

TESE

93



1975

TEORIA
DA
PREFERÊNCIA



Trabalho apresentado à egrêgia Comissão
Examinadora da EFEI, para obtenção do título de
Mestre em Ciências.

DEDICATÓRIAS

À Jandira, pelos carinhos e incentivos nas minhas intermináveis e incansáveis horas de estudo.

Aos meus filhos, razão do meu viver e da minha inspiração e que este trabalho possa lhes servir de incentivo.

A G R A D E C I M E N T O S

À Fundação Universidade de Londrina, pelo seu apoio indispensável e pela crença em meu trabalho.

Aos meus prezados colegas do Departamento de Matemática da "Fuel" que não mediram esforços para que eu pudesse atingir meus objetivos.

À Escola Federal de Engenharia de Itajubá que na sua grandiosa tradição me propiciou conhecimentos e condições para a elaboração deste trabalho.

Os meus mais sinceros agradecimentos ao Dr. Luiz Antonio Cury, meu professor e orientador, pelos estímulos, dedicação e pronto atendimento no desenvolvimento deste trabalho. Minha eterna gratidão pelos conhecimentos e orientação que tão honrosamente me concedeu.

A P R E S E N T A Ç Ã O

Este trabalho pretende sistematizar métodos e critérios de decisão aplicados segundo condições de risco e incerteza.

A abordagem não pretende ser original já que são inúmeros os trabalhos que encerram as mesmas considerações; entretanto, pretendemos dar a ele um cunho essencialmente didático visando uma provável utilização futura nos estudos iniciais de Engenharia de Produção, mais especificamente na área de Engenharia Econômica.

Particularizamos principalmente e demos ênfase proposital aos desenvolvimentos estatísticos com a utilização do Cálculo de Probabilidade que é poderoso auxiliar no processo decisório. É nossa intenção dar continuidade a nossos estudos para chegarmos a situações de maior segurança em quais - quer problemas que envolvam decisão sob o risco e incerteza.

Esperamos, algum dia, podermos oferecer aos estudiosos do assunto, contribuição mais perfeita e sofisticada de nossos estudos.



TEORIA DA PREFERENCIA

I - INTRODUÇÃO

A) OBJETIVOS PROPOSTOS

A prosperidade de qualquer empresa está na dependência das decisões tomadas pela sua administração. Somente decisões acertadas e bem executadas produzem sucesso e desenvolvimento. O grande desafio que se apresenta aos administradores e aos empresários é o de identificar problemas críticos e conceber soluções. Segundo Stanford Optner, o impulso dado a solução de problemas com o uso de computadores, mais cedo ou mais tarde terá de ser encarado com menos entusiasmo e mais realismo. Os computadores nos oferecem inúmeras vantagens: velocidade, capacidade, etc., entretanto determinadas prerrogativas são inerentes ao próprio homem:

- percepção dos problemas de nosso tempo;
- descobrir e determinar áreas e soluções que permitam o máximo desenvolvimento econômico com a maior probabilidade de sucesso e o menor risco possível;
- desenvolver os instrumentos conceituais através de conceitos novos de sistemas e solução dos problemas de planejamento;
- identificar as soluções que o levam a conciliar o máximo valor com o menor risco, ou seja, estratificar os elementos da solução eliminando os que apresentarem o mais baixo valor e o maior risco; etc.

É uma tarefa realmente difícil, pois são múltiplos os caminhos do processo decisório e inúmeras as alternativas para a tomada de decisão. O sucesso ou o insucesso de um empreendimento depende diretamente da tomada de decisão.

O objetivo deste trabalho é o de fazer uma

análise das decisões de investimento sob condição de risco e de incerteza.

B) METODOLOGIA ADOTADA

O principal objetivo deste trabalho é o de apresentar um modelo que expresse a mecânica de funcionamento da "Teoria da Preferência" e, mui especialmente, o estudo dos investimentos sob condição de risco. Para tanto, será adotada uma metodologia convencional, a mais objetiva e eficaz possível. Considerando que o nosso estudo envolve uma gama de conhecimentos técnicos e científicos, muito grande, envolvendo os ensinamentos atuais de Matemática Financeira, Estatística, Econometria, Pesquisa Operacional, "Análise, Elaboração e Avaliação de Projetos" e outras ciências pertinentes às áreas da Ciência Econômica e, ainda, considerando que a objetividade é fator do tema que escolhemos para o presente estudo, nos limitaremos somente a análise dos problemas necessários e imprescindíveis a estruturação de nosso trabalho. Utilizaremos as bases da moderna metodologia de estudo da política e administração financeira, fazendo, inicialmente, um resumo analítico e descritivo desta metodologia e dos principais problemas criados pelo desenvolvimento econômico, procurando não nos afastar do objetivo principal a que nos propusemos. Procuraremos definir, de uma maneira geral, os principais problemas e situações que envolvem a administração de uma empresa em face ao contexto do seu desenvolvimento econômico, bem como analisar a parte matemática financeira fundamental ao estudo da ciência do investimento: o estudo do valor atual e futuro do investimento.

II - ETAPAS PROGRAMADAS

As etapas programadas são:

- 1) Detalhamento dos objetivos:
 - a) critérios de decisão

- b) conceitos fundamentais
 - c) fórmulas matemáticas e estatísticas utilizadas
- 2) Formulação do Problema
 - 3) Equações Fundamentais
 - 4) Métodos de Decisão
 - 5) Aplicação à Teoria de Decisão
 - 6) Considerações finais sobre os Métodos de Valor Atual, Taxa de Retorno e Taxa de Mínima Atratividade
 - 7) Teoria da Preferência
 - 8) Considerações Finais
 - 9) Bibliografia
- 1) DETALHAMENTO DOS OBJETIVOS

- 1a) Critérios de Decisão

Considerada, arbitrariamente, uma decisão é uma escolha entre um conjunto de atos possíveis. A decisão tomada será considerada correta se a sua escolha, entre diversas alternativas, foi baseada em função de um certo critério de seleção - VALOR DE SELEÇÃO - que permite avaliar todas as alternativas apresentadas e possibilidades e as suas prováveis consequências, escolhendo a alternativa que ofereça o maior benefício com o menor risco possível. Devemos procurar evitar caracterizar uma "decisão correta" como a escolha da melhor alternativa para alcançar um fim programado, pois o que é um fim em um determinado momento, poderá ser, em outro, um simples meio alternativo quando considerada uma perspectiva mais ampla. Exemplo: Para um chefe de oficina, a produção constitui um fim, entretanto, para a direção, pode constituir apenas um dos meios para se alcançar o máximo benefício.

Entre as várias funções administrativas, programar é a função que melhor nos permite avaliar o dinamismo da vida da empresa. Programar é prever, é indicar o caminho

que a empresa deverá percorrer, é acima de tudo, definir novos objetivos e novos meios. A programação é, essencialmente, uma escolha entre vários objetivos e entre vários meios, mediante a avaliação das possibilidades que uns e outros apresentam para a solução do problema que se quer resolver. A tarefa principal de cada dirigente é justamente a de efetuar essa escolha, de avaliar situações, problemas e exigências presentes e de projetar no futuro tais situações a fim de conseguir as bases adequadas de avaliação para a escolha definitiva das decisões que deverá tomar.

Um objetivo se entende, geralmente, como um fim último e definitivo. A dificuldade de definição de qualquer objetivo está na possibilidade de que, em geral, a escolha se revele mais um meio do que um objetivo. Por exemplo: O objetivo final de uma empresa pode parecer que seja o de obter lucros, entretanto, um estudo mais profundo poderá revelar que o objetivo final da empresa pode ser mais bem expresso em termos de:

- prosperar;
- desenvolver-se econômica e socialmente;
- adquirir prestígio, etc.

Uma tomada de decisão decorre, necessariamente, do exame entre diversas possibilidades alternativas, da comparação destas, em termos de consequências positivas e negativas a respeito dos resultados que se desejam e, finalmente, da decisão sobre a alternativa a adotar.

A importância das decisões administrativas e a sempre maior complexidade dos problemas que os dirigentes são chamados a resolver, seja pelo número de incógnitas, seja pela especialização de informações necessárias, induzem a conclusão de que é necessário substituir a intuição por uma maior racionalidade.

Muitas decisões são complexas, porque envolvem objetivos múltiplos, permitem numerosos cursos de ação, produzem resultados incertos, são baseados em dados duvidosos

ou tem de ser tomadas em grupo.

Uma decisão pode ser intuitiva ou racional. A decisão intuitiva é baseada em convicção ou preferência pessoal: o mecanismo decisório não é explicável por argumentação lógica. A decisão racional é aquela tomada em função do raciocínio e do desenvolvimento do cálculo: é a única compatível com os sistemas administrativos das grandes e médias empresas.

As decisões podem ser tomadas segundo alguns critérios, tais como:

- a) Número de objetivos;
- b) Número de participantes;
- c) Natureza da informação disponível;
- d) Existência de oponentes.

- a) Número de objetivos

Em alguns casos, o economista ou o administrador tem um só objetivo a ser atingido e, em outros, a tomada de decisões terá que atingir, simultaneamente, a múltiplos objetivos. Exemplo: Vamos supor que uma fábrica tenha que ser mudada de uma localidade A, para uma localidade B, por motivos econômicos. A fábrica localizada em A apresenta custos operacionais elevados, produção anti-econômica e, conseqüentemente, elevados prejuízos. Por outro lado, estudos econômicos indicam a localidade B como a de maiores possibilidades para se conseguir o máximo benefício possível. O executivo ao tomar a decisão de fechamento da fábrica em A e abertura em B, deverá considerar, entre outros, os seguintes objetivos a serem satisfeitos simultaneamente:

- diminuição dos custos operacionais;
- aumento da produção;
- mão-de-obra;
- transferência e comodidade dos diretores, funcionários e trabalhadores, inclusive seus familiares, etc.

A simples transferência de uma fábrica faz

interferir inúmeros elementos técnicos, econômicos, sociológicos, culturais, políticos e até mesmo morais. Ao executivo, as assessorado pela sua equipe de planejamento, cabe determinar a combinação de benefícios, de perfeição técnica, de aumento de poder econômico e político. Além do desenvolvimento econômico da empresa, o administrador é também responsável pelo bem estar de todo pessoal da empresa e do papel que estes desempenham na sociedade. O exemplo acima caracteriza uma tomada de decisão com objetivos múltiplos e, como se vê, não é fácil desenvolver uma teoria de decisão que leve em conta todas as situações com as quais o administrador possa defrontar-se. Quanto maiores forem os objetivos, maiores as dificuldades.

A tarefa de estabelecer e enunciar claramente os objetivos é extremamente difícil, principalmente quando se há necessidade de se fazer a separação dos objetivos ou quantificar preferências subjetivas, tais como, considerações sentimentais ou estéticas, etc.

Após estabelecer, classificar e enunciar os objetivos, caberá ao administrador ou a sua assessoria de planejamento determinar a PONDERAÇÃO DOS OBJETIVOS. Esta fase do processo decisório consiste em determinar se os objetivos são redutíveis a um objetivo geral ou se são irredutíveis entre si, bem como, estabelecer as alternativas e a matriz de pagamento. Muitas vezes é possível exprimir em valores econômicos a influência de todos os objetivos, reduzindo o problema à escolha de alternativa cujo custo total é menor. Quando os objetivos são irredutíveis devem-se atribuir pesos a cada um, conforme a seguinte orientação:

- a) a soma dos pesos deverá ser igual a 100%;
- b) o peso de um objetivo qualquer deverá ser maior que 0% e menor que 100%;
- c) cada objetivo deverá ser classificado em seu respectivo grupo: econômico, social, técnico, científico, etc.
- d) por reflexão e tentativas, dar pesos a cada grupo de objetivos e, dentro de cada grupo, a cada objetivo.

Classificados os objetivos e determinados os seus pesos, deve-se estabelecer as alternativas e a sua eficiência em relação a cada objetivo, dando-se um valor numérico a esta eficiência.

Denomina-se "PONTOS DE EFICIÊNCIA RELATIVA" o resultado do produto "eficiência das alternativas" pelo "pesos dos objetivos". Somando-se os pontos podemos determinar a melhor alternativa do ponto de vista lógico: a melhor alternativa será aquela que obtiver maior número de pontos.

A distribuição dos cálculos em uma matriz nos fornecerá a "matriz de pagamento". A matriz obtida recebe esta denominação em razão dos PONTOS DE EFICIÊNCIA serem também denominados "PONTOS DE PAGAMENTO".

Seja o seguinte exemplo:

Um indivíduo deseja comprar uma máquina de lavar roupa. O vendedor lhe oferece 4 modelos que denominaremos alternativas A, B, C e D. A matriz de pagamento, a seguir, nos permite determinar a melhor alternativa sob o ponto de vista do comprador.

ALTERNATIVAS									
OBJETIVOS	Pesos dos Objetivos	A		B		C		D	
		Eficiência das al tern.	Pontos de Pagto?	Eficiência das al tern.	Pontos de Pagto?	Eficiência das al tern.	Pontos de Pagto?	Eficiência das al tern.	Pontos de Pagto?
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preço inicial	25%	95%	23,75	90%	22,50	100%	25,00	60%	15,00
Condições de Financiamento	10%	70%	7,00	100%	10,00	70%	7,00	80%	8,00
Preço provável de revenda	5%	80%	4,00	90%	4,50	100%	5,00	40%	2,00
Custo Operacional	10%	100%	10,00	100%	10,00	90%	9,00	100%	10,00
Facilidade de Manutenção	10%	100%	10,00	70%	7,00	80%	8,00	100%	10,00
Segurança no Financiamento	25%	100%	25,00	90%	22,50	60%	15,00	80%	20,00
Espaço	2%	80%	1,60	100%	2,00	70%	1,40	50%	1,00
Conforto	5%	80%	4,00	90%	4,50	50%	2,50	80%	4,00
Estilo e Cor	3%	50%	1,50	60%	1,80	10%	0,30	30%	0,90
Prestígio	5%	30%	1,50	20%	1,00	20%	1,00	25%	1,25
T O T A L	100%	-	88,35	-	85,80	-	74,20	-	72,15

Na primeira coluna encontramos os objetivos do comprador e, na segunda, os pesos destes objetivos. As demais colunas nos fornecem os valores numéricos das eficiências de cada alternativa, determinados ou estimados de acordo com os CRITÉRIOS DE VALOR do comprador e fabricante das máquinas (colunas 3, 5, 7 e 9) e, também, os PONTOS DE PAGAMENTOS (colunas 4, 6, 8 e 10). Vê-se que a alternativa A deverá ser a preferida pelo comprador, pois a soma de todos os pontos de pagamentos resultou em 88,35 pontos. Este valor é maior que os totais das demais alternativas.

O peso dos objetivos funciona como uma probabilidade, logo o valor numérico determinado ou estimado deverá estar compreendido em um intervalo fechado de 0% a 100%.

b) Número de participantes

As tomadas de decisões podem ser feitas por um ou mais indivíduos. As decisões de grande importância geralmente são tomadas em grupo: TOMADA DE DECISÃO GRUPAL.

Na tomada de decisão grupal cada participante escolhe a alternativa que mais lhe satisfaça e, em seguida, escolhe-se a alternativa mais votada. Cada elemento do grupo poderá ter direito a um ou mais votos. Todas as grandes empresas possuem estatutos que regem esta matéria.

c) Natureza da informação disponível

A natureza da informação disponível trata dos assuntos referentes a previsão dos resultados de uma tomada de decisão, cujos dados podem ser conhecidos e desconhecidos.

Esta talvez seja a mais importante das situações do processo decisório, pois a sua solução depende dos ensinamentos e desenvolvimentos da Teoria da Decisão no Risco e na Incerteza e, conforme já afirmamos anteriormente, constitui a razão de ser deste nosso trabalho. Considerando a relevância deste tema, vamos deixar para analisá-lo com maior profundida-

de quando analisarmos especificamente a Teoria da Preferência e a Decisão sob o Risco e Incerteza.

d) Existência de oponentes

A tomada de decisão de uma empresa pode afetar sensivelmente o desenvolvimento de uma ou mais empresas concorrentes. A solução para os problemas desta natureza são resolvidos através da aplicação da Teoria dos Jogos: estudo bastante complexo e de pouca aplicação no estágio atual de desenvolvimento dos países do grupo denominado 3º mundo. A tomada de decisão poderá depender ou não da tomada de decisão das empresas concorrentes. Utilizaremos alguns conceitos da Teoria dos Jogos no estudo da Teoria da Preferência.

1b) Conceitos Fundamentais

Uma empresa tem sempre as suas atenções voltadas para duas expectativas básicas: as possibilidades de lucros ou de prejuízos, o mesmo ocorrendo com os fornecedores de recursos. Administradores, empresários e acionistas preocupam-se com os problemas de incerteza e risco, tais como:

- recebimentos ou não recebimentos da renda esperada;
- mudança de preferência dos consumidores;
- obsolescência, etc.

Todo e qualquer investimento está sujeito ao risco e a incerteza. Caberá ao dirigente, economista ou a equipe de planejamento da empresa determinar os limites de aceitação deste risco, permitindo assim, um desenvolvimento econômico e financeiro com máxima rentabilidade do capital e menor situação de risco e incerteza. Os instrumentos que os economistas e administradores necessitam para a solução de tão complexo problema são fornecidos, principalmente, pela matemática financeira e estatística.

1c) Fórmulas Matemáticas e Estatísticas utilizadas;
Considerações preliminares

A matemática financeira permite-nos calcular e resolver, entre outros, os seguintes problemas:

- Equivalência de fluxo de caixa;
- Juros simples e capitalizado;
- Análise do Investimento, etc.

No estudo da análise do investimento daremos atenção especial a DESCRIÇÃO DOS MÉTODOS DE ANÁLISE:

- Método do valor atual;
- Método da taxa interna de retorno;
- Método do custo anual.

A estatística, por sua vez, constitui também um instrumento básico para a análise da Teoria da Preferência: Análise do Investimento sob condição de Risco e Incerteza, principalmente no cálculo do risco financeiro do capital investido. Serão utilizados os ensinamentos da Distribuição de Probabilidade.

Entre os principais objetivos da empresa está o de maximizar os lucros dos acionistas e dos fornecedores de recursos. Para que este objetivo seja atingido com relativo sucesso será necessário que se consiga uma combinação ótima de três importantes tomadas de decisões:

- Decisão de Investir
- Decisão de Financiamento
- Decisão de Pagamento de Dividendos

O conjunto destas três decisões determinam o valor da firma para o acionista. Para que se possa maximizar o valor da firma será necessário, antes de tudo, obter uma combinação ótima destas três decisões: uma tarefa considerada bastante difícil pelos especialistas em Administração Financeira. Qualquer dos métodos para a análise conceitual, prática e objetiva deste problema deverá levar em consideração o risco e a incerteza do projeto. Tais métodos compreendem os seguintes es

tudos fundamentais:

- Cálculos de Equivalência para Fluxo de Caixa;
- Análise das Distribuições de Probabilidades;
- Avaliação das Informações Probabilísticas; etc.

A matemática Financeira associada a estatística oferecem os ensinamentos básicos ao desenvolvimento de tais estudos.

A estatística constitui um instrumento indispensável para o planejador (executivo e equipe de planejamento) determinar, para uma dada relação, um valor ou os limites de variação desse valor. O computador permite estruturar um problema quantas vezes forem necessárias. O executivo terá em suas mãos as soluções que apresentam as melhores combinações de lucro e risco para um determinado projeto. A estatística, além de lhe fornecer os dados necessários à extrapolação do projeto para "n" anos, fornece-lhe a confiabilidade (grau de confiança) da solução a ser adotada, estabelecendo os limites de confiança ou a probabilidade de ocorrência de um dado evento e, ainda, permite-lhe determinar a correlação entre as diversas alternativas. A aplicação dos ensinamentos matemáticos e estatísticos contribuem para uma maior probabilidade de sucesso na análise, avaliação e tomada de decisão.

2) FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A formulação do problema quando feito com a máxima exatidão poderá representar metade da solução do problema, daí a importância fundamental do estudo e avaliação dos parâmetros, propriedades e relações do problema em causa. Ao afirmarmos que uma boa formulação do problema significa metade da solução, queremos apenas dizer que os elementos fundamentais do problema já foram identificados e relacionados de maneira correta. O principal objetivo é o de enunciar a natureza do problema em termos conhecidos em oposição aos termos não conhecidos. Por exemplo: reduzir 10% do custo total de um determina

do processo de produção. Existem centenas de opções para que se faça a redução dos custos de produção, das quais citaremos, apenas, as seguintes:

- diminuição ou eliminação do trabalho extraordinário;
- redução dos equipamentos complementares;
- simplificação dos sistemas de produção;
- remanejamento da proporção entre custo de máquina e custo de pessoal; etc.

Qualquer opção somente será eficaz se forem considerados uma série de outros custos que incidem sobre o custo total, tais como, custos de pessoal, espaço, transporte, fornecimento de insumos, etc.

3) EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

3.1 - Juros

Podemos definir juros como o prêmio pelo capital emprestado ou a remuneração do capital empregado em atividades produtivas.

Entre os vários fatores responsáveis pela existência dos juros podemos citar:

- a inflação, desvalorização da moeda, faz com que o retorno do investimento seja maior que o investimento original;
- a utilidade e o risco - os benefícios de um investimento são esperados para um período futuro e como esses benefícios não são conhecidos com certeza, as propostas de investimento envolvem alguns riscos, devendo, portanto, ser avaliados em função do retorno previsto do investimento que somente são atraentes quando oferecem remuneração adequada;
- a oportunidade - quando se faz um investimento estamos, automaticamente, deixando de consumir no presente e, também, excluindo outras alternativas de investimento. Por

exemplo: se um investidor compra uma ação ordinária de uma empresa A, ele está renunciando à possibilidade de consumo presente com a esperança de obter um nível mais alto de consumo futuro, como, também, renunciando a outras possibilidades de investimento. Como os recursos de investimento são escassos, deve-se investir no projeto que ofereça maior retorno e menor risco possível.

3.2 Juros Simples

- Fórmula Fundamental -

A fórmula fundamental de juros simples é dada por:

$$J = P i n \quad (1)$$

P = capital ou principal

i = taxa de juros

n = períodos de tempo

- Montante (M) -

Quando um capital P, numa certa data, aumenta de valor para M, numa data posterior, temos:

$$M = P + J = P + P i n = P(1 + in)$$

$$M = P(1 + in) \quad (2)$$

- Valor Atual -

Denomina-se "Valor Atual" o valor de uma dívida numa data anterior a sua data de vencimento. Da equação (2) obtemos:

$$P = \frac{M}{(1 + in)} \quad (3)$$

que é a fórmula de valor atual a juros simples i de M devido em n anos.

3.3 - Juros Compostos

Na capitalização composta o juro produzido ao fim de cada período financeiro é somado ao capital que o produziu e passam os dois, capital mais juros, a renderem juros no período seguinte.

Suponhamos um capital P que vai ser aplicado a taxa i . O juro produzido no primeiro período será:

$$J_1 = P \times i \quad (4)$$

e o montante M será:

$$M_1 = P + J_1 = P(1 + i)$$

No final do segundo período o juro será de:

$$J_2 = M_1 \times i$$

e o montante:

$$M_2 = M_1 + J_2 = P(1 + i)^2$$

e assim, sucessivamente, teremos no fim do n -ésimo período o seguinte montante:

$$M_n = P(1 + i)^n \quad (5)$$

que é a fórmula fundamental dos juros compostos para um número inteiro de períodos.

Para facilidade de cálculo, os valores de $(1 + i)^n$, em função de i e de n , já estão tabelados.

O juro total obtido é dado por:

$$J = M_n - P$$

Fazendo $1 + i = u$, a fórmula 5 será expressa por:

$$M_n = P \cdot u^n \quad (6)$$

3.3.1 - Fator de P para M

O fator $(1 + i)^n$ é denominado fator de acumulação do capital podendo ser representado, como vimos, por u^n , ou ainda, por: $FMP(i,n)$ que se lê: Fator de P para M. Ele estabelece a equivalência entre M e P.

A fórmula 5 poderá ser expressa da seguinte forma:

$$M = P \times FMP(i,n) \quad (7)$$

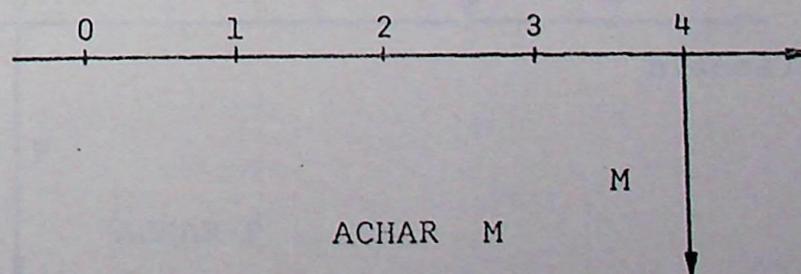
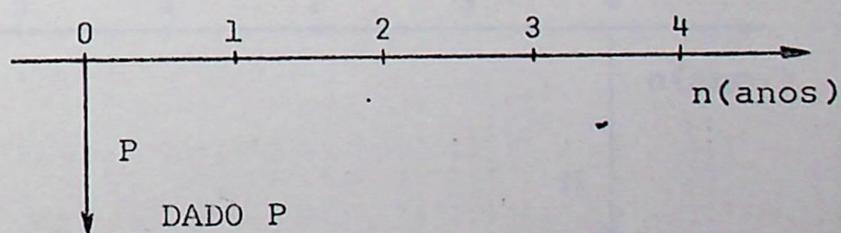
ou

$$M = P \cdot u^n \quad (8)$$

em que

$$u^n = FMP(i,n) \quad (9)$$

Utilizando os diagramas de fluxo de caixa, temos:



3.3.2 - Fator de M para P

$$FMP(i,n) = \frac{1}{(1+i)^n}$$

Quando o montante M é dado a uma determinada taxa i, em n períodos de capitalização, podemos determinar o valor atual de M através da seguinte fórmula:

$$P = \frac{M}{(1+i)^n} \quad (10)$$

O fator:

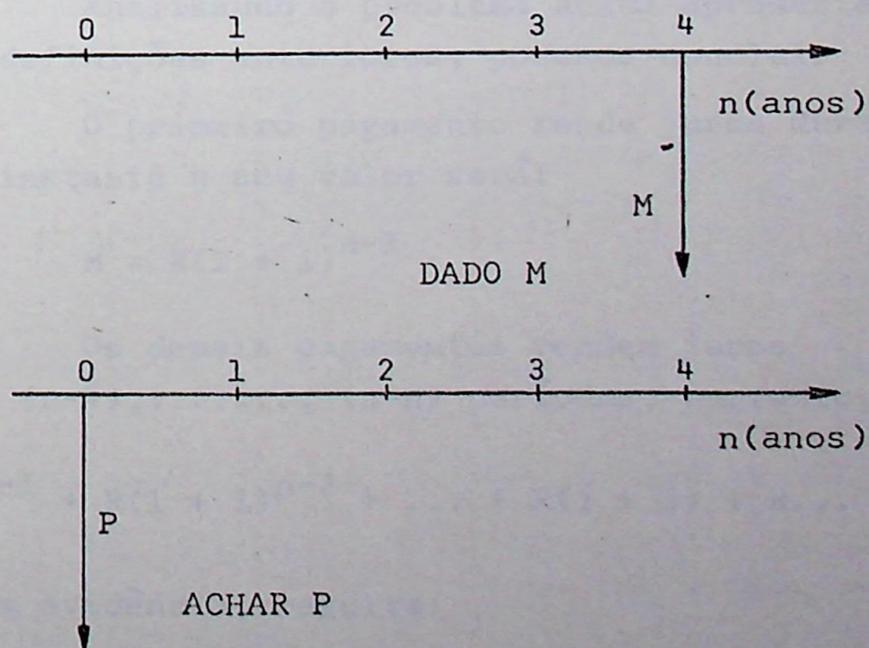
$$\frac{1}{(1+i)^n}$$

é denominado fator de desconto. Este fator está tabelado. Como o fator de desconto é sempre menor que a unidade, as quantias futuras serão menos valiosas que iguais quantias no presente.

Podemos escrever:

$$P = M \times FMP(i,n) \quad (11)$$

que se lê: dado M achar P, ou seja, determinar o valor atual de M. Os diagramas dos fluxos de caixa se resumem em:

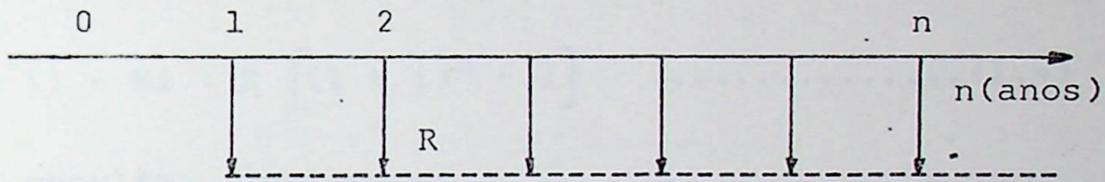


3.3.3 - Fator de R para M - FRM

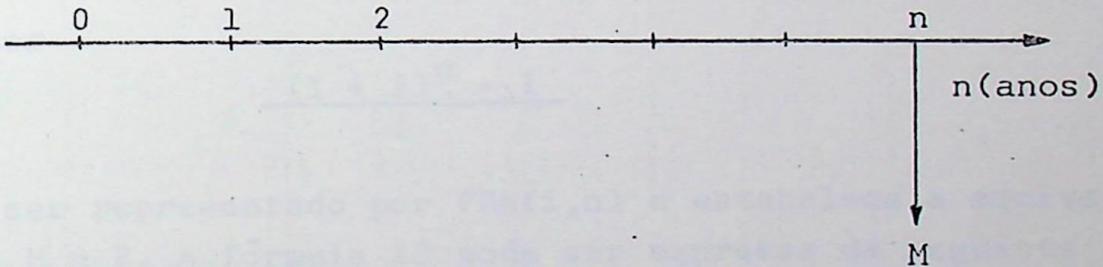
A partir da série uniforme R determinar M, ou seja, o montante M será determinado a partir da acumulação de uma série uniforme dada.

O problema pode ser esquematizado pelos diagramas dos fluxos de caixa seguintes:

Dado R:



Achar M:



Analisando o problema acima apresentado, e de acordo com as definições anteriores, podemos concluir:

O primeiro pagamento rende juros durante (n-1) períodos; no instante n seu valor será:

$$M = R(1 + i)^{n-1}$$

Os demais pagamentos rendem juros durante (n-2), (n-3), (n-4), ..., (n-n) períodos, portanto, teremos:

$$M = R(1 + i)^{n-1} + R(1 + i)^{n-2} + \dots + R(1 + i) + R \dots \quad (1.1)$$

colocando R em evidência, resulta:

$$M = R \left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^{n-n-1} + (1+i)^0 \right] \dots$$

.....(1.2)

Multiplicando ambos os membros de (1.2) por $(1+i)$, teremos:

$$M(1+i) = R \left[(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \dots + (1+i)^2 + (1+i) \right] \dots (1.3)$$

Subtraindo da expressão (1.3) a expressão (1.2), obtem-se:

$$M(1+i) - Mi = R \left[(1+i)^n - 1 \right] \dots \dots \dots (1.4)$$

donde resulta, finalmente:

$$M = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad (12)$$

O fator

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

pode ser representado por $FRM(i,n)$ e estabelece a equivalência entre M e R . A fórmula 12 pode ser expressa da seguinte forma:

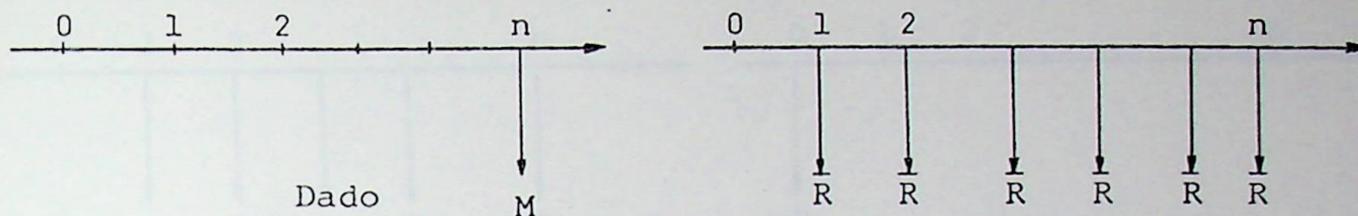
$$M = R \times FRM(i,n)$$

O fator FRM é denominado "fator de acumulação de capital de uma série uniforme". Este fator, para facilidade de cálculo, tem os seus valores tabelados para diferentes valores de "i" e de "n".

3.3.4 - Fator de M para R - FMR

Problema: Determinar R quando é dado o montante M .

Os diagramas de fluxos de caixa esquematizados, a seguir, permite-nos melhor visualizar o problema.



A fórmula 12 permite-nos calcular:

$$M = R \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

logo:

$$R = M \left[\frac{1}{(1 + i)^n - 1} \right] \quad (13)$$

ou

$$R = M \times \text{FRM}(i, n) \quad (14)$$

O fator

$$\frac{i}{(1 + i)^n - 1}$$

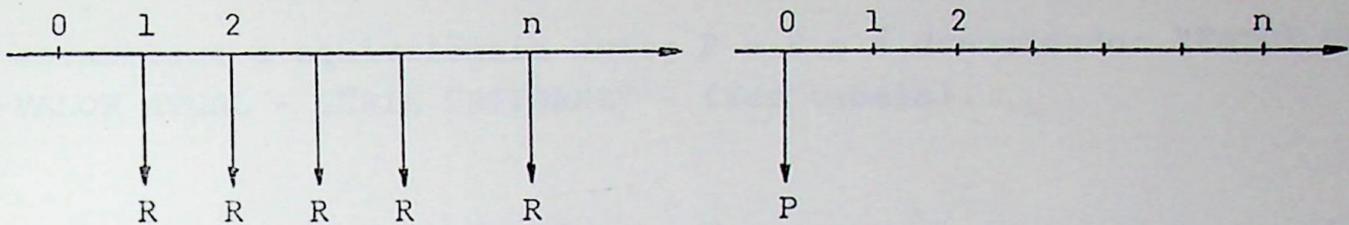
permite-nos determinar R quando M é dado, podendo ser representado por $\text{FRM}(i, n)$, denominado FATOR DE FORMAÇÃO DE CAPITAL - SÉRIE UNIFORME. A tabela 5 permite-nos calcular FMR para diversos valores de i e de n .

3.3.5 - Relação entre R e P

- Fator de R para P - FRP

Problema: Determinar o principal P para que se possa retirar a importância R em cada um dos n períodos de capitalização subsequentes, dados R, i e n, em outras palavras, determinar o valor atual da série uniforme R.

Os diagramas de fluxos de caixa, a seguir, representam o problema.



Solução:

Calcula-se, primeiramente, o valor de M equivalente a R, aplicando-se a fórmula

$$M = R \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

e depois calcula-se o valor de P, equivalente a M, aplicando-se a fórmula 10.

$$P = M \times \frac{1}{(1 + i)^n}$$

Bombinando-se as expressões 12 e 10 teremos:

$$P = R \times FRM(i, n) \times FMP(i, n)$$

ou seja:

$$P = R \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \times \frac{1}{(1 + i)^n} \right]$$

$$P = R \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right] \quad (15)$$

ou

$$P = R \times FRP(i, n) \quad (16)$$

O fator de R para P, representado por:

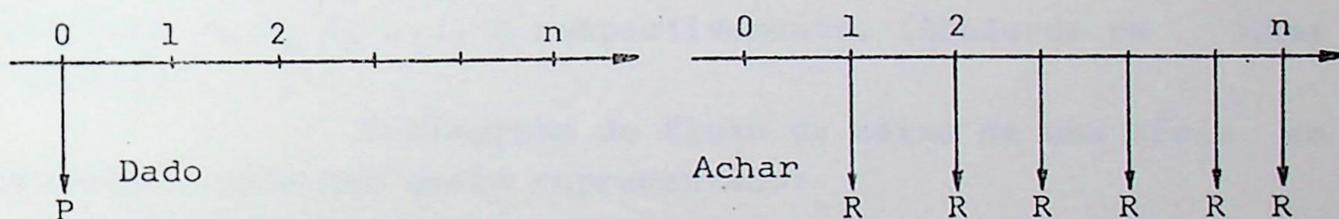
$$FRP(i, n) = \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$$

estabelece a equivalência entre P e R e é denominado: "FATOR DE VALOR ATUAL - SÉRIE UNIFORME" - (Ver tabela).

3.3.6 - Fator de P para R

Problema: Determinar a série uniforme R, resultante da aplicação do capital P. O problema consiste em determinar a importância a ser retirada em cada período para que se possa recuperar o capital P.

Os seguintes diagramas de fluxos de caixa permitem visualizar o problema com bastante clareza.



A equação 15 nos fornece:

$$P = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

logo:

$$R = P \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (17)$$

ou, simplesmente:

$$R = P \times \text{FPR}(i, n) \quad (18)$$

em que

$$\text{FPR}(i,n) = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \quad (19)$$

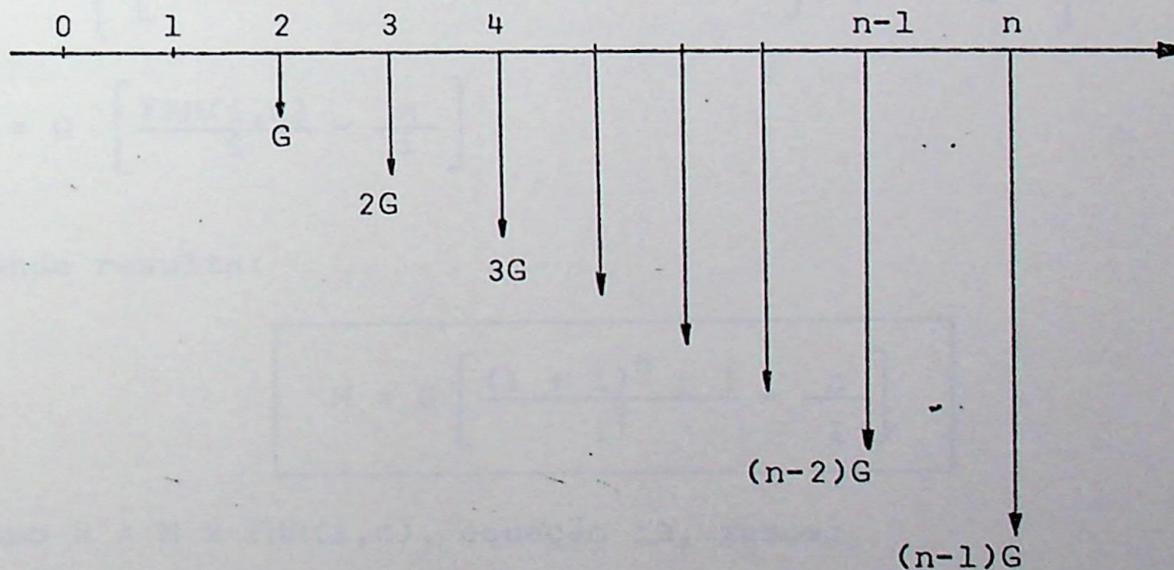
O $\text{FPR}(i,n)$ é denominado FATOR DE RECUPERAÇÃO DO CAPITAL SÉRIE UNIFORME e permite-nos determinar R quando P é dado.

A tabela fornece-nos os valores de $\text{FPR}(i,n)$ para diferentes valores de i e de n .

3.3.7 - Série em Gradiente

"Denomina-se série em gradiente a uma série de pagamentos (recebimentos) $G, 2G, 3G, (n-1)G$ que ocorrem nos períodos 2, 3, 4, ..., n respectivamente. (Abelardo de Lima Puccini)".

O diagrama de fluxo de caixa de uma série em gradiente pode ser assim representado:



A série uniforme equivalente a uma dada série em gradiente obtém-se decompondo-se a série em gradiente em diversas séries uniformes G : uma começando no período 2, outra no 3, outra no 4 e, assim, sucessivamente, até o período n .

O montante M no período n é dado por:

$$\begin{aligned}
 M &= G \times FRM(i, n-1) + G \times FRM(i, n-2) + G \times FRM(i, n-3) + \\
 &G \times FRM(i, n-4) + \dots + G \times FRM(i, 4) + G \times FRM(i, 3) + \\
 &G \times FRM(i, 2) + G \times FRM(i, 1) = \\
 &G \left[FRM(i, n-1) + FRM(i, n-2) + FRM(i, n-3) + \dots + \right. \\
 &\left. + FRM(i, 2) + FRM(i, 1) \right] = \\
 &= G \left[\frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i} + \frac{(1+i)^{n-2} - 1}{i} + \dots + \frac{(1+i)^1 - 1}{i} \right] \\
 &= G \left[(1+i)^{n-1} + \dots + (1+i) - (n-1) \right] \frac{1}{i} = \\
 &= G \left\{ \left[(1+i)^{n-1} + \dots + (1+i) + 1 \right] \frac{1}{i} - \frac{n}{i} \right\} = \\
 &= G \left[\frac{FRM(i, n)}{i} - \frac{n}{i} \right] \tag{20}
 \end{aligned}$$

Donde resulta:

$$M = G \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i^2} - \frac{n}{i} \right] \tag{21}$$

Como $R = M \times FMR(i, n)$, equação 13, temos:

$$R = G \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i^2} - \frac{n}{i} \right] \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Resultando:

$$R = G \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{i} \times \left(\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right) \right] \quad (22)$$

O fator

$$\frac{1}{i} - \frac{n}{i} \left(\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right)$$

é denominado "fator de G para R" e representado por:

$$FGR(i, n) \quad (\text{Ver tabela})$$

A fórmula 22 pode ser expressa por:

$$R = G \times FGR(i, n) \quad (23)$$

- Fator de G para P = FGP (i,n)

Multiplicando-se a fórmula 21 pela fórmula 10, será obtida a equivalência entre G e P, ou seja:

$$P = G \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i^2} - \frac{n}{i} \right] \left[\frac{1}{(1+i)^n} \right] \quad (24)$$

O fator

$$\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i^2} - \frac{n}{i} \right] \left[\frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

é denominado "fator de G para P" e representado por:

$$FGP(i, n) \quad (\text{ver tabela})$$

A fórmula 24 pode ser expressa por:

$$P = G \times FGP(i, n) \quad (25)$$

3.3.8 - Taxa nominal e taxa efetiva

A taxa nominal i_N é dada por:

$$i_N = n \times i \quad (26)$$

i_N = taxa nominal

n = número de períodos de capitalização

A taxa efetiva i_E , é dada por:

$$i_E = (1 + i)^n - 1 \quad (27)$$

ou

$$i_E = \text{FPM}(i, n) - 1 \quad (28)$$

i_E , taxa efetiva, é a taxa de juros segundo a qual o capital realmente cresceu.

Demonstração: Um capital P aplicado a taxa i_E durante um ano deve produzir o mesmo montante que quando aplicado a taxa i durante n períodos de capitalização. Portanto:

$$P(1 + i_E) = P(1 + i)^n$$

$$i_E = (1 + i)^n - 1 = \text{FPM}(i, n) - 1$$

Obs.: A taxa efetiva é sempre maior que a taxa nominal.

4) MÉTODOS DE DECISÃO

Um dos problemas empresariais que mais preocupa os executivos e planejadores é o de decidir pela escolha da melhor alternativa entre as várias alternativas de investimen-

to. A escolha de uma alternativa elimina, automaticamente, as demais alternativas. Isto ocorre devido a escassez de recursos para atender a todas as alternativas simultaneamente. Se os recursos financeiros não fossem escassos, isto é, se houvesse superabundância de recursos, este problema não existiria. Os diversos fatores econômicos e não econômicos responsáveis pelos diferentes critérios de tomada de decisão podem ser classificados em:

- fatores objetivos
- fatores subjetivos

São classificados como fatores objetivos todos aqueles que podem ser mensurados ou quantificados e cuja comparação independe de considerações ou opiniões pessoais. O principal fator objetivo é a rentabilidade, isto é, o lucro ou benefício obtido por unidade de capital aplicado e por unidade de tempo.

Os fatores subjetivos são todos aqueles que não podem ser mensurados ou quantificados. Entre eles os mais importantes são:

- fatores sociais - (ex.: escolha entre construir um posto médico para o empregados ou ampliar uma unidade produtiva);
- fatores político-administrativos - (ex.: ampliar uma fábrica na cidade A ou em uma cidade B, com uma administração descentralizada);
- fatores estratégico-comerciais - (ex.: investir em pesquisas científicas ou em publicações); etc.

Cada um destes fatores subjetivos é de importância fundamental para o desenvolvimento da empresa e o seu estudo é bastante complexo, entretanto, procuraremos nos limitar ao estudo dos fatores objetivos para que possamos atingir a meta deste trabalho.

Os fatores imponderáveis (subjetivos) não podem ser reduzidos a valores monetários, pois sua avaliação é totalmente subjetiva e depende do critério de julgamento pes-

soal daqueles que tem a responsabilidade de escolha.

Os métodos de comparação de alternativas de investimento baseiam-se no princípio de equivalência; isto implica na utilização de uma taxa de desconto.

O primeiro passo para a análise comparativa de diversas alternativas de investimentos consistirá em transformá-las em mutuamente exclusivas. Os investimentos são mutuamente exclusivos quando a escolha de um investimento elimina automaticamente os demais. Por exemplo: suponhamos que existam quatro alternativas de investimento possíveis: A, B, C e D. Imaginemos que a escolha de A elimine a possibilidade de, simultaneamente, executar B, C ou D. A escolha da alternativa B permite, entretanto, executar B isoladamente ou conjugada a C ou D, ou ainda conjugada simultaneamente a C e a D.

As alternativas mutuamente exclusivas são:

I	A
II	B
III	BC
IV	BD
V	BCD

As alternativas I, II, III, IV e V é que serão objeto da análise comparativa.

4.1 - Taxa de mínima atratividade e a vida útil do investimento

Quando a escolha de uma alternativa não elimina a possibilidade de que outras alternativas sejam executadas simultaneamente, dizemos que estas alternativas são independentes. Quando diversos investimentos independentes estiverem sendo analisados, o problema se resume em escolher os melhores investimentos em função do capital existente. Na prática exis-

tem várias aplicações possíveis de capital, entretanto, vamos considerar de interesse somente as mais rentáveis. Sabemos que o objetivo do investidor pode não ser somente o lucro mas, para efeito de estudos, vamos partir da hipótese ou pressuposto, de que a rentabilidade do projeto seja o objetivo principal. Vimos que a rentabilidade de uma série de investimentos é dada pela taxa de juros que permitiria ao capital empregado um certo retorno. Ao analisar um novo projeto de investimento deve-se levar em consideração os recursos disponíveis a serem empregados e, conseqüentemente, a rejeição de outras alternativas de investimentos que também proporcionariam retornos do capital empregado. Portanto, o novo projeto de investimento para ser atrativo deve render, no mínimo, a taxa de juros equivalente à rentabilidade das aplicações correntes e de pouco risco. Considerando que cada investidor tem possibilidades de investimentos diferentes, haverá uma taxa mínima atrativa de retorno para cada um. Está claro que um novo projeto somente poderá ser aceito ou rejeitado se houver um elemento de comparação. Portanto, o investidor deverá ter sempre uma alternativa de investimento que lhe proporciona uma taxa de juros i_{\min} . A taxa de juros dá-se o nome de taxa de mínima atratividade. Por exemplo: se existe uma alternativa "A" que proporciona ao investidor uma rentabilidade de 30% anuais, uma alternativa "B" somente será atrativa se proporcionar uma rentabilidade acima de 30%. A taxa de mínima atratividade além de variar de indivíduo para indivíduo, também não é constante para um mesmo investidor, isto é, sofre variações em virtude das circunstâncias. Quando não se consegue mais investir a uma taxa de juros de mínima atratividade, i_{\min} , o investidor terá que diminuir o valor (i_{\min}) desta taxa.

Devemos considerar, também, o fato de que geralmente desembolsos relativos a um investimento não se dão magicamente em um instante determinado, porém, se escalonam ao longo do tempo.

Muitas vezes o investimento se distribui ao

longo de um período considerável, às vezes, interpenetrado na faixa de tempo em que ocorrer as recuperações do capital empregado. Uma fábrica que começa a produção antes de estar concluída, constitui um exemplo típico deste caso. Os recebimentos ou recuperação do capital investido também se distribuem ao longo do tempo, de maneira peculiar a cada alternativa.

Para comparar essas grandezas, diferentes em valor e quanto à ocasião em que ocorrem, são utilizados os fluxos de caixa das várias alternativas, ou seja, entradas e saídas monetárias apresentadas com as respectivas datas. O fluxo de caixa constitui um modelo do investimento em perspectiva.

4.2 - Métodos de Comparação para tomadas de decisão

É perfeitamente sabido que todo investimento tem uma vida útil e, portanto, esta vida útil deve ser previamente determinada. Isto feito, poder-se-á limitar o número de períodos durante os quais o investimento dará lucros ou benefícios.

A unidade de tempo a ser considerada quando se trata de investimentos a prazo longo, e quando não há necessidade de um detalhamento muito grande, o período anual é o mais indicado. Entretanto, se o investidor necessitar ou desejar uma precisão mais rigorosa, pode-se considerar os diversos desembolsos e recebimentos decompostos por meses. A unidade de tempo deverá ser escolhida de acordo com cada caso, isto é, em função específica de cada caso. Entre os investimentos ou desembolsos devem ser considerados todos os dispêndios referentes ao projeto, tais como: dispêndios de implantação, custos operacionais e amortização de empréstimos. Deverá ser incluído ou considerados como desinvestimentos ou retornos os empréstimos referentes ao projeto e, também as receitas provenientes da atividade programada. Daremos, mais adiante, um exemplo elucidativo.

Os métodos de comparação para tomada de deci

são, baseados no princípio de equivalência, determinam quantidades únicas que representam cada alternativa de investimento. Os métodos usualmente utilizados são os seguintes:

- 1º) Método do Valor Atual
- 2º) Método da Taxa de Retorno
- 3º) Método do Custo Anual

4.2.1 - Método do Valor Atual

A aplicação do método do valor atual consiste em determinar o valor atual do fluxo de caixa, isto é, a soma algébrica dos valores atuais de cada um dos saldos ocorridos ao fim de cada período de tempo a uma taxa de juros dada.

Se a taxa de juros utilizada para o cálculo do valor atual do fluxo de caixa for a taxa de mínima atratividade, i_{\min} , o projeto (alternativa) somente será atrativo quando o resultado do cálculo do valor atual do fluxo de caixa for nulo, isto é, for zero.

De acordo com os conceitos anteriormente desenvolvidos, um projeto de investimento X, qualquer que seja, somente será aceito se:

$$P_X (i_{\min}) \geq 0$$

A alternativa que tem o investidor de sempre poder investir a uma taxa de mínima atratividade, alternativa A em nosso exemplo, apresenta as seguintes características fundamentais:

- 1) A taxa de retorno, taxa interna de juros, é igual a i_{\min}
- 2) A quantida a ser nela investida pode ser qualquer
- 3) A sua vida útil também pode ser qualquer
- 4) A alternativa A poderá ser comparada com qualquer outra alternativa de investimento.

A análise de vários investimentos mutuamente exclusivos permite-nos concluir:

- a) A taxa de juros para o cálculo do Valor Atual de cada um dos investimentos deve ser a taxa de mínima atratividade.
- b) Os investimentos que apresentarem valor atual negativo devem ser desprezados.
- c) O investimento que apresentar o maior valor atual não negativo deverá ser o escolhido.

4.2.2 - Método da taxa de retorno

"A avaliação da rentabilidade de uma proposta de investimento é feita pela taxa de juros que torna equivalente o investimento inicial ao fluxo de caixa subsequente (Geraldo Hess)".

A taxa interna de juros, ou taxa de retorno, de um fluxo de caixa, é a taxa de juros para a qual o valor atual desse fluxo de caixa se anula.

Geralmente o cálculo da taxa de retorno é feita por tentativas ou interpolações.

No processo por tentativas, a partir de uma taxa inicial, calcula-se o valor atual do fluxo de caixa. O objetivo é obter uma taxa que torne este valor nulo e, portanto, vai-se modificando a taxa inicial até torná-la igual a zero ou próximo de zero.

No processo por interpolação linear teremos que ter duas taxas de juros que nos forneçam valores atuais próximos de zero, porém, com sinais trocados, isto é, um valor atual, próximo de zero, com sinal positivo, e um outro valor atual próximo de zero, com sinal negativo.

A análise de um investimento pelo método da taxa de retorno implica em:

- a) Cálculo da taxa de retorno
- b) O projeto de investimento considerado somente será aceito se a sua taxa de retorno for maior ou igual a taxa mínima de atratividade (i_{\min}), em outras palavras, todos os projetos de investimentos com taxas de retornos menores que a taxa de mínima atratividade devem ser eliminados.

A taxa interna de retorno é a taxa que nos permite determinar o crescimento dos recursos investidos em um determinado projeto. Para o investidor é demasiado importante saber se o capital investido está crescendo a uma taxa menor, maior ou igual a uma taxa especificada, a taxa de mínima atratividade.

Os conceitos acima permite-nos as seguintes afirmativas básicas e fundamentais:

- a) Quando o valor atual total de um fluxo é zero, a uma dada taxa i , então i é a taxa de crescimento do fluxo.
- b) Quando o valor atual de um fluxo é menor que zero, a uma dada taxa i , então a taxa de crescimento do fluxo é menor que i .
- c) Quando o valor atual de um fluxo é maior que zero, a uma dada taxa i , então a taxa de crescimento do fluxo é maior que i .

A tabela abaixo apresenta-nos a relação existente entre o valor atual e a taxa de crescimento:

taxa de crescimento	Valor Atual
menor que i	negativo
igual a i	0
maior que i	positivo

4.2.3 - Método do custo anual

A comparação entre as alternativas de investimento pelo método do custo anual é feita reduzindo-se o fluxo de caixa de cada proposta a uma série uniforme equivalente, com o uso da taxa de mínima atratividade. Os valores obtidos são então confrontados, permitindo uma decisão entre as alternativas.

4.3 - O imposto de renda e o conceito de depreciação

Procurando não aprofundar no mérito da questão, daremos aqui, apenas rudimentos sobre o imposto de renda e a depreciação.

Em muitas tomadas de decisão é necessário que se considere a ação do imposto de renda sobre ela. Por que?

Porque o imposto de renda pode modificar o critério de decisão. Por exemplo: a melhor alternativa antes do imposto de renda poderá não sê-la mais, depois dele. Somente isto já justifica a aplicação do imposto de renda no cálculo da tomada de decisão. Entretanto, em muitos casos, a melhor alternativa antes do imposto, continua a ser a mais vantajosa após o mesmo.

O imposto de renda atua sobre a taxa de mínima atratividade e, conseqüentemente, sobre todo e qualquer método para a tomada de decisão. Uma taxa de mínima atratividade que satisfaça ao investidor antes do imposto de renda pode transformar-se em desinteressante se este for considerado.

Vamos supor uma taxa de mínima atratividade de 14% a.a., antes do imposto de renda que, por hipótese, seja de 30% a.a.. Qual o valor da taxa de mínima atratividade após o imposto ?

Solução:

$$14\% \times (1 - 0,30) = 9,80\% \text{ a.a.}$$

O imposto de renda é uma despesa e, portanto, deve ser deduzido do fluxo de caixa. Ele incide sobre o lucro líquido depois de deduzido a depreciação.

A depreciação é deduzida porque determinados bens do ativo imobilizado de uma empresa perdem o seu valor real no decorrer de sua vida útil. Por exemplo: um carro comprado em 1974 por Cr\$ 20.000,00 não terá mais o mesmo valor real de compra em 1975. O uso e o consequente desgaste fará com que o carro tenha um valor real de venda, em 1975, menor que seu valor em 1974. Dizemos que o carro sofreu uma depreciação em virtude do uso e do desgaste.

A legislação tributária permite às empresas deduzir do lucro líquido, uma parcela anual correspondente aos bens depreciados.

Existem vários métodos para o cálculo da depreciação de um bem, entre eles, o método da linha reta (depreciação linear). Considerando que o sistema tributário brasileiro utiliza somente o processo de "depreciação linear", nós também só utilizaremos este método nos exemplos que daremos a seguir.

O cálculo da depreciação linear é dado por:

$$(\text{Depreciação linear}) = \frac{(\text{Valor real do bem}) - (\text{Valor residual})}{(\text{Vida útil})}$$

1º exemplo: Determinar a depreciação linear de uma máquina que custa Cr\$ 10.000,00, com vida útil de 10 anos:

$$\text{Depreciação anual} = \frac{10.000}{10} = \text{Cr\$ } 1.000,00$$

2º exemplo: Um automóvel custa Cr\$ 40.000,00, com vida útil estimada em 10 anos e valor residual de Cr\$5.000,00. Determinar a depreciação anual e mensal do veículo.

Solução:

$$\text{Depreciação anual} = \frac{40.000,00 - 5.000,00}{10} = \text{Cr\$} 3.500,00$$

$$\text{Depreciação mensal} = \frac{3.500,00}{12} = \text{Cr\$} 291,66$$

3º exemplo: Um equipamento custa Cr\$ 60.000,00 e produz saldos anuais de Cr\$ 20.000,00 antes do imposto de renda, com vida útil de 6 anos, sem valor residual. Considerando a depreciação e o imposto de renda, 30% sobre a renda tributável, determinar as taxas de retorno antes e depois do imposto de renda.

Solução:

$$\text{Depreciação anual} = \frac{\text{Valor inicial} - \text{Valor residual}}{\text{Vida útil}}$$

$$\text{Depreciação anual} = \frac{60.000}{6} = \text{Cr\$} 10.000,00$$

Os demais valores estão tabelados, a seguir.

Anos	Fluxo de caixa antes do IR	Depreciação Linear	Renda Tributável	Fluxo de caixa do IR	Fluxo de caixa depois do IR
1	2	3	4	5	6
0	- 60.000	-	-	-	- 60.000
1	20.000	- 10.000	10.000	- 3.000	17.000
2	20.000	- 10.000	10.000	- 3.000	17.000
3	20.000	- 10.000	10.000	- 3.000	17.000
4	20.000	- 10.000	10.000	- 3.000	17.000
5	20.000	- 10.000	10.000	- 3.000	17.000
6	20.000	- 10.000	10.000	- 3.000	17.000
TOT.	60.000	- 60.000	60.000	-18.000	42.000
TAXA DE RET.	24,7%	-	-	-	17,7%

Coluna 4 = coluna 2 + coluna 3

Coluna 5 = 0,30 x coluna 4

Coluna 6 = coluna 2 + coluna 5

i) Cálculo da taxa de retorno antes do imposto de renda.

$$- 60.000 + 20.000 \times FRP(i,6) = 0$$

$$\therefore FRP(i,6) = \frac{60.000}{20.000} = 3,0000$$

o que se verifica para $i \approx 24,7\%$ a.a.

O valor de i foi calculado com uma aproximação bastante razoável.

ii) Cálculo da taxa de retorno depois do imposto de renda

$$- 60.000 + 17.000 \times FRP(i,6) = 0$$

$$FRP(i,6) = \frac{60.000}{17.000} = 3,5294$$

o que se verifica para $i \approx 17,7\%$ a.a.

iii) Conclusões

1º) As taxas de retorno antes e depois do imposto de renda são, respectivamente, 24,7% e 17,7%.

2º) Se a análise do investimento estiver sendo feita antes do imposto de renda, ela somente poderá ser aceita, se a taxa de mínima atratividade (i_{\min}) for:

$$i_{\min} \leq 24,7\%$$

3º) Se a análise estiver sendo feita depois do imposto de renda, o investimento somente poderá ser aceito se a taxa de mínima atratividade (i_{\min}) for:

$$i_{\min} \leq 17,7\%$$

2º Exemplo: Consideremos os dados do exemplo acima desenvolvido supondo que o investimento, no qual o investidor tenha obtido um financiamento de Cr\$ 48.000,00 para ser pago em 6 parcelas iguais a juros de 20% ao ano sobre o saldo devedor, siga este considerando: não existir inflação, então determinar a taxa de retorno do capital próprio antes e após o imposto de renda.

Solução:

Para facilitar os cálculos e melhor visualização do problema, os dados estão tabelados, a seguir:

Anos	Fluxo de caixa antes do IR	Amortização Financeiramente	Juros sobre o saldo do devedor (20% a.a.)	Fluxo de caixa do capital próprio antes IR	Depreciação Linear	Renda Tributável	Fluxo de caixa do IR	Fluxo de caixa do capital próprio depois do IR
0	- 60.000 * 48.000	-		- 12.000	-	-	-	- 12.000
1	20.000	- 8.000	- 9.600	2.400	- 10.000	400	- 120	2.280
2	20.000	- 8.000	- 8.000	4.000	- 10.000	2.000	- 600	3.400
3	20.000	- 8.000	- 6.400	5.600	- 10.000	3.600	- 1.080	4.520
4	20.000	- 8.000	- 4.800	7.200	- 10.000	5.200	- 1.560	5.640
5	20.000	- 8.000	- 3.200	8.800	- 10.000	6.800	- 2.040	6.760
6	20.000	- 8.000	- 1.600	10.400	- 10.000	8.400	- 2.520	7.880
TOTAL	108.000	-48.000	-33.600	26.400	- 60.000	26.400	- 7.920	18.480
Taxa Retorno				35,32%				27,62%

* Financiamento de Cr\$ 48.000,00. (coluna 5) = (coluna 2) + (coluna 3) + (coluna 4)
 (coluna 7) = (coluna 2) + (coluna 4) + (coluna 6)
 (coluna 8) = (coluna 7) x 0,30
 (coluna 9) = (coluna 5) + (coluna 8)

- As tabelas seguintes nos fornecem os cálculos das taxas de retorno.

TABELA DE DESCONTO DO FLUXO DE CAIXA ANTES DO IMPOSTO DE RENDA

Anos	Fluxo de caixa antes do IR	i = 35%		i = 37%	
		Fatores FMP	Valores Atuais	Fatores FMP	Valores Atuais
0	- 12000	1,0000	-12000,00	1,0000	- 12000,00
1	2.400	0,7407	1.777,68	0,7299	1.751,76
2	4.000	0,5487	2.194,80	0,5328	2.131,20
3	5.600	0,4064	2.275,84	0,3890	2.178,40
4	7.200	0,3011	2.167,92	0,2839	2.044,08
5	8.800	0,2230	1.962,40	0,2072	1.823,36
6	10.400	0,1652	1.718,06	0,1512	1.572,48
TOTAL	26.400	-	96,70	-	- 498,72

x = Taxa de Retorno do Fluxo de caixa do capital próprio antes do Imposto de Renda

$$x = 35 + \frac{96,70}{96,70 + 498,72} \times 2 = 35,32$$

TABELA DE DESCONTO DO FLUXO DE CAIXA DEPOIS DO IMPOSTO DE RENDA

Anos	Fluxo de caixa antes do IR	i = 27%		i = 29%	
		Fatores FMP	Valores Atuais	Fatores FMP	Valores Atuais
0	- 12.000	1,0000	-12.000,00	1,0000	-12.000,00
1	2.280	0,7874	1.795,27	0,7752	1.767,46
2	3.400	0,6200	2.108,00	0,6009	2.043,06
3	4.520	0,4882	2.206,70	0,4658	2.105,42
4	-5.640	0,3844	2.168,01	0,3611	2.036,60
5	6.760	0,3027	2.046,25	0,2799	1.892,12
6	7.880	0,2383	1.877,80	0,2170	1.709,96
TOTAL	18.480	-	202,03	-	- 445,38

x = Taxa de retorno do fluxo de caixa do capital próprio depois do Imposto de Renda.

$$x = 27 + \frac{202,03}{202,03 + 445,38} \times 2 = 27,62\%$$

Conclusão:

De acordo com as tabelas acima, podemos concluir:

1º) As taxas de retorno do capital próprio antes e depois do imposto de renda são, respectivamente, 35,32% a.a e 27,62% a.a.

2º) i) Análise antes do imposto de renda:

O investimento somente poderá ser aceito se a taxa de mínima atratividade for igual ou menor que 35,32% a.a.

$$i_{\min} \leq 35,32\%$$

ii) Análise após o imposto de renda:

O investimento somente poderá ser aceito se:

$$i_{\min} \leq 27,62$$

3º) Analisamos o investimento sob dois aspectos fundamentais: sem investimento de terceiros (sem empréstimo) e com investimento de terceiros (financiamento). Os resultados obtidos podem ser resumidos na seguinte tabela:

I T E N S	Remuneração do Capital Próprio	
	Antes do I.R.	Depois do I.R.
Sem financiamento	24,7% a.a.	17,7%
Com financiamento	35,32% a.a.	27,62

Segundo a teoria tradicional, todos os projetos de investimento são analisados independentemente de seu financiamento, para ver se satisfazem. Em seguida faz-se a análise das possíveis obtenção de recursos de terceiros. A prática tem demonstrado que, em geral, os empréstimos tendem

a melhorar os bons empreendimentos e a piorar os maus. O problema acima analisado é um bom exemplo: o investimento veio melhorar o empreendimento. Este raciocínio se baseia no fato da taxa de juros cobrada ser menor que a taxa de retorno do investimento.

Vamos supor que a taxa de mínima atratividade da empresa, acima seja de 15% a.a. Para $i_{\min} = 15\%$ a.a. o empreendimento é atraente pois apresenta retornos suficientes para saldar o financiamento e demais compromissos assumidos.

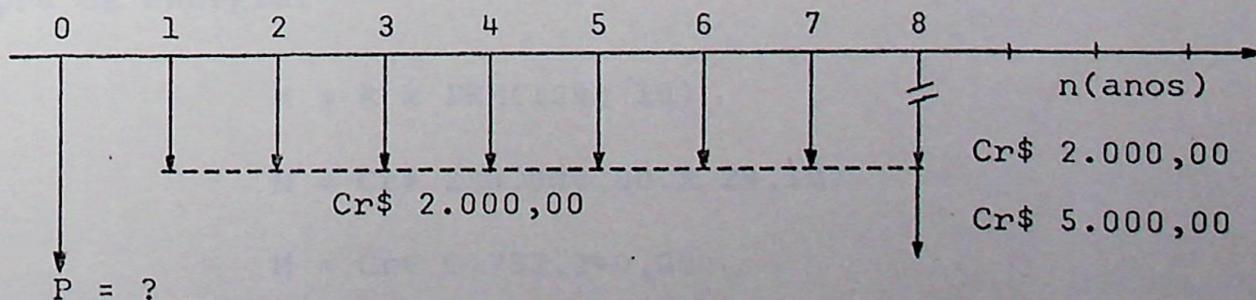
Verificamos, ainda, que o imposto de renda permite deduzir os juros pagos pelo financiamento e a depreciação. A amortização do principal não é dedutível.

A taxa de retorno é calculada somente sobre o capital empregado pelos iniciadores do empreendimento. O financiamento é pago pela amortização mais os juros. Assim, no mesmo estudo, depreciação e amortização não podem aparecer como custos.

5) APLICAÇÕES

1) - Uma nota promissória é oferecida a venda. Ela ainda vai oferecer 8 prestações anuais de Cr\$ 2.000,00 e seu valor de resgate será de Cr\$ 5.000,00 a ser pago com a última prestação, daqui a 8 anos. Quanto se deve pagar por ela para receber um rendimento de 25% ao ano de juros compostos?

Solução:



$$P = R \times FRP(25\%, 8) + M \times FMP(25\%, 8)$$

$$P = 2.000 \times 3,32891 + 5.000 \times 0,16777$$

$$P = 6.657,82 + 838,85 = 7.496,67$$

Resposta: Cr\$ 7.496,67

2) - Uma companhia estuda a instalação de uma turbina para a produção de energia elétrica. Atualmente a energia é comprada a cerca de Cr\$ 280.000,00 anuais.

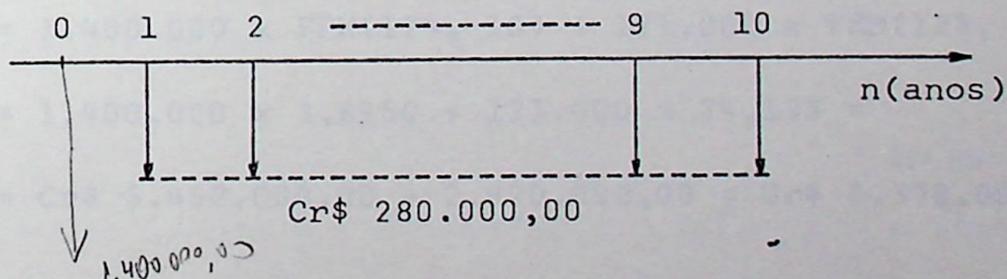
A turbina exigirá investimento inicial de Cr\$ 1.400.000,00, consumindo Cr\$ 58.000,00 anualmente de combustível e Cr\$ 21.000,00 de manutenção e mão-de-obra. A vida útil da instalação seria de 10 anos e os impostos e seguro seriam de 3% do investimento inicial.

Sendo a taxa de mínima atratividade de 12% a.a., a companhia deverá instalar a turbina?

Solução:

58
21
79

i) Despesas com a compra de energia:



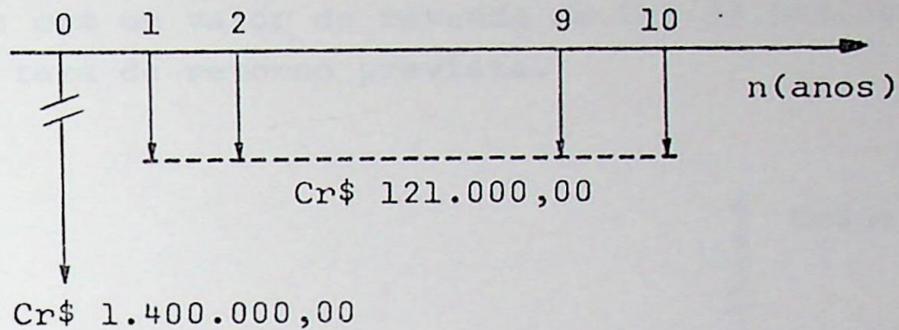
Capital pago, no final de 10 anos, pela compra de energia:

$$M = R \times FRM(12\%, 10)$$

$$M = \text{Cr\$ } 280.000,00 \times 24,133$$

$$M = \text{Cr\$ } 6.757.240,00$$

ii) Compra da turbina e os custos anuais do investimento:



Investimento: Cr\$ 1.400.000,00

Custos anuais:

- Combustível	: Cr\$ 58.000,00	$\frac{143}{42}$
- Manutenção e mão-de-obra	: Cr\$ 21.000,00	
- Impostos	: <u>Cr\$ 42.000,00</u>	
	Cr\$ 121.000,00	

No final de 10 anos o custo total será de:

$$\begin{aligned}
 M &= 1.400.000 \times \text{FPM}(12\%, 10) + 121.000 \times \text{FRM}(12\%, 10) = \\
 &= 1.400.000 \times 3,8950 + 121.000 \times 24,133 = \\
 &= \text{Cr\$ } 5.453.000,00 + 2.920.093,00 = \text{Cr\$ } 8.373.093,00
 \end{aligned}$$

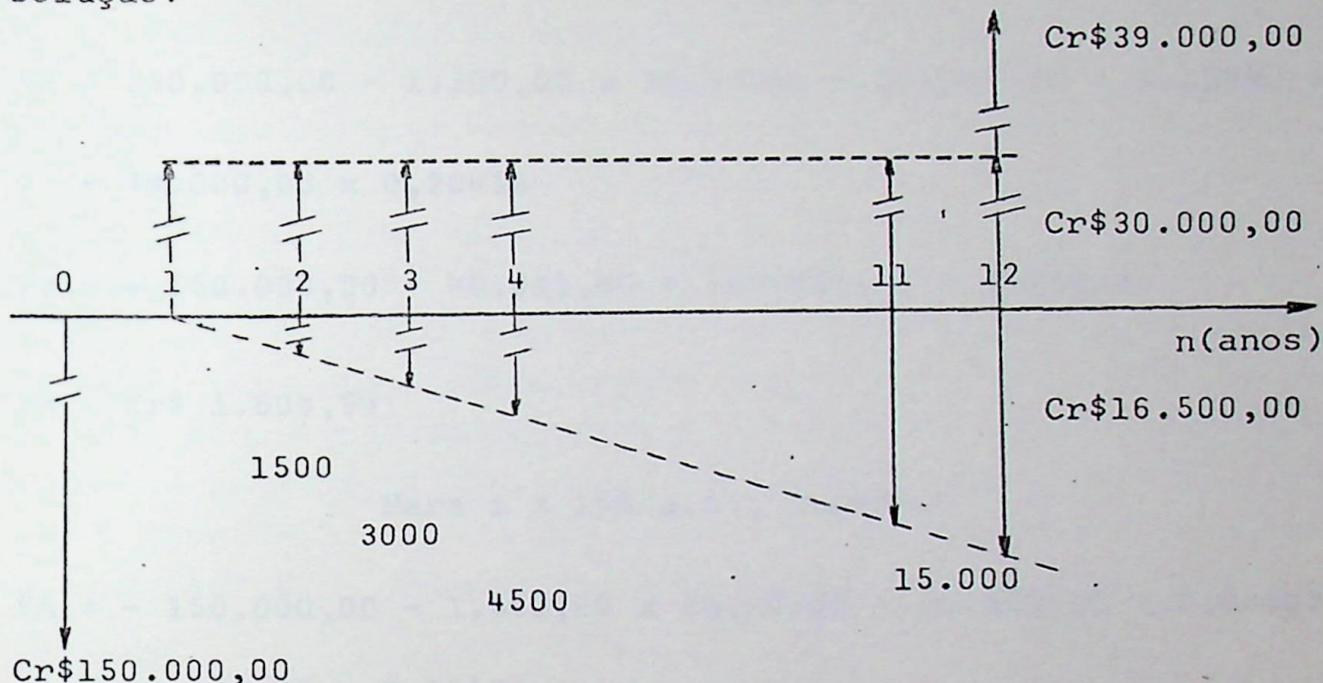
Conclusão:

Considerando que as despesas da compra de energia são menores que a da instalação da turbina, a companhia não deverá comprá-la.

3) - Está sendo considerada a compra de certa máquina por Cr\$ 150.000,00. É estimado que fornecerá receita líquida no primeiro ano de Cr\$ 30.000,00. Embora se espere que as receitas aumentarão com a progressiva aceitação do produ-

to, um aumento de custos, com o aumento da idade da máquina fará com que as receitas líquidas diminuam cerca de Cr\$ 1.500,00 após 12 anos com um valor de revenda de Cr\$ 39.000,00. Deseja-se saber a taxa de retorno prevista.

Solução:



A taxa de retorno é a taxa real de crescimento do capital investido e, por definição, é a taxa em que o valor atual se anula.

- Cálculo da taxa de retorno: por tentativas:

$$VA = - Cr\$150.000,00 - Cr\$1.500,00 \times FGP(i,12) + Cr\$30.000,00 \times FRP(i,12) + Cr\$39.000,00 \times FMP(i,12) = 0$$

Para $i = 12\%$ a.a., teremos:

$$VA = - 150.000 - 1.500 \times 25,95227 + 30.000 \times 6,19437 + 39.000 \times 0,25667$$

$$\begin{aligned} VA &= - 150.000 - 38.928,45 + 185.832,00 + 10.010,13 = \\ &= \text{Cr\$ } 6.913,68 \end{aligned}$$

Para $i = 13\%$ a.a., teremos:

$$\begin{aligned} VA &= 150.000,00 - 1.500,00 \times 26,67441 + 30.000,00 \times 6,12181 + \\ &+ 39.000,00 \times 0,20416 \end{aligned}$$

$$VA = - 150.000,00 - 40.011,60 + 183.654,30 + 7.962,24$$

$$VA = \text{Cr\$ } 1.604,94$$

Para $i = 14\%$ a.a., teremos:

$$\begin{aligned} VA &= - 150.000,00 - 1.500,00 \times 26,90095 + 30.000,00 \times 6,00207 \\ &+ 39.000,00 \times 0,15971 \end{aligned}$$

$$VA = - 150.000,00 - 40.351,50 + 180.063,00 + 6,228,69$$

$$VA = \text{Cr\$ } 4.059,81$$

Seja x a taxa de retorno. Por interpolação linear, temos:

$$x = 13 + \frac{1.604,94}{1.604,94 + 4.059,81} (14-13)$$

$$x = 13 + 0,28 = 13,28\%$$

A taxa de retorno do investimento é de 13,28%

O investimento somente poderá ser aceito se a taxa de mínima atratividade for igual ou menor que a taxa

de retorno, logo, podemos escrever:

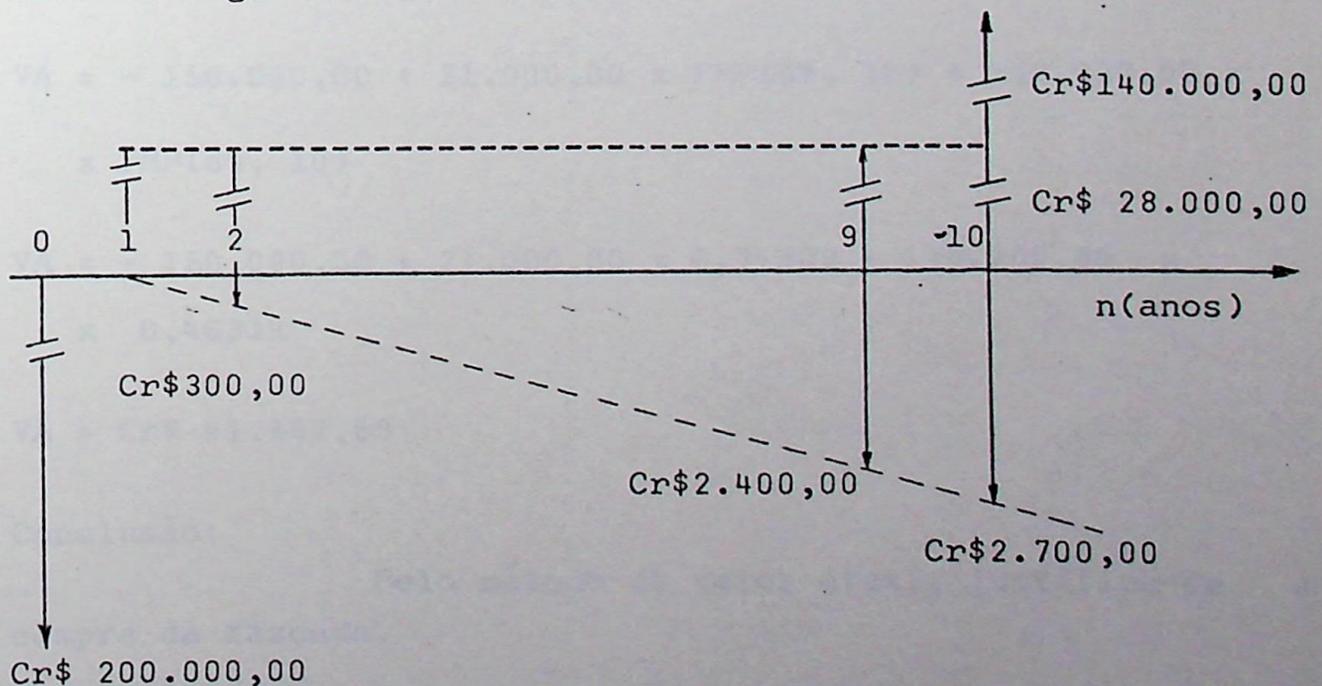
$$i_{\min} \leq 13,28\%$$

4) - Um investidor está considerando a compra de uma fazenda. Esta custa Cr\$200.000,00, proporcionando uma renda de Cr\$ 28.000,00, líquida, no primeiro ano. Um decréscimo esperado no preço do produto agrícola fará com que as receitas líquidas diminuam cerca de Cr\$ 300,00 por ano. Se comprar esta propriedade ele espera mantê-la por 10 anos, vendendo-a então, por um preço esperado de Cr\$ 140.000,00. Por outro lado, esse investidor possui atualmente uma propriedade no valor de Cr\$ 150.000,00 que deverá ser vendida para a compra da fazenda. Esta propriedade fornece-lhe a renda de Cr\$21.000,00 anuais, que deverá manter-se nos próximos 10 anos. Ele espera vendê-la daqui a 10 anos, caso não o faça agora por Cr\$..... 110.000,00. Sendo a sua taxa de mínima atratividade de 8% ao ano, antes do imposto de renda, deve comprar a fazenda?

Solução:

1º) Método do Valor Atual (VA)

i) A fazenda que o fazendeiro pretende comprar apresenta o seguinte fluxo de caixa:

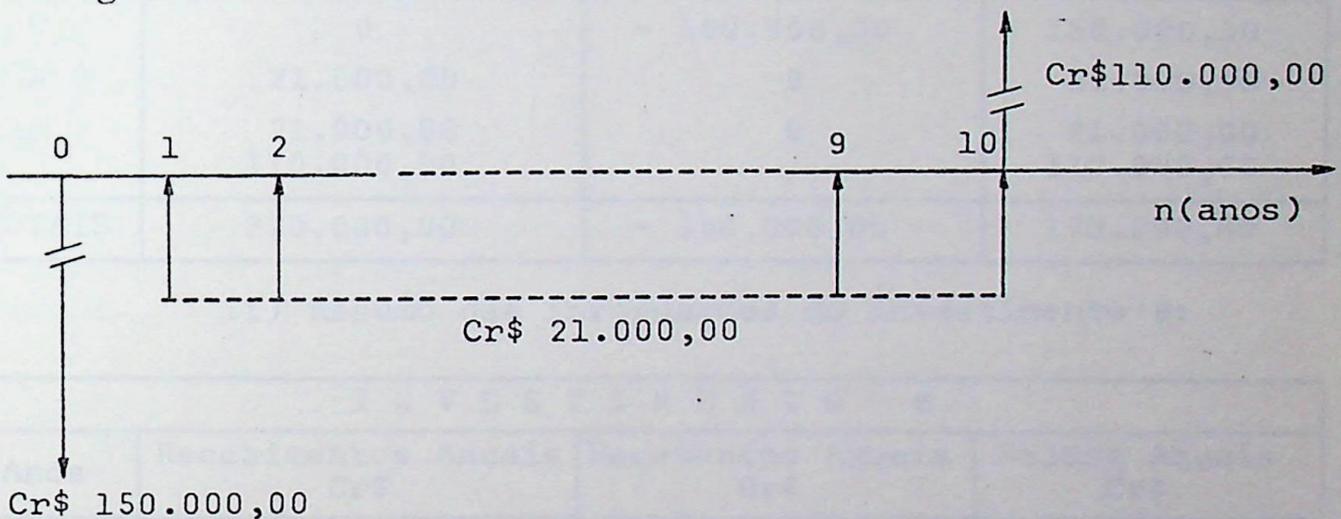


$$VA = - 200.000,00 - 300,00 \times FGP(8\%, 10) + 28.000,00 \times \\ \times FRP(8\%, 10) + 140.000,00 \times FMP(8\%, 10)$$

$$VA = - 200.000,00 - 300,00 \times 25,97682 + 28.000,00 \times 6,71008 + \\ + 140.000,00 \times 0,46319$$

$$VA = \text{Cr\$ } 44.935,79$$

ii) A fazenda de propriedade do investidor apresenta o seguinte fluxo de caixa:



$$VA = - 150.000,00 + 21.000,00 \times FRP(8\%, 10) + 110.000,00 \times \\ \times FMP(8\%, 10)$$

$$VA = - 150.000,00 + 21.000,00 \times 6,71008 + 110.000,00 \times \\ \times 0,46319$$

$$VA = \text{Cr\$ } 41.862,58$$

Conclusão:

Pelo método do valor atual, justifica-se a compra da fazenda.

29) Determinação da taxa de retorno do investimento incremental.

Para a solução do problema através da análise do investimento incremental, denominaremos de:

- i) investimento A = fazenda do investidor
- ii) investimento B = fazenda a ser comprada

i) Resumo das informações do investimento A:

I N V E S T I M E N T O A			
Anos	Recebimentos Anuais Cr\$	Pagamentos Anuais Cr\$	Saldos Anuais Cr\$
0	0	- 150.000,00	- 150.000,00
1 a 9	21.000,00	0	21.000,00
10	21.000,00	0	21.000,00
	110.000,00		110.000,00
TOTAIS	320.000,00	- 150.000,00	170.000,00

ii) Resumo das informações do investimento B:

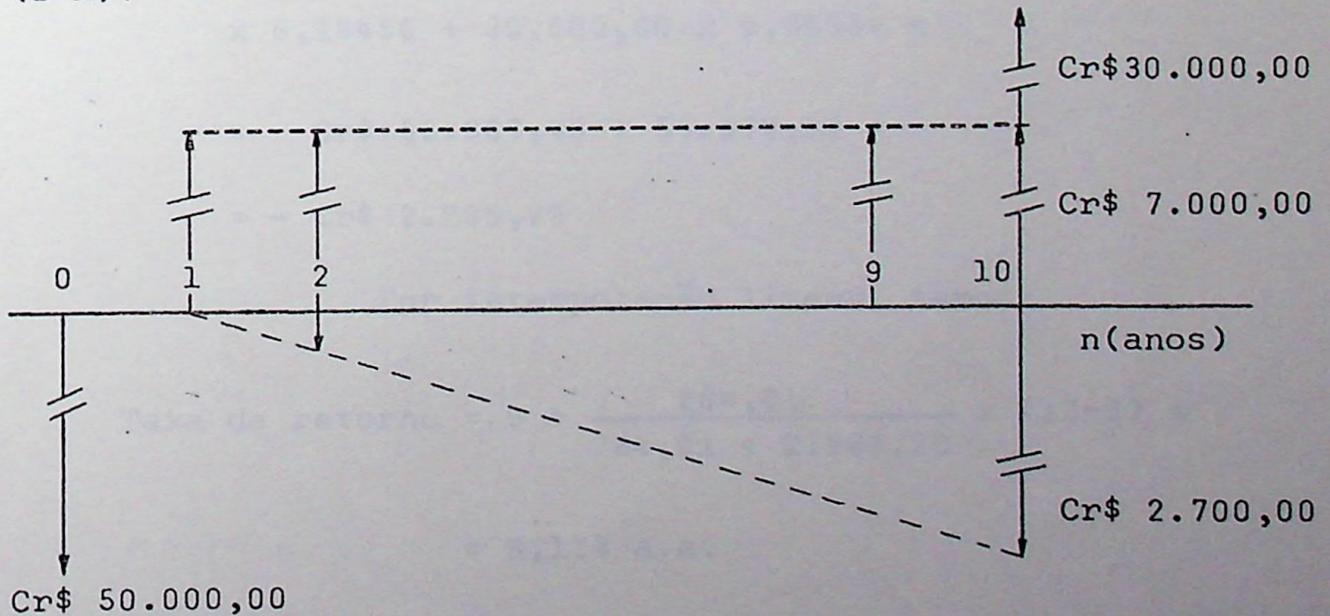
I N V E S T I M E N T O B			
Anos	Recebimentos Anuais Cr\$	Pagamentos Anuais Cr\$	Saldos Anuais Cr\$
0	0	- 200.000,00	- 200.000,00
1	28.000,00	0	28.000,00
2	28.000,00	- 300,00	27.700,00
3	28.000,00	- 600,00	27.400,00
4	28.000,00	- 900,00	27.100,00
5	28.000,00	- 1.200,00	26.800,00
6	28.000,00	- 1.500,00	26.500,00
7	28.000,00	- 1.800,00	26.200,00
8	28.000,00	- 2.100,00	25.900,00
9	28.000,00	- 2.400,00	25.600,00
10	28.000,00	- 2.700,00	25.300,00
	140.000,00	0	140.000,00
TOTAIS	420.000,00	- 213.500,00	206.500,00

iii) Determinação do Investimento adicional :

Anos	Investimento B Cr\$	Investimento A Cr\$	Investimento In- cremental (B-A) Cr\$
0	- 200.000,00	- 150.000,00	- 50.000,00
1	28.000,00	21.000,00	7.000,00
2	27.700,00	21.000,00	6.700,00
3	27.400,00	21.000,00	6.400,00
4	27.100,00	21.000,00	6.100,00
5	26.800,00	21.000,00	5.800,00
6	26.500,00	21.000,00	5.500,00
7	26.200,00	21.000,00	5.200,00
8	25.900,00	21.000,00	4.900,00
9	25.600,00	21.000,00	4.600,00
10	165.300,00	131.000,00	34.300,00
TOTAIS	206.500,00	170.000,00	36.500,00

O fluxo de caixa do investimento adicional

(B-A):



Cálculo da taxa de retorno do investimento adicional (B-A), por tentativas:

Para $i = 9\%$

$$P_{B-A}(9\%) = - 50.000,00 - 300,00 \times FGP(9\%, 10) + 7.000,00 \times \\ \times FPR(9\%, 10) + 30.000 \times FMP(9\%, 10)$$

$$P_{B-A}(9\%) = - 50.000,00 - 300,00 \times 24,37276 + 7.000 \times \\ \times 6,41765 + 30.000,00 \times 0,42241 = \\ = \text{Cr\$ } 284,01$$

Para $i = 10\%$

$$P_{B-A}(10\%) = - 50.000,00 - 300,00 \times FGP(10\%, 10) + 7.000 \times \\ \times FPR(10\%, 10) + 30.000,00 \times FMP(10\%, 10)$$

$$P_{B-A}(10\%) = - 50.000,00 - 300,00 \times 22,89134 + 7.000,00 \times \\ \times 6,14456 + 30.000,00 \times 0,38554 = \\ = - \text{Cr\$ } 56.867,40 + 54.578,12 = \\ = - \text{Cr\$ } 2.289,29$$

Por interpolação linear, temos:

$$\text{Taxa de retorno} = 9 + \frac{284,01}{284,01 + 2.289,20} \times (10-9) =$$

$$= 9,11\% \text{ a.a.}$$

Conclusão:

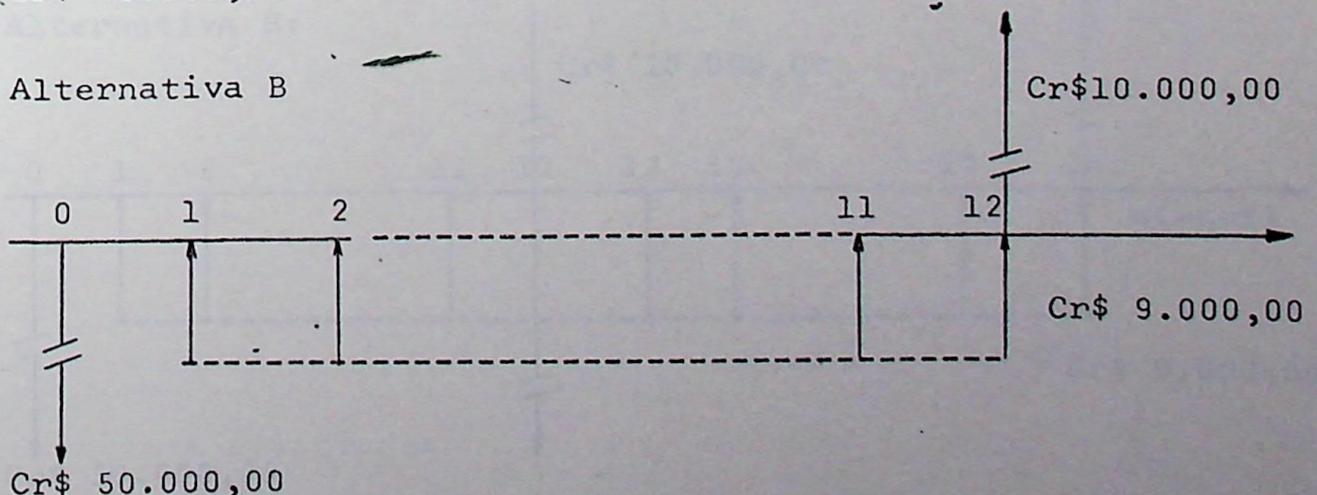
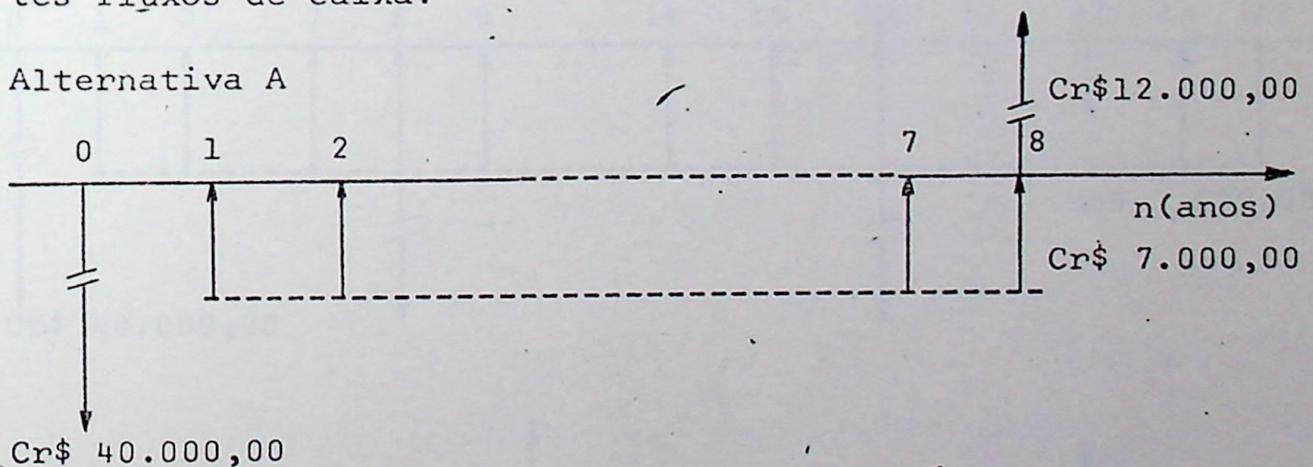
A taxa de retorno do investimento adicional é de 9,11% a.a., maior que a taxa de mínima atratividade

($i_{\min} = 8\%$) e, portanto, o investidor deverá comprar a fazenda.

5) - Compare as alternativas A e B, considerando que poderão ser repetidas com mesmos custos e receitas cada vez que findar-se a vida de cada uma. A taxa de mínima atratividade é 10% ao ano, antes do imposto de renda.

ITENS	Alternativa A Cr\$	Alternativa B Cr\$
- Custo inicial	40.000,00	50.000,00
- Vida	8 anos	12 anos
- Valor residual	12.000,00	10.000,00
- Receitas anuais líquidas	7.000,00	9.000,00

As alternativas A e B apresentam os seguintes fluxos de caixa:

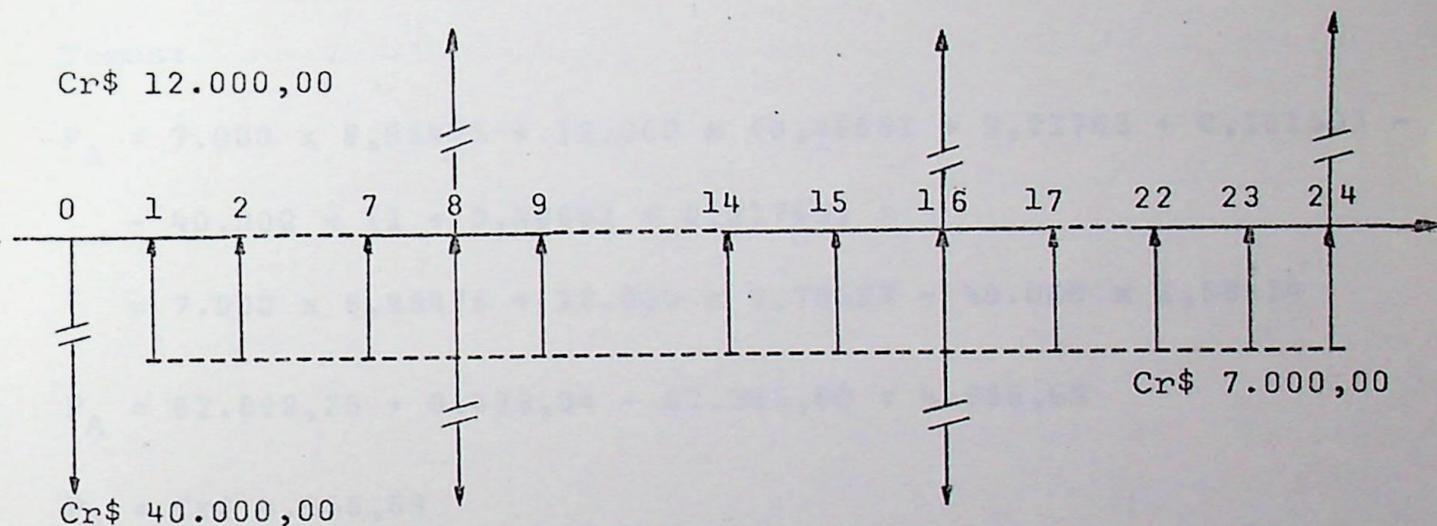


Solução:

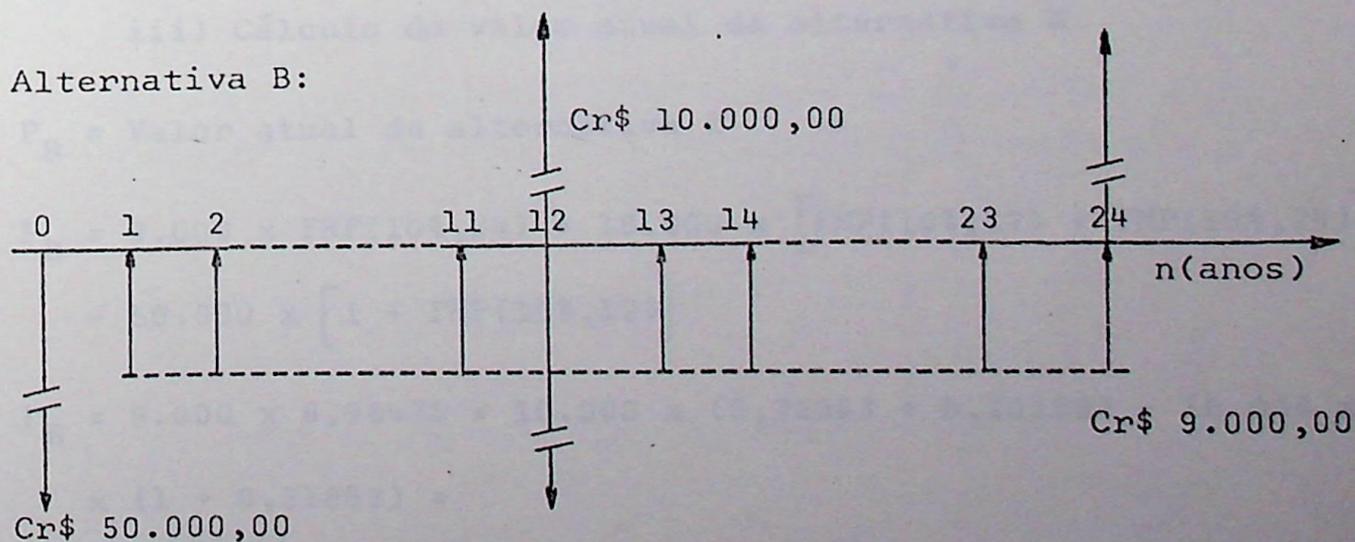
i) Resolução pelo método do valor atual:

Pelo método do valor atual teremos que comparar períodos idênticos para as duas alternativas. O período idêntico para as duas alternativas é obtido através do cálculo do mínimo múltiplo comum das alternativas em questão, logo, em nosso caso o período idêntico para ambas as alternativas é de 24 anos. Teremos que considerar, portanto, 3 investimentos sucessivos para a alternativa A e 2 investimentos sucessivos para a alternativa B. Teremos, conseqüentemente, os seguintes fluxos de caixa:

Alternativa A:



Alternativa B:



ii) Cálculo do valor atual da alternativa A:

P_A = Valor atual da alternativa A

$$P_A = R \times FRP(10\%, 24) + M \times [FMP(10\%, 8) + FMP(10\%, 16) + \\ + FMP(10\%, 24)] - P \times [1 + FMP(10\%, 8) + FMP(10\%, 16)]$$

Para

$$R = \text{Cr\$ } 7.000,00$$

$$M = \text{Cr\$ } 12.000,00$$

$$P = \text{Cr\$ } 40.000,00$$

Temos:

$$P_A = 7.000 \times 8,98475 + 12.000 \times (0,46651 + 0,21763 + 0,10153) - \\ - 40.000 \times (1 + 0,46651 + 0,21763) =$$

$$= 7.000 \times 8,98475 + 12.000 \times 0,78567 - 40.000 \times 1,68414$$

$$P_A = 62.893,25 + 9.428,04 - 67.365,60 = 4.955,69$$

$$P_A = \text{Cr\$ } 4.955,69$$

iii) Cálculo do valor atual da alternativa B

P_B = Valor atual da alternativa B

$$P_B = 9.000 \times FRP(10\%, 24) + 10.000 \times [FMP(10\%, 12) + FMP(10\%, 24)] - \\ - 50.000 \times [1 + FMP(10\%, 12)]$$

$$P_B = 9.000 \times 8,98475 + 10.000 \times (0,31863 + 0,10153) - 50.000 \times \\ \times (1 + 0,31863) =$$

$$= 9.000 \times 8,98475 + 10.000 \times 0,42016 - 50.000 \times 1,31863$$

$$P_B = 80.862,75 + 4.201,60 - 65.931,50 = \text{Cr\$ } 19.132,85$$

$$P_B = \text{Cr\$ } 19.132,85$$

Conclusão:

A melhor alternativa é a alternativa B, pois seu valor atual é maior.

6) - Uma empresa deve escolher entre determinadas alternativas

I T E N S	A L T E R N A T I V A S			
	A	B	C	D
Custo inicial	6.000,00	7.600,00	9.000,00	10.300,00
Vida útil	10 anos	10 anos	10 anos	10 anos
Valor salvado	0	0	0	0
Despesas				
Energia	1.280,00	1.280,00	1.000,00	950,00
Manutenção	1.800,00	1.700,00	1.460,00	1.300,00
Extras	400,00	370,00	260,00	240,00
Impostos	120,00	150,00	180,00	210,00

Supondo uma taxa de mínima atratividade de 8% ao ano, qual a alternativa que deve merecer a preferência da empresa?

Solução:

a) Método do custo anual (CA):

- Cálculo dos custos anuais da alternativa A:

Custo de recuperação do capital (R_A):

$$R_A = P \times \text{FPR}(8\%, 10)$$

$$R_A = 6.000 \times 0,149029 = \text{Cr\$ } 894,174$$

$$\text{Outros custos (despesas)} = \text{Cr\$ } 3.600,00$$

Custo anual (CA_A) :

$$CA_A = 894,174 + 3.600,00 = \text{Cr\$ } 4.494,17$$

- Cálculo dos custos anuais da alternativa B:

Custo de recuperação do capital (R_B) :

$$R_B = 7.600 \times 0,149029 = \text{Cr\$ } 1.132,62$$

$$\text{Outros custos (despesas)} = \text{Cr\$ } 3.500,00$$

Custo anual (CA_B) :

$$CA_B = 1.132,62 + 3.500,00 = \text{Cr\$ } 4.632,62$$

- Cálculo dos custos anuais da alternativa C

Custo de recuperação do capital (R_C) :

$$R_C = 9.000 \times \text{FPR}(8\%, 10) =$$

$$= 9.000 \times 0,149029 = \text{Cr\$ } 1.341,26$$

$$\text{Outros custos (despesas)} = \text{Cr\$ } 2.900,00$$

Custo anual (CA_C) :

$$CA_C = 1.341,26 + 2.900,00 = \text{Cr\$ } 4.241,26$$

- Cálculo dos custos anuais da alternativa D:

Custos de recuperação do capital (R_D) :

$$R_D = 10.300 \times \text{FPR}(8\%, 10) =$$

$$= 10.300 \times 0,149029 = \text{Cr\$ } 1.535,00$$

Outros custos (despesas) = Cr\$ 2.700,00

Custo anual (CA_D) :

$$CA_D = 1.535,00 + 2.700,00 = \text{Cr\$ } 4.235,00$$

CUSTOS ANUAIS DAS ALTERNATIVAS

Alternativa	Custo anual (CA)
A	Cr\$ 4.494,17
B	Cr\$ 4.632,62
C	Cr\$ 4.241,26
D	Cr\$ 4.235,00

Pelo método do custo anual a melhor alternativa é a D, pois é a que tem o menor custo anual.

ANÁLISE DO INVESTIMENTO ADICIONAL DAS ALTERNATIVAS A, B, C, D

1º) Investimento Adicional (B-A)

Anos	ALTERNATIVAS		
	A	B	Incremento (B-A)
0	- 6.000	- 7.600	- 1.600
1 a 10	- 3.600	- 3.500	+ 100
TOTAIS	-42.000	-42.600	- 600

O investimento de Cr\$ 1.600,00 na alternativa B, implica numa economia anual de Cr\$ 100,00. Essa economia de Cr\$ 100,00 é suficiente para remunerar Cr\$ 1.600,00. a

juros de 8% ao ano? Vejamos:

i) Método do valor atual

$$\begin{aligned} P_{(B-A)}(8\%) &= - 1.600 + 100 \times FRP(8\%, 10) = \\ &= - 1.600 + 100 \times 6,7100 = - 929 < 0 \end{aligned}$$

O incremento B-A não deve ser aceito, em outras palavras, não compensa investir mais Cr\$ 1.600,00 na alternativa B do que em A, para obter mais Cr\$ 100,00. Consequentemente a alternativa A é melhor do que B.

ii) Método do custo anual (CA_{B-A})

$$\begin{aligned} CA_{B-A} &= - 1.600 \times FPR(8\%, 10) + 100 = \\ &= - 1.600 \times 0,149029 + 100 = - 138,45 \end{aligned}$$

Como $P_{(B-A)}(8\%) < 0$, significa que o incremento B-A rende menos que 8% ao ano, não se justifica investir em B.

Podemos observar que:

$$CA_{B-A}(8\%) = CA_B(8\%) - CA_A(8\%)$$

iii) Método da taxa de retorno

Investimento adicional (B-A)

$$FPR(i_{B-A}, 10) = \frac{100}{1.600} = 0,063 \quad \therefore \quad i < 8\%$$

O investimento adicional B-A não poderá ser aceito porque sua taxa de retorno é menor que a taxa de mínima atratividade. Logo, a alternativa A é melhor que B.

2º) Investimento incremental (C-A)

Como a alternativa B já foi eliminada, fare

mos a análise adicional de (C-A) :

Anos	A L T E R N A T I V A S		
	A	C	Incremento (C-A)
0	- 6.000	- 9.000	- 3.000
1 a 10	- 3.600	- 2.900	700
TOTAIS	-42.000	-38.000	4.000

i) Método do valor atual

$$P_{C-A}(8\%) = - 3.000 + 700 \times FPR(8\%, 10) =$$

$$= - 3.000 + 700 \times 6,7100 = \text{Cr\$ } 1.697,00 > 0$$

$$P_{C-A}(8\%) = P_C(8\%) - P_A(8\%) > 0$$

A alternativa C é melhor que a alternativa A, portanto, também melhor que a alternativa B.

A alternativa C tem maior valor atual que a alternativa A.

O valor atual do incremento C-A é positivo, o que significa que os Cr\$ 3.000,00 adicionais investidos em C, estão sendo remunerados a uma taxa maior que a taxa de mínima atratividade.

ii) Método do custo anual (CA_{C-A}) :

$$CA_{C-A}(8\%) = - 3.000 \times FPR(8\%, 10) + 700 =$$

$$= - 3.000 \times 0,149029 + 700 = \text{Cr\$ } 252,91$$

$CA_{C-A}(8\%) > 0$, significa que o investimento adicional C-A, está rendendo juros acima da taxa de mínima atratividade, portanto, justifica-se investir mais Cr\$ 3.000,00 na alternativa

C. Consequentemente, C é melhor que A.

Observar que:

$$CA_{C-A}(8\%) = CA_C(8\%) - CA_A(8\%) > 0$$

iii) Método da taxa de retorno

$$FPR(i_{C-A}, 10) = \frac{700}{3.000} = 0,2333 \quad \therefore \quad i \approx 19\%$$

Como a taxa de retorno é maior que a taxa de mínima atratividade, o investimento adicional se justifica. Portanto, a alternativa C é melhor que A e, consequentemente, melhor que B.

3º) Investimento adicional D-C

Como as alternativas A e B já foram eliminadas, faremos a análise do investimento adicional (D-C):

Anos	A L T E R N A T I V A S		
	C	D	Incremento D-C
0	- 9.000	- 10.300	- 1.300
1 a 10	- 2.900	- 2.400	500
TOTAIS	-38.000	- 34.300	3.700

i) Método do valor atual

$$\begin{aligned} P_{D-C}(8\%) &= - 1.300 + 500 \times FPR(8\%, 10) = \\ &= - 1.300 + 500 \times 6,7100 = \text{Cr\$ } 2.055,00 \end{aligned}$$

$$P_{D-C}(8\%) = P_D(8\%) - P_C(8\%) = \text{Cr\$ } 2.055,00 > 0$$

Se $P_{D-C}(8\%) > 0$, temos que a alternativa D tem um valor maior que a alternativa C. Isto significa que o investimento adicional de Cr\$ 1.300,00 investido em D, está produzindo rendimentos acima da taxa de mínima atratividade, justificando, portanto, a escolha da alternativa D como a melhor opção do investimento.

ii) Método do custo anual (CA_{D-C}):

$$\begin{aligned} CA_{D-C}(8\%) &= - 1.300 \times FPR(8\%, 10) + 500 = \\ &= - 1.300 \times 0,149029 + 500 = \text{Cr\$ } 306,26 \end{aligned}$$

$CA_{D-C}(8\%) > 0$, significando, também que o investimento adicional tem uma taxa de rendimento acima da taxa de mínima atratividade e, conseqüentemente, ser D a melhor alternativa.

iii) Método da taxa de retorno

$$FPR(i, 10) = \frac{500}{1.300} = 0,3846 \quad \therefore \quad i > 8\%$$

Como a taxa de mínima atratividade é de 8% e é menor que a taxa de retorno do investimento adicional D-C, a alternativa D é melhor que a alternativa C.

Conclusão:

Obtivemos o mesmo resultado de seleção, tanto pelo método do custo anual como pela análise de investimento adicional.

6) CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE OS MÉTODOS DE VALOR ATUAL, TAXA DE RETORNO E TAXA DE MÍNIMA ATRATIVIDADE

No decorrer deste trabalho foram feitas algumas considerações básicas à aplicação dos diferentes critéri-

os de decisão para a escolha entre alternativas de investimento.

O investidor ao fazer um investimento de recursos em um determinado projeto, o faz na expectativa de que o empreendimento venha a proporcionar, em períodos futuros, um fluxo de benefícios bastante compensador. Esta expectativa nos resultados futuros do investimento está ligada diretamente a preocupação da empresa em seu desenvolvimento econômico. Será necessário, então, que a empresa tenha à sua disposição todos os elementos que lhe dê condições de medir a multiplicação de recursos produzida pelo investimento. Os diferentes critérios de decisão analisados, permitem avaliar e prever os resultados futuros do projeto.

Os estudos e as aplicações dos métodos de valor atual e o da taxa de retorno, permite-nos algumas observações: O método do valor atual requer uma taxa de desconto específica, a taxa de mínima atratividade, também denominada "taxa mínima de retorno". A determinação desta taxa constitui um problema difícil e complexo para a empresa. A seleção das alternativas de investimentos vai depender desta taxa e, conseqüentemente, a taxa de retorno irá depender dos projetos de investimentos escolhidos. A taxa de mínima atratividade representa uma remuneração ou rentabilidade de garantia do capital investido. Afirmamos, anteriormente, que ao investir em um determinado projeto, o investidor está perdendo outras oportunidades de investimento. Estas oportunidades perdidas representam um custo para o investidor, o chamado custo de oportunidade. O custo de oportunidade de um recurso pode ser definido como o valor mínimo da aplicação desse recurso num uso alternativo. Qualquer investimento para ser atrativo, deve render mais que as oportunidades de investimento perdidas.

O grande problema para o investidor é determinar uma taxa de rentabilidade que represente as aplicações de seu capital nas alternativas perdidas. Não é uma tarefa fácil. A taxa de mínima atratividade é a taxa mínima que uma nova proposta de investimento deverá render para ser atrativa.

Esta taxa não é constante, podendo ser mudada conforme o risco oferecido pelo projeto de investimento, a disponibilidade de capital, o custo do capital, etc.

Em outras palavras, a taxa de mínima atratividade representa o custo de oportunidade do capital, a taxa de retorno obtida em outros usos. Ela serve de estímulo para o melhor desempenho de economia.

A taxa de retorno ou taxa interna de retorno tem a vantagem de sua determinação não depender da escolha de uma taxa de desconto. Essa vantagem é limitada pela taxa mínima de retorno, isto é, pela taxa de mínima atratividade que orienta a seleção das alternativas de investimento.

A diferença importante entre os critérios de valor atual e da taxa de retorno se refere à taxa de rendimento admitida para a reinversão dos recursos produzidos. O método do valor atual pressupõe que esta seria igual à taxa de desconto adotada, taxa de mínima atratividade, enquanto que o cômputo da taxa interna de retorno admite, implicitamente, que os fundos poderiam ser sempre reinvestidos à mesma taxa de rendimento que a produzida pelo projeto inicial.

7) TEORIA DA PREFERÊNCIA

7.1 - Definição de risco e incerteza

O risco pode ser definido como uma situação dentro da qual uma distribuição de probabilidade pode levar a diferentes acontecimentos futuros, ou ainda, pode ser definido como a instabilidade dos possíveis retornos de um investimento.

A distribuição de probabilidade é determinada a partir de elementos certos e mensuráveis.

O risco de um investimento implica no conhecimento das probabilidades de ocorrências de um dado evento.

A incerteza, por sua vez, implica num mal conhecimento das probabilidades de sucessão dos acontecimentos, ou em outras palavras, podemos dizer que a incerteza é caracterizada pelas situações em que as probabilidades de ocorrência de um determinado evento são desconhecidas.

Devemos considerar, entretanto, que os termos risco e incerteza são usados indistintamente pelos técnicos e especialistas em análise de investimentos, em virtude da limitação das implicações práticas da diferença de distinção entre risco e incerteza.

Entre os diversos fatores responsáveis pela origem do risco de um investimento, podemos citar:

- A situação econômica geral;
- os fatores peculiares ao investimento;
- a competição de mercado;
- as inovações tecnológicas;
- as preferências dos consumidores;
- o mercado de trabalho, etc.

Disto resulta a impossibilidade de prever o futuro com absoluta certeza. A previsão é o centro de gravidade de toda decisão de investir. A introdução da análise do risco sob a forma de distribuição de probabilidades associadas a diferentes níveis de previsão, permitiu uma importante melhora no processo de decisão, trazendo uma nova dimensão a este problema.

7.2 - A influência do risco

Os principais elementos do cálculo de investimento que podem ser afetados pelo risco são:

- o capital investido;
- o fluxo de caixa esperado;
- a taxa escolhida para atualização;
- a vida esperada do projeto;
- o valor salvado.

Por exemplo: o projeto do protótipo do reator RB 211, fabricado pela Rolls Royce, foi orçado em 800 milhões de francos, entretanto, quando ficou pronto, seu custo foi de 10 bilhões de francos. Isso demonstra que a rentabilidade do projeto, calculada anteriormente, foi afetada grandemente pelas variações que ocorreram.

O capital de giro líquido anual é obtido a partir de um conjunto de previsões relativas ao custo da mão-de-obra, matéria prima, preço de venda do produto, quantidade vendida, etc. Cada um desses elementos é afetado de uma forma ou de outra pela incerteza.

7.3 - Métodos de decisão face ao risco

- 1) Método do prazo de recuperação do capital investido.
- 2) Método da adaptação dos projetos de investimento face ao risco
- 3) Método da decisão face ao risco tendo em vista os elementos e os resultados do cálculo de investimento.

7.3.1 - Método do prazo de recuperação do capital investido

Quanto mais um investimento demora para ser reembolsado, mais ele é arriscado. Considerando que esta afirmativa é correta, justifica-se desta maneira, o desejo que todo investidor tem de reembolsar o capital investido no menor tempo possível. A prática tem demonstrado que o risco aumenta com o tempo, principalmente nas épocas em que se registram crises financeiras e econômicas acentuadas, provocando mudanças bruscas e dificuldades nos cálculos de previsão orçamentária. Como irá o investidor fazer os cálculos de previsão de seu consumo futuro, se ele desconhece o que lhe reserva o futuro? - Consequentemente, é de se esperar que o investidor queira imobilizar o seu capital investido, no menor tempo pos

sível e, desta maneira, evitar possíveis dificuldades de cobertura financeira, bem como, criar novas perspectivas de investimento. Enfim, diminuir a incerteza.

Devemos considerar, entretanto, que este método é deficiente face ao risco do investimento, pois um reembolso em um prazo curto nem sempre é capaz de limitar os riscos.

7.3.2 - Método da adaptação dos projetos de investimento face ao risco

Este método é sempre preferível quando se pode criar um plano flexível de investimentos, tais como:

- incluir, no programa do projeto, métodos que possibilitem a anulação do risco, em condições desfavoráveis de mercado;
- prever equipamentos que possam fazer frente às variações das demandas previstas.

7.3.3 - Método da decisão face ao risco tendo em vista os elementos e os resultados do cálculo de investimento.

Este método inclui os principais métodos de decisão face ao risco do investimento, tais como:

- a) Cálculo do investimento eliminando os elementos mais incertos

Os elementos mais incertos de um investimento são, sem dúvida, o fluxo de caixa e o valor salvado do investimento. Conforme já afirmamos, anteriormente, a incerteza afeta, prejudica o cálculo de previsão do investimento, principalmente os parâmetros mais afastados no tempo. Em virtude disto, ou melhor, por esta razão, determinadas empresas são modestas nos cálculos de rentabilidade dos fluxos de caixa pa

ra períodos longos.

Este procedimento só é justificável dentro de um mecanismo de atualização, que não transmite uma solidez relativamente confiável e, sobretudo, a longo prazo.

b) A diminuição do tempo de duração da vida econômica

A diminuição do tempo de duração da vida econômica, caracteriza-se, principalmente, pela introdução dos riscos de obsolescência; é uma prática comprovadamente arbitrária, pois conduz a distorções significativas nos resultados e provoca, ainda, apreciação pessimista nas medidas, pois a duração da vida econômica do projeto constitui base fundamental para o cálculo de rentabilidade.

É um método que não deve ser empregado, salvo as seguintes exceções:

- a empresa apresenta num setor, mutações rápidas e sensíveis ao progresso técnico;
- no caso em que a vida prevista do equipamento ultrapassar um período dito econômico. Neste caso será necessário e imprescindível a redução do tempo de duração.

c) A taxa de atualização e o valor do risco

Ao analisarmos, inicialmente, o investimento sob condição de risco e incerteza, afirmamos que o investidor procura minimizar os riscos do investimento através do aumento da taxa de retorno. Esta é uma das formas de considerar o fator risco na decisão de investimento. Devemos considerar, entretanto, que este processo apresenta um problema de solução não muito fácil para o planejador:

- a determinação e equacionamento das possibilidades do risco. As empresas procuram solucionar este problema através do desmembramento do projeto em diversas classes de risco para, desta forma, determinar uma taxa de

retorno em condições de risco e incerteza que reflitam a atitude do investidor face ao risco. O problema torna-se ainda mais complexo se considerarmos que cada empresa, cada investidor, utilizam ou exigem taxas de retornos diferentes.

O desmembramento do projeto em diversas classes de riscos podem ser assim classificados:

- i) investimentos de substituição que não geram modificações sensíveis no processo de produção: - Tipo de riscos: - progresso tecnológico e mudança de mercado.
- ii) Investimento de produtividade: - Tipo de riscos: - progresso tecnológico; mudança de mercado; incertezas relativas às previsões da economia de custos e a determinação do capital investido.
- iii) Investimento de expansão: - Tipo de risco: - ao decidir sobre a aplicação de capital em investimentos de expansão, as empresas estão sujeitas a grandes riscos.

Entre os principais projetos de expansão de uma empresa, destacam-se:

- aumento da produção;
- produção de produtos novos;
- aumento do mercado; etc.

Em geral todos eles apresentam grandes riscos para a empresa, entretanto, é o investimento para a produção de produtos novos que apresenta o mais acentuado aumento dos riscos da empresa. As causas deste aumento são, dentre elas, as seguintes:

- incertezas relativas a concorrência;
- incertezas quanto a preferência do consumidor;
- incertezas quanto ao preço do mercado; etc.

- iv) Investimento de pesquisas e desenvolvimento: os riscos de pesquisas e desenvolvimento são os mais elevados de todos. Se não houver um planejamento adequado, científico e criterioso no estudo da aplicação do investimento em pesquisas e desenvolvimento, todo o capital em-

pregado poderá ser perdido e, conseqüentemente, não haverá nenhum retorno para a empresa. Antes de investir em um projeto de pesquisas, o planejador deverá procurar as respostas de uma série de quesitos pertinentes ao problema, tais como:

- a) os resultados das pesquisas poderão ter aplicações práticas na empresa?
- b) o projeto de pesquisas e desenvolvimento poderá trazer benefícios compensadores para a instituição?
- c) o projeto de pesquisas e desenvolvimento poderá trazer benefícios imediatos para a comunidade local?

É evidente que inúmeras implicações de ordem política, econômica e social terão que ser consideradas pelo planejador, entretanto, se as respostas dos quesitos acima forem positivas, podemos afirmar, com segurança, que somente estas razões justificam, em parte, o estudo do projeto de pesquisas e desenvolvimento.

A incerteza da rentabilidade dos investimentos de pesquisas e desenvolvimento reflete no nível da taxa de atualização.

- v) Investimento de interesse geral: quando o investimento é de interesse geral, a rentabilidade do projeto, nem sempre é avaliada e, conseqüentemente, não se procede a uma análise quantitativa do risco.

Algumas empresas estrangeiras têm por norma adotar o seguinte método para tratamento do risco em investimentos petrolíferos:

- Divisão de pesquisas e prospecção: taxa de atualização: 25%
- Divisão de extração e refinação: taxa de atualização: 12%
- Divisão de armazenamento e distribuição: taxa de atualização: 10%.

Este método é muito usado em virtude de sua simplicidade, muito embora apresente os seguintes problemas para o investidor (empresa):

O cálculo de investimento é baseado numa taxa de atualização supondo o risco constante. Por exemplo: seja i a taxa de atualização sem riscos; K_e a taxa de atualização com riscos, isto é, K_e leva os riscos do investimento em consideração; VA_i e VA_{K_e} representam o cálculo do valor atual, respectivamente, sem riscos e com riscos; $t = n =$ número de períodos. Assim, temos:

- a) Cálculo do valor atual do fluxo de caixa, sem risco, durante um tempo $t = n$:

$$VA_i = \sum_{t=1}^n \frac{R_t}{(1+i)^t}$$

- b) Cálculo do valor atual do fluxo de caixa, com riscos, durante um tempo $t = n$:

$$VA_{K_e} = \frac{R_t}{(1+K_e)^t}$$

- c) Cálculo do "Índice de risco"

O índice de risco é determinado por:

$$\frac{VA_i}{VA_{K_e}} = IR_t = \frac{(1+i)^t}{(1+K_e)^t}$$

IR_t = aumento do valor atual do fluxo de caixa levando em conta o risco

Suponhamos que um determinado projeto apresente um fluxo de caixa com:

$$i = 5\%$$

$$K_e = 15\%$$

$$t = n = 10 \text{ anos}$$

O índice de risco será:

$$IR_{10} = \frac{0,6139}{0,2472} = 2,48$$

A tabela abaixo apresenta os valores de IR_t para diferentes valores de K_e e t , mantendo i constante:

INDICE DE RISCO DE UM DETERMINADO FLUXO DE CAIXA									
Anos (t)	i	K_e	IR_t	K_e	IR_t	K_e	IR_t	K_e	IR_t
	5%	10%	-	15%	-	20%	-	25%	-
1	0,9525	0,9091	1,05	0,8696	1,10	0,8333	1,14	0,8000	1,19
5	0,7835	0,6209	1,26	0,4972	1,57	0,4019	1,95	0,3277	2,39
10	0,6139	0,3855	1,59	0,2472	2,58	0,1615	3,80	0,1074	5,72
20	0,3769	0,1486	2,60	0,0611	6,17	0,0261	14,44	0,0115	32,78
25	0,2953	0,0923	3,20	0,0304	9,71	0,0105	28,13	0,0038	77,71

Podemos observar que o índice de risco aumenta com o tempo. A tabela acima confirma o que já havíamos dito anteriormente: - o aumento do tempo de reembolso do capital investido, aumenta o risco. Entretanto, devemos considerar que esta hipótese do risco crescente com o tempo não é geral, pois determinados projetos de investimentos, apresentam riscos mais elevados no início de sua implantação e, desta forma, contraria frontalmente a afirmativa de crescimento do risco com o aumento do tempo.

- vi) Método da equivalência certa (correção do fluxo de caixa do investimento): Este método caracteriza-se pela introdução do fator risco no fluxo de caixa em vez de introduzi-lo no valor da taxa de atualização. Desta maneira o fluxo de caixa é reduzido pela aplicação de um coeficiente variável de maneira tal que as rendas distantes, geralmente mais incertas, sejam minimizadas.

Seja α_t a taxa de redução no tempo t , compreendido de 1 a n , na fórmula do valor atual garantido, VAG:

$$VAG = \sum_{t=1}^n \frac{\alpha_t \cdot R_t}{(1+i)^t}$$

VAG = Valor atual garantido

α_t = taxa de redução no tempo t , ou ainda "fator de equivalência certa"

α_t é determinado através de:

$$\alpha_t = \frac{C_t}{R_t}$$

C_t = renda certa no tempo t

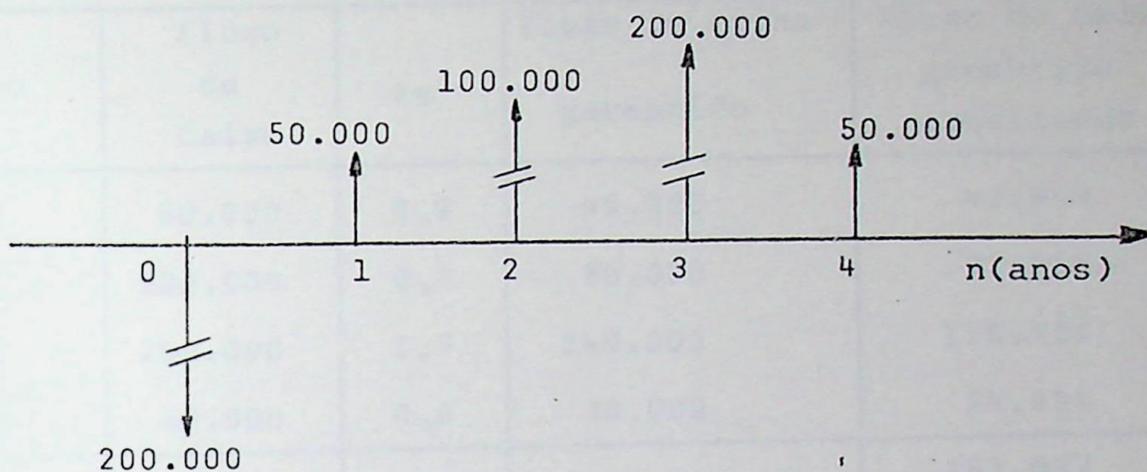
A determinação da taxa de redução no tempo t , α_t , depende totalmente da intuição e do bom senso do investidor.

1º exemplo: Um investimento, feito por uma empresa, apresenta um fluxo de caixa de Cr\$ 600.000,00 num tempo t . A empresa considera o investimento muito arriscado e por esta razão, estipulou em Cr\$ 450.000,00 a importância mínima que deseja receber no intervalo t . Logo, o seu fator de equivalência certa será dado por:

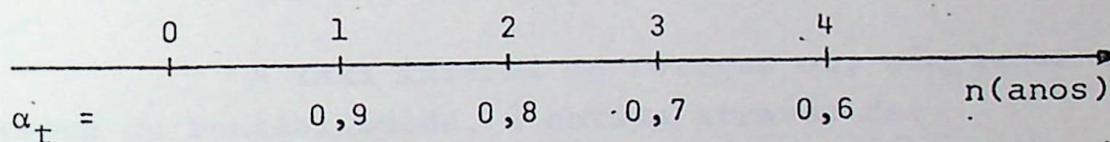
$$\alpha_t = \frac{450.000}{600.000} = 0,75$$

Observem que a importância de Cr\$ 450.000,00 foi estipulada pelo investidor através da sua intuição e do seu bom senso em face as incertezas do investimento.

2º exemplo: Consideremos o seguinte fluxo de caixa:



Supondo que a incerteza cresce com o tempo e que o investidor tenha determinado os seguintes coeficientes α_t



O valor atual garantido, VAG, para uma taxa de atualização, sem risco, $i = 5\%$ ao ano, será dado por:

$$\begin{aligned} \text{VAG} &= \frac{50.000 \times 0,9}{1,05} + \frac{100.000 \times 0,8}{(1,05)^2} + \\ &+ \frac{200.000 \times 0,7}{(1,05)^3} + \frac{50.000 \times 0,6}{(1,05)^4} = \\ &= \text{Cr\$ } 261.037,00 \end{aligned}$$

Ano	Fluxo de Caixa	α_t	Fluxo de caixa garantido	Fluxo de caixa garantido atualizado
1	50.000	0,9	45.000	42.858
2	100.000	0,8	80.000	72.560
3	200.000	0,7	140.000	120.438
4	50.000	0,6	30.000	24.681
TOTAL				261.037

O valor atual líquido, VAL será dado por:

$$VAL = - 200 + 261.037 = \text{Cr\$ } 61.037,00$$

A taxa interna de retorno ou, simplesmente, taxa interna de rentabilidade, é obtida através de:

$$\frac{50.000 \times 0,9}{(1 + r)} + \frac{100.000 \times 0,8}{(1 + r)^2} + \frac{200.000 \times 0,7}{(1 + r)^3} + \frac{50.000 \times 0,6}{(1 + r)^4} - 200.000 = 0$$

A taxa interna de retorno, r , será determinada por tentativas e, para tanto, utilizaremos o mesmo processo de cálculo dos exemplos anteriores. Resolvendo, teremos:

$$r \approx 16,9\%$$

Conclusão:

O investimento é atrativo, pois a taxa de mínima atratividade, i , é menor que a taxa interna de retorno:

$$i < r$$

Em virtude de ser muito difícil a determinação dos coeficientes corretores dos fluxos de caixa, os inves-

tidores preferem o método da correção da taxa de atualização por ser muito mais fácil a determinação de uma taxa de atualização.

7.4 - A análise de sensibilidade

A análise de sensibilidade visa avaliar o comportamento do rendimento do projeto, quando determinadas grandezas básicas do investimento são submetidas a variações. Por exemplo: uma empresa considera como bom resultado ou boa aplicação de capital, se a receita de determinado projeto de investimento for igual a Cr\$ 5.000.000,00 por ano. Se a receita for de Cr\$ 4.850.000,00 anuais, pergunta-se: a empresa continuará qualificando de bom resultado a aplicação do capital?

O analista terá que estudar com profundidade, os fatores básicos do investimento e analisar os efeitos sofridos pela decisão monetária. A esse procedimento dá-se o nome de análise de sensibilidade ou de sensibilidade.

Os principais fatores do investimento sujeitos a maiores influências, são:

- receitas;
- custos;
- valores residuais;
- taxa de mínima atratividade;
- vida útil; etc.

1º exemplo: O custo inicial de um investimento é de Cr\$..... 500.000,00, capaz de gerar um fluxo de caixa líquido anual de Cr\$ 150.000,00, durante 6 anos. O investidor deverá considerar, ainda, que um estudo de mercado, mais aprofundado, previu que a vida do investimento poderá ser de 4 a 8 anos, ou seja, 4, 5, 6, 7 ou 8 anos. O investidor mandou fazer uma análise de sensibilidade do projeto de investimento, cujos resultados estão tabelados, a seguir. A taxa de mínima atratividade é de 12% anuais. Logo:

Anos	Fluxo de caixa atualizado	Investimento Inicial (CI)	Valor atual Líquido
4	455.595	500.000	- 44.405
5	540.720	500.000	40.720
6	616.710	500.000	116.710
7	684.570	500.000	184.570
8	745.140	500.000	245.140

Os valores acima foram obtidos através de:
Fluxo de caixa atualizado (VA_R)

$$VA_R = R \times FRP(i, n)$$

Exemplo:

Para $R = \text{Cr\$ } 150.000,00$;

$i = 12\% \text{ a.a.}$

$n = 4 \text{ anos}$

$$VA_R = 150.000 \times 3,037349 = \text{Cr\$ } 455.495,00$$

Valor atual líquido (VAL)

$$VAL = VA_R - CI$$

Exemplo:

Para $n = 4$, temos:

$$VAL = 455.595 - 500.000 = - \text{Cr\$ } 44.405,00$$

Conclusão:

O projeto é altamente arriscado para uma taxa de atratividade de 12% a.a. Deve-se decidir pela rejeição do projeto.

2º Exemplo: Uma empresa deseja comprar uma máquina para um dos seus setores de fabricação. São lhe oferecidas, para escolha, duas máquinas que prestam o mesmo serviço. A máquina A custa Cr\$ 60.000,00 com vida útil de 9 anos. A máquina B custa Cr\$ 90.000,00 e sua vida útil foi estimada em 19 anos. Supondo uma taxa de mínima atratividade, $i_{\min} = 10\%$ a.a., determinar a máquina que representa o melhor negócio para o investidor.

Solução:

$$R_A = 60.000 \times \text{FPR}(10\%, 9) = \text{Cr\$ } 11.418,46$$

$$R_B = 90.000 \times \text{FPR}(10\%, 19) = \text{Cr\$ } 10.759,23.$$

A máquina B deve ser a escolhida, pois apresenta o menor custo anual.

Vamos supor uma variação em um dos fatores de decisão: a vida útil de cada máquina, permanecendo constante todos os demais fatores. Seja:

vida útil da máquina A = 10 anos

vida útil da máquina B = 15 anos

Solução:

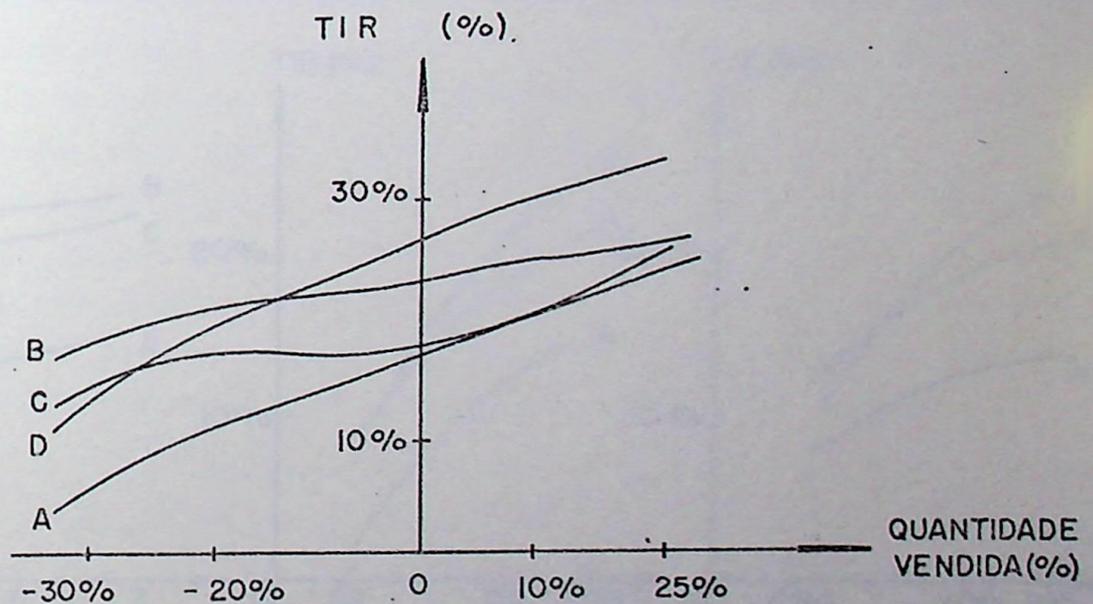
$$\begin{aligned} R_A &= 60.000 \times \text{FPR}(10\%, 10) = \\ &= 60.000 \times 0,162745 = \text{Cr\$ } 9.674,70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_B &= 90.000 \times \text{FPR}(10\%, 15) = \\ &= 90.000 \times 0,131474 = \text{Cr\$ } 11.832,66 \end{aligned}$$

Variando apenas um dos fatores, a vida útil, ocorreu uma mudança na preferência do investidor. Agora a máquina A apresenta o menor custo anual e, conseqüentemente, deve merecer a preferência da empresa.

3º exemplo: Suponhamos que uma empresa tenha 4 alternativas de investimento; ela procede a análise de sensibilidade da variável "quantidade vendida" sobre o rendimento de cada projeto; as comparações são feitas através da taxa interna de rentabilidade, conforme a "matriz de decisão", abaixo:

Alternativas		Quantidade vendida				
		-30%	-20%	Referência básica	10%	25%
A	T I R	7%	12%	18%	22%	27%
B		19%	22%	24%	25%	27%
C		15%	18%	20%	22%	26%
D		13%	20%	27%	29%	32%



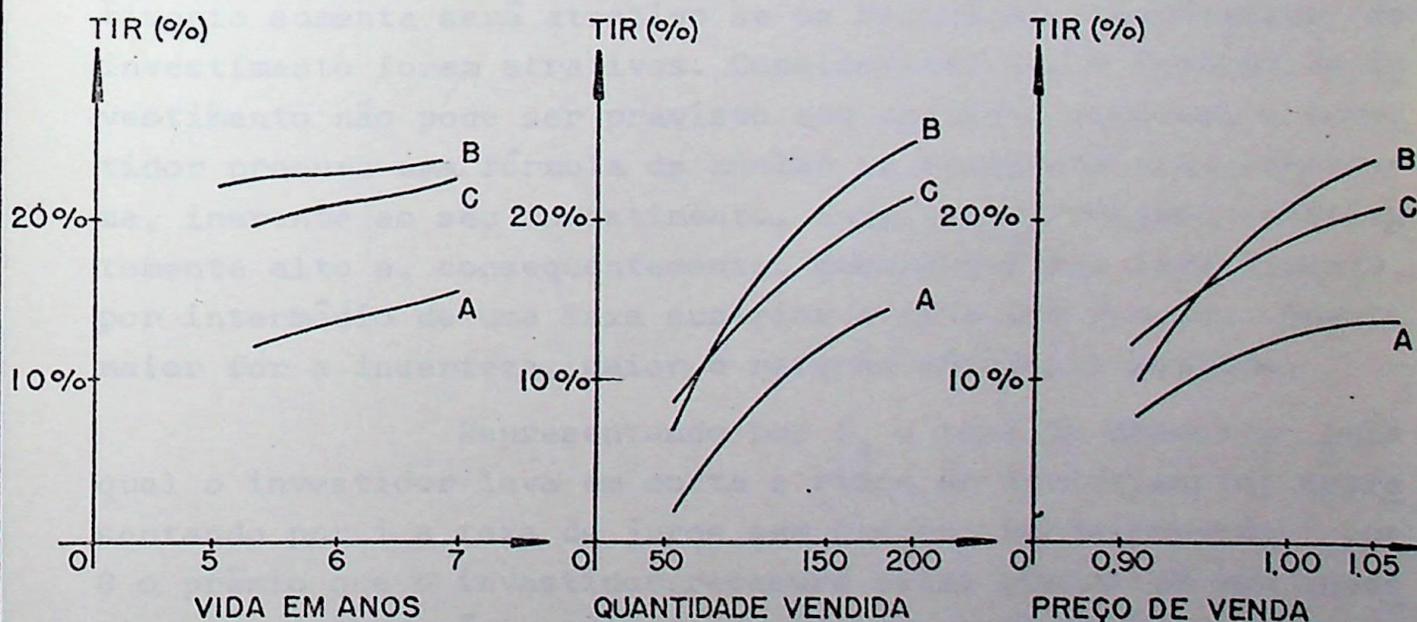
Se por acaso a quantidade vendida for entre -30% e -12% o investimento B tem a melhor rentabilidade; se entre -12% e 25% o projeto D é mais atrativo.

4º exemplo: Sejam 3 investimentos, A, B e C. Proceder a análise de sensibilidade das três variáveis seguintes:

- duração da vida;
- quantidade vendida;
- preço de venda;

sendo dada a seguinte matriz de decisão:

Alter nati- vas		V A R I Á V E I S								
		Duração da vida em anos			Quantidade vendida em unidades			Preço de venda Cr\$/Unidade		
		5	6	7	50.000	150.000	200.000	900	1.000	1.050
A	T	12%	14%	16%	1%	12%	15%	8%	12%	13%
B	I	22%	23%	24%	6%	22%	25%	9%	22%	24%
C	R	19%	21%	23%	7%	19%	19%	12%	19%	21%



A análise gráfica demonstra que uma flutuação na duração da vida não modifica significativamente a taxa interna de rentabilidade de cada projeto de investimento.

O investimento B é mais atrativo: as variações da quantidade vendida exercem uma variação positiva e mais

sensível na taxa interna de rentabilidade.

O investimento C é favorecido quando a quantidade vendida é de 50.000 unidades ou um preço de venda de Cr\$ 900,00.

O investidor deverá optar pelo investimento B e incrementar a promoção de vendas para evitar vendas de nível baixo.

7.5 - Determinação da taxa mínima de retorno em face ao fator risco

Conforme afirmamos, anteriormente, investir hoje é deixar de consumir no presente, para consumir no futuro. Assim, se um investidor compra uma ação ordinária de uma empresa, ele está, automaticamente, deixando de consumir no presente com vistas a um nível mais alto de consumo futuro. O investimento somente será atrativo se os benefícios resultantes do investimento forem atrativos. Considerando que o retorno do investimento não pode ser previsto com absoluta certeza, o investidor procura uma fórmula de anular ou minimizar esta incerteza, inerente ao seu investimento, exigindo um retorno suficientemente alto e, conseqüentemente, descontará seu investimento, por intermédio de uma taxa superior a taxa sem riscos. Quanto maior for a incerteza, maior o retorno adicional exigido.

Representando por K_e a taxa de desconto pela qual o investidor leva em conta o risco do investimento; representando por i a taxa de juros sem riscos; representando por θ o prêmio que o investidor receberá pelos riscos de seu investimento; a taxa mínima de retorno do seu investimento, face ao risco, será dada por:

$$K_e = i + \theta$$

K_e = taxa mínima de retorno (taxa de desconto)

i = taxa de juros sem riscos

θ = prêmio por riscos

A determinação de θ , correspondente a uma ação ordinária, implica na determinação de uma distribuição de probabilidades subjetivas aos dividendos por ação esperados nos vários períodos futuros. Por exemplo: um investidor compra ações de uma determinada empresa por Cr\$ 60,00, preço de mercado, em que já estão previstos (estimados) os dividendos a serem pagos por ação. Os possíveis dividendos a serem pagos, bem como, os preços estimados da ação no final do primeiro ano, estão tabelados abaixo:

DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES DOS DIVIDENDOS E PREÇOS DE MERCADO POSSÍVEIS, NO FINAL DO PRIMEIRO ANO					
Dividendo		Preços de mercado		Dividendo + preço de mercado	
Probabilidade	Evento (Cr\$)	Probabilidade	Evento (Cr\$)	Probabilidade	Evento (Cr\$)
0,20	3,00	0,05	80,00	0,05	83,00
0,60	2,50	0,10	76,00	0,10	79,00
0,20	2,00	0,20	72,00	0,20	74,50
		0,30	68,00	0,30	70,50
		0,20	64,00	0,20	66,50
		0,10	60,00	0,10	62,00
		0,05	56,00	0,05	58,00

O simples conhecimento da estimativa de pagamentos de dividendos, no final do primeiro ano, pela empresa, confere ao investidor um grau de confiabilidade bastante razoável em relação aos recebimentos de dividendos. Este grau de confiança faz com que a distribuição de probabilidade seja bastante concentrada. Por outro lado, o mesmo não ocorre com a distribuição de probabilidades dos preços de mercado estimados para o final do primeiro ano, que apresenta-se menos concentrada. Isto ocorre porque o investidor tem um grau de incerteza bem maior quanto aos preços futuros de mercado, em outras palavras, o preço de mercado das ações, no final do ano 1, não oferece a

mesma certeza que a dos pagamentos de dividendos. Justifica-se esta incerteza no cálculo de previsão dos preços futuros de mercado, baseados em previsões de dividendos dos períodos subsequentes. Conseqüentemente, a distribuição de probabilidades, dos preços de mercado, baseia-se nas distribuições de probabilidade dos dividendos esperados para depois desse ano. Como o grau de incerteza tem a tendência de aumentar com o tempo, a distribuição de probabilidades dos preços futuros de mercado tende a ser menos concentrada.

Vamos supor a existência de, uma correlação bastante acentuada entre o montante de dividendos e o preço de mercado no final do primeiro ano, isto é, que um dividendo elevado acha-se correlacionado com um alto preço de mercado. Suponhamos, ainda, que foi previsto os seguintes dividendos:

- Cr\$ 3,00 para preços de mercado de Cr\$ 80,00 ou Cr\$ 76,00
- Cr\$ 2,50 para preços de mercado de Cr\$ 72,00, Cr\$ 68,00 e Cr\$ 64,00
- Cr\$ 2,00 para preços de mercado de Cr\$ 60,00 ou Cr\$ 56,00

Os dados (valores) das colunas 5 e 6, da tabela acima, foram determinados em função da previsão destes dividendos.

A distribuição de probabilidades dos retornos esperados, no final do ano 1, poderá ser determinada através do seguinte cálculo:

$$(\text{Retorno possível}) = \frac{(\text{Dividendo} + \text{preço de mercado})}{(\text{Preço corrente do mercado})} - 1$$

O preço corrente de mercado é o preço de compra da ação. Por exemplo:

$$(\text{Retorno possível}) = \frac{83,00}{60,00} - 1 = 0,38333$$

A tabela, a seguir, apresenta a distribuição de probabilidades dos retornos possíveis num investimento pelo

período de um ano, em termos percentuais. Utilizando os dados do exemplo anterior, teremos:

Probabilidade de ocorrência	Retorno possível
0,05	0,38333
0,10	0,31666
0,20	0,24166
0,30	0,17500
0,20	0,10830
0,10	0,03330
0,05	-0,03340

Quanto maior a dispersão da distribuição de probabilidade, maior será o risco do investimento.

A dispersão é medida pelo desvio padrão da distribuição de probabilidade:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{x=1}^n (R_x - \bar{R})^2 \cdot P_x}$$

σ = desvio padrão

R_x = o valor do fluxo de retorno associado com a x-ésima possibilidade

P_x = probabilidade de ocorrência do evento

\bar{R} = esperança matemática; valor esperado da combinação de dividendos e preço de mercado

n = número total de possibilidades

A esperança matemática ou valor esperado é dado por:

$$\bar{R} = \sum_{x=1}^n R_x P_x$$

Cálculo do valor esperado dos retornos possíveis do exemplo acima tabelado:

$$\begin{aligned}\bar{R} &= 0,05(0,38333) + 0,10(0,31666) + 0,20(0,24166) + \\ &+ 0,30(0,1750) + 0,20(0,1083) + 0,10(0,0333) + \\ &+ 0,05(-0,0334) = 0,17498\end{aligned}$$

Cálculo do desvio padrão:

$$\begin{aligned}\sigma &= \left[0,05(0,38333 - 0,17498)^2 + 0,10(0,31666 - 0,17498)^2 + \right. \\ &+ 0,20(0,24166 - 0,17498)^2 + 0,30(0,17500 - 0,17498)^2 + \\ &+ 0,20(0,10830 - 0,17498)^2 + 0,10(0,03333 - 0,17498)^2 + \\ &\left. + 0,05(-0,03334 - 0,17498)^2 \right]^{1/2} = 0,10066\end{aligned}$$

- O coeficiente de variação

O coeficiente de variação é igual ao quociente do desvio padrão de uma distribuição de probabilidades, sobre a esperança matemática. É uma medida de dispersão relativa dessa distribuição

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{R}}$$

CV = coeficiente de variação

σ = desvio padrão, expresso em termos absolutos

Exemplo: o coeficiente de variação da distribuição de probabilidades acima, será, então:

$$CV = \frac{0,10066}{0,17498} = 0,57526$$

O prêmio por riscos assumidos pelo investidor

θ_j , é uma função do coeficiente de variação. Logo, podemos escrever:

$$\theta_j = f(\sigma/\bar{R})$$

Quanto maior for σ/\bar{R} , maior será θ_j , em outras palavras, quanto maior for o coeficiente de variação, maior será o risco do investidor e, conseqüentemente, a sua taxa de retorno exigida será de:

$$K_{ej} = i + f(\sigma/\bar{R})$$

K_{ej} = retorno mínimo desejado de uma determinada ação; definido, ainda, como a taxa mínima de retorno para uma ação.

$\theta_j = f(\sigma/\bar{R}) =$ prêmio de compensação do risco

7.6 - A utilização das probabilidades na decisão de investir

Os conceitos estatísticos de esperança matemática de lucro, de dispersão de uma distribuição de probabilidade, etc., são muitas vezes usados nas tomadas de decisões de investimentos.

Seja o seguinte exemplo: uma empresa tem duas alternativas de investimentos, A e B. O custo inicial e a vida econômica de ambas as alternativas são idênticos, respectivamente, Cr\$ 40.000,00 e 4 anos. O fluxo de caixa líquidos gerados pelos dois projetos se elevam a Cr\$ 20.000,00 anuais. Supondo uma taxa de mínima atratividade de 10% anuais, ambas as alternativas apresentam o mesmo valor atual:

$$\begin{aligned} VA_A = VA_B &= - 40.000 + 20.000 \times FRP(10\%, 4) = \\ &= - 40.000 + 20.000 \times 3,1698 = \text{Cr\$ } 23.396,00 \end{aligned}$$

Devemos concluir, portanto, que as duas alternativas são equivalentes.

Consideremos, agora, uma distribuição de probabilidades associadas com o fluxo de caixa anuais de cada projeto:

INVESTIMENTO A		INVESTIMENTO B	
Fluxo de caixa anual	Probabilidade	Fluxo de caixa anual	Probabilidade
15.000	0,10	10.000	0,10
17.500	0,20	15.000	0,25
20.000	0,40	20.000	0,30
22.500	0,20	25.000	0,25
25.000	0,10	30.000	0,10

A esperança matemática dos fluxos de caixa em qualquer um dos quatro anos nos é dada por:

$$\bar{R}_t = \sum_{j=1}^n R_j P_j$$

\bar{R}_t = esperança matemática dos fluxos de caixa num tempo t

P_j = probabilidades de sequência dos valores tomados pelo fluxo de caixa

R_j = o valor do fluxo de caixa associado com a i-ésima probabilidade num tempo t

a) Cálculo da esperança matemática do investimento A, num tempo t = n = 1, 2, 3, 4

$$\begin{aligned} \bar{R}_A &= 15.000(0,10) + 17.500(0,20) + 20.000(0,40) + 22.500(0,20) + \\ &+ 25.000(0,10) = \\ &= 1.500 + 3.500 + 8.000 + 4.500 + 2.500 = \text{Cr\$ } 20.000,00 \end{aligned}$$

b) Cálculo da esperança matemática do investimento B.

$$\begin{aligned}\bar{R}_B &= 10.000(0,10) + 15.000(0,25) + 20.000(0,30) + \\ &+ 25.000(0,25) + 30.000(0,10) = \\ &= 1.000 + 3.750 + 6.000 + 6.250 + 3.000 = \text{Cr\$ } 20.000,00\end{aligned}$$

Embora as esperanças matemáticas de ambos os projetos sejam iguais, não se pode afirmar que eles apresentam o mesmo grau de desejabilidade.

O risco de um investimento se defini pela variabilidade das vendas que ele é suscetível de produzir, e se mede pela dispersão da distribuição de probabilidade em volta de sua esperança matemática.

Como vimos, a dispersão é medida pelo desvio padrão da distribuição de probabilidades associadas aos fluxos de caixa esperados no período:

$$\sigma_t = \sqrt{\sum_{j=1}^n (R_j - \bar{R}_t)^2 \cdot P_j}$$

Denomina-se variância, o quadrado do desvio padrão:

$$\sigma_t^2 = \sum_{j=1}^n (R_j - \bar{R}_t)^2 \cdot P_j$$

- Cálculo do desvio padrão do investimento A

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \left[0,10(15.000 - 20.000)^2 + 0,20(17.500 - 20.000)^2 + \right. \\ &+ 0,40(20.000 - 20.000)^2 + 0,20(22.500 - 20.000)^2 + \\ &\left. + 0,10(25.000 - 20.000)^2 \right]^{1/2} = \\ &= (2.500.000 + 1.250.000 + 1.250.000 + 2.500.000)^{1/2} = \\ &= (7.500.000)^{1/2} \approx 2.740\end{aligned}$$

- Cálculo do desvio padrão do investimento B

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \left[0,10(10.000 - 20.000)^2 + 0,25(15.000 - 20.000)^2 + \right. \\ &+ 0,30(20.000 - 20.000)^2 + 0,25(25.000 - 20.000)^2 + \\ &\left. + 0,10(30.000 - 20.000)^2 \right]^{1/2} = \\ &= (10.000.000 + 6.250.000 + 6.250.000 + 10.000.000)^{1/2} = \\ &= (32.500.000)^{1/2} \approx 5.700\end{aligned}$$

O desvio padrão do projeto B é maior do que o do projeto A, conseqüentemente, o projeto B tem uma maior dispersão, logo, maior risco.

O coeficiente de variação de ambos os projetos nos é dado por:

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{R}_A} = \frac{2.740}{20.000} = 0,14$$

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{R}_B} = \frac{5.700}{20.000} = 0,29$$

Conforme já afirmamos: quanto maior o CV mais arriscado é o projeto de investimento, donde se conclui: o investimento B é mais arriscado que o investimento A.

Conclusão:

O investidor deverá optar pelo investimento A

7.7 - A incorporação das probabilidades na decisão de investir

1º exemplo: uma empresa considera 2 propostas de investimentos, as quais apresentam as seguintes características:

Investimento A:

- custo inicial (CI) = Cr\$ 120.000,00

- fluxo de caixa obtido para 3 anos com as seguintes distribuições discretas de probabilidades:

ANO 1		ANO 2		ANO 3	
Fluxo de caixa	Probabilidades	Fluxo de caixa	Probabilidades	Fluxo de caixa	Probabilidades
50.000	0,10	30.000	0,10	-10.000	0,10
70.000	0,30	60.000	0,25	30.000	0,20
80.000	0,30	90.000	0,40	70.000	0,40
90.000	0,20	100.000	0,15	90.000	0,20
110.000	0,10	120.000	0,10	110.000	0,10

Investimento B:

- custo inicial (CI) = Cr\$ 120.000,00
 - fluxo de caixa obtido para 3 anos com as seguintes distribuições discretas de probabilidades:

ANO 1		ANO 2		ANO 3	
Fluxo de caixa	Probabilidades	Fluxo de caixa	Probabilidades	Fluxo de caixa	Probabilidades
80.000	0,10	120.000	0,10	130.000	0,20
70.000	0,20	100.000	0,25	110.000	0,30
50.000	0,40	80.000	0,30	100.000	0,30
40.000	0,20	60.000	0,25	80.000	0,10
30.000	0,10	40.000	0,10	60.000	0,10

Vamos supor que as distribuições de probabilidades associadas a cada série de fluxos de caixa anuais foram determinadas independentemente uma das outras, ou seja, o resultado alcançado no período t , não dependerá do ocorrido em $(t-1)$. A média ou esperança matemática da distribuição de probabilidades do valor atual líquido da proposta será:

$$\bar{R}_{VAL} = \left[\sum_{t=1}^n \frac{\bar{R}_t}{(1+i)^t} \right] - CI$$

\bar{R}_t = esperança do fluxo líquido de caixa no período t

i = taxa de juros

CI = custo inicial = capital investido

R_{VAL} = esperança matemática do valor atual líquido

Na hipótese de serem independentes os fluxos de caixa futuros, o desvio padrão da distribuição dos valores atuais líquidos será:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{t=1}^n \frac{\sigma_t^2}{(1+i)^{2t}}}$$

σ_t = desvio padrão dos fluxos líquidos possíveis no período t

Isto posto, poderemos efetuar os seguintes cálculos:

- a) Cálculo da esperança matemática dos fluxos de caixa para cada um dos três anos do investimento A, problema acima tabelado:

ANO 1			ANO 2		
Fluxo de caixa R_j	Probabilidades P_j	Produto $R_j \times P_j$	Fluxo de caixa R_j	Probabilidades P_j	Produto $R_j \times P_j$
50.000	0,10	5.000	30.000	0,10	3.000
70.000	0,30	21.000	60.000	0,25	15.000
80.000	0,30	24.000	90.000	0,40	36.000
90.000	0,20	18.000	100.000	0,15	15.000
110.000	0,10	11.000	120.000	0,10	12.000
$\bar{R}_1 = \sum_{j=1}^n R_j P_j = 79.000$			$\bar{R}_2 = 81.000$		

ANO 3		
Fluxo de caixa	Probabilidades	Produto
-10.000	0,10	- 1.000
30.000	0,20	6.000
70.000	0,40	28.000
90.000	0,20	18.000
110.000	0,10	11.000
$\bar{R}_3 = 62.000$		

As esperanças do investimento A para os anos 1, 2 e 3, são:

$$\bar{R}_1 = \text{Cr\$ } 79.000,00$$

$$\bar{R}_2 = \text{Cr\$ } 81.000,00$$

$$\bar{R}_3 = \text{Cr\$ } 62.000,00$$

b) Determinação do desvio padrão dos fluxos de caixa do investimento A, para cada um dos três anos:

ANO 1					
j	Fluxo de caixa (R_j)	\bar{R}_t	$(R_j - \bar{R}_t)^2$	P_j	$(R_j - \bar{R}_t)^2 P_j$
1	50.000	79.000	841.000.000	0,10	84.100.000
2	70.000	79.000	81.000.000	0,30	24.300.000
3	80.000	79.000	1.000.000	0,30	300.000
4	90.000	79.000	121.000.000	0,20	24.200.000
5	110.000	79.000	961.000.000	0,10	96.100.000
-	-	-	-	-	$\sigma_1^2 = 229.000.000$

O desvio padrão será:

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_1^2} = \sqrt{229.000.000} = 15.130$$

A N O 2					
j	Fluxo de caixa (R _j)	\bar{R}_t	$(R_j - \bar{R}_t)^2$	P _j	$(R_j - \bar{R}_t)^2 P_j$
1	30.000	81.000	2.601.000.000	0,10	260.100.000
2	60.000	81.000	441.000.000	0,25	110.250.000
3	90.000	81.000	81.000.000	0,40	32.400.000
4	100.000	81.000	361.000.000	0,15	54.150.000
5	120.000	81.000	1.521.000.000	0,10	152.100.000
-	-	-	-	-	$\sigma_1^2 = 609.000.000$

O desvio padrão, σ_2 , será:

$$\sigma_2 = \sqrt{\sigma_2^2} = \sqrt{609 \times 10^6} = 24.680$$

A N O 3					
j	Fluxo de caixa (R _j)	\bar{R}_t	$(R_j - \bar{R}_t)^2$	P _j	$(R_j - \bar{R}_t)^2 P_j$
1	-10.000	62.000	5.184.000.000	0,10	518.400.000
2	30.000	62.000	1.024.000.000	0,20	204.800.000
3	70.000	62.000	64.000.000	0,40	25.600.000
4	90.000	62.000	784.000.000	0,20	156.800.000
5	110.000	62.000	2.304.000.000	0,10	230.400.000
-	-	-	-	-	$\sigma^2 = 1.136.000.000$

O desvio padrão, σ_3 , será:

$$\sigma_3 = \sqrt{\sigma_3^2} = \sqrt{1.136.000.000} = 33.700$$

Os desvios padrão dos fluxos de caixa para cada um dos três anos, são:

$$\sigma_1 = 15.130$$

$$\sigma_2 = 24.680$$

$$\sigma_3 = 33.700$$

c) Cálculo da esperança matemática do valor atual líquido do investimento A, assim como a determinação do desvio padrão desse valor atual líquido. Para efeito de cálculo vamos considerar $i = 8\%$

i) esperança matemática do valor atual líquido:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{VAL} &= \frac{79.000}{1,08} + \frac{81.000}{(1,08)^2} + \\ &+ \frac{62.000}{(1,08)^3} - 120.000 = \\ &= 73.000 + 69.800 + 44.000 - 120.000 = 71.800 \end{aligned}$$

$$\bar{R}_{VAL} = \text{Cr\$ } 71.800,00$$

ii) desvio padrão do valor atual líquido:

$$\begin{aligned} \sigma_{VAL} &= \left[\frac{\sigma_1^2}{(1,08)^2} + \frac{\sigma_2^2}{(1,08)^4} + \frac{\sigma_3^2}{(1,08)^6} \right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{229 \times 10^6}{(1,08)^2} + \frac{609 \times 10^6}{(1,08)^4} + \frac{1.136 \times 10^6}{(1,08)^6} \right]^{1/2} = \end{aligned}$$

$$= (1.345.422.400)^{1/2} = 36.680$$

$$\sigma_{VAL} = 36.680$$

- Investimento B

d) Cálculo da esperança matemática dos fluxos de caixa do investimento B, para cada um dos 3 anos:

ANO 1			ANO 2		
Fluxo de caixa R_j	Probabilidades P_j	Produto $R_j \times P_j$	Fluxo de caixa R_j	Probabilidades P_j	Produto $R_j \times P_j$
80.000	0,10	8.000	120.000	0,10	12.000
70.000	0,20	14.000	100.000	0,25	25.000
50.000	0,40	20.000	80.000	0,30	24.000
40.000	0,20	8.000	60.000	0,25	15.000
30.000	0,10	3.000	40.000	0,10	4.000
$\bar{R}_1 = \sum_{j=1}^n R_j P_j = 53.000$			$\bar{R}_2 = 80.000$		

ANO 3		
Fluxo de caixa	Probabilidades	Produto
130.000	0,20	26.000
110.000	0,30	33.000
100.000	0,30	30.000
80.000	0,10	8.000
60.000	0,10	6.000
$\bar{R}_3 = 103.000$		

As esperanças matemáticas para cada um dos três anos, são:

$$\bar{R}_1 = \text{Cr\$ } 53.000,00$$

$$\bar{R}_2 = \text{Cr\$ } 80.000,00$$

$$\bar{R}_3 = \text{Cr\$ } 103.000,00$$

e) Cálculo dos desvios padrão dos fluxos de caixa do investimento B, para cada um dos três anos:

ANO 1					
j	Fluxo de caixa (R_1)	\bar{R}_1	$(R_1 - \bar{R}_1)^2$	P_1	$(R_1 - \bar{R}_1)^2 P_1$
1	80.000	53.000	729.000.000	0,10	72.900.000
2	70.000	53.000	289.000.000	0,20	57.800.000
3	50.000	53.000	9.000.000	0,40	3.600.000
4	40.000	53.000	169.000.000	0,20	33.800.000
5	30.000	53.000	529.000.000	0,10	52.900.000
					$\sigma_1^2 = 221 \times 10^6$

Desvio padrão do investimento B no ano 1:

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_1^2} = \sqrt{221 \times 10^6} = 14.870$$

ANO 2					
j	Fluxo de caixa (R ₂)	\bar{R}_2	$(R_2 - \bar{R}_2)^2$	P ₂	$(R_2 - \bar{R}_2)^2 P_2$
1	120.000	80.000	1.600.000.000	0,10	160.000.000
2	100.000	80.000	400.000.000	0,25	100.000.000
3	80.000	80.000	0	0,30	0
4	60.000	80.000	400.000.000	0,25	100.000.000
5	40.000	80.000	1.600.000.000	0,10	160.000.000
					$\sigma_2^2 = 520 \times 10^6$

$$\text{Desvio padrão: } \sigma_2 = \sqrt{\sigma_2^2} = \sqrt{520 \times 10^6} = 22.800$$

ANO 3					
j	Fluxo de caixa (R ₃)	\bar{R}_3	$(R_3 - \bar{R}_3)^2$	P ₃	$(R_3 - \bar{R}_3)^2 P_3$
1	130.000	103.000	729.000.000	0,20	145.800.000
2	110.000	103.000	49.000.000	0,30	14.700.000
3	100.000	103.000	9.000.000	0,30	2.700.000
4	80.000	103.000	529.000.000	0,10	52.900.000
5	60.000	103.000	1.849.000.000	0,10	184.900.000
					$\sigma_3^2 = 401 \times 10^6$

$$\text{Desvio padrão : } \sigma_3 = \sqrt{\sigma_3^2} = \sqrt{401 \times 10^6} = 20.030$$

f) Cálculo da esperança matemática e desvio padrão do valor atual líquido do investimento B

i) esperança matemática do valor atual líquido:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{VAL} &= \frac{53.000}{1,08} + \frac{80.000}{(1,08)^2} + \frac{103.000}{(1,08)^3} - 120.000 = \\ &= \text{Cr\$ } 79.494,00 \end{aligned}$$

ii) Desvio padrão do valor atual líquido

$$\sigma_{\text{VAL}} = \sqrt{\frac{221 \times 10^6}{(1,08)^2} + \frac{52 \times 10^7}{(1,08)^4} + \frac{401 \times 10^6}{(1,08)^6}} = 28.500$$

Resumindo:

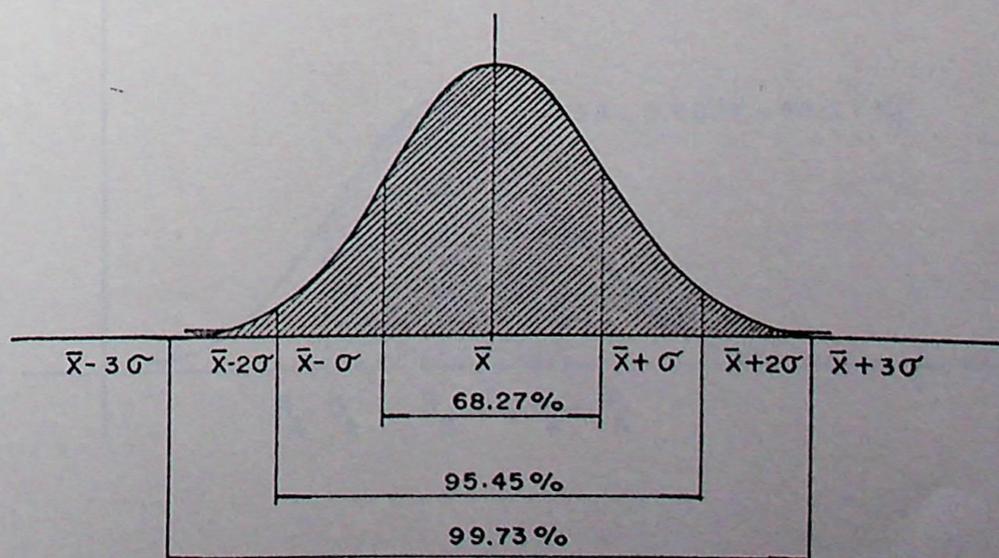
Itens	Investimento A	Investimento B
\bar{R}_{VAL}	Cr\$ 71.800,00	Cr\$ 79.494,00
σ_{VAL}	36.680	28.500

7.8 - Análise dos resultados

Consideremos que a probabilidade associada com cada montante possível do valor atual líquido é uma distribuição normal, perfeitamente definida pela esperança matemática e pelo desvio padrão calculados:

Em uma distribuição normal, a área subentendi da pela curva normal e pelo eixo das abcissas é igual a 1, em outras palavras, corresponde a probabilidade igual a 1 ou 100% da distribuição de probabilidades.

O gráfico abaixo representa uma curva normal:



Isto significa que em uma distribuição normal, temos:

- i) 68,27% dos casos estão compreendidos entre $\bar{X} - \sigma$ e $\bar{X} + \sigma$
- ii) 95,45% dos casos estão incluídos entre $\bar{X} - 2\sigma$ e $\bar{X} + 2\sigma$
- iii) 99,73% dos casos estão incluídos entre $\bar{X} - 3\sigma$ e $\bar{X} + 3\sigma$

Aplicando estas propriedades do desvio padrão e da distribuição normal na Análise dos Resultados do exemplo acima, teremos:

Investimento A:

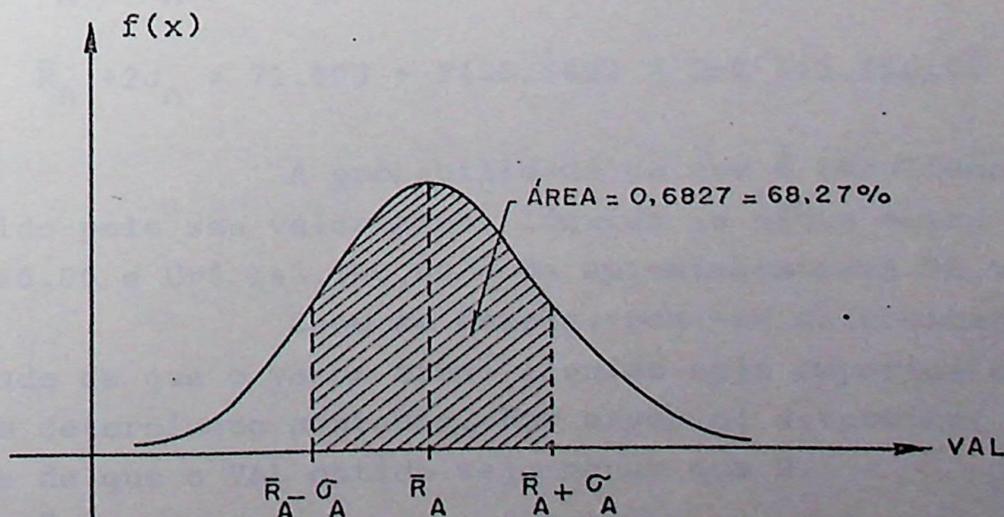
$$\bar{R}_A = \bar{R}_{VAL} = \text{m\u00e9dia da distribui\u00e7\u00e3o de probabilidades do valor atual l\u00edquido} = \text{Cr\$ } 71.800,00$$

$$\sigma_A = \sigma_{VAL} = \text{desvio padr\u00e3o da distribui\u00e7\u00e3o de probabilidades do valor atual l\u00edquido} = 36.680$$

$$\bar{R}_A - \sigma_A = 71.800 - 36.680 = \text{Cr\$ } 35.120,00$$

$$\bar{R}_A + \sigma_A = 71.800 + 36.680 = \text{Cr\$ } 108.480,00$$

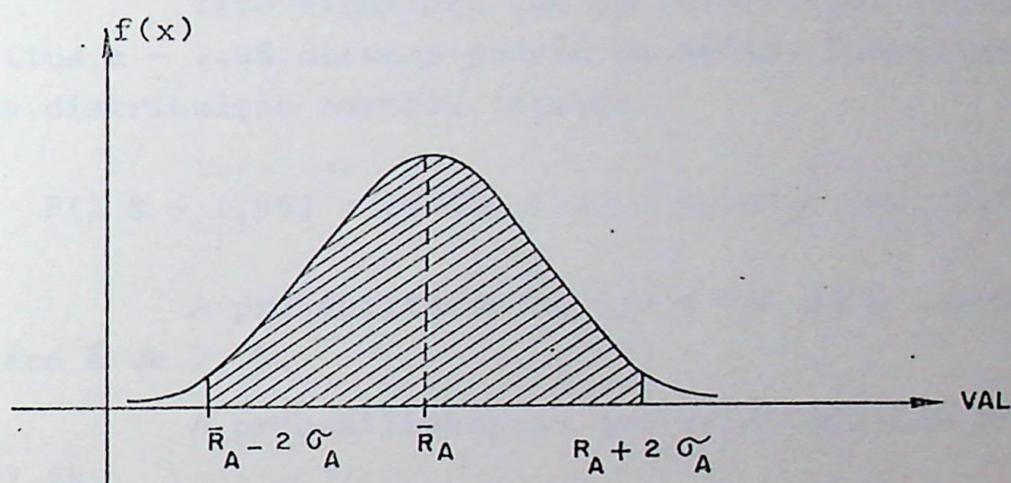
Graficamente, teremos:



A probabilidade de que o investimento A esteja compreendido entre Cr\$ 35.120,00 e Cr\$ 108.480,00 é de aproximadamente 0,6827 ou 68,27%.

Uma distância de 2 desvios padrão a cada lado da média (\bar{R}_A), ou seja: $\bar{R}_A - 2\sigma_A$ e $\bar{R}_A + 2\sigma_A$, cobre uma faixa de possíveis valores atuais líquidos entre $71.800 - 2(36.680)$ a $71.800 + 2(36.680)$, isto é, entre - Cr\$ 1.560,00 e Cr\$ 145.160,00

Graficamente, teremos:



$$\bar{R}_A = \text{Cr\$ } 71.800,00$$

$$\bar{R}_A - 2\sigma_A = 71.800 - 2(36.680) = - \text{Cr\$ } 1.560,00$$

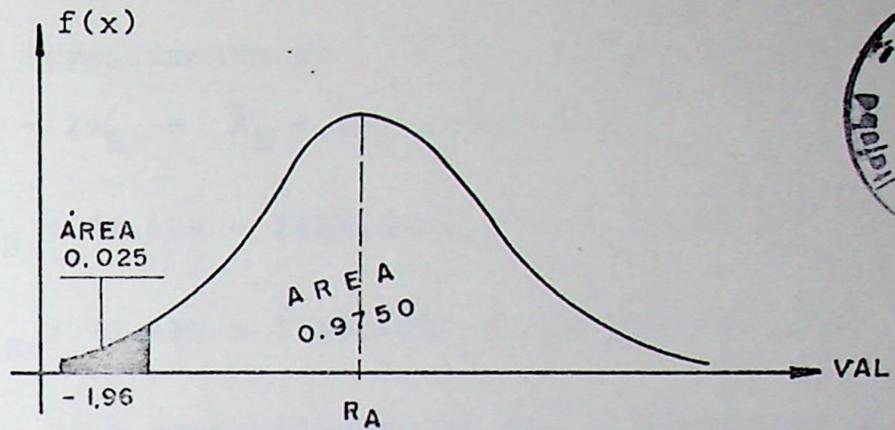
$$\bar{R}_A + 2\sigma_A = 71.800 + 2(36.680) = \text{Cr\$ } 145.160,00$$

A probabilidade de que o resultado do projeto medido pelo seu valor atual líquido se situe entre - Cr\$ 1.560,00 e Cr\$ 145.160,00 é de aproximadamente 95,45%.

Caso se deseje, pode-se determinar a probabilidade de que o valor atual líquido seja superior ou inferior a um determinado montante. Por exemplo; determinar a probabilidade de que o VAL obtido seja menor que 0.

Solução:

$$Z = \frac{R_A - \bar{R}_A}{\sigma_A} = \frac{0 - 71.800}{36.680} = - 1,96$$



Isto significa que um valor atual líquido nulo, se situa a - 1,96 desvios padrão da média. Consultando a tabela da distribuição normal, teremos:

$$P(Z \leq -1,96) = P(\text{VAL} \leq 0) = 0,025 \quad \text{ou} \quad 2,5\%$$

A probabilidade de que o VAL seja menor ou igual a zero é de 2,5%.

A probabilidade de que seja igual ou maior que zero é de 97,5%.

Investimento B:

$$\bar{R}_B = \bar{R}_{\text{VAL}} = 79.494,00$$

$$\sigma_B = 28.500$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio utilizada nos cálculos do investimento A, teremos, para o investimento B, os seguintes resultados:

$$\bar{R}_B - \sigma_B = 79.494 - 28.500 = \text{Cr\$ } 50.994,00$$

$$\bar{R}_B + \sigma_B = 79.494 + 28.500 = \text{Cr\$ } 107.994,00$$

A probabilidade de que o investimento B esteja compreendido entre Cr\$ 50.994,00 e Cr\$ 107.994,00 é de aproximadamente 68,27%. A análise gráfica é semelhante a análise

feita para o investimento A.

Para $\bar{R}_B - 2\sigma_B$ e $\bar{R}_B + 2\sigma_B$, temos:

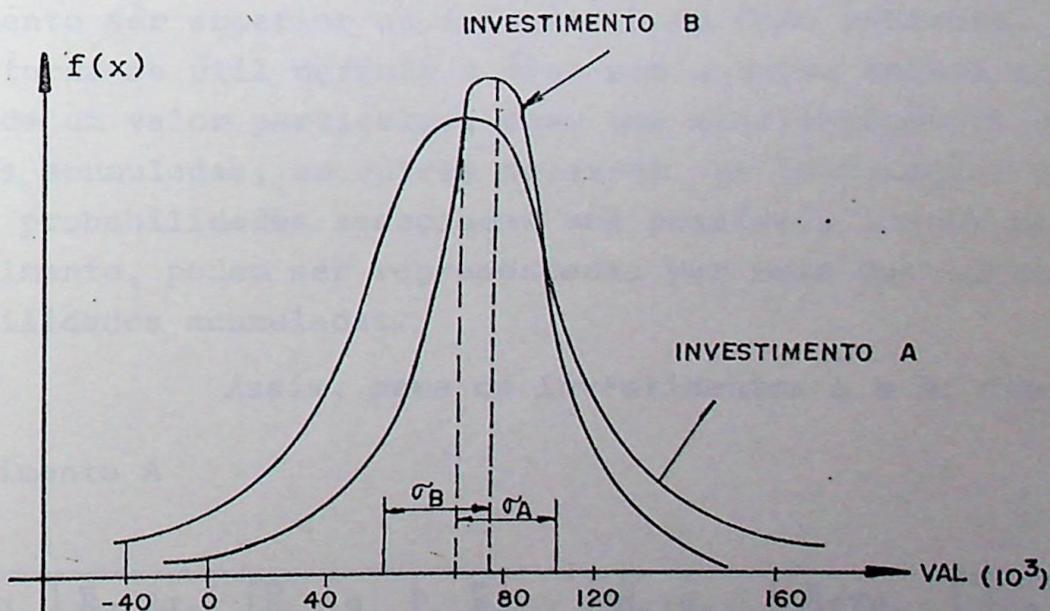
$$\bar{R}_B - 2\sigma_B = 79.494 - 2(28.500) = \text{Cr\$ } 22.494,00$$

$$\bar{R}_B + 2\sigma_B = 79.494 + 2(28.500) = \text{Cr\$ } 136.494,00$$

A probabilidade de que o resultado do investimento B medido pelo seu valor atual líquido se situe entre Cr\$ 22.494,00 e Cr\$ 136.494,00 é de aproximadamente 95,45%.

A análise gráfica também é semelhante a do projeto A, para o mesmo caso.

O gráfico abaixo apresenta as curvas de densidade de probabilidade do valor atual líquido para ambos os projetos de investimentos:



A esperança do valor atual líquido da proposta A é de Cr\$ 71.800,00 e a da proposta B Cr\$ 79.494,00, logo:

$$\bar{R}_B > \bar{R}_A$$

Entretanto, a dispersão da distribuição probabilidade de A em torno da média é maior, pois $\sigma_A = 36$ e $\sigma_B = 28.500$, donde:

$$\sigma_A > \sigma_B$$

Relacionando o risco à dispersão, a proposta B apresentará ao mesmo tempo, maior rentabilidade prevista menor risco.

É de se supor, então, que o investidor preferir investir no projeto B, que oferece o menor risco maior rentabilidade.

7.9 - Probabilidades acumuladas

Conforme já afirmamos, muitas vezes, poderemos determinar a probabilidade do VAL de uma proposta de investimento ser superior ou inferior a um dado montante. Nesse caso, torna-se útil definir a área sob a curva normal e a reita de um valor particular, como uma distribuição de probabilidades acumuladas; em outras palavras, as informações relativas às probabilidades associadas aos possíveis lucros de cada investimento, podem ser representadas por meio das curvas probabilidades acumuladas.

Assim, para os investimentos A e B, temos:

Investimento A

$\bar{R}_A - 3\sigma_A$	$\bar{R} - 2\sigma_A$	$\bar{R} - \sigma$	\bar{R}_A	$\bar{R}_A + \sigma_A$	$\bar{R} + 2\sigma_A$	$\bar{R}_A + 3\sigma$
-38.240	-1.560	35.120	71.800	108.480	145.160	181.840
99,87%	97,72%	84,13%	50%	15,87%	2,28%	0,13%

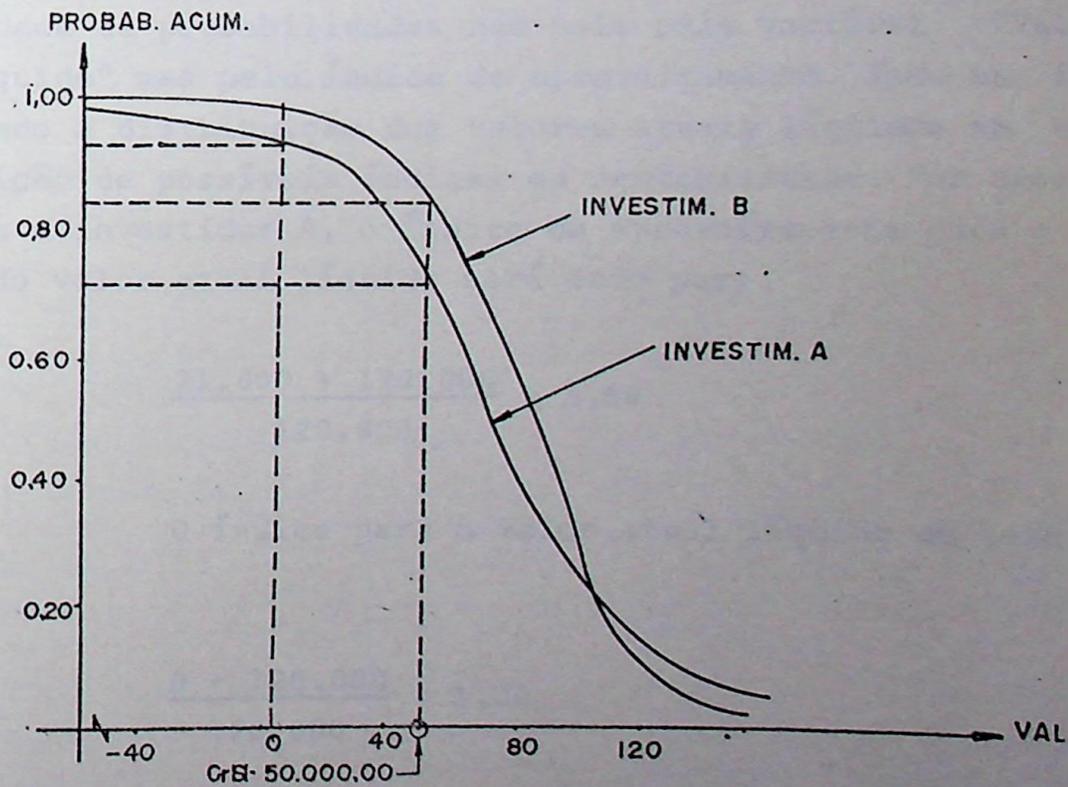
A probabilidade de que o valor atual seja mínimo igual à esperança matemática é de 50%.

A probabilidade de que o valor atual seja inferior a Cr\$ 107.994,00 é de 15,87%

Investimento B

$\bar{R}_B - 3\sigma_B$	$\bar{R}_B - 2\sigma_B$	$\bar{R}_B - \sigma_B$	\bar{R}_B	$\bar{R}_B + \sigma_B$	$\bar{R}_B + 2\sigma_B$	$\bar{R}_B + 3\sigma_B$
6.006	22.494	50.994	79.494	107.994	136.494	164.4
99,87%	97,72%	84,13%	50%	15,87%	2,28%	0,1

Os dados acima tabelados permite-nos constatar as curvas comparativas de probabilidades acumulada para os projetos A e B



O gráfico de probabilidades permite-nos calcular rapidamente a probabilidade de se obter um valor maior igual ao determinado. Por exemplo:

Investimento A: $P \{ VAL \geq 50.000 \} \approx 72\%$

Investimento B: $P \{ VAL \geq 50.000 \} \approx 85\%$

O investidor poderá igualmente desejar saber qual a probabilidade com que um dos investimentos alcance o princípio de rentabilidade (Break-even-point) ou VALOR ATUAL LÍQUIDO NULO.

Investimento A: $P \{ VAL \geq 0 \} \approx 97,5\%$

Investimento B: $P \{ VAL \geq 0 \} \approx 100\%$

Para facilitar a seleção de projetos de investimentos a administração poderá exprimir a distribuição de probabilidade em termos relativos, ou seja, apresentar a curva de densidade de probabilidades não mais pela variável "Valor atual líquido" mas pelo índice de aproveitamento. Isto se faz convertendo a distribuição dos valores atuais líquidos em uma distribuição de possíveis índices de rentabilidade: Por exemplo: para o investidor A, o índice de aproveitamento para a esperança do valor atual líquido será dado por:

$$\frac{71.800 + 120.000}{120.000} = 1,60$$

O índice para o valor atual líquido de zero é de

$$\frac{0 + 120.000}{120.000} = 1,00$$

Então, podemos escrever:

$$IR_{VAL} = \frac{VAL + \text{custo inicial}}{\text{custo inicial}}$$

De modo similar, poderemos converter a distribuição de probabilidades de qualquer investimento, em sua totalidade, em uma distribuição probabilística de possíveis índices de rentabilidade. Assim procedendo, teremos:

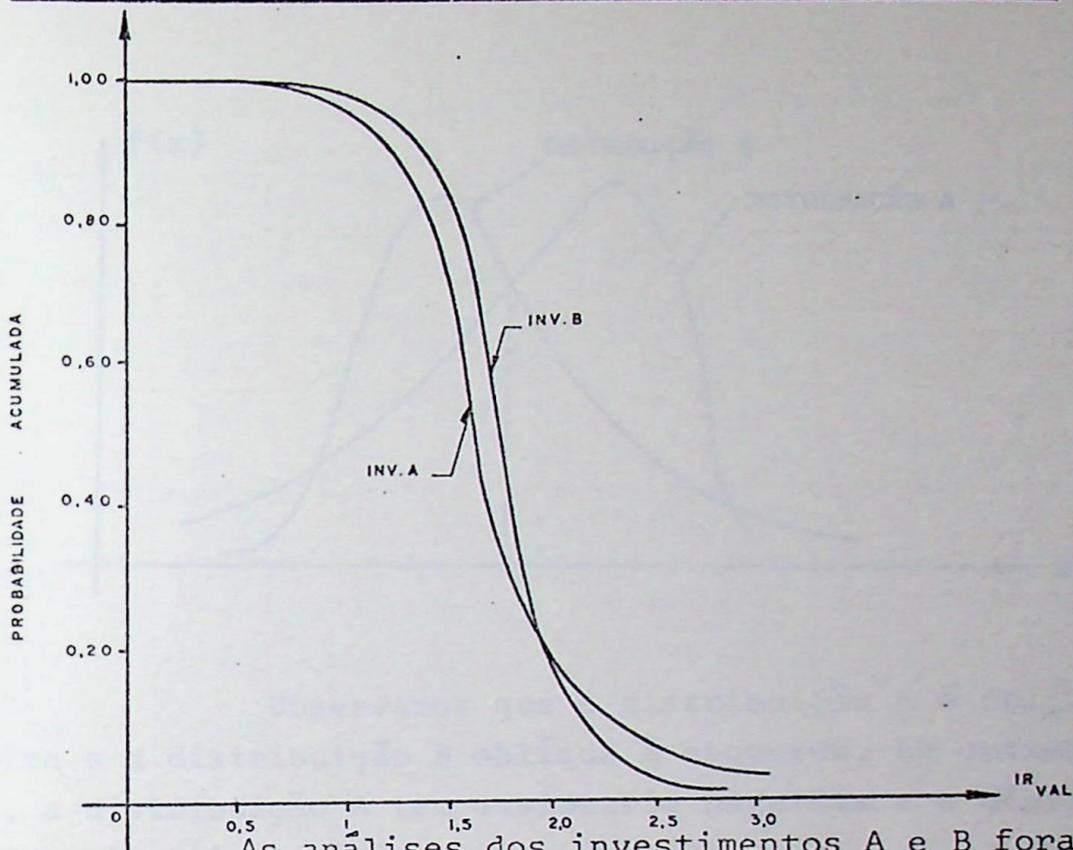
Investimento A

I T E N S	$\bar{R}_A - 3\sigma_A$	$\bar{R}_A - 2\sigma_A$	$\bar{R}_A - \sigma_A$	\bar{R}_A
Valor atual líquido	-38.240	- 1.560	35.120	71.800
Probabilidade acumulada	99,87%	97,72%	84,13%	50%
Índice de aproveitamento	0,68	0,99	1,29	1,60
I T E N S	$\bar{R}_A + \sigma_A$	$\bar{R}_A + 2\sigma_A$	$\bar{R}_A + 3\sigma_A$	
Valor atual líquido	108.480	145.160	181.840	
Probabilidade acumulada	15,87%	2,28%	0,13%	
Índice de aproveitamento	1,90	2,209	2,51	

Investimento B

I T E N S	$\bar{R}_B - 3\sigma_B$	$\bar{R}_B - 2\sigma_B$	$\bar{R}_B - \sigma_B$	\bar{R}_B
Valor atual líquido	6.006	22.494	50.994	79.494
Probabilidade acumulada	99,87%	97,72%	84,13%	50%
Índice de aproveitamento	1,05	1,19	1,42	1,66
I T E N S	$\bar{R}_B + \sigma_B$	$\bar{R}_B + 2\sigma_B$	$\bar{R}_B + 3\sigma_B$	
Valor atual líquido	107.994	136.494	164.994	
Probabilidade acumulada	15,87%	2,28%	0,13%	
Índice de aproveitamento	1,90	2,14	2,366	

O dados acima permite-nos traçar o seguinte gráfico:



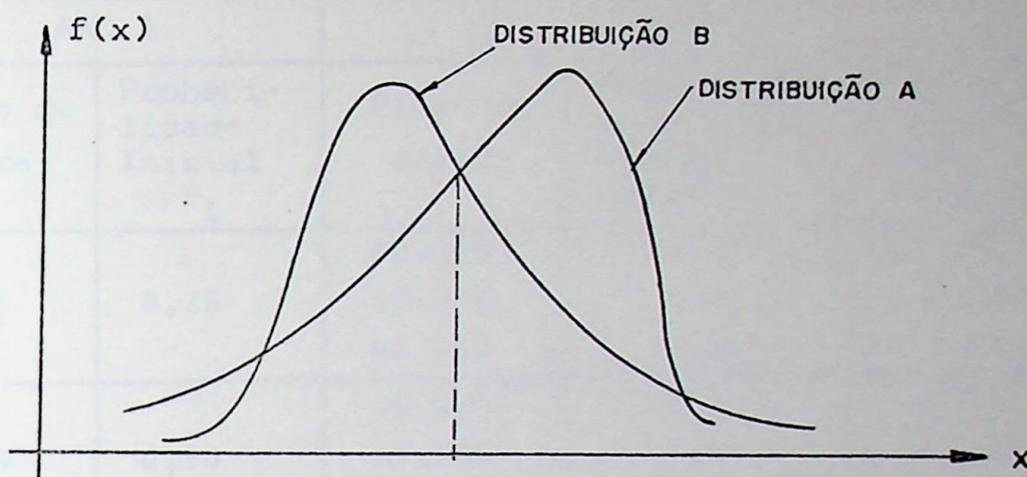
seadas em duas hipóteses:

- a) fluxos de caixa independentes
- b) distribuição normal

Estas duas hipóteses permitem maior facilidade nos cálculos, entretanto, quando estas duas hipóteses não podem ser consideradas, utiliza-se de outras aproximações que pouco diferem da análise precedente.

É fácil observar que o gráfico acima é semelhante ao gráfico anterior, gráfico de probabilidades acumuladas, pág. 103. A distribuição de probabilidades em termos relativos é obtida, como vimos, convertendo-se o valor atual líquido em um "Índice de Aproveitamento". Isto facilita a seleção de projetos através da análise comparativa dos "índices de aproveitamento dos investimentos".

Nas distribuições de probabilidades simétricas, o desvio padrão constitui uma medida aceitável de risco. Devemos salientar, ainda, que determinados casos exigem a introdução de um terceiro parâmetro susceptível de medir a assimetria de uma lei de probabilidade: - A figura abaixo apresenta as curvas de duas distribuições de probabilidade com desvios padrão e esperanças matemáticas iguais, isto é, o desvio padrão da distribuição B é igual ao desvio padrão da distribuição A, o mesmo ocorrendo com as esperanças matemáticas de ambas as distribuições:



Observamos que a distribuição A é oblíqua à direita e a distribuição B oblíqua à esquerda, em outras palavras, a distribuição A tem assimetria negativa e a distribuição B assimetria positiva.

O investidor irá, sem dúvida, optar pela distribuição B que oferece uma proteção maior contra rendas mais fracas e menos desfavoráveis.

7.10 - Probabilidade condicional

O método da probabilidade condicional constitui um dos métodos mais acessíveis e de fácil utilização. Seja o seguinte exemplo: uma companhia decide adquirir equipamentos no valor de Cr\$ 70.000,00 susceptíveis de produzir, ao longo de dois anos, os seguintes fluxos de caixa:

ANO 1		ANO 2		
Fluxo de caixa	Probabilidade Inicial P_1	Fluxo de caixa	Probabilidade condicional $P(2/1)$	Probabilidade ligada $P(1,2)$
30.000	0,25	20.000	0,30	0,075 (1)
		30.000	0,40	0,100 (2)
		40.000	0,30	0,075 (3)
50.000	0,50	50.000	0,20	0,100 (4)
		60.000	0,50	0,250 (5)
		70.000	0,30	0,150 (6)
70.000	0,25	60.000	0,30	0,075 (7)
		70.000	0,30	0,075 (8)
		80.000	0,40	0,100 (9)
-	-	-	-	1,000

Vamos supor, ainda, que nenhuma renda é esperada após o 2º ano e de que o valor residual do equipamento foi orçado em Cr\$ 40.000,00 no final do 1º ano.

A tabela acima nos fornece o fluxo de caixa no tempo t_2 e a probabilidade ligada de sequência dos fluxos de caixa.

A probabilidade de que um fluxo de caixa de Cr\$ 70.000,00 de sequência a um fluxo de caixa de Cr\$ 80.000,00 é de 0,1, ou seja, $0,25 \times 0,40 = 0,1$.

A introdução das probabilidades condicionais, permite então, levar-se em conta a correlação sequencial entre os fluxos de caixa de um a outro período.

1º) determinação da esperança do valor atual líquido do investimento acima tabelado, supondo uma taxa $i = 8\%$.

Fluxo de Caixa	$\frac{1}{(1,08)^2}$	Fluxo de caixa Atualizado	Fluxo de Caixa	$\frac{1}{(1,08)^2}$	Fluxo de caixa Atualizado	Fluxo de caixa Atualizado	Valor atual dos Fluxos de caixa	P(1,2)	Esperança Matemática
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
30.000,00	0,9259	27.777,00	20.000,00	0,8573	17.146,00	44.923,00	0,075	3.369,20	
50.000,00	0,9259	46.295,00	50.000,00	0,8573	42.865,00	89.160,00	0,100	8.916,00	
70.000,00	0,9259	64.813,00	60.000,00	0,8573	51.438,00	97.733,00	0,250	24.433,30	
-	-	-	70.000,00	0,8573	60.011,00	106.306,00	0,150	15.945,90	
-	-	-	60.000,00	0,8573	51.438,00	116.251,00	0,075	8.718,80	
-	-	-	70.000,00	0,8573	60.011,00	124.824,00	0,075	9.361,80	
-	-	-	80.000,00	0,8573	68.584,00	133.397,00	0,100	13.339,70	
-	-	-	-	-	-	-	1,000	94.089,50	

Coluna 3 = coluna 1 x coluna 2

Coluna 6 = coluna 4 x coluna 5

Coluna 7 = coluna 3 + coluna 6

Coluna 9 = coluna 7 x coluna 8

A esperança matemática do valor atual líquido será:

$$\bar{R}_{VAL} = 94.090 - 70.000 = \text{Cr\$ } 24.090,00$$

Se a empresa estima o valor residual do equipamento em Cr\$ 40.000,00, no final do primeiro ano, deve-se comparar os fluxos de caixa no curso do 2º período, atualizado no tempo t_1 , com o valor residual no tempo t_1 .

Como as rendas esperadas no curso do tempo t_2 dependem das rendas ocorridas entre t_1 , se efetuam os cálculos com base nas probabilidades condicionais:

Fluxo de caixa	1		Fluxo de caixa atualizado (t_1)	Probabilidade condicional $P(2/1)$	Esperança matemática dos fluxos de caixa	
	(1,08) ⁻¹					
1	2	3	4	5		
20.000	0,9259	18.518,00	0,30	5.555,40		
30.000	0,9259	27.777,00	0,40	11.110,80		
40.000	0,9259	37.036,00	0,30	<u>11.110,80</u>	<u>27.777,00</u>	
50.000	0,9259	46.295,00	0,20	9.259,00		
60.000	0,9259	55.554,00	0,50	27.777,00		
70.000	0,9259	64.813,00	0,30	<u>19.443,90</u>	<u>56.479,90</u>	
60.000	0,9259	55.554,00	0,30	16.666,20		
70.000	0,9259	64.813,00	0,30	19.443,90		
80.000	0,9259	74.072,00	0,40	<u>29.628,80</u>	<u>65.739,00</u>	

A esperança matemática no fim do segundo período será de:

Cr\$ 27.777,00

Cr\$ 56.479,90

Cr\$ 65.739,00

O valor residual, Cr\$ 40.000,00, previsto para o final do 1º período, é maior que a menor das rendas previstas, Cr\$ 27.777,00.

Vamos supor que os fluxos de caixa obtidos no final do primeiro ano atinjam apenas Cr\$ 30.000,00. Neste caso a solução do problema consiste em desinvestir e recuperar os Cr\$ 40.000,00 do valor residual, em lugar de continuar a exploração com esse equipamento.

É conveniente integrar essa possibilidade no processo de decisão de modo a melhorar a esperança matemática do valor atual líquido do projeto e diminuir o seu desvio padrão, ou seja, o risco. Para isso, substituímos na análise anterior o valor residual de Cr\$ 40.000,00 no ramal 1 dos fluxos de caixa atualizados, os demais cálculos são os mesmos.

Fluxo de caixa	$\frac{1}{(1,08)^1}$	Fluxo de caixa atualizado	$\frac{1}{(1,08)^2}$	Fluxo de caixa atualizado	Valor atual dos fluxos de caixa	P(1,2)	Esperança Matemática
70.000*	0,9259	64.813	-	-	64.813	0,250**	16.203,30
			0,8573	42.865	89.160	0,100	8.916,00
50.000	0,9259	46.295	0,8573	51.438	97.733	0,250	24.433,30
			0,8573	60.011	106.306	0,150	15.945,90
			0,8573	51.438	116.251	0,075	8.713,80
70.000	0,9259	64.813	0,8573	60.011	124.824	0,075	9.361,80
			0,8573	68.584	133.397	0,100	13.339,70
							96.918,80

$$70.000^* = (\text{Fluxo de caixa A } T_1) + (\text{Valor residual}) = 30.000 + 40.000$$

$$** \text{ Probabilidade } P(1,2)' = 0,075 + 0,100 + 0,075 = 0,250$$

A esperança matemática do valor atual líquido será dada por:

$$\bar{R}_{VAL} = 96.919 - 70.000 = \text{Cr\$ } 26.919,00$$

- Cálculo do desvio padrão do valor atual líquido levando em conta o valor residual do investimento ao tempo t_1

$$\sigma_{VAL} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\text{VAL}_j - \bar{R}_{VAL})^2 \cdot P_j}$$

σ_{VAL} = desvio padrão

VAL_j = Valor atual líquido de cada uma das 9 séries de fluxo de caixa líquidos. É obtido subtraindo o capital investido, Cr\$ 70.000,00, do valor atual dos fluxos de caixa da série correspondente.

P_j = Probabilidade de ocorrência de cada uma das 9 séries

$$\begin{aligned} \sigma_{VAL} &= \left[(-5.187 - 26.919)^2 0,250 + (19.160 - 26.919)^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times 0,100 + \dots + (63.397 - 26.919)^2 0,100 \right]^{1/2} = \\ &= 22.290 \end{aligned}$$

Em resumo, temos:

Itens	Sem valor residual	Com valor residual em t_1
\bar{R}_{VAL}	Cr\$ 24.090,00	Cr\$ 26.919,00
σ_{VAL}	26.710	22.290

A consideração do valor residual no processo de evolução de um investimento arriscado tende a:

- aumentar a esperança do valor atual líquido do projeto
- diminuir o desvio padrão do valor atual líquido

A análise apresentada permite-nos uma avaliação mais completa da desejabilidade do projeto de investimento; nos dá uma noção de decisão sequencial. No presente caso, a escolha do desenvolvimento e continuação da exploração é feita à luz dos resultados obtidos no primeiro ano e em função das perspectivas prováveis correspondentes.

O recurso das probabilidades condicionais facilita a resolução dos problemas surgidos quando os fluxos de caixa de períodos sucessivos de um investimento apresentam entre eles um certo grau de dependência. Entretanto, determinadas situações exigem a utilização de técnicas de simulação.

7.11 - A incerteza e os critérios dos jogos

Para analisar os principais critérios da teoria dos jogos utilizaremos o seguinte problema: uma empresa produtora de bens de grande consumo, ocupa 28% do mercado, contra 47% e 20% de seus dois principais concorrentes. 5% do mercado é ocupado por uma outra empresa de concorrência não significativa.

Vamos supor que a empresa deseje aumentar a sua participação no mercado que, atualmente, é de apenas 28%. Para tanto ela está disposta a investir Cr\$ 200.000,00 em investimento de expansão. São lhe apresentadas quatro alternativas de investimento:

- a) lançar um novo produto;
- b) lançar uma campanha publicitária para produtos novos;
- c) lançar uma campanha de promoção de vendas em toda gama de produtos existentes;

d) praticar uma política de baixa de preços para os produtos existentes.

Devemos considerar que as empresas concorrentes já ocupam determinados setores do mercado consumidor e, portanto, é de se esperar que um aumento da participação de qualquer uma delas, implica na perda de mercado de pelo menos uma das outras empresas concorrentes. Consequência lógica: haverá reação da empresa à concorrência. Esta reação poderá ser:

- a) rigorosa e agressiva;
- b) sem agressividade;
- c) nula (sem reação) ou fraca

Vamos supor que um estudo do mercado tenha revelado os seguintes resultados à reação da concorrência:

CONJUNTURA ESTRATÉGIAS	Reação rigorosa e agressiva (forte)	Reação sem agressividade (média)	Nula ou fraca reação da concorrência
Produto novo	25%	34%	40%
Campanha publicitária	30%	32%	37%
Promoção de vendas	27%	31%	35%
Política baixa dos preços	29%	32%	36%

As quatro estratégias constituem o investimento e portanto podem ser avaliadas monetariamente. A matriz de decisão abaixo apresenta os resultados financeiros de cada uma destas ações, em cruzeiros:

CONJUNTURA ESTRATÉGIA	EVOLUÇÃO DO LUCRO		
	Reação rigo- rosa e agres- siva (forte)	Reação sem agressivida- de (média)	Reação nula ou fraca da concorrência
Lançamento produto novo	-600.000,00	400.000,00	1.100.000,00
Campanha Publicitária	0	300.000,00	900,00
Promoção de vendas	-400.000,00	200.000,00	700.000,00
Política da baixa de preços	-100.000,00	300.000,00	800.000,00

Para esclarecer a decisão, utilizaremos os seguintes critérios:

7.11.1 - Critério do Maximin (Abraham Wald):

Para cada uma das estratégias, procura-se aquela que nos dá o mínimo lucro:

1. Lançamento produto novo : - Cr\$ 600.000,00
2. Campanha publicitária : 0
3. Promoção de vendas : - Cr\$ 400.000,00
4. Política da baixa de preços : - Cr\$ 100.000,00

Devemos escolher o MAXIMUM dos MINIMOS, MAXIMIN, ou seja, a ação que nos permite obter dos lucros mínimos, o mais elevado. Neste caso deve-se escolher a CAMPANHA PUBLICITÁRIA

7.11.2 - Critério do MINIMAX

Deve-se escolher, por este critério, a ação que nos dá o mínimo dos lucros máximos:

- Lançamento produto novo : Cr\$ 1.100.000,00

Campanha publicitária	:	Cr\$ 900.000,00
Promoção de vendas	:	Cr\$ 700.000,00
Política de baixa dos preços	:	Cr\$ 800.000,00

A ação que permite obter o lucro mínimo dos máximos e a da promoção de vendas

7.11.3 - Critério de MAXIMAX

Deve-se escolher a estratégia que permite obter o lucro máximo, o mais elevado dos máximos. Toda alternativa tem um lucro máximo: a alternativa de maior maximum deve ser a preferida. Logo, teremos:

Lançamento produto novos	:	Cr\$ 1.100.000,00
Campanha publicitária	:	Cr\$ 900.000,00
Promoção de vendas	:	Cr\$ 700.000,00
Política de baixa dos preços	:	Cr\$ 800.000,00

Pelo critério de Maximax a alternativa (estratégia) a ser escolhida é a do lançamento de produtos novos.

7.11.4 - Critério de Leonid Hurwicz

Este critério leva em consideração as possibilidades de ganho e de perda. Suponhamos que um investidor, relativamente otimista atribua ao lucro máximo um coeficiente igual a $\frac{2}{3}$ e ao lucro mínimo um coeficiente igual a $\frac{1}{3}$.

Para cada uma das estratégias será efetuado os cálculos da média ponderada:

a) Lançamento de um produto novo

$$- 600.000 \times \frac{1}{3} + 1.100.000 \times \frac{2}{3} = \text{Cr\$ } 533.000,00$$

b) Campanha publicitária

$$0 \times \frac{1}{3} + 900.000 \times \frac{2}{3} = \text{Cr\$ } 600.000,00$$

c) Promoção de vendas:

$$- 400.000 \times \frac{1}{3} + 700.000 \times \frac{2}{3} = \text{Cr\$ } 333.000,00$$

d) Política de baixa dos preços:

$$- 100.000 \times \frac{1}{3} + 800.000 \times \frac{2}{3} = \text{Cr\$ } 500.000,00$$

O critério de Hurwicz retém a decisão que permite obter uma média ponderada máxima e, neste caso, a campanha publicitária deve ser retida, isto é escolhida.

7.11.5 - Critério do MINIMAX (SAVAGE)

A estratégia que deve merecer a preferência é aquela que minimiza o valor máximo. Para cada decisão, é necessário determinar, por meio dos lucros, o ganho máximo e depois efetuar a diferença entre o valor e os lucros esperados.

Para a condição reação rigorosa e agressiva (forte) à concorrência, temos:

Lançamento de novo produto	:	Cr\$ 600.000,00
Campanha publicitária	:	0
Promoção de vendas	:	Cr\$ 400.000,00
Política de baixa dos preços	:	Cr\$ 100.000,00

O lucro máximo é então igual a zero; as operações para encontrar esses valores para essas condições são:

$$\begin{aligned}
 - 600.000 - 0 &= - 600.000 \\
 0 - 0 &= 0 \\
 - 400.000 - 0 &= - 400.000 \\
 - 100.000 - 0 &= - 100.000
 \end{aligned}$$

O processo deverá ser repetido para as demais condições, logo, teremos:

REAÇÃO MÉDIA		REAÇÃO FRACA	
400.000	0	1.100.000	0
300.000	- 100.000	900.000	- 200.000
200.000	- 200.000	700.000	- 400.000
300.000	- 100.000	800.000	- 300.000

Os resultados obtidos são tabelados novamente em uma tabela que é denominada MATRIZ DE VALORES.

CONJUNTURA ESTRATÉGIA	Reação rigo- rosa e agres- siva (forte)	Reação pou- co agres- siva (média)	Reação nula o fraca da concorrencia
Lançamento produto novo	- 600.000	0	0
Campanha Publicitária	0	- 100.000	- 200.000
Promoção de vendas	- 400.000	- 200.000	- 400.000
Política de baixa dos preços	- 100.000	- 100.000	- 300.000

Para cada ação, será determinado o máximo:

AÇÃO DA EMPRESA	VALOR MÁXIMO
Produto novo	600.000
Publicidade	200.000
Promoção de vendas	400.000
Política de baixa dos preços	300.000

A estratégia a ser adotada pela empresa é aquela que apresenta o mínimo dos máximos, ou seja, a CAMPANHA PUBLICITÁRIA.

7.11.6 - Critério de Laplace

O critério de Laplace considera que as diferentes condições têm a mesma probabilidade de ocorrência; calcula-se, para cada ação da empresa, a média aritmética dos lucros esperados e escolhe-se a decisão que oferecer o valor mais elevado:

a) Lançamento de um novo produto:

$$\frac{-600.000 + 400.000 + 1.100.000}{3} = \text{Cr\$ } 300.000,00$$

b) Campanha Publicitária:

$$\frac{0 + 300.000 + 900.000}{3} = \text{Cr\$ } 400.000,00$$

c) Promoção de vendas:

$$\frac{-400.000 + 200.000 + 700.000}{3} = \text{Cr\$ } 167.000,00$$

ministrador tomará a decisão de escolha da melhor estratégia em bases científicas. Teremos que considerar, todavia, a influência de diversos outros fatores sobre a tomada de decisão; estes fatores poderão até mesmo modificar ou alterar a escolha da melhor estratégia indicada pelos diferentes métodos de decisão. Caberá ao responsável direto pela tomada de decisão, analisar paralelamente todos estes fatores e, então, estabelecer hipóteses relativas às diversas estratégias apresentadas ou sugeridas, estudando as possíveis reações do meio no qual a firma se encontra, ou onde os investimentos serão aplicados.

8) CONSIDERAÇÕES FINAIS

Das análises, critérios e formas descritas em nosso trabalho, podemos concluir que em todo e qualquer processo decisório em condições de risco e incerteza, devemos levar em conta, basicamente, os seguintes fatores:

a) Taxa mínima de atratividade

Absolutamente subjetiva porquanto depende do grau de formação do investidor.

b) Taxa de retorno e valor atual

Diretamente relacionadas com a taxa mínima de atratividade.

c) Cálculo de probabilidades

Que fornece ao investidor maior ou menor segurança pelo seu maior ou menor grau de ocorrência.

d) Teoria da preferência

Que nos permite classificar os investidores segundo suas preferências no processo de inversão.

9) BIBLIOGRAFIA

1. Financial, Management and Policy
Horne, James C Van
Prentice-Hall, Inc.
2. Principles of Engineering Economy
Grant, Eugene L.
The Ronald Press Co.
3. Analysis of Projects for Economic Growth
Solomon, Morris
Praeger Publishers, Inc.
4. Introductory Probability and Statistical Applications
Meyer, Paul L.
Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
5. Schaum's Outline of Theory and Problems of Statistics
Spiegel, Murray, R.
McGraw Hill, Inc.
6. Projetos Industriais
Caldas, Fernando/Pando, Felix
APEC
7. Elaboração e análise de Projetos
Simonsen, Mario Henrique
Flanzer, Henrique
Sugestões Literárias S/A
8. Engenharia Econômica
Hess, Geraldo
Forum Editora Ltda.
9. Systems analysis for business and industrial problem solving
Optner, Stanford L.



I N D I C E

	Pág.
I - INTRODUÇÃO	1
II- ETAPAS PROGRAMADAS	2
1 - Detalhamento dos objetivos	3
2 - Formulação do problema	12
3 - Equações Fundamentais	13
4 - Métodos de decisão	26
5 - Aplicações	42
6 - Considerações finais sobre os métodos de valor atual, taxa de retorno e taxa de mínima atratividade	61
7 - Teoria da preferência	63
8 - Considerações Finais	122
9 - Bibliografia	123