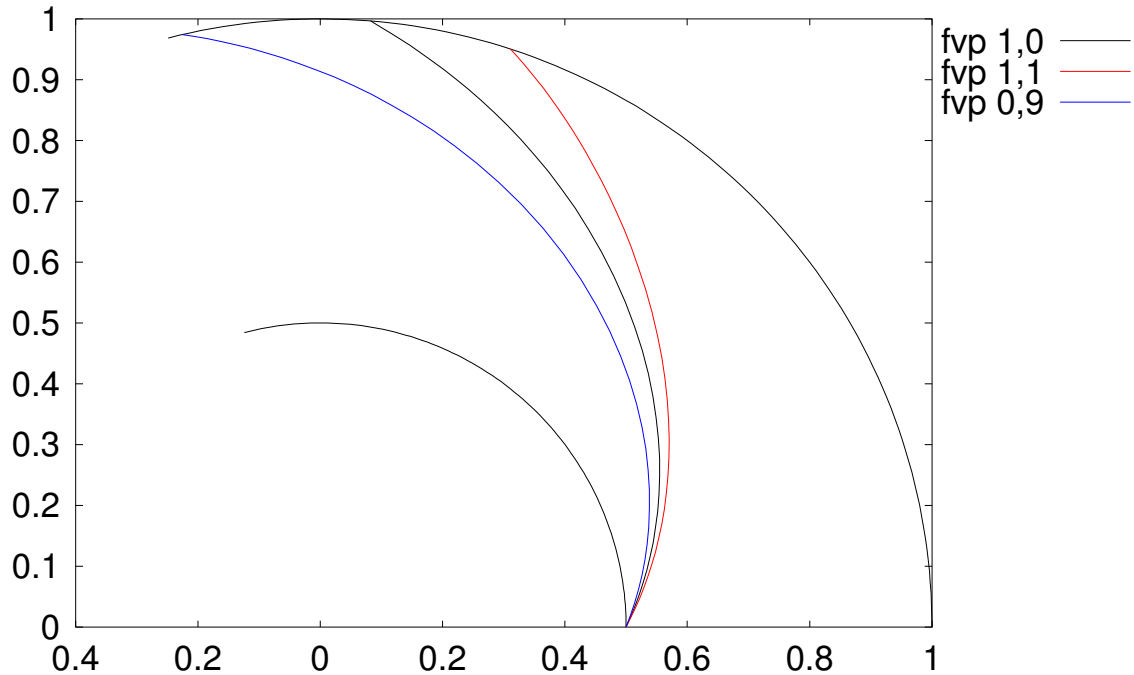
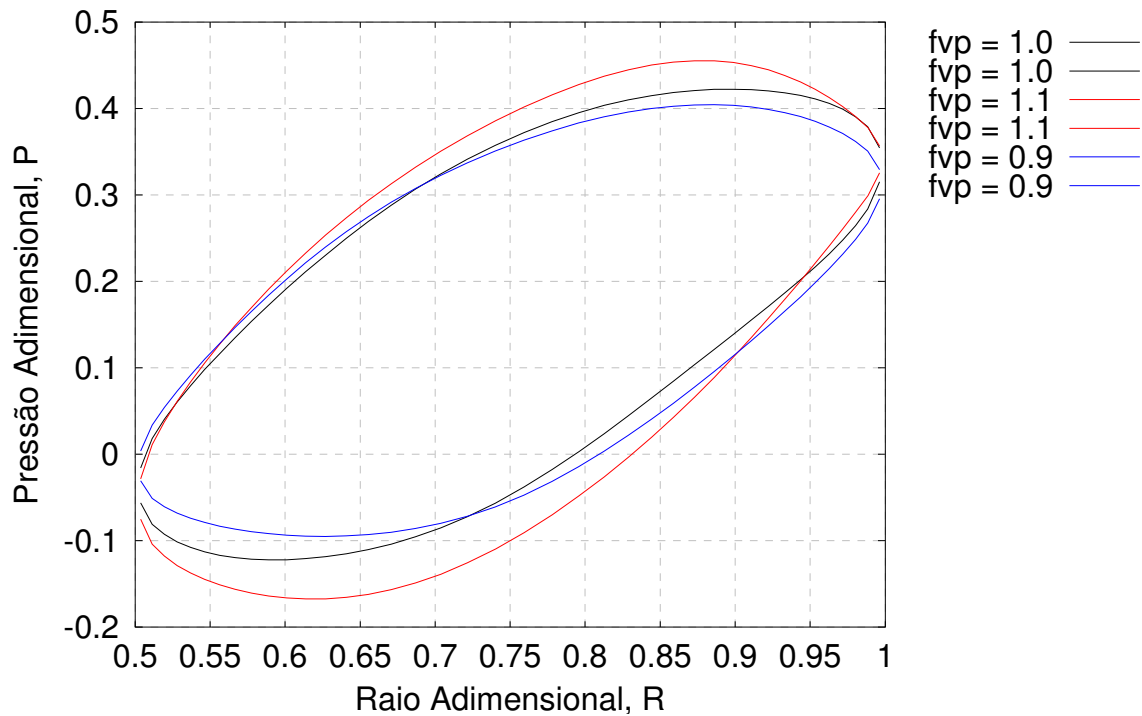
Figura 33 – Formato de pás, máquina de Bommers II (1963) com  $fvff = 1,0$ Figura 34 – Pressão em função do Raio, máquina de Bommers II (1963) com  $fvff = 1,0$

Tabela 12 – Características das pás da máquina de Bommers III (1963) com  $fvff=1$ 

fvp	Nº de Pás (Base)	Nº de Pás (Modif.)	Ri <sub>MÁX</sub>	K	$\varphi$	$\Psi$	Nº Chamadas da Função	Grau Polinôm.
1,0	7	7,01	0,5562	0,8315	0,4426	0,5173	448	3
1,1	7	7,00	0,6858	0,8315	0,5106	0,5690	593	3
0,9	7	5,88	0,5334	0,8315	0,3779	0,4656	727	3

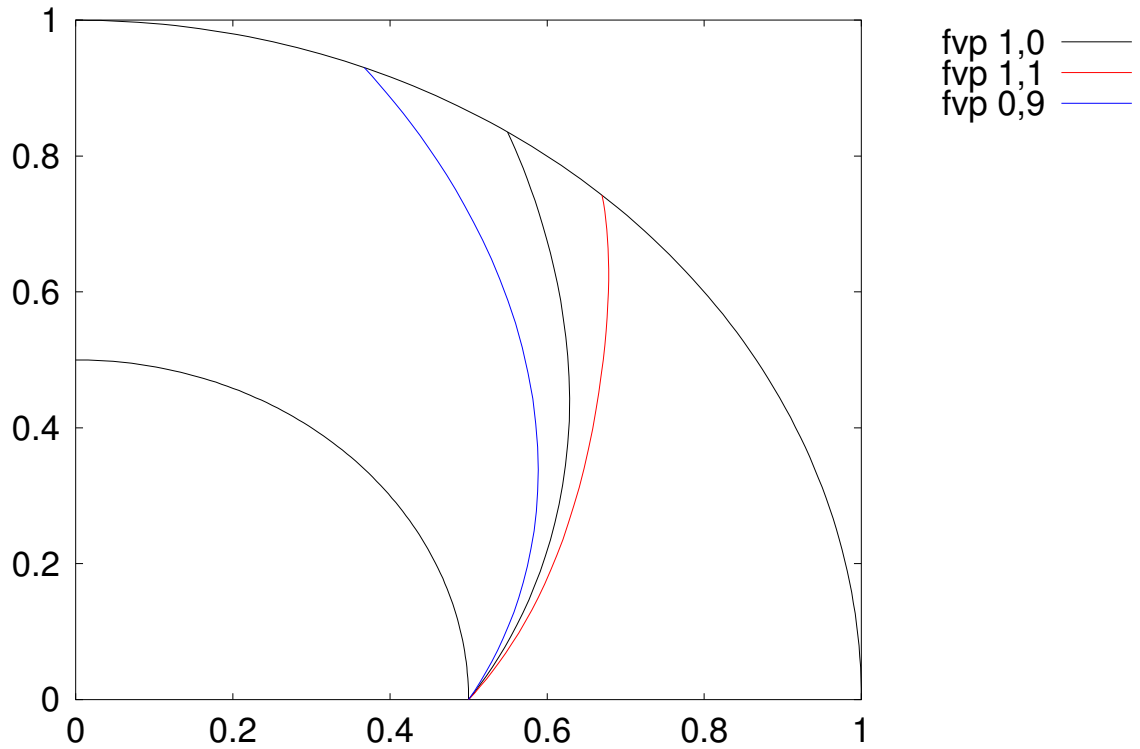
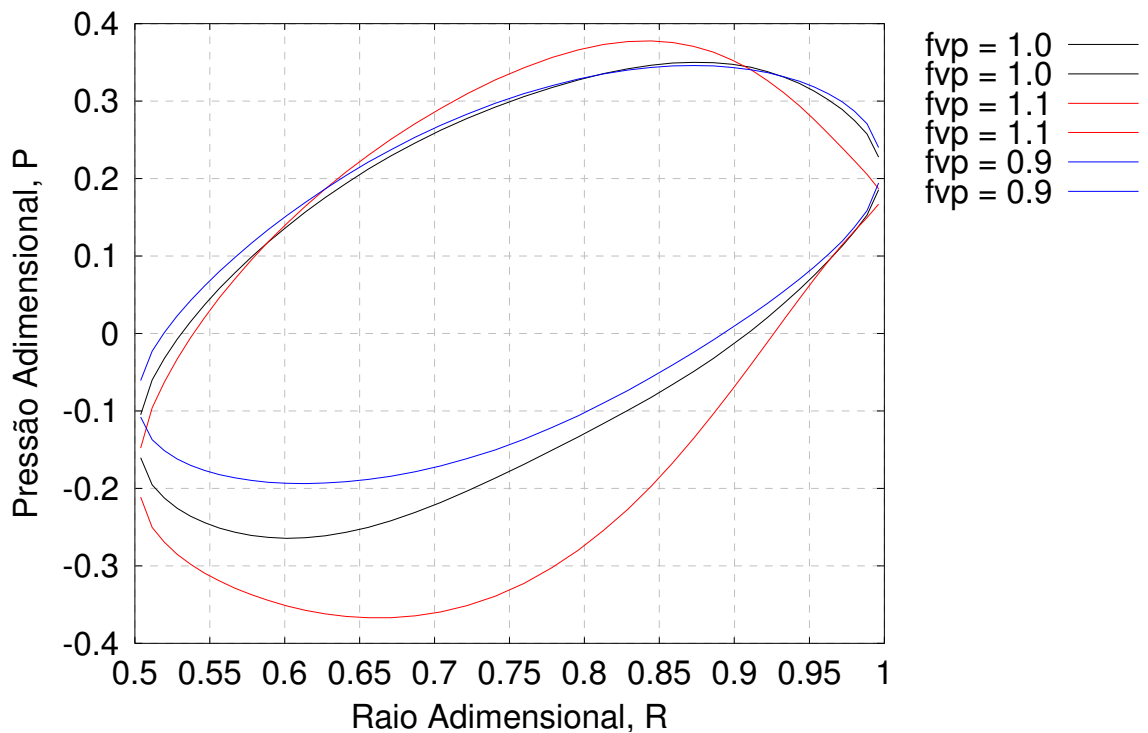
Figura 35 – Formato de pás, máquina de Bommers III (1963) com  $fvff = 1,0$ Figura 36 – Pressão em função do Raio, máquina de Bommers III (1963) com  $fvff = 1,0$

Tabela 13 – Características das pás da máquina de Reddy e Kar (1971) com  $fvff=1$ 

Fvp	Nº de Pás (Base)	Nº de Pás (Modif.)	Ri <sub>MÁX</sub>	K	$\phi$	$\Psi$	Nº Chamadas da Função	Grau Polinôm.
1,0	5	4,61	1,5833	0,8671	0,2784	0,7693	463	3
1,1	5	5,20	1,8741	0,8671	0,3212	0,8462	601	3
0,9	5	3,69	1,4899	0,8671	0,2377	0,6924	1052	3

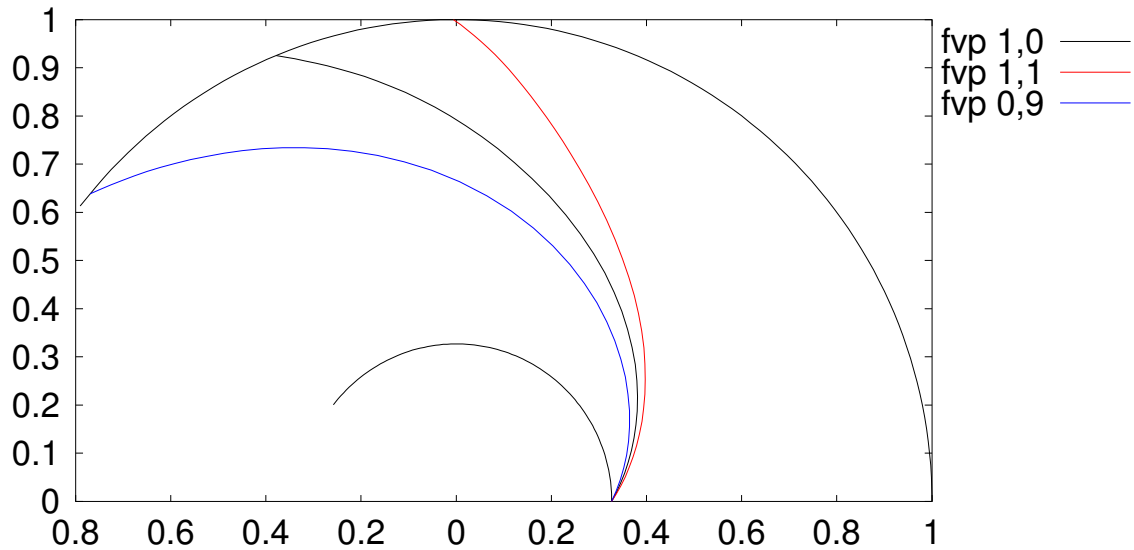
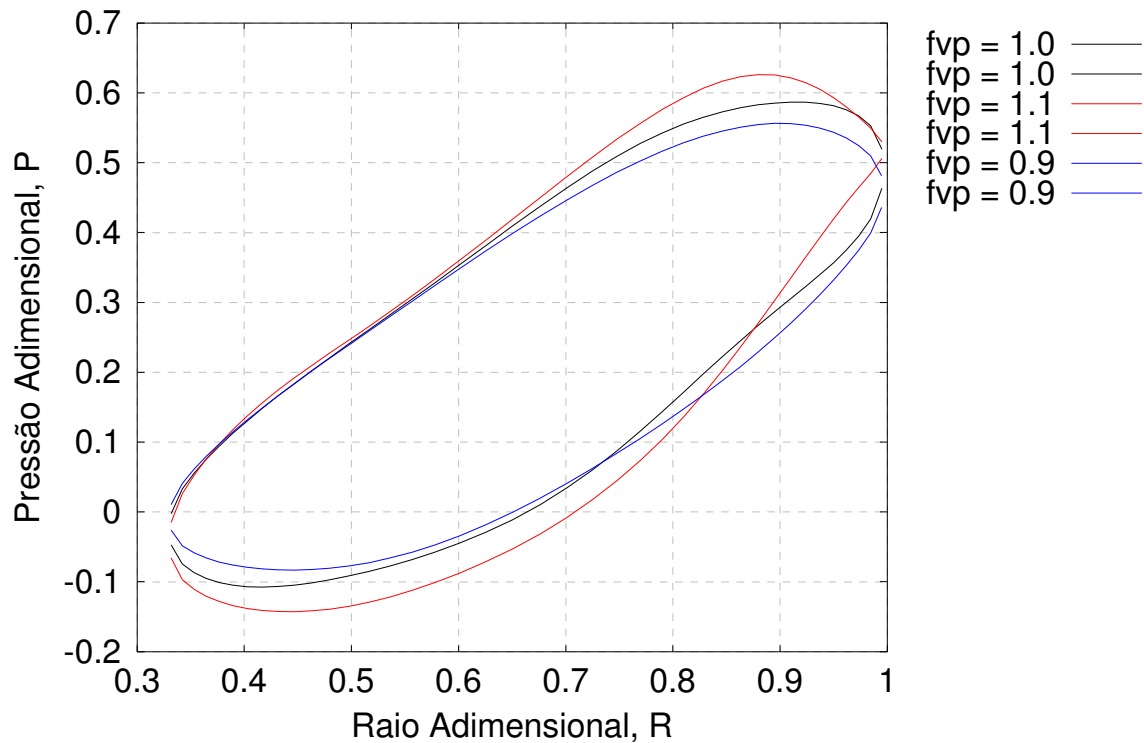
Figura 37 – Formato de pás, máquina de Reddy e Kar (1971) com  $fvff = 1,0$ Figura 38 – Pressão em função do Raio, máquina de Reddy e Kar (1971) com  $fvff = 1,0$

Tabela 14 – Características das pás da máquina de Oliveira (2001) com  $fvff=1$ 

Fvp	Nº de Pás (Base)	Nº de Pás (Modif.)	Ri <sub>MÁX</sub>	K	$\varphi$	$\Psi$	Nº Chamadas da Função	Grau Polinôm.
1,0	10	8,99	1,2341	0,8318	0,3994	1,0370	500	3
1,1	10	10,44	1,2474	0,8320	0,4608	1,1407	463	3
0,9	10	8,64	1,0338	0,8320	0,3410	0,9333	616	3

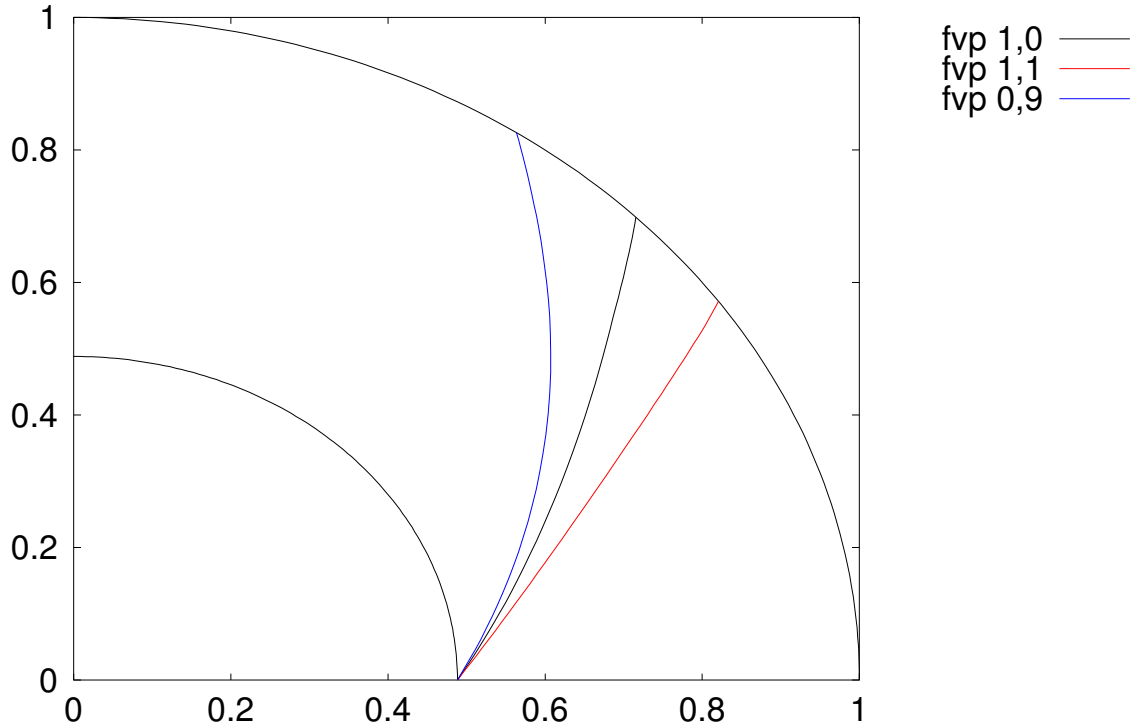
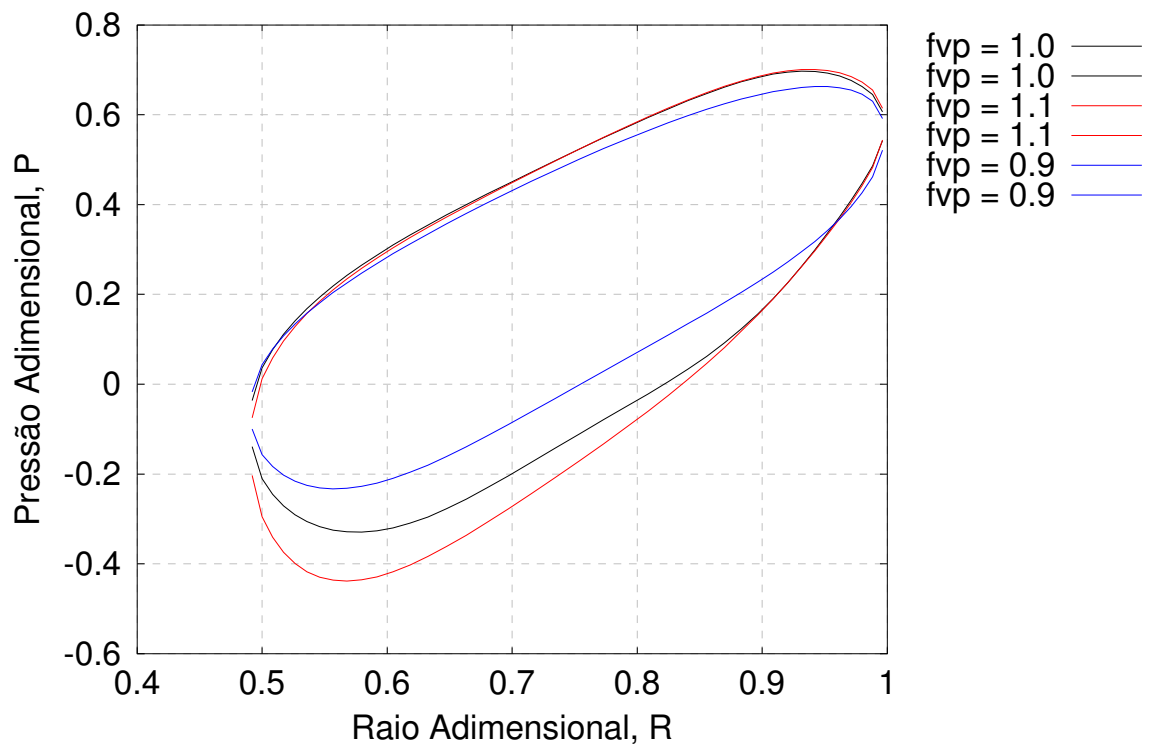
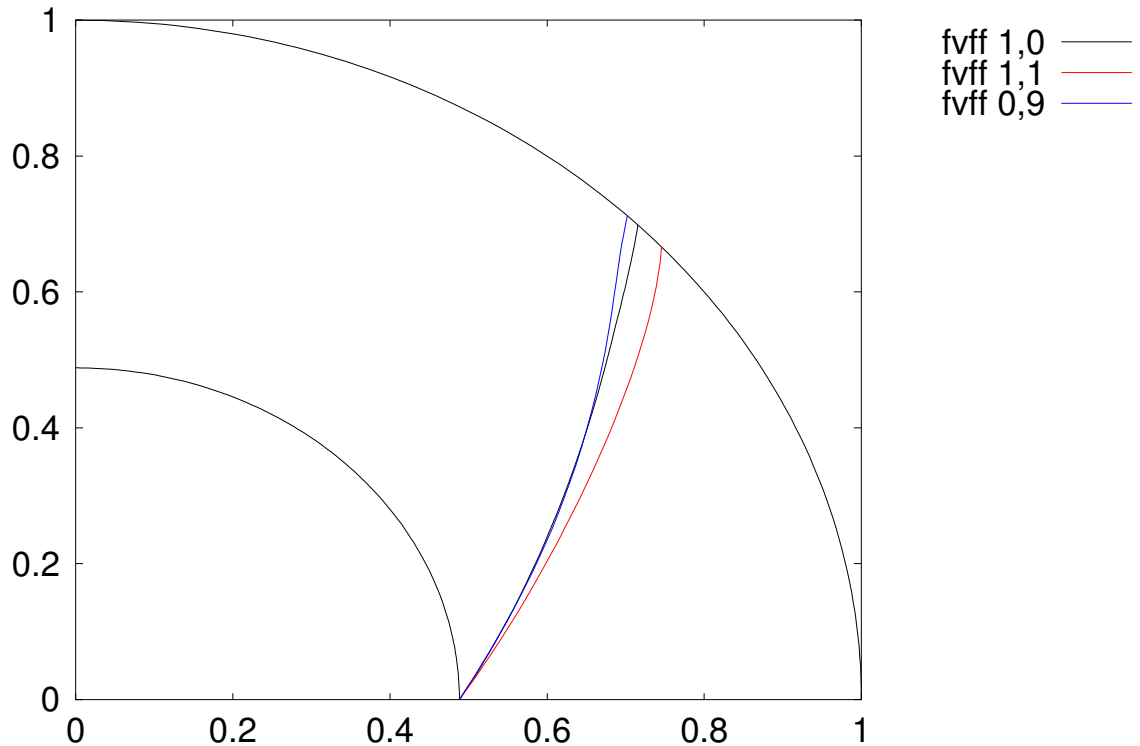
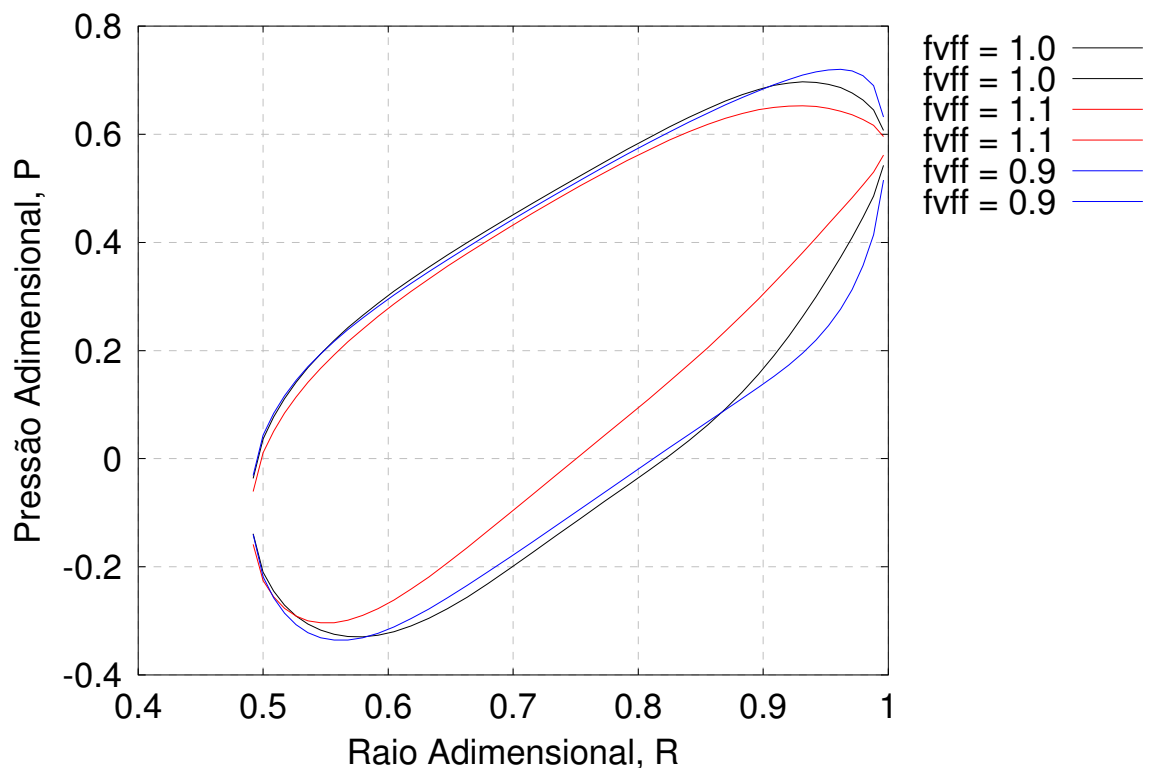
Figura 39 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001) com  $fvff = 1,0$ Figura 40 – Pressão em função do Raio, máquina de Oliveira (2001) com  $fvff = 1,0$

Tabela 15 – Características das pás da máquina de Oliveira (2001) com  $f_{vp}=1$ 

fvff	Nº de Pás (Base)	Nº de Pás (Modif.)	Ri <sub>MÁX</sub>	K	$\varphi$	$\Psi$	Nº Chamadas da Função	Grau Polinôm.
1,0	10	8,99	1,2341	0,8318	0,3994	1,0370	500	3
1,1	10	11,56	1,0469	0,9150	0,3994	1,0370	724	3
0,9	10	8,88	1,1612	0,7486	0,3994	1,0370	417	3

Figura 41 – Formato de pás, máquina de Oliveira (2001) com  $f_{vp} = 1,0$ Figura 42 – Pressão em função do Raio, máquina de Oliveira (2001) com  $f_{vp} = 1,0$

Como primeira observação, nota-se que mesmo nas situações em que todos os parâmetros de funcionamento e o fator de forma são mantidos ( $f_{vp} = f_{vff} = 1$ ), é possível obter traçados correspondentes a números de pás sensivelmente diferentes daqueles referentes à geometria básica. Ver, por exemplo, as Tabela 9, pág. 68 e Tabela 14, pág. 73, onde houve diminuição do número de pás para  $f_{vp} = 1$ .

Outro fato relevante é que, em todas as seis situações em que se variou o coeficiente de pressão (pág. 68 a 73), o traçado das pás seguiu uma tendência coerente com as expectativas: um aumento do coeficiente de pressão (e, por conseguinte, do coeficiente de vazão, para manter a rotação específica) produz pás mais curtas, com maiores ângulos ao longo de toda a pá, a fim de atender às exigências de aumento do trabalho específico e da vazão. E vice-versa: uma diminuição do coeficiente de pressão produz pás mais longas, com menores ângulos ao longo de toda a pá, a fim de atender às exigências de diminuição do trabalho específico e da vazão.

Nas mesmas situações referidas no parágrafo anterior, verifica-se que as distribuições de pressão ao longo das pás seguem uma tendência coerente com a variação do coeficiente de pressão, havendo aumentos do carregamento aerodinâmico quando esse coeficiente cresce e diminuições em caso contrário. Em geral, observa-se também uma tendência de maior influência de  $f_{vp}$  sobre a distribuição de pressão do lado de sucção da pá em relação ao lado de pressão. Note-se, ainda, que o número de Richardson máximo segue a mesma tendência de variação do carregamento aerodinâmico com a variação de  $f_{vp}$ , como seria de esperar. A única exceção é o caso de Kearton, pág. 68, em que o número de pás para  $f_{vp} = 1$  caiu muito em relação à geometria básica (de 9 para 7,53) e aumentou bruscamente em seguida para  $f_{vp} = 1,1$ , havendo então uma pequena queda no número de Richardson máximo.

Por fim, observa-se que a variação do fator de forma, pág. 74, exerce uma influência sensível sobre o formato da pá, porém menor que a influência da variação do coeficiente de pressão comentada nos parágrafos anteriores. Note-se que o aumento do fator de forma produz um rotor com maior número de pás não muito diferentes da pá original, porém com menores carregamentos aerodinâmicos ao longo de toda a pá. Por outro lado, a diminuição do fator de forma exerce um efeito ainda menos significativo, tanto em termos de formato da pá como em termos de carregamento aerodinâmico. Salienta-se que o fator de forma foi intencionalmente variado fora da faixa (0,8-0,9) e, portanto, é de se esperar um efeito ainda menor se ele for mantido dentro da faixa, o que é desejável dentro do contexto da metodologia proposta neste trabalho.

## Capítulo 6

# CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste capítulo são apresentadas as conclusões extraídas do trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros relacionados aos assuntos abordados no presente trabalho.

## 6.1 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma metodologia de traçado de pás de rotores centrífugos, usando como critério de carregamento aerodinâmico a maximização do número de Richardson local máximo sujeita a restrições sobre um denominado Fator de Forma ( $K$ ). Foi considerando o modelo de escoamento potencial, bidimensional, incompressível e permanente.

A metodologia foi implementada através de programas computacionais desenvolvidos em linguagem Fortran, em dupla precisão, utilizando o compilador MS Fortran PS 4.0. A sub-rotina `DPSIM` foi utilizada para a solução de sistemas de equações algébricas lineares pelo método de eliminação de Gauss que emprega um esquema otimizado de condensação pivotal parcial. Para o cálculo da matriz  $F$  de parametrização geométrica de uma curva polar, cuja

tangente é dada por funções polinomiais, foi utilizada a sub-rotina MATGEOM, e para otimização foi utilizado o algoritmo DUMPOL que minimiza uma função de “N” variáveis usando um algoritmo de procura direta para localizar um ponto mínimo de funções de variáveis contínuas, juntamente com técnicas de penalização para impor restrições não-lineares.

A formulação integral do escoamento potencial e incompressível considerou a variação de largura das pás, sendo realizada diretamente no plano da grade radial, evitando-se transformações intermediárias. Esta formulação integral é exclusivamente de contorno e linear, porém aproximada. Tal aproximação foi realizada nas integrais de campo, que dependem não só da variação radial da largura da pá mas também do próprio campo de velocidades resultante. Como uma primeira aproximação, a componente radial da velocidade absoluta (presente nas integrais de campo), desconhecida em princípio, e que torna não-linear a formulação, foi obtida por meio da equação integral da continuidade do escoamento.

A solução numérica da equação integral de Fredholm de primeira espécie resultante da formulação foi obtida através do método dos painéis. Em cada painel reto, foi utilizada uma distribuição de vórtices de densidade linear. Essa distribuição linear possibilitou a aplicação das condições de entrada (entrada sem choque),  $\Gamma_1 = 0$ , e de saída (condição de Kutta),  $\Gamma_{N+1} = 0$ , respectivamente nos bordos de ataque e de fuga da pá, compatíveis com a natureza física do escoamento nessas regiões.

Para um certo número de painéis, a discretização é um fator importante na determinação das características aerodinâmicas, notadamente nos ângulos de entrada e de saída do escoamento, devido às condições de entrada e de saída especificadas. Na discretização das pás, foi utilizada a série geométrica cujo quociente  $q_{sg}$  (fator de discretização) permitiu um controle efetivo da distribuição dos comprimentos dos painéis. Nos casos analisados, foram estabelecidos  $q_{sg} = 1,05$  e  $N = 40$ .

Na seqüência do presente trabalho apresentou-se o critério de maximização do número de Richardson (Ri), destacando sua grande utilidade para definir o número ótimo de pás para rotores centrífugos, conforme verificado por Oliveira *et al.* (2002) no caso de pás de formato fixo. Todavia, sua utilização como critério para traçado de pás mostrou-se insuficiente, conduzindo a rotores de uma única pá com formato impraticável. Além disso, o número de Richardson máximo calculado para rotores de bom desempenho varia muito com a rotação específica, não servindo portanto para definir uma faixa de restrição.

Logo, concluiu-se que seria necessária a utilização de outros critérios para obtenção do traçado destas pás. Foi proposto então um parâmetro adimensional, denominado fator de



forma (K), representativo da importância relativa do carregamento aerodinâmico entre os trechos de entrada e saída da pá. Foi possível então estabelecer uma faixa relativamente estreita para esse fator (entre 0,8 e 0,9) para uma gama variada de rotores centrífugos de bom desempenho com rotações específicas em uma faixa relativamente ampla (entre 100 e 400, figura 8, pág. 43).

Impondo restrições para o fator de forma dentro da faixa pré-estabelecida, a maximização do número de Richardson pôde ser efetuada com sucesso, através de uma parametrização geométrica adequada para as pás. Essa parametrização foi estudada e aferida em diversos testes apresentados neste trabalho. O número de pás foi tratado como uma variável real para permitir a utilização de algoritmos de otimização de funções contínuas. É importante salientar que os números de pás não-inteiros obtidos nos testes e exemplos deste trabalho não representam um empecilho: após a determinação de um número de pás não-inteiro, basta aplicar a metodologia novamente, fixando um número de pás inteiro mais próximo do valor calculado previamente.

Os resultados numéricos obtidos para seis casos de rotores centrífugos de trabalhos clássicos da literatura, abrangendo três tipos diferentes de turbomáquinas, demonstram que a metodologia utilizada no presente trabalho é capaz de determinar diferentes números e formatos de pás para um mesmo rotor (i. e., com relações de raios e de larguras fixadas), atendendo a diferentes situações de vazão, de pressão e de forma.

Todavia, apesar de criteriosos, estes resultados, não garantem que estas pás possam efetivamente produzir rotores de bom rendimento, visto que o presente método está fundamentado na teoria do escoamento potencial. Seria necessária, portanto, a introdução dos efeitos viscosos e a construção de rotores e testes experimentais para aprimorar e verificar a real capacidade da metodologia.

## 6.2 SUGESTÕES

Como sugestões para trabalhos futuros é possível colocar as seguintes:

- a) Testar a metodologia desenvolvida neste trabalho com outros algoritmos de busca direta (por exemplo, os algoritmos genéticos ou de busca aleatória controlada).
- b) Estender a metodologia para pás de espessura finita, Oliveira (2001).

c) Desenvolver um procedimento de cálculo que leve em conta os efeitos viscosos do escoamento em rotores centrífugos, a fim de se prever corretamente o rendimento desses rotores e tornar possível uma otimização do formato de pás independente de critérios de carregamento — através da maximização direta do rendimento.

d) Com base na metodologia proposta neste trabalho, projetar, construir e ensaiar em laboratório rotores centrífugos com diversos números de pá e formatos a fim de verificar a real capacidade da metodologia.

## Apêndice A

# TÉCNICAS DE DISCRETIZAÇÃO

## A.1 DISCRETIZAÇÃO DAS PÁS

É apresentada neste item a técnica de discretização das pás utilizada no presente trabalho, conforme Oliveira (2001).

Os pontos extremos de cada painel são obtidos de acordo com a seguinte metodologia:

- 1) Adota-se o número total de painéis  $M$ , distribuídos na linha representativa da pá com os pontos extremos  $j = 1$  no bordo de ataque (ba) e  $j = N + 1$  no bordo de fuga (bf) da pá.
- 2) Divide-se o comprimento da pá em duas partes iguais, para se obter uma distribuição de comprimentos dos painéis simétrica em torno do ponto central,  $j = M/2 + 1$ , desse comprimento  $j = M/2 + 1$ .
- 3) Utiliza-se uma série geométrica de quociente  $q_{sg}$ , para obter os pares de pontos  $x_j(s)$  e  $y_j(s)$ . Para cada par  $(x_j, y_j)$ , o parâmetro de contorno,  $s$  da pá, assume os valores obtidos através da soma dos  $j$  termos da série geométrica.
- 4) Calcula-se as coordenadas dos pontos extremos dos painéis  $(x_j, y_j)$  em função dos valores de  $s$  determinados em (A.1), de acordo com a equação da curva que representa o formato da pá no trecho considerado.

$$s_{j+1} = a_1 \frac{(q_{sg})^j - 1}{q_{sg} - 1}, \quad j = 1, 2, \dots, N/2.$$

$$s_{j+1} = s_j + a_1 (q_{sg})^{(N-j)}, \quad j = N/2 + 1, N/2 + 2, \dots, N,$$

$$a_1 = \frac{\frac{L_{pá}}{2} (q_{sg} - 1)}{(q_{sg})^{N/2} - 1}.$$

O parâmetro de contorno do bordo de ataque é  $s_1 = s_{ba} = 0$ .

O parâmetro de contorno do bordo de fuga é  $s_{N+1} = s_{bf}$ .

(A.1)

## Apêndice B

# FLUXOGRAMA DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO

## B.1 FLUXOGRAMA

É apresentado neste item o fluxograma do processo de otimização.

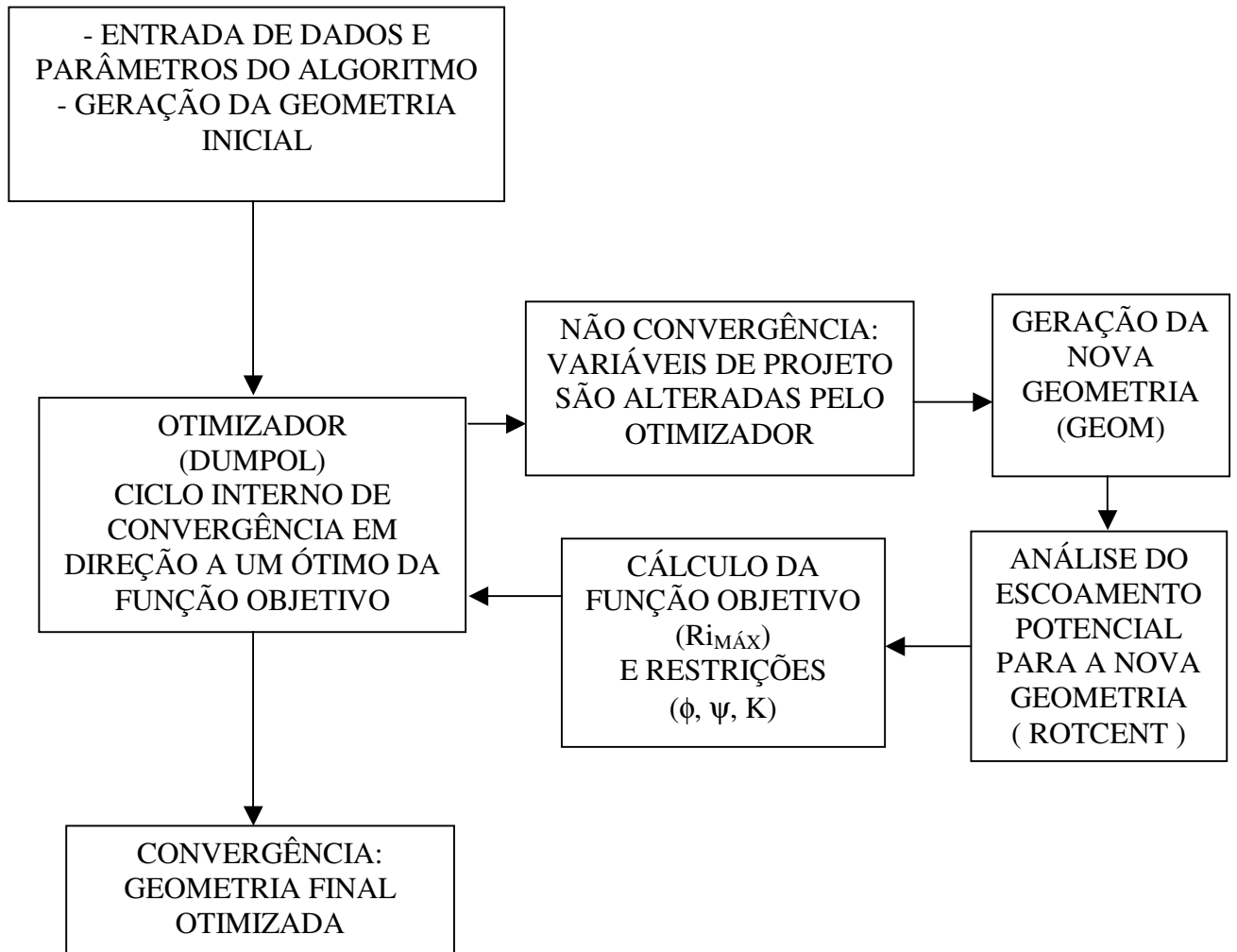
Os passos descritos abaixo, e elucidados no fluxograma, demonstram na forma simplificada os passos computacionais para a otimização do traçado das pás:

1º passo: o programa computacional recebe os dados de entrada e os parâmetros do algoritmo para a geração da geometria inicial das pás.

2º passo: a rotina de otimização DUMPOL, da biblioteca IMSL do Fortran PowerStation - versão 4.0, recebe os dados preparados no item anterior e executa um ciclo interno de convergência em direção a um “ótimo” da função objetivo.

3º passo: teste de convergência.

- no caso de convergência, apresenta-se a geometria final otimizada.
- no caso de não-convergência, as variáveis de projeto são alteradas pelo otimizador. Em seguida, é preparada a geração de uma nova geometria através da subrotina GEOM, e uma análise do escoamento potencial para essa geometria é feita através da subrotina ROTCENT. Com os valores de saída dessa subrotina, são efetuados os cálculos da função objetivo ( -  $R_{iMÁX}$ , com penalizações ) e das funções de restrição (  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $K$  ), para um novo ciclo do otimizador.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADLER, D.** and **KRIMERMAN, Y. (1980)**, “On the relevance of inviscid subsonic flow calculations to real centrifugal impellers flows”, ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 102, pp. 78-84.
- BALJÉ, O. E. (1978)**, “A Flow Model for Centrifugal Compressor Rotors”, ASME Journal of Engineering for Power, Vol. 100, pp. 148-158.
- BALJÉ, O. E., (1981)**, “Turbomachines - A Guide to Design, Selection, and Theory”, John Wiley & Sons, Inc..
- BETZ, A. e FLÜGGE-LOTZ, I. (1938)**, “Berechnung der Schaufeln von Kreiselaedern”, Ingenier – Archiv, Vol. 9, pp. 486-501.
- BOMMES, L. (1963)**, “Über den Einfluß der Schaufelzahl auf die Kennlinie eines Radialventilators mit rückwärtsgekrümmten Schaufeln”, Heizung - Lüftung - Haustechnik, Nr. 5, S. 206-209.
- BUSEMANN, A. (1928)**, “Das Foerderhoehenverhæeltnis Radialer Kreiselpumpem mit Logarithmisch-Spiraligen Schaufeln”, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 8, pp. 372-384.
- ECK, B. (1973)**, “Fans - Design and Operation of Centrifugal, Axial-Flow and Cross-Flow Fans”, Pergamon Press.
- ECKERT, B. e SCHNELL, E.(1961)**, “Axial und Radialkompressoren – Anwendung / Theorie / Berechnung”, Springer-Verlag.
- FERREIRA, J. G. (1973)**, “Um Processo para o Cálculo de Máquinas Geradoras Radiais”, Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá - MG.

- HENN, E. L. (1972)**, “Influência do Número Finito de Pás em Máquinas de Fluxo”, Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá - MG.
- HESS, J. L. e SMITH, A. M. O. (1966)**, “Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies”, Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 8, pp. 1-138.
- ISAY, W. H. (1954)**, “Beitrag zur Potentialströmung durch Radiale Schaufelgitter”, Ingenieur – Archiv, Vol. 32, pp. 203-210.
- KEARTON, W. J. (1933)**, “The Influence of the Number of Impeller Blades on the Pressure Generated in a Centrifugal Compressor and on its General Performance”, Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, Vol. 124, pp. 481-568.
- KIM, J. S. e PARK, W. G. (2000)**, “Optimized Inverse Design Method for Pump Impeller”, Mechanics Research Communication, Vol. 27, No 4, pp. 465-473.
- MANZANARES FILHO, N. (1982)**, “Escoamento Potencial em Grades Radiais de Máquinas de Fluxo”, Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá - MG.
- MANZANARES FILHO, N. e AMORIM, J. C. C. (1982)**, “Cálculo do Escoamento Potencial em Grades Lineares pelo Método dos Painéis Utilizando Distribuições de Vórtices”, VI Seminário ADUNESP, Guaratinguetá – SP.
- MANZANARES FILHO, N. e OLIVEIRA, W. (1992)**, “Cálculo do Escoamento Potencial em Rotores Centrífugos com Pás Finas e Largura Variável”, ENCIT, IV Encontro Nacional de Ciências Térmicas, ABCM, Rio de Janeiro - RJ.
- MURATA, S., OGAWA, T. e GOTOH, M. (1978)**, “On the Flow in a Centrifugal Impeller (2<sup>nd</sup> Report, Effects of change in impeller width)”, Bulletin of the JSME, Vol. 21, No. 151, pp. 90-97.
- NELDER, J.A., e MEAD, R. (1965)**, “A Simplex Method for Function Minimization”, Computer Journal, Vol. 7, pp 308–313.



- OLIVEIRA, W. (1999)**, “Características do Escoamento em Rotores Centrífugos, Parte I: Análise Teórica, Parte II: Análise Experimental”, Relatório Interno, DME/IEM/EFEI, Itajubá, MG.
- OLIVEIRA, W. (2001)**, “Análise do Escoamento em Turbomáquinas Radiais”, Tese de Doutorado, ITA, S. J. dos Campos - SP.
- OLIVEIRA, W., MANZANARES FILHO, N. e FERNANDES, E. C. (2002)**, “Um Critério Baseado nas Características Locais do Escoamento para a Determinação do Número Ótimo de Pás de Rotores de Turbomáquinas”, ENCIT, IX Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas, ABCM, Caxambu - MG.
- PETRUCCI, D. R., MANZANARES FILHO, N. e CAMACHO, R. G. R. (2001)**, “Um Método de Painéis Eficiente Baseado em Distribuições Lineares de Vórtices para Análise do Escoamento em Grades de Turbomáquinas”, COBEM, XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, ABCM, Uberlândia -MG.
- PFLEIDERER, C. (1960)**, “Bombas Centrífugas y Turbocompresores”, Editorial Labor, S.A.
- PFLEIDERER, C. e PETERMANN, H. (1979)**, “Máquinas de Fluxo”, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. – Rio de Janeiro – RJ.
- REDDY, Y. R. e KAR, S. (1971)**, “Optimum Vane Number and Angle of Centrifugal Pumps With Logarithmic Vanes”, ASME Journal of Basic Engineering, Vol. 93, pp. 411-425.
- SALOMON, L. B. R. (1972)**, “Cálculo Teórico do Escoamento em Máquinas de Fluxo Radiais”, Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá - MG.
- SCHILHANSL, M. J. (1965)**, “Three-Dimensional theory of Incompressible and Inviscid Flow Through Mixed Flow Turbomachines”, Journal of Engineering for Power, Trans. ASME, pp. 361-373.
- SCHULZ, W. (1928)**, “Das Foerderhoehenverhäeltnis Radialer Kreiselpumpem mit Logarithmisch-Spiraligen Schaufeln”, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 8, pp. 10-17.

**SEGUL, W. T. (1973)**, “Programs for the Solution of Systems of Linear Algebraic Equations”, NASA Contractor Report CR-2173.

**STAUFER, F. (1936)**, “Verfahren zur Bestimmung der Schaufel-Form um Laufender Kreisfoermiger Schaufelgitter”, *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, Vol. 31, pp. 212.

**SIGLOCH, H. (1984)**, “Strömungsmaschinen - Grundlagen und Anwendungen”, Carl Hanser Verlag.

**STEPANOFF, A. J. (1962)**, “Centrifugal and axial flow pumps”, John Wiley & Sons Inc..

**VARLEY, F. A. (1961)**, “Effects of Impeller Design and Surface Roughness on the Performance of Centrifugal Pumps”, *Proceedings of the Institutional Mechanical Engineers*, Vol. 175, No. 21, pp. 955-989.